Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА В АРХИТЕКТУРЕ

Учебно-методические рекомендации
к изучению теоретической части курса "Математика"
студентами специальности 290100

Тамбов • Издательство ТГТУ • 2001

УДК 51:72
ББК В11я73
П 909

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент
Кандидат архитектуры
Г. Л. Леденева

Составители:
Н. П. Пучков, Т. В. Четвертнова

Введение

Нужна ли архитектору математика?

Все вокруг – геометрия.
Дух геометрического и
математического порядка
станет властителем
архитектурных судеб.

Ле Корбюзье.[1]

Студенты, обучающиеся специальности "Архитектура" математику изучают на первом курсе, сразу же после поступления в вуз, когда успешно пройдены основные конкурсные испытания – по рисунку. Этому, как правило, предшествует длительная подготовка в художественных школах, специальных курсах по подготовке в вуз, с репетиторами, где опять же главный предмет – это рисунок и, может быть, некоторые элементарные сведения по начертательной геометрии. Поэтому студенты-первокурсники, воспринимая, в своем большинстве, архитектуру как искусство, не хотят видеть в избранной профессии математику, которая, возможно, изрядно надоела им в школе. И тем не менее математика включена в подготовку архитекторов. Приступая к изучению математики уже в статусе будущего архитектора, студент должен знать историю взаимодействия этих наук.

В архитектуре тесно переплетены и строго уравновешены наука, техника и искусство. Гармоничное единство этих начал помогает создавать памятники, совершенство которых не подвластно времени. Египетские пирамиды, греческий Акрополь, римские акведуки, таинственные средневековые замки, восточные мечети и минареты, кружево готических соборов – яркие свидетельства мастерства ремесленника, вдохновения художника, логики ученого. Не даром в Древней Греции к искусству относились в равной мере архитектура, музыка и математика.

Показательны в данном отношении высказывания выдающихся мыслителей, ученых, мастеров искусства и архитектуры о роли математики. О необходимости для архитектора научного знания помимо интуиции писал американский архитектор Райт Франк Ллоид (1869 – 1959). Он рассматривал здание как организм с единым свободно развивающимся пространством, связанным с природной средой.

История архитектуры богата самыми разными стилями, формами и, конечно, геометрическими закономерностями. В силу направленности данного пособия, приведем некоторые примеры, относящиеся к применению кривых и поверхностей второго порядка в архитектурных формах.

Издавна известен способ возведения подвесных мостов из канатов. Подвисающие тросы придают этим мостам характерную форму параболы. В 1781 году был построен цепной подвесной мост в Верлитцком парке (Германия), имеющий такую же форму.

Можно привести много примеров применения цилиндрических поверхностей при сооружении церквей и крепостей. Например, в церкви Николая в Магдебурге (проект К. Ф. Шинкеля, 1821 – 1824 г.) церковные интерьеры имеют ясный и геометричный вид, который придает им цилиндрический свод. Также очень часто использовались при строительстве сводов римские и готические крестовые своды на нервюрах. Их основная форма состояла из двух или нескольких перекрещивающихся цилиндрических поверхностей. Например, такой свод имеет крепость немецкого рыцарского ордена в Мальборке.

У известнейшего испанского архитектора Антонио Гауди (1852 – 1926) часто встречаются конструкции с параболическими арками, создающими впечатление фантастических, как бы вылепленных от руки криволинейных форм.

Огромная параболическая триумфальная арка из неоштукатуренных кирпичей, сооруженная для католической приходской церкви по проекту П. Корфа, придает величие всему ее убранству.

---

[1]Французский архитектор и теоретик архитектуры. Настоящая фамилия Жаннере Шарль Эдуард (1887 – 1955). Один из создателей современной архитектуры. Стремился эстетически выявить функционально оправданную структуру сооружения.

Разнообразное применение в архитектуре нашли эллиптические и параболические поверхности, в частности для возведения куполов церквей. Например, купол собора св. Петра в Риме (1593 г.), купол зала столетий во Вроцлаве (1912 – 1913 г.) имеют соответственно эллиптическую и параболическую форму, что позволило увеличивать длину пролетов купольных сооружений.

Известный мексиканский архитектор и инженер Феликс Кандела в своих конструкциях впервые применил гиперболические параболоиды, которые в архитектуре получили название "гипаров". По его проекту построено здание лаборатории по изучению космических лучей Мексиканского национального университета, Олимпийский дворец спорта. В Тамбове гипар используется в конструкции дворца спорта "Кристалл".

Форму гиперболоида вращения в архитектурных сооружениях впервые использовал русский инженер, академик В. Г. Шухов (1863 – 1939). Во всех оригинальных конструкциях Шухова была одна особенность – ярко выраженный геометрический характер. Он показал себя не только как опытный инженер – конструктор, но и как геометр. Изобретение гиперболоидальной сетчатой башни, сетчатых висячих покрытий, сетчатой арки и цилиндрического сетчатого свода – все это яркие свидетельства геометрического мышления.

Таким образом, подробное и полное исследование свойств и форм линий и поверхностей для студентов, обучающихся по специальности 290100 "Архитектура", очень важно. Интересно им будет узнать и об оптических свойствах эллипса, гиперболы и параболы, чтобы в дальнейшем можно было использовать эти знания при проектировании зданий. Более глубокие знания о связи математики и архитектуры можно получить из книг [1 – 3, 5, 10, 12], здесь же рассматривается один из основных вопросов программного материала по математике для архитекторов – кривые и поверхности второго порядка.

Данные методические разработки не повторяют "книжное" изложение учебного материала, они в большей степени, дают конкретный план изучения тем, такую последовательность изложения, при которой, на наш взгляд, усвоение будет происходить наиболее просто и естественно. Авторы пытались предложить студенту такую методику изучения теоретического материала, чтобы будущий архитектор через призму математических формул мог видеть свою профессию.

Глава 1 ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ "КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА"

Древнеримский зодчий Марк Витрувий описал легенду о возникновении одного строительного задания: "Во время страшной эпидемии чумы дельфийского оракула спросили, как умилостивить богов, чтобы они умерили свою ярость. Ответ гласил, что недовольство богов вызвано размерами алтаря, на котором приносят жертвы. Боги требуют возвести новый алтарь, вдвое большего объема." Старый алтарь имел форму куба. Задача об удвоении объема куба принадлежит к числу трех знаменитых задач древности, так как необходимо было начертить отрезок длина которого равнялась бы $\sqrt[3]{2}$, т.е. не выражалась рациональным числом.

Эту задачу называют делосской, поскольку история с жертвенником происходила якобы на острове Делос.

Точное решение этой задачи оказалось возможным только после открытия эллинскими математиками так называемых конических сечений, кривых, которые получаются после пересечения конуса плоскостью, не проходящей через его вершину. В зависимости от ориентации этой плоскости относительно конуса в сечении получаются кривые трех видов (рис. 1.1): эллипс (1), гипербола (2) или парабола (3). Эти линии часто встречаются и при проектировании архитектурных форм, как границы различного рода поверхностей.

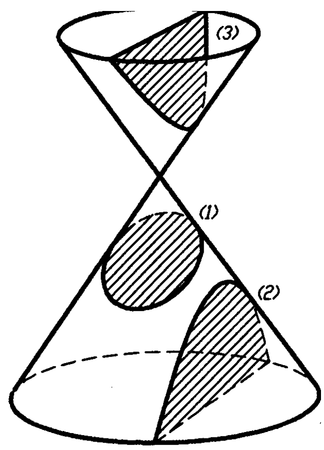


Рис. 1.1

1.1 Знакомство с аналитическим методом исследования форм геометрических линий

Изучение свойств конических сечений (как и других линий) можно осуществлять весьма эффективно используя аналитический метод исследования. Он характеризуется тем, что вместо реального объекта – геометрической линии изучается соответствующая математическая модель – уравнение, связывающее координаты точек линии, отражающее некоторое общее свойство этих точек. Если рассматриваемая линия расположена целиком в одной плоскости, то для получения ее уравнения можно использовать прямоугольную декартову систему координат XOY . В этом случае достаточно уравнением связать две переменные x и y ; в общем случае уравнение линии на плоскости имеет вид: $F(x, y) = 0,$ где $F(x, y)$ – некоторая функция от аргументов x и y . Мы будем изучать кривые второго порядка, их общее уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0 , \qquad (1.1)$$

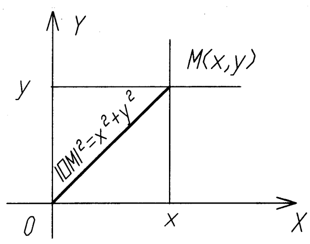


Рис. 1.2

где A, B, C, D, E, G – постоянные числа; наивысшая степень, в которой входят переменные в это уравнение – вторая.
Аналитический метод исследования предполагает наличие "готового" уравнения линии, но для архитектора не менее важно уметь находить уравнения линий, обладающих каким-то характерным свойством, так как алгоритм получения математической формулы может дать технологию изготовления архитектурных форм.

