Министерство образования Российской Федерации

Тамбовский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие
по изучению теоретической части курса "Математика"
студентами специальностей 021100 и 350400

Тамбов
Издательство ТГТУ
2001

УДК 519.21(075)
ББК В171я73-5
П909

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор
А. И. Булгаков

Составители:
Н. П. Пучков, Л. И. Ткач

П909 Математика для гуманитарных специальностей: Учеб.-метод. пособие / Сост.: Н. П. Пучков, Л. И. Ткач. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. 32 с.

В данном пособии рассматриваются два раздела учебного курса: "Множества" и "Элементы теории вероятностей" как наиболее значимые для развития математического мышления и доступные для освоения студентами гуманитарных специальностей. В пособие включено большое количество задач "общественного" содержания, решаемых математическими методами.

Учебно-методическое пособие подготовлено в помощь студентам специальностей 021100 - "Юриспруденция" и 350400 - "Связи с общественностью" для более глубокого изучения курса математики, с которым студенты знакомятся на лекциях.

УДК 519.21(075)
ББК В171я73-5

Введение

НУЖНА ЛИ ГУМАНИТАРИЯМ МАТЕМАТИКА?

Нет ни одной области математики,
как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям реального мира.

Н. И. Лобачевский

В государственные программы подготовки юристов и других гуманитариев включена дисциплина "Математика". Это обстоятельство, к сожалению, вызывает некоторое недоумение не только у студентов, их родителей, но и у преподавателей-гуманитариев, которые, в свое время, математику в вузе не изучали. Такое недоумение является, на наш взгляд, следствием неверного восприятия математики как науки, сложившегося после изучения школьного курса математики.

В процессе изучения математики студенты-гуманитарии должны глубоко ощутить, что математика - это не набор формул и технических приемов, а универсальный образец рационалистического анализа и построения концепций в любом знании, математика - это культура исследований. "Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир", - писал Гете.

Важный элемент профессиональной деятельности философов, социологов, юристов, обществоведов - построение концепций. Постановка проблемы, прочность и стройность фундамента будущей теории, корректность рассуждений, достоверность и однозначность заключений - вопросы, представляющие особый интерес для специалистов гуманитарных профессий. Наиболее успешно научиться решать такие вопросы можно только в математике.

Целью университетского образования студента-гуманитария в области математики является воспитание у него определенной математической культуры и привитие ему некоторых навыков использования математических методов в практической деятельности. Студенты-гуманитарии должны уметь видеть математические понятия и понимать действия математических законов в реальном, окружающем нас мире применять их для научного объяснения явлений. В то же время студент-гуманитарий должен владеть определенным математическим аппаратом, который позволил бы ему осуществлять хотя бы простейший анализ информации.

Вообще гуманитариев и математиков многое связывает. Например, в юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых - выявить истину. Поэтому не удивительно, что многие юристы (по образованию и по должности) получили всемирную известность как математики.

Так, автор известной из школьного курса математики теоремы Виета Франсуа Виет (1540 - 1605), служил юристом при дворе французского короля Генриха IV, автор двух известнейших теорем из теории чисел Пьер Ферма (1601 - 1665) - юрист по образованию, практически всю жизнь работал советником парламента во французском городе Тулуза, один из творцов дифференциального исчисления немец Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 - 1716) - юрист, дипломат Майнского курфюрста.

И все же главной сложностью процесса преподавания математики студентам, решившим для себя овладеть гуманитарной специальностью, остается обоснование необходимости (мотивация) изучения этого предмета. Преодолеть эти трудности, частично, можно с помощью специальных, профессионально-ориентированных задач, так как образ математики и отношение обучаемого к ней формируют, прежде всего, задачи, которые он решает. Однако математические представления студентов-гуманитариев настолько ограничены школьным знакомством с элементарной математикой, что им просто невозможно продемонстрировать современные математические подходы для изучения и анализа явлений в обществе, таких как: анализ конфликтных ситуаций, искусство принятия решений, модельные подходы к исследованию сложных явлений в гуманитарной сфере и др. Поэтому в какой-то мере приходится просто уповать на их веру в возможности математики.

Настоящее пособие для студентов-гуманитариев имеет своей целью не только познакомить с программой по математике, но и показать примеры применения математики в практической деятельности при анализе жизненных ситуаций. Задачи, рассмотренные в пособии, имеют профессионально-ориентированный характер, что, несомненно, создает условия для дальнейшего повышения квалификации (в том числе и математической) студента-гуманитария.

Данное пособие ориентировано, в большей степени, на знакомство студентов со стохастическими (вероятностными) методами исследования. Они весьма необходимы для юристов, социологов, в практике работы которых важную роль играют статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основе имеющегося статистического материала.

Авторы будут весьма удовлетворены результатами своей работы, если это пособие поможет студентам хотя бы в какой-то мере осознать ошибочность противопоставления естественно-научного и гуманитарного знания.

Тем, кто более глубоко желает познакомиться с вопросами теории множеств, комбинаторики, теории вероятностей, мы рекомендуем литературу [1 - 5].

Глава 1. ИЗУЧЕНИЕ РАЗДЕЛА "МНОЖЕСТВА"

1.1 Понятие множества. Виды множеств

В основе математики лежит понятие множества. Для того чтобы определить какое-то понятие, нужно прежде всего указать, частным случаем какого более общего понятия оно является. Для понятия множества сделать это невозможно, потому что более общего понятия, чем множество, в математике нет. Разумеется, можно сказать, что множество - это "совокупность", "семейство", "класс", " несколько объектов, объединенных некоторым общим признаком и рассматриваемых как одно целое" и т.д. Однако, это было бы не математическим определением, а скорее злоупотреблением словарным богатством русского языка.

Человек, в процессе своего интеллектуального развития, приобретает смысл слова "множество" и математики этим пользуются, говоря, что "множество" - это основное понятие.

Примеры:

1 Множество статей уголовного кодекса.

2 Множество студентов в группе.

3 Множество преподавателей в аудитории.

Определение. Объекты, составляющие данное множество, называются его *элементами.*

Пример: Множество дней недели состоит из элементов: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье.

Множества и их элементы обозначаются буквами. Мы будем использовать строчные буквы a, $в$, c,... для обозначения элементов, а прописные A, B, C, ... - для обозначения множеств, хотя все это относительно, так как сами множества могут быть элементами других множеств.

Символ принадлежности общепринято имеет вид: $\in$. Тогда $a \in A$ читается как "элемент a принадлежит множеству A"; отрицание принадлежности обозначается как $\overline{\in}$ или $\notin$. Запись $d \notin B$ читается как "элемент d не принадлежит множеству B".

Пример: Если A - множество дней недели, то *суббота* $\in A$, а *январь* $\notin A$.

Определение. Множество, в котором нет элементов, называется *пустое* и обозначается: $\varnothing$.

Пример: Множество людей, имеющих рост выше 3 м.

Определение. Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Эти множества наиболее часто рассматриваются в математике.

Примеры:

1 N - множество всех натуральных чисел.

2 Z - множество всех целых чисел.

3 Q - множество всех рациональных чисел.

4 R - множество всех действительных чисел.

Определение. Множество, количество элементов которого, выражается некоторым целым положительным числом, называется *конечным*.

Примеры: Множество студентов-отличников в университете, множество песчинок в мешке с песком.

В пустом множестве количество элементов выражается числом 0, следовательно, оно конечное.

Определение. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным.*

Пример: множество N натуральных чисел.

Задавать множества можно как угодно, лишь бы для каждого множества и каждого объекта можно было бы установить, является ли данный объект элементом данного множества.

Пример: $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ означает, что A состоит в точности из n элементов: a_i, $i = 1, \ldots, n$.

Если конечное множество можно задать, перечислив все элементы, то как же задавать бесконечные множества?

Бесконечные множества можно задавать указанием определяющего или *характеристического* свойства его элементов. Свойство называется характеристическим для некоторого множества, если этому множеству принадлежат в точности те элементы, которые обладают данными свойствами. Например: свойство "быть кубом натурального числа" задает бесконечное множество чисел: $\{1^3, 2^3, 3^3, \ldots\}$ или $\{1, 8, 27, \ldots\}$.

Запись $\{x$: x является кубом натурального числа$\}$ читается "множество тех x, которые являются кубами натуральных чисел".

Вообще, обозначив символом $P(x)$ характеристическое свойство элементов множества A, будем писать: $A = \{x: P(x)\}$.

В такой форме можно задавать любые (и конечные, и бесконечные) множества.

Примеры:

1 $\left\{x : x^2 + 5x + 4 = 0\right\}$ - множество корней уравнения $x^2 + 5x + 4 = 0$.

2 $\{a$: $a = \frac{p}{q}$, где p и q - целые числа; $q \neq 0\}$ - множество рациональных чисел.

3 {студент юр. фак-та: отличник} - множество отличников на юридическом факультете.

Нередко одно множество оказывается частью другого множества. Например: множество всех женщин составляет часть множества всех людей; множество четных чисел - часть множества целых чисел. Для описания этой ситуации используется термин "подмножество".

Определение. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Обозначение. $A \subset B$. Читается: "A входит в B", или "A содержится в B", или "B содержит A".

Пример: $N \subset Z \subset Q \subset R$ (Множество натуральных чисел входит во множество целых чисел, которое входит во множество рациональных чисел, которое, в свою очередь, входит во множество действительных чисел).

Из определения подмножества видно, что всякое множество является подмножеством самого себя: $A \subset A$. Будем считать, что пустое множество $\varnothing$ есть подмножество любого множества: $\varnothing \subset A$.

Исключив эти "крайние" случаи (т.е. $\varnothing$, A), мы получим, так называемые, *собственные подмножества* множества A, т.е. такие, которые не пусты и не совпадают с A.

Изучив этот раздел, студент должен знать ответы на вопросы:

1 Какой смысл вкладывают математики в понятия: множество, элементы множества, подмножества?

2 Какие формальные обозначения используются для множеств, элементов, для связи элементов и множеств?

3 Какие существуют виды множеств?

4 Что значит "задать множество" и как это сделать?

Естественно, Ваши ответы нельзя считать полными, если Вы не сможете самостоятельно привести примеры ("свои" примеры).

