УСТОЙЧИВОСТЬ
И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ
СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

•Издательство ТГТУ •

Учебное издание

УСТОЙЧИВОСТЬ
И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ
СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Методические указания

Составители: Потоков Евгений Геннадьевич,
Чернокозинская Валентина Ивановна

Редактор В. Н. Митрофанова
Компьютерное макетирование М. А. Филатовой

ЛР № 020851 от 13.01.99 $П_{лр}$ № 020079 от 28.04.97

Подписано в печать 24.05.2001
Формат 60×84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объем: 1,6 усл. печ. л.; 1,5 уч.-изд. л. Тираж 250 экз. С 336.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

Министерство образования Российской Федерации

ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВВЕДЕНИЕ

На начальном этапе проектирования, как правило, из условий прочности определяют поперечные размеры деталей машин. Однако для целого ряда конструктивных элементов обычных расчетов на прочность бывает недостаточно для обеспечения надежной и безопасной их работы в условиях эксплуатации, так как может произойти потеря устойчивости при внешних воздействиях. Например, при центральном сжатии гибкого упругого стержня с шарнирно закрепленными торцами может произойти боковое выпучивание стержня (рис. 1). Это приводит к появлению в среднем сечении сжатого элемента изгибающего момента, равного произведению сжимающей силы на величину бокового перемещения, т.е. наряду со сжатием стержень начинает работать и на изгиб. Действие изгибающего момента приводит к росту бокового перемещения и дальнейшему увеличению изгибающего момента, что может привести к катастрофической и внезапной потере несущей способности сжатого элемента. Поэтому в целом ряде случаев помимо расчетов на прочность необходимо обязательно проводить проверку и на устойчивость.

Освоение методов проведения расчетов на устойчивость и является целью расчетно-проектировочной работы, выполняемой студентами дневного отделения в 4 семестре, а студентами-заочниками - в 6 семестре. Указанные формы самостоятельной работы призваны закрепить и углубить знания, полученные студентами при изучении курса "Сопротивление материалов".

Расчетно-проектировочная работа должна содержать расчетно-пояснительную записку и графическую часть. Расчетно-пояснительная записка оформляется с соблюдением требований ЕСКД на стандартных листах писчей бумаги формата А4 с обложкой из плотной бумаги, на которой указана тема задания, шифр, фамилия студента и его учебная группа, дата выполнения задания. Расчеты следует сопровождать краткими пояснениями, полученные результаты записывать с указанием размерностей. Все расчеты рекомендуется выполнять с соблюдением правил приближенных вычислений.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Задание состоит из двух частей. Первую часть расчетно-проектировочной работы "Устойчивость сжатых стержней" выполняют студенты всех специальностей, вторую часть "Продольно-поперечный изгиб" - только студенты строительных специальностей.

Первая часть. Требуется подобрать размеры поперечного сечения центрально-сжатой стойки при заданном закреплении ее торцов. Найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Вторая часть. Нужно подобрать сечение прокатного профиля для балки, нагруженной одновременно продольной сжимающей силой и поперечной нагрузкой, действующей в плоскости наибольшей жесткости балки. Подобранное сечение балки проверить на прочность, а также на устойчивость в плоскости действия поперечной нагрузки и в плоскости, нормальной к плоскости действия поперечной нагрузки.

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Исходные данные для расчета приведены в прил. (табл. 1П, 2П) и в табл.1 и 2. В соответствии с шифром из таблиц необходимо взять данные, вычертить расчетную схему и поперечное сечение стойки, вывести формулу для определения моментов инерции сечения, относительно главных центральных осей. Записать формулу для определения площади поперечного сечения, минимального радиуса инерции и гибкости стойки с учетом заданных соотношений размеров поперечного сечения. Для расчетов на устойчивость должен быть принят минимальный момент инерции.

Студенты строительных специальностей проводят расчеты не по допускаемому напряжению на сжатие $[\sigma]_{сж}$, как это принято у машиностроителей, а по величине расчетного сопротивления на сжатие $R_{сж}$; подбор размеров поперечного сечения сжатого элемента осуществляется по расчетному значению сжимающей силы (N), которое задано в прил. (табл. 1П).

Перед выполнением задания необходимо ознакомиться с теоретическими основами расчетов на устойчивость, изложенными в литературе [1 - 6]. При этом следует обратить особое внимание на следующее.

Прямолинейный стержень с шарнирно закрепленными концами (рис. 1), сжатый силой P, находится в равновесии в искривленном состоянии или продолжает искривляться в плоскости наименьшей жесткости, если сила достигла критического значения $P_{кр}$.