Поэтому, изучая кривые второго порядка, будем учиться решать две, в определенной степени, взаимно-обратные задачи:

1 Каким образом, используя некоторое общее для всех точек линии свойство, можно найти ее уравнение в системе координат?

2 Каким образом, имея уравнение некоторой линии, можно определить ее свойства и форму?

Сущность аналитического метода исследования рассмотрим на примере окружности, линии второго порядка, известной из школьного курса математики. Геометрически определить окружность достаточно просто с помощью известного с незапамятных времен инструмента – циркуля. Если поместить его ножку с острым концом в некоторую точку O, то конец второй ножки (с графитовым стержнем) при круговом движении опишет замкнутую кривую, которая называется окружностью. Точка O называется центром окружности, а величина R – расстояние между концом ножек циркуля – его радиусом.

Очевидно следующее свойство этой кривой, которое считают ее определением:

Окружность – множество точек на плоскости, равноудаленных (на расстояние R) от данной точки (O), называемой центром.

Найдем уравнение линии, обладающей этим свойством. Последовательность получения уравнения линии содержит, как правило, следующие действия (которые и будем осуществлять):

1 *Выбор системы координат и точек, длин отрезков и т.п.*

Выберем на плоскости систему прямоугольных координат XOY (рис. 1.2). Пусть центр окружности совпадает с началом координат, точкой $O(0;0)$ – (это упрощает формулы), точка $M(x,y)$ – произвольная точка окружности, $R=|OM|$ – расстояние от точки O до M.

2 *Запись свойства линии в математической форме* (нахождение уравнения $F(x,y)=0$, связывающего координаты (x,y) всех точек окружности).

Расстояние $|OM|$ равно

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \text{ или } \sqrt{x^2+y^2}.$$

По определению для всех точек окружности это расстояние – постоянное число, равное $R: \sqrt{x^2+y^2}=R$ – исходное уравнение окружности.

3 *Преобразование (если возможно) полученного уравнения к наиболее удобному (для использования) виду.*

Полученное уравнение содержит радикал $\sqrt{x^2+y^2}$. Чтобы от него освободиться достаточно обе части уравнения возвести в квадрат. Имеем

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=R^2 \text{ или } x^2+y^2=R^2. \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) принято считать уравнением окружности.

4 *Проверка равносильности исходного и конечного* (1.2) *уравнений.*

Мы определили, что если точка $M(x;y)$ принадлежит окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1.2). Но может быть уравнению (1.2) удовлетворяют точки не принадлежащие окружности? Ведь возведение обеих частей уравнения в квадрат может давать посторонние корни. Проверим это.

Пусть точка $M_1(x_1,y_1)$ удовлетворяет уравнению (1.2), т.е. $x_1^2+y_1^2=R^2$. Пусть O (0; 0) – точка на плоскости. Тогда расстояние $|OM_1|=\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, но $x_1^2+y_1^2=R^2$ и $|OM_1|=\sqrt{R^2}=R$, т.е. точка M_1 принадлежит окружности. Так как точка M_1 выбрана произвольно, то можно утверждать, что каждая пара чисел (x,y), удовлетворяющая уравнению, является координатами точки окружности.

Таким образом, уравнение (1.2) определяет на плоскости XOY окружность и не содержит никаких решений (x,y), не принадлежащих окружности.

Мы решили первую из обозначенных выше задач: нашли уравнение окружности.

Рассмотрим теперь вторую (обратную) задачу: дано уравнение $x^2+y^2=R^2$ некоторой линии на плоскости. Каковы свойства этой линии и какова ее форма?

Исследование свойств линии – исследование следующих свойств функции $F(x;y)$:

1 Область изменения переменных x и y.

2 Четность (нечетность) функции F относительно переменных x и y, нахождение осей симметрии, точек симметрии.

3 Точки пересечения с осями координат.

4 Если изменения переменных x и y не ограничены, то, исследуется поведение "на бесконечности", в том числе и наличие асимптот.

Итак:

1 Из уравнения (1.2) следует, что сумма двух неотрицательных чисел x^2 и y^2 равна положительному числу R^2, поэтому справедливы неравенства $x^2 \le R^2$ и $y^2 \le R^2$, или $|x| \le R$, $|y| \le R$, или $-R \le x \le R$, $-R \le y \le R$.

2 Переменные x и y находятся в четных степенях, поэтому если точка (x, y) находится на кривой, то точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ также находятся на этой кривой. Следовательно, координатные оси OX и OY являются осями симметрии данной кривой. В этом случае достаточно найти форму кривой в одном из квадрантов (например, первом $x \ge 0$, $y \ge 0$), а затем построить всю кривую, пользуясь ее свойством симметрии.

3 При $x = 0$ $y^2 = R^2$, таким образом точки $(O; -R)$ и $(O; R)$ – точки пересечения исследуемой линии с осью координат $OУ$. Аналогично находим еще две точки: $(-R, 0)$ и $(R, 0)$, в которых окружность пересекает ось OX.

4 Окружность целиком находится в квадрате $\{-R \le x \le R, \; -R \le y \le R\}$ с центром в начале координат, поэтому исследование ее поведения "на бесконечности" исключается.

Выбрав несколько опорных точек можно схематично изобразить кривую в первом квадранте, а затем симметрично отобразить этот ее участок в остальные квадранты координатной плоскости.

1.2 Вывод уравнения эллипса и его исследование

Эллипс – первое из конических сечений, обозначенных на рис. 1.1.

Если переходить от изучения окружности к изучению эллипса, то образно можно охарактеризовать эллипс как сжатую к одной из координатных осей окружность (рис. 1.3). Преобразование "сжатие" окружности к координатной оси (например OX) можно представить следующим образом: каждой точке M (x, y) (рис. 1.3), принадлежащей окружности, поставим в соответствие точку $M^*(x^*, y^*)$ так, чтобы прямая MM^* была перпендикулярна к оси OX и $|PM| = k|PM^*|$, (число k называется коэффициентом сжатия). При этом координаты точек M и M^* будут связаны соотношениями: $x = x^*$, $y = ky^*$. Если уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$, то $(x^*)^2 + (ky^*)^2 = a^2$. Отсюда получаем уравнение новой линии $\frac{(x^*)^2}{a^2} + \frac{(y^*)^2}{b^2} = 1$, где $b = \frac{a}{k}$.

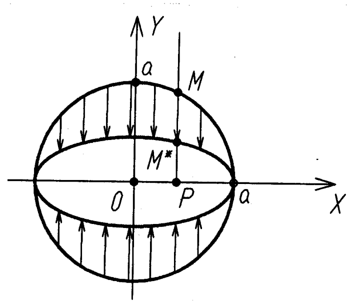


РИС. 1.3

Далее мы покажем, что эллипс имеет именно такое уравнение.

Картину (превращения окружности в эллипс) можно просмотреть с помощью телевизоров с ручной настройкой: если включить телевизор, когда передают таблицу для настройки и повернуть ручку "Размер по вертикали" – тогда все окружности превратятся в эллипсы. Эллипс можно наблюдать и в более естественных условиях: если в солнечный день раскрыть над головой зонтик от солнца, то отбрасываемая им на землю тень имеет границу в форме эллипса.

Очевидно, что изображать эллипсы с помощью циркуля, как это было в случае с окружностью, невозможно. Имеется другой, несколько похожий способ: возьмем измерительный циркуль (на концах его ножек укреплены иглы), сделаем раствор циркуля равным d и установим таким образом, чтобы иглы закрепились на листе бумаги. Сделаем кольцо из нитки длиной l, большей чем d, и накинем его на ножки циркуля как показано на рис. 1.4. Натянем нитку карандашом и проведем линию, держа карандашом нитку все время натянутой. Получится некоторая замкнутая кривая. Эта кривая называется эллипсом, а точки в которых располагались концы циркуля – фокусами эллипса.

