

**В.М. Фокин  
Г.П. Бойков  
Ю.В. Видин**

# **ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ**



**МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2004**

**В.М. Фокин  
Г.П. Бойков  
Ю.В. Видин**

**ОСНОВЫ  
ТЕХНИЧЕСКОЙ  
ТЕПЛОФИЗИКИ**

---

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2004

УДК 536.24  
ББК 31.312.06  
Ф75

Р е ц е н з е н т

Доктор технических наук, профессор  
Волгоградского государственного технического университета  
*А.Б. Голованчиков*

**Фокин В.М., Бойков Г.П., Видин Ю.В.**

Ф75 Основы технической теплофизики: Монография  
М.: "Издательство Машиностроение-1", 2004. 172 с.

В монографии рассмотрены основные положения и законы теплопроводности. Изложен принцип наложения температурных полей, метод итерации и релаксации температурного поля, графического изображения теплового потока, электротепловой анало-

гии. Рассмотрена стационарная теплопроводность при внутреннем тепловыделении, наличии фильтрации и при переменном коэффициенте теплопроводности. Изложены вопросы нестационарной теплопроводности при различных граничных условиях в телах различной формы, а также распространения тепла и температурных волн в полугограниченном пространстве.

В монографии приводятся научно-методологические основы определения теплофизических свойств материалов методом неразрушающего контроля. Представлена методика, позволяющая установить начало наступления упорядоченной части теплового периода по тепловым изменениям на поверхности образца и методика комплексного определения теплофизических свойств материалов и изделий методом неразрушающего контроля.

Предназначена для научных, инженерно-технических работников, преподавателей вузов, аспирантов, студентов.

УДК 536.24  
ББК 31.312.06

ISBN 5-94275-123-4

© В.М. Фокин, Г.П. Бойков,  
Ю.В. Видин, 2004

© "Издательство Машиностроение-1", 2004

Научное издание

ФОКИН Владимир Михайлович  
БОЙКОВ Геральд Павлович  
ВИДИН Юрий Владимирович

## **ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ**

Монография

Редактор З. Г. Чернова

Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Рыжкова

Подписано к печати 15.04.2004

Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная

Объем: 10,0 усл. печ. л.; 10,0 уч.-изд. л.

Тираж 400 экз. С. 279<sup>М</sup>

"Издательство Машиностроение-1",  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Подготовлено к печати и отпечатано в издательско-полиграфическом центре  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

За последнее десятилетие в РФ открылись технические университеты для подготовки специалистов различного профиля: "Техническая физика", "Энергообеспечение предприятий", "Пожарная безопасность", "Инженерная защита окружающей среды", "Энергосбережение и энергоаудит", "Теплогазоснабжение и вентиляция" и др.

Теоретической основой для многих общих профессиональных (ОПД) и специальных дисциплин (СД), являются основы технической теплофизики, математической физики и теплообмена, которые включают теоретические основы теплопроводности и массопроводности в стационарном и нестационарном режимах, вопросы теплообмена в специфических условиях, численное моделирование, а также определение теплофизических свойств материалов.

В монографии изложены некоторые теоретические вопросы решения задач теплопроводности при стационарном режиме плоской, угловой, цилиндрической стенки. Рассмотрен принцип наложения температурных полей, метод итерации и релаксации температурного поля, графического изображения теплового потока и электротепловой аналогии. Приводится стационарная теплопроводность при внутреннем тепловыделении в пластине, цилиндре, стержне, при наличии фильтрации и при переменном коэффициенте теплопроводности.

Монография рассматривает вопросы нестационарной теплопроводности при различных граничных условиях (регулярный, квазистационарный, упорядоченный тепловой режим) в телах различной формы, а также распространения тепла и температурных волн в полуограниченном пространстве. Массово-проводность капиллярно-пористых тел включает разделы влаго-, паро- и воздухопроницаемости.

Монография также посвящена разработке научно-методологических основ, метрологических характеристик и приборного обеспечения, для определения теплофизических свойств материалов методом неразрушающего контроля. Представлены закономерности упорядоченного теплового режима в телах различной формы: призме квадратного сечения, кубе, шаре. Представлена методика комплексного определения теплофизических свойств материалов и изделий методом неразрушающего контроля.

В монографии изложена методика определения коэффициента температуропроводности материалов, основанная на измерении двух температур на поверхности примы квадратного сечения, а также установлено начало наступления упорядоченной части теплового периода.

Главы 1 – 6 написаны совместно всеми авторами, а главы 7 – 10 – В.М. Фокиным.

### УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

---

$T$  – текущая температура по шкале Кельвина, К

$t$  – температура по Международной практической температурной шкале, °С

$T(0, \tau)$ ;  $T_{ц}$  – температура центра тела, К

$T(R, \tau)$ ;  $T_{п}$  – температура поверхности тела, К

$T_0$  – начальная температура тела, К

$T_c$  – температура окружающей среды, К

$T^*$  – стационарная температура, К

$\vartheta = (T - T_0)$  – избыточная температура, К

$\theta = T/T_0$  – безразмерная относительная температура

$x, y, z$  – текущие координаты

$\tau$  – время, с

$2R$  – полная толщина тела, м

$d, D$  – геометрический размер, м

$L, l, \delta$  – линейный размер, м

$f$  – площадь сечения тела, м<sup>2</sup>

$F$  – площадь поверхности тела, м<sup>2</sup>  
 $u$  – периметр сечения тела, м  
 $\xi$  – фактор формы тела  
 $q$  – удельный тепловой поток, Вт/м<sup>2</sup>  
 $q_l$  – линейная плотность теплового потока, Вт/м  
 $Q$  – полный тепловой поток, Вт  
 $k$  – коэффициент теплопередачи плоской стенки, Вт/(м<sup>2</sup>·К)  
 $k_L$  – коэффициент теплопередачи цилиндрической стенки, Вт/(м·К)  
 $c$  – массовая удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)  
 $\rho$  – плотность материала, кг/м<sup>3</sup>  
 $(c\rho)$  – объемная теплоемкость, Дж/(м<sup>3</sup>·К)  
 $p$  – давление, МПа, кг/см<sup>2</sup>  
 $G$  – расход жидкости, кг/с, или газа, м<sup>3</sup>/с  
 $V$  – объем, м<sup>3</sup>, или объемный расход, м<sup>3</sup>/с  
 $m$  – масса вещества, кг  
 $\omega$  – скорость вещества, м/с  
 $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости, м<sup>2</sup>/с  
 $a$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)  
 $\alpha$  – коэффициент конвективного теплообмена Вт/(м<sup>2</sup>·К)  
 $E$  – излучательная способность, Вт/м<sup>2</sup>  
 $\varepsilon_{пр}$  – приведенная степень черноты системы  
 $\mu_n$  – характеристические числа

## ВВЕДЕНИЕ

---

В настоящее время одной из наиболее актуальных проблем является поиск и создание энергосберегающих мероприятий и инженерных решений по созданию технологических процессов с минимальными тепловыми потерями. Большую роль в этом играет разработка новых методов теплотехнических расчетов, что позволяет эффективно оценить тепловой и воздушный режим зданий различного назначения. Теплотехнические характеристики ограждающих конструкций существенно влияют на работу систем отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха, потребляющих в настоящее время значительное количество тепловой энергии.

Основы технической теплофизики позволяют решать проблемы энергосбережения и снижения потерь теплоты в окружающую среду, что существенно влияет на экологическую ситуацию, технико-экономические показатели и капитальные затраты строительных объектов. Для решения задач технической теплофизики нужно знать и теплофизические свойства материалов (ТФС) – теплопроводность, температуропроводность, теплоемкость.

В промышленности и строительстве все больший удельный вес приобретают синтезированные материалы, которые по своим технологическим и эксплуатационным параметрам имеют преимущества перед естественными материалами. Поэтому задача создания современных методов расчета и разработки средств неразрушающего контроля становится актуальной, так как позволяет оперативно определять весь комплекс качественных характеристик, в том числе и ТФХ. Тепловые методы неразрушающего контроля и диагностики позволяют контролировать качество готовых изделий при различных режимах их эксплуатации, в процессе производства, на стадии технологического контроля или в ходе строительства на объекте.

Качество, надежность и долговечность традиционных и вновь создаваемых строительных, конструктивных, тепло- и электроизоляционных материалов требуют совершенствования известных и создания новых методов расчетов. Наиболее полную информацию о тепловых процессах в исследуемых материалах и изделиях содержит температурное поле, определяемое из решения краевых задач теплопроводности для соответствующих тепловых воздействий и условий проведения теплофизического эксперимента.

Для создания математических моделей тепловых процессов в физических объектах или исследуемых образцах необходимо определение температурного поля в объекте при различных видах теплового воздействия на его поверхность. При этом вид и режим теплового воздействия, форму нагревателя, условия передачи тепла и проведения эксперимента выбирают таким, чтобы с помощью несложных математических расчетов и зависимостей адекватно описать физику процесса и решить вопросы технической теплофизики.

## **1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ и законы**

### **ТЕОРИИ теплопроводности**

---

Основным разделом технической теплофизики является теплопроводность – процесс переноса теплоты, когда тело не перемещается в пространстве или путем соприкосновения тел (или их частей), имеющих различную температуру. Механизм передачи теплоты в этом случае носит молекулярный или электронный характер. Теплофизика считает любое тело состоящим из мельчайших частиц. В элементах тела, которые подвержены нагреванию, молекулы начинают двигаться, в результате чего возникают упругие волны, которые передаются от большей температуры к меньшей. Такой молекулярный перенос теплоты наблюдается в твердых телах, диэлектриках, жидкостях и газах. В металлах к этому явлению добавляется движение свободных электронов, поэтому теплопроводность металлов выше, чем в диэлектриках, жидкостях и газах. Теплопроводность жидкостей и газов может рассматриваться только в тех случаях, когда они находятся в неподвижном состоянии. В реальных условиях в жидкостях и газах происходит непрерывное движение частиц, поэтому теплопроводность жидкостей и газов встречается редко.

Согласно понятию аналитической теории теплопроводности любое вещество рассматривается как сплошная материальная среда – континуум, что весьма удобно для математического анализа, так как

позволяет представлять физические явления в малой дифференциальной форме и создает более широкие возможности для приложения существующих законов естествознания. Однако такой взгляд на материю приемлем лишь тогда, когда размеры дифференциалов вещества достаточно велики по сравнению с размерами молекул и расстояниями между ними. Указанное обстоятельство соблюдается в подавляющем большинстве случаев. Если расстояния между молекулами становятся соизмеримыми с величиной дифференциалов вещества (например, в сильно разреженном газе, когда в элементарно малом объеме не сохраняются понятия температуры, давления и т.п.), допущение о том, что среда сплошная, становится неприемлемым.

### 1.1. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ, ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ, ЛИНИИ ТОКА ТЕПЛА

Всякое физическое явление и процесс распространения тепла, протекает во времени и пространстве и связано с понятием поля физической величины (электрического потенциала, давлений, концентраций, температур). Совокупность значений температур в различных точках пространства в различные моменты времени называется *температурным полем*.

Если температура конкретной точки зависит только от координат  $T = f(x, y, z)$ , то такое температурное поле называется стационарным, а если от координат и времени  $T = f(x, y, z, \tau)$  – нестационарным. Различают стационарное (независящее от времени) и нестационарное (зависящее от времени) поле температур, а также одно-, двух- и трехмерное поле, которое характеризуется одной, двумя или тремя координатами (рис. 1.1).

*Изотермическая поверхность* – это геометрическое место точек одинаковой температуры. Так как в одной и той же точке пространства не может быть двух одинаковых температур одновременно, то изотермические поверхности различного уровня никогда не пересекаются. Они или замыкаются на себя, или кончаются на границах тела.

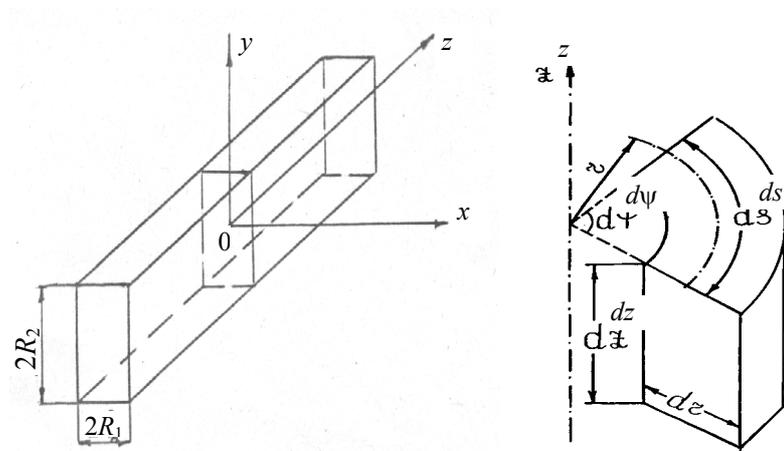


РИС. 1.1. ОБЪЕМ ПАРALLEЛЕПИПЕДА И ЦИЛИНДРА

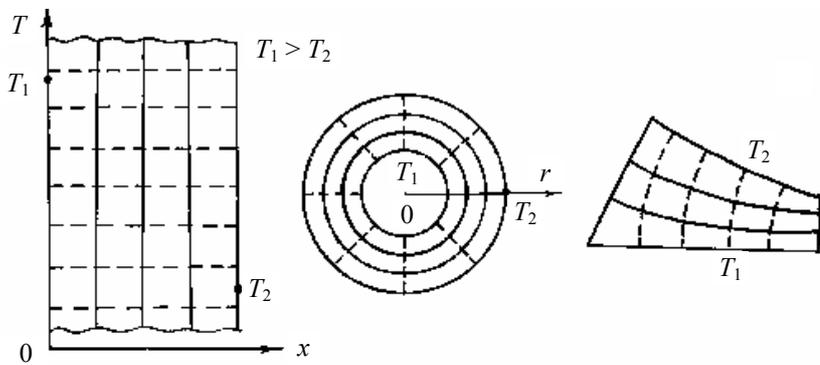


Рис. 1.2. Изотермы, линии тока тепла в плоской, цилиндрической стенке и в теле произвольной формы:

————— – изотермы, образующие приросты температуры;  
 - - - - - – линии тока, образующие трубки тока тепла

Линии, пересекающие изотермические поверхности под прямым углом, называются линиями *теплового тока*. Совокупность таких линий в теле наглядно изображает картину распространения тепла (рис. 1.2).

Если начало координат (рис. 1.1) расположить в центре тела, то во всех случаях его средняя температура определяется по формуле:

- для параллелепипеда

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{2R_1 2R_2 2R_3} \int_{-R_1}^{+R_1} dx \int_{-R_2}^{+R_2} dy \int_{-R_3}^{+R_3} T(x, y, z, \tau) dz ,$$

- для цилиндра

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\pi R^2 2L} \int_0^{+R_1} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L}^{+L} T(r, \varphi, z, \tau) dz .$$

## 1.2. ЗАКОН ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ФУРЬЕ. ГРАДИЕНТ И ПАДЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Градиентом физической величины называется первая производная этой величины по направлению ее наибольшего возрастания. Вектор градиента температуры всегда направлен в сторону увеличения температур, а его начало нормально к изотермической поверхности. Таким образом

$$\text{grad}T = \frac{dT}{dn} ,$$

где  $n$  – нормаль к изотермической поверхности.

Составляющая градиента на какое-либо направление может быть выражена через направляющий косинус:

$$(\text{grad}T)_S = \frac{dT}{dn} \cos(\widehat{ns}) = \frac{dT}{ds} .$$

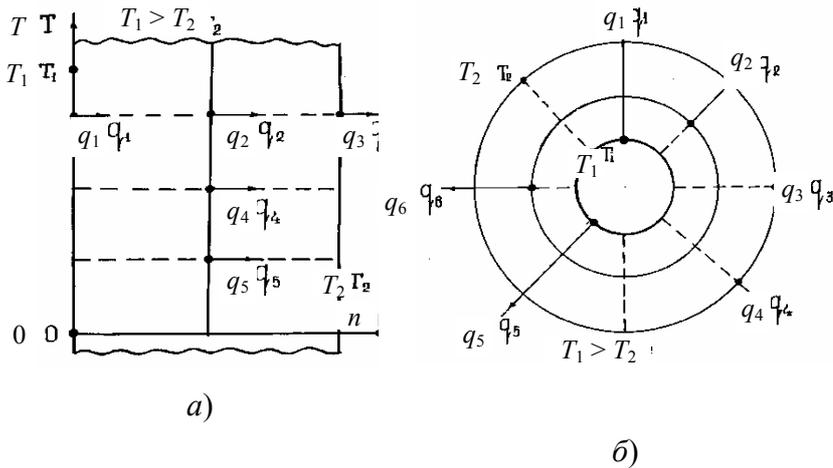
Градиент, взятый с обратным знаком, называется *падением температуры*. Вектор теплового потока  $q$  (как и градиент температуры) всегда нормален к изотермической поверхности (рис. 1.3).

На рис. 1.3, *а* вектор теплового потока совпадает с линиями тока тепла, а его значение не изменяется вдоль линий тока  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5$

и остается неизменной величиной в различных точках изотермы.

На рис. 1.3, *б* вектор теплового потока совпадает с линиями тока тепла, а его значение изменяется вдоль линии тока  $q_1 = q_5 > q_2 = q_6 > q_3 = q_4$ ,

но остается постоянной величиной в различных точках одной и той же изотермы.



