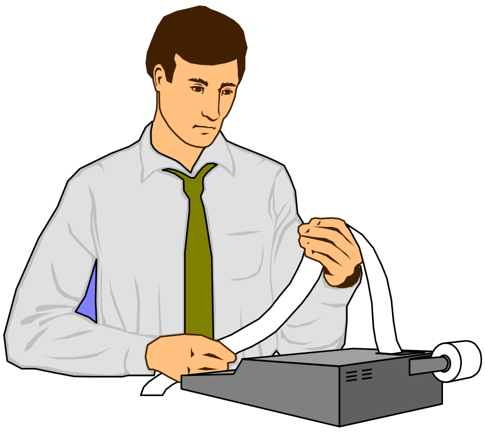
МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ



⊗ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ⊗

Министерство образования Российской Федерации
ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Методические указания
по выполнению индивидуального задания
для студентов дневного отделения
специальностей 060400, 060500, 060800

Тамбов
Издательство ТГТУ
2001

ББК У. В6я73-5

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ им. Державина
С. М. Дзюба,
Кандидат технических наук, доцент
Г. Г. Серебренников

Составитель
С. М. Архипенков

Математика в экономике. Метод. указ. / Сост.: С. М. Архипенков. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 20 с.

Даны методические указания по выполнению индивидуального задания для студентов дневного отделения специальностей 060400, 060500, 060800.

ББК У. В6я73-5

ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием рыночных отношений хозяйственную деятельность в нашей стране приходится вести в условиях нарастающей неопределенности ситуации и изменчивости в экономической среде [1]. Это означает, что возникает неясность в получении ожидаемого конечного результата, следовательно, возрастает риск, опасность неудачи, непредвиденных потерь и т.д.

В деятельности предприятия обычно имеют место три вида рисков: производственный, коммерческий и финансовый.

Производственный риск обусловлен производством продукции (товаров, услуг), и осуществлением любых видов производственной деятельности. Для снижения степени производственных рисков на предприятии в планировании производственной деятельности предприятия целесообразно использование стохастических экономико-математических моделей, в частности применение стохастических моделей оптимизации годового плана производства на предприятии, помогающих снизить риск невыполнения годового плана.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ГОДОВОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Детерминированная модель для составления годового плана производства на предприятиях с дискретным типом производственных процессов в достаточно общем виде может быть записана следующим образом [2].

Модель I

Найти значения неизвестных величин X_1, X_2, …, $X_п$, при которых критериальная математическая функция достигает максимума:

$$Ц^с = \sum_{j=1}^{n} Ц_j^с X_j \to \max$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{с} X_j \le\le F_i; \qquad i = \overline{1,m}; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{\lambda j} X_j \le R_\lambda, \qquad \lambda = 1,2...,\lambda_o; \tag{2}$$

$$V_j \le X_j \le \overline{V}_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

где n – число видов продукции, которые предполагается изготовлять на данном предприятии в планируемом году; $t_{ij}^{с}$ – затраты труда в станко-час., приходящиеся на единицу продукции j-го вида при изготовлении ее на всех операциях, которые выполняются на оборудовании i-й группы $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$; (при использовании этих моделей в анализе хозяйственной деятельности в качестве этих затрат будут использоваться фактические затраты в анализируемом периоде времени; при использовании же их в составлении планов в качестве этих затрат будут выступать нормативные или плановые затраты); m – число групп взаимозаменяемого технологического оборудования в основных цехах предприятия, которые целесообразно учитывать в решаемой задаче; F_i – годовой (расчетный) действительный фонд рабочего времени всего оборудования i-й группы, вычисленный с учетом плановых коэффициентов выполнения норм выработки рабочими и снижения трудоемкости продукции за счет оргтехмероприятий, которые будут проводиться в планируемом году. Эти величины необходимо пояснить подробнее.

При расчете значений этих величин требуется иногда учитывать необходимые резервы времени работы оборудования, зафиксированные для освоения производства новой продукции в планируемом году.

При расчете этих величин и их использовании в моделях предполагается также, что все оборудование, участвующее в модели, в планируемом периоде будет полностью обеспечено трудовыми и материальными ресурсами. В противном же случае соответствующие величины F_i должны быть соответственно уменьшены; если же в основных цехах предприятия в планируемом году будут эксплуатироваться поточные линии и предметно-замкнутые участки производства, то в качестве отдельной группы оборудования в модели должна участвовать поточная линия или предметно-замкнутый участок в целом, а не отдельные группы оборудования, принадлежащие им).

$t_{\lambda j}$ – затраты производственных ресурсов λ-го вида, связанные с изготовлением одного изделия j-го вида в основных цехах предприятия;

λ_0 – число всех ограниченных ресурсов производства, учитываемых в этой задаче;

R_λ – верхняя граница расходов λ-го вида ресурса на производство всей продукции на данном предприятии в планируемом году;

$Ц_j^с$ – сопоставимая оптовая цена одного изделия j-го вида;

$V_j, \overline{V}_j$ – соответственно нижняя и верхняя границы производства изделий j-го вида в планируемом году на данном предприятии;

X_j – объем производства изделий j-го вида на данном предприятии в планируемом году (переменная величина).

