С. И. Лазарев, Э. Н. Очнев

ЭЛЕМЕНТЫ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В КУРСАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Учебное пособие

МОСКВА
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"
2003

УДК 519.1(075)
ББК Л171.151 я73
Л 17

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки и техники РФ,
доктор технических наук, профессор
С.П. Рудобашта

Доктор технических наук, профессор
А.А. Арзамасцев

Лазарев С. И., Очнев Э. Н.

Л 17 Элементы инженерно-строительной геометрии в курсах проектирования: Учеб. пособие. М.: Машиностроение-1, 2003. 92 с.
ISBN 5-94275-030-0

Учебное пособие является теоретическим и практическим руководством в освоении методов инженерной геометрии и основ проектирования. Рассмотрены разделы: точка, прямая, плоскость; способы преобразования проекционного чертежа; поверхности и применение элементов инженерной геометрии в курсах проектирования. Даны контрольные вопросы по каждой рассмотренной теме для самопроверки усвоения материала.

Издание предназначено для студентов 1 и 2 курсов специальностей 330200, 170500, 170600, 290300 при выполнении графических и курсовых работ.

УДК 519.1(075)
ББК Л171.151 я73

ISBN 5-94275-030-0

Учебное издание

Лазарев Сергей Иванович,
Очнев Эдуард Николаевич

ЭЛЕМЕНТЫ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В КУРСАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Редактор Т. М. Г л и н к и н а
Компьютерное макетирование И. В. Е в с е е в о й

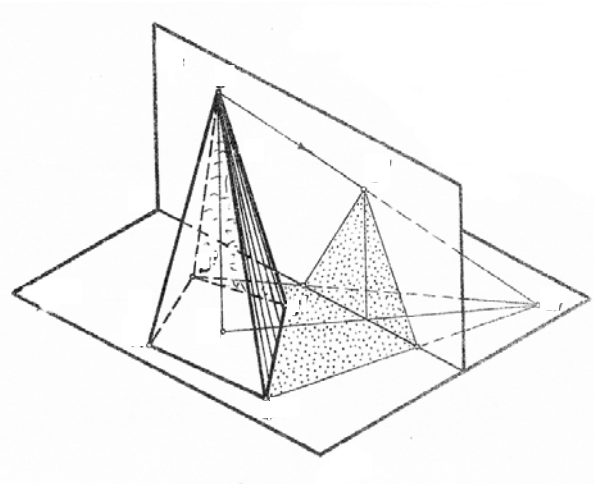
Подписано к печати 29.11.2002
Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Объем: 5,35 усл. печ. л.; 5,2 уч.-изд. л.
Тираж 500 экз. С. $738^{М}$

"Издательство Машиностроение-1", 107076, Москва, Стромынский пер., 4

Подготовлено к печати и отпечатано в издательско-полиграфическом центре
Тамбовского государственного технического университета,
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

С. И. Лазарев, Э. Н. Очнев

ЭЛЕМЕНТЫ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В КУРСАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ



МОСКВА
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"
2003

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия входит в число дисциплин, составляющих основу инженерного образования [1, 2]. Предметом ее является изложение и обоснование способов построения изображений пространственных форм на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям этих форм. Таким образом, начертательная геометрия является теоретической основой изготовления чертежей и чтения (правильного понимания) этих основополагающих технических документов.

Начертательная геометрия является первой составной частью общеинженерной учебной дисциплины – инженерной графики, включающей в себя также техническое черчение и компьютерную графику.

В определенном смысле, начертательную геометрию считают грамматикой технического языка – чертежа.

Кроме этого, начертательная геометрия играет существенную функцию в общем, вузовском образовании – интенсифицирует работу пространственного воображения и развивает его. Следует иметь в виду интернациональный характер графического способа передачи информации.

Приемы построения изображений пространственных форм на плоскости и сведения о них накапливались постепенно с глубокой древности. Об этом свидетельствуют дошедшие до нас остатки древних культур (наскальные изображения; осколки глиняной посуды с изображением различных бытовых сцен; древние изображения различных инженерных сооружений – кораблей, мостов, крепостей и т.п.)

Плоские рисунки и чертежи выполнялись в виде наглядных изображений. Наглядность превалировала над возможностью измерения-решения метрических вопросов. С развитием техники возникла насущная потребность в разработке методов, обеспечивающих точность и удобоизмеримость плоского изображения.

Систематизацию таких приемов и методов провел французский ученый Гаспар Монж (1746 – 1818) в труде, изданном в 1799 г. под названием "Геометрия начертательная". Изложенный Монжем метод параллельного ортогонального проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости обеспечивает при достаточной наглядности изображения высокую точность измерения пространственного объекта. Этот метод уже два века остается основой составления технических чертежей.

В России начертательная геометрия преподается с 1810 г. впервые в Петербургском Институте корпуса инженеров путей сообщения. В этом высшем учебном заведении прошла преподавательская работа Якова Александровича Севастьянова (1796 – 1846), с именем которого связано появление у нас первых сочинений по начертательной геометрии, сначала переведенных с французского языка, а затем оригинального труда "Основания начертательной геометрии" (1821).

Значительный вклад в развитие начертательной геометрии сделали Николай Иванович Макаров (1824 – 1904) – профессор Петербургского технологического института и Валериан Иванович Курдюмов (1853 – 1904) – профессор Петербургского Института инженеров путей сообщения.

Дальнейшие развитие научного содержания начертательной геометрии содержится в трудах Евграфа Степановича Федорова (1853 – 1919), Николая Алексеевича Рынина (1877 – 1942).

В настоящее время начертательная геометрия в качестве научной и учебной дисциплины окончательно сформировалась трудами Н. А. Глаголева (1888 – 1945), А. И. Добрякова (1895 – 1947), С. М. Колотова (1888 – 1965), И. И. Котова (1909 – 1976) и многих других.

Г л а в а 1 МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ. ТОЧКА, ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ

1.1 Методы проецирования. Проецирование точки

Центральное проецирование

Инструментом получения центральных проекций (центральное проецирование) геометрических объектов является некоторая плоскость π_0 (плоскость проекций) и точка S, не принадлежащая π_0 (центр проекций).

Механизм построения центральных проекций A_0, B_0, C_0, D_0, … точек пространства A, B, C, D, … заключается в проведении проецирующих прямых SA, SB , SC, SD, … до пересечения с плоскостью π_0 (рис. 1.1).

Обращает внимание совпадение центральных проекций точек A, A_1, A_2, A_3,… (следовательно, всех точек проецирующих прямых) и формулируется вывод об отсутствии взаимно однозначного соответствия между центральными проекциями и геометрическими объектами пространства. Очевидно, что положение проекций на плоскости π_0 зависит от положения центра проекций S.

Проецируя ряд точек плоской или пространственной линии (рис. 1.2), получаем центральную проекцию этой кривой.

Отсутствие взаимно однозначного соответствия между проецируемым объектом и его проекцией еще более наглядно в этом случае. Проецирующие прямые в совокупности образуют *коническую* поверхность, называемую проецирующей поверхностью. В связи с этим центральные проекции называются также коническими.

Овладение проецированием точек и линий создает предпосылки для проецирования плоских фигур, пространственных тел и их сочетаний. Центральное проецирование лежит в основе архитектурных изображений и изображений, представляющих собой художественные произведения искусства.

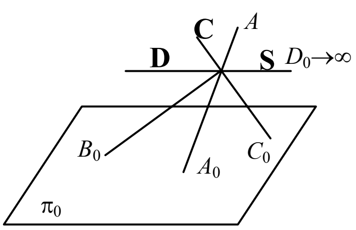


Рис. 1.1 Центральное проецирование точки

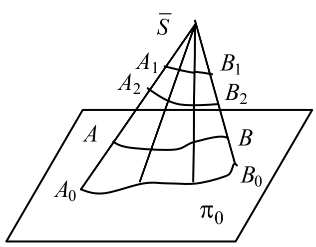


Рис. 1.2 Центральное проецирование кривой

Параллельное проецирование

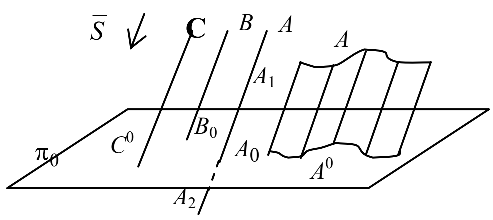


Рис. 1.3 Параллельное проецирование

В параллельном (цилиндрическом) проецировании считают центр проекций расположенным на бесконечном удалении от плоскости проекций. Проецирующие прямые параллельны между собой, а в совокупности образуют проецирующую цилиндрическую поверхность.

Инструментом параллельного проецирования (рис. 1.3) являются плоскость проекций π_0 и вектор *S*, задающий направление проецирующих прямых. Если $S \perp \pi_0$, то параллельное проецирование – косоугольное. Если $S \perp \pi_0$, то параллельное проецирование – прямоугольное (ортогональное).

В параллельном проецировании так же, как и в центральном, нет взаимно однозначного соответствия между проецируемыми объектами и их проекцией на плоскость π_0. И в параллельном и центральном проецировании:

- прямая линия проецируется в прямую линию, а проецирующей поверхностью является плоскость;
- для построения проекции прямой линии достаточно спроецировать две ее точки и соединить их отрезком прямой;
- если точка принадлежит линии, то проекция этой точки принадлежит проекции этой линии.

Для параллельного проецирования справедливы такие свойства:

- прямая, параллельная *S*, проецируется в точку;
- отрезок прямой, параллельной π_0, проецируется в натуральную величину.

Убедиться графически в справедливости перечисленных свойств не составит труда.

Проецирование точки по методу Монжа

Для обеспечения взаимно однозначного соответствия между проецируемым объектом и его плоским изображением Г. Монж предложил *метод параллельного, ортогонального проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций.*

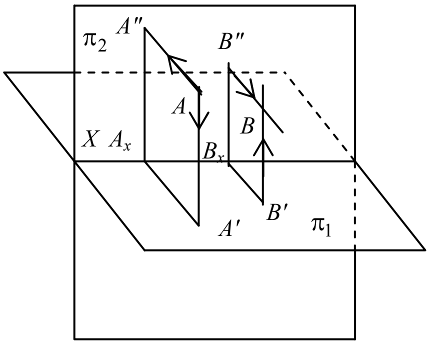


Рис. 1.4 Проекция точки:
π_1 – горизонтальная плоскость проекций;
π_2 – фронтальная плоскость проекций;
$AA' \perp \pi_1$; $AA'' \perp \pi_2$;
$\pi_1 \perp \pi_2$; x – ось проекций;
A' – горизонтальная проекция точки *A*
A'' – фронтальная проекция точки *A*

Итак, точка пространства *A*, спроецированная по методу Монжа в системе плоскостей проекций π_1, π_2, имеет единственную пару проекций – горизонтальную A' и фронтальную A''; по заданной паре проекций в этой системе (B', B'') строится единственная точка пространства *B*. Таким образом, обеспечивается взаимно однозначное соответствие между точкой пространства и парой ее проекций в системе π_1, π_2. Повернем плоскость π_1 вокруг оси *X* на 90° так, как это показано на рис. 1.4 и, учитывая, что любая плоскость безгранична, получим эпюр Монжа (рис. 1.5).

Линию $A''A' \perp X$ назовем *линией связи*. Эпюр Монжа утратил наглядность в изображении, но приобрел свойства, позволяющие точно отвечать на метрические (связанные с измерением) вопросы. Условимся эпюр Монжа и проекционные изображения, построенные на его основе, называть чертежом.

На чертеже точки *A* видно, что $A''A_x$ – расстояние точки *A* от плоскостей π_1; $A'A_x$ – расстояние точки *A* от плоскости π_2. По этим размерам можно построить и определить расстояние точки *A* от оси.

При построении чертежей более сложных объектов пространства и решении иных геометрических задач возникает необходимость дополнить систему π_1, π_2 другими плоскостями проекций. Введем новую плоскость проекций π_3 – профильную плоскость проекций. Получим дополнительно к A' и A'' – A''' – профильную проекцию точки *A* (рис. 1.6).

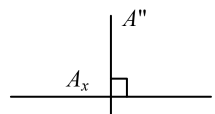
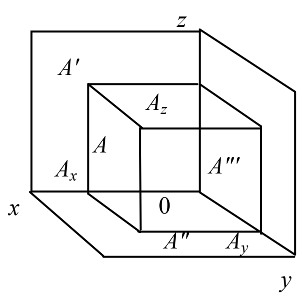


Рис. 1.5 Эпюр Монжа точки А

Построение третьей проекции по двум заданным – классическая задача начертательной геометрии и технического черчения (рис. 1.7).



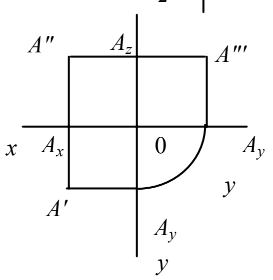


Рис. 1.7 Ортогональные проекции точки

Рис. 1.6 Точка в системе π_1, π_2, π_3

Чертеж геометрического объекта в системе плоскостей проекций π_1, π_2, π_3 дает возможность решать широкий круг задач метрического и позиционного характера.

Система прямоугольных координат

Модель положения точки A в системе плоскостей проекций π_1, π_2, π_3 аналогична модели, которую можно построить, зная прямоугольные "декартовые" координаты точки A. Координаты точки – это числа, выражающие ее расстояние до плоскостей проекций (плоскостей координат). OX, OY, OZ – оси координат, точка O – начало координат.

Точка пространства характеризуется тройкой чисел, которые записываются в скобках в следующей последовательности x, y, z. Например, $A(5, 3, 4)$. Построение чертежа этой точки (рис. 1.8), убеждает, что каждая проекция точки определяется двумя координатами: $A'(X, Y)$; $A''(X, Z)$; $A'''(Y, Z)$.

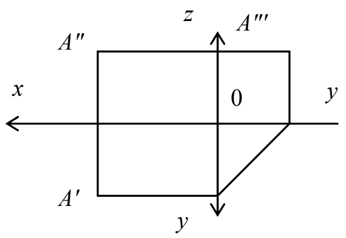


Рис. 1.8 Эпюр точки

Вопросы для самопроверки

1 Сущность центрального и параллельного проецирования.
2 Что представляет собой метод ортогональных проекций (метод Монжа)?
3 Что называется горизонтальной, фронтальной и профильной проекцией точки?
4 Что такое комплексный чертеж (эпюр) точки и механизм его образования.
5 Что называется координатами точки?
6 Какими координатами определяются горизонтальная, фронтальная и профильная проекция точки?
7 Как по чертежу определить расстояние от точки до плоскости проекций?
8 Могут ли совпадать на чертеже горизонтальная и фронтальная проекции точки?
9 Где находятся проекции точки, лежащей в одной из плоскостей проекции?
10 Что означает равенство нулю одной из координат точки?

1.2 Проецирование прямой. Взаимное расположение прямых

Проецирование прямой линии

Прямая линия определяется двумя точками, или одной точкой и направлением. Часть неограниченной по длине прямой, заключенной между двумя точками этой прямой (включая эти точки), называется отрезком прямой. В дальнейшем будем называть прямой линией ее отрезок.

Если на чертеже в системе плоскостей проекций π_1, π_2 или π_1, π_2, π_3 заданы соответствующие проекции двух точек, то, соединив одноименные проекции этих точек, получим чертеж прямой линии, соответственно, в системе двух или трех плоскостей проекций.

На рис. 1.9 представлен отрезок прямой AB в системе плоскостей π_1, π_2.

На рис. 1.10 изображен отрезок BC в системе плоскостей π_1, π_2, π_3.

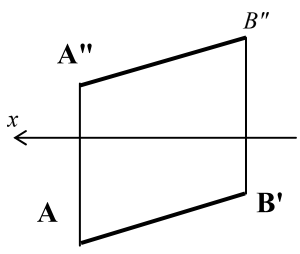


Рис. 1.9 Проекция отрезка прямой

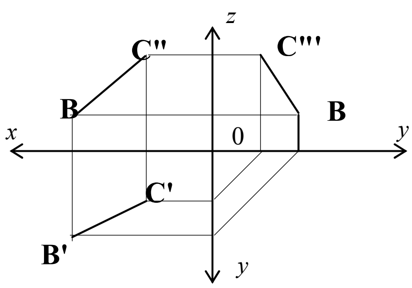


Рис. 1.10 Проекция прямой

Прямые AB и BC не параллельны и не перпендикулярны ни к одной из плоскостей проекций. Такие прямые называются *прямыми общего положения*.

Каждая проекция отрезка прямой общего положения меньше самого отрезка прямой.

Частные положения прямой линии относительно плоскостей проекций

Прямую, параллельную одной из плоскостей проекций, называют прямой уровня.

Пусть $AB \parallel \pi_1$. AB называется горизонтальной прямой. У горизонтальных прямых горизонтальная проекция равна по длине самой прямой $A'B' = = AB$ (рис. 1.11).

На рис. 1.12 изображена прямая $BC \parallel \pi_2$ – фронтальная прямая. $B''C'' = BC$.

На рис. 1.13 $CD \parallel \pi_3$ – профильная прямая. $C'''D''' = CD$.

Если прямая расположена параллельно двум плоскостям проекций, то она перпендикулярна третьей плоскости проекций. Такая прямая называется проецирующей с добавлением названия плоскости проекций, по отношению к которой прямая перпендикулярна.

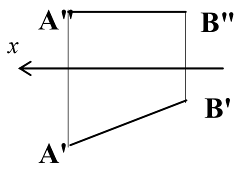


Рис. 1.11 Горизонтальная прямая

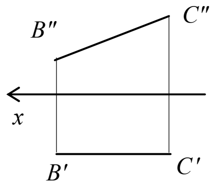


Рис. 1.12 Фронтальная прямая

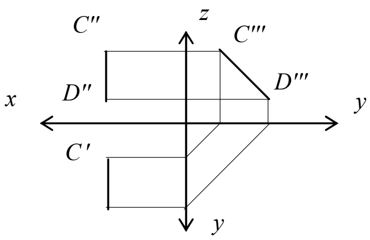


Рис. 1.13 Профильная прямая

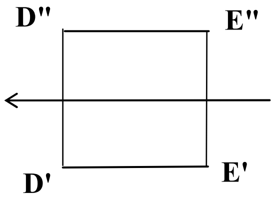


Рис. 1.14 Профильно-проецирующая прямая

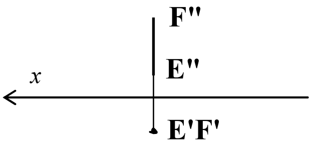


Рис. 1.15 Горизонтально-проецирующая прямая

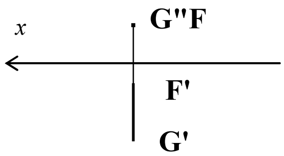


Рис. 1.16 Фронтально-проецирующая прямая

На рис. 1.14 прямая $DE \parallel \pi_1$, π_2, $(\perp \pi_3)$ – профильно-проецирующая. $D'E' = D''E'' = DE$.

На рис. 1.15 прямая $EF \parallel \pi_2$, π_3, $(\perp \pi_1)$ – горизонтально-проецирующая. $E''F'' = EF$, $E'''F''' = EF$.

На рис. 1.16 прямая $FG \parallel \pi_1$, π_3, $(\perp \pi_2)$ – фронтально-проецирующая. $F'G' = F'''G''' = FG$.

Взаимное положение прямых в пространстве

Параллельные прямые. Одноименные проекции параллельных прямых параллельны между собой. Справедливо ли обратное? Можно ли сделать вывод о параллельности прямых в пространстве, если на чертеже имеются взаимно параллельные соответствующие проекции двух прямых в системе трех плоскостей проекций? Ответ на поставленный вопрос утвердительный. Более того, вывод о параллельности двух прямых в пространстве можно сделать и по чертежу прямых в системе двух плоскостей проекций, если прямые занимают общее положение.

Но для прямых частного положения (например, профильных) нельзя сделать вывод об их параллельности, имея на чертеже параллельность горизонтальных и фронтальных их проекций, соответственно без дополнительного исследования (построения профильной проекции).

Так на рис. 1.17 $A'B' \parallel C'D'$, $A''B'' \parallel C''D''$. Построив $A'''B'''$ и $C'''D'''$, убедились, что AB не

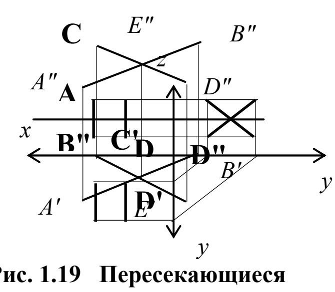


Рис. 1.19 Пересекающиеся прямые

Рис. 1.17 Скрещивающиеся прямые

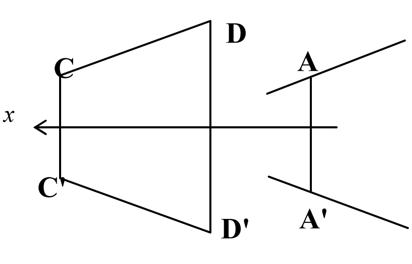


Рис. 1.18 Параллельные прямые

параллельна CD в пространстве, так как $A'''B'''$ не параллельна $C'''D'''$.

Если через заданную точку A требуется провести прямую, параллельную заданной прямой CD, то (рис. 1.18) необходимо через A' провести прямую, параллельную $C'D'$, а через A'' провести прямую, параллельную $C''D''$.

Пересекающиеся прямые. Если прямые линии пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой в точке, являющейся точкой пересечения этих прямых (рис. 1.19).

Заключение о том, что данные на чертеже прямые пересекаются, можно сделать всегда по отношению к прямым общего положения, независимо от того, изображены ли они в системе π_1, π_2 или в системе π_1, π_2, π_3.

Необходимым и достаточным условием является лишь то, чтобы точки пересечения одноименных проекций находились на соответствующей линии связи.

Но если одна из данных прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, а на чертеже не дана проекция на эту плоскость, то нельзя утверждать, что прямые пересекаются, хотя бы и было соблюдено указанное выше условие, без построения третьей проекции (рис. 1.20).