**Рис. 1.3. Изотермы, линии тока тепла, векторы теплового потока:**

*а* – в пластине:  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5$ ;

*б* – в цилиндре:  $q_1 = q_5 > q_2 = q_6 > q_3 = q_4$

Любая изотермическая поверхность разделяет тело на две области: с большей и меньшей температурой. Теплота переходит через изотермическую поверхность в область более низкой температуры. Количественно интенсивность теплообмена характеризуется плотностью теплового потока.

Плотностью теплового потока называется количество теплоты  $Q$  (Дж), проходящей через единицу изотермической поверхности  $F$  ( $m^2$ ) в единицу времени  $\tau$  (с):

$$q = Q / (F \tau), \text{ Дж}/(m^2 \cdot c) \text{ или Вт}/m^2 .$$

Французский ученый Ж. Б. Фурье в 1807 г. установил, что *плотность теплового потока или интенсивность теплового потока* пропорциональна градиенту температуры:  $q = -\lambda \frac{dT}{dn}$ .

Это также вектор, направление и значение которого определяются градиентом температуры. Направление векторов потока тепла и градиента температуры всегда противоположно. Если направление теплового потока совпадает с положительным направлением оси  $n$ , то тепловой поток имеет положительный знак:

$$+q = -\lambda \frac{dT}{dn} \quad \text{или} \quad q = -\lambda \frac{dT}{dn}.$$

Если тепловой поток направлен в область отрицательных значений оси  $n$ , то он будет иметь отрицательный знак:

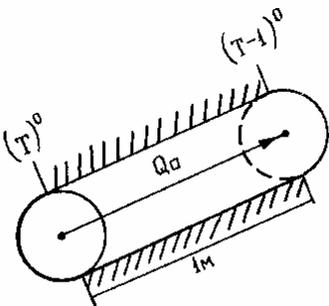
$$-q = -\lambda \frac{dT}{dn} \quad \text{или} \quad q = \lambda \frac{dT}{dn}.$$

Согласно закону Фурье, количество передаваемого тепла пропорционально падению температуры, времени и площади поперечного сечения, перпендикулярного направлению распространения тепла, т.е.

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dn} dF dt = q dF dt.$$

В общем случае тепловой поток может совпадать или не совпадать с линией тока тепла, может изменяться вдоль линии тока тепла или оставаться постоянным. В различных участках одной и той же изотермы плотность теплового потока может иметь разное значение или оставаться постоянной. Величина теплового потока может зависеть или не зависеть от времени.

### 1.3. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ



Множитель пропорциональности  $\lambda$  в законе Фурье, называется *коэффициентом теплопроводности* и является физической величиной, характеризующей способность вещества проводить тепло. Схема количественного выражения коэффициента теплопроводности  $\lambda$  показана на рис. 1.4.

Коэффициент теплопроводности  $\lambda$  численно равен количеству теплоты  $Q$  (Дж), проходящему через единицу поверхности  $F$  ( $\text{м}^2$ ), в единицу времени  $\tau$  (с), при разности температур  $T$  в один градус, на единицу длины  $n$  (м):

$$\lambda = \frac{dQ}{dF d\tau \frac{dT}{dn}}, \quad \text{Дж/м}^2 \cdot (\text{К/м}) \cdot \text{с} \quad \text{или} \quad \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}).$$

Рис. 1.4. Схема прохождения теплоты  $Q_0$ , через единицу поверхности  $F$ , при разности температур  $T$ , в один градус, на единицу длины  $n$ .

Значения коэффициента теплопроводности  $\lambda$  для основных веществ и материалов: газов –  $\lambda \approx 0,05 \dots 0,5$ ; жидкостей –  $\lambda \approx 0,06 - 0,6$ ; строительных материалов –  $\lambda \approx 0,02 \dots 2$ ; металлов –  $\lambda \approx 2 \dots 400$ , Вт/(м·К).

Необходимо помнить следующее:

1. Для кристаллов  $\lambda$  неодинаково в направлении различных осей кристалла. Для дерева  $\lambda$  различно вдоль и поперек волокон.

2. Для одних и тех же материалов сухих или влажных  $\lambda$  неодинаково: большей частью выше, чем  $\lambda$  сухого материала и  $\lambda$  воды в отдельности. Появляется градиент давления в сторону распространения тепла и влага с теплом как бы проталкивается.

3. Коэффициент теплопроводности не является аддитивной величиной. Поэтому  $\lambda$  смеси не может быть рассчитано путем суммирования коэффициентов теплопроводности отдельных компонентов, из которых состоит смесь.
4. Коэффициент теплопроводности сплава чистых металлов в общем случае не может быть средней величиной между коэффициентами теплопроводности чистых металлов, взятых в отдельности.
5. При наличии разного рода примесей  $\lambda$  чистых металлов резко убывает.
6. Для большинства газов, строительных и изоляционных материалов  $\lambda$  возрастает с возрастанием температуры.
7. Строительные материалы с  $\lambda \leq 0,23$  Вт/(м·К) относят к теплоизоляционным материалам. Для большинства строительных и изоляционных материалов  $\lambda$  зависит от плотности, пористости, влажности и других факторов.
8. Для большинства капельных жидкостей  $\lambda$  убывает с повышением температуры. Исключение составляют глицерин, вода и некоторые другие.
9. Для одних металлов и сплавов (железо, углеродистая сталь и др.)  $\lambda$  убывает с увеличением температуры, для других (алюминий, нихром и др.) – увеличивается.
10. Для большинства веществ зависимость коэффициента теплопроводности от температуры достаточно слабая, что позволяет его усреднять в заданном интервале температур и оперировать им как постоянной величиной.

#### 1.4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА В ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1. Вектор плотности теплового потока  $q_n$  (рис. 1.5), направленный перпендикулярно изотермической поверхности  $T$ , может быть разложен на составляющие по координатным осям:

$$q_x = q_n \cos(\widehat{nx}) = -\lambda \frac{dT}{dn} \cos(\widehat{nx}) = -\lambda \frac{dT}{dx};$$

$$q_y = q_n \cos(\widehat{ny}) = -\lambda \frac{dT}{dn} \cos(\widehat{ny}) = -\lambda \frac{dT}{dy};$$

$$q_z = q_n \cos(\widehat{nz}) = -\lambda \frac{dT}{dn} \cos(\widehat{nz}) = -\lambda \frac{dT}{dz}.$$

2. Если элементарный параллелепипед вблизи точки  $M$  ориентирован относительно осей координат, то количество тепла, вошедшее внутрь его за время  $d\tau$ , может быть выражено суммой

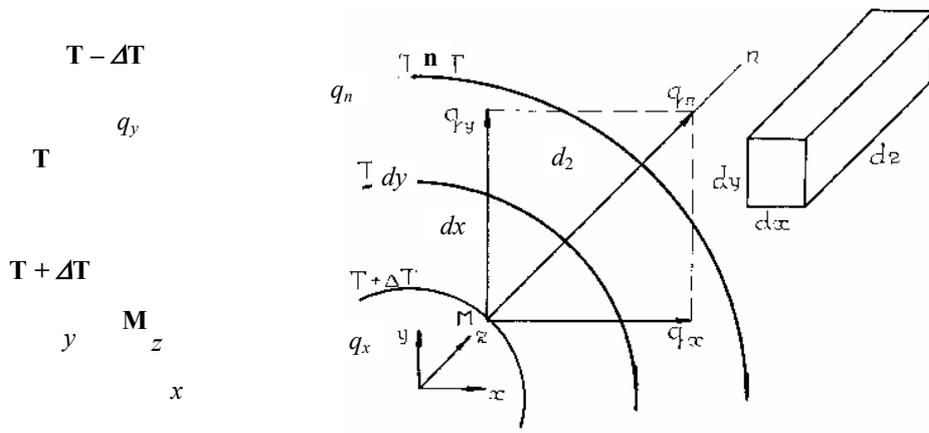


Рис. 1.5. Разложение вектора по координатным осям

$$q_1 = q_{x1} dy dz d\tau + q_{y1} dx dz d\tau + q_{z1} dx dy d\tau,$$

где  $q_{x1}$  – составляющая плотности теплового потока в направлении  $x$  за время  $d\tau$  на поверхности  $dy dz$ , слева;  $q_{y1}$  – то же в направлении  $y$  на поверхности  $dx dz$ , слева;  $q_{z1}$  – то же в направлении  $z$  на поверхности  $dx dy$ , слева.

Количество тепла, вышедшего за то же самое время  $d\tau$  изнутри параллелепипеда, определяется аналогично:

$$q_2 = q_{x2} dy dz d\tau + q_{y2} dx dz d\tau + q_{z2} dx dy d\tau,$$

где  $q_{x2}$  – составляющая плотности теплового потока в направлении  $x$  за время  $d\tau$  на поверхности  $dy dz$ , справа;  $q_{y2}$  – то же в направлении  $y$  на поверхности  $dx dz$ , справа;  $q_{z2}$  – то же в направлении  $z$  на поверхности  $dx dy$ , справа.

3. Удельным внутренним тепловыделением называется отношение

$$\frac{dQ_w}{dV d\tau} = W,$$

где  $dQ_w$  – количество тепла, выделяемое в объеме  $dV = dx dy dz$  за время  $d\tau$ .

При проектировании экспериментальных установок в технике чаще всего  $W$  может задаваться и благодаря этому определяется

$$dQ_w = W dV d\tau.$$

4. Если  $\xi = f(n, \tau)$ , то частные дифференциалы определяются из условий

$$d\xi_\tau = \frac{\partial \xi}{\partial \tau} d\tau; \quad d\xi_n = \frac{\partial \xi}{\partial n} dn.$$

5. Если  $\vec{\xi} = f(x, y, z, \tau)$ , то частные дифференциалы определяются из условий

$$d\vec{\xi}_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} dx; \quad d\vec{\xi}_y = \frac{\partial \xi_y}{\partial y} dy;$$

$$d\vec{\xi}_z = \frac{\partial \xi_z}{\partial z} dz; \quad d\vec{\xi}_\tau = \frac{\partial \xi_\tau}{\partial \tau} d\tau.$$

6. Дифференциалом физической величины называется бесконечно малая разность последующего и предыдущего ее значений:

$$d\xi = (\xi_2 - \xi_1) \quad \text{или} \quad -d\xi = (\xi_1 - \xi_2),$$

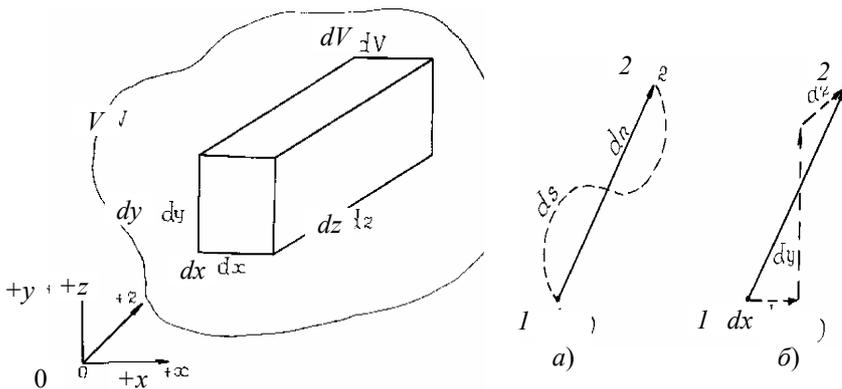
где  $\xi_2, \xi_1$  – последующее и предыдущее значение физической величины.

## 1.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Дифференциальным уравнением теплопроводности называется математическая зависимость, связывающая между собой все физические величины, характеризующие явление теплопроводности внутри объема. Если такую связь найти явно относительно температуры, т.е.  $T = f(x, y, z, \tau)$ , то можно определить плотность теплового потока.

Для вывода дифференциального уравнения теплопроводности необходимо представить себе объем тела, которое нагревается или охлаждается и внутри которого имеет место температурное поле. Выделим внутри этого объема элементарный параллелепипед, расположив его соответственно в декартовой системе координат (рис. 1.6).

Если тепла в объеме появляется больше, чем уходит из него за то же самое время, то в объеме имеет место прибыль теплоты. Если же тепла в объеме появляется меньше, чем уходит из него за то же самое время, то в объеме – убыль теплоты.



**Рис. 1.6.** Элементарный параллелепипед в объеме  $V$  и два различных пути движения элементарного параллелепипеда от точки 1 к точке 2:

$a$  – произвольное перемещение точки в пространстве;

$\bar{b}$  – перемещение точки вдоль координатных осей  $x, y, z$

Прибыль или убыль теплоты в элементарном объеме  $dV = dx dy dz$  может быть выражена из следующего уравнения теплового баланса

$$\begin{aligned} & (q_{x1} dydz + q_{y1} dx dz + q_{z1} dx dy) d\tau + W dV d\tau = \\ & = (q_{x2} dydz + q_{y2} dx dz + q_{z2} dx dy) d\tau + (cp) dV dT. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В левой части уравнения теплового баланса (1.1), с индексом 1, показан приход теплоты за единицу времени  $\tau$ , а в правой части, с индексом 2, – уход теплоты из параллелепипеда. Соотношение  $W dV d\tau$  характеризует внутреннее тепловыделение за счет положительных ( $W$ ) или отрицательных (минус  $W$ ) источников тепла, а если их нет, то  $W = 0$ . Соотношение  $(cp) dV dT$  – приращение тепла в объеме за счет изменения его температуры (прибыль или убыль теплоты).

Следовательно, баланс тепла для элементарного параллелепипеда может быть сформулирован так: тепло, пришедшее внутрь объема и выделившееся внутри за время  $d\tau$ , равно теплу, ушедшему изнутри объема и пошедшему на изменение его температуры за тот же отрезок времени  $d\tau$ . Из уравнения теплового баланса следует

$$\begin{aligned} (cp) dV dT = & [(q_{x1} - q_{x2}) dydz + (q_{y1} - q_{y2}) dx dz + \\ & + (q_{z1} - q_{z2}) dx dy] d\tau + W dV d\tau. \end{aligned}$$

Так как  $q_1$  изменяется до  $q_2$  на дифференциально малом расстоянии, то разность в круглых скобках есть также бесконечно малая величина. Здесь и далее:  $q_2$  – последующее значение плотности потока,  $q_1$  – предыдущее. С учетом этого (см. п. 1.4)  $q_1 - q_2 = -dq$ . В итоге

$$(cp) dV dT = [-dq_x dydz - dq_y dx dz - dq_z dx dy] d\tau + W dV d\tau.$$

Возможна и другая запись последнего выражения

$$(cp) dV dT = \left[ -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx dz - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz dy dx \right] d\tau + W dV d\tau.$$

После сокращения множителя  $dV$  получаем

$$(cp) dV dT = \left[ -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] d\tau + W d\tau.$$

Здесь  $\frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

Следовательно,

$$(cp) dT = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) d\tau + W d\tau.$$

Отношение  $\frac{\lambda}{(cp)} = a$  называется *температуропроводностью вещества* и характеризует скорость выравнивания температуры в неравномерном нагретом объеме тела, м<sup>2</sup>/с. С учетом этого

$$dT = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) d\tau + \frac{W}{(cp)} d\tau. \quad (1.2)$$

Если тело твердое, то элементарный объем не перемещается в пространстве, а его температура меняется только во времени. В уравнении (1.2) в этом случае следует полагать  $dT = dT_\tau = \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau$ .

Поэтому для твердого тела имеет место зависимость

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{W}{(cp)}. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) называется дифференциальным уравнением теплопроводности Фурье для уравнения твердого тела в декартовой системе координат. Если температурное поле стационарное – имеем дифференциальное уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{W}{\lambda} = 0. \quad (1.4)$$

При отсутствии внутренних источников тепла, когда тепловыделение  $W$  равно нулю, имеем дифференциальное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (1.5)$$

Дифференциальные уравнения Фурье (1.3), Пуассона (1.4) и Лапласа (1.5) могут быть двумерными, когда температура зависит от двух любых координат, и одномерными, когда температура зависит только от одной координаты пространства. В технической теплофизике и теплотехнических приложениях наиболее часто встречаются следующие случаи:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{W}{\lambda} = 0; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (1.6)$$

Дифференциальные уравнения теплопроводности в декартовой системе координат (1.4) – (1.6) удобно использовать в тех случаях, когда тело имеет форму параллелепипеда, куба, призмы прямоугольного или квадратного сечения, неограниченной пластины (плоской стенки), толщина которой весьма мала по сравнению с другими размерами.

Для тел цилиндрической формы эти уравнения более удобно использовать в цилиндрической системе координат  $x = r \cos \psi$ ,  $y = r \sin \psi$  (рис. 1.1), которые характеризуется осью  $z$ , радиусом  $r$  и углом поворота  $\psi$ . Используя правила дифференцирования сложных функций, можно получить

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{W}{(cp)}. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) называется дифференциальным уравнением теплопроводности Фурье в цилиндрической системе координат. В технической теплофизике и теплотехнических приложениях наиболее часто оно встречается в одномерной форме:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right); \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{W}{\lambda} = 0; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (1.8)$$

Дифференциальные уравнения (1.7) и (1.8) удобно использовать в тех случаях, когда тело имеет форму (или близко к форме) цилиндра конечных размеров, диска конечных размеров, бесконечного цилиндра (тело, длина которого весьма велика по сравнению с диаметром).