1.2 Операции над множествами

Определение. Множества A и B *равны*, если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$ (т.е. *всякий элемент A принадлежит B и наоборот*).

Обозначение: $A = B$.

В случае равенства множества A и B оказываются состоящими из одних и тех же элементов.

Примеры: 1 Если A есть множество корней уравнения $x^2+5x+4=0$, B есть множество, состоящее из двух элементов: - 1 и - 4, то $A = B$.

2 В городе в течение некоторого времени совершено два похожих ограбления. Оказалось, что действовала одна и та же группировка. Если A - множество лиц, совершивших первое ограбление, а B - множество лиц, совершивших второе ограбление, то $A = B$.

Множества можно комбинировать между собой и получать другие множества. Среди бесчисленного количества мыслимых способов комбинирования некоторые оказались полезными.

Определение. *Объединением* (*суммой*) двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

Обозначение: $C = A \cup B$.

Примеры:

1 Если $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, тогда $C = A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

2 Если A - множество студентов, не сдавших первый экзамен, B - второй, то $A \cup B$ - множество студентов-задолженников после двух экзаменов (не исключено, что кто-то не сдал оба экзамена).

Аналогично определяется объединение любого количества множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$.

Обозначение: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ - для конечного числа n множеств; $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ - для бесконечного числа множеств.

Построенные объединения (суммы) состоят из всех элементов, входящих по крайней мере в одно из множеств A_k.

Пример: $A_k = \{k\}$ - натуральное число k, тогда

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = N$ - множество натуральных чисел.

Определение. *Пересечением* (*произведением*) множеств A и B называется множество C, состоящее из тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому из множеств A и B.

Обозначение: $C = A \cap B$.

Пример: Пусть $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, тогда $C = A \cap B = \{2; 3\}$.

Аналогично определяется пересечение для любого количества множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$.

Обозначение: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ - для конечного числа n множеств; $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ - для бесконечного числа множеств.

Пример: Студент, сдавший все экзамены на "отлично", получает повышенную стипендию. Сессия состоит из четырех экзаменов. Пусть A_i - множество студентов, сдавших i-й экзамен на "отлично" ($i = 1, 2, 3, 4$), тогда $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = = \bigcap_{i=1}^{4} A_i$ - множество студентов, получающих повышенную стипендию.

Определение. *Разностью* множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множества A, не входящих в B.

Обозначение: $C = A \setminus B$.

Если в предыдущем примере рассмотреть $A_1 \setminus A_2$, то получим множество студентов, получивших "отлично" на первом экзамене, а на втором - другую оценку.

Определение. Если $B \subset A$, то множество $C = A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A.

Обозначение: $\overline{B}$ или $\overline{B}_A = A \setminus B$.

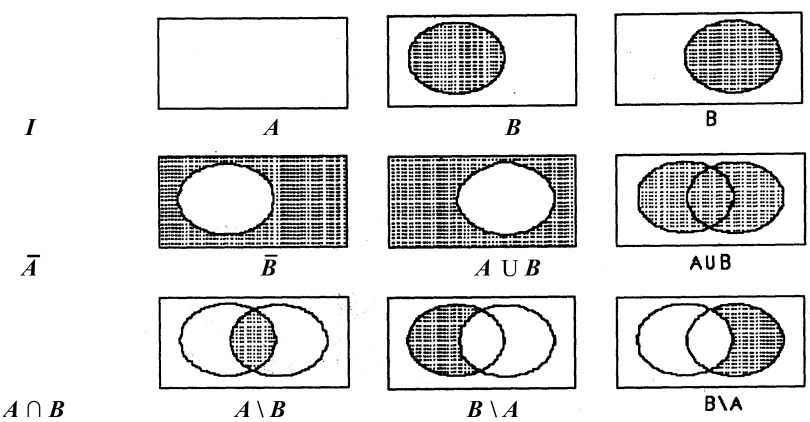
Пример: A - множество студентов в группе; B - множество студентов, сдавших первый экзамен, тогда $\overline{B}$ - множество студентов группы, не сдавших первый экзамен.

Обычно все множества, которые рассматриваются в том или ином рассуждении, являются подмножествами некоторого "самого большого" множества I. Это множество называется *универсальным*.

Задача. Пусть универсальным множеством I является множество всех учащихся данной школы. Какие множества при этом условии можно рассматривать?

Ответ: Множества, состоящие только из учащихся данной школы.

Операции над множествами имеют наглядное представление с помощью диаграмм*, на которых множества представлены в виде кругов, и те области, где лежат нужные элементы, выделены. Эти диаграммы называются *диаграммами Венна***:



* В переводе с греческого диаграмма - изображение, рисунок, чертеж.

** Джон Венн (1834 - 1923) - английский логик.

Есть и другой способ проиллюстрировать операции над множествами. Составим так называемую *таблицу вхождения элементов в множества* по следующему правилу: рассмотрим все возможные случаи вхождения фиксированного элемента в множества A и B и их комбинации. Результат принадлежности этого элемента множествам A и B отметим в первых двух столбцах таблицы (цифрой 1 - если элемент входит в данное множество, цифрой 0 - если не входит). Получится четыре случая и, соответственно, четыре строчки в таблице. Столбцы, соответствующие операциям $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, заполним согласно определениям этих операций.

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	0
0	0	0	0	0

Например, вторая строка в таблице читается так: если элемент входит в A, но не входит в B, то он входит в $A \cup B$, не входит в $A \cap B$, но входит в $A \setminus B$.

Познакомившись с операциями над множествами, со способами их иллюстрации (наглядного представления), можно решать задачи на конструирование новых, более сложных множеств. Существенную помощь в этой работе может оказать знание *свойств операций над множествами*. Чтобы понять их "полезность", вспомним некоторые свойства операций над числами. Вы ими автоматически пользуетесь на практике, когда это упрощает расчеты.

Пусть, например, надо найти сумму 123 + 989 + 11. Можно сложить 123 с 989 и к полученной сумме прибавить 11, но можно заметить, что 123 + 989 + 11 = 123 + + (989 + 11) = 123 + 1000 = 1123. Здесь использовано свойство ассоциативности суммы: любые, рядом стоящие слагаемые, можно объединять скобками. Или $98 \cdot 3 + 98 \cdot 5 + 98 \cdot 2 = 98(3+5+2) = 98 \cdot 10 = 980$. Здесь использован дистрибутивный (распределительный) закон (свойство) умножения относительно сложения и т.п.

Рассмотрим некоторые важные свойства операций объединения, пересечения и разности. Пусть A, B, C являются подмножествами для универсального множества I.

1) $A \cup B = B \cup A$. 1') $A \cap B = B \cap A$.

Эти тождества выражают *коммутативность* операций объединения и пересечения.

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. 2') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Эти тождества выражают *ассоциативность* операций объединения и пересечения.

3) $A \cup A = A$. 3') $A \cap A = A$.

Эти тождества называются *законами идемпотентности*.

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Эти тождества называются *законами дистрибутивности*.

5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. 5') $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Эти тождества называются *законами де Моргана*[*].

[*] А. де Морган (1806 - 1871) - шотландский математик.

6) $A \cup \varnothing = A$. 6') $A \cap I = A$.

7) $A \cup \overline{A} = I$. 7' $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Докажем свойство 5 на основе таблицы вхождения элементов в множества:

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Из таблицы вхождения элементов в множества видно, что при различных вариантах вхождения элемента в множества A, B он одновременно входит или не входит в $\overline{A \cup B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$. Значит, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Задача. Докажите включение $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$.

Решение: Построим таблицу вхождения элементов для левой и правой части доказываемого соотношения:

A	B	C	$B \setminus C$	$B \setminus A$	$(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$	$A \setminus C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Рассматривая разные варианты вхождения элемента в множества A, B, C, мы видим, что, если элемент входит в $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$, то он входит и в $A \setminus C$, т.е. $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$ (заметим, что обратное соотношение неверно).

Рассмотрим более подробно конечные множества. Пусть A - конечное множество. Через $m(A)$ (читается: "мера множества A") обозначим количество элементов во множестве A.

Свойство 1. Число подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

Например: $A = \{1, 2, 3\}$. Подмножества: $A_0 = \varnothing$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{1, 2\}$, $A_5 = \{1, 3\}$, $A_6 = \{2, 3\}$, $A_7 = \{1, 2, 3\}$, всего $8 = 2^3$, так как $n = 3$.

Задача. Преступники решили ограбить дом, в котором проживает семья из пяти человек: муж, жена, двое детей и мать жены. Сколько различных ситуаций (по количеству людей, находящихся в доме) их может ожидать?

Ответ: $2^5 = 32$ ситуации.

Свойство 2. Если A и B - конечные множества, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, так как общие элементы множеств A и B включаются в объединение только один раз.

Задача. Из 220 школьников 163 умеют играть в хоккей, 175 - в футбол, 24 не умеют играть в эти игры. Сколько школьников одновременно умеет играть в хоккей и футбол?

Решение. Пусть S - множество всех школьников; Φ - множество школьников, умеющих играть в футбол; X - множество школьников, умеющих играть в хоккей; H - множество школьников, не умеющих играть ни в футбол, ни в хоккей. Тогда $m(S) = 220$, $m(X) = 163$, $m(\Phi) = 175$, $m(H) = 24$.

Необходимо найти $m(\Phi \cap X)$.

Из условия задачи заключаем, что $m(S) = m(\Phi \cup X) + m(H)$, но $m(\Phi \cup X) = m(\Phi) + m(X) - m(\Phi \cap X)$.

Тогда $m(\Phi \cap X) = m(\Phi) + m(X) + m(H) - m(S) = 163 + 175 + 24 - 220 = 142.$

Для случая трех множеств (A_1, A_2 и A_3) свойство 2 запишется в виде:

$$m(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) -$$
$$-\left[m(A_1 \cap A_2) + m(A_1 \cap A_3) + m(A_2 \cap A_3)\right] + m(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Задача. В студенческой группе 25 человек. Во время летних каникул 9 из них выезжали в турпоездки за границу, 12 - путешествовали по России, 15 - отдыхали в Сочи, 6 - путешествовали за границей и по России, 7 - были и за границей и в Сочи, 8 - и путешествовали по России и были в Сочи, 3 - участвовали во всех трех поездках. Сколько студентов никуда не выезжало?