Скрещивающиеся прямые. Это не пересекающиеся и не параллельные между собой прямые. На рис. 1.21 изображены AB и CD, у которых отсутствуют признаки пересекающихся и параллельных прямых. В точках пересечения одноименных проекций этих прямых располагаются по две точки,

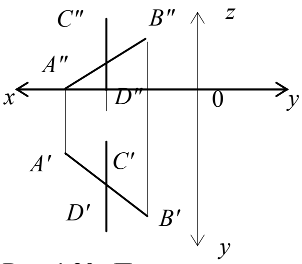


Рис. 1.20 Пересекающиеся прямые

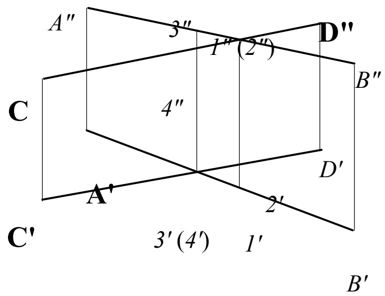


Рис. 1.21 Скрещивающиеся прямые

конкурирующие на видимость. Из двух точек *1*, *2*, расположенных на одном фронтально-проецирующем луче, видимой является точка *1*, так как она ближе к наблюдателю. Точка *3* и *4* конкурируют на видимость на плоскости π_1. Видимой является точка *3*, ближняя к наблюдателю. Проекции невидимых (загороженных) точек помещены в скобках.

Вопросы для самопроверки

1. Какие частные положения может занимать в пространстве прямая?
2. Когда длина проекции отрезка равна самому отрезку?
3. В каком случае проекция прямой обращается в точку?
4. Как расположены проекции прямой, лежащей в одной из плоскостей проекций?
5. Как расположена фронтальная проекция отрезка прямой, если его горизонтальная проекция равна самому отрезку?
6. Как могут быть взаимно расположены в пространстве две прямые?
7. Что на чертеже служит признаком параллельности прямых в пространстве?
8. Что на чертеже служит признаком пересечения прямых в пространстве?
9. Что представляет собой точка пересечения проекций двух скрещивающихся прямых?

Точка на прямой

Если известно, что $C \in AB$, то $C' \in A'B'$, $C'' \in A''B''$, $C''' \in A'''B'''$. На рис. 1.22, по заданной C' точки $C \in AB$, построена C''. Знак "$\in$" обозначает принадлежность. На рис. 1.23 точка C принадлежит профильной прямой AB. По заданной C'' построить C'. Точка C делит отрезок AB в определенном отношении. Важнейшим свойством параллельного проецирования является $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{A''C''}{C''B''} = \frac{A'''C'''}{C'''B'''}$.

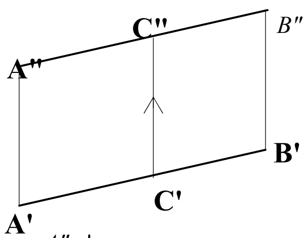


Рис. 1.22 Точка на прямой

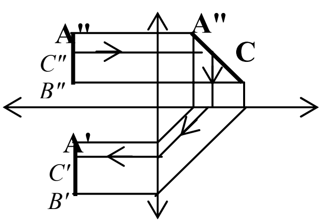


Рис. 1.23 Точка на прямой в системе π_1, π_2, π_3,

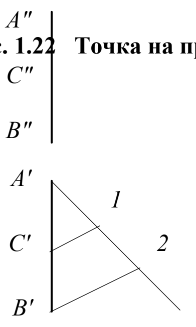


Рис. 1.24 Деление отрезка прямой

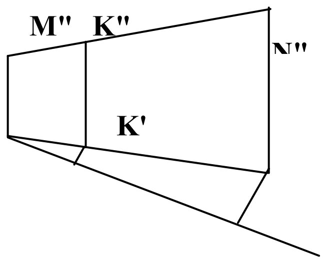


Рис. 1.25 Деление отрезка прямой в заданном отношении

Этим свойством можно воспользоваться для построения C' по заданной C'' (или наоборот) без построения профильной проекции (рис. 1.24).

Из A' под произвольным углом проводим луч, на котором отложим отрезки $A'\,1 = A''C''$ и $A'\,2 = A''B''$. Соединив 2 с B' и проведя линию $1C' \parallel 2B'$, получим искомую проекцию C', так как $\dfrac{A'C'}{C'B'} = \dfrac{A'1}{12} = \dfrac{A''C''}{C''B''}$.

На рис. 1.25 этим методом отрезок MN разделен точкой K в заданном отношении $\dfrac{MK}{KN} = \dfrac{2}{5}$.

Следы прямой

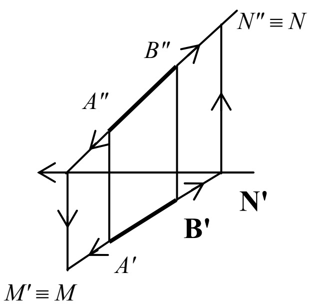


Рис. 1.26 Следы прямой общего положения

Следом прямой называется точка пересечения ее с плоскостью проекций. У прямой общего положения имеется три следа – горизонтальный (M), фронтальный (N) и профильный (P). $M \equiv M'$; $N \equiv N''$; $P \equiv P'''$. Прямая не имеет следа на плоскости проекций, если она параллельна этой плоскости.

Рассмотрим следы прямой общего положения AB в системе π_1, π_2 (рис. 1.26), где M – горизонтальный след; M' – горизонтальная проекция горизонтального следа ($M' \equiv M$); M'' – фронтальная про-

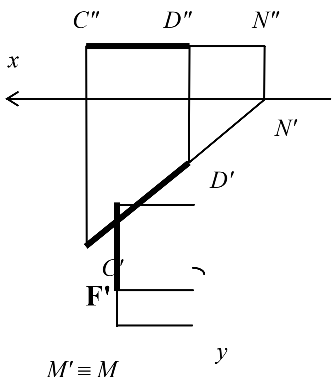


Рис. 1.27 След горизонтальной прямой

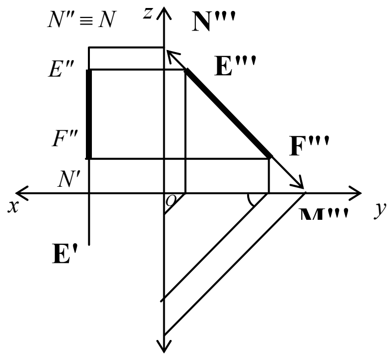


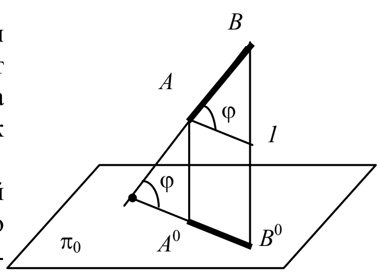
Рис. 1.28 Следы профильной прямой

екция горизонтального следа (располагается на оси x); N – фронтальный след; N' – горизонтальная проекция фронтального следа; N'' – фронтальная проекция фронтального следа ($N'' \equiv N$) (располагается на оси x).

На рис. 1.27 у горизонтальной прямой CD нет горизонтального следа.

На рис. 1.28 показано построение следов профильной прямой EF . В системе трех плоскостей координат: $z_M = 0;\ y_N = 0;\ x_P = 0$.

Определение длины отрезка прямой общего положения и углов наклона его к плоскостям π_1 и π_2



Для прямых частного положения чертеж непосредственно дает возможность определить длину отрезка прямой и угол наклона его к соответствующей плоскости проекции.

Рассмотрим отрезок прямой общего положения AB и его проекцию на плоскость π_0 (рис. 1.29). AB – гипотенуза прямоугольного $\Delta AB1$; $A1 = A^0B^0$; $B1 = BB^0 - AA^0$; φ – острый угол, противолежащий катету $B1$; $A1 = A^0B^0 = AB\cos\varphi$.

Рис. 1.29 Метод прямоугольного треугольника

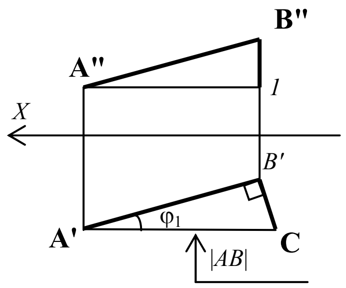


Рис. 1.30 Прямоугольный треугольник на $A'B'$

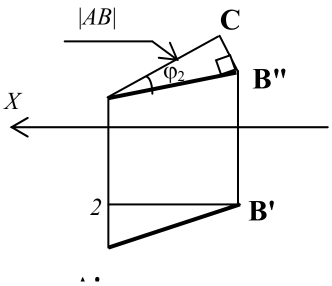


Рис. 1.31 Прямоугольный треугольник на $A''B''$

Угол прямой линии с плоскостью проекции (φ) определяется как угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

ТАКИМ ОБРАЗОМ, ЗНАЯ ПО ЧЕРТЕЖУ КАТЕТЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА, МОЖНО ПОСТРОИТЬ ЕГО В ЛЮБОМ ДРУГОМ МЕСТЕ ЧЕРТЕЖА И ОПРЕДЕЛИТЬ ИНТЕРЕСУЮЩУЮ НАС ДЛИНУ ОТРЕЗКА ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ (ГИПОТЕНУЗА) И УГОЛ НАКЛОНА ЕГО К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ (УГОЛ, ПРОТИВОПОЛОЖЕННЫЙ КАТЕТУ, РАВНОМУ РАЗНОСТИ РАССТОЯНИЙ КОНЦОВ ОТРЕЗКА ОТ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ).

На рис. 1.30 в $\Delta A'B'C$ $\angle A'B'C = 90^\circ$; $B'C = B''1$; φ_1 – угол наклона отрезка AB к плоскости проекций π_1. Длина отрезка AB равна гипотенузе $A'C$.

На рис. 1.31 $CB''=A'2$; φ_2 – угол наклона AB к плоскости π_2, длина отрезка $AB = A''C$.

Рассмотренный метод решения метрических задач носит название *метода прямоугольного треугольника.*

Проекции плоских углов

Будем обозначать углы строчными буквами греческого алфавита μ, ρ, σ, φ и ω.

1 Если плоскость, в которой расположен некоторый угол, перпендикулярна к плоскости проекций, то он проецируется на эту плоскость в виде прямой линии.

2 Если плоскость прямого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна его сторона параллельна этой плоскости, то прямой угол проецируется в виде прямого угла.

Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, $CB \parallel \pi_0$.

Докажем, что $\angle A^0C^0B^0 = 90^\circ$.

Выполним дополнительные построения (рис. 1.32): $CB \parallel C^0B^0$; $KL \parallel C^0B^0$ (по построению); $KL \parallel CB$; $\angle CKL = 90^\circ$.

Согласно теореме о трех перпендикулярах: если $KL \perp C^0K$, то $KL \perp CK$. Согласно обратной теореме: если $KL \perp CK$, то $KL \perp C^0K$. Следовательно, $\angle A^0C^0B^0 = 90^\circ$.

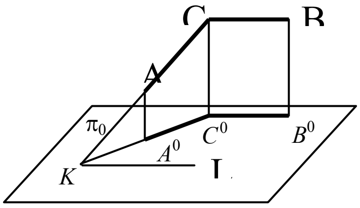


Рис. 1.32 Проекции углов

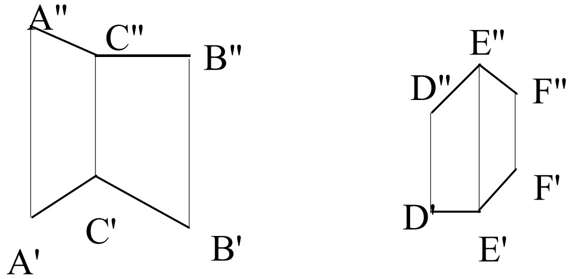
Верно и обратное утверждение, на основе которого можно сделать вывод, что углы ABC и DEF – прямые (рис. 1.33).

3 Если плоскость тупого или острого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна из его сторон параллельна плоскости проекций, то проекция тупого угла на эту плоскость есть тупой угол, проекция острого угла – острый угол.

4 Если обе стороны любого угла параллельны плоскости проекций, то его проекция равна по величине проецируемому углу.

Вопросы для самопроверки

1 Каким углом измеряется угол межу прямой и плоскостью?
2 Каков порядок определения натуральной величины отрезка методом прямоугольного треугольника?
3 Как определить углы наклона отрезка общего положения к горизонтальной или фронтальной плоскостям проекций?



4 Сформулировать условие принадлежности точки прямой на чертеже.
5 Как на чертеже разделить отрезок прямой в данном отношении?
6 Что называется следом прямой?
7 Какая прямая имеет один, два и три следа в системе трех плоскостей проекций?
8 Может ли прямая иметь горизонтальный и фронтальный следы, сливающиеся в одну точку на чертеже?
9 Как построить следы прямой и их проекции на чертеже?
10 Когда прямой угол проецируется в виде прямого угла на одну из плоскостей проекций? На две плоскости проекций?

1.3 Плоскость. Принадлежность точки и прямой плоскости

Способы задания плоскости на чертеже

Плоскость будем обозначать строчными буквами греческого алфавита α, β, γ, δ, ε. Плоскость на чертеже может быть задана:

- тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- прямой и точкой, не лежащей на этой прямой;
- двумя пересекающимися прямыми;
- двумя параллельными прямыми;
- плоской фигурой.

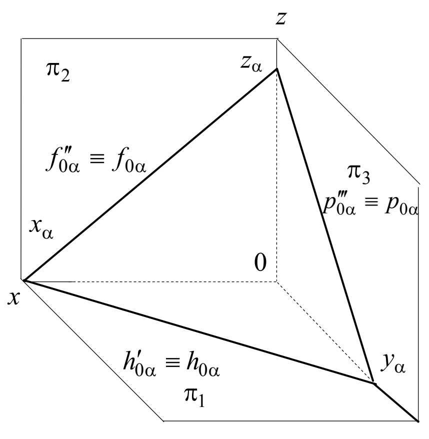


Рис. 1.34 Плоскость в системе π_1, π_2, π_3,

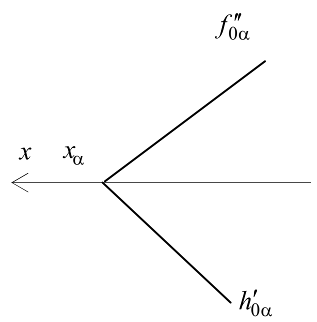


Рис. 1.35 Следы плоскости

Каждый из перечисленных способов задания плоскости простейшими геометрическими построениями может быть преобразован в любой другой.

Более наглядно и графически экономно плоскость задается следами (рис. 1.34, 1.35).След плоскости – это прямая, по которой она пересекается с плоскостью проекций.

Плоскость α в общем случае может иметь три следа – горизонтальный $(h_{0\alpha})$, фронтальный $(f_{0\alpha})$ и профильный $(p_{0\alpha})$.

Если плоскость α пересекает оси проекций, то в этих точках пересекаются два соответствующих следа плоскости. Эти точки называются точками схода следов $(x_\alpha,\ y_\alpha,\ z_\alpha)$ и по ним может быть построена плоскость.

Рассматривая след плоскости в качестве прямой пространства, имеем в виду, что одна из проекций этой прямой совпадает со следом $(f''_{0\alpha} \equiv f_{0\alpha};\ h'_{0\alpha} \equiv h_{0\alpha};\ p'''_{0\alpha} \equiv p_{0\alpha})$, а вторая располагается на оси проекции.

Прямая и точка в плоскости

ПОСТРОЕНИЕ НА ЧЕРТЕЖЕ ПРЯМОЙ В ЗАДАННОЙ ПЛОСКОСТИ ОСНОВАНО НА ДВУХ АКСИОМАХ:

1 Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости.

2 Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости или параллельной ей.

На рис. 1.36 прямая $AB \in \alpha$, так как $A \in f_{0\alpha}$, а $B \in h_{0\alpha}$.

На рис. 1.37 прямая $MN \in \beta$, так как $M \in \beta$ и $MN \parallel h_{0\beta}$.

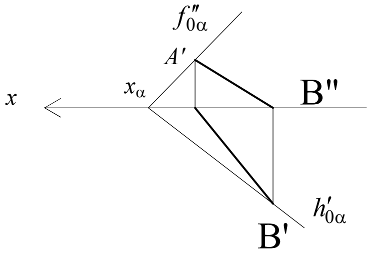


Рис. 1.36 Прямая $AB \in \alpha$

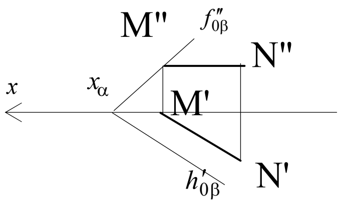


Рис. 1.37 Прямая $MN \in \alpha$

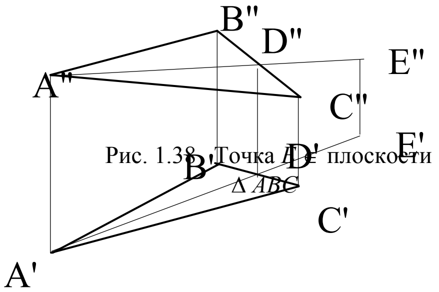


Рис. 1.38 Точка $E \in$ плоскости ΔABC

ЧТОБЫ ПОСТРОИТЬ ТОЧКУ, ПРИНАДЛЕЖАЩУЮ ДАННОЙ ПЛОСКОСТИ, НЕОБХОДИМО В ЭТОЙ ПЛОСКОСТИ ПОСТРОИТЬ ПРЯМУЮ И НА НЕЙ ПОСТРОИТЬ ТОЧКУ.

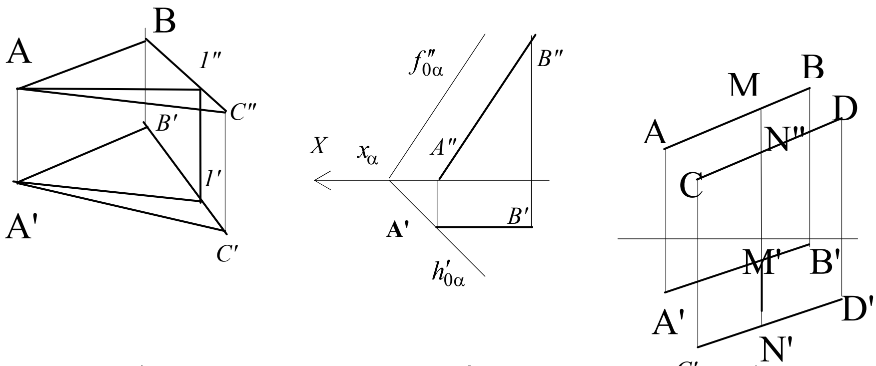
НА РИС. 1.38 $E \in$ ПЛОСКОСТИ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ ΔABC, ТАК КАК $AD \in ABC$, А $E \in AD$.

Прямые особого положения в плоскости

Прямые, принадлежащие плоскости и расположенные параллельно плоскостям проекций π_1, π_2, π_3, соответственно называются горизонталями, фронталями и профильными прямыми плоскости. Их общим названием является – линии уровня.

На рис. 1.39, *а* *A1* – горизонталь плоскости ABC; на рис. 1.39, *б* AB – фронталь плоскости α; на рис. 1.39, *в* MN – профильная прямая плоскости, заданной параллельными прямыми AB и CD.

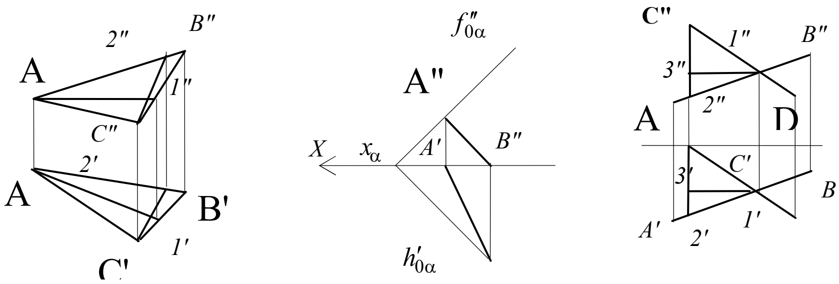
Прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные к горизонталям, фронталям или профильным прямым этой плоскости, называются линиями наибольшего наклона плоскости, соответственно к плоскостям проекций π_1, π_2, π_3.



а) *б*) *в*)

Рис. 1.39 Главные линии плоскости:

а – горизонталь; *б* – фронталь; *в* – профильная прямая



а) *б*) *в*)

Рис. 1.40 Линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций

Линия наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций имеет второе название – линия ската плоскости.

На рис. 1.40, *а* прямая *C1* – линия ската плоскости ΔABC; на рис. 1.40, *б* прямая AB – линия наибольшего наклона плоскости α к плоскости π_2; на рис. 1.40, *в* прямая *1 – 3* – линия наибольшего наклона плоскости, заданной пересекающимися прямыми AB и CD, к плоскости π_3.

Линии особого положения плоскости применяются в виде вспомога-тельных при различных геометрических построениях.

Рассмотрим пример (рис. 1.41).

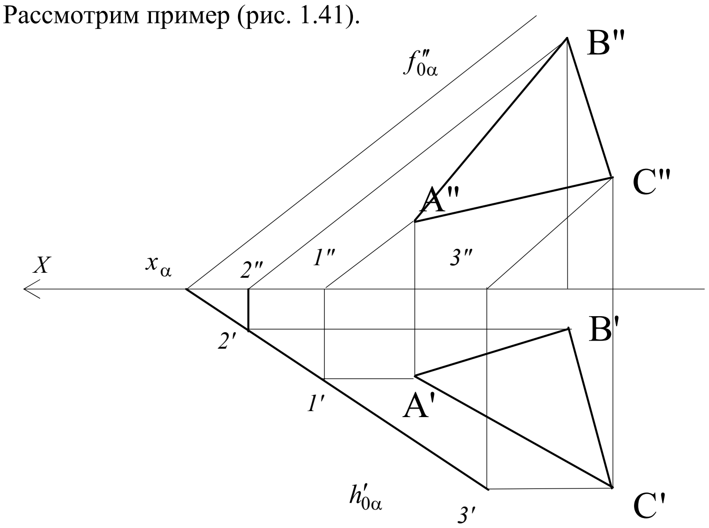


Рис. 1.41 Построение фронтальной проекции ΔABC по заданной горизонтальной с помощью фронталей

Требуется построить фронтальную проекцию ΔABC, расположенного в плоскости α, по заданной горизонтальной.

Проведем через вершины ΔABC фронтали *A1*, *B2*, *C3* в качестве вспомогательных и на фронтальных проекциях *A"1"*, *B"2"*, *C"3"* построим проекции *A"*, *B"*, *C"*, определяющие искомую фронтальную проекцию ΔABC.