Предположим, далее, что эта задача имеет хотя бы одно допустимое решение (в противном же случае необходимо будет увеличить некоторые из величин F_i и R_j, так чтобы при новых значениях эта задача уже имела бы допустимые решения).

Отметим, что система детерминированных оптимизационных моделей планирования обладает недостатком. А именно: с их помощью можно формировать только ненадежные плановые решения с вероятностью выполнения их в заданные сроки близкой к нулю. То есть риск невыполнения их будет весьма большим из-за случайных отклонений фактических расходов производственных ресурсов от их нормативных значений и в силу других случайных возмущений.

Для решения такого рода задач в настоящее время имеются эффективные количественные методы (в частности стохастические однокритериальные и многокритериальные математические модели) [2].

При построении вышеназванной модели I полагалось. Что все исходные величины являются неслучайными достоверными величинами. Однако на практике это бывает весьма редко. Поэтому, далее положим, что фактические затраты рабочего времени в станко-час, будут случайными величинами, которые могут значительно отличаться от их нормативных значений (в этих задачах обычно их средних значений). То есть полагаем, что $t_{ij}^{с}$ являются случайными величинами при всех значениях индексов i, j.

Пусть $\sigma_{ij}^{с}$ – дисперсия случайной величины $t_{ij}^{с}$ [3]. В силу того, что $t_{ij}^{с}$ являются случайными, то при реализации выполнения оптимального плана (полученного с помощью приведенной выше модели I) может потребоваться большой фонд рабочего времени на каждой i-й группе оборудования, чем имеющийся, характеризуемый соответствующей величиной F_i.

В таких случаях придется вводить сверхурочные работы, либо иметь резервное оборудование (обеспеченное трудовыми, материальными и финансовыми ресурсами), либо применять другие мероприятия, либо план своевременно не выполнится.

Для формирования не только оптимального, но и достаточно надежного плана производства можно использовать стохастические модели [2, 4]. В частности стохастическая модель задачи планирования производства, представленная в виде стохастической модели со смешанными условиями будет такой:

Модель II

Найти $X_1, X_2, \ldots X_n$, при которых

$$Ц^с = Ц_1^с X_1 + Ц_2^с X_2 + \ldots + Ц_n^с X_n \to \max$$

при условиях:

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{c} x_j \le F_i\right) \ge P_i\,, \quad i = \overline{1,m}\,; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{\lambda j} x_j \le R_\lambda\,, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, \lambda_0; \qquad (2)$$

$$V_j \le X_j \le \overline{V_j}\,, \quad j = \overline{1,n}\,, \qquad (3)$$

где P_i – вероятность выполнения условия (I) при данном i. Величины P_i должны быть заданными. Значения их чаще всего будут принадлежать интервалу (0,8; 0,95), который соответствует практически достоверным событиям.

Условие (I) означает, что при любом i вероятность выполнения неравенства $\sum_j t_{ij}^{с} X_j \le F_i$ должна быть на меньше величины P_i. То есть в модели II только условие (I) задано в вероятностной форме. Остальные же неравенства представлены в обычной жесткой форме. Эту модель II со смешанными условиями можно преобразовать в следующую равноценную ей детерминированную модель III.

Решения модели III будут одновременно допустимыми решениями для модели II.

Модель III

Найти значения величин $X_1, X_2, \ldots X_n$, при которых критериальная функция

$$Ц^с = Ц_1^с X_1 + Ц_2^с X_2 + \ldots + Ц_n^с X_n \to \max$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{t}_{ij}^{\,c} X_j \le F_i - \sqrt{2}\,\Phi^{-1}(P_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 X_j^2}\,; i = \overline{1,m}\,; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{\lambda j} X_j \le R_\lambda, \lambda = \overline{1,\lambda_0}\,; \qquad (2)$$

$$V_j \le X_j \le \overline{V}_j\,, j = \overline{1,n}\,, \qquad (3)$$

где $\bar{t}_{ij}^{\,c}$ – среднее значение случайной величины $t_{ij}^{c}\,(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$; $\Phi(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$ – ненормированная функция Лапласа [3]; $\Phi^{-1}(P_i)$ – обратная от этой функции.

При решении таких моделей, как правило, в качестве нормативных значений t_{ij}^{c} будут использоваться в какой-то мере их средние значения. Тогда ясно, что чем больше фактические затраты рабочего времени в станко-час. будут при выполнении годового плана предприятия превосходить свои средние значения, тем большего размера потребуется годовой фонд рабочего времени на каждой i-й группе оборудования, который может значительно превосходить соответствующую величину F_i.

Следовательно, либо заранее надо предусмотреть необходимой величины резерв фонда рабочего времени на каждой группе оборудования или применить другое какое-либо мероприятие либо план в заданные сроки не будет выполнен или даже вообще не будет выполнен никогда.