Решение: Пусть Г - множество студентов, выезжавших за границу; Р - множество студентов, путешествовавших по России; С - множество студентов, отдыхавших в Сочи.

Тогда множество студентов, выезжавших хотя бы куда-то из города, есть $\Gamma \cup P \cup C$. Так как 9 + 12 + 15 = 36 > 25, то множества Г, Р, С пересекаются (это видно из условия, так как некоторые студенты были в различных поездках) и

$$m(\Gamma \cup P \cup C) = m(\Gamma) + m(P) + m(C) - m(\Gamma \cap P) - m(\Gamma \cap C) - m(P \cap C) +$$
$$+ m(\Gamma \cap P \cap C).$$

Имеем m(Г) = 9, m(Р) = 12, m(С) = 15, $m(\Gamma \cap P) = 6$, $m(\Gamma \cap C) = 7$, $m(P \cap C) = 8$, $m(\Gamma \cap P \cap C) = 3$.

Тогда $m(\Gamma \cup P \cup C)$ = 9 + 12 + 15 - 6 - 7 - 8 + 3 = 39 - 21 = 18, а из города никуда не выезжало 25 - 18 = 7 (студентов).

Изучив этот раздел, студент должен знать:

- условие равенства множеств;
- определение основных операций над множествами: объединения, пересечения, разности и дополнения;
- способы иллюстраций операций над множествами;
- свойства операций над множествами и способы их доказательства;
- два свойства конечных множеств.

и, естественно, уметь решать задачи. Как сказал замечательный венгерский математик Д. Пойа: "Умение решать задачи - практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах, или игре на фортепьяно: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь".

Поэтому с целью закрепления основных положений теории и наработки практических навыков решите самостоятельно нижеследующие задачи.

1.3 Задачи на множества

1 Пусть A - множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, а $B = \{0; 2\}$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2 Когда $A \cap B = A$?

3 Когда справедливо равенство $A \cap B = A \cup B$?

4 Пусть A и B - некоторые множества. Найти все такие множества X, что $A \cap X = A \cap B.$

5 Определить подмножества A и B множества C, если

а) $A \cup B = \overline{A};$ б) $A \cap B = \overline{A}.$

6 Доказать, что для любых множеств A и B соотношения $A \subset B$, $\overline{A} \supset \overline{B}$, $A \cup B = B,\ A \cap B = A,\ A \setminus B = \varnothing$ равносильны.

7 Обязаны ли совпадать множества A и B, если:

а) $\overline{A} = \overline{B};$ б) $A \cup C = B \cup C$ (C - некоторое множество);

в) $A \cap C = B \cap C$ (C - некоторое множество); г) $A \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup B);$

д) $A\bigcap(A\setminus B)=B\bigcap(B\setminus A)$; е) $A\bigcap(A\setminus B)=B\bigcap(A\setminus B)$; ж) $A\setminus B=\varnothing$.

В случае возможного несовпадения множеств A и B, привести соответствующий пример, используя диаграммы Венна.

8 Двое играют в шахматы. Обозначим: A - множество партий, в которых выиграл первый игрок; B - множество партий, в которых выиграл второй игрок. Описать множества:

$$A\bigcup B,\ \overline{A\bigcup B},\ A\bigcap B,\ \overline{A}\bigcap\overline{B},\ \overline{B}\setminus A,\ \overline{A}\setminus B,\ B\setminus A,\ A\setminus\overline{B}.$$

9 Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $R_1 < R_2 < \ldots < R_{10}$. Множество A_k есть множество попаданий в круг радиуса R_k. Описать множества:

$$B=A_1\bigcup A_3\bigcup A_6;\ C=A_2\bigcap A_4\bigcap A_6\bigcap A_8;\ D=(A_1\bigcup A_3)\bigcap A_6.$$

10 Даны множества A и B, причем $A\subset V$, $B\subset V$, и $A\bigcap B=\varnothing$. Изобразите при помощи диаграмм Венна следующие множества:

$\overline{A\bigcap B}$, $A\bigcap\overline{B}$, $\overline{A}\bigcap\overline{B}$, $\overline{A\bigcup B}$, $\overline{A}\bigcup\overline{B}$, $\overline{A}\bigcup B$, $\overline{A}\setminus B$, $A\setminus\overline{B}$.

11 Какое из двух множеств является подмножеством другого:

P и $P\bigcap Q$, P и $P\bigcup Q$?

12 Какие из следующих равенств верны для любых множеств; верны для некоторых множеств; бессмысленны:

$P\bigcup Q=Q\bigcup P$; $P\bigcap Q=Q\bigcap P$; $P\bigcup P=2P$; $P\bigcap P=P^2$;

$P\bigcup(Q\bigcup R)=(P\bigcup R)\bigcup Q$; $P\bigcap(Q\bigcap R)=(Q\bigcap P)\bigcap R$; $P\bigcup Q=P\bigcap Q$;

$P\bigcup(Q\bigcap R)=(P\bigcup Q)\bigcap R$?

13 Доказать тождества:

а) $(A\setminus B)\bigcap C=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$; б) $A\bigcap B\bigcap C=A\setminus(A\setminus(B\bigcap C))$;

в) $(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)=A\setminus(B\bigcap C)$; г) $(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)=A\setminus(B\bigcup C)$;

д) $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)\bigcup(C\setminus A)\bigcup(A\bigcap B\bigcap C)=A\bigcup B\bigcup C$; е) $\overline{A\setminus B}=\overline{A}\bigcup(A\bigcap B)$;

ж) $\overline{A}\bigcup\overline{(B\bigcup C)}=\overline{(A\bigcap B)}\bigcap\overline{(A\bigcap C)}$.

14 Докажите включения:

а) $A\bigcap B\subset A\bigcup B$; б) $(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap D)\subset(A\bigcup B)\bigcap(C\bigcup D)$;

в) $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)\subset A\setminus C$; г) $A\setminus C\subset(A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)$;

д) $(A\bigcup C)\setminus B\subset(A\setminus B)\bigcup C$.

15 Пусть X - конечное множество, A - подмножество множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не пересекающихся с множеством?

16 Пусть X - конечное множество, A - подмножество множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не содержащих множество A?

17 По итогам экзаменов из 37-ми студентов отличную оценку по математике имели 15 студентов, по физике - 16, по химии - 19, по математике и физике - 7, по математике и химии - 9, по физике и химии - 6, по всем трем предметам - 4. Сколько студентов получили хотя бы по одной отличной оценке?

18 Каждый из членов команды играет либо в футбол, либо в теннис, либо в футбол и теннис. Сколько человек в команде, если известно, что 18 человек играют в обе игры, 23 человека играют в футбол, 21 - в теннис?

19 Выбрано некоторое множество натуральных чисел. Известно, что среди них имеется 100 чисел, кратных 2; 115 чисел, кратных 3; 120 чисел, кратных 5; 45 чисел, кратных 6; 38 чисел, кратных 10; 50 чисел, кратных 15; 20 чисел, кратных 30. Сколько элементов в заданном множестве?

20 Староста курса представил следующий отчет о физкультурной работе.

Всего - 45 студентов. Футбольная секция - 25 человек, баскетбольная секция - 30 человек, шахматная секция - 28 человек, футбольная и баскетбольная - 16, футбольная и шахматная - 18, баскетбольная и шахматная - 17. Три секции - 15 человек. Объясните, почему отчет не был принят?

21 В течение 30-ти дней сентября было 12 дождливых, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, 2 ветреных и холодных, а один день был и дождливый, и ветреный, и холодный. В течение скольких дней в сентябре была хорошая погода?

22 В одном из отделов научно-исследовательского института работают несколько человек, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык, причем 6 человек знают английский язык, 6 - немецкий язык, 7 - французский язык, 4 знают английский и немецкий, 3 - немецкий и французский, 2 - французский и английский, один человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько человек знает только один язык?

23 В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 - физический, 10 учеников не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

24 а) Из 100 школьников 40 играют в футбол, а 50 - в волейбол. Что можно сказать о числе школьников, играющих в обе игры? О числе школьников, играющих хотя бы в одну из этих игр?

б) Из 80 школьников 40 играют в футбол, а 50 - в волейбол. Что можно сказать о числе школьников, играющих в обе игры? О числе школьников, играющих хотя бы в одну из этих игр?

25 В колонии находится 500 заключенных, каждый из которых осужден хотя бы по одной статье (№ A, № B, № C) Уголовного кодекса. Известно, что к 127 заключенным применялась статья A, к 210 - статья B, к 260 - статья C, к 80 - одновременно статья A и статья B, к 20 статьи A и C и к 45 - статьи B и C. Имеются ли в колонии заключенные, осужденные по всем трем статьям и, если имеются, то сколько их?

1.4 Комбинаторика

Комбинаторика - раздел элементарной математики, в котором изучаются некоторые операции над конечными множествами, т.е. над определенным числом предметов (безразлично какой природы, например: букв, чисел, геометрических фигур и т.п.). Основными и типичными операциями и связанными с ними задачами комбинаторики являются следующие:

1 *Упорядочение множества,* состоящее в установлении определенного порядка следования элементов множества друг за другом. Пусть множество состоит из n элементов; после упорядочения они образуют конечную последовательность $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ (a_1 - первый элемент, a_2 - второй элемент, ..., a_n - n-й элемент), которую называют упорядоченным множеством или *перестановкой из n элементов.* В связи с этой операцией ставится задача определения числа различных способов упорядочить данное множество, т.е. числа всех перестановок из n элементов. Это число обозначается через P_n. Можно доказать, что $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n!$ (Знак $n!$ читается: "n факториал); полагают, что $0! = 1$. Например, множество из трех цифр 1, 2, 3 можно упорядочить шестью ($3! = 6$) способами, т.е. составить шесть трехзначных чисел: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

2 *Образование подмножеств,* состоящее в выделении из данного мно-жества M некоторой части его элементов, его подмножества. Если M содержит n элементов, то любое подмножество множества M, содержащее k элементов (k = 0, 1, 2, ..., n), называется *сочетанием* из n элементов данного множества по k элементов.