Формула для определения критической силы в случае центрального сжатия прямого стержня с шарнирно закрепленными концами получена Эйлером и имеет вид

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2} n^2, \qquad (1)$$

где E - модуль продольной упругости материала стержня, $J_{\min}$ - минимальный момент инерции его поперечного сечения, l - рабочая длина стержня, n - число полуволн синусоиды, которые укладываются на рабочей длине стержня при потере устойчивости. Практический интерес представляет наименьшее значение критической силы при $n = 1$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2}. \qquad (2)$$

При других условиях опорных закреплений сжатого стержня величина критической силы может быть найдена по формуле

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu l)^2}, \qquad (3)$$

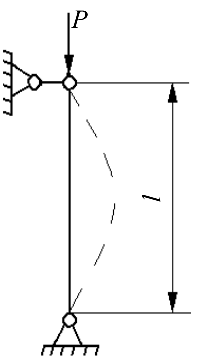


Рис. 1

где ν - коэффициент приведения длины, учитывающий способ закрепления концов стойки и показывающий, во сколько раз следует изменить длину шарнирно опертого стержня, чтобы критическая сила для него была равна критической силе для такого же стержня, но при рассматриваемых (заданных) условиях закрепления его торцов. Величина ν по своему физическому смыслу может быть определена как величина обратная n. Это хорошо видно на рис. 2, где показаны наиболее типичные случаи закреплений торцов стержней и приведены значения величин n,

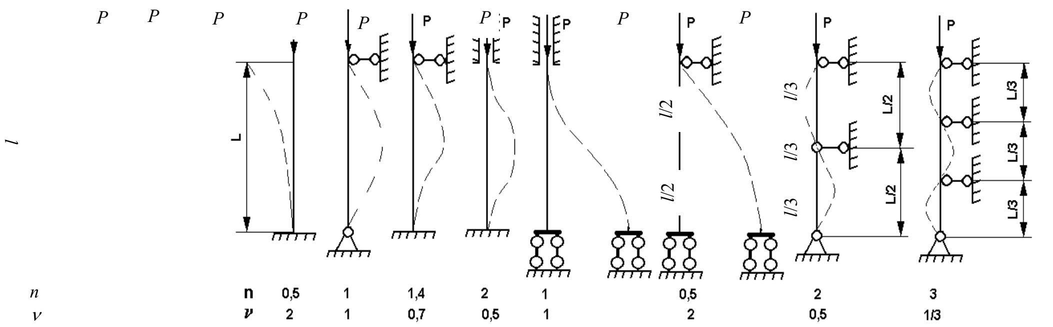


Рис. 2

При выполнении расчетов на устойчивость вводят понятие приведенной длины $l_{пр} = \nu l$, которая представляет собой часть длины стержня, на которой укладывается полуволна синусоиды.

При выводе формулы Эйлера предполагалось, что напряжения центрального сжатия, возникающие в поперечных сечениях стержня от действия критической силы $(P_{\text{кр}})$ не должны превышать напряжений, равных пределу пропорциональности $(\sigma_{\text{пц}})$ материала.

Поделив критическую силу на площадь поперечного сечения стержня получим критическое напряжение

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\nu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{4}$$

где $\lambda = \dfrac{\nu l}{i_{\min}}$ - гибкость стержня, $i_{\min}$ - минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня, равный $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{J_{\min}}{F}}$. Гибкость (λ) представляет собой обобщенную геометрическую характеристику, учитывающую форму и размеры поперечного сечения стержня ($I_{\min}$, F), длину (l) и условия закрепления его торцов (ν).

Таким образом, условие применимости формулы Эйлера будет иметь вид

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{\text{пц}}. \tag{5}$$

Если обозначить наименьшее значение гибкости, при которой может быть применена формула Эйлера (т.е. при $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{пц}}$) через $\lambda_{\text{э}}$, то

$$\lambda_{\text{э}} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}} \tag{6}$$

и условие применимости формулы Эйлера может быть записано в виде

$$\lambda \ge \lambda_{\text{э}}. \tag{7}$$

Величина предельной гибкости определяется упругими свойствами материала и составляет: для стали Ст. 3 $\lambda_{\text{э}} \approx 100$; для стали Ст. 5 $\lambda_{\text{э}} \approx 85$; для чугуна $\lambda_{\text{э}} \approx 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{\text{э}} \approx 70$.

Определение критических нагрузок при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала, представляет собой достаточно сложную теоретическую задачу. На основании экспериментальных данных Ф. С. Ясинским была предложена линейная зависимость между величиной критических напряжений и гибкостью

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \tag{8}$$

где a, b - эмпирические коэффициенты, зависящие от материала стержня и имеющие размерность напряжения. Для стали Ст. 3 были получены следующие значения коэффициентов $a = 310$ МПа, $b = 1{,}14$ МПа.