Для тел шаровой формы дифференциальное уравнение теплопроводности более удобно использовать в сферической системе координат:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (1.9)$$

Если тело жидкое, то элементарный объем движется в пространстве большого объема, принимая температуру той точки, в которой оказывается. Если бы объем задержался в какой-нибудь точке, то его температура все равно изменялась бы, так как температура всего объема меняется во времени. Таким образом, причиной изменения температуры элементарного объема являются его перемещение между точками с разной температурой и его нахождение в большом объеме, температура которого меняется во времени, а объем может нагреваться или охлаждаться. В итоге общее изменение температуры  $dT$  складывается как сумма

$$dT = dT_\tau + dT_\Pi. \quad (1.10)$$

На рис. 1.6 показаны два различных пути движения элементарного параллелепипеда от точки 1 к точке 2 и в любом случае  $ds = dx + dy + dz$ . Если бы оба пути были пройдены за одно и то же время  $d\tau$ , то тогда имело бы место естественное равенство  $dT_\Pi = dT_s$ . Поэтому  $dT_\Pi = dT_x + dT_y + dT_z$  и после подстановки  $dT_\Pi$  в (1.10) получаем

$$\begin{aligned} dT &= dT_\tau + dT_x + dT_y + dT_z = \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz = \\ &= d\tau \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{dx}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{dz}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Скорость перемещения элементарного объема  $dV$  жидкого тела может быть выражена как  $\omega = \frac{dn}{dt}$ . Поэтому соотношение  $\frac{dx}{dt} = \omega_x$ , есть составляющая скорости элементарного объема  $dV$  в направлении оси  $x$ . В итоге

$$dT = dt \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} + \omega_x \frac{\partial T}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial T}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (1.11)$$

Подстановка (1.11) в (1.2) приводит к зависимости

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \omega_x \frac{\partial T}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial T}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{W}{(cp)}. \quad (1.12)$$

Дифференциальное уравнение (1.12) для движущегося элемента жидкости носит название Фурье–Кирхгофа. Оно устанавливает связь между временными и пространственными изменениями температуры в любой точке движущейся среды.

## 1.6. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛОСКОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ СТЕНКИ

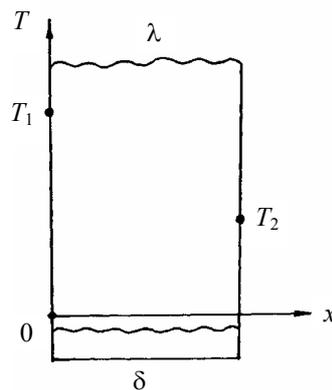
Рассмотрим плоскую однородную стенку толщиной  $\delta$ , выполненную из материала, с коэффициентом теплопроводности  $\lambda$  (рис. 1.7). Температура  $T_1$  – одинакова на всей поверхности  $F$  (при  $x = 0$ ); температура  $T_2$  – одинакова на всей поверхности  $F$  (при  $x = \delta$ ). Температура стенки меняется только по толщине, в направлении оси  $x$ .

ЯВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ПЛОСКОЙ СТЕНКЕ ОПИСЫВАЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ФОРМЕ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{ИЛИ} \quad \frac{dT}{dx} = C_1.$$

**Рис. 1.7. Расположение координат на плоской стенке:**

$T_1$  – температура одинакова на всей поверхности  $F$  (при  $x = 0$ );  
 $T_2$  – температура одинакова на всей поверхности  $F$  (при  $x = \delta$ )



Откуда  $T = C_1 x + C_2$ ;  $T_1 = C_1 \cdot 0 + C_2$ ;  $T_2 = C_1 \delta + C_2$ .

Таким образом,  $T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x$ . Отсюда

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_2), \quad Q = qF = \frac{\lambda}{\delta} F(T_1 - T_2) = \frac{F(T_1 - T_2)}{R}.$$

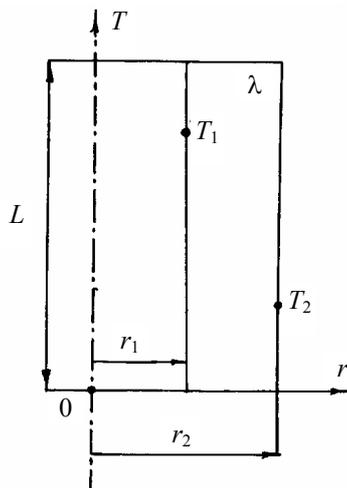
Здесь  $R = \frac{\delta}{\lambda}$  – термическое сопротивление теплопроводности стенки.

*Термическое сопротивление* – это температурный напор, приходящийся на единицу удельного расхода тепла. Иными словами, это разность температур, благодаря которой через заданную систему удастся передать единицу удельного количества тепла. Для плоских систем удельное количество тепла совпадает с плотностью теплового потока и равно  $q = Q / F$ .

## 1.7. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ СТЕНКИ

ЯВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКЕ ОПИСЫВАЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ФОРМЕ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА (РИС. 1.8):

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0; \quad U = \frac{dT}{dr}; \quad \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r}U = 0; \quad \frac{dU}{U} = -\frac{dr}{r}.$$



**Рис. 1.8.** Расположение координат

**цилиндрической стенки:**  
 $T_1$  – температура одинакова по всей внутренней поверхности (при  $r = r_1$ );  
 $T_2$  – температура одинакова по всей НАРУЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ (ПРИ  $r = r_2$ )

$$U = \frac{C_1}{r}; \quad T = C_1 \ln r + C_2.$$

Таким образом, 
$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1};$$

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r}; \quad Q = q 2\pi r L = \frac{\pi L (T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}};$$

или

$$Q = \frac{\pi L(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}} = \frac{\pi L(T_1 - T_2)}{R},$$

где  $R = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$  – термическое сопротивление теплопроводности однослойной цилиндрической стенки (температурный напор, приходящийся на единицу удельного расхода тепла, уменьшенного в  $\pi$  раз).

Для цилиндрических систем удельное количество тепла не совпадает с плотностью теплового потока и определяется отношением  $q_L = Q/L$ .

## 2. РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

### 2.1. ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть в массиве неограниченного пространства (объем бесконечной протяженности в направлении всех измерений) действуют сосредоточенные линейные (положительные и отрицательные) источники тепла (рис. 2.1).

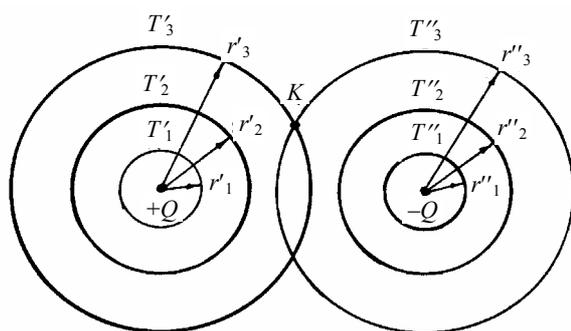
Положительные источники тепла, длиной  $L$ , обозначены  $(+Q)$ , а отрицательные "стоки" тепла, длиной  $L$ , через  $(-Q)$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности массива. По сравнению с протяженностью  $L$  неограниченного массива, источник и "сток" расположены несоизмеримо близко друг к другу. Поэтому путь между источником и "стоком" тепла является линией наименьшего термического сопротивления. В связи с этим все тепло, выделяемое источником, будет полностью поглощаться "стоком". Если бы источник и "сток" не воздействовали друг на друга, то каждый из них создавал бы в теле массива температурное поле в виде концентрических изотерм. Тогда

$$(+Q) = \frac{\pi L(T'_1 - T'_3)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r'_3}{r'_1}}; \quad (-Q) = \frac{\pi L(T''_1 - T''_3)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r''_3}{r''_1}},$$

откуда

$$T''_3 = T'_1 + Q \frac{\ln \frac{r''_3}{r''_1}}{2\pi L\lambda}.$$

**Рис. 2.1.**  
Расположение источника и стока тепла:  
 $K$  – место наложения изотерм



Если бы температурное поле в массиве наводилось только источником или только стоком, то в точке  $K$  была бы температура  $T'_3$  или же  $T''_3$ . При одновременном действии источников и "стоков" результирующее температурное поле получается путем сложения температурных полей, возбуждаемых в теле отдельными источниками и "стоками" в предположении, что они не мешают друг другу. Если обозначить температуру источника и "стока" тепла через  $T'_0$  и  $T''_0$ , то в рассмотренном примере действительная температура точки  $K$  определится из выражения

$$T_K = T_3' + T_3'' - T_0 = T_1' + T_1'' - \frac{Q}{2\pi L\lambda} \ln\left(\frac{r_3'' r_1'}{r_1'' r_3'}\right).$$

2.2. ЗАЛОЖЕННОГО В ГРУНТ

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

ТЕПЛОПРОВОДА,

Условно полагают, что тепло от цилиндрического теплопровода через грунт передается не в окружающую среду, а забирается отрицательным источником тепла. Реальная картина температурного поля в грунте при этом не нарушается, если отрицательный источник размещен симметрично и окружен точно таким же массивом. Используя принцип наложения температурных полей (рис. 2.2) и учитывая, что

$$(+Q) = \frac{\pi L(T_K' - T_0')}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{h}{r_1'}}, \quad (-Q) = \frac{\pi L(T_0'' - T_K'')}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_1''}{h}},$$

можно выразить температуры в точке  $K$

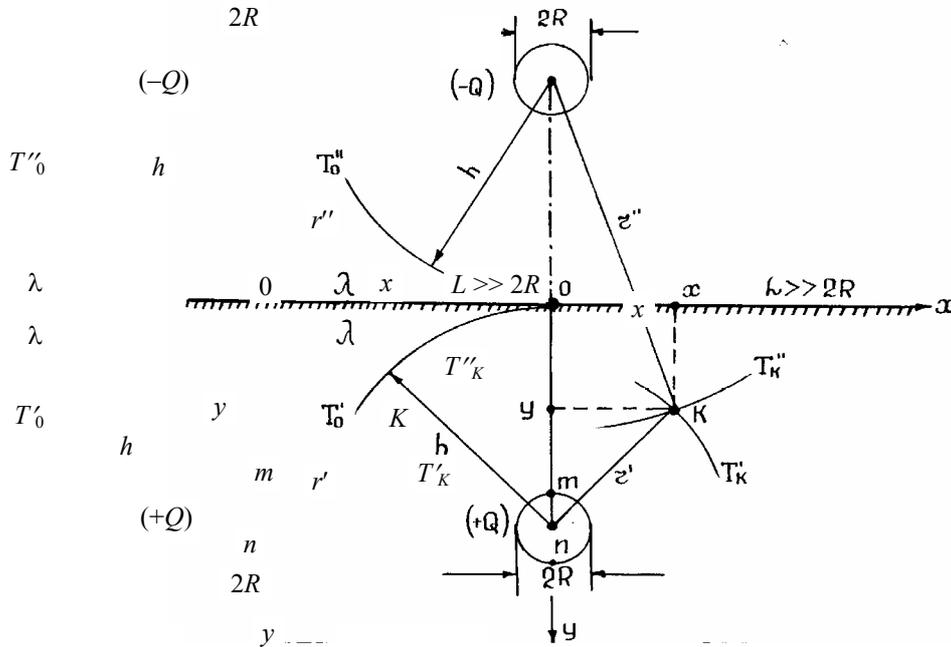
$$T_K' = T_0' + \frac{Q}{2\pi L\lambda} \ln \frac{h}{r_1'}; \quad T_K'' = T_0'' + \frac{Q}{2\pi L\lambda} \ln \frac{r_1''}{h}.$$

Суммируя температуры  $T_K'$  и  $T_K''$ , получим:

$$T_K = T_0 + \frac{Q}{2\pi L\lambda} \ln \frac{r_1''}{r_1'},$$

или

$$T_{(x,y)} = T_0 + \frac{Q}{2\pi L\lambda} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (h+y)^2}}{\sqrt{x^2 + (h-y)^2}}.$$



**Рис. 2.2. Расположение теплопровода в грунте:**

$L$  – длина цилиндра радиуса  $R$ ;  $h$  – глубина заложения;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности массива;  $T_0$  – температура поверхности слоя

Таким образом, температурное поле в грунте становится определенным, если замерена температура на поверхности земли  $T_0$  и известен расход тепла цилиндром  $Q$ . С другой стороны, расход тепла цилиндром может быть рассчитан, если замерена температура поверхности массива и еще одна, любая, температура в грунте.

$$Q = \frac{\pi L [T_{(x,y)} - T_0]}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (h+y)^2}}{\sqrt{x^2 + (h-y)^2}}} = \frac{\pi L [T_m - T_0]}{\frac{1}{2\lambda} \ln \left( 2 \frac{h}{R} - 1 \right)}$$

Естественно ожидать, что максимальная температура грунта будет в точке  $n$  ( $x = 0$ ;  $y = h + R$ ), которая равна

$$T_n = T_0 + \frac{Q}{2\pi L \lambda} \ln \left( 1 + 2 \frac{h}{R} \right).$$

Если в массиве будет заложено два теплопровода, то соответственно им появляется два стока. Температурное поле в грунте получится уже как результат наложения четырех температурных полей.

### 2.3. РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ

Необходимость применения принципа релаксации обычно возникает тогда, когда задача технической теплофизики является сложной и дифференциальное уравнение теплопроводности не поддается аналитическому решению. Принцип релаксации удобно иллюстрировать на примере, когда тепло распространяется в двух измерениях. Сечение тела (рис. 2.3 и 2.4) обычно разбивается прямоугольной решеткой на ячейки квадратной формы ( $\Delta x = \Delta y$ ).

В дальнейшем допускается следующее:

- 1) весь процесс теплопроводности концентрируется в стержнях получившейся релаксационной решетки;
- 2) по каждому стержню решетки передается в точности такое же количество теплоты, которое в действительности передается через элемент с размерами  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ;
- 3) в качестве расчетного соотношения может быть использована формула тепла через плоскую стенку:

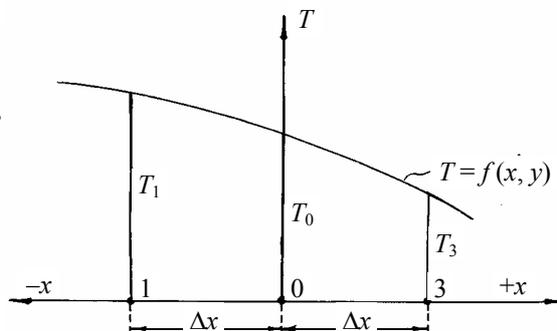
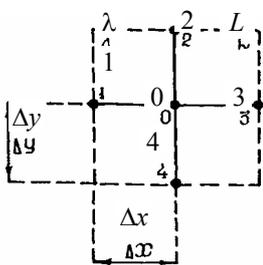


Рис. 2.3.

Квадратная ячейка Рис. 2.4. Вид сбоку на ячейку релаксации

релаксационной  
решетки

$$Q_{ik} = \frac{\lambda}{\delta} F (T_i - T_k),$$

где  $i$  отмечает наибольшее значение температуры;  $k$  отмечает наименьшее значение температуры.

Приняв эти допущения, можно рассчитать количество тепла, которое протекает по каждому стержню:

- для горизонтального стержня

$$Q_{ik} = \frac{\lambda}{\Delta x} \Delta y L (T_i - T_k);$$

- для вертикального стержня

$$Q_{ik} = \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L (T_i - T_k);$$

- для любого стержня

$$Q_{ik} = \lambda L (T_i - T_k). \quad (2.1)$$

При этом могут иметь место различные схемы прохождения тепла через ячейку релаксации.

1. Тепло идет от точки 1 к точке 0, а от точки 0 расходится в направлении точек 2, 3, 4. Уравнение баланса тепла имеет вид  $Q_{10} = Q_{02} + Q_{03} + Q_{04}$ . Согласно (2.1)

$$\lambda L (T_1 - T_0) = \lambda L (T_0 - T_2) + \lambda L (T_0 - T_3) + \lambda L (T_0 - T_4),$$

откуда  $T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4}$ .

2. Тепло идет от точек 1 и 2 к точке 0, а от точки 0 расходится к точкам 3 и 4. Уравнение баланса имеет вид:  $Q_{10} + Q_{20} = Q_{03} + Q_{04}$ , или

$$\lambda L (T_1 - T_0) + \lambda L (T_2 - T_0) = \lambda L (T_0 - T_3) + \lambda L (T_0 - T_4),$$

откуда  $T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4}$ .

3. Тепло идет от точек 1, 2, 3, 4 к точке 0 и там взаимно уничтожается (при такой схеме потоки тепла условно подразделяются на положительные и отрицательные в зависимости от направления течения тепла). Уравнение баланса тепла имеет вид:  $Q_{10} + Q_{20} + Q_{30} + Q_{40} = 0$ ,

или  $\lambda L (T_1 - T_0) + \lambda L (T_2 - T_0) + \lambda L (T_3 - T_0) + \lambda L (T_4 - T_0) = 0$ ,

откуда  $T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4}$ .

Таким образом, какова бы ни была схема прохождения тепла, температура в узле квадратной релаксационной ячейки всегда равна среднему арифметическому значению из температур, окружающих узловую точку. То есть для каждой узловой точки релаксационной решетки существует *закон релаксации*:

$$\Delta P = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} - T_0 = 0. \quad (2.2)$$

Принцип релаксации заключается в следующем:

1. Основываясь на существующем объеме знаний, приближенно задают значения температур в узлах решетки.
2. Это приближение проверяется от точки к точке, в соответствии с требованием закона релаксации, после чего устанавливаются точки, в которых наблюдается наибольшее отклонение.
3. Начиная с мест наибольшего отклонения, вносятся исправления, чтобы удовлетворить закону релаксации.
4. Эти исправления в свою очередь вызывают новые отклонения в соседних точках решетки, и возникает необходимость в повторной коррекции.
5. Повторная коррекция каждый раз вносится последовательно в порядке убывающих отклонений и продолжается до тех пор, пока численные значения по всей сетке не будут приведены во взаимное соответствие.