В связи с этой операцией ставится задача определения числа всевозможных сочетаний из n элементов по k элементов. Это число обозначается через C_n^k. Можно доказать, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}.$$

Например, для множества из трех элементов 1, 2, 3 можно образовать три $\left(C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3\right)$ подмножества, содержащих каждое по два элемента данного множества, т.е. существуют три сочетания из трех элементов по два: (1, 2); (1, 3); (2, 3).

Образование упорядоченных подмножеств приводит к понятию *размещения* из n элементов по k элементов; так называется каждое упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов данного множества (содержащего n элементов); при этом считается, что пустое множество (как и множество, состоящее из одного элемента) может быть упорядочено единственным образом. Число размещений из n элементов по k элементов обозначается через A_n^k, оно равно $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$.

Так как число подмножеств множества из n элементов, состоящих из k элементов, равно C_n^k и каждое из них может быть упорядочено P_k способами, то справедливо соотношение

$$A_n^k = P_k C_n^k$$

между тремя основными комбинаторными операциями P_k, C_n^k и A_n^k.

Например, для множества из трех элементов 1, 2, 3 можно образовать шесть $\left(A_3^2 = 3\cdot 2 = 6\right)$ упорядоченных подмножеств, содержащих по два элемента каждое: (1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (2, 3); (3, 2).

Таким образом:

перестановки - множества, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся их порядком;

сочетания - подмножества данного множества, отличающиеся (между собой) хотя бы одним элементом;

размещения - подмножества данного множества, отличающиеся или составом элементов или их порядком.

В решении определенного класса задач принято говорить не о комбинациях, а о выборках. Поэтому перестановки, сочетания, размещения - это различные виды выборок. Как мы увидим дальше, выборки могут в отличие от множеств включать повторно тот или иной элемент.

Комбинаторные задачи часто встречаются в практической деятельности юристов. Эти задачи связаны: а) с выбором из некоторой группы объектов тех, которые обладают заданными свойствами; б) с расположением этих объектов в определенном порядке; в) с расчетом числа возможных комбинаций. Ниже мы приводим примеры таких задач и обсуждаем способы их решения.

Задача. По уголовному делу проходят четыре подозреваемых: Андрей, Василий, Сергей и Дмитрий. Результат следствия зависит от многих причин, в том числе:

- в каком порядке подозреваемые будут вызваны на допрос;
- смогут ли подозреваемые общаться в процессе следствия.

Все возможные ситуации следователь должен не только проанализировать с качественной точки зрения, но и просчитать количественно, а именно:

1 Сколько различных вариантов вызова подозреваемых на допрос имеет сле-дователь?

2 Сколько существует различных вариантов "расселения" подозреваемых по камерам предварительного заключения, если следователь может "подселять" по два подозреваемых в каждую камеру?

3 Сколько существует различных вариантов вызова на допрос подозреваемых, в зависимости от их "парного" расселения по камерам?

Решение: Переведем задачу на язык математики.

Дано множество подозреваемых P, содержащее четыре элемента: a, b, c, d (соответствующие начальным буквам имен подозреваемых).

1 Сколько различных перестановок можно составить из четырех элементов?

2 Сколько различных сочетаний можно образовать из четырех элементов по два?

3 Сколько различных размещений можно образовать из четырех элементов по два?

Имеем: 1) $P_4 = 4! = 24$; 2) $C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$; 3) $A_4^2 = 4\cdot 3 = 12$.

Возвращаясь к первоначальной (юридической) постановке задачи, запишем ответы.

1 Следователь может организовать допрос подозреваемых 24-мя способами (организовать последовательность допроса).

2 Следователь может "расселить" подозреваемых по камерам шестью способами (и таким образом учесть нежелательные контакты).

3 Следователь может 12-ю различными способами организовать допрос подозреваемых, расселенных по камерам.

Мы рассмотрели ситуацию, когда все элементы исходного множества различные и строятся перестановки, сочетания, размещения, не содержащие одинаковых элементов ("внутри" себя).

На практике встречаются задачи, когда из элементов исходного множества образуют выборки, в которые один и тот же элемент исходного множества может входить несколько раз.

Рассмотрим **задачу**. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 3 и 5?

Решение: "Исходное" множество состоит из двух элементов: 3 и 5. Мы будем образовывать выборки, состоящие из трех элементов. Это 333; 335; 353; 355; 533; 535; 553 и 555. Эти выборки отличаются между собой или составом или порядком элементов, следовательно, это размещения, но не обычные, так как число элементов - 2, а выборки - размещения образуются по три элемента, предполагая, что какой-то элемент будет входить в них не один раз.

Такие размещения называют размещениями с повторениями. Их количество определяется числом m^k, где m - число элементов; k - максимальное число повторений элемента в размещении. Обозначают: $\overline{A}_m^k = m^k$.

В рассмотренной задаче m = 2, k = 3, поэтому $\overline{A}_2^3$ = 2^3 = 8. Эта задача может иметь и практическую постановку.

Задача. Водитель автомобиля нарушил правила дорожного движения и не остановился на сигнал автоинспектора. Автоинспектор запомнил буквенную часть номера автомобиля, а относительно цифровой был уверен только в том, что в ней не может быть никаких других цифр, кроме 3 и 5, которые можно легко между собой спутать. Сколько машин надо проверить по номерам регистрации, чтобы найти нарушителя, если регистрационный номер автомобиля - трехзначный?

Решение: Переводим задачу на язык математики. Имеется множество, содержащее две различные цифры: 3 и 5. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью этих цифр? Мы получили постановку предыдущей задачи, поэтому ответ звучит так: автоинспекция должна проверить 8 автомобилей.

Рассмотрим теперь следующую **задачу.** В меню ресторана имеется два "изысканных" блюда. Сколькими способами можно обслужить компанию из трех человек?

Решение: Обозначим первое из "изысканных" блюд буквой A, а второе - буквой B. Тогда возможны следующие ситуации выборки, содержащие три элемента: AAA, AAB, ABB, BBB - всего четыре. Любые две выборки отличаются хотя бы одним элементом, следовательно, это сочетания, но сочетания не обычные, так как содержат повторяющиеся элементы. Такие сочетания называют сочетаниями с повторениями и обозначают $\overline{C}_n^k$, где k - количество элементов в выборке, а n - количество элементов множества, из которого строятся выборки. Количество сочетаний с повторениями подсчитывается по формуле $\overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ = C_{n+k-1}^k - сочетание без повторений.

В рассмотренной задаче k = 3, n = 2, поэтому $\overline{C}_2^3 = C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$.

Таким образом, официант может обслужить компанию четырьмя способами.

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Задача. В течение недели служащий некоторой компании с непрерывным циклом работы должен (согласно контракта) находиться на работе четыре рабочих дня, отдыхать три дня. Сколькими способами может служащий организовать свою работу в течение недели, если ему предоставлено право выбора?

Решение: Обозначим условно дни работы буквой "Р", отдыха - буквой "О". Тогда один из вариантов рабочей недели можно представить следующим образом: РРОРОРО. Напрашивается мысль, что, образуя другие перестановки и подсчитав их количество, мы решим задачу, т.е. ответ: $P_7 = 7! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot 7 = 5040$. Однако, поменяв местами, например, два первых "Р" или любые два "О", мы не изменим сути: рабочий день останется рабочим, день отдыха им же и останется. Но если поменять любое "Р" с любым "О" местами, то получим другую перестановку. Имеет место случай *перестановок с повторениями*. Очевидно, что их меньше, чем перестановок без повторений. Формула для вычисления перестановок с повторениями для двух элементов, первый из которых повторяется n_1 раз, а второй - n_2 раз, имеет вид $P_{n_1, n_2} = \frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}$. В нашей задаче $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, поэтому $P_{4,3} = \frac{(4+3)!}{4!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$.

Ответ: Служащий может организовать свою рабочую неделю 35 способами.

В случае трех элементов формула имеет вид $P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$ и т.д.

Изучив этот раздел, студент должен знать:

- определения перестановок, сочетаний, размещений, как основных видов комбинаций;
- формулы для вычисления перестановок, сочетаний, размещений, как без повторений, так и с повторениями.

При решении комбинаторных задач некоторые сложности вызывает определение вида комбинации. Чтобы определять вид комбинации безошибочно, надо не только знать определение, но и иметь достаточный опыт решения задач. Постарайтесь решить самостоятельно задачи из раздела 1.5 и попробовать составить новые задачи.

1.5 Задачи по комбинаторике

1 Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены все возможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел?

2 В магазине имеется 6 сортов шоколадных конфет и 4 сорта карамели. Сколько различных покупок конфет одного сорта можно сделать в этом магазине? Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?

3 Имеется 5 билетов денежно-вещевой лотереи, 6 билетов спортлото и 10 билетов автомотолотереи. Сколькими способами можно выбрать один билет спортлото или автомотолотереи?

4 В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2 санитара. Сколькими способами можно выбрать одного солдата так, чтобы он был разведчиком или санитаром? Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?

5 Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеются 3 первых, 4 вторых и 2 третьих блюда?

6 Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число $*\,2\,*5$? В число $*\,3\,*\,7$?

7 У одного человека имеется 7 книг по математике, а у другого - 9. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?

8 Сколько различных трехзначных чисел, меньших 400, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 при условии, что цифры в числе не должны повторяться? Решите ту же задачу при условии допустимости повторения цифр.

9 В букинистическом магазине продаются 6 экземпляров романа И. С. Тургенева "Рудин", 3 экземпляра романа "Дворянское гнездо" и 4 экземпляра романа "Отцы и дети". Кроме того, имеется пять томов, состоящих из романов "Рудин" и "Дворянское гнездо", и семь томов, состоящих из романов "Дворянское гнездо" и "Отцы и дети". Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую каждый из этих романов в единственном числе?

10 В магазине имеется 5 сортов конфет. Сколько различных покупок, содержащих не более трех сортов конфет, можно сделать в этом магазине (покупки считаются одинаковыми, если они состоят из одинаковых сортов конфет)?

11 Сколько можно составить двухзначных или трехзначных чисел из нечетных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется?

12 У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ребенку дают не более трех разных имен?

13 В дежурном подразделении отделения милиции работают 5 офицеров, 12 сержантов и 20 рядовых. Дежурный наряд состоит из 2-х офицеров, один из которых назначается старшим, 3-х сержантов и 5-ти рядовых. Сколькими способами можно укомплектовать дежурный наряд?