Для дерева (сосна, ель, лиственница) при $\lambda_{\text{э}} \le 70$ используется параболическая зависимость

$$\sigma_{\text{кр}} = 33 - 26{,}4\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2. \tag{9}$$

Для чугуна при гибкости $\lambda_1 \le 80$

$$\sigma_{\text{кр}} = 776 - 12\lambda + 0{,}053\lambda^2. \tag{10}$$

Формулой Ясинского (8) можно пользоваться при условии, что критические напряжения $(\sigma_{\text{кр}})$, вычисленные по этой формуле, не превосходят предела текучести $(\sigma_{\text{т}})$ для пластичного материала и предела прочности при сжатии $(\sigma_b^{\text{сж}})$ для хрупкого материала. Обозначив в формуле (8) через $\lambda_{\text{я}}$ то значение гибкости, при котором $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}}$ для пластичного материала или $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_b^{\text{сж}}$ для хрупкого материала, можно записать условие применимости и формулы Ясинского в виде

$$\lambda_{\text{я}} \le \lambda \le \lambda_{\text{э}}, \tag{11}$$

где $\lambda_{\text{э}}$ определяется по формуле (6). Стержни, для которых выполняется условие (11) называют **стержнями средней гибкости**. Применительно к стали Ст. 3, для которой величина $\lambda_{\text{я}} \approx 60$ условие (11) будет иметь вид $60 \le \lambda \le 100$.

Стержни, для которых $\lambda \le \lambda_{\text{я}}$, называют **стержнями малой гибкости,** которые могут разрушиться не в результате потери устойчивости, а в результате потери прочности при центральном сжатии. Поэтому для стержней малой гибкости из пластичного или хрупкого материалов следует соответственно принять

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}} \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{кр}} = \sigma_b^{\text{сж}}. \tag{12}$$

График зависимости критических напряжений от гибкости для стали Ст. 3 с пределом пропорциональности $\sigma_{\text{пц}} = 200$ МПа и пределом текучести $\sigma_{\text{т}} = 240$ МПа представлен на рис. 3.

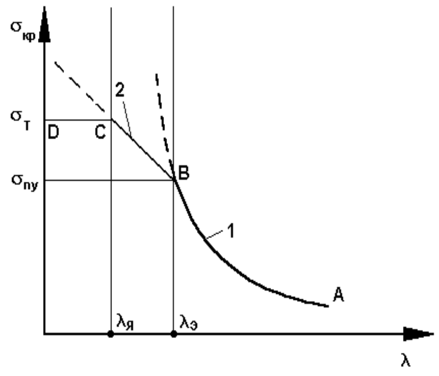


РИС. 3

При $\lambda \geq 100$ график $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ представляет собой гиперболу Эйлера (AB), при $60 \leq \lambda \leq 100$ - прямую Ясинского (BC), при $\lambda \leq 60$ - горизонтальную прямую (СД). Для значений $\lambda \leq 100$ гипербола Эйлера изображена пунктирной линией. Из этого графика видно, что для стержней малой и средней гибкости формула Эйлера дает сильно завышенные значения критических напряжений.

ПРАКТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РАСЧЕТА СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

При потере устойчивости в центрально сжатом стержне напряжения становятся равны критическим. Допускаемые напряжения на устойчивость могут быть найдены путем введения коэффициента запаса устойчивости по отношению к критическим напряжениям $[\sigma]_у = \dfrac{\sigma_{кр}}{n_у}$. Как правило, допускаемые напряжения на устойчивость при выполнении расчетов на продольный изгиб обычно связывают:

- в машиностроении - с допускаемым напряжением на сжатие $[\sigma]_{сж}$:

$$[\sigma]_у = \varphi[\sigma]_{сж} \ ,$$

где φ - коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие при расчетах на продольный изгиб.

- в строительстве - с расчетным сопротивлением на сжатие $R_{сж}$

$$[\sigma^R]_у = \varphi R_{сж} \ ,$$

где φ - коэффициент уменьшения расчетного сопротивления при продольном изгибе. Величина φ изменяется в пределах от 0 до 1 в зависимости от гибкости стержня. Значения φ в зависимости о гибкости приводятся в учебной ([1] табл. 12, с. 452; [2] табл. 19, с. 466) и справочной литературе; для строительных конструкций значения φ приведены в соответствующих разделах СНиП.

Условие устойчивости по методу допускаемых напряжений записывается в виде

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]_{сж} \, . \tag{13}$$

В аналогичном виде может быть представлено условие устойчивости при расчете по методу предельных состояний

$$\sigma = \frac{p}{F} \leq \varphi R \, . \tag{14}$$

При расчете сжатых стержней на устойчивость могут быть решены следующие задачи: а) проверочный расчет на устойчивость; б) определение величины допускаемой нагрузки (несущей способности) из условия устойчивости; в) подбор поперечного сечения стойки.

При заданных размерах сечения проверка на устойчивость сводится к определению минимального радиуса инерции $i_{\min}$, гибкости $\lambda = \dfrac{\nu l}{i_{\min}}$, коэффициента φ и допускаемого напряжения на устойчивость, сравнению действующего в сечении (σ) и допускаемого напряжения на устойчивость $([\sigma]_у, [\sigma^R]_у)$. Затем могут быть найдены допускаемая нагрузка на стержень

$$[P] = F[\sigma]_{сж}\varphi = F[\sigma]_у \tag{15}$$

или предельная расчетная сжимающая сила

$$N_{кр} = FR_{сж}\varphi = F[\sigma^R]_у \, . \tag{16}$$

Если требуется подобрать размеры поперечного сечения стержня, то задача решается методом последовательных приближений, так как в условия (13 и 14) вошли две неизвестные величины F и φ.