Технология построения эллипса обнаруживает общее свойство принадлежащих ему точек: сумма расстояний каждой из них до фокусов есть величина постоянная, равная $l-d$. Это свойство может быть положено в основу определения эллипса как геометрической кривой.

Определение ***Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.***

Чтобы составить уравнение эллипса, воспользуемся схемой, реализованной для окружности (с. 7).

В системе координат XOY (рис. 1.5) фокусы эллипса поместим в точках F_1 и F_2, расположенных на оси абсцисс симметрично относительно начала координат (такой выбор упрощает уравнение эллипса). Обозначим через $2c$ расстояние между фокусами. Тогда координаты фокусов: $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса.

1 Обозначим через r_1 расстояние от точки M до F_1: $r_1=|MF_1|$, а через r_2 – от точки M до F_2: $r_2=|MF_2|$. Эти числа (r_1 и r_2) называются фокальными радиусами точки M.

2 По определению эллипса r_1+r_2 есть величина постоянная. Обозначим ее через $2a$, т.е.

$r_1+r_2=2a$, где $2a > 2c$ (по определению эллипса).

Используя формулу расстояния между двумя точками имеем

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Это уравнение можно считать уравнением эллипса, но оно не считается каноническим[2].

3 Освободимся от радикалов, перенося один радикал направо, а затем возводя обе части в квадрат. Последовательно получим:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

По условию $a>c$, тогда a^2-c^2 – положительная величина. Обозначив $b^2=a^2-c^2$, (следовательно $a>b$) и разделив обе части на a^2b^2, получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1.3)$$

4 Самостоятельно проверьте, что если координаты точки $M(x_1,y_1)$ удовлетворяют уравнению (1.3), то эта точка принадлежит эллипсу.

Замечание. Это уравнение совпадает с уравнением "сжатой" окружности (см. с. 10). С другой стороны, если $a=b=R$, то уравнение принимает вид $x^2+y^2=R^2$ и эллипс представляет собой окружность радиуса R с центром в начале координат. Поэтому окружность можно считать частным случаем эллипса.

Изучим форму эллипса, опираясь на полученное уравнение (1.3) и схему исследования (с. 9).

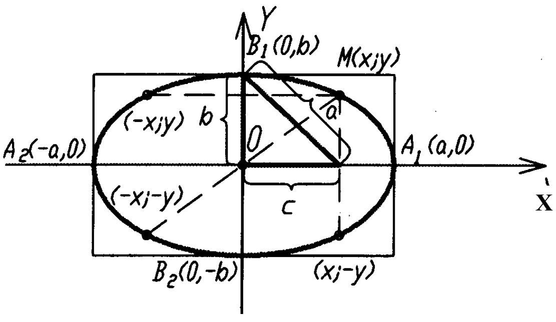


Рис. 1.6

1 Так как сумма двух неотрицательных величин $\frac{x^2}{a^2}$ и $\frac{y^2}{b^2}$ равна 1, то каждое из них не превышает 1, т.е. $|x|\le a$ и $|y|\le b$ и, таким образом, весь эллипс содержится внутри прямоугольника $\{-a\le x\le a,\ -b\le y\le b\}$ (рис. 1.6).

2 Как и у окружности (см. с. 9) оси OX, OY являются осями симметрии эллипса; точка их пересечения называется центром эллипса.

3 Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его вершинами. Это точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0;-b)$. Величины a и b называются соответственно большой и малой полуосями эллипса.

Как было показано на рис. 1.3., эллипс – сжатая окружность. Степень ее "сжатия" можно охарактеризовать отношением длин малой и большой полуоси $\left(\frac{b}{a}\right)$. Однако в математике рассматривают другое отношение: расстояние между фокусами, равное $2c$, к

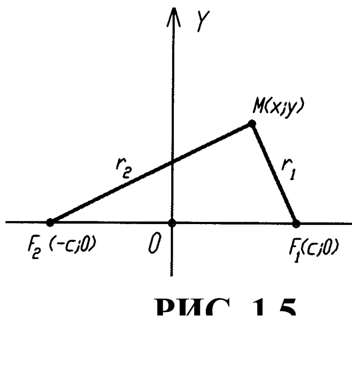


РИС 1.5

[2]От греческого слова "канон" – образец; "каноническое" равнозначно названию "типовое".

длине большой оси, равной $2a$. Это отношение называют эксцентриситетом и обозначают буквой ε.

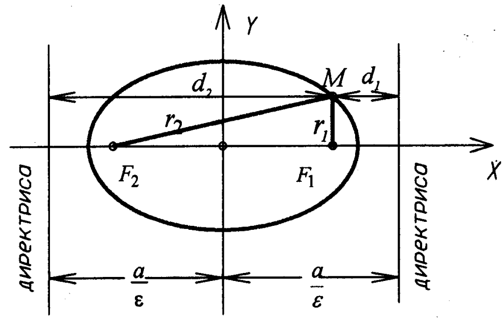
Таким образом, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$. Если $b = a$ (случай окружности), получим, что $\varepsilon = 0$; чем больше ε, тем меньше отношение $\dfrac{b}{a}$ (рис. 1.7).

Как будет показано в следующих параграфах, эксцентриситет является характеристикой и других конических сечений.

Второй характеристикой конических сечений (а в данном случае эллипса) является **директриса** (направляющая) – **прямая, лежащая в плоскости конического сечения и обладающая тем свойством, что отношение расстояния любой точки конического сечения до фокуса к расстоянию до директрисы, есть величина постоянная, равная эксцентриситету:**

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \text{ (рис. 1.8).}$$

Это свойство директрис можно использовать при проектировании архитектурных композиций, проектируя "рамки" для фигур, имеющих эллиптическую форму.



ε **Рис. 1.8** ε

1.3 Решение задач на проектирование эллиптических форм

1 Составить уравнения эллипсов, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что

– большая ось равна 20, эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$;
– расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами $2c = 4$;
– точка M (2; –2) лежит на эллипсе, а его большая полуось равна 4.

2 Архитектору поручили спроектировать фонтан, чаша которого имеет форму эллипса, а два фонтанирующих устройства располагаются в фокусах этого эллипса. Максимальные размеры чаши (большая ось эллипса) – 20 метров. Рассчитано, что фонтанирующая вода падает в чашу фонтана, если ее эксцентриситет равен 0,6. Приняв центр эллипса за начало координат, найти малую ось эллипса и составить его уравнение. Найти на каком расстоянии от центра эллипса располагаются фонтаны.

Решение. Обозначим через a – длину большей полуоси эллипса, через b – длину меньшей полуоси, через c – расстояние от центра эллипса до фокусов, через ε – эксцентриситет эллипса. Тогда, из условия задачи $2a = 20$, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = 0{,}6$, и, следовательно $a = 10$, $c = 0{,}6 \cdot 10 = 6$.

Используя формулу $a^2 - b^2 = c^2$, найдем, что длина малой полуоси $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Таким образом: фонтаны располагаются на расстоянии $c = 6$ м от центра чаши, малая ось эллипса $2b = 16$ м, а его уравнение $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$.

3 Спортивное поле окаймлено беговой дорожкой, имеющей форму эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Архитектор-садовник получил задание озеленить это поле таким образом, чтобы в центре поля просматривался ромб, засеянный одной травой, а остальная часть поля засеивалась другой травой. Определить площадь ромба, если известно, что его вершины расположены в фокусах эллипса и на концах малой оси; наибольшее расстояние между точками эллипса равно 50 м, наименьшее – 30 м.

4 Одной из вершин римской архитектуры является Колизей, построенный в 75 – 82 гг. н.э. Это огромное сооружение, вмещавшее около 5000 зрителей, предназначалось для гладиаторских боев и травли зверей. В плане Колизей представляет собой гигантский эллипс и, будем считать, что имеет 188 м по большой оси и 156 м по малой оси. Найти эксцентриситет эллипса и составить уравнение этого эллипса.

5 Архитектор получил заказ спроектировать сцену в театре, которая должна иметь форму части эллипса, малая ось которого (ширина сцены) равна 8 м. Глубина сцены (большая полуось) равна 6 м. Определено, что наилучшая слышимость в зале достигается, когда исполнитель находится на оси симметрии, совпадающей с большой полуосью эллипса, в точке его фокуса. Необходимо составить уравнение эллипса, найти на каком расстоянии от края сцены необходимо поставить микрофон (микрофон находится на большой оси в фокусе эллипса).