14 Небольшая поселковая улица состоит из 12-ти домов с приусадебными участками. Жизнь в поселке сложилась так, что хозяин каждого дома поссорился со своими соседями. Кроме того, и хозяева крайних домов испытывают неприязнь друг к другу. Для выполнения коллективного дела потребовалось 5 мужчин из числа хозяев. Сколькими способами можно отобрать такую пятерку, чтобы между ее членами не было распри?

15 Выпускнику средней школы, поступающему в вуз, необходимо сдать 4 экзамена и набрать на них не менее 17-ти баллов (двойки при этом получать нельзя). Сколько существует разных наборов экзаменационных оценок, дающих ему право поступления?

16 Еженедельно милицейский наряд проводит профилактические рейды по "злачным" местам города. На каждого нарушителя общественного порядка заводится специальная карточка. На первой неделе были задержаны Алексеев, Борисов, Власов, Ежиков, Иванов, Савельев, Чернов, на второй - Герасимов, Курочкин, Климов, Резников, Чернов, Щукин, Яблоков, на третьей - Власов, Иванов, Савельев, Климов, Чернов, Юрский, Яковлев, на четвертой - Алексеев, Ежиков, Герасимов, Калугин, Резников, Чернов, Яковлев.

Если обозначить множества задержанных на первой неделе буквой A_1, на второй - A_2, на третьей - A_3, на четвертой - A_4, то из каких элементов будут состоять множества $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$? Сколько различных карточек было заведено милицией и сколько задержанных наиболее опасны для окружающих?

17 В областном ГИБДД решили выделить на определенный район (города, области) регистрационные номера с одним буквенным сочетанием, например, А␣ ␣ ␣МН. Районное руководство решило, в свою очередь, выделять номера, содержащие два нуля, для автомобилей государственных структур и с одним нулем - "уважаемым" людям района. Сколько "обычных" номерных знаков и знаков, содержащих один или два нуля, имеется в распоряжении районного ГИБДД?

Глава 2. ИЗУЧЕНИЕ РАЗДЕЛА "ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ"

1.1 Основные понятия

Основными понятиями этого раздела являются: испытание, событие, вероятность.

Испытание - это выполнение совокупности условий. Испытание может произойти естественным образом или по воле человека.

Событие - это результат испытания.

Примеры: 1) Небо затянулось облаками, и пошел дождь. Испытание: небо затянулось облаками; событие: пошел дождь.

2) Военнослужащий выстрелил по мишени и "выбил" семь очков.

Испытание: выстрел по мишени; событие: попадание.

3) Гражданин N прогуливался по улице и встретил гражданку M.

Испытание: продвижение по улице; событие: встреча.

Все наблюдаемые при определенных условиях события можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие - это событие, которое в результате испытания обязательно наступит.

Невозможное событие - это событие, которое в результате испытания обязательно не наступит.

Случайное событие - это событие, которое в результате испытания может наступить, а может и не наступить, т.е. исход испытания заранее неизвестен.

Пример: Испытание - раскрытие книги, в которой 100 страниц.

Обозначим события:

A - книга открыта на 10-й странице; B - книга открыта на 101-й странице; C - книга открыта на странице, номер которой не превосходит 100. Событие A - случайное, B - невозможное, C - достоверное.

Если с достоверными и невозможными событиями все более или менее просто, то со случайными событиями все неопределенно. Из повседневного опыта известно, что одни случайные события наступают довольно часто, другие менее часто или совсем редко. Слова "часто", "редко" как характеристики наступления событий очень неопределенны. Например, где проходит граница между "часто" и "редко"? Чтобы придать подобным сравнениям точный смысл, необходимо с каждым случайным событием связать число, выражающее степень возможности данного события. Это можно сделать экспериментально.

Экспериментальной характеристикой наступления случайного события (например, A) является частота (или относительная частота события A) $h_n(A)$, равная отношению числа испытаний n_A, в которых событие A наступило, к общему числу опытов n: $h_n(A) = \frac{n_A}{n}$.

Например, монета подбрасывается 10 раз, "герб" выпадает 4 раза. Здесь $n = 10$, $n_A = 4$, относительная частота $h_{10}(A) = 0{,}4$.

Экспериментально установлено, что для случайных событий частота при увеличении n становится почти постоянной. Это свойство называют *статистической устойчивостью частот* случайного события. Таким образом, с каждым событием A можно связать некоторое число $P(A)$, с которым сближается частота, и считать это число *степенью возможности события* A^*, или *вероятностью события* A.

Статистическое определение вероятности события A - это число, с которым сближается частота $h_n(A)$ при увеличении n.

Такое определение вероятности события A, как меры наступления события A, тоже довольно неопределенно. Например, сколько надо провести опытов n, чтобы $h_n(A)$ сблизилось с $P(A)$? И вообще, что понимать под словами "$h_n(A)$ сближается с $P(A)$"?

Можно попытаться ответить на эти вопросы, но общепринят другой путь, типичный для многих разделов математики, - *аксиоматический метод* для построения математической модели. Он состоит в том, что с самого начала фиксируются *аксиомы* - первичные, не подлежащие определению понятия, отражающие самые существенные стороны рассматриваемого явления. После этого из аксиом логическим путем выводятся предполагаемые свойства изучаемого явления. Это и есть тот момент, когда математика подключается к изучению реального мира.

2.2 Вероятностное пространство

Определение. *Вероятностным пространством* (или математической моделью испытания) называется конечное множество $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, каждому элементу ω_k которого поставлено в соответствие неотрицательное число p_k, причем сумма этих чисел равна 1:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1 .$$

Конечное множество Ω состоит из элементов $\omega_1, ..., \omega_n$, которые являются "обозначениями" возможных результатов (исходов) испытания. Элементы $\omega_1, ..., \omega_n$ естественно назвать элементарными исходами (элементарными событиями). Заметим, что:

1 В результате испытания появится хотя бы один из элементарных исходов.

2 Появление одного из элементарных исходов в испытании исключает появление другого элементарного исхода.

Число p_k, $k = 1, …, n$ называется вероятностью элементарного исхода ω_k, $k = 1, …, n$. Соответствие между ω_k и p_k определяется аксиоматически**, но с сохранением смысловой нагрузки, определяемой конкретным испытанием, для которого строится вероятностное пространство. Например:

а) по каким-либо соображениям симметрии мы считаем все элементарные исходы равновозможными, т.е. $p_1 = p_2 = ... = p_n$, а так как $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$, то $p_k = \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$;

б) вероятности p_k, $k = 1, …, n$ элементарных исходов ω_k, $k = 1, …, n$ определяются предварительным проведением серии опытов, в этом случае за p_k принимают относительную частоту события ω_k.

Подход а) называется классической схемой теории вероятностей, а подход б) - статистическим подходом.

2.3 Вероятность события

Пусть Ω - множество всех элементарных исходов данного испытания. С каждым событием A связывается некоторое подмножество Ω_A множества Ω. Поэтому можно дать следующее определение.

---

* Или мерой достоверности события A.

** Слово "аксиоматически", как понятно из предыдущего, математики употребляют тогда, когда они не хотят объяснять, почему они так делают. Смысл слова "вероятность" все люди понимают вообще-то одинаково и очень давно. Еще первобытный вождь понимал, что у десятка охотников вероятность поразить копьем зубра гораздо больше, чем у одного. Поэтому и охотились тогда коллективно. Математики же пытаются приспособить интуитивное понимание для применения математических способов.

Определение. Событием A при данном испытании называется любое подмножество Ω_A множества Ω всех элементарных исходов.

Определение. Благоприятствующими событию A исходами (или просто благоприятными исходами) называются элементарные исходы, в которых событие A наступит.

Определение. Вероятностью события A называется сумма вероятностей исходов, благоприятствующих этому событию $P(A) = p_{i_1} + ... + p_{i_k}$, где $\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_k}$ - благоприятные элементарные исходы для события A.

Рассмотрим классическую схему теории вероятностей, т.е. $p_k = \frac{1}{n}$, k = 1, …, n. Тогда $P(A) = p_{i_1} + ... + p_{i_k} = \frac{1}{n} \cdot k$. Определение вероятности события в этом случае можно переформулировать.

Определение (классическое определение вероятности события). Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех элементарных исходов данного испытания.

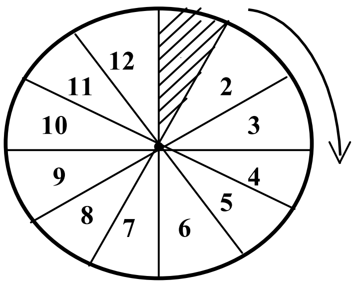
Рассмотрим примеры.

Пример: Руководство рыбхоза, желая скрыть прибыль, сознательно занижает количество рыбы в своих искусственных водоемах. Как инспектору рыбхоза определить количество рыбы, например, в одном искусственном водоеме?

Пусть в водоеме x рыб. Забрасываем сеть и, допустим, находим в ней n рыб. Каждую из них метим и выпускаем обратно. Через несколько дней в том же месте забрасываем ту же самую сеть. Допустим, что находим в ней m рыб, среди которых k меченых. Пусть событие A - "пойманная рыба мечена". Тогда относительная частота события A будет равна $h_m(A) = \frac{k}{m}$.

Но если в водоеме x рыб и мы выпустим n меченых, то согласно классическому определению событие A имеет вероятность $P(A) = \frac{n}{x}$. Так как при больших m $h_m(A) \approx P(A)$, то $x \approx \frac{m \cdot n}{k}$. Заметим, что данный способ можно применить во многих ситуациях.

Пример: В популярной телеигре "Что? Где? Когда?" стол рулетки разделен на 12 одинаковых секторов, на каждом из которых лежит конверт с вопросом. Для ответа выбирается конверт из того сектора, на который укажет стрелка рулетки. Далее по правилам игры, после того как конверт выбран, его сектор не заполняется новым, а остается пустым. Если стрелка нового раунда укажет на пустой сектор, то для ответа выбирается конверт из ближайшего сектора по часовой стрелке. По мнению организаторов игры, все вопросы равноправны, так как в любой момент игры вероятность выбора какого-то конверта с вопросом одинакова. Насколько обоснованно такое мнение?