В качестве примера для расчета расхода тепла методом релаксации выберем кладку квадратного сечения, общий вид и расчетный участок которого приведен на рис. 2.5. Все численные операции расчета проводятся по формулам (2.1) и (2.2).

При этом имеется в виду:

- 1) максимальная температура системы одинакова по всей внутренней поверхности кладки, а минимальная – по всей внешней;
- 2) размер сечения кладки  $L \gg 7\Delta x = 7\Delta y$ ;
- 3) в силу симметрии достаточно определить температуры точек  $a, b, c$ , а расход тепла – через одну восьмую часть кладки;
- 4) для предварительного первого расчета целесообразно температуру в точках  $a, b, c$  сечения кладки, принять одинаковой, т.е. средней между минимальным и максимальным значением в системе;
- 5) ход каждой операции рационально заносить в табл. 2.1.

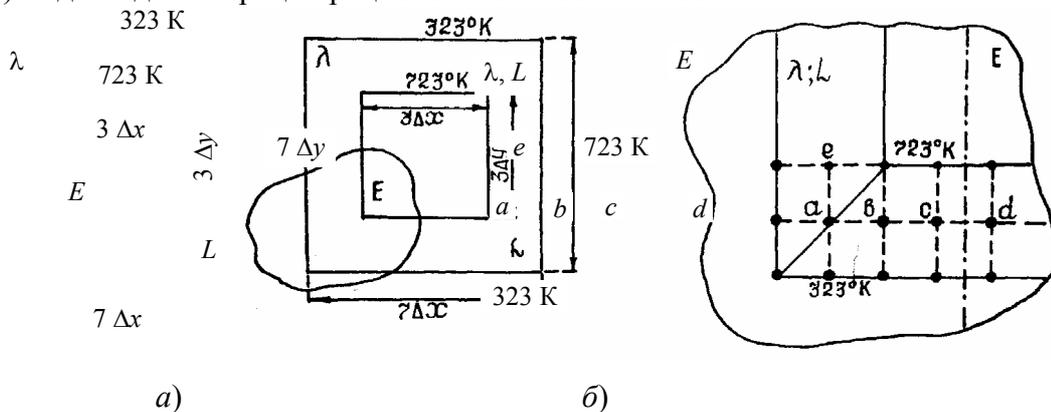


Рис. 2.5. Общий вид (а) и расчетный участок (б) кладки по методу релаксации

### 2.1. Расчетные данные расхода тепла

| a        |            | b        |            | c        |            |
|----------|------------|----------|------------|----------|------------|
| $T_0, K$ | $\Delta P$ | $T_0, K$ | $\Delta P$ | $T_0, K$ | $\Delta P$ |



$$(M) \left\{ \begin{array}{l} B_1 + C_1 + \dots + D_1 < 1, \\ B_2 + C_2 + \dots + D_2 < 1, \\ \dots\dots\dots \\ B_n + C_n + \dots + D_n < 1. \end{array} \right.$$

В начале задают наиболее вероятные значения  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  (нулевая итерация), после чего производят их подстановку в правую сторону системы (N). Слева находят  $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$  (первая итерация). Результаты первой итерации подставляют в правую сторону системы (N). Слева находят  $x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}$  (вторая итерация). Результаты второй итерации снова подставляют в правую часть системы (N) и т.д.

Итерационные действия могут быть приостановлены после того, как проявят себя следующие признаки:

- 1) значения расчетов последующей итерации, незначительно отличаются от предыдущей итерации, что является необходимым, но недостаточным признаком завершения расчета;
- 2) в системе уравнения (N) всюду соблюдается тождество, что является вполне достаточным признаком завершения расчетов.

Применительно к процессам теплопроводности метод последовательных приближений может быть интерпретирован так:

- 1) сечение тела разбивается итерационной решеткой на отдельные ячейки (как в методе релаксации);
- 2) все точки пересечения нумеруются по порядку;
- 3) составляется тепловой баланс для всех узловых точек в предположении, что весь процесс теплопроводности концентрируется в стержнях получившейся итерационной решетки;
- 4) уравнение баланса тепла преобразовывается так, чтобы неизвестные температуры вошли в систему уравнений, аналогичную форме (N).

В качестве примера для расчета расхода тепла указанным методом выберем кладку квадратного сечения, общий вид и расчетный участок которого приведен на рис. 2.5. Ввиду симметрии уравнение теплового баланса необходимо составить для точек  $a, b, c$ , как в методе релаксации:

$$Q_{ea} + Q_{ba} + Q_{323a} + Q_{323a} = 2Q_{ba} + 2Q_{323a} = 0,$$

$$Q_{ab} + Q_{cb} + Q_{323b} + Q_{723b} = 0,$$

$$Q_{bc} + Q_{dc} + Q_{323c} + Q_{723c} = 0.$$

С учетом (2.1)

$$2\lambda L(T_b - T_a) + 2\lambda L(323 - T_a) = 0,$$

$$\lambda L(T_a - T_b) + \lambda L(T_c - T_b) + \lambda L(323 - T_b) + \lambda L(723 - T_b) = 0,$$

$$\lambda L(T_b - T_c) + \lambda L(T_d - T_c) + \lambda L(323 - T_c) + \lambda L(723 - T_c) = 0.$$

Так как  $T_d = T_c$ , то  $\lambda L(T_d - T_c) = 0$  и уравнение с тремя неизвестными приводится к форме (N):

$$T_a = 161,5 + 0,5T_b;$$

$$T_b = 261,5 + 0,25T_a + 0,25T_c;$$

$$T_c = 348,5 + 0,333T_b;$$

- нулевая итерация:

$$T_{a0} = 523 \text{ К}; \quad T_{b0} = 523 \text{ К}; \quad T_{c0} = 523 \text{ К};$$

- первая итерация:

$$T_{a1} = 161,5 + 0,5 \cdot 523 = 423 \text{ К};$$

$$T_{b1} = 261,5 + 0,25 \cdot 523 + 0,25 \cdot 523 = 522,5 \text{ К};$$

$$T_{c1} = 348,5 + 0,333 \cdot 523 = 522,5 \text{ К};$$

- вторая итерация:

$$T_{a2} = 161,5 + 0,5 \cdot 522,5 = 424 \text{ К};$$

$$T_{b2} = 261,5 + 0,25 \cdot 423 + 0,25 \cdot 522 = 498,5 \text{ К};$$

$$T_{c2} = 348,5 + 0,333 \cdot 522,5 = 523 \text{ К}.$$

Аналогично вычисляют следующие итерации, до требуемой точности:

- шестая итерация:

$$T_{a6} = 407,5 \text{ К}; \quad T_{b6} = 491,5 \text{ К}; \quad T_{c6} = 512,5 \text{ К};$$

- седьмая итерация:

$$T_{a7} = 406,5 \text{ К}; \quad T_{b7} = 491,5 \text{ К}; \quad T_{c7} = 512,5 \text{ К}.$$

Расчет расхода тепла проводят из условия, что от внутренней поверхности кладки к средней плоскости тепло приходит по двум стержням  $b$  и  $c$ :

$$Q_1 = Q'_b + Q'_c = \lambda L (723 - 491,5) + \lambda L (723 - 512,5) = 442\lambda L.$$

Это же количество теплоты за то же время уходит от средней плоскости к внешней поверхности кладки по трем стержням  $a$ ,  $d$  и  $c$ :

$$Q_2 = Q''_a + Q''_b + Q''_c = \lambda L (406,5 - 323) + \\ + \lambda L (491,5 - 323) + \lambda L (512,5 - 323) = 441,5\lambda L.$$

В среднем восьмая часть кладки теряет  $Q_{\text{ср}} = 0,5 (Q_1 + Q_2) = 441,75\lambda L$ , Вт. Полный расход тепла расчетного участка кладки  $Q_{\text{общ}} = 8Q_{\text{ср}} = 3534\lambda L$ , Вт.

## 2.5. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ТЕПЛОвого ПОТОКА

Метод графического изображения теплового потока применяется для определения количества тепла передаваемого через тела сложной конфигурации, для которых не получено точных решений дифференциального уравнения теплопроводности. Обычно такой расчет носит приближенный характер, и основным требованием такого уровня является быстрота расчета и равнозначность подхода при оценке каждой рассматриваемой схемы. В качестве исходной предпосылки здесь используется известное положение о том, что независимо от конфигурации системы количество передаваемого тепла определяется совершенно одинаковым образом:

$$Q_i = \xi_i \lambda L (T_1 - T_2), \quad (2.3)$$

где  $\xi_i$  – фактор формы тела – величина, имеющая нулевую размерность и определяется только конфигурацией и геометрией сечения тела, через которое передается тепло;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала, Вт/(м · К);  $L$  – глубина объекта, м;  $T_1$  и  $T_2$  – температуры на границах сечения, К.

Нахождение фактора формы тела, по существу, завершает решение вопроса по определению количества тепла передаваемого через тело сложной конфигурации. Если воспользоваться основным законом теплопроводности, то для тел различной конфигурации количество теплоты

$$dQ_i = -\lambda \frac{dT}{dn} L dS = -\frac{dT}{dn} L \lambda dS \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2},$$

а полное количество передаваемого тепла через тело сложной конфигурации

$$Q_i = \int -\frac{dT}{dn} dS \frac{1}{T_1 - T_2} \lambda L (T_1 - T_2).$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (2.3), можно заключить, что аналитическое выражение фактора формы связано с интегрированием:

$$\xi_i = \frac{1}{T_1 - T_2} \int -\frac{dT}{dn} dS.$$

Ранее, на основе строгого решения дифференциального уравнения теплопроводности, были получены функции распределения температуры по толщине плоской и цилиндрической стенок:

$$T_{\text{пл}} = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} n; \quad \frac{dT_{\text{пл}}}{dn} = -\frac{T_1 - T_2}{\delta}; \quad dS = dn;$$

$$T_{\text{ц}} = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{n}{r_1}; \quad \frac{dT_{\text{ц}}}{dn} = -\frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{n}; \quad dS = n d\varphi.$$

Следовательно,

$$\xi_{\text{пл}} = \frac{1}{\delta} \int_0^h dn = \frac{h}{\delta}; \quad (2.4)$$

$$\xi_{\text{ц}} = \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.5)$$

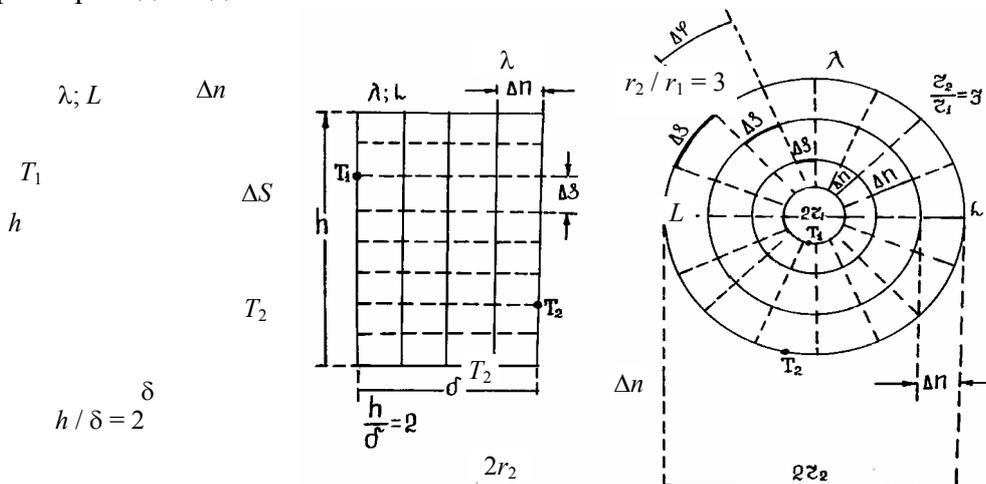
Таким образом, аналитическое выражение фактора формы тела зависит от предварительного знания температурного поля. Поэтому для тел сложного профиля определение фактора формы аналитическим путем не представляется возможным. Остаются приближенные способы, среди которых наибольшее распространение получил метод графического изображения теплового потока.

Идею графического определения фактора формы тела целесообразно иллюстрировать на примере плоской и цилиндрической стенок (рис. 2.6), а результат приближения легко проверить с помощью зависимостей (2.4) и (2.5).

Линии тока тепла, показанные пунктиром на рис. 2.6 образуют трубки тока тепла. Размеры и форма трубок тока должны быть выдержаны так, чтобы через каждую трубку тока проходило одинаковое количество тепла  $\Delta Q_i$ :

$$\Delta Q_i = \frac{Q_i}{N_m}, \quad (2.6)$$

где  $Q_i$  – полное количество тепла, проходящее через стенку;  $N_m$  – число трубок тока, через каждую из которых проходит одинаковое количество тепла.



а)

б)

Рис. 2.6. Общая картина распространения тепла в плоской (а) и цилиндрической (б) стенках

Выполнение условия возлагается на субъективные ощущения самого исполнителя и следует ожидать, что интуитивное выполнение этого требования внесет некоторый элемент ошибки. Сплошными линиями изображаются изотермы и их наносят с таким расчетом, чтобы приросты температуры между каждыми двумя изотермами были одинаковыми:

$$\Delta T_i = -\frac{T_1 - T_2}{N_n}, \quad (2.7)$$

где  $(T_1 - T_2)$  – полный перепад температур;  $N_n$  – число приростов температур.

Выполняя условие (2.7), необходимо соблюдать закон ортогональности между изотермами и линиями тока тепла, т.е. при своем пересечении они должны образовывать прямолинейные или криволинейные квадраты. Естественно ожидать, что графическое выполнение ортогональности и криволинейных квадратов внесет некоторый элемент ошибки. Действительно,

$$\Delta Q_i = -\lambda \left( \frac{\Delta T}{\Delta n} \right)_i L (\Delta S)_i,$$

где  $\lambda, L$  – постоянные параметры системы;  $\Delta Q_i$  – величина постоянная, в соответствии с предварительным условием (2.6).

Если теперь принять  $\left( \frac{\Delta S}{\Delta n} \right) = f(n) = 1$ , то обеспечивается  $\Delta T_i = \text{const}$  и

$$\Delta Q_i = -\lambda L (\Delta T)_i. \quad (2.8)$$

Выполняя подстановку (2.7) и (2.8) в выражение (2.6), рассчитывается полное количество передаваемого тепла через тело сложной конфигурации

$$Q_i = \frac{N_m}{N_n} \lambda L (T_1 - T_2). \quad (2.9)$$

Из сопоставления (2.3) и (2.9) следует: фактор формы любого тела определяется как отношение числа трубок тока к числу приростов температуры:

$$\xi_i = \left( \frac{N_m}{N_n} \right)_i. \quad (2.10)$$

Причем для пластин, в соответствии с рис. 2.6, *a* и формулой (2.4)

$$\xi_{\text{п}} = \frac{N_m}{N_n} = \frac{8}{4} = 2; \quad \xi_{\text{п}} = \frac{h}{\delta} = 2.$$

Для цилиндра, в соответствии с рис. 2.6, *б* и формулой (2.5)

$$\xi_{\text{ц}} = \frac{N_m}{N_n} = \frac{16}{3} = 5,33; \quad \xi_{\text{ц}} = \frac{2\pi}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 5,7.$$

Таким образом, метод графического изображения теплового потока заключается в следующем:

- 1) в масштабе изображается исследуемое сечение;
- 2) от руки зарисовываются линии теплового потока с максимально возможным соблюдением условия (2.6);
- 3) от руки зарисовываются изотермические линии с максимально возможным соблюдением ортогональности и криволинейных квадратов;
- 4) фактор формы тела определяется как отношение (2.10);
- 5) температурное поле рассчитывается путем вычитания от  $T_1$  или путем прибавления к  $T_2$  соответствующего числа одинаковых приростов температуры  $\Delta T$ ;
- 6) расход тепла рассчитывается в соответствии с выражением (2.9).

В качестве примера для расчета расхода тепла методом графического изображения теплового потока выберем кладку квадратного сечения, общий вид и расчетный участок которого приведен на рис. 2.7. Ввиду симметрии графические построения достаточно выполнить для восьмой части кладки. Число трубок тока  $N_m = 8$ ; число приростов температур  $N_n = 8$ ; полный перепад температур  $(T_1 - T_2) = 723 - 323 = 400$  К; фактор формы тела равен  $\xi = \frac{N_m}{N_n} = \frac{8}{8} = 1$ , приросты температуры  $|\Delta T| = -\frac{T_1 - T_2}{N_n} = \frac{723 - 323}{8} = 50$  К.