Порядок выполнения расчетов на устойчивость методом последовательных приближений

1 Определить геометрические характеристики поперечного сечения стойки в зависимости от величины одного из его характерных размеров.

2 Найти площадь поперечного сечения стойки, приняв в первом приближении значение $\varphi_{1н'} = 0{,}5$.

3 Определить величину характерного размера поперечного сечения.

4 Вычислить значение гибкости.

5 Найти по таблицам величину коэффициента $\varphi_{1к}$.

6 Определить величины напряжений, действующих в сечении (σ) и допускаемых на устойчивость $([\sigma]_у, [\sigma^R]_у)$, сравнить их.

7 Перейти к следующему приближению, если перегрузка или недогрузка сечения стойки превышает допустимые пределы.

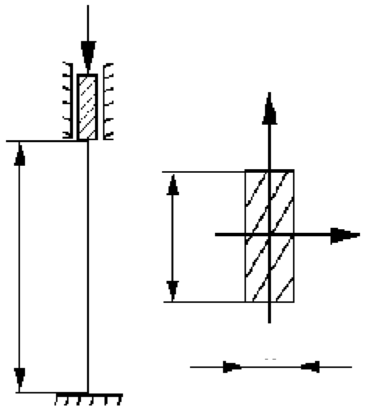
8 Найти значение критической силы и величину коэффициента запаса устойчивости.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТОВ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Пример 1. Стальная стойка с двумя жестко закрепленными торцами (рис. 4) сжимается силой P = 200 кН. Длина стойки $l = 2$ м, материал стойки сталь Ст. 3:

$$\sigma_т = 240 \text{ МПа}; [\sigma]_{сж} = 160 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \lambda_э = 100.$$

Соотношение сторон прямоугольника $h/b = 3/2$. Нужно подобрать размеры поперечного сечения стойки и определить коэффициент запаса устойчивости.



1 Определяем геометрические характеристики поперечного сечения стойки:

$$J_{\min} = J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{3h^4}{2 \cdot 12} = \frac{h^4}{8};$$

$$F = hb = \frac{3}{2}h^2; \; h = \sqrt{\frac{2}{3}F} = 0{,}816\sqrt{F},$$

тогда
$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{2h^4}{8 \cdot 3 \cdot h^2}} = 0{,}286h;$$

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}} = \frac{0{,}5 \cdot 2}{0{,}288h} = \frac{3{,}47}{h}.$$

ЗДЕСЬ НЕОБХОДИМО НАПОМНИТЬ, ЧТО РАЗМЕРЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ПОДСТАВЛЕНЫ В МЕТРАХ.

Первое приближение. 1 Принимаем $\varphi_{1н} = 0{,}5$.

2 Находим площадь сечения

$$F_1 = \frac{P}{\varphi_{1н}[\sigma]_{сж}} = \frac{200 \cdot 10^3 \text{ Н}}{0{,}5 \cdot 160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

3 Определяем величину характерного размера поперечного сечения

$$h_1 = 0{,}816\sqrt{F} = 0{,}816\sqrt{25 \cdot 10^{-4}} = 4{,}08 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

4 Вычисляем значение гибкости $\lambda_1 = \dfrac{3{,}47}{h_1} = \dfrac{3{,}47}{4{,}08 \cdot 10^{-2}} = 85{,}05.$[1]

5 По гибкости (λ_1) находим ([4], табл. 11, с. 373) величину коэффициента $\varphi_{1к}$, используя линейную интерполяцию:

$\lambda = 80$	$\lambda = 90$	$\Delta\lambda = +10$
$\varphi = 0{,}75$	$\varphi = 0{,}69$	$\Delta\varphi = -0{,}06$

Положительному приращению гибкости на 10 единиц соответствует уменьшение коэффициента φ на 0,06, тогда

$$\varphi_{1к} = 0{,}75 - \frac{0{,}06}{10} \cdot 5{,}02 = 0{,}72.$$

[1] При выполнении расчетов иногда значение гибкости сжатого стержня, полученное в первом приближении, выходит за пределы табличных значений. В этих случаях нужно выполнить один из указанных трех пунктов: 1) уменьшить длину стержня; 2) увеличить характерный размер сечения; 3) изменить условия закрепления торцов на более жесткие. При выполнении РПР студентам **рекомендуется изменить** длину стержня во столько раз, чтобы полученное значение гибкости находилось в пределах табличных значений.