1.4 Вывод уравнения гиперболы и его исследования

Второй кривой, обозначенной на рис. 1.1, является гипербола. Имеется способ построения некоторой части этой линии, аналогичный описанному на с. 11 для эллипса, но здесь мы воспользуемся для вывода уравнения только ее формальным определением.

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых (по модулю) до двух данных точек, называемых фокусами, есть положительная постоянная величина, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Введем систему координат такую, как и в случае вывода уравне-ния эллипса. Обозначим постоянную через $2a$, расстояние между фокусами $2c$, r_1 и r_2 – фокальные радиусы точки M, принадлежащей гиперболе. Тогда по определению гиперболы $|r_1 - r_2| = 2a$ или $\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$.

Освобождаясь последовательно от радикалов (см. вывод уравнения эллипса), получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } b^2 = c^2 - a^2. \qquad (1.4)$$

Изучим форму гиперболы (см. рис. 1.9).

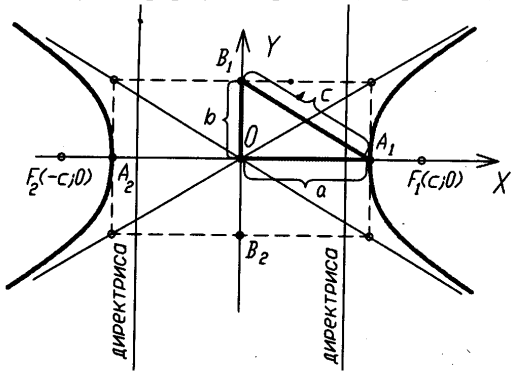


Рис. 1.9

1 В отличие от уравнения (1.3) (эллипса) в уравнении (1.4) не сумма, а разность двух неотрицательных величин равна 1, поэтому уменьшаемое $\frac{x^2}{a^2}$ не может быть меньше 1, т.е. $x^2 \geq a^2$ или $x > a$ и $x < -a$.

Таким образом, в полосе $-a < x < a$ уравнение (1.4) не задает никакой линии. При других x переменная y может принимать, вообще говоря, любые значения.

2 Гипербола пересекает только координатную ось OX (при $y = 0$) в двух точках: $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, поэтому эту ось называют действительной, а ось OY – мнимой.

3 Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – ее центром симметрии (см. аналогичное утверждение для эллипса).

При исследовании формы гиперболы рассмотрим лишь положительные значения x, y, а затем используем ее симметрию для изображения на плоскости.

4 Из уравнения (1.4) при $x \geq a$ и $y > 0$ имеем

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Если x возрастает от значения $x = a$, то y также возрастает от $y = 0$ до бесконечности.

Рассмотрим отношение $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$. Если $x \to \infty$, то $\frac{a^2}{x^2} \to 0$, $\frac{y}{x} \to \frac{b}{a}$ и $y \to \frac{b}{a}x$. То есть с увеличением x переменная y, а следовательно и график гиперболы, приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$, которая носит название *асимптоты* гиперболы. Эта прямая проходит через начало координат и образует с осью OX угол, тангенс которого равен $\frac{b}{a}$.

Используя симметрию гиперболы можно изобразить ее график так, как это показано на рис. 1.9.

Также как и для эллипса число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы. Но здесь $c > a$, поэтому $\varepsilon > 1$ (у эллипса $0 < \varepsilon < 1$). Директрисы гиперболы имеют уравнения: $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Так как $\varepsilon > 1$, то директрисы расположены между вершинами $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ гиперболы (рис. 1.9)

Замечание В случае $b = a$ гипербола называется равносторонней, ее каноническое уравнение имеет вид $x^2 - y^2 = a^2$, а асимптоты – биссектрисы координатных углов. В этом случае поворот координатных осей по ходу часовой стрелки относительно центра координат на угол 45° ставит их в положение асимптот. Можно доказать, что в новой системе координат уравнение такой гиперболы будет $x\,y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. При $a = \sqrt{2}$ получим: $y = \frac{1}{x}$, т.е. график обратнопропорциональной зависимости есть гипербола (см. рис. 1.10, повернув его на угол 45° против часовой стрелки).

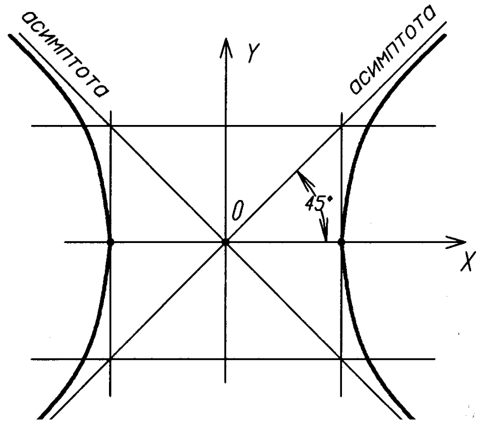


Рис. 1.10

Эти сведения нам потребуются в конце главы для решения "делосской" задачи (см. с. 6).

1.5 Решение задач на проектирование гиперболических форм

1 Составить уравнения гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

– расстояние между фокусами равно 10, и мнимая ось равна 8;
– действительная ось равна 16, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
– уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 20;
– расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

2 Необходимо спроектировать парк таким образом, чтобы его границы проходили по линии, являющейся гиперболой, асфальтированные дорожки проходили по асимптотам и директрисам этой гиперболы. Расчеты показали, что уравнение гиперболы должно иметь вид $16x^2 - 9y^2 = 14400$ (x и y даны в метрах). Найти полуоси гиперболы, фокус, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис, если известно, что начало координат поместили в точку пересечения асимптот.

1.6 Вывод уравнения параболы и его исследование

Рассмотрим теперь третье, последнее коническое сечение (рис. 1.1).

Определение ***Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.***

1 Для составления уравнения параболы в системе координат XOY (см. рис. 1.11) точку F (фокус параболы выбираем на оси абсцисс, а директрису – перпендикулярной этой оси и расположенной на таком же расстоянии от начала координат, что и фокус (в этом случае начало координат будет принадлежать параболе). Если расстояние от фокуса до директрисы принять равным p, то $F\left(\frac{p}{2};\,0\right)$, а уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка, принадлежащая параболе, а точка $K\,(-\frac{p}{2};y)$ – ее проекция на директрису.

2 По определению параболы $|MF| = |MK|$ или в координатной форме

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{\left(x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2}.$$

3. После преобразований получим каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px, \ p > 0 . \qquad (1.5)$$

4 Нетрудно убедиться, что если координаты точки $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют уравнению (1.5), то эта точка принадлежит параболе.

Предположим теперь, что нам известно уравнение (1.5), определяющее параболу на плоскости XOY. Какова ее форма?

1 Так как $y^2 \geq 0$ и $p > 0$, то $x \geq 0$, т.е. все точки параболы лежат справа от оси OY и $0 \leq x \leq \infty, \ -\infty < y \leq \infty$.

2 Ось OX является осью симметрии параболы, т.к. переменная y находится во второй степени.

3 Парабола (1.5) пересекается с осями координат в точке (0; 0) – начале координат (эта точка называется вершиной параболы).

4 При $x \to \infty$ переменная $y \to \pm\infty$.

Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$, что следует из ее определения.

Замечание. В случае, когда начало координат находится в вершине, а ось параболы совмещена с осью OY, парабола будет иметь уравнение $x^2 = 2py$ и находится в верхней полуплоскости; при $p = \frac{1}{2}$ получаем уравнение параболы, известное из школьного курса $y = x^2$.

1.7 Решение задач на проектирование параболических форм

1. Составить уравнения параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

– парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси OX и ее параметр p = 3;

– парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси OY, и ее периметр $p = \frac{1}{4}$;

– парабола расположена симметрично относительно оси OX и проходит через точку *A* (9; 6);

– парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку *C* (1; 1);

2 Городские власти решили обустроить деловую часть города, отведенную под офисы. Все дома по проекту должны быть расположены по периметру площади, имеющего форму параболы. В центре площади решили установить памятник известному композитору. Выяснили, что наилучшее расположение для памятника достигается, когда он находится в фокусе параболы. Если считать, что вершина параболы расположена в начале координат, а фокус расположен на оси OX, ($x > 0$), на расстоянии 25 м от вершины, то необходимо составить уравнение параболы, вдоль которой будут расположены дома под офисы.