Такое мнение организаторов не сов-сем обоснованно.

Построим вероятностную модель этой игры. Рассмотрим первый раунд (первое ис-пытание). Элементарные исходы: ω_i - стрел-ка показывает на i-й сектор, i = 1, …, 12, все ω_i равновозможны и несовместны, согласно классической схеме теории вероятности $p_i = \frac{1}{12}$, $i = 1, ..., 12.$ В начале игры вероятность выбора любого конверта одна и та же и равна вероятности элементарного исхода, т.е. $\frac{1}{12}$.

Рассмотрим второй раунд. Допустим, что в первом раунде выбор пал на 1-й сектор. Тогда перед началом 2-го раунда (второе испытание) имеем элементарные исходы ω'_i, $i = 2, ..., 12.$ Причем вероятность p'_2 вдвое больше вероятностей p'_i, $i = 3, ..., 12.$ Ведь сектор № 2 будет выбран, если стрелка остановится либо в секторе № 1, либо в секторе № 2. Следовательно, $p'_2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $p'_i = \frac{1}{12}$, $i = 3, ..., 12.$ Таким образом, уже во втором раунде будет нарушена равновероятность выбора вопросов.

Пример: По сведениям правоохранительных органов страны в город N железнодорожным транспортом прибыл преступник. Город ему незнаком, но он знает, что с железнодорожного вокзала следует идти только вперед и поворачивать можно только направо, тогда он попадет в один из двух домов, описание которых ему известно, где имеются явочные квартиры.

В городе имеются 24 квартала. На схеме, имеющейся в УВД города N (см. рис.) буквой B обозначен вокзал, буквой D_1 - первый дом, где, предположительно, может оказаться преступник, буквой D_2 - второй дом, находящийся на окраине города. Какова вероятность того, что преступник окажется в доме D_1, если с одинаковой вероятностью может пойти прямо, либо направо?

Решение: Город, согласно схеме, имеет шесть кварталов по горизонтали и четыре - по вертикали. Предположим, что дом D_1 в этом плане находится на пересечении третьей горизонтали и третьей вертикали. Если событие A - "преступник нашел дом D_1", то $P(A)=\frac{m}{n}$, где n - число всевозможных маршрутов, по которым преступник может добраться до D_2; m - число маршрутов, проходящих мимо дома D_1.

Какой бы путь ни избрал преступник, все равно ему придется пройти $6+4=10$ перекрестков. На каждом перекрестке он решает, идти ли ему прямо или повернуть направо. Те перекрестки, от которых он идет прямо, закодируем цифрой 1, а те, от которых он идет направо цифрой 0. Тогда любой из маршрутов будет закодирован выборкой из 4-х единиц и 6-ти нулей. На рисунке указанному маршруту соответствует выборка 0110001100.

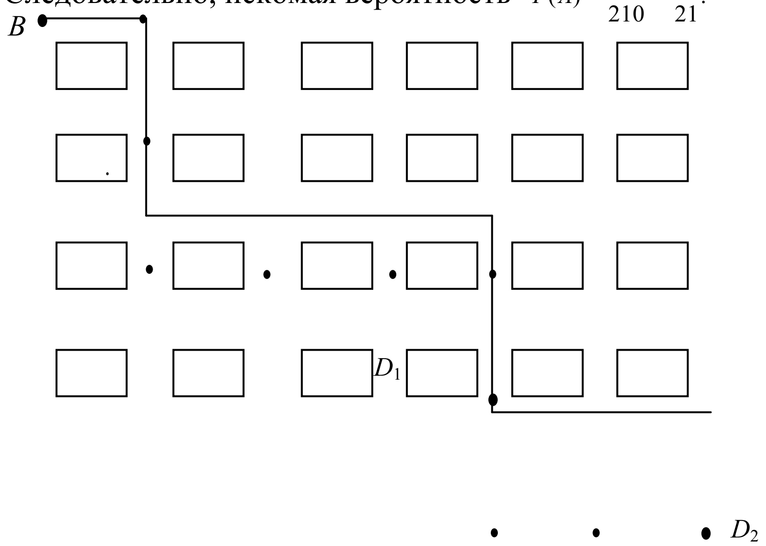
Число маршрутов от B до D_2 - число перестановок с повторениями.

$$n=P_{4,6}=\frac{(4+6)!}{4!\cdot 6!}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210\,.$$

Число маршрутов, проходящих мимо дома D_1, равно произведению числа маршрутов от B до D_1 и числа маршрутов от D_1 до D_2. Тогда

$$m=P_{3,3}\cdot P_{1,3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{1!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{4}{1}=80\,.$$

Следовательно, искомая вероятность $P(A)=\frac{80}{210}=\frac{8}{21}$.

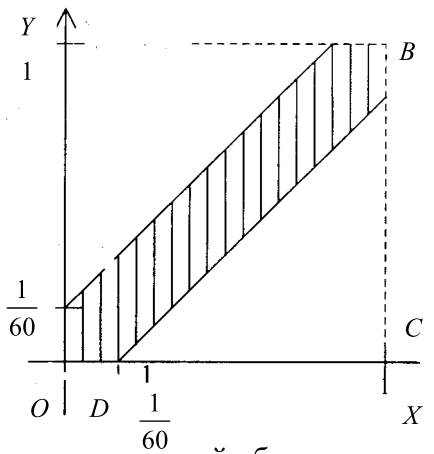


2.4 Геометрическое определение вероятности

При определении вероятностного пространства рассматривались испытания, имеющие конечное число элементарных исходов. Однако такие испытания не охватывают всех возможных типов испытаний. Во многих случаях возможные элементарные исходы образуют бесконечную, а иногда и непрерывную, совокупность.

Пример: На телефон дежурного милиционера в течение часа должны поступить два вызова. Если разность между моментами поступления звонков меньше 1 мин, то второй звонок теряется. Найти вероятность потери второго вызова.

Решение: Обозначим x, ч - момент поступления первого вызова, y, ч - мо-мент поступления второго вызова. Так как вызовы ожидаются в течение одного часа, то $0\le x\le 1$ и $0\le y\le 1$. Точку с координатами (x, y) на плоскости XOY (см. рис.) будем считать элементарным исходом в рассматриваемой ситуации. Таким образом, все элементарные



исходы лежат в площади квадрата со стороной 1 час. Обозначим событие A - "второй звонок потерян". Тогда множество точек (x, y) образуют "благоприятное" событию A множество, если различие между x и y (по абсолютной величине) не превосходит одной минуты или 1/60 часа: $|x-y| \le 1/60$ или $y - 1/60 \le \le x \le y+1/60$. На рисунке этому множеству соответствует заштрихо-ванный шестиугольник. Его площадь можно определить как разность меж-ду площадью квадрата (равную 1) и удвоенной площадью треугольника DBC: $2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{60}\right)^2$, так как $|DC|=|CB|=1-1/60$.

Все исходы равновозможны и несовместны. Поэтому за вероятность события A естественно взять отно-шение заштрихованной области ко всей площади квадрата:

$$P(A)=\frac{1-2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{60}\right)^2}{1}=1-\left(\frac{59}{60}\right)^2\approx 0{,}03\,.$$

Данный подход для определения $P(A)$ напоминает классическое определение вероятности, как отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов. Следует иметь в виду, что в данной ситуации число элементарных исходов (как всех, так и благоприятных) бесконечно. Поэтому здесь надо говорить не об отношении чисел соответствующих исходов, а об отношении площадей.

Рассмотренный пример иллюстрирует геометрическое определение вероятности.

Определение. Вероятность случайного события есть отношение площади области, благоприятствующей появлению события, к площади всей области.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда число равновозможных элементарных исходов бесконечно.

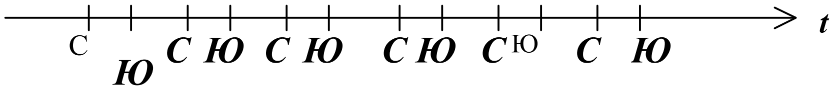
В предыдущем примере вероятность события связывалась с понятием "площадь". С таким же успехом можно связывать вероятность с "объемом", "длиной" или "величиной угла".

Пример: Курсант школы милиции на занятиях по огневой подготовке ведет стрельбу по плоской мишени, представляющей круг радиусом 20 см. Выстрел признается успешным, если курсант попадет в "яблочко" - круг радиусом 5 см в центре мишени. Какова вероятность того, что выстрел будет успешным?

Решение: Пусть событие A - "выстрел успешный". Тогда $P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ (объясните почему?).

Пример: Молодому человеку, живущему в центре Москвы, нравились две девушки - блондинка, живущая на севере, и брюнетка, живущая на юге. Обе девушки были одинаково привлекательны, и молодой человек никак не мог решить, какой из них сделать предложение. Наконец, в один прекрасный день он решил доверить свою судьбу случаю. Спускаясь в метро в центре, отправлялся на свидание к той девушке, чей поезд приходил первым. Через год он обнаружил, что с северной девушкой он встречался в два раза чаще, чем с южной. Этот факт юноша расценил как указующий перст судьбы и сделал предложение блондинке. Насколько оправдана в этой ситуации ссылка на перст судьбы?

Решение: Нанесем на временной оси моменты прихода поездов и пометим точки прихода поездов в сторону севера буквой С, а в сторону юга - буквой Ю. Предположим, что интервал между поездами в обоих направлениях один и тот же, например, 3 мин. Это значит, что расстояние между двумя последовательными буквами Ю, как и расстояние между двумя последовательными буквами С, равно 3. Однако далее предположим, что поезд в южном направлении приходит не через полторы, а через одну минуту после поезда северного направления. Тогда буквы Ю и С будут расположены так:



Видно, что вероятность попасть к "северной" девушке равна вероятности попадания в промежуток ЮС, а к "южной" - в промежуток СЮ. Поскольку первый промежуток в два раза длиннее, чем второй, то и вероятность попасть к "северной" девушке в два раза больше. Скорее всего, здесь дело не в судьбе.