6 Определяем величину напряжений:

- действующих в сечении $\sigma_1 = \frac{P}{F_1} = \frac{200 \cdot 10^3\,\text{Н}}{25 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2} = 80$ МПа,
- допускаемых на устойчивость

$$[\sigma]_{\text{у}1} = \varphi_{1\text{к}}[\sigma]_{\text{сж}} = 0{,}72 \cdot 160 = 115{,}2\ \text{МПа}.$$

Сравнение величин напряжений, действующих в сечении и допускаемых на устойчивость, свидетельствует о недогрузке сечения, составляющей $\frac{[\sigma]_{\text{у}1} - \sigma_1}{[\sigma]_{\text{у}1}} 100\ \% = \frac{115{,}2 - 80}{115{,}2} 100\ \% = 30{,}5\ \%$, что недопустимо. Перегрузка или недогрузка при расчетах на устойчивость не должна превышать 5 %. Для стоек, изготовленных из элементов стандартного проката (уголок, швеллер, двутавр) допускается недогрузка более 5 %, если переход к меньшему сечению дает перегрузку свыше 5 %.

Второе приближение. Принимаем значение $\varphi_{2\text{н}}$ равным среднему арифметическому между принятым ($\varphi_{1\text{н}}$) и полученным ($\varphi_{1\text{к}}$) в первом приближении. Тогда принимаемое во втором приближение значение φ будет равно $\varphi_{2\text{н}} = \frac{\varphi_{1\text{н}} + \varphi_{1\text{к}}}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}72}{2} = 0{,}61$.

Далее, как и в первом приближении:

$$F_2 = \frac{200 \cdot 10^3}{0{,}61 \cdot 160} = 20{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2;\ h_2 = 0{,}816\sqrt{F_2} = 3{,}69 \cdot 10^{-2}\ \text{м};$$

$$\lambda_2 = \frac{3{,}47}{3{,}69 \cdot 10^{-2}} = 94;\ \varphi_{2\text{к}} = 0{,}69 - \frac{0{,}09}{10} 4 = 0{,}654;$$

$$\sigma_2 = \frac{200 \cdot 10^3}{20{,}5 \cdot 10^{-4}} = 97{,}6\ \text{МПа};\ [\sigma]_{\text{у}2} = \varphi_{2\text{к}}[\sigma]_{\text{сж}} = 0{,}654 \cdot 160 = 104{,}6\ \text{МПа}.$$

Сравнивая напряжения, снова получаем недогрузку, равную

$$\frac{[\sigma]_{\text{у}2} - \sigma_2}{[\sigma]_{\text{у}2}} 100\ \% = \frac{104{,}6 - 97{,}6}{104{,}6} 100\ \% = 6{,}7\ \% > 5\ \%.$$

Третье приближение. Принимаем

$$\varphi_{3н} = \frac{\varphi_{н'} + \varphi_{2к}}{2} = \frac{0{,}61 + 0{,}654}{2} = 0{,}632.$$

Получаем:

$$F_3 = \frac{200 \cdot 10^3}{0{,}632 \cdot 160} = 19{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2;\ h_3 = 0{,}816\sqrt{F_3} = 3{,}63 \cdot 10^{-2}\,\text{м};$$

$$\lambda_3 = \frac{3{,}47}{3{,}63 \cdot 10^{-2}} = 95{,}6;\ \varphi_{3\text{к}} = 0{,}69 - \frac{0{,}09}{10} 5{,}6 = 0{,}64;$$

$$\sigma_3 = \frac{200 \cdot 10^3}{19{,}8 \cdot 10^{-4}} = 101\ \text{МПа};\ [\sigma]_{\text{у}3} = \varphi_{\text{к}}[\sigma]_{\text{сж}} = 0{,}64 \cdot 160 = 102{,}4\ \text{МПа}.$$

Недогрузка составляет

$$\frac{[\sigma]_{\text{у}3} - \sigma_3}{[\sigma]_{\text{у}3}} 100\ \% = \frac{102{,}4 - 101}{102{,}4} 100\ \% = 1{,}37\ \% < 5\ \%,$$

что вполне допустимо. Окончательно получаем следующие параметры стойки:

$$\varphi = 0{,}64;\ \lambda = 95{,}6;\ h = 3{,}63 \cdot 10^{-2}\,\text{м};\ b = \frac{3}{2} h = 5{,}44 \cdot 10^{-2}\,\text{м};$$

$$F = 19{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2;\ J_{\min} = \frac{h^4}{8} = 21{,}7\text{м}^4;\ i_{\min} = 0{,}288\sqrt{F} = 1{,}045 \cdot 10^{-2}\,\text{м}.$$

Определяем величину критической силы. Поскольку полученное значение гибкости $\lambda_{\text{ст}} < \lambda_{\text{э}} = 100$, то формула Эйлера неприменима и величину критической силы определяем по зависимости Ясинского

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F.$$

Необходимо напомнить, что формула Ясинского применима только до тех пор, пока критическое напряжение не достигло предела текучести для стали (или предела прочности для хрупких материалов). Найдем величину критического напряжения для рассчитываемой стойки

$$\sigma_{\text{кр}} = 310 - 1{,}14\lambda_{\text{ст}} = 310 - 1{,}14 \cdot 95{,}6 \approx 201\,\text{МПа} < \sigma_n = 240\ \text{МПа}.$$

Следовательно, формулой Ясинского можно пользоваться и величина критической силы будет равна

$$P_{кр} = 201 \cdot 10^6 \cdot 19{,}8 \cdot 10^{-4} = 398000 \text{ Н} = 398 \text{ кН}.$$

Найдем коэффициент запаса устойчивости $n_у = \dfrac{P_{кр}}{N} = \dfrac{398}{200} = 1{,}99$. Таким образом, устойчивость стойки обеспечена.