В выше описанной модели III такие резервы фонда рабочего времени для соответствующих групп оборудования не явно предусматриваются с помощью введения в правую часть неравенства (I) следующего выражения

$$\sqrt{2}\,\Phi^{-1}(P_i)\sqrt{\sigma_{i1}^2 X_1^2 + \sigma_{i2}^2 X_2^2 + \ldots + \sigma_{in}^2 X_n^2}\;; \qquad i = \overline{1,m}\,.$$

С помощью решения этой модели III можно сформировать такую производственную программу предприятия, которая обеспечит выполнение условия (I) с заданными вероятностями. Вероятность же выполнения всей группы условий (I) одновременно определяется произведением: $P_1 P_{2\ldots} P_m$.

Далее, как известно, необходимый резервный фонд рабочего времени на любой *i*-й группе оборудования будет определяться отклонениями величины $t_{ij}^{\text{с}}$ от своего среднего значения $\overline{t_{ij}^{\text{с}}}$ только в большую сторону. Поэтому в качестве вычитаемого в правой части условия (I) надо взять вместо выражения

$$\Phi^{-1}(P_i)\sqrt{2}\sqrt{\sigma_{i1}^2 X_1^2 + \sigma_{i2}^2 X_2^2 + \ldots + \sigma_{in}^2 X_n^2}\ ,$$

другое выражение

$$\sqrt{2}\Phi^{-1}(P_i)\sqrt{\Big(\sum_j \sigma_{ij}^2 X_j^2\Big)/2} = \Phi^{-1}(P_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 X_j^2}\ .$$

С учетом вышеизложенного условие (I) модели III целесообразно записать так

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{t}_{ij}^{c} X_j \le F_i - \Phi^{-1}(P_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 X_j^2}\ , \qquad i = \overline{1,m}\,.$$

Функция Лапласа $\Phi(x)$ при различных значениях своего аргумента x принимает следующие значения [3]:

$\Phi(0{,}1) = 0{,}11$; $\Phi(0{,}8) = 0{,}74$; $\Phi(1) = 0{,}84$; $\Phi(2) = 0{,}99$; $\Phi(3) = 1$.

Положим, далее, что все $P_i = 1$, $i = \overline{1,m}$. Тогда $\Phi^{-1}(P_i) = 3$ при всех i.

Таким образом, условие (I) будет иметь формулу

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{t}_{ij}^{c} X_j \le F_i - 3\sqrt{\sigma_{i1}^2 X_1^2 + \sigma_{i2}^2 X_2^2 + \ldots + \sigma_{in}^2 X_n^2}\ ; \qquad i = \overline{1,m}\,.$$

Известно также, что выполняются следующие условия:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{t}_{ij}^{c} X_j \le F_i - 3\sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 \overline{V}_j^2} \le F_i - 3\sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 X_j^2}\ ; \qquad i = \overline{1,m}\,.$$

С учетом вышеизложенного модель III можно преобразовать в равноценную (при определенных условиях) ей модель IV.

Модель IV

Найти значения величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, при которых

$$Ц^{\text{с}} = Ц_1^{\text{с}} X_1 + Ц_2^{\text{с}} X_2 + \ldots + Ц_n^{\text{с}} X_n \to \max$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{t}_{ij}^{\text{c}} X_j \le F_i - 3\sqrt{\sigma_{i1}^2 \overline{V}_1^2 + \sigma_{i2}^2 \overline{V}_2^2 + \ldots + \sigma_{in}^2 \overline{V}_n^2}\ ; \qquad i = \overline{1,m}\,; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{\lambda j} X_j \le R_\lambda\ ,\ \lambda = 1,2,\ldots,\lambda_0\,; \tag{2}$$

$$V_j \le X_j \le \overline{V_j}\ , \qquad j = \overline{1,n}\,; \tag{3}$$

Примечание. С помощью моделей III и IV можно решить следующего типа задачи планирования производства на предприятиях. А именно: пусть каким-либо способом сформирован какой-либо вариант годовой производственной программы предприятия, подлежащей выполнению в рассматриваемом планируемом году. И пусть $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0$ – объемы выпуска изделий для этого варианта производственной программы. Тогда модель III (или IV) можно будет успешно использовать для оценки надежности выполнения этого варианта годового плана производства. В этом случае требуется положить $X_j = X_j^0 (j = \overline{1,n})$ в модели III (или модели IV) и проверить выполнимость условий соответствующей модели при заданных численных значениях величин $P_i (i = \overline{1,m})$.

Положим теперь, что все $P_i = 0{,}97$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Тогда условие (I) модели III будет таким

$$\sum_{j=1}^{n} \overset{-\text{c}}{t}_{ij} X_j \le F_i - 1{,}5\sqrt{\sigma_{i1}^2 X_1^2 + \ldots + \sigma_{in}^2 X_n^2}\ ; \qquad i = \overline{1,m}\,.$$

Положим, теперь, что все $P_i = 0{,}74$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Тогда условие (I) модели III будет таким

$$\sum_{j=1}^{n} \overset{-\text{c}}{t}_{ij} X_j \le F_i - 0{,}8\sqrt{\sigma_{i1}^2 X_j^2 + \ldots + \sigma_{in}^2 X_n^2}\ ; \quad i = \overline{1,m}\,.$$

Вышеописанные модели III и IV являются однокритериальными. Однако решение задачи планирования по одному какому-либо даже очень важному показателю (критерию) часто может поставить исполнителя в трудное положение, так как при этом остальные плановые показатели могут значительно ухудшится. Поэтому в таких случаях целесообразно выявить несколько вариантов плановых решений, каждый из которых является наилучшим по одному какому-либо критерию. Такие варианты плановых решений называют субоптимальными по соответствующим критериям.