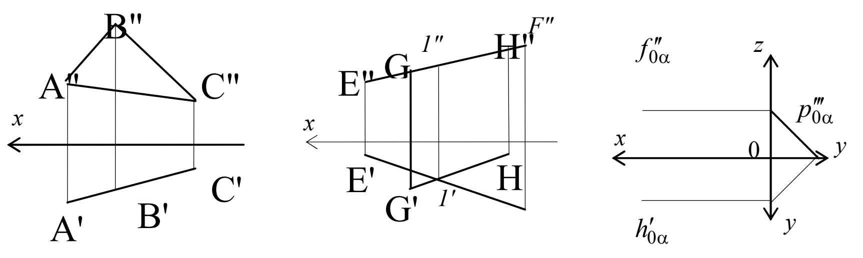
Положение плоскости относительно плоскостей проекций

1 Все плоскости, рассматриваемые нами раньше, могут быть объединены общим признаком – они не перпендикулярны и не параллельны ни к одной из плоскостей проекций π_1, π_2, π_3. Такие плоскости называются – плоскостями общего положения. Плоскости общего положения пересекают каждую ось проекций, следы этих плоскостей не перпендикулярны к осям x, y, z.

2 Плоскости, перпендикулярные к одной из плоскостей проекций π_1, π_2, π_3, называются горизонтально-, фронтально- и профильно-проецирующими.

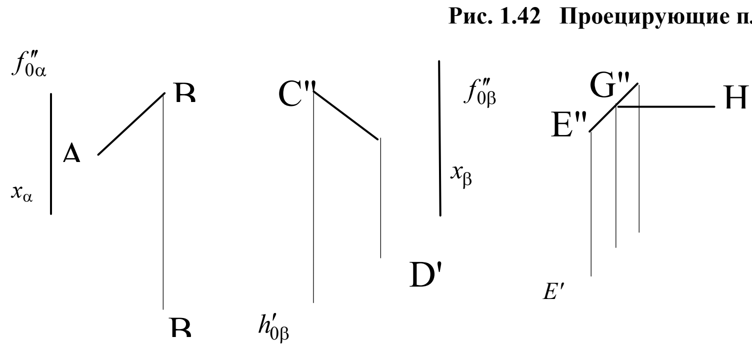
На рис. 1.42, *а* плоскость ΔABC – горизонтально-проецирующая; *б* – плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми *EF* и *GH* – фронтально-проецирующая; *в* – плоскость α, заданная следами – профильно-проецирующая.

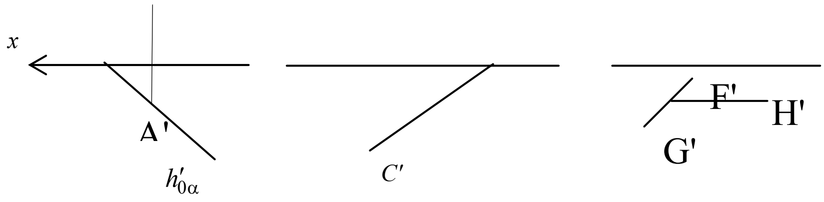
Через прямую общего положения можно провести любую проецирующую плоскость. На рис. 1.43, *а* через прямую *AB* проведена горизонтально-проецирующая плоскость α; *б* – через прямую *CD* проведена фронтально-проецирующая плоскость β; *в* – через прямую *EF* проведена профильно-проецирующая плоскость, определяемая пересекающимися прямыми *EF* и *GH* (*GH* – профильная прямая).



а) *б*) *в*)

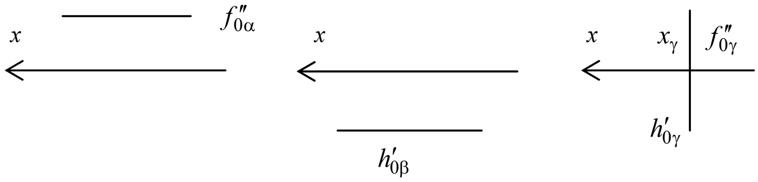
Рис. 1.42 Проецирующие плоскости





а) *б*) *в*)

Рис. 1.43 Проведение через прямую проецирующих плоскостей



а) *б*) *в*)

Рис. 1.44 Следы плоскостей уровня

3 Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций (параллельные третьей плоскости проекций), объединены общим названием – плоскости уровня.

Плоскость $\alpha \perp \pi_2, \pi_3 (\parallel \pi_1)$ – горизонтальная (рис. 1.44, *а*).

Плоскость $\beta \perp \pi_1, \pi_3 (\parallel \pi_2)$ – фронтальная (рис. 1.44, *б*).

Плоскость $\gamma \perp \pi_1, \pi_2 (\parallel \pi_3)$ – профильная (рис. 1.44, *в*).

Вопросы для самопроверки

1 Какими способами можно задать плоскость на чертеже?
2 Что называется следом плоскости?
3 Где располагаются следы прямой, лежащей в плоскости, заданной следами?
4 Как построить след плоскости?
5 Где находятся не обозначаемые проекции следов плоскости?
6 Каковы отличительные признаки плоскостей частного положения?
7 Чему равен в пространстве угол между горизонтальным и фронтальным следами для горизонтально-проецирующей плоскости?
8 Сформулируйте признак принадлежности точки плоскости.
9 Когда прямая принадлежит данной плоскости?
10 Что называется горизонталью, фронталью и линией наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций?
11 Какие плоскости можно провести через прямую общего положения?
12 Какие плоскости можно провести через прямую частного положения?

Взаимное положение двух плоскостей в пространстве

Две плоскости могут быть параллельными или пересекающимися.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым второй плоскости, то такие плоскости параллельны.

На рис. 1.45 $\alpha \parallel \beta$, так как $f''_{0\alpha} \parallel f''_{0\beta}$ и $h'_{0\alpha} \parallel h'_{0\beta}$.

Если признак параллельности не имеет места, то плоскости пересекаются между собой. При задании плоскостей не следами, а каким-либо иным способом, для определения их взаимного положения в пространстве следует осуществить некоторые вспомогательные построения. Примеры этих построений будут даны при дальнейшем изложении.

Взаимное положение прямой линии и плоскости. Прямая линия может

а) принадлежать плоскости;

б) быть параллельной плоскости;

в) пересекать плоскость.

Признаки, характеризующие принадлежность, были рассмотрены раньше.

Признак параллельности: если прямая параллельна какой-либо прямой, принадлежащей плоскости, то она параллельна самой плоскости.

Рассмотрим пересечение прямой и плоскости, т.е. рассмотрим порядок построения их общей точки.

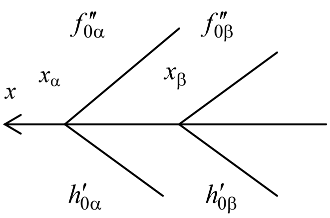


Рис. 1.45 Плоскости параллельные

Наиболее просто эта задача решается, когда плоскость занимает одно из частных положений. Ведь плоскость, перпендикулярная к плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в виде прямой линии, на которой и находится соответствующая проекция искомые точки. Остальные проекции этой точки строятся на основе принадлежности ее заданной прямой.

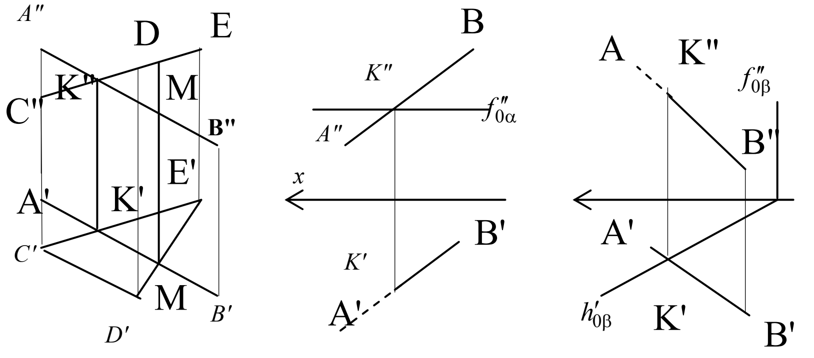


Рис. 1.46 Пересечение прямой с плоскостью

На рис. 1.46 рассмотрены некоторые случаи пересечения прямой *AB* с плоскостями частного положения.

Условно считаем в дальнейшем плоскости непрозрачными. Поэтому точка встречи прямой с плоскостью делит прямую на видимую (сплошная) и невидимую (штриховая) части, определяемые методом конкурирующих точек.

Построение линий пересечений двух плоскостей. Прямая линия, получаемая при взаимном пересечении двух плоскостей, определяется двумя точками, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям. Так на рис. 1.47 линия пересечения *1 – 2* горизонтально-проецирующей плоскости α и плоскости ΔABC определена точками пересечением сторон треугольника AC и BC с плоскостью α, а на рис. 1.48 линия *1 – 2* есть линия пересечения ΔABC (общего положения) и плоскости ΔDEF (фронтально-проецирующая).

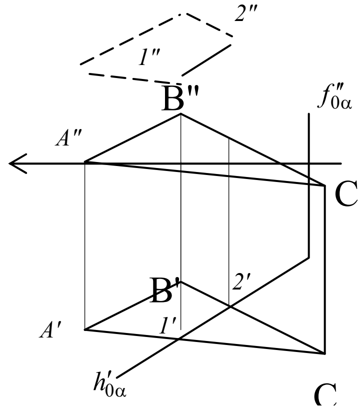


Рис. 1.47 Пересечение плоскостей

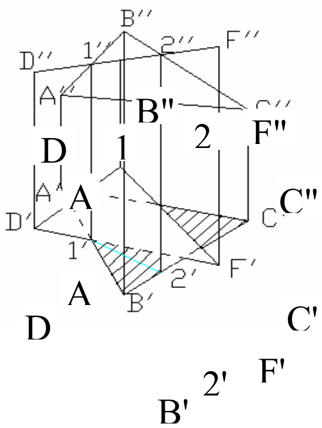


Рис. 1.48 Пересечение плоскостей

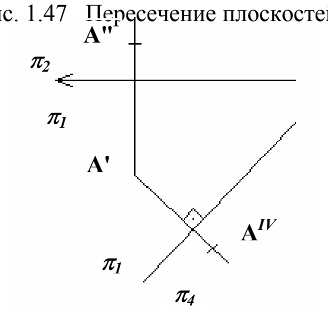


Рис. 2.5 Построение точки в новой плоскости

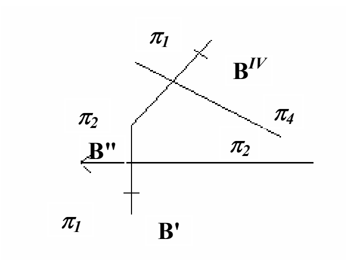


Рис. 2.6 Построение точки в новой плоскости

Проекция точки *A* на плоскости π_4 обозначается A^{IV} и получается методом параллельного ортогонального проецирования. Чертеж точки *A* в системе плоскостей проекций π_1, π_2 и в системе π_1, π_4 связывает общая координата, характеризующая расстояние точки *A* от общей для этих систем плоскости π_1.

На рис. 2.6 новая плоскость π_4 – фронтально-проецирующая. Ее фронтальный след принимается за новую ось проекций, а "связывающей" координатой точки *B* является Y_B в системе π_1, π_2.

Овладев построением чертежа точек в новой системе плоскостей проекций, мы можем теперь изображать любой геометрический объект в измененной системе.

Введение в систему π_1, π_2 одной плоскости проекций

Многие метрические задачи решаются введением в систему плоскостей π_1, π_2 лишь одной дополнительной плоскости π_4. На рис. 2.7 плос-

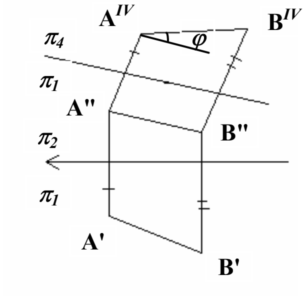


Рис. 2.7 Замена плоскости π_1

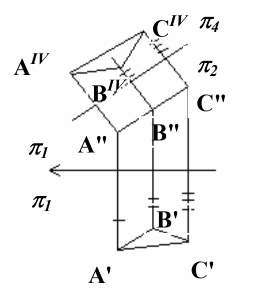


Рис. 2.8 Замена плоскости π_1

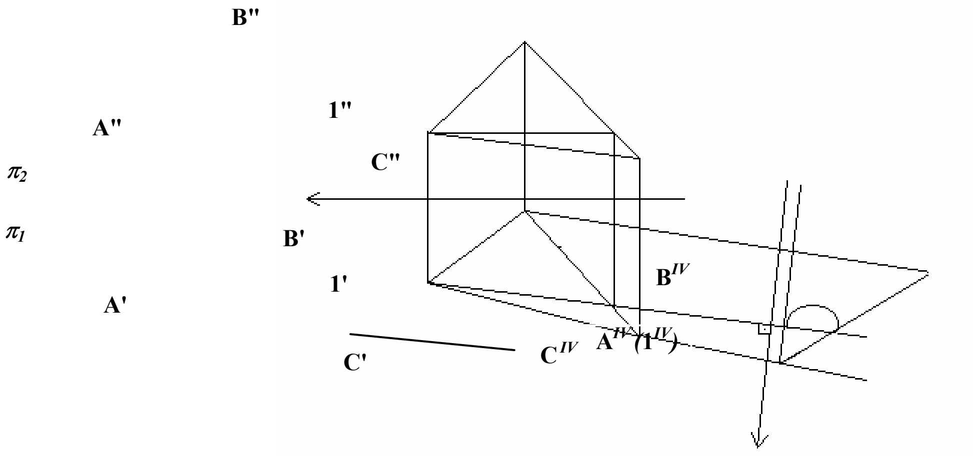


Рис. 2.9 Замена плоскости

кость $\pi_4 \perp \pi_2$ введена для определения угла наклона отрезка *AB* к плоскости π_2. π_4 расположена параллельно *AB*.

На рис. 2.8 расположение плоскости π_4 продиктовано необходимостью определения натурального вида треугольника *ABC*.

Угол наклона плоскости общего положения, заданной треугольником *ABC*, к плоскости π_1 определяется на проекции этого треугольника на плоскости $\pi_4 \perp \pi_1$ ($\pi_4 \perp A_1$) – горизонтали треугольника *ABC* (рис. 2.9).

На рис. 2.10 плоскость общего положения α введением $\pi_4 \perp \pi_1$ ($\pi_4 \perp h'_{0\alpha}$) переведена в π_4 – проецирующее положение.

Определено расстояние от точки *K* до плоскости α. $\pi_4 \perp \pi_1$, $\pi_4 \perp \alpha$ (рис. 2.11).

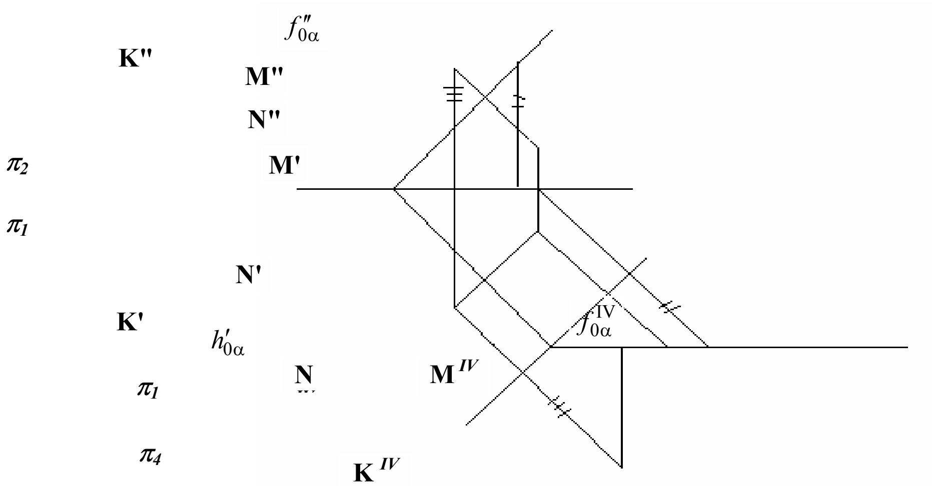


Рис. 2.11 Замена плоскости

Введение в систему π_1, π_2 двух плоскостей проекций

Рассмотрим следующие примеры:

1) Прямую общего положения AB перевести в положение проецирующей прямой. На рис. 2.12 $\pi_4 \perp \pi_1$, $\pi_4 \parallel AB$; $\pi_5 \perp \pi_4$, $\pi_5 \perp AB$.

2) Определить натуральный вид треугольника ABC, расположенного в плоскости общего положения. На рис. 2.13 $\pi_4 \perp \pi_1$, $\pi_4 \perp A1$; $\pi_5 \perp \pi_4$, $\pi_5 \parallel ABC$.

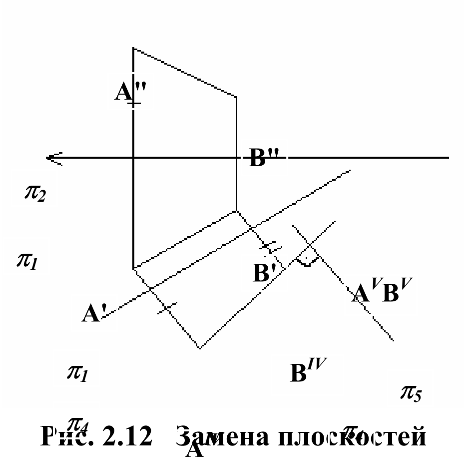


Рис. 2.12 Замена плоскостей

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит способ замены плоскостей проекций?
2. Какие координаты точек остаются неизменными при замене горизонтальной (фронтальной) плоскости проекций?
3. Как надо располагать новые плоскости проекций, чтобы отрезок прямой общего положения спроецировался в натуральную величину? В точку?

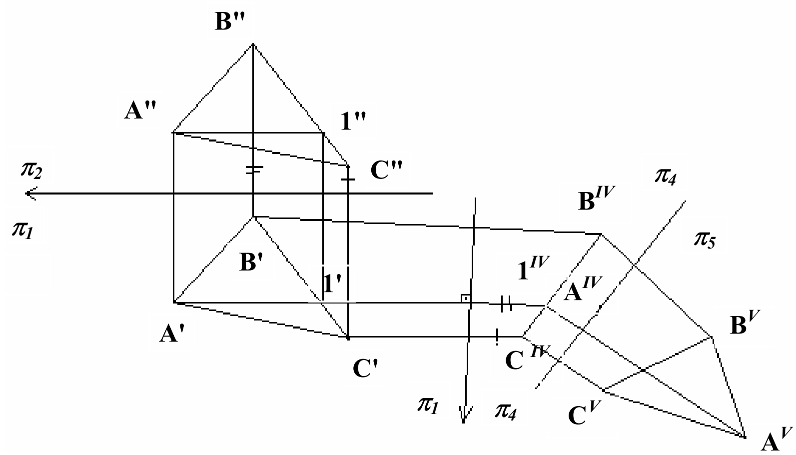


Рис. 2.13 Замена плоскостей

4. Как расположить новую плоскость проекций, чтобы заданная плоскость стала проецирующей?
5. При каком расположении треугольника можно определить его натуральную величину с помощью замены только одной плоскости проекций?
6. В каком случае двугранный угол между плоскостями проецируется на плоскость проекций в натуральную величину?

2.3 Преобразование чертежа вращением

Основные понятия

При вращении вокруг некоторой неподвижной прямой (оси вращения) каждая точка вращаемого геометрического объекта перемещается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (плоскость вращения). Точка перемещается по окружности, центр которой – в точке пересечения оси с плоскостью вращения (центр вращения); радиус этой окружности равен расстоянию от вращаемой точки до центра (радиус вращения).

Ось вращения может быть задана или выбрана, в последнем случае выгодно расположить ось перпендикулярно к одной из плоскостей проекций либо расположить ее в одной из плоскостей проекций.

На рис. 2.14 A – вращаемая точка; $O''O$ – ось вращения ($\perp\pi_2$); α – плоскость вращения ($\parallel\pi_2$); O – центр вращения ($\alpha \times O''O$); OA – радиус вращения.

Очевидный вывод:

В плоскости проекций, проекция вращаемой точки (A'') повторяющую траекторию параллельной оси вращения, перемещается по следу плос-параллельной оси вращения).

Таким образом, одна из формы и размеров, перемещается и проекций, а все точки проекции перемещаются параллельно оси проекций поворачивается на один и

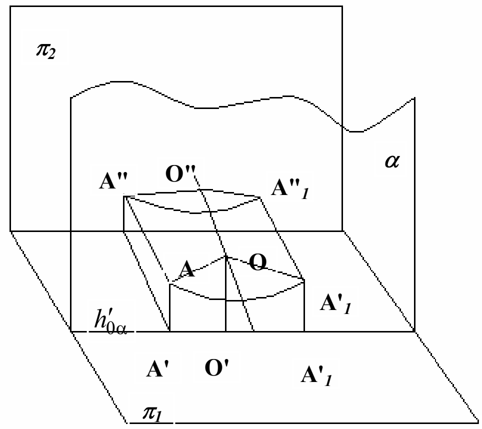


Рис. 2.14 Способ вращения

перпендикулярной к оси вращения, описывает круговую траекторию, точки A в плоскости α; в плоскости, проекция вращаемой точки кости вращения (по прямой,

проекций вращаемого объекта, не меняя своей занимает новое положение в своей плоскости объекта во второй плоскости проекций проекций, так как каждая точка и объекта и его тот же угол.

Вращение вокруг проецирующих прямых

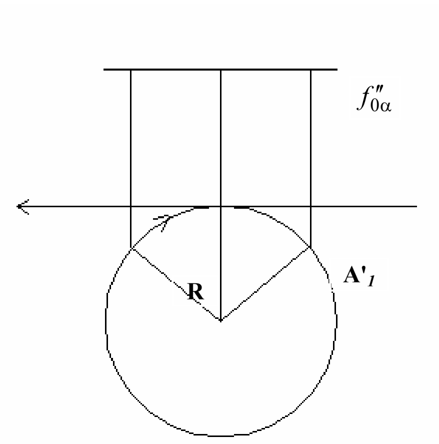


Рис. 2.15 Вращение вокруг проецирующей оси

На рис. 2.15 A – вращаемая точка, ось вращения – горизонтально-проецирующая, плоскость вращения точки A – α – горизонтальная и радиус вращения точки A – $O'A'$. Точка A может перейти в положение $A1$, вращаясь в двух противоположных направлениях.