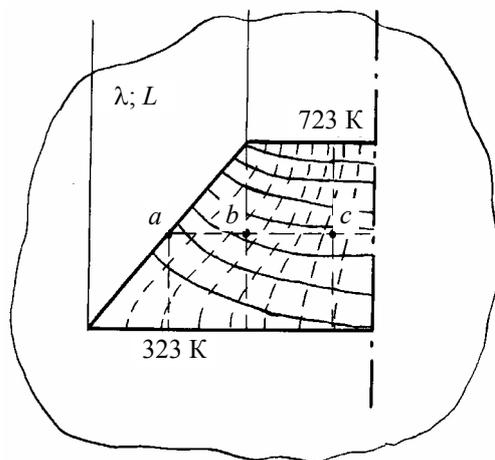
Температуры  $T_a$ ,  $T_b$  и  $T_c$  рассчитываются путем вычитания от  $T_1$  или путем прибавления к  $T_2$  соответствующего числа прироста температуры  $\Delta T$ :

$$T_a = T_1 - 6,2\Delta T = 723 - 6,2 \cdot 50 = 413 \text{ К};$$

$$T_b = T_1 - 4,8\Delta T = 723 - 4,8 \cdot 50 = 483 \text{ К};$$

$$T_c = T_1 - 4,2\Delta T = 723 - 4,2 \cdot 50 = 513 \text{ К}.$$

**Рис. 2.7. Расчет-  
ный  
участок кладки  
по  
методу графиче-  
ского  
изображения  
теплового потока:**



$$N_m = 8, N_n = 8,$$

$$(T_1 - T_2) = 400 \text{ K}$$

В среднем одна восьмая часть кладки теряет

$$Q_{\text{ср}} = \xi \lambda L (T_1 - T_2) = 1 \cdot \lambda L (723 - 323) = 440 \lambda L, \text{ Вт.}$$

Полный расход тепла расчетного участка кладки

$$Q_{\text{общ}} = 8 Q_{\text{ср}} = 3520 \lambda L, \text{ Вт.}$$

## 2.6. ЭЛЕКТРОТЕПЛОВАЯ АНАЛОГИЯ

Известно, что распространение тепла и электричества описывается совершенно аналогичными по форме дифференциальными уравнениями, в силу чего они решаются с одинаковой степенью трудности. Однако экспериментальное определение поля электрического потенциала и распространения электричества гораздо проще. Поэтому и возникает вопрос об использовании электротепловой аналогии (рис. 2.8). Распространение тепла в двух измерениях описывается дифференциальным уравнением Лапласа:

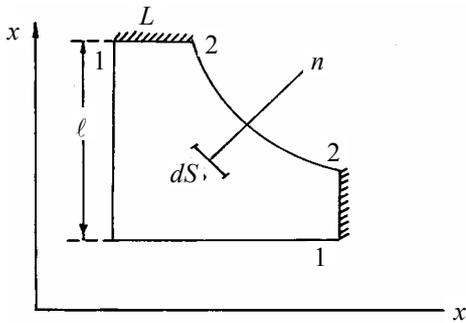
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\ell^2}{(T_1 - T_2)} \left[ \frac{\partial^2 (T - T_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (T - T_2)}{\partial y^2} \right] = 0.$$

Введем обозначения:

$$X = \frac{x}{\ell}; \quad Y = \frac{y}{\ell}; \quad \Theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}. \quad (2.11)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} = 0. \quad (2.12)$$



**Рис. 2.8. Сечения тела сложной формы:**  
 1-1 и 2-2 – контуры тела сложной конфигурации, где установлены медные шины с электрическим потенциалом;  
 $L$  – глубина тела

Количество тепла, проходящего через элементарную площадку,

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} ds L \quad \text{или} \quad dQ = -\lambda \frac{\partial(T - T_2)}{\partial n} ds L \frac{\ell}{\ell} \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2}.$$

Если обозначить  $N = \frac{n}{\ell}$ ,  $S = \frac{s}{\ell}$ , то

$$dQ = -\frac{\partial \Theta}{\partial N} dS \lambda L (T_1 - T_2),$$

откуда

$$Q = \left[ \int -\frac{\partial \Theta}{\partial N} dS \right] \lambda L (T_1 - T_2) = \xi_T \lambda L (T_1 - T_2),$$

$$\xi_T = \left[ \int -\frac{\partial \Theta}{\partial N} dS \right]. \quad (2.13)$$

Распространение электричества в двух измерениях также описывается дифференциальным уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

а количество электричества, проходящего через элементарную площадь,

$$dJ = -\mathfrak{E} \frac{\partial U}{\partial n} dS L.$$

Действуя точно таким же образом, можно получить

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0; \quad J = \xi_3 \mathfrak{E} L (U_1 - U_2), \quad (2.14)$$

соответственно,

$$\xi_3 = \left[ \int -\frac{\partial U}{\partial N} dS \right]; \quad U = \frac{U - U_2}{U_1 - U_2}. \quad (2.15)$$

Так как предполагается абсолютное геометрическое подобие тепловой и электрической систем ( $N_T = N_3$ ;  $S_T = S_3$ ;  $X_T = X_3$ ;  $Y_T = Y_3$ ) и если  $Q = U$ , то из выражений (2.13) и (2.15) следует  $\xi_T = \xi_3$ . Само равенство теплового и электрических потенциалов в их безразмерной форме вытекает из аналогии дифференциальных уравнений (2.12) и (2.14), для которых общие решения должны описываться функциями одного и того же вида:

$$\Theta = f(X, Y, C, D); \quad U = f(X, Y, E, M).$$

Согласно (2.11) и (2.12) для тепловой схемы и контуров тела, обозначенных номером 1 и 2

$$\Theta_1 = f(X_1, Y_1, C, D) = 1, \quad \Theta_2 = f(X_2, Y_2, C, D) = 0.$$

То же для электрической схемы с учетом (2.16):

$$U_1 = f(X_1, Y_1, E, M) = 1, \quad U_2 = f(X_2, Y_2, E, M) = 0.$$

Все эти уравнения позволяют доказать равенство констант интегрирования ( $C = E$ ;  $D = M$ ), а следовательно, и равенство безразмерных потенциалов  $\Theta = U$ . Таким образом  $\xi_T = \xi_3 = \xi$ .

Для технического выполнения метода электротепловой аналогии и определения количества тепла, проходящего через тело сложной конфигурации, методом электротепловой аналогии требуется следующее.

1) Из электропроводной бумаги вырезают модель-сечение, подобное исследуемому тепловому оригиналу (например, как на рис. 2.10),

а также бумага – форма в виде прямоугольника. Геометрическая конфигурация электрической модели должна быть выполнена в строгом соответствии с геометрической конфигурацией образца без каких-либо излишеств электропроводной бумаги, ибо электропроводность и толщина бумаги может в какой-то мере зависеть от выпущенной партии и положения ее в рулоне.

2) По контурам электропроводной бумаги для модели и прямоугольника, равномерно и достаточно плотно (для обеспечения контакта) устанавливаются медные шины с электрическим потенциалом.

3) Вначале определяется фактор формы  $\xi_{\text{п}}$  электропроводной бумаги прямоугольной формы, путем измерения линейкой ее геометрических параметров (размеров) – высоты  $h$  и ширины  $\delta$ . Фактор формы определяется как отношение  $\xi_{\text{п}} = h / \delta$ .

4) Замеряют показание потенциала  $U_1$  при постоянном значении напряжения в системе (при нейтральном положении тумблера).

5) Замеряют значения тока  $J$ , напряжения  $U$  на прямоугольнике (при правом положении тумблера) и вычисляют  $(\partial L_3) = \frac{J_{\text{п}}}{\xi_{\text{п}}(U_1 - U_{2\text{п}})}$ .

6) Замеряют значения тока  $J$ , напряжения  $U$  на модели (при левом положении тумблера) и вычисляют  $\xi_{\text{мод}} = \frac{J_{\text{мод}}}{(\partial L_3)(U_1 - U_{2\text{мод}})}$ .

7) Количество передаваемого тепла в теле-оригинале (т) от контура  $T_1$  до контура  $T_2$  находится простым расчетом:  $Q_{\text{т}} = \xi_{\text{мод}} \lambda_{\text{т}} L_{\text{т}} (T_1 - T_2)$ , Вт.

## 2.7. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЕ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ СТЕНКИ

Формулы стационарной теплопроводности применимы для процессов теплопередачи через однослойные и многослойные плоские и цилиндрические стенки. Распределение температуры в плоской двухслойной и цилиндрической стенке, омываемой горячей и холодной жидкостями, показано на рис. 2.9.

Горячая жидкость имеет температуру  $T_{f1}$  и коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1$ , а холодная жидкость – температуру  $T_{f2}$  и коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$ . Толщина каждого слоя плоской стенки  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , а диаметры двухслойной цилиндрической стенки  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$ . Коэффициенты теплопроводности материалов соответственно равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Температуры на границе каждого слоя обозначены  $T_{w1}$ ,  $T_{w2}$ ,  $T_{w3}$ .

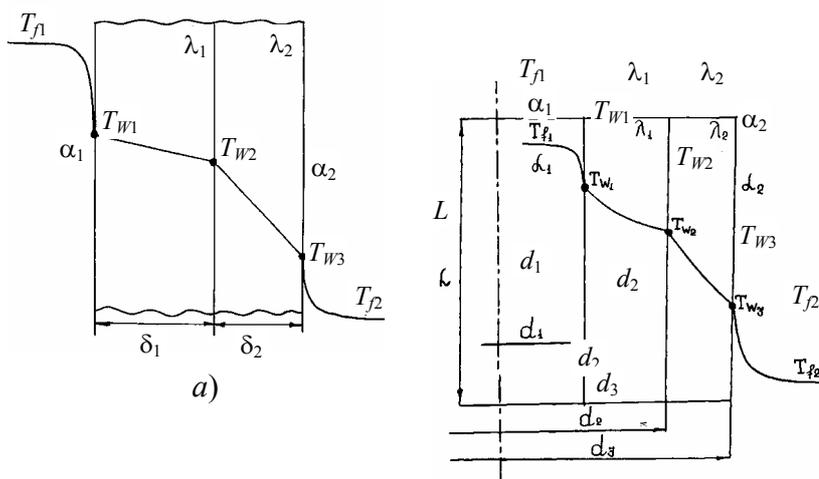


Рис. 2.9. Распределение температуры в плоской двухслойной (а) и цилиндрической (б) стенке, омываемой горячей и холодной жидкостями.

**ваемой  
горячей и холодной жидко-  
стями**

Высота и глубина многослойной плоской стенки (рис. 2.9, а), а также длина  $L$  цилиндрической стенки (рис. 2.9, б) намного больше их общей толщины. Тепловой контакт между слоями в стационарном режиме можно считать идеальным. Поэтому очевидно, что все тепло вначале передается от горячей жидкости к стенке, затем проходит через все слои и в том же количестве будет передано холодной жидкости.

Теплопередача от горячей жидкости к холодной через многослойную плоскую стенку имеет вид:

$$Q = \alpha_1 F (T_{f1} - T_{W1}) = \frac{F (T_{f1} - T_{W1})}{R_{\alpha 1}};$$

$$Q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} F (T_{W1} - T_{W2}) = \frac{F (T_{W1} - T_{W2})}{R_1};$$

$$Q = \frac{\lambda_2}{\delta_2} F (T_{W2} - T_{W3}) = \frac{F (T_{W2} - T_{W3})}{R_2};$$

$$Q = \alpha_2 F (T_{W3} - T_{f2}) = \frac{F (T_{W3} - T_{f2})}{R_{\alpha 2}}.$$

Следовательно, имеется четыре уравнения, включающие четыре неизвестные физические величины ( $Q, T_{W1}, T_{W2}, T_{W3}$ ). Из этих уравнений

$$Q = \frac{F (T_{f1} - T_{f2})}{R_{\alpha 1} + R_1 + R_2 + R_{\alpha 2}}, \text{ Вт.} \quad (2.16)$$

Если количество слоев будет  $n$ , то

$$Q = \frac{F (T_{f1} - T_{f2})}{R_{\alpha 1} + \sum_1^n R_i + R_{\alpha 2}} = k F (T_{f1} - T_{f2}) = \frac{F (T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{k}}. \quad (2.17)$$

Здесь

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_1^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}), \quad (2.18)$$

характеризует интенсивность процесса теплопередачи через плоские системы и носит название *коэффициента теплопередачи*. Для плоской системы это количество тепла (Дж), передаваемое через единицу поверхности ( $\text{м}^2$ ) в единицу времени (с) при полном температурном напоре в один градус. Обратное значение коэффициента теплопередачи

$$R_{\Pi} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_1^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}, \text{ (м}^2 \cdot \text{К)}/\text{Вт}, \quad (2.19)$$

называется *термическим сопротивлением теплопередачи многослойной плоской системы* и характеризует температурный напор, приходящийся на единицу удельного расхода тепла.

$R_{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ ,  $R_i = \sum_1^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$  – термическое сопротивление теплоотдачи плоской системы и теплопроводности

многослойной плоской стенки.

Удельное количество тепла для плоской системы  $q = Q / F$ , Вт/м<sup>2</sup>.

Температура на границах двухслойной, плоской системы равна:

$$T_{W1} = T_{f1} - k(T_{f1} - T_{f2})R_{\alpha1},$$

$$T_{W2} = T_{f1} - k(T_{f1} - T_{f2})(R_{\alpha1} + R_1),$$

$$T_{W3} = T_{f1} - k(T_{f1} - T_{f2})(R_{\alpha1} + R_1 + R_2).$$

Когда число слоев равно  $n$ , то для любого плоского слоя по аналогии получаем:

$$T_{Wi} = T_{f1} - k(T_{f1} - T_{f2}) \sum_0^i (R_{\alpha1} + R_i). \quad (2.20)$$

**Теплопередача от горячей жидкости к холодной через многослойную цилиндрическую стенку**

имеет вид:

$$Q = \alpha_1 \pi d_1 L (T_{f1} - T_{W1}) = \frac{\pi L (T_{f1} - T_{W1})}{R_{\alpha1}};$$

$$Q = \frac{\pi L (T_{W1} - T_{W2})}{\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}} = \frac{\pi L (T_{W1} - T_{W2})}{R_1};$$

$$Q = \frac{\pi L (T_{W2} - T_{W3})}{\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}} = \frac{\pi L (T_{W2} - T_{W3})}{R_2};$$

$$Q = \alpha_2 \pi d_3 L (T_{W3} - T_{f2}) = \frac{\pi L (T_{W3} - T_{f2})}{R_{\alpha_2}},$$

откуда

$$Q = \frac{\pi L (T_{f1} - T_{f2})}{R_{\alpha 1} + R_1 + R_2 + R_{\alpha 2}}, \text{ Вт.} \quad (2.21)$$

Если цилиндрических слоев будет  $n$ , то

$$Q = \frac{\pi L (T_{f1} - T_{f2})}{R_{\alpha 1} + \sum_{i=1}^n R_{i1} + R_{\alpha 2}} = k_l \pi L (T_{f1} - T_{f2}) = \frac{\pi L (T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{k_l}}, \quad (2.22)$$

где

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}, \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad (2.23)$$

характеризует интенсивность процесса теплопередачи через цилиндрические системы и носит название *коэффициента теплопередачи*. Для цилиндрической системы это количество тепла (Дж) в  $\pi$  раз меньше того, которое передается единицей длины цилиндра (м) в единицу времени (с) при разности температур в один градус. Обратное значение коэффициента теплопередачи

$$R_L = \frac{1}{k_L} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}, \text{ (м} \cdot \text{К)/Вт} \quad (2.24)$$

называется *термическим сопротивлением теплопередачи многослойной цилиндрической системы* и характеризует температурный напор, приходящийся на единицу удельного расхода тепла, отнесенного к числу  $\pi$ .

$$R_{\alpha} = \frac{1}{\alpha d}, \quad R_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} - \text{термическое сопротивление теплоотдачи стенки и теплопроводности}$$

многослойной цилиндрической стенки.

Для цилиндрической стенки удельное количество тепла определяется отношением  $q_L = Q / L$ , Вт/м.

Когда число слоев равно  $n$ , то для любого цилиндрического слоя по аналогии получаем

$$T_{Wi} = T_{f1} - k (T_{f1} - T_{f2}) \sum_0^i (R_{\alpha 1} + R_i). \quad (2.25)$$

### 3. СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ ОСОБЫХ УСЛОВИЯХ

### 3.1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВНУТРЕННЕМ ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИИ

Явление стационарного распространения тепла в неограниченной пластине ( $2R \ll L; h$ ) при равномерном внутреннем тепловыделении ( $W = \text{const}$ ) описывается дифференциальным уравнением теплопроводности в форме одномерного уравнения Пуассона (рис. 3.1):

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{W}{\lambda} = 0,$$

откуда

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{W}{\lambda}x + C_1, \quad T = -\frac{W}{2\lambda}x^2 + C_1x + C_2.$$

При симметричных условиях охлаждения имеет место равенство

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

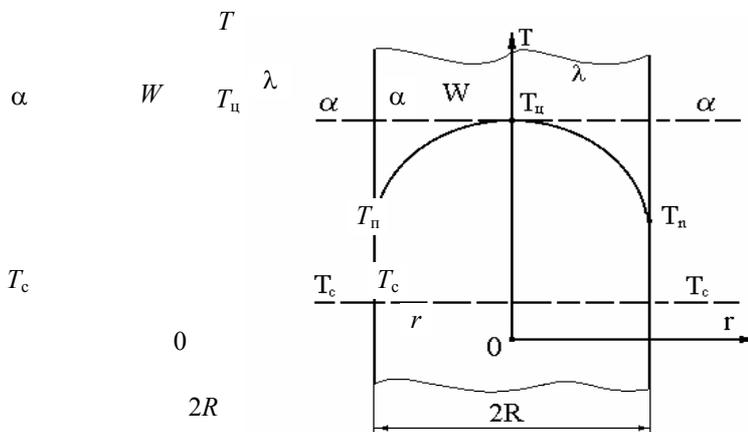


Рис. 3.1. Распределение температуры в пластине при внутреннем тепловыделении и симметричных условиях охлаждения с боковых поверхностей

Это означает  $C_1 = 0$ . Вторая константа интегрирования связана условиями на границе: поток тепла, подведенный изнутри объема к поверхности путем теплопроводности, равен потоку тепла, отведенному от поверхности в окружающую среду путем конвекции:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=R} = \alpha(T_{\text{п}} - T_c) \quad \text{или} \quad WR = \alpha \left[-\frac{W}{2\lambda}R^2 + C_2 - T_c\right].$$

Константа интегрирования  $C_2 = \frac{WR}{\alpha} + \frac{WR^2}{2\lambda} + T_c$ .