Затем же необходимо будет сформировать одно наилучшее компромиссное решение, в котором достигалось бы наименьшее возможное ухудшение субоптимальных значений всех критериев решаемой задачи планирования [4 – 8].

Модель III в многокритериальной форме можно представить следующим образом (модель А).

Модель А

Найти $X_1, X_2, \ldots, X_n$, при которых следующие критериальные функции:

1) $\text{Ц}^\text{c} = \text{Ц}_1^\text{c} X_1 + \text{Ц}_2^\text{c} X_2 + \ldots + \text{Ц}_n^\text{c} X_n \to \max;$

2) $\text{Ц}^\text{пл} = \text{Ц}_1^\text{пл} X_1 + \text{Ц}_2^\text{пл} X_2 + \ldots + \text{Ц}_n^\text{пл} X_n \to \max;$

3) $\text{З} = \text{З}_1 X_1 + \text{З}_2 X_2 + \ldots + \text{З}_n X_n \to \min.$

достигают своих наилучших компромиссных значений при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} \overset{-\text{c}}{t}_{ij} X_j \le F_i - \Phi^{-1}(P_i)\sqrt{\sigma_{i1}^2 X_1^2 + \ldots + \sigma_{in}^2 X_n^2}\ ; \qquad i = \overline{1,m}\,; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{\lambda j} X_j \le R_\lambda, \lambda = \overline{1,\lambda_0}\ ; \tag{2}$$

$$V_j \le X_j \le \overline{V_j}, j = \overline{1,n}\ ; \tag{3}$$

где $\text{Ц}_j^\text{пл}$ – принятая в плане оптовая цена изделия j-го вида; З_j – затраты некоторого весьма ценного ресурса на единицу изделия j-го вида.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Пусть исходные данные для примера принимают следующие значения: $n = 3$; $m = 2$; $\lambda_0 = 2$;

Величины $\bar{t}^{\,c}_{ij}$: $\begin{cases} \bar{t}^{\,c}_{11} = 2; \bar{t}^{\,c}_{12} = 3; \bar{t}^{\,c}_{13} = 1; \\ \bar{t}^{\,c}_{21} = 4; \bar{t}^{\,c}_{22} = 1; \bar{t}^{\,c}_{23} = 3. \end{cases}$

Величины $t_{\lambda j}$: $\begin{cases} t_{11} = 5; t_{12} = 4; t_{13} = 3; \\ t_{21} = 2; t_{22} = 4; t_{23} = 5. \end{cases}$

Величины F_i: $F_1 = 41$; $F_2 = 49$;

Величины σ^2_{ij}: $\begin{cases} \sigma^2_{11} = 0{,}1; \sigma^2_{12} = 0{,}2; \sigma^2_{13} = 0{,}15; \\ \sigma^2_{21} = 0{,}05; \sigma^2_{22} = 0{,}15; \sigma^2_{23} = 0{,}15; \end{cases}$

Величины R_λ: $R_1 = 60$; $R_2 = 55$;

Величины V_j: $V_1 = 1$; $V_2 = 0$; $V_3 = 1$;

Величины $\overline{V}_j$: $\overline{V}_1 = 10; \overline{V}_2 = 10; \overline{V}_3 = 10;$

Величины $Ц^{с}_j$: $Ц^{с}_1 = 10; Ц^{с}_2 = 15; Ц^{с}_3 = 5;$

Величины $Ц^{пл}_j$: $Ц^{пл}_1 = 15; Ц^{пл}_2 = 18; Ц^{пл}_3 = 6;$

Величины $З_j$: $З_1 = 50$; $З_2 = 20$; $З_3 = 15$.

Далее, с этими исходными величинами построим числовую модель типа модели А. Она будет иметь следующий вид.

Найти значения величин X_1, X_2, X_3, при которых следующие критериальные функции:

$$Ц^{с} = 10X_1 + 15X_2 + 5X_3 \to \max;$$

$$Ц^{пл} = 15X_1 + 18X_2 + 6X_3 \to \max;$$

$$З = 50X_1 + 20X_2 + 15X_3 \to \min$$

достигают своих наилучших компромиссных значений при условиях:

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \le 41 - 3\sqrt{0{,}1X_1^2 + 0{,}2X_2^2 + 0{,}15X_3^2};$$

$$4X_1 + X_2 + 3X_3 \le 49 - 3\sqrt{0{,}05X_1^2 + 0{,}15X_2^2 + 0{,}15X_3^2};$$

$$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \le 60;$$

$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \le 55;$$

$$1 \le X_1 \le 10;\ 0 \le X_2 \le 10;\ 1 \le X_3 \le 10.$$

Условие (I) этого примера записано для того случая, когда все P_i =1 Когда же все P_i =0,74, то условие (I) будет иметь вид:

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \le 41 - 0{,}8\sqrt{0{,}1X_1^2 + 0{,}2X_2^2 + 0{,}15X_3^2};$$

$$4X_1 + X_2 + 3X_3 \le 49 - 0{,}8\sqrt{0{,}05X_1^2 + 0{,}15X_2^2 + 0{,}15X_3^2}.$$

Пусть, далее, имеется несколько вариантов плановых решений по изготовлению всех трех видов изделий в планируемом году:

1) $X_1 = 5$; $X_2 = 5$; $X_3 = 5$;

2) $X_1 = 5$; $X_2 = 0$; $X_3 = 2$;

3) $X_1 = 2$; $X_2 = 10$; $X_3 = 1$;

4) $X_1 = 3$; $X_2 = 3$; $X_3 = 3$.