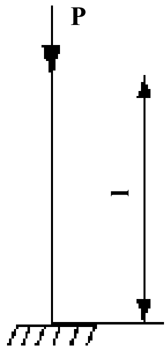


РИС. 5

Пример 2. Подобрать сечение швеллера для стойки, показанной на рис. 5. Длина стойки $l = 1{,}5$ м; материал - сталь Ст. 3, для которого

$$\sigma_т = 240 \text{ МПа}; \ [\sigma]_{сж} = 160 \text{ МПа}; \ E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

$$P = 200 \text{ кН}, \ \lambda_э = 100.$$

Для указанной стойки коэффициент приведения длины будет равен 2.

Принимаем в первом приближении $\varphi_{1н} = 0{,}5$. Находим площадь поперечного сечения швеллера

$$F = \frac{P}{\varphi_{1н}[\sigma]_{сж}} = \frac{200 \cdot 10^3 \text{ Н}}{0{,}5 \cdot 160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 25 \cdot 10^{-4} \text{м}^2.$$

По сортаменту подбираем швеллер N 20а, для которого $F = 25{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^2, $i_{min} = 2{,}35 \cdot 10^{-2}$ м. По значению гибкости $\lambda = \dfrac{\nu l}{i_{min}} = \dfrac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}35 \cdot 10^{-2}} = 127{,}6$ из таблиц определяем величину коэффициента $\varphi = 0{,}412$.

Определяем величины напряжений:

- действующие в сечении $\sigma = \dfrac{P}{F} = \dfrac{200 \cdot 10^3}{25{,}2 \cdot 10^{-4}} = 79{,}3 \text{ МПа}$,
- допускаемые на устойчивость $[\sigma]_у = 0{,}412 \cdot 160 = 65{,}9 \text{ МПа}$.

Сравнение напряжений свидетельствует о перегрузке, величина которой составляет

$$\frac{[\sigma]_у - \sigma}{[\sigma]_у} 100 \ \% = \frac{65{,}9 - 79{,}3}{65{,}9} 100 \ \% = 20{,}4 \ \% > 5 \ \%,$$

что недопустимо.

При подборе прокатных профилей проще всего можно добиться желаемого результата путем перехода от одного номера профиля к другому: при перегрузке к более высокому номеру, при недогрузке к меньшему номеру профиля.

В связи с этим переходим к большему номеру швеллера. Принимаем швеллер N 22а:

$$F = 28{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \ i_{min} = 2{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

гибкость стойки будет равна $\lambda = \dfrac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}6 \cdot 10^{-2}} = 115{,}4$. По гибкости из таблиц находим коэффициент продольного изгиба $\varphi = 0{,}482$. Определяем напряжения действующие в сечении швеллера $\sigma = \dfrac{200 \cdot 10^3}{28{,}8 \cdot 10^{-4}} = 69{,}4 \text{ МПа}$, допускаемые на устойчивость $[\sigma]_у = 0{,}482 \cdot 160 = 77{,}1 \text{ МПа}$.

Недогрузка составляет

$$\frac{[\sigma]_у - \sigma}{[\sigma]_у} 100 \ \% = \frac{77{,}1 - 69{,}4}{77{,}1} 100 \ \% = 10 \ \% > 5 \ \%.$$

Переходим к меньшему сечению швеллера. Принимаем для расчета швеллер N 22:

$$F = 26{,}7 \cdot 10^{-4} \text{м}^2; \ i_{min} = 2{,}37 \cdot 10^{-2} \text{м}; \ \lambda = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}37 \cdot 10^{-2}} = 126; \ \varphi = 0{,}42.$$

Находим напряжения, действующие в сечении

$$\sigma = \frac{200 \cdot 10^3}{26{,}7 \cdot 10^{-4}} = 70{,}5 \text{ МПа}$$

и допускаемые на устойчивость $[\sigma]_у = 0{,}42 \cdot 160 = 67{,}2 \text{ МПа}$. Перегрузка составляет

$$\frac{[\sigma]_у - \sigma}{[\sigma]_у} 100 \ \% = \frac{67{,}2 - 70{,}5}{67{,}2} 100 \ \% = 4{,}5 \% < 5 \ \%.$$

Таким образом, для предыдущего и последующего номеров профиля швеллера получаем: для N 22 перегрузка 4,5 %, а для N 22а - недогрузка составила 10 %. Окончательно для стойки принимаем швеллер N 22.