Предлагается изобразить графически вращение точки вокруг фронтально-проецирующей оси и указать все элементы вращения.

При повороте отрезка прямой естественно осуществить поворот двух его концевых точек на один и тот же угол или поступить так, как это показано на рис. 2.16.

Проекция $A'B'$ жестко связана с проекцией центра вращения O' перпендикуляром $O'C$. Проведем поворот отрезка на угол φ. Построение $A'_1B'_1$ и $A''_1B''_1$ понятно из чертежа.

Поворот плоскости вокруг проецирующей оси сводится к повороту ее точек и прямых линий. Например, поворот треугольника, задающего плоскость общего положения, можно осуществить, вращая три его вершины на один и тот же угол (т.е. трижды повторить построения рис. 2.15) или поступить графически по принципу, показанному на рис. 2.16.

При повороте плоскости, заданной следами, вращается один из следов и ее соответствующая линия частного положения (рис. 2.17).

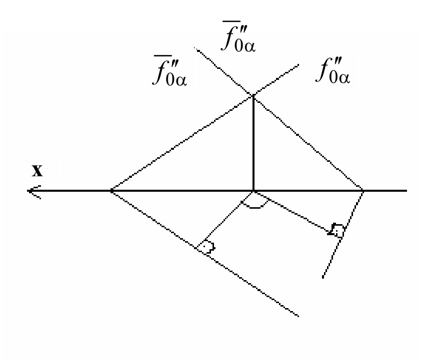


Рис. 2.18 Вращения плоскости

При этом повороте не меняется высота горизонтали плоскости α, проведенной через точку пересечения α и оси вращения.

Когда положение оси вращения можно выбрать, то это необходимо делать из соображения меньшего объема графической работы (рис. 2.18).

Пример. Плоскость α общего положения поворотом вокруг проецирующей оси перевести в горизонтально-проецирующее положение и определить ее угол наклона к площади π_2 (рис. 2.19).

Вращение без указания осей вращения

При вращении геометрических объектов вокруг проецирующих прямых рационально не только выбирать удобное положение оси вращения, но и не указывать вообще ее положения. При этом графическую процедуру построения нового положения вращаемого объекта следует основывать на принципах, отмеченных ранее [1, с. 38]. Этот способ преобразования чертежа называется плоско-параллельным перемещением.

Пример. Определить истинную форму треугольника ABC, лежащего в плоскости общего положения (рис. 2.20).

Первое вращение выполнено вокруг некоторой горизонтально-проецирующей прямой и плоскость ΔABC переведена во фронтально-проецирующее положение. Ориентиром этого преобразования явилась горизонталь $C1$. Вторым вращением плоскость ΔABC переведена в горизонтальное положение вокруг некоторой фронтально-проецирующей прямой и, следовательно, $A'_2B'_2C'_2$ – есть истинная форма ΔABC.

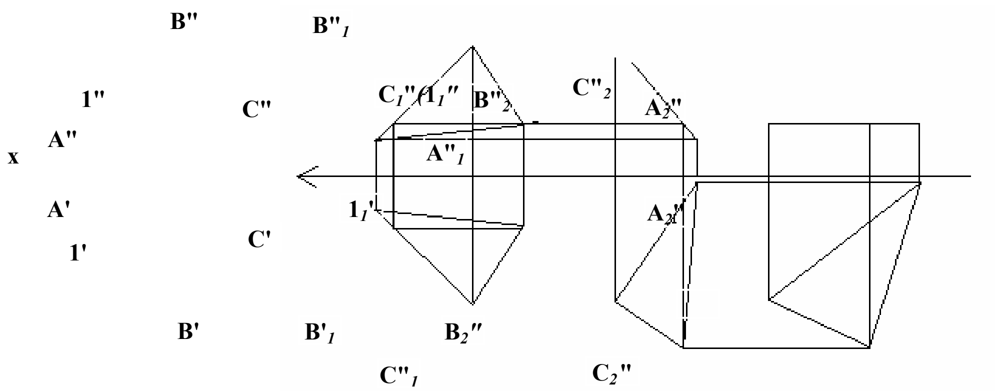


Рис. 2.20 Вращение без указания осей

Вращение вокруг линии уровня

Для определения формы и размеров плоской фигуры ее можно повернуть вокруг горизонтали (до положения горизонтального), либо вокруг фронтали (до положения фронтального).

На рис. 2.21 ΔABC из общего положения переведен в горизонтальное положение вращением вокруг горизонтали *A1* и $A'B_1'C_1'$ – есть истинная форма этой фигуры.

Точки A' и $1'$ – неподвижны, так как принадлежат оси вращения. Вращаются вершины *B* и *C*.

Вершина *B* вращается в плоскости $\alpha \perp A'1'$. Точка *O* – центр вращения точки *B*. *BO* – радиус вращения точки *B*, его длина определена методом прямоугольного треугольника. Вершина *B* переместилась в положение B'_1. Вершина C'_1 построена на пересечении плоскости вращения точки *C* (α_1) с отрезком прямой $B'_1 1'$.

Способ совмещения

Вращения плоскости, заданной следами, целесообразно проводить вокруг одного из следов до совмещения с соответствующей плоскостью проекций. На рис. 2.22 определена длина отрезка *AB*, принадлежащего плоскости общего положения α, заданной следами, методом совмещения с плоскостью π_1, т.е. вращения вокруг горизонтального следа $h'_{0\alpha}$.

Совмещение положения фрон-тального следа $f_{0\alpha}''$ построено из следующих соображений: x_α неподвижна; β – плоскость вращения точки *1*; *O* – центр вращения точки *1*; *O1* – радиус вращения точки *1*. Он определен методом прямоугольного треугольника.

Положение точек *A* и *B* в совмещенном положении построены, как точки, принадлежащие соответствующим горизонталям плоскости α – *A1* и *B2*.

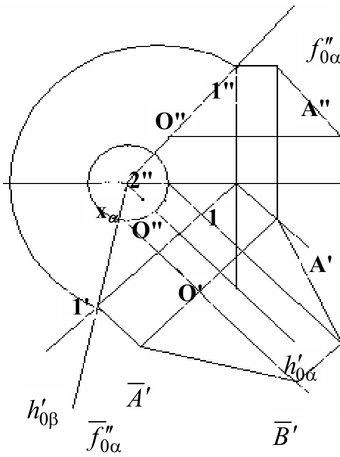


Рис. 2.22 Способ совмещен

Вопросы для самопроверки

1 В чем заключается способ перемены?

2 В чем заключается способ вращения?

3 Назвать элементы вращения.

4 Как перемещаются проекции точки относительно плоскостей проекций при вращении ее вокруг горизонтально-проецирующей оси?

5 Какая из проекций отрезка прямой или плоской фигуры не изменяет своей величины (формы) при вращении вокруг фронтально-проецирующей оси?

6 Как прямую общего положения повернуть до положения проецирующей прямой?

7 Какую проецирующую прямую следует принять за ось вращения, чтобы плоскость общего положения стала в результате вращения фронтально-проецирующей?

8 В чем состоит сущность способа плоско-параллельного перемещения?

9 В какой проецирующей плоскости перемещается точка при вращении вокруг горизонтали? Фронтали?

10 Как определить радиус вращения точки при ее вращении вокруг горизонтали? Фронтали?

11 Что является осью вращения при совмещении заданной плоскости с горизонтальной (фронтальной) плоскостью проекции?

Глава 3 МНОГОГРАННЫЕ И КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Все поверхности можно разделить на две группы: многогранные и кривые [1, 2].

3.1 Многогранники

Общие понятия о многогранных поверхностях

Многогранной называется поверхность, образованная частями пересекающихся плоскостей. Отсеки плоскостей называются гранями, а линии их пересечения – ребрами. Точки пересечения ребер называются вершинами.

Среди многогранников большую группу составляют правильные многогранники.

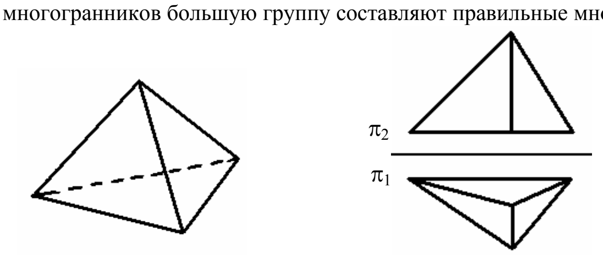


Рис. 3.1 Трехгранная пирамида

Существует пять правильных многогранников:

1 Четырехгранник (тетраэдр) – это правильная трехгранная пирамида (рис. 3.1). Ее поверхность ограничена четырьмя равносторонними треугольниками.

2 Шестигранник, или куб. Его поверхность состоит из шести равных квадратов (рис. 3.2). Куб (гексаэдр) представляет собой частный случай призмы и параллелепипеда.

3 Восьмигранники (октаэдр). Его поверхность состоит из восьми равносторонних и равных треугольников (рис. 3.3).

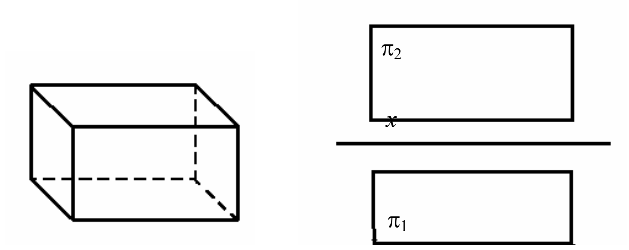


Рис. 3.2 Шестигранник

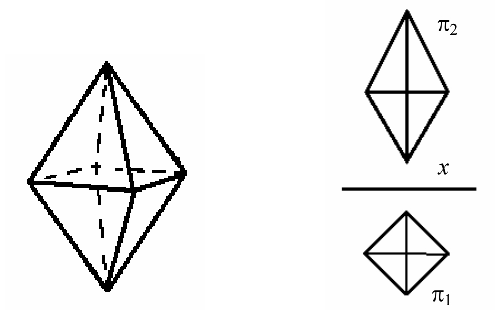


Рис. 3.3 Восьмигранник

4 Двенадцатигранник (додекаэдр) ограничен двенадцатью равносторонними и равными пятиугольниками.

5 Двадцатигранник (икосаэдр). Его поверхность состоит из двадцати равносторонних и равных треугольников, соединенных по пяти около каждой вершины.

Свойства многогранников изучал Эйлер, ему принадлежит теорема: У всякого выпуклого многогранника число граней (Г) плюс число вершин (В) минус число ребер (Р) равно двум, т.е.

$$Г + В – Р = 2. \qquad (3.1)$$

Пересечение многогранника плоскостью

Построить сечение многогранника плоскостью можно двумя методами:

- Способом граней (пересечение двух плоскостей);
- Способом ребер (пересечение прямой с плоскостью).

Способ граней. Дана призма, которую пересекает плоскость, образованная двумя пересекающимися прямыми *AB* и *AC* (рис. 3.4). Определить фигуру сечения.

Порядок графических построений

1 Так как у прямой призмы боковые грани представляют собой горизонтально проецирующие плоскости, задаем их следами.

2 Строим линии пересечения заданной плоскости и граней.

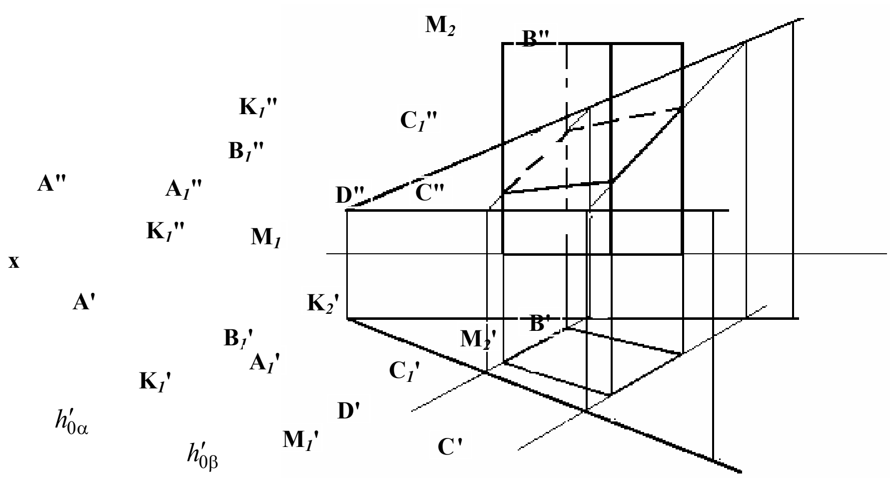


Рис. 3.4 Пересечение призмы плоскостью

3 Определяем точки пресечения ребер призмы с линиями пересечения.

4 По полученным точкам строим фигуру сечения.

Способ ребер. Дана пирамида, которую пересекает плоскость общего положения. Определяем фигуру сечения (рис. 3.5).

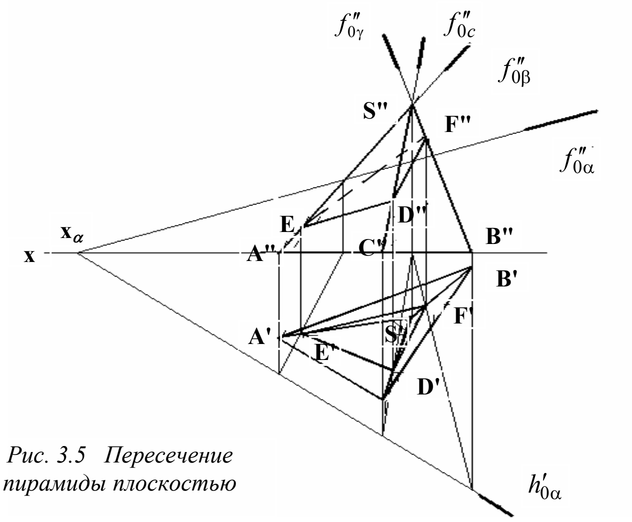


Рис. 3.5 Пересечение пирамиды плоскостью

Порядок графических построений

1 Через ребра пирамиды проводим вспомогательные проецирующие плоскости, задавая их следами.
2 Определяем линии пересечения заданной плоскости и вспомогательных плоскостей.
3 Находим точки пересечения, принадлежащие фигуре сечения, на пересечении ребер и линий пересечения плоскостей.
4 По полученным точкам в обеих плоскостях проекций строим проекции фигуры сечения.

Построение разверток многогранных поверхностей

Разверткой называется изображение, полученное в результате совмещения поверхности (боковой или полной) с плоскостью чертежа [1]. Для одних тел развертки могут быть точными, для других – приближенными. Точные развертки имеют развертываемые поверхности (многогранники, цилиндрические и конические поверхности). Приближенные развертки – у неразвертывающихся поверхностей, к ним относятся, например, поверхности шара, тора, эллипсоида и т.д.

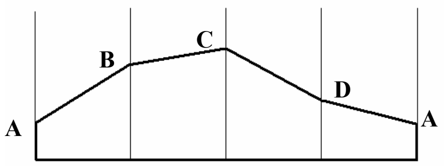


Рис. 3.6 призмы

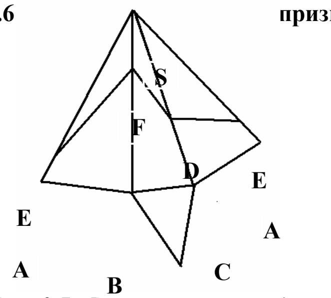


Рис. 3.7 Развертка пирамиды с нанесением линии пересечения

Основной принцип построения разверток – использование истинных размеров развертываемых элементов поверхности.

Рассмотрим примеры.

Пример. Построим развертку боковой поверхности усеченной части призмы (рис. 3.6).

При построении развертки боковой поверхности воспользуемся ***методом нормального сечения***. Нормальное сечение – это сечение плоскостью, перпендикулярной к ребрам призмы.

Так как основание призмы параллельно плоскости π_1 – горизонтальной плоскости проекции, а грани призмы перпендикулярны, то для построения развертки поступаем следующим образом:

1 Проводим горизонтальную прямую.
2 От произвольной точки на этой прямой откладываем отрезки, равные длинам сторон основания призмы.
3 Из этих точек восстанавливаем перпендикуляры и на них откладываем отрезки, равные ребрам, отсеченным на призме.
4 Соединяя точки, получаем развертку боковой поверхности отсеченной призмы.

Пример. Построить развертку поверхности пирамиды *SABC* (рис. 3.7).

Пользуемся методом триангуляция. Метод триангуляции – это построение развертки поверхности пирамиды по треугольникам.

1 Определяем натуральную величину сторон основания и ребер пирамиды.
2 Строим развертку поверхности пирамиды по треугольникам.
3 Наносим линию пересечения на боковые грани пирамиды.

3.2 Кривые линии и поверхности

Кривую линию можно представить как траекторию движущейся точки на плоскости или в пространстве [1].

Кривая линия может быть получена в результате взаимного пересечения поверхностей или при пересечении поверхности плоскостью. Кривые линии могут быть плоские и пространственные.

Свойства кривой линии.

1 Проекция кривой линии – также кривая линия.
2 Если точка принадлежит кривой линии, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой кривой.
3 Касательная к кривой линии проецируется в касательную к проекции этой кривой.

Плоские кривые

Плоские кривые имеют касательную, нормаль и кривизну.

Касательной называется предельное положение секущей, когда две общие с кривой точки стремятся друг к другу и совпадут в одной точке. Касательная – это прямая, имеющая общую точку с кривой.

Нормалью называется прямая, лежащая в плоскости кривой и перпендикулярная касательной в точке ее касания.

Кривизной плоской кривой в данной точке называется величина, обратная радиусу соприкасающейся окружности (r)

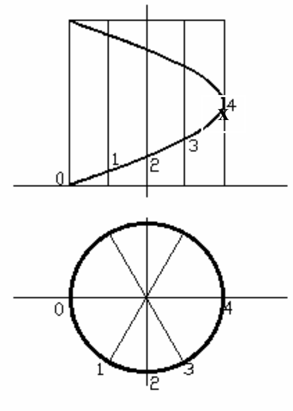
$$K = 1 / r . \tag{3.2}$$

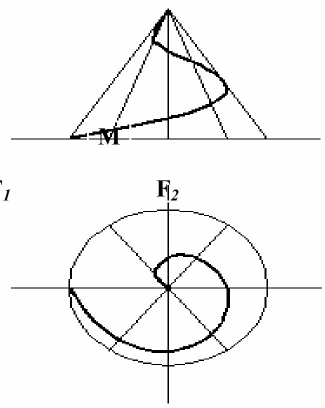
Основные виды плоской кривой: окружность, эллипс, парабола и гипербола.

Эллипс представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (рис. 3.8).

Парабола представляет собой геометрическое место точек равноудаленных от заданной точки (фокуса) и прямой (директрисы) (рис. 3.9).

Гипербола представляет собой геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух заданных точек (фокусов) есть постоянная величина (рис. 3.10).





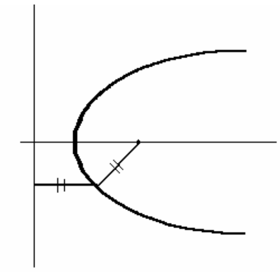


Рис. 3.9 Парабола

. Цилиндрическая
нтовая линия

**Рис. 3.12 Конич
винтовая лин**

Пространственные кривые

Пространственные кривые могут иметь самые разнообразные формы. Типичным видом пространственной кривой является винтовая линия. Винтовые линии бывают цилиндрическими и коническими (рис. 3.11, 3.12).

Фронтальная проекция цилиндрической винтовой линии представляет собой синусоиду

Горизонтальная проекция конической винтовой линии представляет собой спираль Архимеда.

Кривые поверхности

В качестве основного признака разделения кривых поверхностей можно выделить вид образующих и характер их движения в пространстве [1, 2].

По этому признаку все кривые поверхности разделены на два класса: 1 класс – поверхности, образованные кинематическим способом; 2 класс – поверхности, задаваемые каркасом.

Поверхности, образованные кинематическим способом, делятся на линейчатые (развертываемые, винтовые, с направляющей плоскостью, поверхности вращения, поверхности параллельного переноса) и нелинейчатые (поверхности вращения и параллельного переноса).

Поверхности, задаваемые каркасом, делятся на поверхности с линейчатым каркасом (задаваемые сетью, топографические) и поверхности с точечным каркасом (графические).

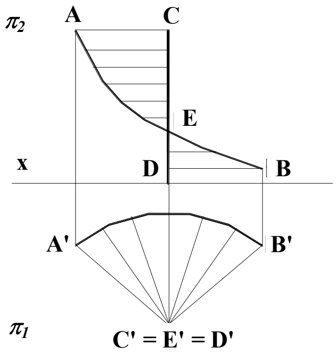


Рис. 3.16 Поверхность коноида

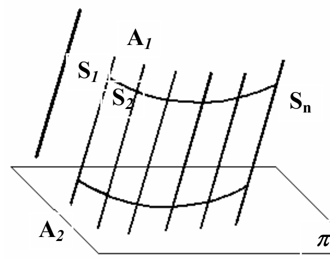


Рис. 3.13 Цилиндрическая повер
A_1A_2 – образующая; S_1S_n – зада
кривая; T_1T_2 – направляюща

Поверхности линейчатые развертываемые

1 *Цилиндрические поверхности* образуются прямой линией, сохраняющей во всех своих положениях параллельность некоторой заданной прямой линии и проходящей последовательно через все точки некоторой кривой линии, называемой направляющей (рис. 3.13).

2 *Коническая поверхность* образуется прямой линией, проходящей через некоторую неподвижную точку и последовательно через все точки кривой направляющей линии (рис. 3.14). Неподвижная точка (S) – называется вершиной конической поверхности.