2.5 Алгебра событий

Вычислять вероятность события, строя каждый раз вероятностное пространство и определяя благоприятные исходы, довольно затруднительно. Поэтому для вычисления вероятностей было бы удобно получить "общие правила", позволяющие по известным вероятностям одних событий вычислять вероятности других событий, получаемых из них с помощью некоторых операций. Поскольку событиями мы назвали подмножества в множестве элементарных исходов испытания, а над множествами мы уже умеем выполнять операции объединения, пересечения, нахождения дополнения, то такие же операции будем выполнять над событиями.

Определение. Событие *N*, которому не благоприятен ни один из элементарных исходов, называется *невозможным*.

Определение. Событие *D*, которому благоприятен любой элементарный исход, называется *достоверным*.

На языке теории множеств эти определения означают следующее: $\Omega_N = \varnothing$, $\Omega_D = \Omega$.

Определение. *Объединением* (*суммой*) событий *A* и *B* называется событие *C*, которому благоприятны все исходы, благоприятные хотя бы одному из событий *A* и *B*.

Обозначим: $C = A \cup B$ или $C = A + B$, тогда $\Omega_{A \cup B} = \Omega_A \cup \Omega_B$.

Определение. *Пересечением* (*произведением*) событий *A* и *B* называется событие *C*, которому благоприятны исходы, одновременно благоприятные и для *A*, и для *B*.

Обозначим: $C = A \cap B = A \cdot B$, тогда $\Omega_{AB} = \Omega_A \cap \Omega_B$.

Определение. Два события *A* и *B* называются *несовместными*, если их пересечением является невозможное событие $A \cdot B = N$ или $\Omega_A \cap \Omega_D = \varnothing$.

Определение. События *A* и *B* называются *противоположными* друг другу, если любой элементарный исход благоприятен одному и только одному из них.

Обозначение: $A = \overline{B}$.

Из определения $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing,\ \Omega_A \cup \Omega_B = \Omega,$ или $\overline{\Omega}_A = \Omega_B$.

Итак, мы ввели основные операции над событиями.

Поскольку операции над событиями сводятся к соответствующим операциям над множествами благоприятных им исходов, то все утверждения алгебры множеств, рассмотренные ранее, остаются справедливыми и для операций над событиями, т.е. события образуют алгебру событий.

2.6 Теоремы сложения

Приведем ряд теорем, с помощью которых можно по вероятностям одних случайных событий подсчитывать вероятности других, более сложных. Начнем с теорем, которые образуют группу с общим названием "теоремы сложения".

Теорема (теорема сложения для несовместных событий). Если события *A* и *B* несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Следствие. Если события A_1, …, A_n попарно несовместны, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Следствие. Для любого события *A* имеем: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Пример: В отдел уголовного розыска поступило сообщение о том, что 5 неизвестных лиц взломали сейф сельскохозяйственного предприятия и похитили крупную сумму денег. Свидетели успели заметить, что грабители сели в автобус, следующий по маршруту в город. Об этом сразу же была поставлена в известность милиция. Как только автобус остановился на посту автоинспекции при въезде в город, к его дверям подошел инспектор уголовного розыска и запретил водителю открывать двери автобуса. Тот сообщил инспектору, что в автобусе 40 пассажиров. Обыск может привести к значительной задержке автобуса. Инспектор успокоил водителя: "Первоначально мне достаточно проверить человек шесть пассажиров". Он предложил шестерым наугад выбранным пассажирам зайти в дежурную комнату контрольного пункта.

Один преступник был сразу обнаружен - в его кармане нашли пачку денег. Он назвал сообщников и дело было закончено.

Что руководило инспектором: риск или трезвый расчет?

Решение: Найдем вероятность того, что среди шести отобранных пассажиров есть хотя бы один преступник; обозначим соответствующее событие буквой A. Пусть событие A_k - среди случайно выбранных 6 пассажиров есть k преступников (k = 1, 2, 3, 4, 5). Тогда

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5\,;$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5)\,.$$

Вероятность того, что среди шести пассажиров, выбранных из числа сорока, k (k = 1, 2, 3, 4, 5) являются преступниками, подсчитывается по формуле

$$P(A_k) = \frac{C_5^k\, C_{35}^{6-k}}{C_{40}^6}\,,$$

тогда $P(A_1) = \dfrac{C_5^1 C_{35}^5}{C_{40}^6} \approx 0{,}4192\,;\quad P(A_2) = \dfrac{C_5^2 C_{35}^4}{C_{40}^6} \approx 0{,}1364\,;$

$$P(A_3) = \frac{C_5^3 C_{35}^3}{C_{40}^6} \approx 0{,}017\,;\qquad P(A_4) = \frac{C_5^4 C_{35}^2}{C_{40}^6} \approx 0{,}0008\,;$$

$$P(A_5) = \frac{C_5^5 C_{35}^1}{C_{40}^6} \approx 0{,}00001\,;\qquad \text{а}\quad P(A) \approx 0{,}5734\,.$$

Таким образом, вероятность того, что среди 6-ти пассажиров находится по крайней мере один преступник, оказывается больше 0,5.

По-видимому, инспектор умел пользоваться в необходимых случаях теорией вероятностей.

Теорема (теорема сложения для совместных событий). Если события A и B совместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Заметим, что предыдущая теорема является частным случаем последней теоремы, так как, если A и B несовместны, то $P(A \cap B) = 0$.

Нетрудно распространить полученную формулу на большее число событий. Например, для трех событий A, B и C имеем:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap B \cap C).$$

Пример: Группа Российских парламентариев перед поездкой в одну из стран Западной Европы совершенно не преднамеренно укомплектовала себя идентичными портфелями - дипломатами с кодовыми замками. Среди прочих бумаг и личных вещей каждый член группы имел в портфеле общие для всех программные документы визита.

При посещении одной из организаций парламентариям пришлось сдать портфели в камеру хранения, не имеющую индивидуальных ячеек, так что при получении портфелей назад возникли проблемы с их принадлежностью. Ситуация усугубилась тем, что срочно возникла необходимость посмотреть программные материалы визита. Соблюдая деликатность, каждый парламентарий взял случайно доставшийся ему портфель и, не привлекая внимание, попытался его открыть своим кодом.

Насколько успешной оказалась эта попытка? Насколько сильно зависит результат от численности группы?

Решение: Пронумеруем парламентариев: 1, 2, 3, …, n. Пусть событие A_k - "k-й парламентарий взял свой портфель". Тогда событие $A = A_1 + A_2 + \; + \ldots + A_n$ означает - "по крайней мере, один парламентарий взял свой портфель".

Поскольку события A_k (k = 1, 2, …, n) совместные, то вычисление $P(A)$ осложняется.

При $n = 2$ $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$.

При $n = 3$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) -$$
$$- P(A_2 A_2) + P(A_1 A_2 A_3).$$

Если обозначить:

$$S_{1n} = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n);$$
$$S_{2n} = P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + \ldots + P(A_{n-1}A_n);$$
$$S_{3n} = P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + \ldots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n);$$
$$\ldots$$
$$S_{nn} = P(A_1A_2A_3\ \ldots\ A_n),$$

то $P(A_1 + A_2)$ и $P(A_1 + A_2 + A_3)$ можно записать в виде

$$P(A_1 + A_2) = S_{12} - S_{22};$$
$$P(A_1 + A_2 + A_3) = S_{13} - S_{23} + S_{33}.$$

Допустим, что такая структура справедлива для суммы из n слагаемых:

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = S_{1n} - S_{2n} + S_{3n} - S_{4n} + \ldots + (-1)^{n+1} S_{nn}.$$

Проверим истинность предположения методом математической индукции. Найдем

$$P(A + A_{n+1}) = P(A) + P(A_{n+1}) - P(AA_{n+1}) =$$
$$= S_{1n} - S_{2n} + S_{3n} - S_{4n} + \ldots + (-1)^{n+1} S_{nn} + P(A_{n+1}) - P(AA_{n+1}) =$$
$$= (S_{1n} + P(A_{n+1})) - (S_{2n} + P(A_1A_{n+1}) + P(A_2A_{n+1}) + \ldots + P(A_nA_{n+1}) +$$
$$+ S_{3n} + P\left(A_1A_2A_{n+1}\right) + \ldots + P(A_{n-1}A_nA_{n+1}) + (-1)^{n+2} P(A_1A_2 \ldots A_{n+1}) =$$
$$= S_{1n+1} - S_{2n+1} + \ldots + (-1)^{n+2} S_{n+1,\ n+1}.$$

Таким образом, структура формулы сохранилась.

Подсчитаем теперь искомые вероятности, используя классическое определение вероятности.

Всего n портфелей. Они могут быть распределены среди n парламентариев $n!$ способами. Это число всевозможных событий.

Если k-й парламентарий взял свой портфель, то остальные n - 1 портфели могут быть распределены между n - 1 парламентариями (n - 1)! способами и

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Если i-й и k-й парламентарии взяли свои портфели, то остальные портфели могут быть распределены (n - 2)! способами, поэтому

$$P(A_iA_k) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{(n-1)n}.$$

Соответственно:

$$P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{(n-2)\,(n-1)n},$$
$$P(A_1A_2\ \ldots\ A_n) = \frac{1}{n!}.$$

Сумма S_{1n} имеет n членов, поэтому $S_{1n} = \frac{1}{n} n = 1$.

Сумма S_{2n} имеет C_n^2 членов, поэтому

$$S_{2n} = C_n^2 \frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}.$$

Аналогично

$$S_{3n} = \frac{1}{3!}, \quad S_{4n} = \frac{1}{4!}, \quad \ldots, \quad S_{nn} = \frac{1}{n!}.$$

Окончательно имеем:

$$P(A) = S_{1n} - S_{2n} + S_{3n} - S_{4n} + \ldots + (-1)^{n+1} S_{nn} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!};$$
$$\left(1 - 0{,}5 + 0{,}16(6) - 0{,}00416(6) + 0{,}0083(3) - 0{,}0013(8) + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}\right).$$

Найдем зависимость $P(A)$ от n:

n	$P(A)$
3	$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}66667$

4	$\frac{2}{3}-\frac{1}{24}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}=0{,}62500$
5	$\frac{5}{8}+\frac{1}{5!}=\frac{5}{8}+\frac{1}{120}=\frac{76}{120}=\frac{19}{30}\approx 0{,}63333$
6	$\frac{19}{30}-\frac{1}{6!}=\frac{19}{30}-\frac{1}{720}=\frac{455}{720}=\frac{91}{145}\approx 0{,}63196$
7	$\frac{91}{145}+\frac{1}{7!}=\frac{91}{145}+\frac{1}{5040}\approx 0{,}63214$

Таким образом, мы пришли к удивительному выводу: если число парламентариев 3 или более, то вероятность того, что хотя бы один из них возьмет свой портфель, практически одинаковая (около 0,63). Эта вероятность превышает 0,5, поэтому попытка открыть своим кодом случайно взятый портфель может быть удачной.