Выполним, далее, следующее.

1) Проверим допустимость этих решений при заданных значениях вероятностей P_i(i =1,2):

а) случай когда все P_i = 1 (i =1,2);

б) случай когда все P_i = 0,97 (i = 1,2);

в) случай когда все P_i = 0,74 (i =1,2).

В первом случае условие (1) будет иметь вид:

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \le 41 - 3\sqrt{0{,}1X_1^2 + 0{,}2X_2^2 + 0{,}15X_3^2};$$

$$4X_1 + X_2 + 3X_3 \le 49 - 3\sqrt{0{,}05X_1^2 + 0{,}15X_2^2 + 0{,}15X_3^2}.$$

Проверим на допустимость эту систему неравенств для всех четырех вариантов плановых решений:

Для I-го варианта имеем:

$$2\times 5+3\times 5+5\le 41-3\sqrt{\frac{25}{10}+0{,}2\times 25+0{,}15\times 25}=31;$$

или 30 < 31 (выполнится).

$$4\times 5+5+3\times 5\le 49-3\sqrt{0{,}05\times 25+0{,}15\times 25+0{,}15\times 25}=40{,}1\,;$$

или 40 < 40,1 (выполнится).

Следовательно, этот вариант плана является допустимым для I-го условия модели с вероятностью выполнения его $P = 1$.

Для 2-го варианта плана имеем:

$$2\times 5+0+2\le 41-3\sqrt{0{,}1\times 25+0{,}15\times 4}=35{,}7;$$

или 12< 35,7 (выполнится).

$$4\times 5+0+3\times 2\le 49-3\sqrt{0{,}05\times 25+0{,}15\times 4}=44{,}9;$$

или 26< 44,9 (выполнится).

Второй вариант плана тоже является допустимым для I-го условия модели с вероятностью выполнения этого условия $P = 1$.

Для 3-го варианта плана имеем

$$2\times 2+3\times 10+1\le 41-3\sqrt{0{,}1\times 4+0{,}2\times 100+0{,}15}=27{,}4;$$

или $35\le 27{,}4$ (не выполнится).

Следовательно, 3-й вариант плана является недопустимым для I-го условия этой модели с вероятностью выполнения его $P = 1$.

В этом случае условие (I) не выполнится для I-й группы оборудования.

Для 4-го варианта плана имеем:

$$2\times 3+3\times 3+3\le 41-3\sqrt{0{,}1\times 9+0{,}2\times 9+0{,}15\times 9}=34{,}97;$$

$$4\times 3+3+3\times 3\le 49-3\sqrt{0{,}05\times 9+0{,}15\times 9+0{,}15\times 9}=43{,}7$$

или 18< 34,97; 24< 43,7 (выполнятся).

Следовательно, 4-й вариант является допустимым для условия (I) модели с вероятностью выполнения его $P = 1$. Таким образом, 1-й, 2-й, 4-й варианты являются допустимыми для условия (I) модели с вероятностью выполнения его равной 1.

Когда же все $P_i = 0{,}97$ вероятность выполнения условия (I) модели будет равной $P = 0{,}97\times 0{,}97\approx 0{,}94$.

Само условие (I) в этом случае будет иметь вид:

$$2X_1+3X_2+X_3\le 41-1{,}5\sqrt{0{,}1X_1^2+0{,}2X_2^2+0{,}15X_3^2};$$

$$4X_1+X_2+3X_3\le 49-1{,}5\sqrt{0{,}05X_1^2+0{,}15X_2^2+0{,}15X_3^2}.$$

Для 3-го варианта плана это условие (I) будет выглядеть так:

$$2\times 2+3\times 10+1\le 41-1{,}5\sqrt{0{,}1\times 4+0{,}2\times 100+0{,}15}=34{,}2;$$

$$4\times 2+10+3\le 49-1{,}5\sqrt{0{,}05\times 4+0{,}15\times 100+0{,}15}=43{,}1$$

или $35\le 34{,}2;\ \ 21\le 43{,}1$ (не выполнятся).

В этом случае 3-й вариант плана тоже будет недопустимым для условия (I) модели с вероятностью выполнения его равной 0,94.