Поверхности линейчатые неразвертываемые

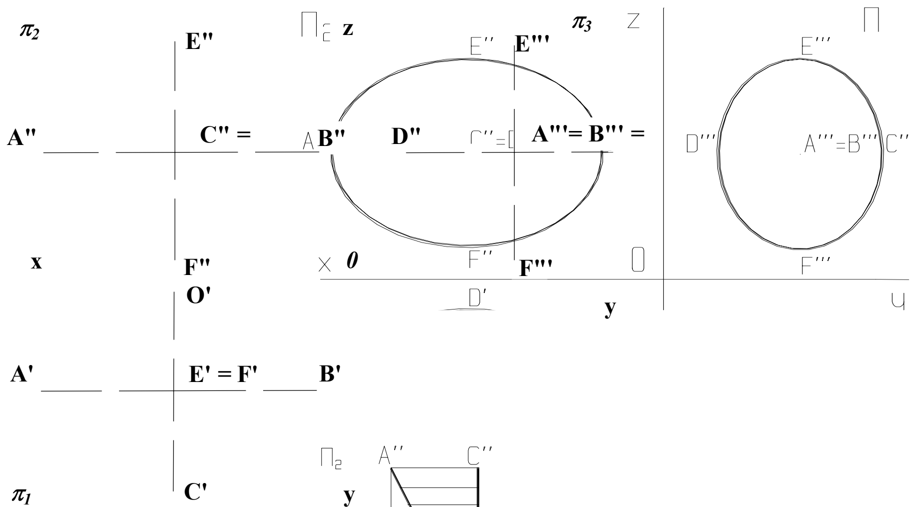
1 *Цилиндроидом* называется поверхность, образованная при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность заданной плоскости и пересекающей две кривые линии (направляющая) (рис. 3.15).

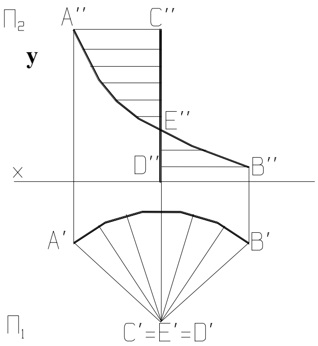
2 *Коноидом* называется поверхность, образованная при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости и пересекающей две направляющие, одна из которых кривая, а другая прямая линия (рис. 3.16).

Поверхности нелинейчатые

1 *Эллипсоид* – получен в результате движения деформируемого эллипса, плоскость которого параллельна одной из основных плоскостей проекций и концы осей которого скользят по эллипсу (рис. 3.17).

2 *Эллиптический параболоид* получен в результате перемещения деформируемого эллипса, плоскость которого параллельна плоскости проекций и концы осей которого скользят по параболам (рис. 3.18).





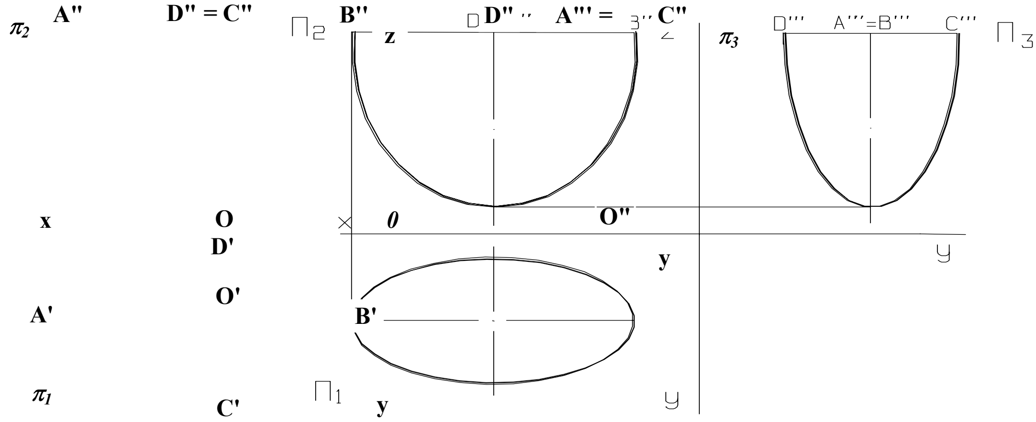


Рис. 3.18 Поверхность эллиптического параболоида

Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением линии (образующей), вокруг неподвижной прямой – оси вращения. Рассмотрим некоторые поверхности вращения.

1 *Сфера*. Поверхность сферы образуется вращением окружности вокруг диаметра (рис. 3.19).

2 *Тор*. Поверхность тора образуется вращением окружности вокруг оси, не проходящей через ее центр, но расположенной в плоскости окружности (рис. 3.20).

К поверхностям вращения относятся эллипсоид вращения, параболоид вращения и гиперболоид вращения (однополостный, двуполостный).

Графические поверхности

Поверхностью, задаваемой каркасом, называют поверхность, которая задается некоторым числом линий, принадлежащих такой поверхности. Примером каркасных поверхностей служат поверхности корпусов судов, самолетов, автомобилей, баллонов, кинескопов.

Каждая поверхность может быть задана графически. Принято считать, что поверхность задается только графически, при помощи некоторого числа линий, которые должны принадлежать такой поверхности, или выявляются на существующей поверхности.

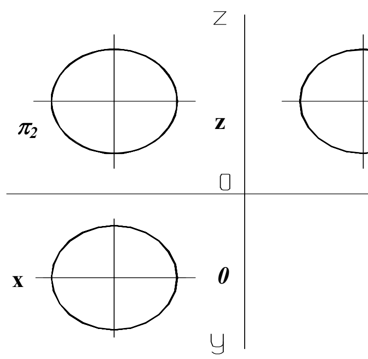
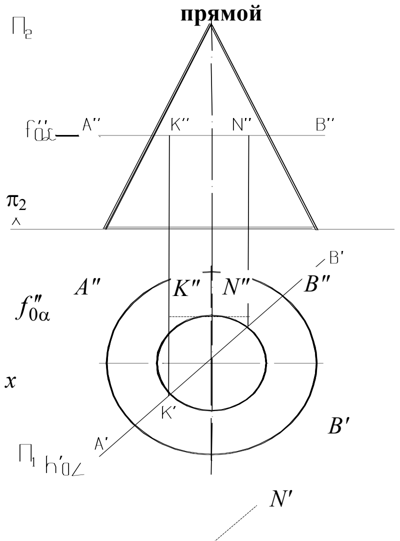


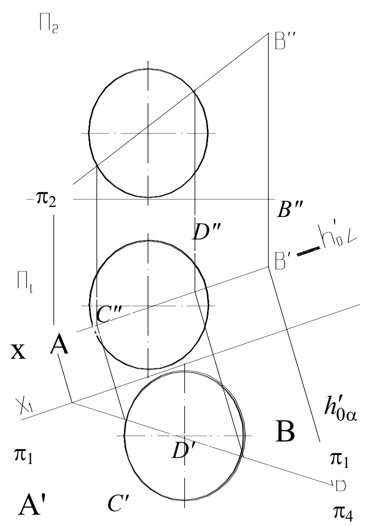
Рис. 3.19 Поверхность сферы

Пересечение прямой линии с кривой поверхностью

Для построения точек пересечения прямой с кривой поверхностью следует через прямую провести вспомогательную плоскость, найти линию пересечения этой плоскости с поверхностью. Точки пересечения заданной прямой и построенной линии будут искомыми точками пересечения прямой с поверхностью. Вспомогательную плоскость, проводимую через прямую, следует выбирать так, чтобы получались простые сечения (сечения, которые можно построить линейкой и циркулем).

Рис. 3.21 Пересечение поверхности к прямой





ис. 3.22 Пересечение прямой ерхностью сферы

Пример 1. Построить точки пересечения прямой с поверхностью конуса (рис. 3.21).

Пример 2. Построить точки пересечения прямой с поверхностью сферы (рис. 3.22).

Алгоритм решения

1 Через прямую *AB* проводим проецирующую плоскость (α).

2 Во избежание построения эллипса, применим способ замены плоскостей проекций.

3 Построив в новой плоскости прямую и сечение сферы, получим точки пересечения сферы с прямой.

Пересечение кривых поверхностей плоскостью

Для нахождения кривой линии, получаемой при пересечении линейчатой поверхности плоскостью, следует в общем случае строить точки пересечения образующих поверхности с секущей плоскостью (т.е. многократно решается задача нахождения точек пересечения прямой с плоскостью).

Если же кривая поверхность не линейчатая, то для построения линии пересечения такой поверхности плоскостью в общем случае следует применять вспомогательные плос-кости. Искомые точки определяются в пересечении линий, по которым вспомогательные секущие плоскости пересекают данную поверхность и плоскость.

Пример. Построить проекции фигуры сечения прямого конуса плоскостью горизонтально-проецирующей (рис. 3.23).

D' E' C'

Порядок графических построений

1 ТАК КАК ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ФИГУРЫ СЕЧЕНИЯ СОВПАДАЕТ СО СЛЕДОМ, А ФРОНТАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ЕСТЬ ГИПЕРБОЛА, ТО ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ВЫСШИХ ТОЧЕК ГИПЕРБОЛЫ ПРОВОДИМ ВСПОМОГАТЕЛЬНУЮ ГОРИЗОНТАЛЬНО-ПРОЕЦИРУЮЩУЮ ПЛОСКОСТЬ $h'_{0\beta}$ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО СЛЕДУ ПЛОСКОСТИ $h'_{0\alpha}$ И ОПРЕДЕЛЯЕМ ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ.

2 Для нахождения других точек гиперболы применим вспомогательные секущие плоскости.

Взаимное пересечение кривых поверхностей

При пересечении двух поверхностей образуется пространственная кривая линия.

Линию пересечения двух поверхностей строят по отдельным точкам.

Общим способом построения точек линии пересечения двух поверхностей является способ вспомогательных поверхностей-посредников. Посредники пересекают заданные поверхности по линиям (желательно простым). Тогда в пересечении этих линий получаются точки, принадлежащие обеим поверхностям, а значит, и линии их пересечения.

В качестве поверхностей-посредников используют или плоскости, или сферы. В зависимости от принятого вида посредника именуют и способ построения линии пересечения: способ вспомогательных секущих плоскостей и способ вспомогательных сфер.

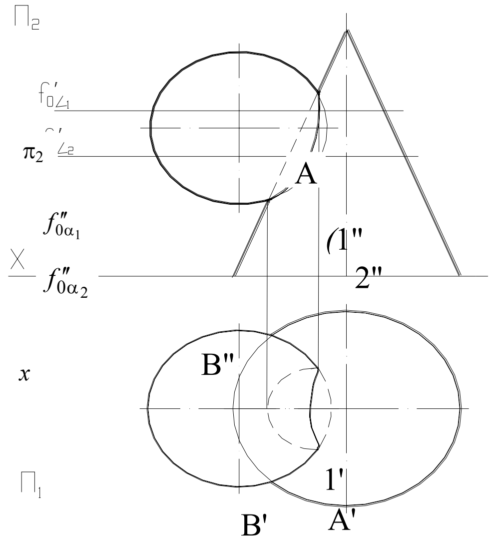


Рис. 3.24 Метод вспомогательных секущих плоскостей

Способ вспомогательных секущих плоскостей

При построении точек линии пересечения поверхностей вначале находят характерные или опорные точки.

Порядок графических построений выполняется в такой последовательности.

1 Проводят вспомогательные плоскости уровня, пересекающие данные поверхности (в данном случае горизонтальные плоскости).

2 Строят линии пересечения вспомогательных плоскостей с поверхностями.

3 Определяют точки пересечения, принадлежащие обеим поверхностям и через них проводят линию пересечения.

Пример. Построить линию пересечения конуса и сферы методом дополнительных секущих плоскостей рис. 3.24).

Способ вспомогательных секущих сфер

Для построения линии пересечения двух поверхностей способ секущих сфер применяют при следующих условиях:

1 Обе пересекающиеся поверхности есть поверхности вращения.

2 Оси поверхностей вра-щения пересекаются, точку пересечения принимают за центр вспомогательных (концентрических) сфер.

2' π_1

3 Плоскость, образованная осями поверхностей, должна быть параллельна плоскости проекций.

Пример. Построить линию пересечения цилиндра и усеченного конуса методом концентрических сфер (рис. 3.25)

Порядок графических построений

1 ОПРЕДЕЛЯЕМ ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ ИСКОМОЙ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И УСТАНАВЛИВАЕМ РАДИУСЫ МИНИМАЛЬНОЙ И МАКСИМАЛЬНОЙ СФЕР, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В СЕЧЕНИИ.

2 Проводим вспомогательные секущие сферы, пересекающие данные поверхности, в диапазоне от $R_{\min}$ до $R_{\max}$.

3 Строим линии пересечения вспомогательных сфер с поверхностями.

4 Определяем точки пересечения, принадлежащие обеим поверхностям и через них проводим линию пересечения.

Развертывание кривых поверхностей

Развертки у кривых поверхностей могут быть точными и приближенными. Точные развертки бывают у прямых круговых конусов и цилиндров. Пример условно развертываемых кривых поверхностей – шар.

Пример 1. Построить развертку поверхности прямого кругового цилиндра.

Для развертывания прямого цилиндра применим способ нормального сечения. Способ нормального сечения заключается в том, что в цилиндр вписывают n-угольную призму. Число n зависит от размера чертежа. Однако оно не должно быть меньше двенадцати. Обычно n принимают равным двенадцати. Затем проводим плоскость, перпендикулярную к образующим, вычерчиваем развернутое в прямую линию нормальное сечение и производим развертку n угольной призмы. Концы ребер соединяют линией.

Пример 2. Построить развертку прямого кругового конуса.

Боковая поверхность конуса развертывается в круговой сектор. Угол сектора определяется по формуле $\varphi = R / L \cdot 360°$, где R – радиус окружности основания конуса; L – длина образующей конуса. Построение развертки боковой поверхности конуса можно выполнить и графически без подсчета величины угла сектора. Разделим основание конуса на n равных частей.

На дуге, проведенной из произвольной точки S_0 радиусом, равным длине образующей конуса, откладывает 12 отрезков, равных длине хорды. Соединяя эти точки с точкой S_0, получаем развертку боковой поверхности конуса. Причерчивая внизу основания конуса, получаем полную развертку конуса.

Пример 3. Построить приближенную развертку поверхности шара.

Существует несколько методов построения приближенной развертки. Рассмотрим два из них.

1-й с п о с о б. Развертка по цилиндрам.

Сущность этого метода заключается в замене шаровой поверхности описанными вокруг нее частями цилиндрических поверхностей и в построении разверток этих частей.

Делим шаровую поверхность на некоторое число одинаковых сферических секций при помощи плоскостей, проходящих через ось шара.

2-й с п о с о б. Развертка по конусам и цилиндру.

Через точки деления проведем горизонтальные плоскости, которые рассекут поверхность на 5 шаровых пояса и 2 шаровых сегмента. Далее заменяем поверхность шара одной цилиндрической и шестью коническими поверхностями и произведем их развертку. Развертку конических поверхностей производим по правилам развертывания усеченных прямых круговых конусов.

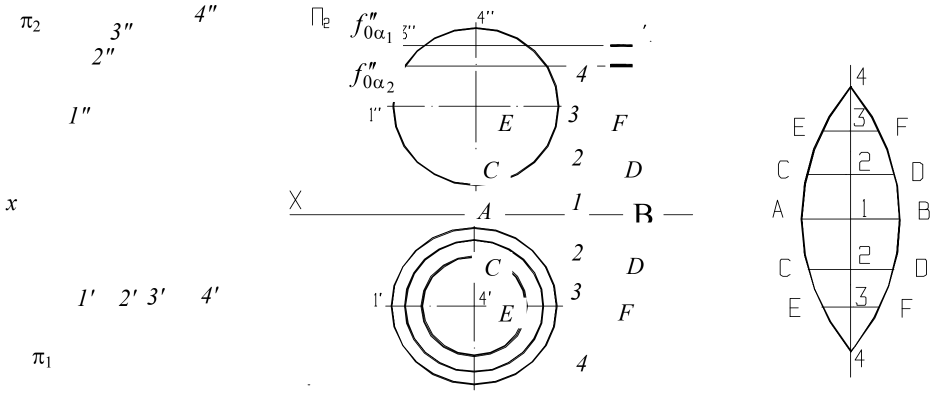


Рис. 3.26 Развертка поверхности сферы

П е р в ы й с п о с о б.

Развертку каждой секции производим следующим образом (рис. 3.26). Проводим вертикальную прямую и откладываем на ней отрезки вверх и вниз $1'2' = 1''2''$, $2'3' = 2''3''$, $3'4' = 3''4''$, $4'5' = 4''5''$. Через полученные точки 1, 2, 3, 4, 5 проводят горизонтальные отрезки равные $AB = ab$, $CD = cd$ и т.д. Соединив концы отрезков плавной кривой, получим развертку секции. Развертки остальных одиннадцати секций будут такими же.

3.3 Аксонометрические проекции поверхностей

Существует ряд способов построения наглядных изображений поверхностей: перспектива, аксонометрические проекции, сущность которых состоит в следующем. Геометрический объект вместе с прямоугольной системой координат, к которым он отнесен в пространстве, параллельным способом проецируют на выбранную плоскость проекции [1, 2]. Аксонометрическая проекция проецируется только на одну плоскость проекции. Направление проецирующей выбрано так, чтобы она не совпадала ни с одной из координатных осей (рис. 3.27).

Аксонометрическая проекция меньше действительной величины геометрического объекта, поэтому введено понятие о коэффициентах искажения.

Коэффициенты искажения по осям аксонометрии определяют отношением аксонометрических координат отрезков к их натуральной величине при одинаковых единицах измерения.

По оси X $(O'A_x) / (OA_x) = U$, по оси Y $(A'_xA'_1) / (A_xA_1) = V$, по оси Z' Z $(A'_1A_1) / (A_1A) = W$.

Виды аксонометрических проекций

Аксонометрические проекции в зависимости от направления проецирования разделяют на:

- косоугольные, когда направление проецирования не перпендикулярно плоскости аксонометрических проекций;
- прямоугольные, когда направление проецирования перпендикулярно плоскости аксонометрических проекций.

В зависимости от сравнительной величины коэффициентов искажения по осям различают три вида аксонометрии.

Изометрия – все три коэффициента искажения равны между собой

$$U = V = W.$$

Диметрия – два коэффициента искажения равны между собой и не равны третьему

$$U \neq V = W \quad \text{или} \quad U = V \neq W.$$

Триметрия – все три коэффициента искажения не равны между собой

$$U \neq V \neq W.$$

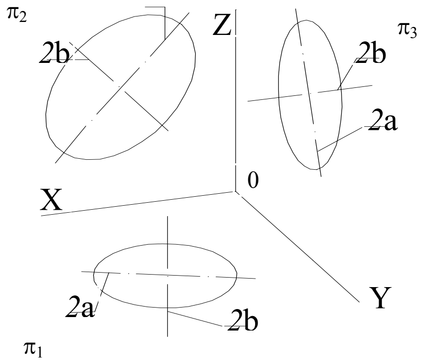


Рис. 3.31 Расположение окружностей в прямоугольной диметрии

Основное предположение аксонометрии сформулировано немецким геометром К. Польке. Три отрезка произвольной длины, лежащие в одной плоскости и выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных координатных осях от начала.

Прямоугольная изометрия

Прямоугольная изометрия характеризуется тем, что коэффициенты искажения составляют 0,82 . Их получают из соотношения

$$U = V = W = \sqrt{2/3} \approx 0{,}82. \tag{3.3}$$

Таким образом, изображение будет больше самого предмета в 1,22 раза, т.е. масштаб изображения в прямоугольной изометрии будет M = 1,22 : 1.

Аксонометрические оси в прямоугольной изометрии располагаются под углом 120° друг к другу (рис. 3.28).

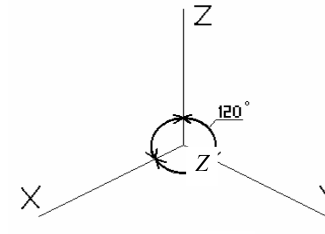


Рис. 3.28 Расположе… 120° …ордин… осей в прямоугольной изометр…

В прямоугольной изометрии равные окружности, расположенные в координатных плоскостях, проецируются в равные эллипсы $M = 1{,}22 : 1$ (рис. 3.29).

Размеры осей эллипсов при использовании коэффициентов изометрического искажения равны: $2a = 1{,}22d$ – большая ось; малая ось $2b = 0{,}71d$, где d – диаметр изображаемой окружности.

Прямоугольная диметрия

Прямоугольная диметрия характеризуется тем, что коэффициенты искажения определяются из следующего соотношения:

$$u^2 = \frac{8}{9};\ \ u = \omega = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0{,}94;\ \ \nu = 0{,}47\ . \tag{3.4}$$

В соответствии с ГОСТ 2.317-69 практические построения в прямоугольной диметрии следует выполнять, пользуясь следующими коэффициентами искажения: $u = \omega = 1$ и $\nu = 0{,}5$.

Расположение осей в прямоугольной диметрии происходит следующим образом (рис. 3.30).

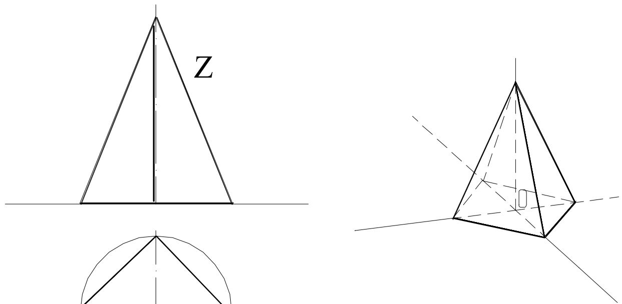
Аксонометрический масштаб для прямоугольной диметрии M = 1,06:1.

В прямоугольной диметрии равные окружности диаметра d, лежащие в координатных плоскостях XOY и YOZ, проецируются в равные эллипсы, большая ось которых $2a = 1{,}06$, а малая $2b = 0{,}35d$. Окружность, расположенная в плоскости XOZ, проецируется в эллипсе с осями: большая ось $2a = 1{,}06d$, а малая ось $2b = 0{,}95d$ (рис. 3.31).

Построение аксонометрических изображений по ортогональным проекциям

При построении аксонометрических проекций все размеры геометрического объекта снимают с ортогональных проекций (фронтальной и горизонтальной проекций). Умножая их на величины коэффициентов искажения, откладывают на координатных осях аксонометрических проекций.

Пример. Построить прямоугольную диметрию пирамиды (рис. 3.32).