3 Оконные проемы у замка, построенного в старинном стиле, должны иметь в верхней части форму параболы, заданной уравнением $y = -x^2$. В точке расположения фокуса они перекрываются балкой длиной "*a*" м, а далее имеют форму прямоугольника, длина которого равна 2 метра. Необходимо найти "*a*", а также высоту всего оконного проема.

4 В древнем храме арочный проем имеет форму параболы. Измерения показали, что высота арки равна 12 метрам, а максимальная ширина арочного проема равна 6 метрам. Необходимо найти форму арки (уравнение параболы).

5 Подвесной мост состоит из провисающих стальных тросов. Один из таких тросов подвешен за два конца, точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно 20 метрам. Величина его прогиба на расстоянии 2 м от точки крепления, считая по горизонтали, равна 14,4 см. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму дуги параболы.

1.8 Изучение дополнительных сведений о кривых второго порядка

1 При надлежащем выборе системы координат уравнение конических сечений может быть приведено к виду[3]

---

[3]Например, уравнение эллипса можно преобразовать следующим образом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = 2 - 1 + \frac{2}{a}x - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2}{a}x \equiv 2 - \frac{2}{a}x - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2.$$

Если $y = bY$, а $x = a(1 - X)$, то в системе координат (*X*, *Y*) уравнение эллипса запишется в виде

$Y^2 = 2X - X^2$, что совпадает с уравнением (1.6) при $p = 1$ и $\lambda = -1$.

$$y^2 = 2px + \lambda x^2 \ (p \text{ и } \lambda - \text{постоянные}). \qquad (1.6)$$

Если $p \neq 0$, то это уравнение определяет: параболу при $\lambda = 0$, эллипс при $\lambda < 0$, гиперболу при $\lambda > 0$. Геометрические свойства конических сечений, содержащиеся в последнем уравнении, были известны еще древнегреческим геометрам и послужили для Аполлония Перчского (жившем в 200 г. до н.э. в г. Перча на юге современной Турции) поводом присвоить отдельным типам конических сечений названия, сохранившиеся до сих пор: слово "парабола" означает приложение (т.к. в греческой геометрии превращение квадрата данной площади y^2 в равновеликий ему прямоугольник с данным основанием $2p$ (и высотой x) называлось *приложением* данного прямоугольника к этому основанию); слово "эллипс" – недостаток (приложение с недостатком, т.к. при $\lambda < 0$ величина $2px + \lambda x^2 < 2px$ и новый прямоугольник имел меньшую площадь); слово "гипербола" – избыток (приложение с избытком, т.к. при $\lambda > 0$, величина $2px + \lambda x^2 > 2px$.

2 Вернемся к легенде об удвоении объема куба, которой начинается глава 1.

Пусть на плоскости *XOY* (рис. 1.12) заданы две линии: парабола $y = x^2$ и гипербола $y = \dfrac{2}{x}$, т.к. $y = \dfrac{1}{x}$ – гипербола (см. с. 17). В точке *N* пересечения параболы и гиперболы левые и правые части их уравнений равны, т.е. $x^2 = \dfrac{2}{x}$ или $x^3 = 2$, а $x = \sqrt[3]{2}$.

Графически это означает, что абсцисса точки пересечения данных кривых является длиной искомого отрезка, т.е. стороной удвоенного куба (длина: $|OM| = \sqrt[3]{2}$).

3 Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.

Оптическое свойство эллипса: лучи света, исходящие из одного фокуса F_1 эллипса после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус F_2 (рис. 1.13).

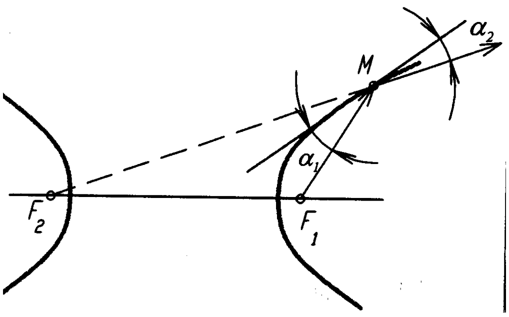


Рис. 1.14

Геометрически это означает, что отрезки MF_1 и MF_2 образуют с касательной в точке M эллипса равные углы ($\alpha_1 = \alpha_2$). В древние времена это свойство эллипса поражало зрителей, когда источник света, помещенный в одном из фокусов, поджигал воспламеняющееся вещество, помещенное в другом фокусе. (Латинское слово *фокус* – очаг).

Оптическое свойство гиперболы:

лучи света, исходящие из одного фокуса F_1 гиперболы, после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из другого ее фокуса F_2 (рис. 1.14).

Оптическое свойство пара- болы:

лучи света, исходящие из фокуса параболы, после зеркального отражения от параболы образуют пучок, параллельный оси параболы (рис. 1.15).

Оптические свойства эллипса, ги- перболы и параболы широко используются в инженерном деле. В частности оптическое свойство параболы используется при конструировании прожекторов, антенн и телескопов.

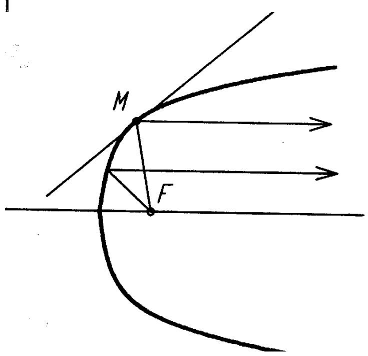


Рис. 1.15

Глава 2 ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ "ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА"

2.1 Знакомство с некоторыми общими сведениями о поверхностях

Архитектору по роду своей деятельности приходится иметь дело с пространственными формами, ограниченными различного рода поверхностями. Так как он творец этих форм, то в первую очередь ему должны быть интересны методы получения этих поверхностей.

Поверхности могут быть образованы движением более простых геометрических объектов – линий. Математический алгоритм получения уравнений поверхностей может быть основой для технологии производства архитектурных форм.

Как показывает практика, наиболее красивы классические формы, имеющие классические поверхности, которые в математике известны как поверхности второго порядка: сфера – поверхность, ограничивающая шар, цилиндр – поверхность, ограничивающая архитектурные колонны и т.п.

Поверхность можно определить как след движущейся линии. Эту линию называют *образующей*. При этом движении каждая точка, принадлежащая образующей, также оставляет след в пространстве в виде некоторой линии. Эту линию называют *направляющей*. Такое название объясняется тем, что процесс "получения" поверхности можно представить следующим образом: линия (образующая) движется таким образом потому, что некоторая ее точка движется (направляется) вдоль другой линии. Представьте, например, что один конец проволоки закреплен на крыше здания, а второй – на достаточном удалении от него. Пусть проволока не натянута, а несколько провисает, образуя участок (дугу) некоторой кривой. На эту проволоку на конце, закрепленном на крыше, одет и удерживается обруч, диаметром, значительно превышающим диаметр проволоки. Если обручу предоставить возможность двигаться вдоль проволоки, то он оставит в пространстве невидимый след – поверхность, напоминающую поверхность изогнутой трубы. Так вот, натянутая проволока будет играть роль направляющей, а обруч (окружность) – образующей этой поверхности.

В наиболее простых случаях движение может представлять собой:

– вращение линии (образующей) относительно какой-либо прямой (оси вращения), расположенной в плоскости этой линии. Например, сфера – поверхность, образованная вращением полуокружности вокруг ее диаметра, круглый конус – поверхность, образованная вращением гипотенузы прямоугольного треугольника (образующей) относительно одного из его катетов и т.п. При этом каждая точка полуокружности и гипотенузы (кроме общих с осью вращения) описывает окружность, каждую из которых можно считать направляющей;

– движение прямой (образующей), при котором сохраняется ее параллельность некоторой данной прямой. Такие поверхности называются цилиндрическими.

В аналитической геометрии в случае декартовой системы координат поверхностью называют совокупность точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $F(x, y, z) = 0$.

Примером такой поверхности является сфера.

Выведем уравнение сферической поверхности используя свойство ее точек.

Определение ***Сферической поверхностью называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром.***

Поместим начало координат $O(0,0,0)$ в центре сферы. Пусть $M(x, y, z)$ – любая точка сферы. Обозначим длину отрезка OM через R. Тогда для всех точек сферы $|OM| = R$, или $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$.