2.7 Условные вероятности. Зависимые и независимые события

Рассмотрим ситуацию, когда вероятность события зависит от некоторого другого, связанного с ним события.

На столе у экзаменатора 20 билетов. Студент N успел подготовить ответы, гарантирующие положительную оценку, только на 15 из них. Надеясь на успех и все же немного остерегаясь неудачи, он решил "тянуть" билет вторым. Когда он увидел, какое задание досталось студенту M, решившему отвечать первым, то очень обрадовался. Почему?

Очевидно, что радость студента N связана с происшедшим со студентом M событием, а именно: студенту M достался не изученный студентом N билет и он решил, что у него увеличился шанс сдать экзамен. Действительно, пусть событие A - студенту N достались задания "изученного" билета. Если бы он пошел отвечать первым, то вероятность $P(A)$ = 15/20. Он решил отвечать вторым. Пусть событие B - студенту M достался билет, "неизученный" студентом N, тогда вероятность $P(A)$ = 15/19, так как из 19-ти оставшихся билетов он знает 15. Так как 15/19 > 15/20, то у него действительно увеличился шанс сдать экзамен.

Если бы произошло событие $\bar{B}$ - студенту M достался билет, изученный студентом N, то $P(A)$ стала бы равной 14/19. Так как 14/19 < 15/20, то радоваться студенту N было нечему.

Итак, имеем $P(A)=\begin{cases} 15/19, \text{ если произошло событие } B; \\ 14/19, \text{если событие } B \text{ не произошло.}\end{cases}$

Следовательно, вероятность $P(A)$ - условна, зависит от события B.

Определение. Условной вероятностью $P(A\ /\ B)$ называют вероятность события A, вычисленную в предположении, что произошло событие B.

Результаты выбора билетов теперь можно записать так:

$P(A)$ = 15/20; $P(A\ /\ B)$ = 15/19; $P(A\ /\bar{B}\ )$ = 14/19.

Определение. Если $P(A\ /\ B) \neq P(A)$, то событие A называют зависимым от события B; если же $P(A\ /\ B) = P(A)$, то A не зависит от B.

Мы решили "экзаменационную задачу" путем логических рассуждений, что не всегда легко. В теории вероятностей доказана справедливость формулы $P(A\ /B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$, которой можно пользоваться для нахождения условной вероятности.

На практике чаще приходится пользоваться следствием из этой формулы. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB)=P(B)P(A\ /B)=P(A)P(B\ /A).$$

Задача. Студенты M и N готовились вместе и изучили 15 из 20-ти экзаменационных билетов. Какова вероятность того, что оба студента сдадут экзамен, если будут отвечать первым и вторым?

Решение: $P(AB)=\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}=\frac{21}{38}$, где события A - студент M сдал экзамен, B - студент N сдал экзамен.

Определение. События A и B называются независимыми, если $P(A / B) = P(A)$ (или $P(B / A) = P(B)$).

В случае независимых событий A и B: $P(AB) = P(A)P(B)$.

Эту формулу можно обобщить на любое число попарно независимых событий.

Задача. Один рассеянный гражданин, водитель личного автотранспорта, 4 раза в месяц был оштрафован за нарушение правил уличного движения. Это происходило каждую пятницу. Он пожаловался своим друзьям на "невезучесть по пятницам" и желание в дальнейшем не выезжать в этот день недели в город на автомобиле.

Является ли эта "невезучесть" гражданина случайностью или в этот день недели милиция усиливает контроль уличного движения?

Решение: Пусть событие A - "гражданин был оштрафован 4 раза по пятницам случайно". Если событие A_k - "гражданин случайно оштрафован в пятницу k-й раз" ($k = 1, 2, 3, 4$), то

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4).$$

Но $P(A_k) = \frac{1}{7}$, ибо один день из семи для гражданина неудачный.

Так как $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{7}$, то $P(A) = \left(\frac{1}{7}\right)^4 \approx 0{,}0004165.$

Вероятность события A весьма незначительна, поэтому случайностью такую невезучесть объяснить сложно. Видимо, в этот день работники милиции с большей требовательностью следят за соблюдением правил уличного движения.

2.8 Теорема о полной вероятности. Теорема Байеса

Одним из эффективных методов подсчета вероятностей является формула полной вероятности, с помощью которой решается широкий круг задач.

Теорема (о полной вероятности). Пусть событие A может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий $B_1, ..., B_n$, причем $B_1 \cup ... \cup B_n = D$ - достоверное событие, тогда

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Следствие (теорема Байеса). В условиях теоремы о полной вероятности справедливы равенства:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A)}; \quad i = 1, ..., n.$$

Теорема Байеса обычно интерпретируется следующим образом. Предположим, что событие A может произойти при одной из n взаимоисключающих гипотез. Событие B_i играет роль i-й гипотезы. Известна вероятность события A при каждой из гипотез. Из априорных (известным предварительно, до проведения опыта) соображений гипотезам можно приписать определенные вероятности. Пусть в результате опыта произошло событие A. Условные вероятности гипотез B_i при условии, что наблюдалось A, называются апостериорными (вычисленные после опыта) вероятностями. Теорема Байеса дает значения апостериорных вероятностей гипотез. Другими словами, формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез по результатам произведенного опыта.

Поясним формулу (теорему) о полной вероятности на примере решения следующей задачи.

Задача. Милиция в малонаселенной местности преследует преступника, который выбежал на автодорогу и уехал в город с первым, остановившимся по его просьбе, автотранспортом. Он мог уехать с рейсовым автобусом и тогда его надо встречать на автовокзале или с попутной машиной, которая могла его высадить в районе его местожительства. Вероятность того, что первым в месте его выхода на дорогу окажется автобус, равна 0,35, а любая другая автомашина - 0,65. Вероятность того, что автобус остановится, равна 0,8; автомашину можно остановить с вероятностью 0,4.

1 Какова вероятность того, что преступник смог уехать первым остановившимся автотранспортом?

2 Какова вероятность, что преступник окажется на автовокзале?

Решение: Обозначим события:

A - преступник уехал с первым остановившимся автотранспортом; B_1 - первым подошел автобус; B_2 - первой подошла попутная автомашина; A / B_1 - остановился автобус; A / B_2 - остановилась автомашина.

Очевидно, что события B_1 и B_2 несовместны и событие A может наступить лишь при появлении одного из этих событий. Следовательно, можно использовать формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2).$$

Имеем: $P(B_1) = 0{,}35;\ P(B_2) = 0{,}8;\ P(A / B_1) = 0{,}65;\ P(A / B_2) = 0{,}4$, а $P(A) = 0{,}35 \cdot 0{,}8 + 0{,}65 \cdot 0{,}4 = 0{,}28 + 0{,}26 = 0{,}54$.

Итак, вероятность того, что преступник уехал с места преступления, не столь уж велика, и милиционеры не должны полностью полагаться на успех операции в городе. Но если он все-таки уехал, то где его предположительно искать? На этот вопрос можно получить ответ с помощью формулы Байеса.

Нас интересуют вероятности событий:

B_1 / A - преступник уехал с автобусом; B_2 / A - преступник уехал с попутной автомашиной.

По формуле Байеса имеем:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A / B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}8}{0{,}54} = \frac{28}{54} = \frac{14}{27};$$

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2)P(A / B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}4}{0{,}54} = \frac{26}{54} = \frac{13}{27}.$$

Итак, преступник окажется на автовокзале с вероятностью $\frac{14}{27}$.

Несмотря на то, что $\frac{14}{27} > \frac{13}{27}$, преступника надо "встречать" и на автовокзале и дома, так как вероятности этих событий очень близки.

Задача. При обследовании больного имеется подозрение на одно из двух заболеваний B_1 и B_2. Их вероятности в данных условиях: $P(B_1) = 0{,}6$; $P(B_2) = 0{,}4$. Для уточнения диагноза назначается анализ, результатом которого является положительная или отрицательная реакция. В случае болезни B_1 вероятность положительной реакции равна 0,9, отрицательной - 0,1; в случае B_2 положительная и отрицательная реакции равновероятны. Анализ провели дважды, и оба раза реакция оказалась отрицательной (событие A). Требуется найти вероятность каждого заболевания после проделанных анализов.

Решение: В случае заболевания B_1 событие A с вероятностью $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$, а в случае заболевания B_2 - с вероятностью $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$. Следовательно, по формуле Байеса имеем:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}01}{0{,}6 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}25} \approx 0{,}06;$$

$$P_A(B_2) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}25}{0{,}6 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}25} \approx 0{,}94.$$

Отсюда видно, что полученные результаты анализов дают веские основания предполагать болезнь B_2.

Самостоятельно решите следующую задачу.

Задача. В многоэтажном доме 5 подъездов по 10 квартир в каждом. В этот дом заселилось 10 семей сотрудников одного учреждения, причем в двух подъездах получили квартиры по одной семье, в одном - две семьи, в остальных двух - три и шесть семей соответственно.

Работник этого же учреждения решил в выходной день навестить своих сотрудников. Зайдя в выбранный наудачу подъезд, а затем - таким же образом позвонив в квартиру, он обнаружил, что там проживают его сотрудники. Какова вероятность того, что в этом подъезде нет других квартир, принадлежавших сотрудникам этого учреждения?

Список литературы

1 Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

2 Виленкин Н. Я., Потапов В. Г. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. М.: Просвещение, 1979.

3 Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. М.: Просвещение, 1969.

4 Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999.

5 Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2000.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Составители: **ПУЧКОВ** Николай Петрович,
ТКАЧ Леонид Иванович

Редактор Т. М. Глинкина
Инженер по компьютерному макетированию
Г. Ю. Корабельникова