В случае же когда все $P_i = 0{,}74$ вероятность выполнения условия (I) модели будет равной $P = 0{,}74\times 0{,}74=0{,}55$

Само условие (I) в этом случае будет иметь вид:

$$2X_1+3X_2+X_3\le 41-0{,}8\sqrt{0{,}1X_1^2+0{,}2X_2^2+0{,}15X_3^2};$$

$$4X_1+X_2+3X_3\le 49-0{,}8\sqrt{0{,}05X_1^2+0{,}15X_2^2+0{,}15X_3^2}.$$

Для 3-го варианта плана это условие (I) будет иметь вид:

$$2\times 2+3\times 10+1\le 41-0{,}8\sqrt{0{,}1\times 4+0{,}2\times 100+0{,}15}=37{,}4;$$

$$4\times 2+10+3\le 49-0{,}8\sqrt{0{,}05\times 4+0{,}15\times 100+0{,}15}=45{,}8.$$

или 35 < 37,4; 21 < 45,8 (выполнятся).

Следовательно, 3-й вариант плана будет допустимым для условия (I) модели с вероятностью выполнения его равной 0,55.

Далее, проверим все четыре варианта плана на допустимость выполнения жестких условий этой модели (условий (2) и (3)),

а именно:

$$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \le 60;$$
$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \le 55;$$
$$1 \le X_1 \le 10;\ 0 \le X_2 \le 10;\ 1 \le X_3 \le 10.$$

Нетрудно, проверить, что все четыре варианта планов являются допустимыми для этих условий (2) и (3) модели.

Таким образом, 3-й вариант плана является допустимым в целом для нашей задачи планирования с вероятностью выполнения его равной 0,55.

Варианты же 1, 2 и 4 являются допустимыми в целом для задачи планирования с вероятностью выполнения их равной 1. Остальные же допустимые решения рассматриваемой задачи (кроме вышеприведенных четырех) полагаем по каким-либо признакам неприемлемыми для практики планирования и поэтому негодными для многокритериальной оценки. Это предположение делается только для сокращения вычислительных работ.

Далее, необходимо осуществить многокритериальную оценку этих достаточно хороших четырех вариантов плановых решений.

Для такой оценки вариантов планов целесообразно применить метод, который можно назвать методом равномерности снижения качества критериев [4, 6, 7]. Другие методы многокритериального выбора решений тоже можно применить. Однако этот метод математически наиболее сложный.

Сущность вышеназванного метода заключается в том, что оценка может быть получена за два этапа вычислений. Причем на I-м этапе определяются субоптимальные решения по каждому критерию задачи в отдельности.

Пусть $Ц^{с}_{\max}$, $Ц^{пл}_{\max}$, $З_{\min}$ – субоптимальные значения показателей оптимизации, используемых в модели А.

Тогда на 2-м этапе для отыскания оптимального компромиссного решения модели А необходимо будет решить следующую однокритериальную задачу.

Найти $X_1, \ldots, X_п$, Y, при которых

$$L = y \to \min$$

при условиях модели А и дополнительной системе условий:

$$C_1(Ц^{с}_{\max} - \sum_j Ц^{с}_j X_j) \le y;$$

$$C_2(Ц^{пл}_{\max} - \sum_j Ц^{пл}_j X_j) \le y;\ C_3(\sum_j З_j X_j - З_{\min}) \le y.$$

Здесь C_1, C_2, C_3 – коэффициенты, выражающие значимость для задачи соответствующих критериев.

Если же в роли величин C_1, C_2, C_3 будут:

$$C_1 = \frac{1}{Ц^{с}_{\max}};\ C_2 = \frac{1}{Ц^{пл}_{\max}};\ C_3 = \frac{1}{З\min},$$

то дополнительные условия будут выражать тот факт, что относительное ухудшение субоптимального значения каждого критерия не должно превосходить переменной величины у, которая в данной задаче является минимизируемой величиной.

Решение этой последней однокритериальной задачи позволит найти оптимальное компромиссное решение вышеприведенной многокритериальной модели. Однако в рассматриваемом примере нам не требуется делать многокритериальную оценку всех допустимых решений модели А. В данном примере необходимо осуществить многокритериальную оценку только четырем вышеназванным вариантам планов, наиболее приемлемых для практики с точки зрения человека, принимающего решение.

Рассмотрим, далее, таблицу чисел.

Таблица 1

Показатели / Варианты	$Ц^с$	$Ц^{пл}$	З	Р
1	150	195	425	1^*
2	60	87	280	1
3	175^*	216^*	315	0,55
4	90	117	255^*	1

где Р – вероятность выполнения соответствующего варианта плана. Субоптимальные значения показателей оптимизации в этом случае будут

$$Ц^{с}_{max} = 175;\ \ Ц^{пл}_{max} = 216;\ \ З_{min} = 255;\ \ Р_{max} = 1.$$

Нетрудно видеть, что 3-й вариант плана является наилучшим с точки зрения двух первых критериев. Однако при реализации его будет иметь место риск невыполнения. Вероятность невыполнения этого варианта плана составит Р = 0,45.

Первый вариант плана незначительно уступает 3-му варианту плана по первым двум критериям и является очень надежным плановым решением.

Однако затраты важного ресурса на выполнение 1-го решения являются в данном случае максимальными. Отсюда видно всю сложность выбора компромиссного варианта плана с точки зрения четырех критериев, включая вероятности выполнения соответствующих плановых решений.