Возведя обе части в квадрат, получим каноническое уравнение сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Сформулировать общее свойство точек любой поверхности, как это сделано для сферы, достаточно сложно; бывает проще указать способ получения этой поверхности.

Рассмотрим метод нахождения уравнений поверхностей, образованных вращением линий второго порядка вокруг их осей симметрии, так называемых поверхностей вращения.

2.2 Вывод уравнения эллипсоида и его исследование

Пусть в плоскости YOZ (рис. 2.1) задан эллипс, а осью вращения является ось OZ.

Вращая эллипс вокруг оси OZ, получим поверхность, называемую *эллипсоидом вращения*. Найдем ее уравнение.

При вращении эллипса вокруг оси OZ каждая его точка (кроме вершин, расположенных на оси вращения) опишет окружность. Пусть $M(0, \tilde{y}, z)$ принадлежит эллипсу, т.е. $\frac{(\tilde{y})^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, тогда при вращении эллипса точка M описывает окружность радиуса $r = |\tilde{y}|$. Если $N(x, y, z)$ – произвольная точка этой окружности, то $x^2 + y^2 = \tilde{y}^2$. Из уравнения эллипса имеем: $\tilde{y}^2 = b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$, поэтому: $x^2 + y^2 = b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$ или

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,. \qquad (2.1)$$

Это уравнение справедливо для произвольной точки *M*, принадлежащей эллипсу, следовательно, для любой точки полученной поверхности.

Уравнение (2.1) называют уравнением эллипсоида вращения (относительно оси OZ).

Полученная поверхность отсекает на осях координат OX, OY, OZ соответственно отрезки $2b$, $2b$, $2c$, которые называют *осями эллипсоида*.

Характерная особенность эллипсоидов вращения – равенство длин каких-либо двух осей.

Пусть дан эллипсоид вращения $\frac{\tilde{x}^2}{b^2}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2}+\frac{\tilde{z}^2}{c^2}=1$. Если подвергнуть его сжатию к плоскости YOZ по формулам (аналогично тому, как мы получали эллипс из окружности):

$$\tilde{x}=\frac{b}{a}x\,,\ \ \tilde{y}=y\,,\ \tilde{z}=z\,, \qquad (2.2)$$

то уравнение полученной поверхности будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,. \qquad (2.3)$$

Если $a\neq b\neq c$, то эта поверхность называется трехосным эллипсоидом.

Рассмотрим теперь обратную задачу: какими свойствами обладает поверхность, заданная уравнением (2.3).

Каждое слагаемое, входящее в левую часть уравнения (2.3), удовлетворяет условию: $\frac{x^2}{a^2}\le 1$, $\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1,$ или $x^2\le a^2,\ y^2\le b^2,\ z^2\le c^2$ или $|x|\le a,\ |y|\le b,\ |z|\le c.$

Таким образом, эллипсоид является замкнутой поверхностью, находящейся внутри параллелепипеда размерами $2a\times 2b\times 2c$. Эллипсоид обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии (в рассмотренном случае это координатные плоскости), т.к. переменные $x,\ y,\ z$ входят в уравнение (2.3) в четных степенях.

Изучим форму эллипсоида с помощью "метода параллельных сечений". Рассмотрим сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатной плоскости XOY. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z=h$, а линия, получаемая в сечении $z = h$, задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\quad \text{или}\quad \frac{x^2}{a_*^2}+\frac{y^2}{b_*^2}=1,\quad \text{где}\quad a_*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\ \ b_*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\ .$$

Последнее уравнение – это уравнение эллипса с полуосями a_* и b_*. Очевидно, что $h^2<c^2$, а $|h|<c$; при $h=0$, получаем в сечении координатной плоскостью XOY эллипс с наибольшими полуосями a и b. При возрастании $|h|$ величины a_* и b_* убывают.

Аналогично выглядят результаты рассмотрения пересечения эллипсоида с плоскостями параллельными координатным плоскостям XOZ и YOZ.

Для закрепления теоретических знаний решите следующую задачу.

Установлено, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу; найти полуоси и вершины этого эллипса.

2.3 Однополостный гиперболоид

Пусть в плоскости YOZ (рис. 2.2) задана гипербола $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Если вращать эту гиперболу около оси OZ, то получим поверхность, называемую однополостным гиперболоидом вращения.

Уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 .$$

После ее "сжатия" к плоскости YOZ по формулам (2.2) получим поверхность, которая называется *однополостным гиперболоидом*[4].

Ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 .$$

Однополостный гиперболоид имеет вид *бесконечной* трубки, *бесконечно* расширяющийся в обе стороны от горлового эллипса. Однополостный гиперболоид имеет три плоскости симметрии, в данном случае это координатные плоскости, и центр симметрии – начало координат.

Величины a, b, c называются полуосями однополостного гиперболоида.

Для закрепления полученных знаний о гиперболоиде целесообразно решить следующие задачи.

1 Доказать, что плоскость $4x-5y-10z-20=0$ пересекает однополостной гиперболоид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ по прямолинейным образующим. Составить уравнение этих прямолинейных образующих.

2 Для моста строится каменная подпорка в форме однополостного гиперболоида. Нижним и верхним горизонтальными сечениями являются эллипсы, причем верхнее сечение является горловым эллипсом для однополостного гиперболоида с полуосями $a=3$ и $b=3$, а нижнее сечение имеет полуоси $a=3\sqrt{2}$ и $b=3\sqrt{2}$. Найти высоту подпорки для моста.

3 Всем известная Шуховская башня в Москве представляет собой пирамиду из однополостных гиперболоидов вращения. Вся высота пирамиды представляет более 120 метров, а отношение высоты верхнего гиперболоида к высоте соседнего гиперболоида, расположенного ниже, является постоянной величиной, равной $\frac{4}{5}$. Также известно, что отношение высоты каждого гиперболоида к радиусу окружности, находящейся в его основании, равно 2, а всего таких гиперболоидов в пирамиде три. Найти высоту каждого из них и максимальные и минимальные радиусы, находящиеся в основании гиперболоидов, если предположить, что высота пирамиды равна 122 метрам.

2.4 Двуполостный гиперболоид

Пусть в плоскости YOZ (рис. 2.3) задана гипербола $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. (Ее действительная ось OZ, мнимая – OY). Если вращать эту гиперболу около оси OZ, то получим поверхность, называемую двуполостным гиперболоидом вращения.

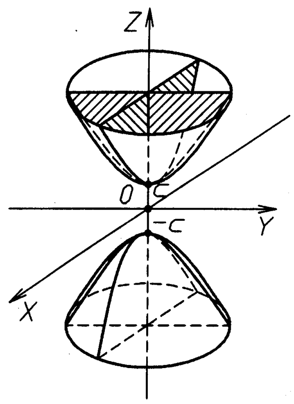


Рис. 2.3

Уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 .$$

После ее "сжатия" к плоскости YOZ по формулам (2.2) получим поверхность, которая называется *двуполостным гиперболоидом.* Ее уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 .$$

Можно сделать вывод, что двуполостный гиперболоид состоит из двух отдельных "полостей" (отсюда его название – "двуполостный"); каждая из них имеет вид бесконечной выпуклой чаши. Двуполостный гиперболоид в данной системе координат симметричен относительно координатных плоскостей и имеет центр симметрии – начало координат.

Задание для самостоятельной работы Методом сечений исследовать форму двуполостного гиперболоида.

2.5 Эллиптический параболоид

[4]То есть "гиперболовидный", так как среди сечений этой поверхности есть гиперболы. Название "однополостный" подчеркивает, что поверхность не разорвана на две "полости", а представляет сплошную бесконечную трубку.

Пусть в плоскости YOZ (рис. 2.4) задана парабола $y^2 = 2qz$. Если вращать эту параболу около оси OZ, то получим поверхность, называемую параболоидом вращения. Ее уравнение имеет вид $x^2 + y^2 = 2qz$.

Если подвергнуть "сжатию" поверхность параболоида вращения, то получим поверхность, которая называется *эллиптическим параболоидом*.

Ее уравнение имеет вид $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}, \quad p, q > 0$.

Эллиптический параболоид имеет вид бесконечной выпуклой чаши. Он обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии; при данном выборе системы координат – это координатные плоскости XOZ и YOZ. Начало координат называется вершиной, а числа p и q называются параметрами эллиптического параболоида.