Распределение температуры в неограниченной пластине

$$T = T_c + \frac{WR^2}{2\lambda} \left[1 + \frac{2\lambda}{\alpha R} - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right].$$

Распределение потока тепла:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = Wx; \quad q_{\text{п}} = WR.$$

Характерные температуры:

$$T_{\text{ц}} = C_2; \quad T_{\text{п}} = T_{\text{с}} + \frac{WR}{\alpha}; \quad T_{\text{ц}} - T_{\text{п}} = \frac{WR^2}{2\lambda}.$$

### 3.2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВНУТРЕННЕМ ТЕПЛО ВЫДЕЛЕНИИ

Явление стационарного распространения тепла в бесконечном цилиндре ( $2R \ll L$ ) при равномерном внутреннем тепловыделении ( $W = \text{const}$ ) описывается дифференциальным уравнением теплопроводности в форме одномерного уравнения Пуассона (рис. 3.2)

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{W}{\lambda} = 0.$$

После подстановки  $u = \frac{dT}{dr}$  получим  $\frac{du}{dr} + \frac{1}{r}u = -\frac{W}{\lambda}$  или  $rdu + udr = d(ur) = -\frac{W}{\lambda}rdr$  и тогда  $u = \frac{dT}{dr} = -\frac{W}{2\lambda}r + \frac{C_1}{r}$ .

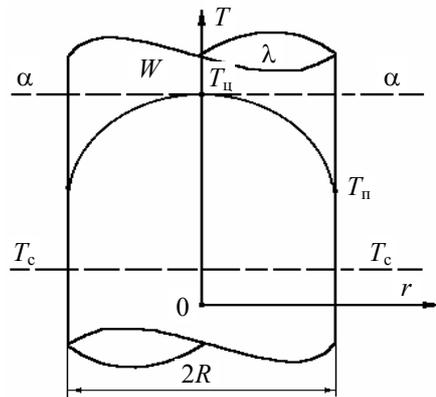


Рис. 3.2. Распределение Температуры в цилиндре при равномерном внутреннем тепловыделении и симметричных условиях охлаждения

При симметричных условиях охлаждения  $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=0} = 0$ . Это означает  $C_1 = 0$  и  $T = -\frac{W}{4\lambda}r^2 + C_2$ .

Из условия на границе тела

$$-\lambda \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=R} = \alpha(T_{\text{п}} - T_{\text{с}}), \quad \frac{WR}{2} = \alpha \left(-\frac{WR^2}{4\lambda} + C_2 - T_{\text{с}}\right)$$

находится вторая константа интегрирования  $C_2 = \frac{WR}{2\alpha} + \frac{WR^2}{4\lambda} + T_{\text{с}}$ .

Распределение температуры в бесконечном цилиндре будет иметь вид

$$T = T_{\text{с}} + \frac{WR^2}{4\lambda} \left[1 + \frac{2\lambda}{\alpha R} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

Распределение потока тепла:  $q = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{W}{2}r$ ;  $q_{\text{п}} = \frac{WR}{2}$ .

Характерные температуры:

$$T_{ц} = C_2; \quad T_{п} = T_c + \frac{WR}{2\alpha}; \quad T_{ц} - T_{п} = \frac{WR^2}{4\lambda}.$$

### 3.3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СТЕРЖНЯХ

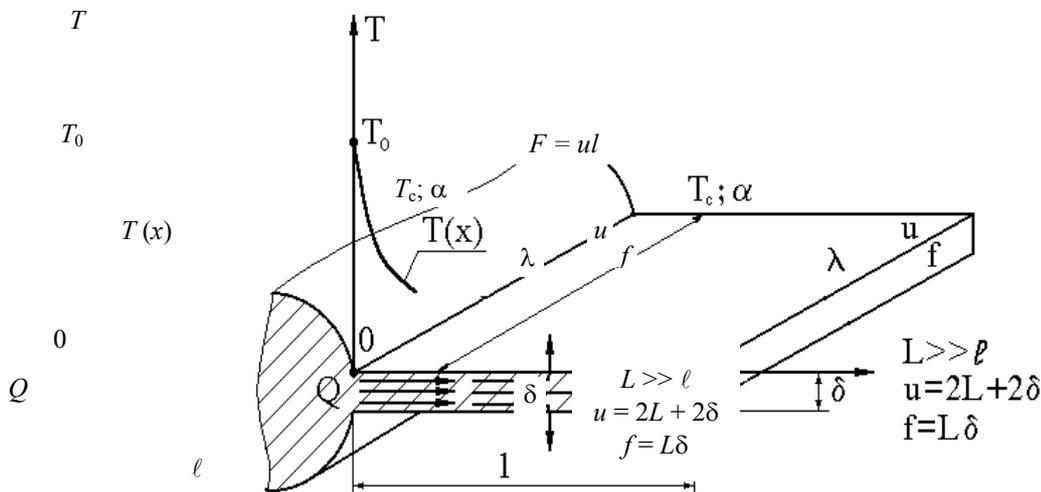
Анализируя тепловую работу стержня или ребра охлаждения, обычно отмечают два случая распространения тепла в системе (рис. 3.3).

Если поток тепла не достигает вершины  $\ell$  и успевает израсходоваться по пути через поверхность ( $ux$ ), то говорят о теплопроводности стержня бесконечной длины. Физически это означает, что температура вершины стержня оказывается равной температуре окружающей среды  $T_c$ .

Если поток тепла достигает вершины  $\ell$  и не успевает израсходоваться по пути через поверхность ( $ux$ ), то говорят о теплопроводности стержня конечной длины.

Согласно закону теплоотдачи с поверхности, элемент поверхности стержня ( $u dx$ ) теряет в окружающую среду тепло путем отдачи конвекцией:

$$dQ = \alpha u dx (T - T_c). \quad (3.1)$$



**Рис. 3.3. Прямой стержень постоянного сечения (ребро охлаждения):**

$Q_{x=0}$  – охлаждающая способность стержня;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей;  $T_0$  – температура у основания стержня;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала стержня

Формально можно считать, что оно поглощается отрицательным (воображаемым) источником внутри объема жидкости  $dQ = -Wfdx$ . Тогда

$$W = -\frac{\alpha u}{f} (T - T_c).$$

Для определения охлаждающей способности стержня может быть использован закон теплоотдачи с поверхности (3.1):

$$Q = \alpha F \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \vartheta dx = \alpha u \int_0^{\ell} (T - T_c) dx,$$

где  $F = u\vartheta$ ,  $\vartheta = T - T_c$  или закон теплопроводности через основание ребра:

$$Q = -\lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} f.$$

Как в том, так и в другом случае необходимо знать распределение температуры  $T = f(x)$ .  
Теплопроводность стержня бесконечной длины:

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-mx}, \quad Q = \alpha u \int_0^{\infty} \vartheta_0 e^{-mx} dx = \frac{\alpha u \vartheta_0}{m},$$

$$Q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} f = -\lambda \left( -\vartheta_0 m e^{-mx} \right)_{x=0} f = \lambda f m \vartheta_0.$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d}{dx} (\vartheta_0 e^{-mx}) = -\vartheta_0 m e^{-mx}.$$

Теплопроводность стержня конечной длины:

$$Q = -\lambda \left[ \vartheta_0 (-m) \frac{sh m(\ell - x)}{ch(m\ell)} \right]_{x=0} f, \quad Q_0 = \lambda m f \vartheta_0 th(m\ell),$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \vartheta_0 \frac{ch m(\ell - x)}{ch(m\ell)} \right] = -\vartheta_0 m \frac{sh[m(\ell - x)]}{ch(m\ell)}.$$

Обработка поверхности нагрева производится с целью интенсификации теплопередачи.

### 3.4. ТЕПЛОФИЗИКА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Для большинства веществ зависимость коэффициента теплопроводности от температуры достаточно слабая, что позволяет его усреднять в заданном интервале температур и оперировать им как постоянной величиной. Однако для некоторых материалов и веществ наблюдается некоторая зависимость коэффициента теплопроводности от температуры.

Для плоской стенки при стационарном тепловом режиме количество тепла, проникающее внутрь параллелепипеда (а также выделяемое внутри его объема), всегда равно количеству тепла, уходящему вовне (рис. 3.4, а, б):

$$dQ_A + dQ_W = dQ_B \quad \text{или} \quad -(dQ_B - dQ_A) + dQ_W = 0.$$

Уравнение теплового баланса для плоской стенки можно переписать:

$$-(q_B - q_A) dz dy + W dx dy dz = 0$$

или

$$-\frac{dq}{dx} + W = 0; \quad -\frac{d}{dx} \left( -\lambda \frac{dT}{dx} \right) + W = 0.$$

Если ввести подстановку

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\frac{d\Phi}{dx}; \quad \Phi = \int \lambda(T) dT,$$

в итоге получим

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right) + W = 0; \quad \frac{d^2\Phi}{dx^2} + W = 0.$$

Это дифференциальное уравнение известно как одномерное уравнение Пуассона, где в качестве потенциала фигурирует величина  $\Phi$ .

В частном случае при  $W = 0$  уравнение Пуассона вырождается в уравнение Лапласа  $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$ , а его решение имеет вид

$$\Phi = \Phi_1 - \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\delta} x;$$

$$\int \lambda(T) dT = \int \lambda(T_1) dT_1 - \frac{\int \lambda(T_1) dT_1 - \int \lambda(T_2) dT_2}{\delta} x.$$

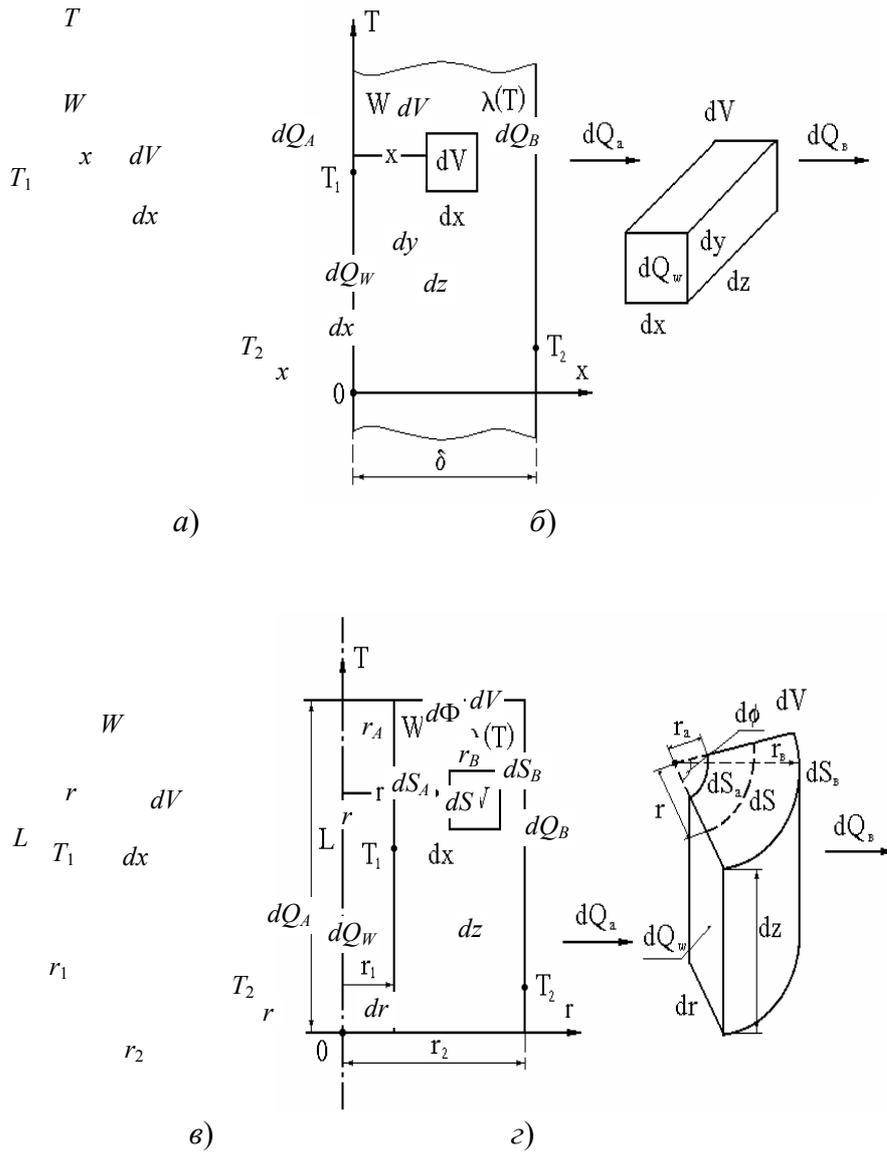


Рис. 3.4. Теплофизическая система плоской (а) и цилиндрической стенки (б), а также основные измерения элементарного объема параллелепипеда в декартовой системе координат (б) и элементарного объема в цилиндрической системе координат (з)

При линейной зависимости  $\lambda = \beta + kT$ , температурное поле находится после решения квадратичного уравнения

$$(\beta T + 0,5kT^2) = (\beta T_1 + 0,5kT_1^2) - \frac{(\beta T_1 + 0,5kT_1^2) - (\beta T_2 + 0,5kT_2^2)}{\delta} x.$$

Удельный тепловой поток  $q = -\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\delta}$ .

Для цилиндрической стенки (рис. 3.4, в, з) при стационарном тепловом режиме количество тепла, проникающее внутрь элементарного объема через поверхность  $dS_A dz$  (а также выделяемое внутри его), должно быть равным количеству тепла, уходящему вовне через поверхность  $dS_B dz$ :

$$dQ_A + dQ_W = dQ_B \quad \text{или} \quad -(dQ_B - dQ_A) + dQ_W = 0.$$

Уравнение теплового баланса можно переписать как

$$-(q_B r_B - q_A r_A) d\varphi dz + W r d\varphi dr dz = 0,$$

или

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(q r) + W = 0; \quad -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(-\lambda \frac{dT}{dr} r) + W = 0.$$

Введем подстановку  $q = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}$ ,  $\Phi = \int \lambda(T) dT$  и получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{d\Phi}{dr} r \right) + W = 0.$$

Последнее выражение известно как одномерное уравнение Пуассона в цилиндрических координатах, в котором в качестве потенциала фигурирует величина  $\Phi$ . В частном случае при  $W = 0$  оно переходит в уравнение Лапласа

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 0,$$

а его решение имеет вид

$$\Phi = \Phi_1 - \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}$$

или

$$\int \lambda dT = \int \lambda_1 dT_1 - \frac{\int \lambda_1 dT_1 - \int \lambda_2 dT_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}.$$

При экспериментальной зависимости  $\lambda = be^{kT}$ , температурное поле и количество тепла находится после логарифмирования последнего уравнения

$$e^{kT} = e^{kT_1} - \frac{e^{kT_1} - e^{kT_2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}; \quad Q = -\frac{d\Phi}{dr} 2\pi r L = \frac{\pi L (\Phi_1 - \Phi_2)}{\frac{1}{2} \ln \frac{d_2}{d_1}}.$$

### 3.5. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ФИЛЬТРАЦИИ

**Инфильтрация**  $G$ , характеризует количество холодной жидкости, проникающей сквозь капиллярно-пористую плоскую или цилиндрическую стенку, через единицу поверхности  $F$ , в единицу времени. Если при этих же условиях горячая жидкость протекает сквозь стенку в обратном

направлении, то такой процесс называется *эксфильтрацией*. Распределение температуры в плоской и цилиндрической стенке при инфильтрации показано на рис. 3.5.

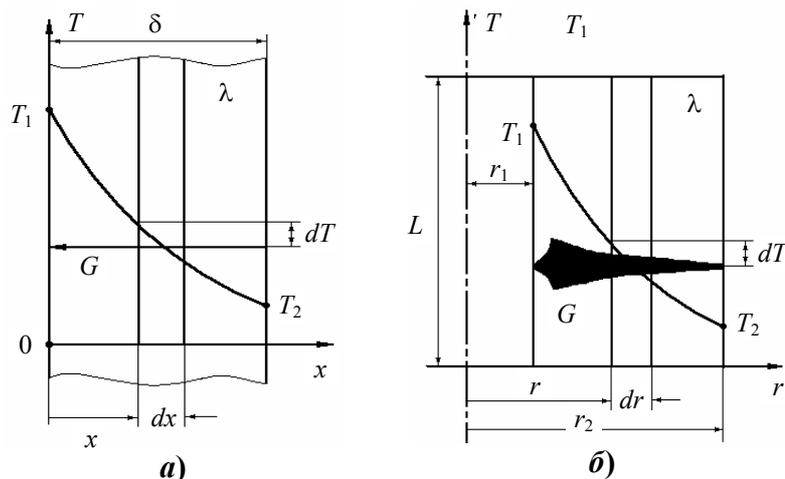


Рис. 3.5. Распределение температуры в плоской (а) и цилиндрической (б) стенке при инфильтрации

Количество тепла  $Q$ , поглощаемого в единицу времени протекающей сквозь плоскую стенку  $F$  жидкостью (отрицательный источник тепла) на участке пути  $dx$  (рис. 3.5, а), определяется по формуле

$$dQ_{\text{ж}} = -WdV = -WFdx,$$

где  $W$  – теплота, поглощаемая единицей объема  $V$ , в единицу времени.