Вышеприведенный метод многокритериальной оценки в данном случае будет реализовываться следующим образом. Необходимо найти решение следующей математической модели.

Модель Б

Найти значения неизвестных величин X_1, X_2, X_3, y, при которых

$$L = y \to \min$$

при условиях модели А и дополнительной системе условий:

$$[175 - (10X_1 + 15X_2 + 5X_3)]:\ 175\ \leq\ y;$$
$$[216 - (15X_1 + 18X_2 + 6X_3)]:\ 216\ \leq\ y;$$
$$(50X_1 + 20X_2 + 15X_3 - 255):\ 255\ \leq\ y;$$
$$[P_{max} - p(X_1, X_2, X_3)]:\ P_{max}\ = y,$$

$p(X_1, X_2, X_3,)$ – функция, выражающая вероятность выполнения соответствующего планового решения при заданных значениях X_1, X_2, X_3.

Конкретный вид этой функции весьма трудно построить. Однако в данном случае он и не потребуется, поскольку в данном примере исследуются не все допустимые решения модели А, а только вышеназванные четыре решения. Для этих же вариантов решений вероятности их выполнения приведены в табл. 1.

Так как эти четыре варианта решений (как отмечалось выше) являются допустимыми для модели А, то модель Б можно написать более короче, а именно:

Модель Б

Найти значения величин X_1, X_2, X_3, y, при которых

$$L = y \to \min$$

При условиях:

$$175 - (10X_1 + 15X_2 + 5X_3) \leq 175y;$$
$$216 - (15X_1 + 18X_2 + 6X_3) \leq 216y;$$
$$50X_1 + 20X_2 + 15X_3 - 255 \leq 255y;$$
$$1 - \text{p}(X_1, X_2, X_3) \leq y.$$

После этого надо выяснить допустимость вышеприведенных четырех вариантов для этой модели и найти наилучший из них с точки зрения критериальной функции.

И так проверяем I-й вариант: $X_1 = 5$; $X_2 = 5$; $X_3 = 5$.

$$[175 - (10\times 5 + 15\times 5 + 5\times 5)]: 175 = 0{,}143 \leq y;$$
$$[216 - (15\times 5 + 18\times 5 + 6\times 5)]: 216 = 0{,}097 \leq y;$$
$$(50\times 5 + 20\times 5 + 15\times 5 - 255): 255 = 0{,}67 \leq y;$$
$$1 - 1 = 0 \leq y.$$

Одновременно всем дополнительным условиям удовлетворяет $y = 0{,}67$.

Следовательно, $L = 0{,}67$, для этого варианта плана.

Далее, 2-й вариант: $X_1 = 5$; $X_2 = 0$; $X_3 = 2$;

$$[175 - (10\times 5 + 0 + 5\times 2)]: 175 = 0{,}66 \leq y;$$
$$[216 - (15\times 5 + 0 + 6\times 2)]: 216 = 0{,}6 \leq y;$$
$$[(50\times 5 + 0 + 15\times 2) - 255]: 255 = 0{,}098 \leq y;$$
$$1 - 1 = 0 \leq y.$$

Одновременно всем дополнительным условиям удовлетворяет $y = 0{,}66$.

Таким образом, $L = 0{,}66$ для этого 2-го варианта плана.

Далее, 3-й вариант: $X_1 = 2$; $X_2 = 10$; $X_3 = 1$

$$(175 - 175): 175 = 0 \leq y;$$
$$(216 - 216): 216 = 0 \leq y;$$
$$(315 - 255): 255 = 0{,}23 \leq y;$$
$$\frac{1 - 0{,}55}{1} = 0{,}45 \leq \text{y}.$$

Следовательно, $L = 0{,}45$ для этого 3-го варианта плана.

Далее, 4-й вариант: $X_1 = 3$; $X_2 = 3$; $X_3 = 3$;

$$(175 - 90): 175 = 0{,}49 \leq y;$$
$$(216 - 117): 216 = 0{,}46 \leq y;$$
$$(255 - 255): 255 = 0 \leq y;$$
$$1 - 1 = 0 \leq y.$$

Следовательно, $L = 0{,}49$.

Минимальное значение $L = 0{,}45$ соответствует 3-му варианту плана.

Следовательно, из этих четырех допустимых вариантов наиболее компромиссным оказался 3-й вариант. Однако применяя другие методы многокритериальной оценки могло бы случиться, что наиболее компромиссным оказался бы не 3-й вариант, а еще какой-либо вариант [5].

Далее, надежность выполнения этого варианта будет самой малой среди этих четырех вариантов. Поэтому, прежде чем использовать этот вариант плана, на практике необходимо дополнительно подвергнуть его тщательной экспертной оценке.