Задание для самостоятельной работы: методом сечений исследуйте форму эллиптического параболоида и решите следующую задачу:

Частная архитектурна фирма получила заказ на проектирование цирка, который имел бы форму эллиптического параболоида. Основанием цирка является эллипс с полуосями 30 м и 20 м, расстояние от центра эллипса до высшей точки купола равно 25 м. Составить каноническое уравнение этого эллиптического параболоида.

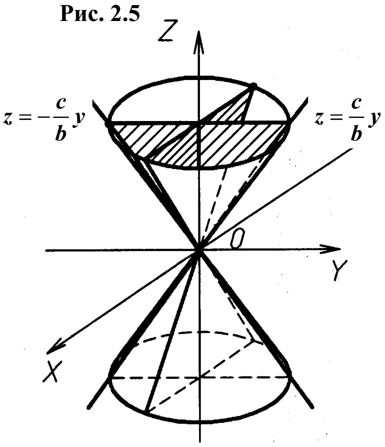
2.6 Конус второго порядка

Пусть в плоскости YOZ (рис. 2.5) задана пара пересекающихся прямых $z = \dfrac{c}{b}y$ и $z = -\dfrac{c}{b}y$. Так как $\dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0$ и $\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0$, то $\left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right) = 0$ или $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

Если вращать эту линию (второго порядка) около оси OZ, то получим поверхность, называемую конической поверхностью вращения.

Уравнение этой поверхности имеет вид $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

Рис. 2.5



После ее "сжатия" к плоскости YOZ по формулам (2.2) получим поверхность, которая называется конусом второго порядка.

Ее уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

Подробно исследуем это уравнение, так как оно дает знаменитые "конические сечения".

1 Очевидно, что начало координат $O(0,0,0)$ принадлежит этой поверхности.

2 Поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей (x, y, z – в четной степени).

3 Сечение конуса всякой плоскостью $z = h$ ($h \neq 0$), параллельной XOY, есть эллипс, так как в этой плоскости:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a_*^2} + \frac{y^2}{b_*^2} = 1, \quad \text{где} \quad a_* = \frac{ah}{c}, \quad b_* = \frac{bh}{c}.$$

4 Сечение конуса плоскостью $y = n$, перпендикулярной XOY, ($n \neq 0$) есть гипербола, так как в этой плоскости:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{z^2}{c_*^2} - \frac{x^2}{a_*^2} = 1, \quad \text{где} \quad a_* = \frac{an}{b}, \quad c_* = \frac{cn}{b}.$$

5 Сечение конуса плоскостью $z = \dfrac{c}{b}y + d$, $d \neq 0$, параллельной образующей конической поверхности $z = \dfrac{c}{b}y$, есть парабола, так как в этой плоскости:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{\left(\frac{c}{b}y+d\right)^2}{c^2}=0 \quad \text{или} \quad x^2=2py+m, \quad \text{где} \qquad p=\frac{a^2d}{cb}, \ \ m=\frac{a^2d^2}{c^2}.$$

Уравнение $x^2=2py+m$ есть уравнение параболы, симметричной оси OY (и не проходящей через начало координат).

6 Сечение всякой плоскостью $y=kx$, проходящей через ось OZ, представляется уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{d}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{d}+\frac{z}{c}\right)=0, \text{ где } \ d=\frac{ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}.$$

Таким образом в любом сечении плоскостью $y=kx$ получаем пару пересекающихся прямых $z=\frac{c}{d}x$ и $z=-\frac{c}{d}x$.

Для закрепления теоретических знаний решите следующие задачи на составление уравнений конуса.

1 Высота крыши от центра основания до верхней точки равна 10 метрам. При постройке был предложен проект крыши в виде конуса, в основании которого находится эллипс с полуосями 5 и 4 метров. Необходимо найти уравнение этого конуса. Найти места расположения входа на крышу, если они расположены в фокусах эллипса.

2 Для строительства сооружения строителям требуются колонны, представляющие собой усеченные круговые конуса. Составить уравнение конуса, если известны: высота колонны 36, большой радиус 4 и меньший радиус 3.

2.7 Гиперболический параболоид

Представим теперь (рис. 2.6), что в плоскости XOZ задана парабола

$$x^2=2pz, \ \ p>0, \qquad (2.4)$$

а в плоскости YOZ задана парабола

$$y^2=-2qz, \ \ q>0. \qquad (2.5)$$

Обе параболы имеют общую вершину (O), но расположены в перпендикулярных плоскостях; их оси находятся на оси OZ, но противоположно направлены; параболу (2.4) называют восходящей, а (2.5) – нисходящей.

Если парабола (2.5) непрерывно перемещается таким образом, что: ее ось не изменяет направления, вершина все время остается на параболе (2.4), а плоскости, в которых лежат подвижная и неподвижная параболы, остаются взаимно перпендикулярными, то образуется поверхность, которая называется *гиперболическим параболоидом*. Следуя определениям, данным на с. 23, парабола (2.5) называется образующей, а (2.4) – направляющей.

Уравнение гиперболического параболоида имеет вид

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}, \ \ p>0, \ \ q>0.$$

Убедитесь самостоятельно, что сечения этой поверхности плоскостями $y = h$ (параллельной XOZ) и $x = h$ (параллельной YOZ) есть параболы, что подтверждает процедуру построения гиперболического параболоида.

Почему же он называется гиперболическим?

Пересекая гиперболический параболоид плоскостью $z=h$, параллельной плоскости XOY, получим в сечении гиперболу, уравнением которой будет

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h.$$

При $h>0$ действительная ось гиперболы будет параллельна оси OX, при $h<0$ - оси OY.

Плоскость XOY ($z = 0$) дает в сечении с поверхностью параболоида линию $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$, которая есть не что иное, как пара пересекающихся прямых: $y = \sqrt{\frac{q}{p}}x$ и $y = -\sqrt{\frac{q}{p}}x$.

Считают, что гиперболический параболоид имеет форму седла. Он обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии: в данном случае это плоскости XOZ и YOZ. Точка, с которой совмещено начало координат, называется вершиной гиперболического параболоида; числа p, q называются его параметрами.

В заключение изучения этого параграфа докажите, что плоскость $2x - 12y - z + 16 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $x^2 - 4y^2 = 2z$ по прямолинейным образующим. Составьте уравнения этих прямолинейных образующих.

2.8 Цилиндрические поверхности

Определение ***Поверхность, образованная прямыми, параллельными некоторой данной прямой, и пересекающими данную линию L – направляющую, называется цилиндрической.***

Если в плоскости XOY дано уравнение с двумя переменными, например,

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{2.6}$$

то такому уравнению вместе с координатами всякой точки $N(x, y, 0)$ удовлетворяют и координаты произвольной точки $M(x, y, z)$, расположенной на прямой, проходящей через точку N и параллельной оси OZ (рис. 2.7).

Таким образом, уравнение (2.6) будет также уравнением геометрического места прямых, параллельных оси OZ и пересекающих кривую, определяемую в плоскости OXY уравнением (2.6). Такую поверхность называют цилиндрической.

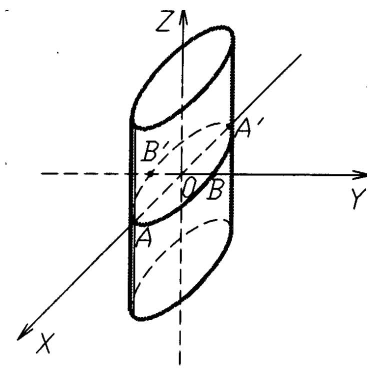


Рис. 2.8

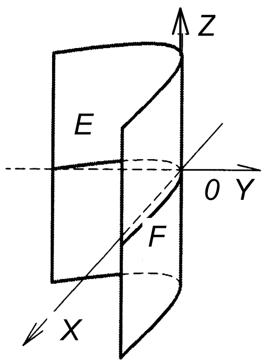


Рис. 2.9

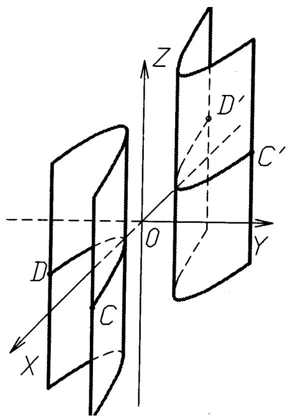


Рис. 2.10

Например, уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ представляет на плоскости XOY эллипс $ABA'B'$ (рис. 2.8) с полуосями $a = OA$, $b = OB$. В пространстве оно представляет цилиндрическую поверхность – эллиптический цилиндр, у которой образующие параллельны оси OZ, а направляющей служит эллипс $ABA'B'$.