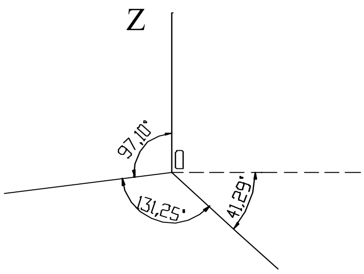


Рис. 3.32 Прямоугольная диметрия пирамиды

Вопросы для самопроверки

1 Что представляет собой сечение многогранника?
2 Как построить линию сечения многогранника плоскостью?
3 В чем состоит алгоритм построения сечения линейчатой поверхности плоскостью?
4 В чем различие между плоской и пространственной кривыми линиями?
5 Привести примеры особых точек плоских кривых линий.
6 Что называется касательной (нормалью) к кривой линии?
7 Чем можно задать поверхность вращения?
8 Привести примеры развертывающихся поверхностей.
9 Какой основной принцип выбора посредника?
10 По каким линиям пересекаются поверхности вращения, имеющие общую ось?
11 В каких случаях возможно и целесообразно применение способа концентрических сфер?
12 В чем заключается способ аксонометрического проецирования?
13 Что называется коэффициентом искажения?
14 Что такое аксонометрические проекции: изометрическая, диметрическая, триметрическая?
15 В чем различие между косоугольной и прямоугольной аксонометрическими проекциями?

Г л а в а 4 ТЕНИ. ПЕРСПЕКТИВА. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

4.1 Тени

Пространство воспринимается зрителем благодаря свету, отраженному от освещенных предметов. На освещенных предметах возникает светотень, позволяющая представить их объемную форму. Для придания чертежу впечатления рельефности строят тени [2].

Источником света при построении теней могут быть солнце, лампа, фонарь и др. Из-за большой удаленности Солнца от Земли принято считать, что солнечные лучи взаимно параллельны, а само Солнце представляет собой светящуюся бесконечно удаленную точку.

Понятия о тенях собственных и падающих

Задачей начертательной геометрии является построение контуров (границ) теней при освещении геометрических объектов какими-либо лучами. L_1 – горизонтальная проекция луча; L_2 – фронтальная проекция луча.

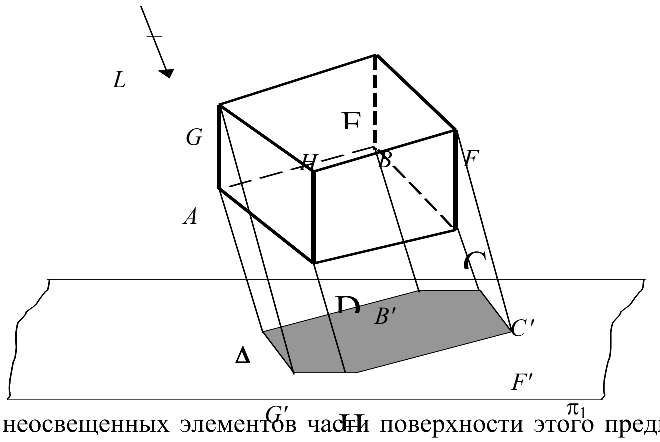


Рис. 4.1 Собственная и падающая тени

Предположим, что непрозрачная поверхность параллелепипеда освещена световыми лучами, параллельными направлению L (рис. 4.1).

Световые лучи, падающие на грани *ABEG*, *CBEF* и *GEFH*, освещают эти грани и, отражаясь от них, изменяют свое направление.

На грани *ABCD*, *AGHD* и *HDCF* световые лучи не падают. Эти грани находятся в собственной тени.

Собственной тенью предмета называется совокупность неосвещенных элементов части поверхности этого предмета, обращенной в противоположную от источника света сторону. Граница между освещенной частью поверхности предмета и частью, находящейся в тени, называется контуром собственной тени.

Падающей тенью называется тень, которая падает на другую поверхность (плоскость) или на часть самой поверхности. Контуром падающей тени является тень от контура собственной тени (*A'B'C'F'H'G'*). На чертежах падающие тени изображаются темнее собственных теней.

Выбор направления светового луча

Направление светового луча L для построения теней в ортогональных проекциях берется параллельным диагонали куба, грани которого параллельны плоскостям проекций.

Проекции такого луча (L_1, L_2) будут составлять с осью X углы, рав- ные 45°. L_1 – горизонтальная проекция, L_2 – фронтальная проекция луча (рис. 4.2).

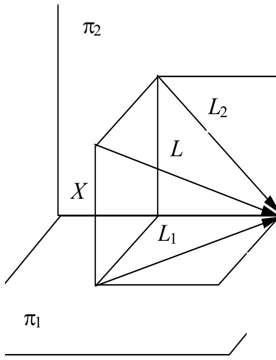


Рис. 4.2 Направление световых лучей в ортогональных проекциях

В аксонометрических проекциях направление лучей света берется более или менее произвольно, но при этом нужно соблюдать условия правдоподобности освещения, а также помнить, что тень является средством выявления формы и придания чертежу наибольшей выразительности.

Тени от точек, линий и плоских фигур

Тень от точек падает на ту плоскость проек-ций, расстояние до которой меньше (рис. 4.3).

Для построения те-ни ряда ее точек и пря-мой линии построения тени прямой

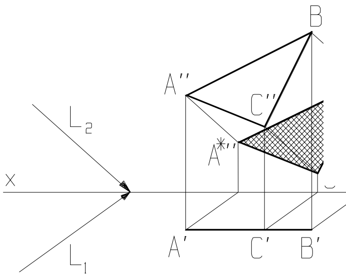
Точка $B_н$ называется

тени линии достаточно построить падающие соединить их соответствующей линией. Для достаточно двух точек (рис. 4.4). Рассмотрим на примере прямой общего положения.

мнимой тенью точки B.

Если плоская фигура параллельна какой-либо плоскос-ти, то тень от нее на эту плоскость расположена подобно самой плоской фигуре и по величине равна ей (рис. 4.5).

Когда плоская фигура не па-раллельна ни одной из основных плоскостей проекций, то контур тени от фигуры располагается на двух плоскостях проекций и он имеет точки



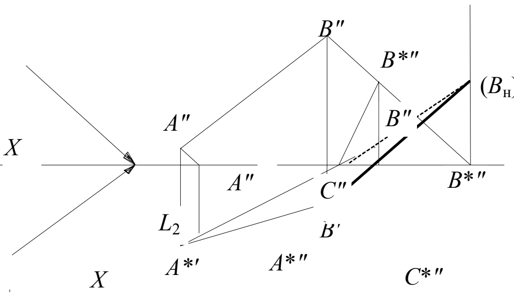


Рис. 4.4 Тень от прямой общего положения

п L_1 лома A' B_x на C' и B' роекций (рис. 4.6).

Рис. 4.5 Тень от плоскости уровня

A''

A_x B'' B_x

L_1 X

A'

B'

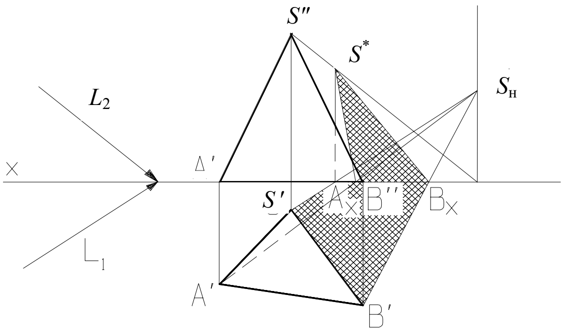


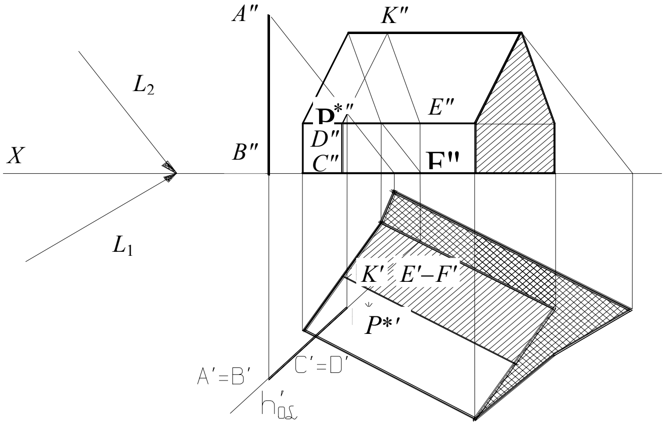
Рис. 4.6 Тень от плоскости общего положения

Способы построения теней

В зависимости от вида и положения объекта применяются разные способы построения контура теней – способ лучевых сечений, способ касательных конусов и цилиндров, способ выноса, способ обратных лучей, способ вспомогательных экранов и способ вспомогательной проекции луча.

Способ лучевых сечений

Способ лучевых сечений является общим и универсальным, и может быть использован для построения конусов как собственных, так и падающих теней любой формы. В методе лучевых сечений используются вспомогательные секущие плоскости, проходящие через световые лучи. Преимущественно используются горизонтально-проецирующие лучевые плос-кости и реже вертикально-проецирующие.



$A' = B'$ $C' = D'$

$h'_{0\alpha}$

Рис. 4.7 Тень от шеста на здание

Построим тень, падающую от вертикального шеста AB на здание (рис. 4.7).

Порядок графических построений.

1 Через прямую AB проводим секущую лучевую плоскость α ($h'_{0\alpha} \parallel L_1$).

2 Строим линию ($CDKEF$) пересечения плоскости α с поверхностью здания.

3 Определяем точку пересечения P проекции луча с линией пересечения.

Точка P является тенью вершины A шеста, упавшей на крышу.

Однако способ лучевых сечений имеет один серьезный недостаток, в некоторых случаях требует значительной работы, связанной с вычерчиванием кривых.

Способ обратных лучей

Способ обратных лучей применяется преимущественно для построения падающих теней от одного тела на другое.

Способ обратных лучей состоит в следующем. В задании дана плоскость (уровня) и прямая общего положения. Сначала строятся падающие тени от обоих элементов на одну из плоскостей проекций. Затем определяются точки пересечения контуров падающих теней. Потом проводится обратный луч до встречи с одним из элементов, отбросившим тень.

Полученные точки *1* и *2* будут падающей тенью от одного элемента на другом (рис. 4.8).

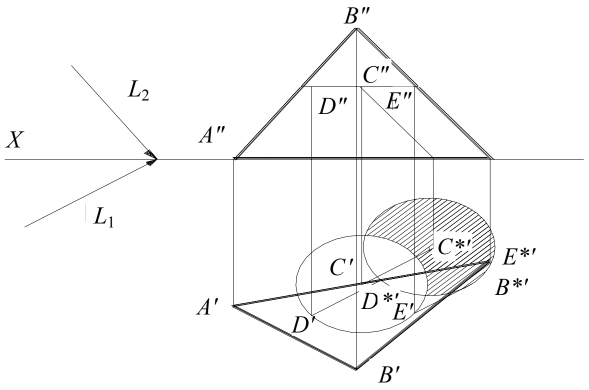


Рис. 4.8 Тень от одного элемента на другом

Алгоритм решения задачи:

1 Строят тени от обоих элементов на горизонтальную плоскость проекций.

2 Определяют точки пересечения контуров падающих теней.

3 Проводят обратный луч до встречи с одним из элементов.

4.2 Перспектива

Геометрические основы перспективы

Изображение предмета, полученное на поверхности методом центрального проецирования, называется перспективой. В зависимости от вида поверхностей, на которых выполнены, перспективные изобра-жения делятся на линей-ные (изображения на плоскости), панорамные (изображения на внут-ренней поверхности ци-линдра), купольные (изоб-ражения на внутренней поверхности сферы) [2]. Рассмотрим линейную перспективу (рис. 4.9).

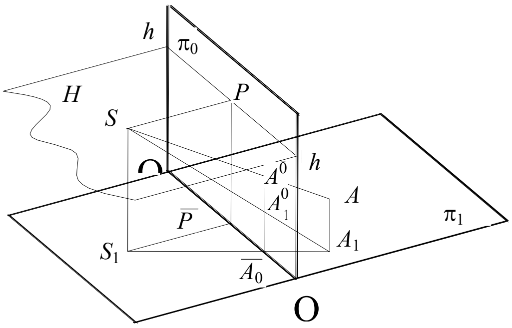


Рис. 4.9 Геометрические основы линейчатой перспективы

Вертикально расположенная плоскость перспективных проекций π_0 называется картинной плоскостью, на ней строят перспективные проекции.

Горизонтальная плоскость π_1 называется предметной плоскостью, на ней располагают изображаемые предметы.

Плоскость H – плоскость горизонта.

Линия пересечения плоскости горизонта (H) и плоскости (π_0) – hh называется линией горизонта.

Точка S – точка зрения или центр проецирования.

Точка S_1 – точка стояния, или основание точки зрения.

Линия пересечения плоскости (π_0) и предметной плоскости (π_1) – OO называется основанием картины.

Расстояние SS_1 называется высотой горизонта.

Линия SA – проецирующий луч.

Линия SP – центральный, или главный луч.

Точка P – центральная, или главная точка картины.

Точка P – основание главной точки.

$D = SP$ – главное расстояние.

Перспектива точки

На рисунке показана точка A в пространстве, а A_1 – ее основание (прямоугольная проекция точки A на плоскость π_1). Соединяем точку A с точкой зрения S.

Пересечение луча SA с картинной плоскостью π_0 дает нам точку A^0 – перспективу точки A.

Точка A_1^0 – пересечение луча SA_1 с картинной плоскостью – перспектива основания точки A. Перспектива точки и перспектива основания точки лежат на одной прямой (линия $A^0A_1^0$), перпендикулярной к основанию картины (рис. 4.10).

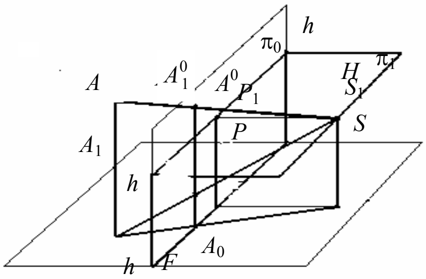


Рис. 4.10 Перспектива точки

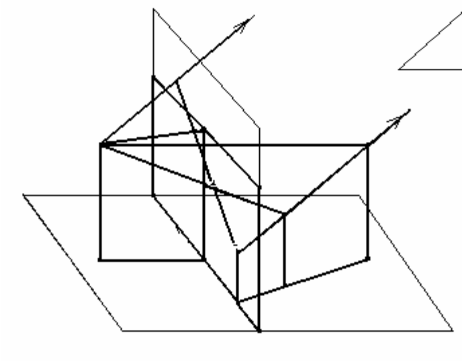


Рис. 4.11 Перспектива прямой общего положения

Перспектива прямой общего положения

Перспектива прямой линии, заданной произвольно в пространстве, получается на проецирующем аппарате как совокупность точек пересечения с картиной плоскости и лучей зрения, проведенных к каждой точке данной прямой. Эти лучи зрения образуют плоскость, называемую лучевой плоскостью. Поэтому перспектива прямой есть результат пересечения плоскости картины с лучевой плоскостью и представляет собой прямую линию. Из этого следует, что для построения перспективы прямой достаточно построить перспективы двух ее точек (рис. 4.11).

Перспектива плоской фигуры, лежащей в предметной плоскости

Дана горизонтальная проекция $A_1B_1D_1E_1$ прямоугольника $ABDE$: основание картины OO, основание точки зрения S и высота горизонта h (рис. 4.12, 4.13).

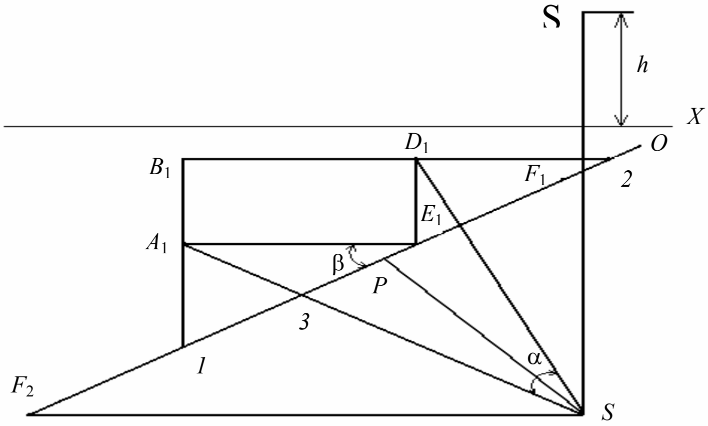


Рис. 4.12 Геометрические основы плоской фигуры

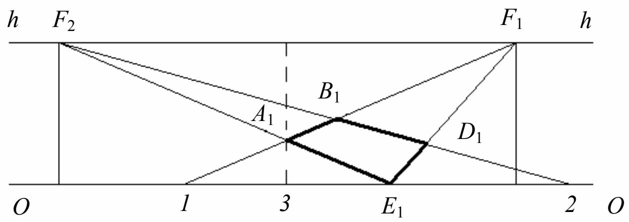


Рис. 4.13 Перспектива плоской фигуры

Порядок построений:

1 Определяем основание главной точки пирамиды *P*. Для чего на линию *OO* (основание пирамиды) опускается перпендикуляр из точки *S*.

2 Определяем точки схода (F_1 и F_2) прямых (сторон прямоугольника).

3 Определяем начало прямых (сторон прямоугольника) *AB* и *BD*, для чего продолжаются эти стороны до пересечения с основанием картины.

4 Проводится основание картины и переносятся на нее начала прямых *1*, E_1 и *2* и, соединяя их с точками схода F_1 и F_2, получаем перспективу плоской фигуры.

Расположение точки зрения и картинной плоскости

Большое значение имеет выбор расстояния точки зрения от рассматриваемого предмета и от картины. Расстояние точки зрения *S* от рассматриваемого предмета определяет угол между крайними лучами, охватывающими предмет. Следует точку зрения расположить так, чтобы углы зрения на объект не выходили за предел 23 – 60°. Установлено, что наиболее удачное изображение получается при углах зрения от 28 до 35°.

При выборе положения картинной плоскости необходимо руководствоваться следующим правилом: основание картинной плоскости необходимо выбирать так, чтобы она составляла с главным фасадом угол от 25 до 35°, и главная точка картины *P* должна находиться в пределах средней трети угла β.

Картинную плоскость лучше всего совмещать с одним из ребер изображаемого предмета, которое на перспективной проекции будет изображаться в истинную величину. Высота горизонта чаще всего принимается равной высоте человеческого роста – около двух метров.

Методы построения перспективы геометрических тел

Существует несколько способов построения перспективных изображений. В каждом из них используются различные элементы центрального проецирования. Выбор того или иного способа построений зависит от вида объекта и его объемно-пространственной структуры.

Существуют следующие способы построения перспективных изображений:

1 Радиальный способ.

2 Способ совмещенных высот.

3 Способ прямоугольных координат.

4 Способ перспективной сетки.

5 Способ архитектора.

Сущность *радиального способа* построения перспективы заключается в определении точек пересечения проецирующих лучей с картинной плоскостью с помощью построения картинных следов прямых перпендикулярных картине. Применяется при построении фронтальных перспектив улиц, внутренних дворов, фасадов зданий и т.д.

Способ *совмещенных высот* является разновидностью радиального способа построения перспективы с совмещением высот точек на плане. Применяется при построении несложных объектов, построении фронтальной и угловой перспективы, а также перспективы объектов неправильной формы.

Сущность *способа прямоугольных координат* заключается в построении перспективы объекта, отнесенной к прямоугольной системе с помощью изображения в перспективе координатной системы (перспективных масштабов). Используется главным образом при изображении несложных объектов неправильной формы.

Способ *перспективной сетки* основан также на применении координатной системы. Способ сетки применяют при построении "планировочных" перспектив с высоким горизонтом при проектировании градостроительных и промышленных объектов.

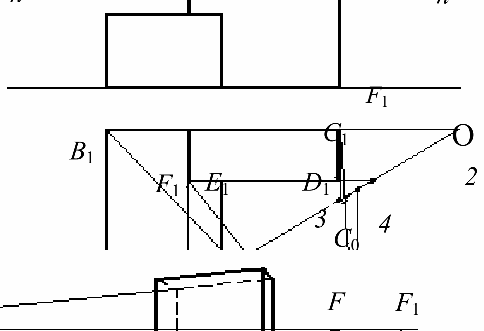
Способ архитекторов получил наибольшее применение в архитектурной практике.

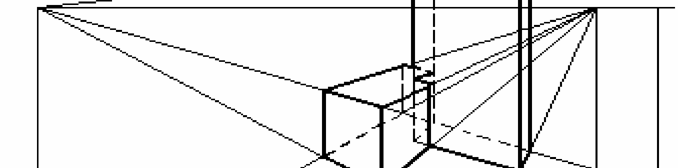
Способ архитекторов основан на использовании точек схода перспектив параллельным горизонтальным линиям объекта и благодаря этому отличается большой графической точностью и простотой построений. Способ архитекторов может осуществляться различными приемами: с двумя или с одной точкой схода, без точек схода, с применением опущенного плана, боковой стены, с точками измерения и др.

Пример использования способа архитекторов с двумя точками схода: Дан фасад и план объекта. Построить перспективу объекта (рис. 4.14, 4.15).

Порядок графических построений:

1 Проводим основания картинной плоскости, выбираем точку зрения и определяем основание и главную точку картины *P*.





ия

Рис. 4.15 Перспектива многогранной поверхности

2 Определяем точки схода (F_1 и F_2) прямых (сторон прямо- угольника).
3 Строим перспективу плана на предметной плоскости.

Построения теней в перспективе

Построение теней в перспективе, как и в ортогональных проекциях, имеет много общего. Направление световых лучей в перспективе принято принимать, исходя из условия правдоподобности. Для удобства построения

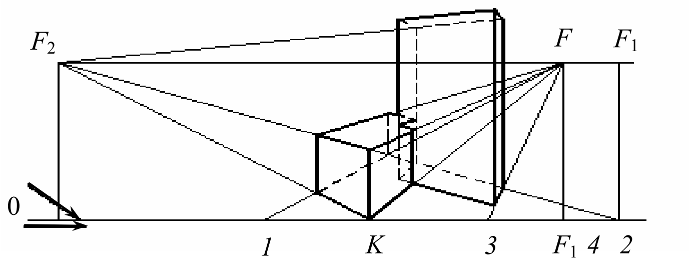


Рис. 4.16 Построение тени от многогранной поверхности в перспективе

рекомендуется угол наклона лучей к предметной плоскости принимать равным 45°. Вторичные проекции таких лучей параллельны основанию картины, а перспективы лучей параллельны между собой (рис. 4.16).

4.3 Проекции с числовыми отметками

При этом изображаемый объект прямоугольно проецируется только на одну горизонтальную плоскость проекций. Полученное изображение называют планом. План отражает только два измерения объекта: его длину и ширину. Третье измерение – высоту отображают числами (числовыми отметками), определяющими удаление характерных точек от плоскости проекций. Плоскость проекций называют плоскостью нулевого уровня и обозначают π_1 [2].