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Перед тем, как приступить к выполнению задания необходимо ознакомиться с теоретическими основами раздела, изложенными в [1, 2, 4, 5, 6]. При этом следует обратить внимание на основную особенность расчетов на прочность и устойчивость при продольно-поперечном изгибе, которая заключается в том, что здесь неприменим принцип независимости действия сил. Действительно, если к брусу приложены одновременно продольная сила N и поперечные нагрузки S, то вследствие деформаций стержня возникают перемещения "y" и продольная сжимающая сила N создает в поперечном сечении с абсциссой "x" дополнительные изгибающие моменты, равные $\Delta M = N y_n$, где $y_п = y_0 + y_n$ (рис. 6). Для случая, указанного на рис. 6, полный изгибающий момент будет равен

$$M = M_0 + N y_n, \tag{17}$$

где M_0 - изгибающий момент только от поперечных сил.

Из уравнения (17) видно, что полный момент зависит от величины прогиба, а прогиб, в свою очередь, может быть определен только по известной

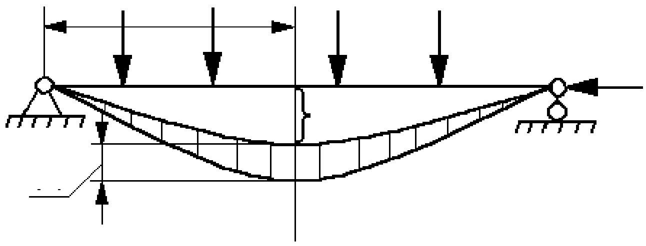


Рис. 6

величине изгибающего момента. Следовательно, задача продольно-поперечного изгиба является статически неопределимой.

Используя приближенное уравнение упругой линии балки

$y'' = \dfrac{M}{EJ}$, где $M = M_0 + N y_n$, и предполагая, что дополнительные прогибы y_n от продольной сжимающей силы N изменяются по закону синуса (заштрихованная зона на рис. 6) получим величину полного прогиба

$$y_n = \frac{y_0}{1 - \dfrac{N}{P_{кр}}}, \tag{18}$$

где y_0 - величина вертикального перемещения только от поперечных нагрузок, определяемая любым из известных способов; N - продольная расчетная сжимающая сила.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{но}}{(\nu l)^2},$$

где $P_{кр}$ - критическая эйлерова сила; ν - коэффициент приведения длины. Следует особо подчеркнуть, что в последнее уравнение для определения критической эйлеровой силы входит не минимальный момент инерции $J_{\min}$, а момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси $J_{но}$, соответствующей изгибу стержня от поперечной нагрузки в заданной плоскости.

Использование приближенной формулы (18) может привести к значительной ошибке, когда сила N близка к $P_{кр}$, так как в этом случае прогиб неограниченно возрастает. Точность уравнения (18) вполне достаточная для интервала значений N от 0 до 0,8 $P_{кр}$. В инженерных задачах, встречающихся в строительной практике, сжимающая сила обычно не превышает величины (0,5 - 0,6)$P_{кр}$, что позволяет считать приведенное приближенное решение достаточно точным для практических целей.

В расчетах на продольно-поперечный изгиб, выполняемых по деформированной схеме, в опасном сечении балки (бруса) к наибольшему значению изгибающего момента от поперечных нагрузок добавляется момент от продольной сжимающей силы, равный $\Delta M = N y_n$, тогда максимальное сжимающее напряжение может быть найдено по уравнению

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_0}{W_{\text{но}}} + \frac{\Delta M}{W_{\text{но}}}. \qquad (19)$$

Необходимо заметить, что в уравнении (19) сжимающее напряжение нелинейно зависит от величин внешних нагрузок, в частности, от *N*. В связи с этим по величине напряжений нельзя оценивать величину коэффициента запаса при заданной внешней нагрузке.

Условие прочности бруса при продольно-поперечном изгибе в плоскости действия поперечной нагрузки имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_0}{W_{\text{но}}} + \frac{\Delta M}{W_{\text{но}}} \le R. \qquad (20)$$

В уравнение (20) вошли три неизвестные величины: F, ΔM, $W_{\text{но}}$. Это затруднение можно обойти, если задаться некоторыми величинами. Задаются величиной *K*, равной отношению момента сопротивления к площади его поперечного сечения $K = \frac{W_{\text{но}}}{F}$. Несмотря на широкий диапазон изменения величины этого отношения, для прокатных профилей можно рекомендовать следующие значения *K*: для швеллеров $K = 6 \cdot 10^{-2}$; для двутавров $K = 10 \cdot 10^{-2}$. Дополнительный момент $\Delta M = N y_n$ легко определяется, если известна величина максимального прогиба для однопролетных балок. Значение максимального прогиба рекомендуется принимать равным $\frac{l}{200}$ для консольных балок, $\frac{l}{400}$ - для балок с двумя шарнирными опорами по торцам, $\frac{l}{600}$ - для балок с двумя жесткими заделками, здесь l - длина пролета.