Уравнение $y^2 = 2px$ представляет параболический цилиндр (рис. 2.9), у которого образующая параллельна оси OZ, а направляющей служит парабола EOF.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ представляет цилиндрическую поверхность – гиперболический цилиндр (рис. 2.10), у которой образующие параллельны оси OZ, а направляющей служит гипербола $CDC'D'$.

Замечание. Если направляющая – окружность, то цилиндрическая поверхность – прямой круговой цилиндр.

Его уравнение $x^2 + y^2 = R^2$.

Решите самостоятельно следующую задачу.

На берегу моря решено построить домики для отдыха несколько "экзотической" формы: эллиптического цилиндра, образующая которого параллельна плоскости, касательной к земной поверхности. Жилая часть каждого домика представляет собой прямоугольный параллелепипед размерами $6\times 4\times 2{,}4$ (м^3). Составить уравнение эллипсов, лежащих в основаниях цилиндра, если дополнительно известно, что ширина жилой части домика (4 м) в 1,5 раза больше расстояния между фокусами эллипса, а высота (2,4 м) в 1,25 раза меньше этого расстояния.

Глава 3 ГЕОМЕТРИЯ АРХИТЕКТУРНОЙ ГАРМОНИИ

Гармония является господствующей частью архитектуры.

В. Шеллинг[5]

Все [в архитектуре]... дóлжно делать, принимая во внимание прочность, пользу и красоту.

М. Витрувий[6]

Ни один из видов искусств так тесно не связан с геометрией, как архитектура. Строительство железобетонных покрытий требовало опалубки, удерживающей жидкий бетон и придающей ему лучшую форму. Опалубку же удобнее всего делать из прямых досок. Простейшие поверхности, образованные движением прямой в пространстве и называемые *линейчатыми поверхностями* – цилиндры и конусы, – были известны давно. Еще древние римляне сооружали цилиндрический своды. А существуют ли другие линейчатые поверхности? Ответ на этот вопрос архитекторам подсказали математики, которые обнаружили еще два типа линейчатых поверхностей – однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (см. 2.3) и гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ (см. 2.7).

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида легко представить в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{3.1}$$

Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка, каждое из которых представляет собой уравнение плоскости:

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{3.2}$$

где k – произвольное число. При каждом определенном значении $k\neq 0$ эти уравнения определяют прямую линию (как линию пересечения двух плоскостей). Меняя параметр k мы получим совокупность прямых.

Уравнения (3.2) составлены так, что почленное перемножение их дает уравнение однополостного гиперболоида (3.1). Таким образом, любая точка (x, y, z), координаты которой удовлетворяют системе (3.2), лежит на поверхности (3.1). Следовательно, каждая из прямых семейства целиком располагается на поверхности однополостного гиперболоида.

[5]Фридрих Вильгельм Йозеф Шеллинг (1775 – 1854) – немецкий философ-идеалист.

[6]Марк Витрувий (2-я половина 1 в. до н. э.) – римский архитектор и инженер, автор "Десяти книг по архитектуре", единственного дошедшего до нас полностью античного трактата на эту тему.

Можно показать, что на поверхности однополостного гиперболоида располагается еще одно семейство прямолинейных образующих, отличное от уже рассмотренного. Оно определяется уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{l}\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$ где l – произвольный параметр.

Кроме того можно доказать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямой из каждого из этих семейств. Схематически прямые обоих семейств располагаются на поверхности гиперболоида так как показано на рис. 3.1.

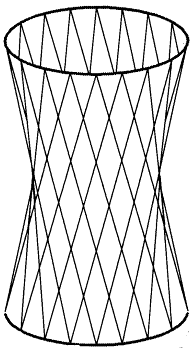


Рис. 3.1

Архитекторы воспользовались открытием математиков. Идея использования линейчатого свойства однополостного гиперболоида принадлежит известному русскому инженеру, почетному академику Владимиру Григорьевичу Шухову (1853 – 1939). В. Г. Шухов осуществил конструкции мачт, башен и опор, составленные из металлических балок, располагающихся по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида вращения, соединенных в точках пересечения.

Первая такая конструкция была осуществлена В. Г. Шуховым в 1896 г. при сооружении опоры высотою в 26 метров для водонапорного резервуара. По проекту В. Г. Шухова построена Шаболовская радиобашня (ныне телебашня) в Москве. Башня Шухова состоит из нескольких, поставленных друг на друга частей однополостных гиперболоидов.

Высокая прочность таких конструкций в соединении с легкостью определила их большое распространение. Если однополостный гиперболоид отдает должное "пользе" в архитектуре, то гиперболический параболоид (архитекторы называют его красивым сокращенным словом *гипар*) благодаря своей выразительной и элегантной форме служит "красоте".

Покажем, что гиперболический параболоид также является линейчатой поверхностью. Представим каноническое уравнение $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ в виде:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2kz, \\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{1}{k} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{1}{l}, \\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=2lz, \end{cases}$$

где k и l – произвольные параметры.

При помощи рассуждений, аналогичных случаю однополостного гиперболоида, можно убедиться, что на поверхности гиперболического параболоида также располагаются два семейства прямолинейных образующих (рис. 3.2).

Архитектурные возможности гипаров открыл инженер Феликс Кандела – испанский патриот, сражавшийся против фашистской диктатуры Франко и в 1939 году вынужденный эмигрировать в Мексику. Кандела с блеском продемонстрировал выразительные свойства гипаров на различных сооружениях – от промышленных зданий до ресторанов, ночных клубов и церквей. Объединяло столь функционально несхожие сооружения одно: в них математическая поверхность становилась произведением архитектурного исскуства.

Линейчатое свойство гипаров позволяет разрезать их по прямолинейным образующим и составлять из нескольких гипаров экзотические конструкции. Именно так поступил в 1958 году Ле Корбюзье, построив причудливый павильон "Филипс" на международной выставке в Брюсселе.

Точно сказал о внутренней красоте гипаров один из их приверженцев – американский инженер Вейдлингер: "Красота форм достигается не средствами "косметики", а вытекает из сущности конструкции". Для людей, которые видят только внешнюю красоту гипаров, они напоминают крылья огромных фантастических птиц, опустившихся на нашу Землю лишь отдохнуть и в каждое мгновенье готовых взмахнуть крыльями-гипарами и улететь в свои неведомые миры. Именно эта "вторая реальность", "поэтическое дыхание" и преобразуют математическую поверхность, строительную конструкцию в искусство, именуемое архитектурой.

3.1 Задачи для самостоятельного решения

1 Определить вид линии, найти координаты центра и сделать чертеж:

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$; 3) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$;

2) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$; 4) $x=-y^2+2y-1$.

2 Установить, какую поверхность определяют следующие уравнения:

1) $x^2+y^2+4z^2-1=0$; 6) $3z=x^2-27y^2$;

2) $x^2+y^2-z^2-1=0$; 7) $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$;

3) $2x^2-y^2-4z^2-4=0$; 8) $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$;

4) $z=2x^2+y^2$; 9) $z^2=20y$;

5) $16x^2+9y^2-25z^2=0$; 10) $y^2=-4x$.

Список

1 Азевич А. И. Двадцать уроков гармонии. М., 1998.
2 Боржко Б. Г. Эстетические свойства архитектуры. Моделирование и проектирование. Киев, 1990.
3 Волошинов А. В. Математика и искусство. М., 1992.
4 Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М., 1969.
5 Грубе Г. Ф., Кучмар А. Путеводитель по архитектурным формам. М., Стройиздат, 1995.
6 Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М., 1969.
7 Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М., 1981.
8 Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1964.
9 Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. М., 1978.
10 Популярная художественная энциклопедия: В 2 т. М.: Советская энциклопедия, 1985.
11 Привалов И. И. Аналитическая геометрия. М., 1966.
12 В. Г. Шухов – выдающийся инженер и ученый. Труды объединенной научной сессии АН СССР. М., 1984.

СОДЕРЖАНИЕ