С другой стороны, по закону теплофизики

$$dQ_{\text{ж}} = -cFGdT,$$

где  $G$  – удельная инфильтрация плоской стенки. Следовательно,

$$W = cG \frac{dT}{dx}.$$

Тогда дифференциальное уравнение Пуассона, описывающее явление теплопроводности, примет вид

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{W}{\lambda} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{cG}{\lambda} \frac{dT}{dx} = 0.$$

После введения обозначения  $P = \frac{cG}{\lambda}$ ,  $u = \frac{dT}{dx}$  оно перепишется в виде  $\frac{du}{dx} + Pu = 0$ , откуда

$$T = -\frac{D}{P}e^{-Px} + C; \quad T_1 = -\frac{D}{P} + C; \quad T_2 = -\frac{D}{P}e^{-P\delta} + C.$$

Окончательно имеем:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{1 - e^{-P\delta}} (1 - e^{-Px}); \quad q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda P \frac{T_1 - T_2}{1 - e^{-P\delta}} e^{-Px}.$$

Потери тепла:

$$Q = q(\delta)F = \lambda PF \frac{T_1 - T_2}{1 - e^{-P\delta}} e^{-P\delta} \quad \text{или} \quad Q = \frac{Q_{\text{ж}}}{e^{+P\delta} - 1}.$$

При эксфильтрации в плоской стенке температурная кривая будет выпуклой, а во всех полученных соотношениях знак впереди  $P$  изменится на обратный (внутренний источник тепла в этом случае будет положительным).

Количество тепла, поглощаемого в единицу времени протекающей сквозь капиллярно-пористую цилиндрическую стенку жидкостью (отрицательный источник тепла) на участке пути  $dr$  (рис. 3.5, б), может быть определено по формуле  $dQ_{\text{ж}} = -WdV = -WFdr$ .

С другой стороны,  $dQ_{\text{ж}} = -cFGdT$ . Следовательно,

$$W = cG \frac{dT}{dr} = \frac{c\rho}{2\pi rL} \frac{dT}{dr},$$

где  $G = \frac{\rho}{2\pi rL}$  – удельная инфильтрация;  $\rho$  – полная инфильтрация через цилиндрическую стенку.

Тогда дифференциальное уравнение Пуассона, описывающее явление, примет вид

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{W}{\lambda} = \frac{d^2T}{dr^2} + \left(1 + \frac{c\rho}{2\pi\lambda L}\right) \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0.$$

После обозначения  $P = 1 + \frac{c\rho}{2\pi\lambda L}$ ,  $u = \frac{dT}{dr}$  оно переписется в виде  $\frac{du}{dr} + P \frac{1}{r} u = 0$ , откуда

$$T = -D \frac{1}{(P-1)} \frac{1}{r_1^{(P-1)}} + C;$$

$$T_1 = -D \frac{1}{(P-1)} \frac{1}{r_1^{(P-1)}} + C;$$

$$T_2 = -D \frac{1}{(P-1)} \frac{1}{r_2^{(P-1)}} + C.$$

Окончательно имеем:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1^{(P-1)}} - \frac{1}{r_2^{(P-1)}}} \left( \frac{1}{r_1^{(P-1)}} - \frac{1}{r^{(P-1)}} \right),$$

$$Q(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L = \frac{\pi L (T_1 - T_2) (P-1)}{2\lambda \left( \frac{1}{r_1^{(P-1)}} - \frac{1}{r_2^{(P-1)}} \right)} \frac{1}{r^{P-1}}.$$

Потери тепла

$$Q(r_2) = \frac{2\pi\lambda L (T_1 - T_2) (P-1)}{\left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{(P-1)} - 1} = \frac{Q_{\text{ж}}}{\left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{(P-1)} - 1}.$$

При эксфильтрации в цилиндрической стенке температурная кривая может оказаться выпуклой. Ввиду того, что внутренний источник тепла в этом случае будет положительным, постоянная  $P$  во всех полученных соотношениях будет определяться как разность

$$P = 1 - \frac{c\rho}{2\pi\lambda L},$$

*В частном примере, когда  $\frac{c\rho}{2\pi\lambda L} = 1$ , распределение температуры в цилиндрической стенке становится прямолинейным, ибо при  $P = 0$  явление в цилиндрической стенке начинает описываться уравнением  $\frac{d^2T}{dr^2} = 0$ .*

#### 4. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

##### 4.1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Явление нестационарного распространения тепла в одномерном пространстве твердого тела описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

Любая функция  $T = f(x, \tau)$  будет решением этого уравнения, если при подстановке в него она даст тождество. Пусть  $T = U(\tau) V(x)$ . Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = U'(\tau) V(x), \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = U(\tau) V''(x).$$

После подстановки в дифференциальное уравнение получается

$$V(x)U'(\tau) = aV''(x)U(\tau) \quad \text{или} \quad \frac{U'(\tau)}{aU(\tau)} = \frac{V''(x)}{V(x)} = -k^2.$$

Переменные  $\tau$  и  $x$  являются независимыми друг от друга аргументами. Это означает, что величина  $-k^2$  может быть только постоянной. Тогда дифференциальное уравнение в частных производных (4.1) можно представить в виде системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$U'(\tau) + ak^2U(\tau) = 0, \quad V''(x) + k^2V(x) = 0,$$

которые будут иметь решения, соответственно,

$$U(\tau) = C_1 e^{-ak^2\tau} \quad \text{и} \quad V(x) = C_2 e^{-ikx} + C_3 e^{+ikx}.$$

Учитывая известные соотношения

$$e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx, \quad e^{+ikx} = \cos kx + i \sin kx,$$

можно записать  $V(x) = C_4 \cos kx + C_5 \sin kx$ . Тогда

$$T = D \cos(kx) e^{-ak^2\tau} + B \sin(kx) e^{-ak^2\tau} \quad (4.2)$$

есть общее решение дифференциального уравнения теплопроводности (4.1), а постоянные  $D$ ,  $B$ ,  $k$  определяются при более конкретной постановке задачи.

Если явление распространения тепла описывается дифференциальным уравнением в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (4.3)$$

то

$$T = DJ_0(kx) e^{-ak^2\tau} + BJ_1(kx) e^{-ak^2\tau}, \quad (4.4)$$

где  $J_0(kx)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $J_1(kx)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка.

Если явление распространения тепла описывается дифференциальным уравнением в сферической системе координат

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

то подстановкой  $Z = (rT)$  его можно свести к уравнению  $\frac{\partial Z}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}$ , решение которого уже известно.

Пластина, равномерно нагретая до температуры  $T_0$  (рис. 4.1), в момент времени  $\tau = 0$  помещается в среду с температурой  $T_c$  и охлаждается одинаковым образом с обеих сторон путем теплоотдачи с коэффициентом  $\alpha$ . Математически такой процесс описывается следующими уравнениями.

Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (4.5)$$

- условие симметрии

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0; \quad (4.6)$$

- условие на границе

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=R} = \alpha (T_{\text{п}} - T_c), \quad (4.7)$$

- начальное условие

$$(T)_{\tau=0} = T. \quad (4.8)$$

Уравнения (4.6) – (4.8) называются также *краевыми условиями, или условиями однозначности*. Они описывают физическую картину в начале процесса и на границах тела, благодаря чему в общем решении дифференциального уравнения теплопроводности находятся константы  $D$ ,  $B$ ,  $k$  и решение становится конкретным.

Решение уравнений (4.5) – (4.8) оказывается более удобным, если ввести новую переменную  $\vartheta = T - T_c$ . Тогда

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (4.9)$$

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad (4.10)$$

$$-\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=R} = \alpha \vartheta_{\text{п}}, \quad (4.11)$$

$$(\vartheta)_{\tau=0} = \vartheta_0. \quad (4.12)$$

Дифференциальное уравнение (4.9) аналогично (4.1), поэтому его общее решение будет

$$\vartheta = D \cos(kx) e^{-ak^2\tau} + B \sin(kx) e^{-ak^2\tau}.$$

Подстановка общего решения в условия симметрии (4.10) дает  $B = 0$ . Следовательно,

$$\vartheta = D \cos(kx) e^{-ak^2\tau}.$$

Последнее выражение при подстановке в граничное условие (4.11) приводит к характеристическому уравнению

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{\operatorname{Bi}} \mu, \quad \left( \mu = kR; \operatorname{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda} \right)$$

с бесчисленным множеством дискретных чисел:  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ .

Таким образом,

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}}.$$

Для определения константы  $D$  необходимо использовать начальное условие (4.12) и свойство ортогональных функций.

При  $\tau = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) = \vartheta_0,$$

или

$$D_1 \cos \mu_1 \frac{x}{R} + D_2 \cos \mu_2 \frac{x}{R} + D_3 \cos \mu_3 \frac{x}{R} + \dots = \vartheta_0.$$

После умножения на  $\cos \mu_1 \frac{x}{R}$  и интегрирования в пределах от  $(-R)$  до  $(+R)$

$$\begin{aligned} & D_1 \int_{-R}^{+R} \cos^2\left(\mu_1 \frac{x}{R}\right) dx + D_2 \int_{-R}^{+R} \cos\left(\mu_2 \frac{x}{R}\right) \cos\left(\mu_1 \frac{x}{R}\right) dx + \\ & + D_3 \int_{-R}^{+R} \cos\left(\mu_3 \frac{x}{R}\right) \cos\left(\mu_1 \frac{x}{R}\right) dx + \dots = \vartheta_0 \int_{-R}^{+R} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{R}\right) dx. \end{aligned}$$

На основании свойств ортогональности

$$D_1 \int_{-R}^{+R} \cos^2\left(\mu_1 \frac{x}{R}\right) dx = \vartheta_0 \int_{-R}^{+R} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{R}\right) dx,$$

откуда

$$D_1 = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1}.$$

Действуя точно таким же способом с индексами 2, 3, ...,  $n$ , можно найти  $D_2, D_3, \dots, D_n$ . Окончательно имеем

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 \operatorname{Fo}}, \quad (4.13)$$

где  $\theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}$ ;  $X = \frac{x}{R}$ ;  $\operatorname{Fo} = \frac{a\tau}{R^2}$  — соответственно, безразмерная температура, координата и время (критерий Фурье). Когда имеет место нагрев, решение (4.13) остается без изменения. Однако под температурным комплексом следует понимать отношение  $\theta = \frac{T_c - T}{T_c - T_0}$ .

Значение температурного поля позволяет определить тепловой поток на поверхности как

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=R} = \frac{\lambda \vartheta_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n \sin^2 \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} e^{-\mu_n^2 Fo}$$

и среднюю температуру тела в любой момент времени

$$\theta_{cp} = \int_0^1 \theta dX = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2 \mu_n}{\mu_n^2 + \mu_n \sin \mu_n \cos \mu_n} e^{-\mu_n^2 Fo}.$$

Для бесконечного цилиндра температурное поле находится аналогичным математическим методом:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (4.14)$$

При этом дискретные  $\mu_n$  числа определяются из характеристического уравнения

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{1}{Bi} \mu,$$

$$q = \frac{\lambda \vartheta_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n J_1^2(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad T_{cp} = \frac{2}{R^2} \int_0^R (Tr) dr.$$

Безразмерный комплекс  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ , входящий в структуру уравнений для определения дискретных чисел (критерий Био), характеризует теплообмен на границе тела и теоретически может принимать значения от нуля до бесконечности. Обычными значениями этого критерия характеризуются граничные условия третьего рода, когда заданы закон теплообмена и температура окружающей среды. При  $Bi \rightarrow \infty$  имеет место  $T_n \rightarrow T_c$ . Граничные условия третьего рода переходят в граничные условия первого рода, когда вместо закона теплообмена задается температура на поверхности тела. В этом случае характеристические уравнения для пластины и цилиндра, соответственно,  $\cos \mu = 0$ ;  $J_0(\mu) = 0$ , а решения (4.13) и (4.14) примут форму, соответственно,

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo},$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)} J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}.$$

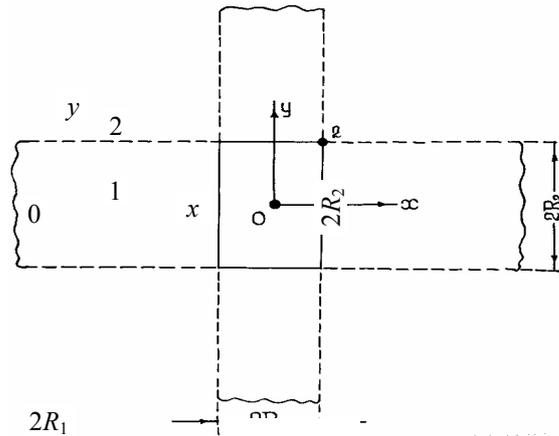
Для практических инженерных расчетов на рис. 4.2 – 4.5 приведены номограммы для определения температуры в центре и на поверхности пластины и цилиндра при заданных значениях  $Fo$  и  $Bi$ .

### 4.3. МЕТОД ПЕРЕМНОЖЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ КРИТЕРИЕВ

*Температурное поле в брусе прямоугольного сечения.* Прямоугольный брус бесконечных размеров как фигура может быть образован пересечением двух неограниченных пластин, толщина которых соответствует его двум измерениям (рис. 4.2). Температурное поле в таком теле может быть найдено путем перемножения известных температурных критериев для двух неограниченных пластин:

$$\theta_{xy} = \theta_x \theta_y. \quad (4.15)$$

Здесь  $\theta_x$  – температурное поле в неограниченной пластине толщиной  $2R_1$ , с координатой пространства  $x$ ;  $\theta_y$  – температурное поле в неограниченной пластине толщиной  $2R_2$ , с координатой пространства  $y$ .



**Рис. 4.2. Пересечение двух неограниченных пластин, образующих брус прямоугольного сечения**

При охлаждении выражение (4.15) имеет вид

$$\frac{T(x, y, \tau) - T_c}{T_0 - T_c} = \frac{T(x, \tau) - T_c}{T_0 - T_c} \frac{T(y, \tau) - T_c}{T_0 - T_c}.$$

При нагреве выражение (4.15) записывается как

$$\frac{T_c - T(x, y, \tau)}{T_c - T_0} = \frac{T_c - T(x, \tau)}{T_c - T_0} \frac{T_c - T(y, \tau)}{T_c - T_0},$$

- для точки 0

$$\theta_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \theta_{x=0} \theta_{y=0};$$

- для точки 1

$$\theta_{\substack{x=R_1 \\ y=0}} = \theta_{x=R_1} \theta_{y=0};$$

- для точки 2

$$\theta_{\substack{x=R_1 \\ y=R_2}} = \theta_{x=R_1} \theta_{y=R_2};$$

- для точки 3

$$\theta_{\substack{x=0 \\ y=R_2}} = \theta_{x=0} \theta_{y=R_2}.$$

*Температурное поле в конечном цилиндре.* Конечный цилиндр как фигура может быть образован пересечением неограниченной пластины и бесконечного цилиндра. Температурное поле находится как произведение известных температурных критериев для неограниченной пластины и бесконечного цилиндра:  $\theta_{rz} = \theta_r \theta_z$ , где  $\theta_z$  – температурное поле в неограниченной пластине толщиной  $L = 2R_2$  (полная длина короткого цилиндра) с координатой пространства  $z$ ;  $\theta_r$  – температурное поле в бесконечном цилиндре диаметром  $d = 2R_1$  (диаметр короткого цилиндра) с координатой пространства  $r$ .

*Температурное поле параллелепипеда.* Формула температурного поля параллелепипеда имеет вид  $\theta_{xyz} = \theta_x \theta_y \theta_z$ , где  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  – известные температурные критерии неограниченных пластин, пересечением которых образован параллелепипед.

*Тепловое прослушивание тел конечных размеров.* Температурное поле, возникающее в телах конечных размеров (брус квадратного и прямоугольного сечений, куб, параллелепипед, короткий цилиндр), приобретает весьма интересное свойство: оно может быть скоординировано распределением температуры либо вдоль осей симметрии, либо по поверхности тела. Вид такой координационной связи определяется условиями протекания процесса. Если математическое описание явления (например, в брус с расположением координат по осям симметрии) позволяет искать решение задачи в виде произведения функций

$$\vartheta = f(x)f(y), \quad (4.16)$$

где  $\vartheta = (T - T_c)$  – избыточная температура при охлаждении;  $\vartheta = (T_c - T)$  – избыточная температура при нагревании, то координатная связь имеет вид

$$\vartheta(x, y) = \frac{\vartheta(x, 0) \vartheta(0, y)}{\vartheta(0, 0)} = \frac{\vartheta(x, R_2) \vartheta(R_1, y)}{\vartheta(R_1, R_2)}, \quad (4.17)$$

где  $\vartheta(x, y)$  – температурное поле в брус прямоугольного сечения;  $\vartheta(x, 0)$  – распределение температуры по оси симметрии  $x$ ;  $\vartheta(y, 0)$  – распределение температуры по оси симметрии  $y$ ;  $\vartheta(0, 0)$  – температура в центре бруса;  $\vartheta(x, R_2)$  – распределение температуры по поверхности длиной  $R_1$ ;  $\vartheta(R_1, y)$  – распределение температуры по поверхности длиной  $R_2$ ;  $\vartheta(R_1, R_2)$  – температура на ребре бруса.