После проверки прочности производят проверку на устойчивость в плоскости действия поперечной нагрузки. Для этого определяют величину предельной расчетной сжимающей силы

$$N_{\text{пред.}} = F\varphi R, \qquad (21)$$

где φ - коэффициент продольного изгиба, определяемый по таблицам, в зависимости от гибкости λ. В данном случае гибкость определяется в плоскости действия поперечной нагрузки $\lambda = \frac{\nu l}{i_{\text{но}}}$. Условие безопасности по устойчивости в плоскости действия поперечных нагрузок выполнено, если удовлетворяется неравенство $N_{\text{пред.}} \ge N$. Определяется величина критической силы, соответствующей потере устойчивости балки в плоскости действии поперечной нагрузки. В зависимости от величины гибкости критическая сила определяется по формуле Эйлера ($\lambda \ge 100$) или эмпирической зависимости Ясинского. Нужно помнить, что при использовании формулы Ясинского в случае стали Ст. 3 величина критических напряжений не может превышать предела текучести материала. Если величина критических напряжений оказалась больше предела текучести, то следует принять $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}}$. Действительный коэффициент запаса устойчивости определяется как отношение критической силы к расчетной сжимающей силе

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{N},$$

где *N* - расчетная сжимающая сила, значение которой приведено в прил. (табл. 1П).

На заключительном этапе расчета проверяют балку на устойчивость в плоскости, нормальной к плоскости действия поперечной нагрузки. Определяют предельную расчетную сжимающую силу, которую затем сравнивают с величиной расчетной сжимающей силы.

Порядок выполнения расчетов на продольно-поперечный изгиб

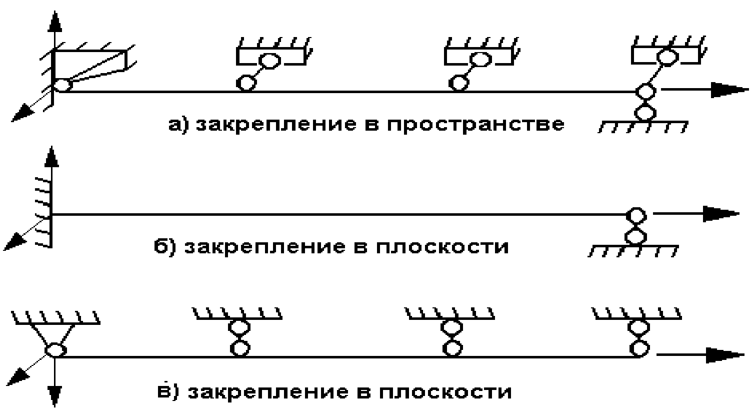
1 Строится эпюра изгибающих моментов только от заданной поперечной нагрузки, определяется положение опасного сечения. Задаются величиной максимального прогиба в плоскости действия поперечной нагрузки и отношением момента сопротивления относительно нейтральной оси к площади поперечного сечения. Из уравнения (20) определяется величина момента сопротивления относительно нейтральной оси. Подбирается прокатный профиль.

2 Проверяется прочность и устойчивость балки в плоскости действия поперечной нагрузки.

3 Выполняется проверка на устойчивость в плоскости, нормальной к плоскости действия поперечной нагрузки

Примечание. Изображение в аксонометрии различных условий закрепления балки в двух взаимно перпендикулярных плоскостях представляет собой довольно сложную задачу даже для простейших случаев. В связи с этим прибегают к условному изображению условий закрепления балки в пространстве (рис. 7).

Рис. 7



УСТОЙЧИВОСТЬ
И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ
СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Методические указания
по выполнению расчетно-проектировочной и контрольной работы
по разделу "Устойчивость деформируемых систем"
по дисциплине "Сопротивление материалов"
для студентов 2 и 3 курсов дневного и заочного отделений
специальностей 120100, 170500, 170600, 290300, 311300

Издательство ТГТУ
Тамбов 2001

ББК Ж 12 я 73-5
УДК 539.384.4
У79

Утверждено редакционно-издательским советом университета

Рецензент
Доктор технических наук, заведующий кафедрой
"Конструкции зданий и сооружений"
В. В. Леденев

Составители:
Е. Г. Потоков, В. И. Чернокозинская

У79 Устойчивость и продольно-поперечный изгиб сжатых стержней: Метод. указания. / Сост. Е. Г. Потоков, В. И. Чернокозинская. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. 28 с.

В методических указаниях по курсу "Сопротивление материалов" приведен порядок и методика выполнения расчетов на устойчивость и продольно-поперечный изгиб сжатых стержней и балок.

Предназначены для студентов 2 и 3 курсов дневного и заочного отделений специальностей 120100, 170500, 170600, 290300, 311300.

ББК Ж 12 я 73-5
УДК 539.384.4