Для полного определения пространственного расположения изображенного на плане объекта необходимо наличие масштаба и указания линейной единицы. Обычно абсолютные отметки обозначают в метрах с двумя десятичными знаками после запятой.

К основным достоинствам проекций с числовыми отметками относятся: простота построений, удобоизмеряемость и относительная простота решения метрических задач.

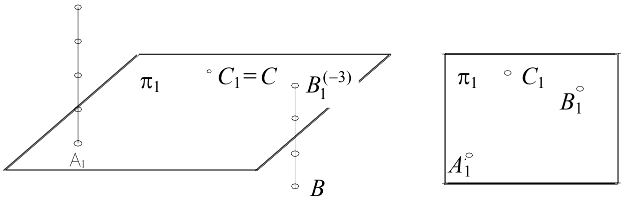
Недостатком является малая наглядность изображений, что заставляет дополнять их вертикальными сечениями (разрезами).

Сущность метода

Сущность метода проекций с числовыми отметками заключается в том, что данный участок, спланированный на земной поверхности, ортогонально проецируют на одну горизонтальную плоскость проекций (план), а фронтальную плоскость проекций, которая определяет высоты точек объекта, заменяют числами (отметками) этих точек, указывающими расстояния (превышение точек) по отношению к некоторой горизонтальной плоскости, принятой за нулевую.

Проекции точек

Допустим, что точка A удалена от плоскости π_1 на четыре единицы взятого вертикального масштаба, а точка B – на три единицы, удаление точки C равно нулю.



$A_1^{(+4)}$

Рис. 4.17   Проекции точки в числовых отметках

Если точка расположена над плоскостью (A) проекций, то их отметки считаются положительными, если под плоскостью проекций (B) – отрицательными. Отметки точек, лежащих на плоскости проекции, называются нулевыми (рис. 4.17).

Проекции прямой

На эпюре изображен отрезок прямой AB. Длину горизонтальной проекции отрезка прямой называют *заложением* прямой и обозначают буквой L. Отношение разности превышений концов отрезка ($H_B – H_A$) к заложению прямой L называют уклоном прямой и обозначают i. Эта величина равна тангенсу угла наклона прямой (рис. 4.18).

$$i = \operatorname{tg}\alpha = \frac{H_B - H_A}{L}. \qquad (4.1)$$

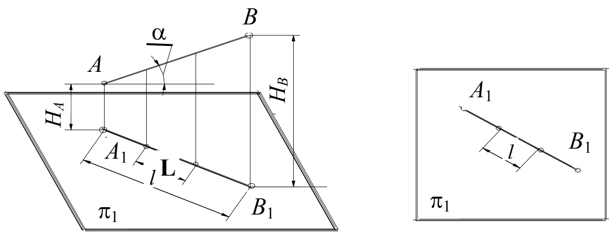


Рис. 4.18   Заложения прямой

Величину горизонтального заложения, которая соответствует единице превышения, называют *интервалом* прямой и обозначают l. Определение на прямой точек с целочисленными отметками называют градуированием прямой. Уклон и интервал – величины взаимно обратные: чем больше уклон, тем меньше интервал и наоборот.

Взаимное расположение прямых

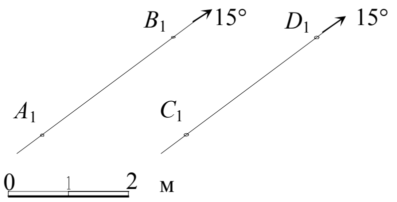
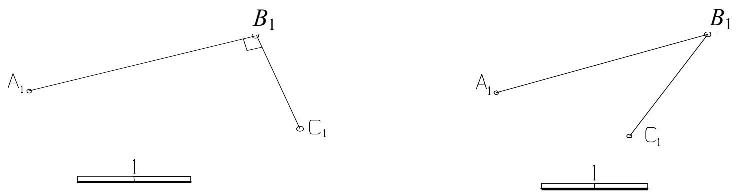


Рис. 4.19   Параллельные прямые

Если две прямые в пространстве *параллельны*, то у них азимуты одинаковы, углы наклона их заложения параллельны, а падение направлено в одну сторону (рис. 4.19).

У *пересекающихся* прямых заложения на плане пересекаются в точке, имеющей общую отметку для обоих прямых (рис. 4.20).

Скрещивающиеся прямые на плане могут иметь три варианта расположения проекций (рис. 4.21, 4.22, 4.23).



C_1

0   2 м

A_1 A_1

C_1

Рис. 4.20   Пересечение

Рис. 4.21   Первый случай скрещивающихся прямых в проекциях с числовыми отметками

B_1

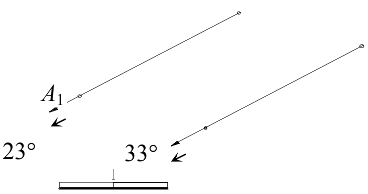


Рис. 4.22 D_1

Второй случай скрещивающихся прямых

в проек- циях с числовыми отметками

1   Пр C_1 ции   прямых   пересекаются, но точки пересечения имеют

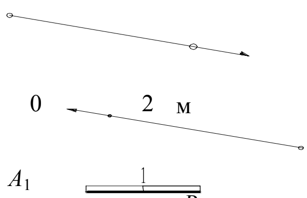


Рис. 4.23   Третий случай скрещивающихся прямых в проекциях с числовыми отметками

40° C_1 D_1

0   2 м

разные числовые отметки (рис. 4.21).

2 Проекции прямых параллельны, но углы наклона их различны (рис. 4.22).

3 Проекции прямых параллельны, углы наклона одинаковы, но падения направлены в разные стороны (рис. 4.23).

Взаимно перпендикулярные прямые на плане располагают под прямым углом, если одна из прямых параллельна плоскости плана.

Проекции плоскости

Плоскость в проекциях с числовыми отметками удобнее всего задавать масштабом уклонов. Масштабом уклонов плоскости называется градуированная линия ската (линия падения) плоскости. Обычно она градуируется точками пересечения с горизонталями плоскости, которые определяют простирание плоскости.

У параллельных плоскостей одинаковые углы падения и простирания. Если хотя бы один из признаков параллельности плоскостей отсутствует, то плоскости пересекаются.

Пересечение плоскостей

Для построения линий пересечения двух плоскостей необходимо определить две точки пересечения двух пар горизонталей с одинаковыми отметками (рис. 4.24).

Если пересекающиеся плоскости имеют одинаковые масштабы уклонов, то проекция линии их пересечения представляет собой биссектрису угла, образованного горизонталями одного уровня (рис. 4.25).

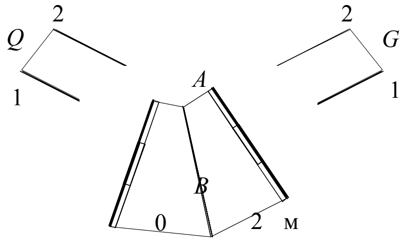


Рис. 4.25 Пересечение плоскостей в проекциях с числовыми отметками

Рис. 4.24 Пересечение плоскостей в проекциях с числовыми отметками

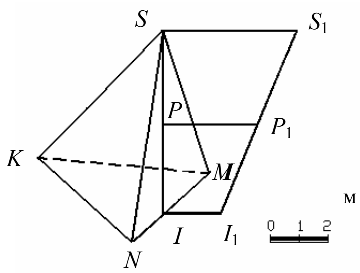


РИС. 4.26

ПОВЕРХНОСТИ

В проекциях с числовыми отметками форма любых поверхностей достаточно полно передается их горизонталями. Для некоторых поверхностей указывают проекции характерных точек или линий.

Многогранники на плане задаются проекциями своих вершин и ребер (рис. 4.26).

Конические поверхности общего вида на плане изображают направляющей горизонталью и вершиной. Например, проекция прямого кругового конуса называют серией концентрических окружностей, проведенных через равные интервалы (рис. 4.27).

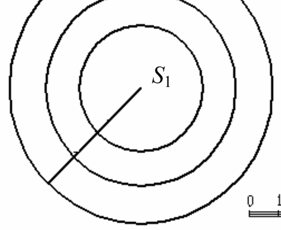


РИС. 4.27

Цилиндрические поверхности общего вида на плане изображаются направляющей горизонталью и одной из образующих поверхности.

Например, поверхность с горизонтальными прямолинейными образующими изображается серией параллельных прямых с неравными интервалами (рис. 4.28).

м

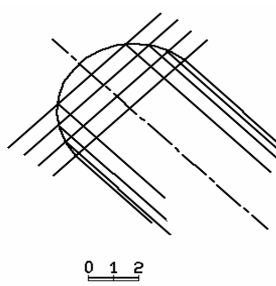


Рис. 4.28 Проекции цилиндрической поверхности в проекциях с числовыми отметками

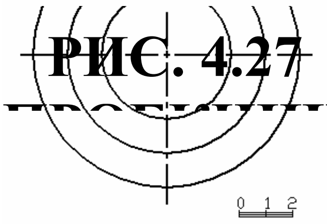


Рис. 4.29 Проекции сферы в проекциях с числовыми

Сфера в проекциях с числовыми отметками выполняется концентрическими горизонталями – окружностями, радиус которых определяется на профиле одного из меридианов поверхности (рис. 4.29).

Косая поверхность (гиперболический параболоид) изображается серией горизонталей, пересекающих две скрещивающиеся направляющие (рис. 4.30).

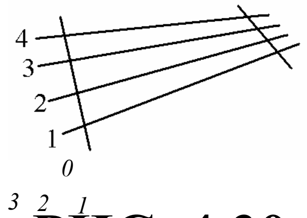


РИС. 4.30 ПРОЕКЦИ

Топографическая (земная) поверхность на плане изображается системой горизонталей и профилей.

Высоту сечения поверхности (расстояние по высоте между соседними горизонталями) выбирают в зависимости от рельефа местности. Высота сечения может быть равна одному, пяти, десяти и т.д. метрам.

В геодезии отметки горизонталей подразделяют на *относительные*, определяющие высоту горизонталей над условной нулевой плоскостью, и *абсолютные*, определяемые относительно уровня воды в определенной точке Финского залива.

Линия ската топографической поверхности представляет собой линию, которая в данной точке поверхности имеет наибольший уклон.

Линия равного уклона топографической поверхности строиться из условия равенства интервалов линии в любом ее месте (рис. 4.31).

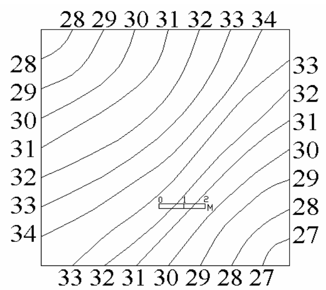


РИС. 4.31

Пересечение поверхностей

Так как любая поверхность в проекциях с числовыми отметками может быть задана

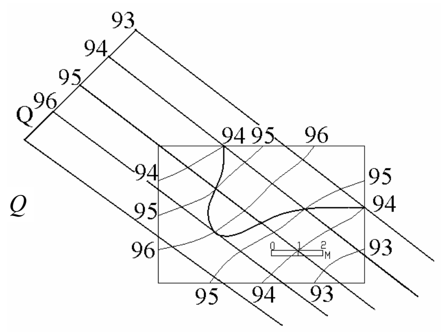


Рис. 4.32 Пересечение

своими горизонталями, то линия пересечения поверхностей определяется как геометрическое место точек пересечения горизонталей с одинаковыми высотными отметками (рис. 4.32).

Вопросы для самопроверки знаний

1 Что такое собственная и падающая тени?
2 Как строится падающая тень точки в ортогональных проекциях?
3 Как выбирается направление лучей света?
4 В чем заключается метод секущих лучевых плоскостей?
5 Когда применяется метод обратного луча?
6 Как строятся тени от прямых частного и общего положения?
7 Что называется перспективой?
8 С какой целью строят перспективу зданий?
9 Какие существуют способы построения перспектив? Какова область их применения?
10 Какие требования должны выполняться при выборе точки зрения?
11 Принцип построения теней в перспективе. Как располагаются световые лучи относительно плоскости картины? Как располагаются при этом вторичные проекции этих лучей?
12 Когда возникает необходимость в построении опущенного плана?
13 С какой целью при построении перспективы объекта выбирают масштаб увеличения по сравнению с масштабом объекта в ортогональных проекциях?
14 Сущность метода проекций с числовыми отметками.
15 Изображение точки, прямой, плоскости в проекциях с числовыми отметками.
16 Изображение топографической поверхности.
17 Пересечение плоскости и поверхности.
18 Пересечение поверхностей.

Глава 5 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ В КУРСАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

5.1 Решение геометрических задач методами инженерной графики

Стереометрия [3] изучает свойства пространственных форм на основе ряда аксиом и мощного аппарата теорем. При этом, в целях наглядности используются пространственные изображения (рисунки), по которым затрудняется восприятие учащимися количественных соотношений элементов изучаемого объекта.

Мы рекомендуем активное внедрение в курс стереометрии элементов па-раллельного ортогонального проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости (метод Монжа, составляющий основу начертательной геометрии [1]). Ведь начертательная геометрия своим предметом имеет изложение и обоснование способов изображения пространственных форм на плоскости (чертеже) и решение метрических задач по полученным изображениям.

Рассмотрим ряд примеров. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость (рис. 5.1). Как относится площадь круга сечения к площади большого круга?

Вместо пространственного изображения условия задачи, как это принято в стереометрии для большей наглядности, но за счет потери возможности измерения элементов тела, рассмотрим чертеж шара с сечением, который проигрывает в наглядности, но дает возможность измерять интересующие нас элементы. Радиусы сечения r и шара R изображаются на чертеже без искажения. Радиус r определяем из прямоугольного треугольника $O''O_1''A''$ на фронтальной плоскости проекций

$$r^2 = \frac{3}{4}R^2 . \tag{5.1}$$

Отношение площадей сечений ($S_{сеч}$) и большого круга ($S_к$) очевидно равно 3/4.

Рассмотрим пример решения стереометрической задачи на доказательство. Доказать, что концы диагонали параллелограмма одинаково удалены от плоскости, проведенной через вторую диагональ (рис. 5.2). Через диагональ BD параллелограмма $ABCD$ проведена произвольная плоскость EBD. Необходимо доказать равенство отрезков CF и AG. Оно следует из очевидного равенства $\Delta B^{IV}C^{IV}F^{IV}$ и $\Delta A^{IV}G^{IV}B^{IV}$ (проекции) данных условия задачи на дополнительную плоскость проекций π_4 ($\pi_4 \perp \pi_1$; $\pi_4 \perp BD$). Плоскость BDE является π_4 – проецирующей и расстояние до нее точек A и C измеряется перпендикулярами AG и CF.

Рассмотрим два примера на построение сечения многогранников, которая вызывает у учащихся определенные затруднения в пространственном исполнении.

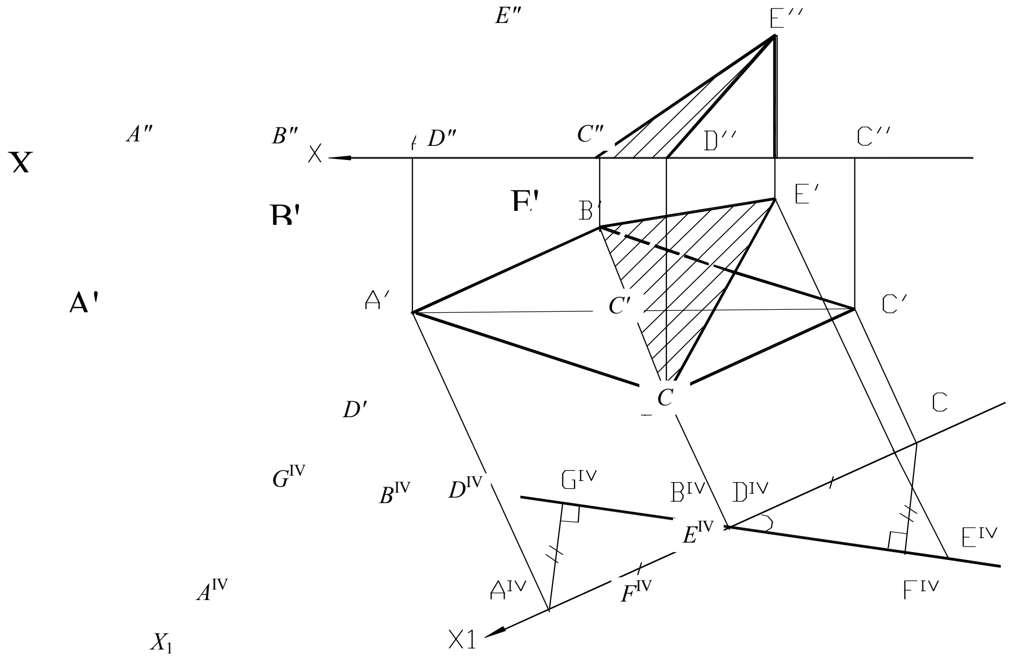


Рис. 5.2 Плоскость диагонали параллелограмма

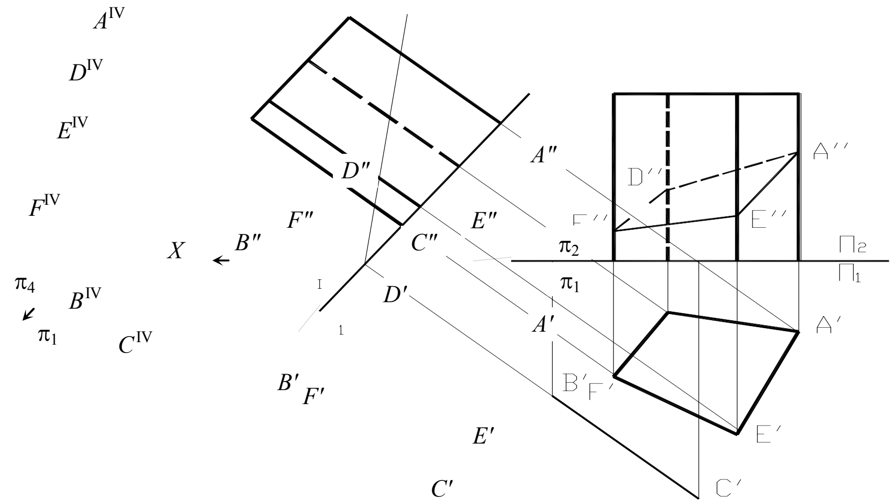


Рис. 5.3 Построение сечения призмы плоскостью

Задача. Построить сечения призмы плоскостью, проходящей через прямую *BC*, лежащую в плоскости нижнего основания призмы, и точку *A*, принадлежащую одному из ребер.

Изобразим условия задачи на чертеже Монжа (рис. 5.3). Введем плоскость $\pi_4 \perp \pi_1$ ($\pi_4 \perp BC$) и на нее спроецируем рассматриваемую призму вместе с секущей плоскостью. На плоскости π_4 сразу же выстраивается искомое сечение *ADEF*. Возвращаем его в исходную систему π_1, π_2, решаем поставленную задачу. По полученным результатам можем при необходимости построить любое аксонометрическое (наглядное) изображение.

Задача. В правильной шестигранной призме боковые грани – квадраты. Провести плоскость через сторону нижнего основания и противоположную ей сторону верхнего основания. Вычислить площадь сечения при стороне основания *a* (рис. 5.4).

Построив следы секущей плоскости ($h_{0\alpha}'$, $f_{0\alpha}''$), строим сечение *ABCDEF* и методом совмещения с горизонтальной плоскостью π_1 [1, 2] строим это сечение без искажения. Вычисление площади сечения *ABCDEF* – простая планиметрическая задача. $S = 3a^2$.

На наш взгляд, рекомендуемые приемы решения в стереометрии могут успешно применяться в специальных средних учебных заведениях (технический лицей, многопрофильный лицей, физико-математических лицей и т.п.). В обычной средней школе эту работу целесообразнее проводить в факультативном варианте.

$f''_{0\alpha}$

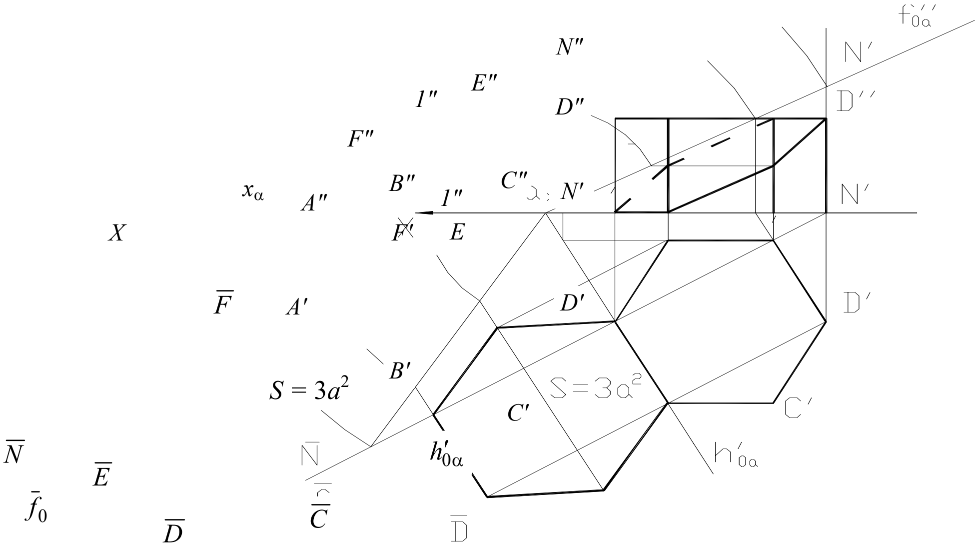


Рис. 5.4 Сечения шестигранной призмы плоскостью

5.2 Элементы инженерной геометрии в курсе автоматизированного проектирования

Большие возможности современных ЭВМ, опыт и успехи программирования создали предпосылки автоматизации таких процессов, как конструирование. Наиболее важной задачей на этом пути является создание соответствующего математического обеспечения, которая усложняется тем, что большинство процессов в конструировании и технической подготовке производства трудно формализуемы.