ВЫДАЧА ЗАДАНИЯ

Задание для студента можно представить в следующем виде:

Пусть исходные величины для модели типа А – многокритериальной модели формирования годовой производственной программы предприятия (с учетом риска невыполнения годового плана производства) приняли следующие значения:

$$n = 4;\ m = 2;\ \lambda_0 = 2.$$

Величины $\bar{t}^{\,c}_{ij}$: $\begin{cases} \bar{t}^{\,c}_{11} = 3;\ \bar{t}^{\,c}_{12} = 3;\ \bar{t}^{\,c}_{13} = 2;\ \bar{t}^{\,c}_{14} = 3; \\ \bar{t}^{\,c}_{21} = 2;\ \bar{t}^{\,c}_{22} = 2;\ \bar{t}^{\,c}_{23} = 3;\ \bar{t}^{\,c}_{24} = 4. \end{cases}$

Величины $t_{\lambda j}$: $\begin{cases} t_{11} = 4;\ t_{12} = 3;\ t_{13} = 3;\ t_{14} = 2; \\ t_{21} = 2;\ t_{22} = 4;\ t_{23} = 4;\ t_{24} = 3 \end{cases}$

Величины F_i: $F_1 = 45$; $F_2 = 50$.

Величины R_λ: $R_1 = 59$; $R_2 = 58$.

Величины σ_{ij}^2 : $\begin{cases} \sigma_{11}^2 = 0{,}2;\ \sigma_{12}^2 = 0{,}1;\ \sigma_{13}^2 = 0{,}11;\ \sigma_{14}^2 = 0{,}2; \\ \sigma_{21}^2 = 0{,}05;\ \sigma_{22}^2 = 0{,}1;\ \sigma_{23}^2 = 0{,}15;\ \sigma_{24}^2 = 0{,}11. \end{cases}$

Величины V_j: $V_1 = 0$; $V_2 = 0$; $V_3 = 1$; $V_4 = 0$.

Величины $\overline{V}_j : \overline{V}_1 = 11; \overline{V}_2 = 10; \overline{V}_3 = 11; \overline{V}_4 = 15.$

Величины $Ц_j^с : Ц_1^с = 11; Ц_2^с = 15; Ц_3^с = 6; Ц_4^с = 5.$

Величины $Ц_j^{пл} : Ц_1^{пл} = 14; Ц_2^{пл} = 20; Ц_3^{пл} = 6; Ц_4^{пл} = 7.$

Величины $З_j$: $З_1 = 60$; $З_2 = 30$; $З_3 = 20$; $З_4 = 20$.

С этими исходными величинами выполнить следующее:

1) Кратко описать постановку задачи оптимизации текущего планирования производства на данном предприятии.

2) Построить числовую многокритериальную модель типа модели А. Причем в качестве вероятностей выполнения условия (I) этой модели считать: $Р_1 = Р_2 = 1$.

3) Записать отдельно условие (I) модели для двух других случаев:

– когда все $Р_1 = Р_2 = 0{,}74$;

– когда все $Р_1 = Р_2 = 0{,}97$.

Или для других случаев.

4) Осуществить многокритериальную оценку (с помощью различных методов) следующим вариантам плановых решений по изготовлению изделий на предприятии в планируемом периоде (которые уже каким-либо способом сформированы):

а) $X_1 = 5$; $X_2 = 5$; $X_3 = 2$; $X_4 = 2$;

б) $X_1 = 2$; $X_2 = 3$; $X_3 = 2$; $X_4 = 1$;

в) $X_1 = 2$; $X_2 = 4$; $X_3 = 2$; $X_4 = 4$;

г) $X_1 = 3$; $X_2 = 1$; $X_3 = 2$; $X_4 = 4$;

д) Осуществить экономико-математический анализ этих вариантов планов.

Для выдачи задания группе студентов необходимо, чтобы величины $\bar{t}_{ij}^{с}, t_{\lambda j}$, F_i и R_λ (выдаваемые студентам) зависели бы от некоторого параметра α, характеризующего например, номер студента в списке своей группы. Но зависимость этих величин должна быть необходимым образом согласованной с тем, чтобы задача имела допустимые решения.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риски в современном бизнесе. М.: Изд-во "Аланс", 1994. 200 с.
2. Архипенков С. М. Экономико-математические модели формирования оптимальных (напряженных) и надежных планов производства на предприятиях обрабатывающей промышленности. Тамбов: ТГТУ, 1999. 48 с.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. 564 с.
4. Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник. 2-е изд., перераб. и доп. / Отв. ред. Н. П. Федоренко М.: Экономика, 1975. 700 с.
5. Архипенков С. М. Опыт решения примеров многоцелевой оптимизации перспективного планирования производства на предприятиях машиностроения. Оптимальное планирование производственной деятельности на промышленных предприятиях и в объединениях: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1980. С. 63 – 75.
6. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 254 с.
7. Салуквидзе М. Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. 201 с.
8. Архипенков С. М. О формировании напряженных и надежных планов производства на предприятиях обрабатывающей промышленности / Вестник ТГТУ. 1997. Т. 3. № 3. с. 329 334.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Методические указания

Составитель АРХИПЕНКОВ Сергей Макарович

Редактор В. Н. Митрофанова

Компьютерное макетирование М. А. Филатовой

ЛР № 020851 от 13.01.99 $П_{лр}$ № 020079 от 28.04.97

Подписано в печать 05.10.2001
Формат 60×84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объем: 1,16 усл. печ. л.; 1,0 уч.-изд. л.

Тираж 150 экз. С. 666.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14