Выделим в пространстве прямоугольную декартову систему координат X, Y, Z с началом в точке O. Плоскости XOY и XOZ системы координат примем за плоскости проекций. Каждой точке пространства M соотнесем ее проекции на плоскости M' и M'' и три числа $X = OM_X$; $Y = OM_Y$; $Z = OM_Z$. Таким образом, получаем возможность одновременно рассмотреть две модели пространства: графическую в виде чертежа Монжа плоских полей XOY и XOZ и координатную – в виде троек действительных чисел, соответствующих длинам отрезков на осях координат.

Эти две модели можно рассматривать в соподчинении. Переход от точек пространства M, ... к их координатам осуществляется через проецирование на плоскости XOY и XOZ в точки M' и M''. От полученных точек M' и M'' осуществляем переход к их координатам X, Y, Z.

Любому множеству Φ точек M, ... пространства, выделенному с помощью какого-либо закона, соответствуют, с одной стороны, множества Φ' и Φ'' проекций M', ... и M'', ... точек M, ... а, с другой стороны, уравнение $\Phi(X, Y, Z) = 0$ фигуры Φ относительно координат X, Y, Z точек M, ...

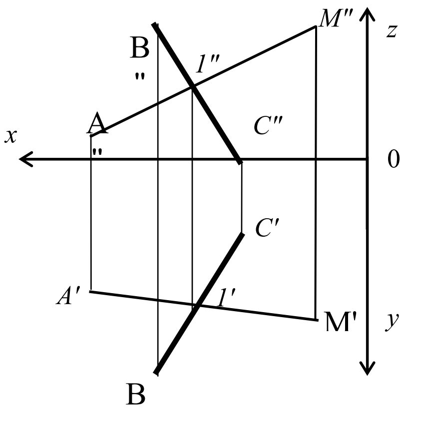


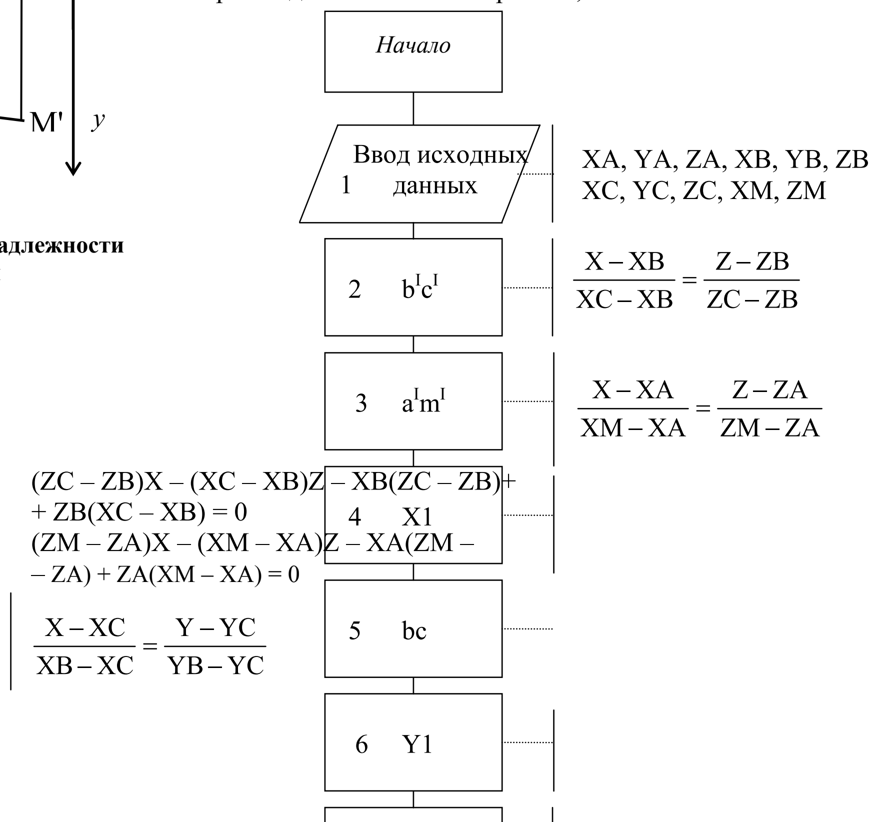
Рис. 5.5 Определение принадлежности точки плоскости

Рассмотрим на конкретном примере практическую реализацию изложенных выше рекомендаций решения задач с применением ЭВМ.

Задана плоскость Q точками A, B, C и фронтальная проекция точки M, принадлежащей плоскости Q. Определить положение горизонтальной проекции точки M (рис. 5.5) [4].

1 Анализ данных:

а) плоскость задана однозначно, относительно нее на чертеже могут производиться любые построения;



$(YB - YC)X - (XB - XC)Y - XC(YB -$
$-YC) + YC(XB - XC) = 0$
$X = X1$

$$\frac{X - XA}{X1 - XA} = \frac{Y - YC}{Y1 - YA}$$

$(Y1 - YA)X - (X1 - XA)Y -$
$-XA(Y1 - YA) + YA(X1 - XA) = 0$
$X = XM$

Вывод
9 YM

Конец

Рис. 5.6 Блок-схема алгоритма решения задачи

б) точка *M* задана одной проекцией; вторая ее проекция должна находиться на линии проекционной связи, положение которой задано однозначно; положение второй проекции на линии связи определяется условием принадлежности точки *M* плоскости *Q*.

2 Анализ условия инцидентности (принадлежности):

а) точка принадлежит плоскости в том случае, когда она принадлежит линии, лежащей на плоскости;

б) линия лежит на плоскости, если она инцидентна двум (по крайней мере) точкам плоскости.

3 Анализ решения:

а) располагаем ли мы достаточной информацией для проведения линий в плоскости на обеих проекциях? Да (следует из анализа условия);

б) располагаем ли мы достаточной информацией для проведения прямой через точку *M* на горизонтальной плоскости? Нет (следует из анализа условия);

в) располагаем ли мы достаточной информацией для проведения прямой через точку *M* на фронтальной плоскости? Да (следует из анализа условия);

г) каковы варианты проведения прямой через точку *M*? Выбираем оптимальный вариант, необходимый с точки зрения экономичности построений.

Решение задачи проводится в соответствии с рекомендациями [5]. Алгоритм решения в графическом и вычислительном вариантах представлен блок-схемой на рис. 5.6. Он представляет собой последовательность выполнения процессов 1, 9, заключающихся в вводе исходных данных (координат точек *A*, *B*, *C*, *M*) и выводе искомого результата (координаты *Y* точки *M*), процессов 2, 3, 5, 7, заключающихся в проведении отрезков прямых линий в определенной последовательности (записи их уравнений), и процессов 4, 6, 8 определения точек пересечения пар отрезков (решение систем двух уравнений с двумя неизвестными).

При необходимости каждый процесс блок-схемы может быть подвергнут дальнейшему разделению на элементарные составляющие (например, составлен алгоритм решения системы двух уравнений).

Решением задачи является в графическом варианте точка *M ′* (горизонтальная проекция точки *M*), в вычислительном варианте – координата *YM*.

5.3 ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В ряде процессов промышленного производства стоит задача технологического нахождения точек ввода элементов контрольно-измеритель-ных приборов (датчиков температуры, давления, концентрации и т.д.) на сложных геометрических поверхностях [6]. Рассмотрим задачу определения точек пересечения поверхности сферы и отрезка прямой *AB*.

Анализ условия: сфера и отрезок прямой заданы однозначно (рис. 5.7). В зависимости от конкретных числовых значений исходных данных отрезок и сфера могут не пересекаться, иметь одну общую точку (касание), две общие точки (пересечение) [1, 2]. Рассмотрим случай пересечения заданных геометрических объектов, наличие которого устанавливается непосредственно из геометрического представления условия задачи.

При решении в качестве посредника применяем фронтально-проецирующую плоскость α, проходящую через отрезок *AB*. Сечением сферы плоскостью α является окружность с центром в точке *O*, проецирующаяся на горизонтальную плоскость проекций в эллипс с полуосями *A* и *B*. Точки $1'$ и $2'$ пересечения эллипса и горизонтальной проекции прямой являются горизонтальными проекциями искомых точек, фронтальные же их проекции есть точки пересечения $1''$ и $2''$ линий связи с фронтальной проекцией $A''B''$.

Таким образом, геометрическим решением задачи являются проекции $1'\,1''$ и $2'\,2''$ искомых точек, числовым аналогом решения являются координаты *X1*, *Y1*, *Z1* и *X2*, *Y2*, *Z2* [7].

Графический и вычислительный алгоритм решения задачи представлен на рис. 5.8 в виде блок-схемы.

Процессы алгоритма решения задачи имеют следующие назначения: 1, 9 – ввод исходной информации и вывод результатов решения, соответственно; 2 – определяют фронтальные проекции точек *E* и *D*; 3, 4 – определяют малую и большую полуоси горизонтальной проекции фигуры сечения (эллипса) *A* и *B*; 5, 6, 7, 8 – определяют положение точки *O* и искомых точек *1* и *2*.

На основе вычислительного алгоритма решения составляем программу вычисления на ЭВМ искомых элементов задачи.

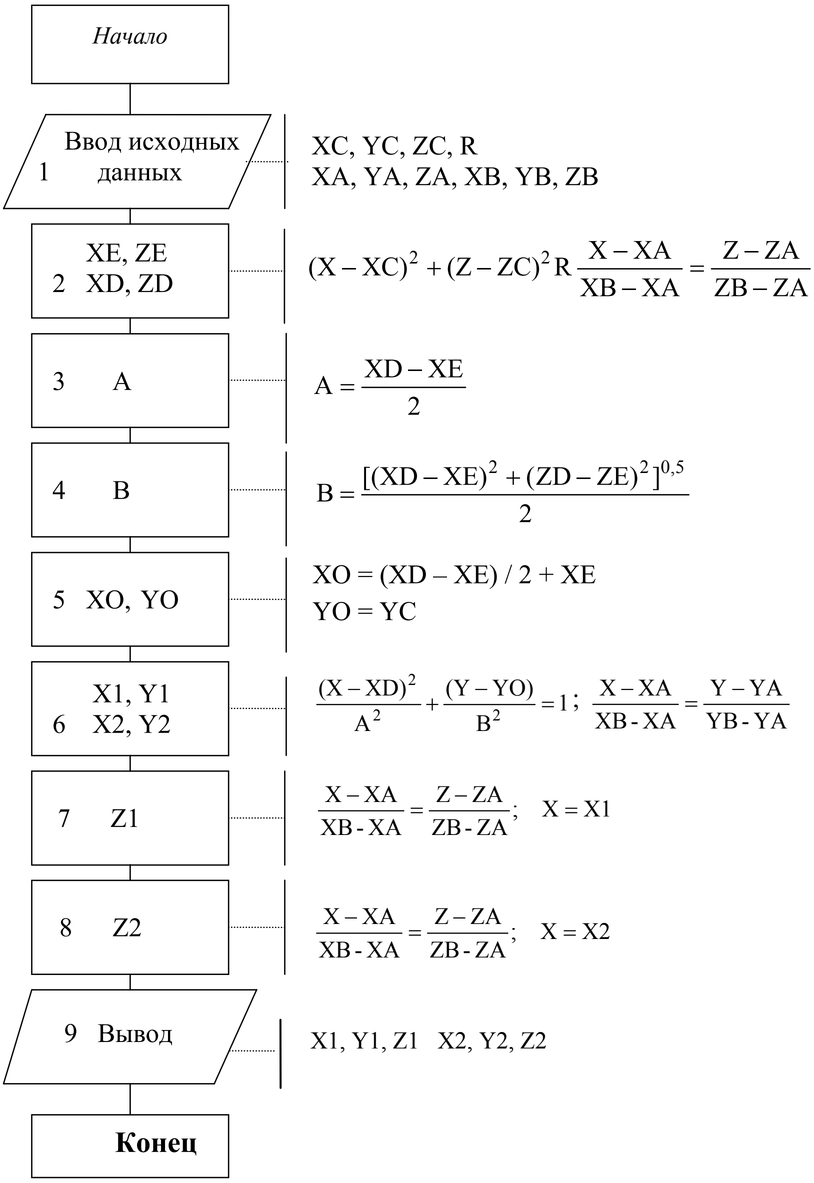


Рис. 5.8 Блок-схема алгоритма решения задачи на определение точек пересечения прямой с поверхностью сферы

5.4 Применение элементов инженерной геометрии в химическом машино- и аппаратостроении

При проектировании объектов химического машино- и аппаратостроения возникает необходимость изготовления отдельных частей и соединение их в единое целое по пространственной кривой.

На производстве подобные задачи, в основном, решаются эмпирически, что предполагает использование значительной доли ручного труда. При таком подходе не достигается необходимая точность, что может привести к дорогостоящему браку.

При всей сложности аппараты химического машиностроения представляют собой комбинацию классических геометрических форм. Взаимное пересечение геометрических поверхностей определяется методами начертательной геометрии и представляет собой конкретную математическую задачу, что дает возможность ее математического моделирования.

Применение методов графоаналитического представления пространства и проецирования [1] значительно упрощает вычислительный алгоритм, так как сводит пространственную задачу к плоской. Последовательность инженерного решения рассматриваемой задачи подробно рассмотрена в работе [8].

Для изготовления макета соединяемых поверхностей необходимо построение развертки с нанесением линии пересечения. В качестве конкретного примера решения рассмотрим соединение вертикально расположенного цилиндрического патрубка с цилиндрическим корпусом мембранного аппарата, представленных на рис. 5.9. Определяющими решаемую задачу параметрами являются D и D_1 – диаметры цилиндров и целое число N искомых точек.

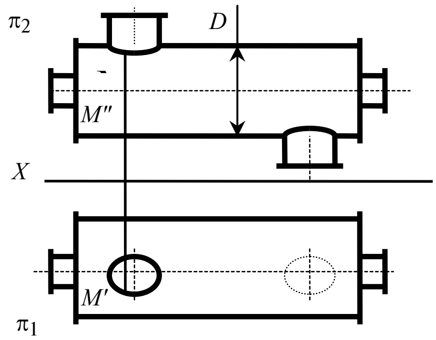


Рис. 5.9 Пересечение цилиндрической поверхности корпуса мембранного аппарата с вертикально **расположенным цилиндрическим патрубком**

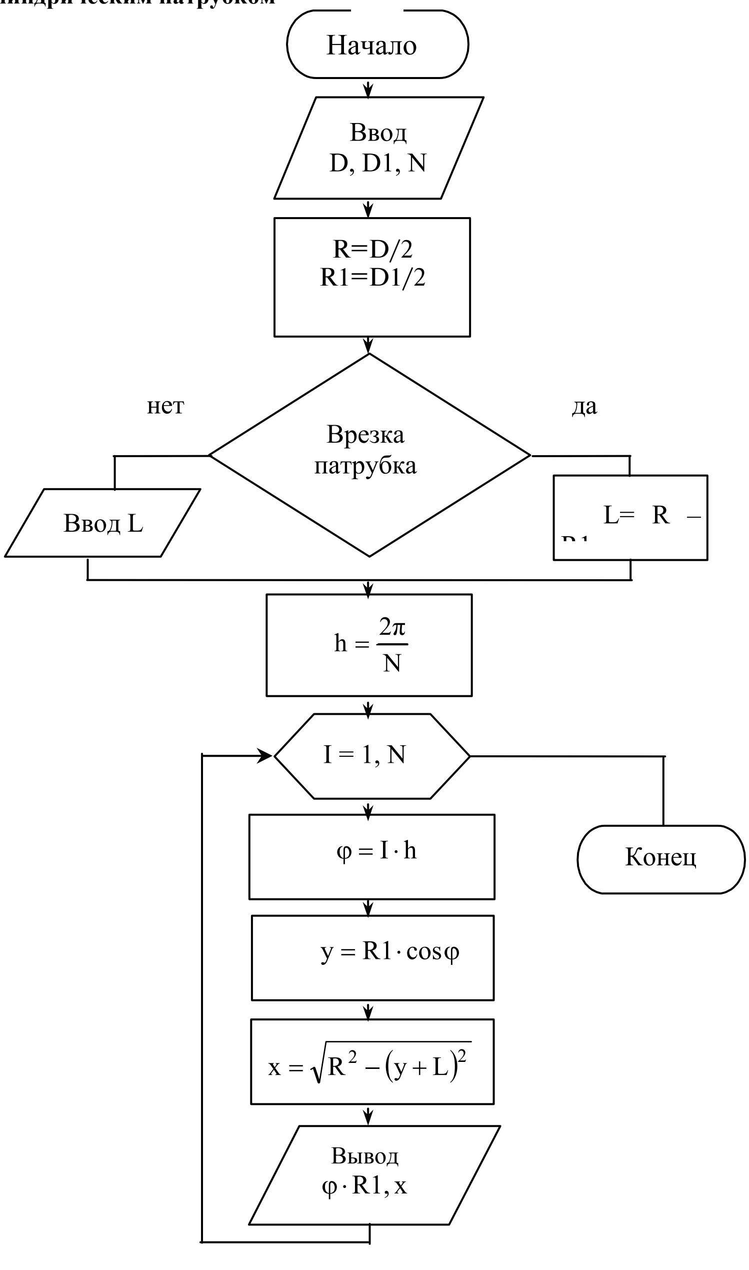


Рис. 5.10 Блок-схема алгоритма расчета построения развертки аппарата

Для решения задачи рассматривают уравнение поверхности патрубка

$$z^2 + y^2 = R_1^2, \qquad (5.2)$$

уравнение поверхности корпуса

$$x^2 + (y + L)^2 = R^2 . \qquad (5.3)$$

Решая эти уравнения совместно, можно найти координаты искомых точек, одновременно принадлежащих двум поверхностям. Секущие плоскости удобно задавать не на одинаковом расстоянии, а с использованием полярной системы координат. Такой способ задания плоскостей позволяет одновременно увеличить точность и упростить развертку патрубка.

Уравнение (5.2) представим в параметрическом виде

$$y = R_1 \cos\varphi ; \qquad (5.4)$$

$$z = R_{1.} \sin\varphi \ . \qquad (5.5)$$

Тогда недостающая координата x может быть найдена из уравнения (5.3)

$$x = \sqrt{2R^2 - (y + L)^2} \ . \qquad (5.6)$$

Таким образом для построения развертки патрубка по одной оси откладываем значения x, по другой – длину дуги. Блок-схема алгоритма построения представлена на рис. 5.10.

Предлагаемый прием заключает в себе обобщение по отношению к размерам соединяемых цилиндров. В иных же случаях для каждой пары поверхностей, участвующих в соединении, разработка алгоритма и составление расчетной программы не вызывают принципиальных трудностей.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1 Методы проецирования.
2 Проецирование точки и прямой на две и три плоскости проекций.
3 Прямые общего и частного положения.
4 Взаимное положение прямых в пространстве. Метод конкурирующих точек.
5 Определение натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов ее наклона к плоскости проекций.
6 Деление отрезка прямой в данном отношении.
7 Проецирование прямого угла.
8 Следы прямой.
9 Задание плоскости на чертеже.
10 Плоскости общего и частного положения.
11 Принадлежность точки и прямой плоскости.
12 Главные линии плоскости.
13 Общий прием построения точки пересечения прямой линии с плоскостью.
14 Признак параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
15 Признак параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
16 Построения линии пересечения двух плоскостей. Определение видимости.
17 Сущность способов преобразования чертежа вращением и заменой плоскостей проекций.
18 Способ вращения и его разновидности. Вращения вокруг проецирующей оси.
19 Способ вращения вокруг линии уровня и следа плоскости. Способ плоскопараллельного перемещения.
20 Способ замены плоскостей проекций.

21 Плоские и пространственные кривые линии.
22 Поверхности. Многогранные поверхности.
23 Способ граней. Развертывание многогранных поверхностей способом нормального сечения.
24 Способ ребер. Развертывание многогранных поверхностей способом триангуляции.
25 Кривые поверхности (поверхности линейчатые развертываемые и неразвертываемые, поверхности нелинейчатые, поверхности вращения).
26 Пересечение кривых поверхностей прямой линией и плоскостью.
27 Взаимное пересечение кривых поверхностей. Метод вспомогательных секущих плоскостей.
28 Метод концентрических сфер для построения линии пересечения двух поверхностей вращения.
29 Развертывания кривых поверхностей.
30 Тени. Выбор направления светового луча при построении теней в ортогональных проекциях. Понятия о собственных и падающих тенях.
31 Тень от точки, прямой и плоскости.
32 Методы построения теней. Метод лучевых сечений.
33 Методы построения теней. Метод обратного луча.
34 Перспектива. Геометрические основы линейчатой перспективы.
35 Перспектива точки, прямой и плоскости.
36 Выбор проведения основания картинной плоскости, угла зрения и высоты горизонта.
37 Методы построения перспективных изображений.
38 Построения перспективных изображений методом архитектора.
39 Построения теней в перспективе.
40 Проекции с числовыми отметками. Сущность метода.
41 Проекции точек и прямых в числовых отметках.
42 Взаимное положение прямых в проекциях с числовыми отметками.
43 Плоскость в проекциях с числовыми отметками. Взаимное положение плоскостей.
44 Поверхности в проекциях с числовыми отметками.
45 Топографическая поверхность в проекциях с числовыми отметками.
46 Взаимное пересечение поверхностей в проекциях с числовыми отметками.
47 Аксонометрические проекции. Сущность метода. Теорема Польке.
48 Виды аксонометрических проекций. Прямоугольная диметрия.
49 Виды аксонометрических проекций. Прямоугольная изометрия.
50 Построение наглядных изображений в прямоугольной изометрии и диметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии: Учеб. пособие для втузов. 24-е изд. / Под. ред. В. О. Гордона и Ю. Б. Иванова. М.: Высш. шк., 2000. 272 с.
2 Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия: Учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк. 1981. 262 с.
3 Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989. 226 с.
4 Элементы вычислительной геометрии в курсе инженерной графики / Э. Н. Очнев и др. // Сборник научно-методических статей. Саратов, 2000. С. 37 – 40.
5 Котов И. И., Полозов В. С., Широкова Л. В. Алгоритмы машинной графики. М.: Машиностроение, 1977. 231 с.
6 Практика использования графического редактора при изготовлении иллюстративных материалов в естественных дисциплинах / М. А. Кузнецов, С. И. Лазарев // Сборник научно-методических статей. Саратов, 2000. С. 157 – 159.
7 ГОСТ 19428-74 "Обработка данных и программирование. Схемы алгоритмов и программ".
8 Очнев Э. Н. и др. К вопросу автоматизированного проектирования в химическом машиноаппаратостроении // Изв. вузов. Химия и химическая технология. Иваново, 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