Если математическое описание явления позволяет искать решение задачи в виде суммы функций  $T(x, y) = f(x) + f(y)$ , где  $T(x, y)$  – температура тела при охлаждении или нагревании, то координатная связь получается в виде

$$T(x, y) = T(x, 0) + T(0, y) - T(0, 0) = T(R_1, y) + T(x, R_2) - T(R_1, R_2). \quad (4.18)$$

Закономерность (4.17) может быть использована в тех случаях, когда тело нагревается или охлаждается путем конвекции, т.е. когда имеют место граничные условия третьего рода.

Закономерность (4.18) может быть использована в тех случаях, когда тело нагревается постоянным (во времени) тепловым потоком, т.е. когда имеют место граничные условия второго рода. Особое значение при автоматизации и оптимизации процесса нагрева имеет зависимость

$$\vartheta(0, 0) = \frac{\vartheta(0, R_2) \vartheta(R_1, 0)}{\vartheta(R_1, R_2)}, \quad (4.19)$$

обладающую свойством теплового "прослушивания" для условий характеризующихся неравенством  $0,24 < Bi < \infty$ . Таким образом, измеряя температуры в трех точках поверхности прямоугольного бруса можно косвенно определить температуру его центра, без термопары. При этом нет необходимости знать такие теплофизические характеристики вещества, как теплопроводность, теплоемкость, плотность.

#### 4.4. РЕГУЛЯРНЫЙ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ

Анализ решения (4.4) – (4.13) говорит о том, что изменение избыточной температуры любой точки объема подчиняется экспоненциальному закону

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\mu_n^2 Fo},$$

где  $\vartheta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}$ ,  $\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{Bi} \mu$ .

При  $Bi \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{ctg} \mu = 0$  это означает:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \mu_2 = 3 \frac{\pi}{2}; \quad \mu_3 = 5 \frac{\pi}{2} \dots; \quad \mu_1^2 < \mu_2^2 < \mu_3^2 < \dots$$

Следовательно, при  $Fo > Fo^*$

$$e^{-\mu_1^2 Fo} \gg e^{-\mu_2^2 Fo} \gg e^{-\mu_3^2 Fo}.$$

Таким образом, начиная с некоторого момента времени, соответствующего  $Fo > Fo^*$ , для определения температуры достаточно ограничиться одним первым членом бесконечного ряда, т.е. можно использовать экспоненциальную зависимость  $\vartheta = A_1 e^{-\mu_1^2 Fo}$ , откуда

$$\ln \vartheta = -\mu_1^2 Fo + \ln A_1 = -\mu_1^2 \frac{a}{R^2} \tau + \operatorname{const}, \quad (4.20)$$

или сокращенно:

$$\ln \vartheta = -\frac{a}{\psi} \tau + \operatorname{const}, \quad (4.21)$$

$$\ln \vartheta = -m \tau + \operatorname{const}. \quad (4.22)$$

Тепловой режим, при котором натуральный логарифм избыточной температуры изменяется по закону прямой линии, называется регулярным тепловым режимом. Множитель  $m$  характеризует скорость протекания явления и носит название темпа процесса. Согласно (4.22),

$$a = \psi m. \quad (4.23)$$

Формула (4.23) служит теоретической основой для экспериментального определения коэффициента температуропроводности вещества  $a$ . Размерный коэффициент формы тела  $\psi$ , согласно (4.20) численно равен:

- для неограниченной пластины  $\psi_{н.п} = \left( \frac{R}{\mu_1} \right)^2 = \frac{1}{\left( \frac{\pi}{2R} \right)^2};$

- для бесконечного цилиндра

$$\psi_{б.цил.} = \frac{1}{\left( \frac{\pi}{1,31R} \right)^2}; \quad \psi_{шара} = \frac{1}{\left( \frac{\pi}{R} \right)^2};$$

- для конечного цилиндра  $\psi_{к.ц} = \frac{1}{\left( \frac{\pi}{1,31R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{L} \right)^2};$

- для параллелепипеда  $\psi_{\text{парал.}} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2R_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2R_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2R_3}\right)^2}$ .

Следовательно, для температуропроводности обстоятельств, соответствующего процесса.

Так как  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ ; достигается энергичным (окружающей среды). Для воде с тающим льдом необходимо по ходу произвести измерение  $\vartheta_1$ ,

Тогда

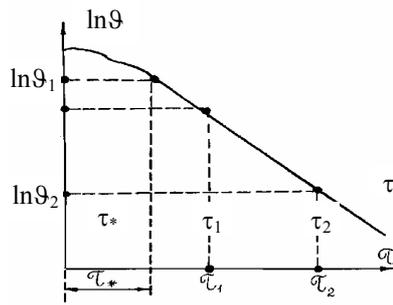


Рис 4.3. График измене-

практического расчета коэффициента вещества необходимо еще достичь вующих  $Bi \rightarrow \infty$ , и из опыта найти темп

$R \neq \infty$ ;  $\lambda \neq 0$ , то остается  $\alpha \rightarrow \infty$ . Это механическим перемешиванием жидкости поддержания  $T_c = \text{const}$  опыт проводят в либо в кипящей воде. Для определения  $m$  опыта в регулярной части процесса  $\tau_1$  и  $\vartheta_2$ ,  $\tau_2$  (рис. 4.3).

$$m = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{\ln \frac{T_1 - T_c}{T_2 - T_c}}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (4.24)$$

#### 4.5. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ

Распространение тепла в телах классической формы при нагреве тел (рис. 4.4) постоянным тепловым потоком (граничных условиях второго рода) описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\xi - 1}{x} \frac{\partial T}{\partial x} \right);$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{ц}} = 0; \quad \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{п}} = q_c; \quad T_{\text{нач}} = T_0,$$

где  $\xi = 1$  для неограниченной пластины и  $\xi = 2$  для бесконечного цилиндра.

Решение такой системы может быть представлено в форме

$$T = b + k\tau + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\mu_n^2 Fo}.$$

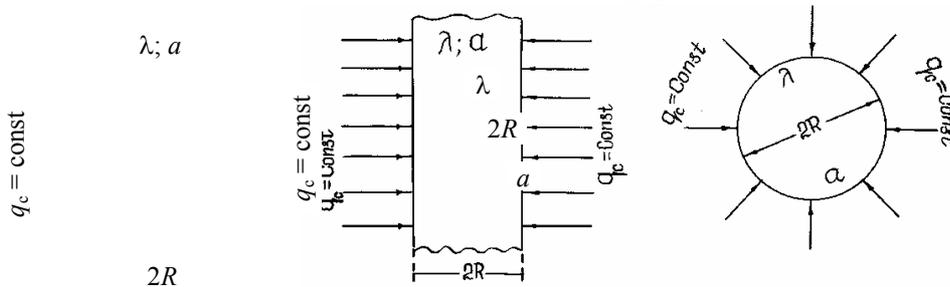


Рис. 4.4. Нагрев тел постоянным тепловым потоком

Так как  $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$ , то бесконечный ряд быстро гаснет, а начиная с некоторого значения критерия Фурье ( $Fo > Fo^*$ ), становится пренебрежимо малым по сравнению с двумя первыми членами. Тогда

$$T = b + k\tau,$$

где

$$b = T_0 - \frac{q_c R}{\lambda} \left[ \frac{\xi}{2(\xi+2)} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right]; \quad k = \xi \frac{q_c a}{\lambda R};$$

$$b_{\text{ц}} = T_0 - \frac{q_c R}{\lambda} \frac{\xi}{2(\xi+2)}; \quad b_{\text{п}} = T_0 - \frac{q_c R}{\lambda} \left[ \frac{\xi}{2(\xi+2)} - \frac{1}{2} \right] = \frac{q_c R}{(\xi+2)\lambda} + T_0.$$

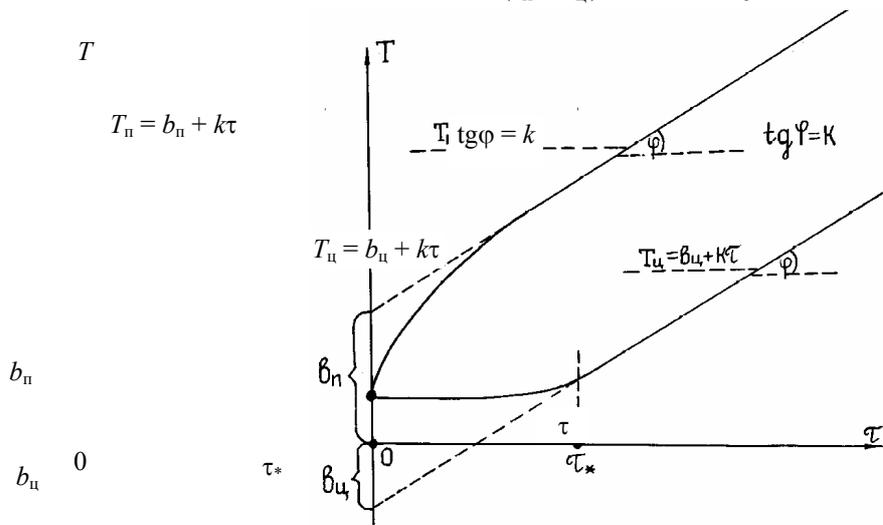
Таким образом, во всех случаях нагрева тела постоянным тепловым потоком ( $q_c = \text{const}$ ) его температура, начиная с некоторого момента времени, изменяется по закону прямой линии. Такой тепловой режим называется квазистационарным. Определяя экспериментально  $b$  и  $k$ , можно получить значение коэффициента теплопроводности и температуропроводности вещества сразу из одного опыта (рис. 4.5).

Если температура измеряется только на поверхности тела, то

$$\lambda = \frac{q_c R}{T_0 - b_{\text{п}}} \left[ \frac{\xi}{2(\xi+2)} - \frac{1}{2} \right] = \frac{q_c R}{b_{\text{п}} - T_0} \frac{1}{\xi+2}.$$

Если температура измеряется и на поверхности, и в центре, то

$$\lambda = \frac{q_c R}{2(b_{\text{п}} - b_{\text{ц}})}, \quad a = k \frac{\lambda R}{\xi q_c}.$$



**Рис. 4.5. Зависимость температуры тела от времени при нагревании ( $q = \text{const}$ ):**

$T_{\text{п}}$  – температура поверхности;  $T_{\text{ц}}$  – температура центра

#### 4.6. УПОРЯДОЧЕННЫЙ ИЛИ ОБОБЩЕННЫЙ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ

Рассмотренный ранее регулярный тепловой режим был сформулирован так: период нагревания или охлаждения тела, начиная с которого натуральный логарифм избыточной температуры любой точки изменяется во времени по закону прямой линии, называется *регулярным тепловым режимом*. Математи-

ческая закономерность режима в виде натурального логарифма избыточной температуры получается при условии нагревания или охлаждения тела по закону конвекции.

Рассмотренный ранее квазистационарный тепловой режим формулируется так: период нагревания тела, начиная с которого температура любой точки изменяется во времени по закону прямой линии, называется *квазистационарным тепловым режимом*. Такая математическая зависимость получается при условии нагревания тела постоянным тепловым потоком.

Регулярный, квазистационарный и любой возможный тепловой режим могут быть обобщены следующей формулировкой: *тепловой период нагревания или охлаждения тела, начиная с которого некоторый температурный комплекс любой точки изменяется во времени по закону прямой линии, называется упорядоченным тепловым режимом*. Математическая закономерность упорядоченного теплового режима (при любом способе нагревания или охлаждения) может быть получена из анализа дифференциальных уравнений, описывающих процесс. Например, для неограниченной пластины эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0,$$

$$T(R, \tau) = T_n(\tau), \quad T(0, \tau) = T_c(\tau), \quad T(x, 0) = T_0.$$

Если предусмотреть изменение во времени температуры поверхности  $T_n(\tau)$  и центра пластины  $T_c(\tau)$ , то решение приводит к закономерности

$$\Phi = \ln(T_n - T_c) - 1,23 \int \frac{dT_n}{T_n - T_c} = -2,47 \frac{a}{R^2} \tau + \text{const}. \quad (4.25)$$

Эта закономерность и является математическим выражением упорядоченного теплового режима. Можно показать, что математические закономерности регулярного и квазистационарного теплового режимов являются ее частными случаями. Закономерность упорядоченного теплового режима (4.30) включает в свою структуру одну неизвестную величину – температуропроводность вещества  $a$ . После дифференцирования (4.25) имеем

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = 2,47 \frac{a}{R^2},$$

в результате определяется температуропроводность вещества.

Температурный комплекс  $\Phi = \ln(T_n - T_c) - 1,23 \int \frac{dT_n}{T_n - T_c}$ , вычисляется в функции от времени. Зависимость  $\Phi = \psi(\tau)$  заносится на график, где производная  $\Phi$  по  $\tau$  равнозначна тангенсу наклона прямой линии (рис. 4.6).

Следует заметить, что закономерность упорядоченного теплового режима (4.30) не лимитируется параметрами и физическими переменными внешней среды. Поэтому она может быть использована для любых

условий нагревания и охлаждения. Температура окружающей среды может изменяться во времени (нагрев и охлаждение вместе с печью). Однако во всех случаях необходимым условием является наступление упорядоченного теплового периода, т.е. когда температурный комплекс  $\Phi$  начнет изменяться во времени по закону прямой линии.

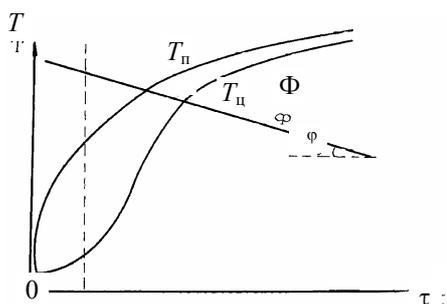


Рис. 4.6. Зависимость изменения температур поверхности и центра тела от времени

#### 4.7. НАГРЕВ И ОХЛАЖДЕНИЕ ТЕРМИЧЕСКИ ТОНКИХ ТЕЛ КОНВЕКТИВНЫМ ПОТОКОМ ТЕПЛА

Термически тонкими считаются такие тела, в процессе нагрева которых можно пренебречь изменением температуры по их объему (рис. 4.7).

Математическое описание такого нагрева вытекает из уравнения теплового баланса

$$\alpha F (T_c - T) dt = c\rho V dT, \quad \alpha F \vartheta dt = -c\rho V d\vartheta, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{\alpha F}{c\rho V} dt = -P dt.$$

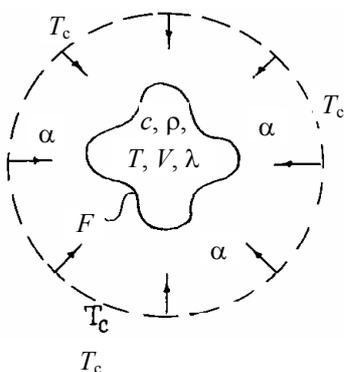
Общее решение  $\vartheta = De^{-P\tau}$  становится конкретным в результате учета начальных условий:  $T = T_0$  при  $\tau = 0$  и, значит,  $D = \vartheta_0 = T_c - T_0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0 e^{-P\tau}$ . Здесь

$$P = \frac{\alpha F}{c\rho V} = \frac{FR}{V} \frac{\alpha}{c\rho R} = \xi \frac{\alpha}{c\rho R},$$

где  $R$  – характерное измерение формы тела, равный для цилиндра и шара,

$$\frac{\alpha}{c\rho R} = \frac{\alpha R}{\lambda} \frac{\lambda}{c\rho R^2} = \text{Bi} \frac{a}{R^2},$$

где  $\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}$  – критерий Био; температуропроводности. Окончательно имеем



тела;  $\xi = \frac{FR}{V}$  – безразмерный фактор неограниченной пластины, бесконечного соответственно, 1, 2, 3;

$a = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коэффициент вещества.

Рис 4 7 Конвектив-

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = e^{-\xi \text{Bi} Fo},$$

где  $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$  – критерий Фурье;  $\theta = \frac{T_c - T}{T_c - T_0}$  – безразмерная температура.

Если тело охлаждается, то

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}.$$

В практических условиях любое тело можно назвать термически тонким, если выполняется хотя бы одно из трех условий: геометрические размеры достаточно малы; коэффициент теплопроводности слишком велик, коэффициент теплоотдачи слишком мал. В более корректной форме понятие термически тонкого тела характеризуется критерием Био, куда входят все три перечисленные фактора. Чем Био меньше, тем ближе тело относится к термически тонкому телу. Практически принято считать тело термически тонким, если соблюдается неравенство  $\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda} < 0,24$ .

#### 4.8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Полуограниченным пространством называется область бесконечной протяженности в сторону положительных значений оси абсцисс и перпендикулярно ей. Примером может служить Земля, если начало координат – на поверхности, а положительные значения оси уходят в глубину.

Рассмотрим задачу, когда поверхность полупространства (массива), имеющего начальную температуру  $T_0$ , внезапно охлаждается до температуры  $T_c$ , которая в дальнейшем поддерживается неизменной на протяжении всего времени релаксации. Тогда процесс переноса тепла запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T_{x=0} = T_c, \quad T_{\tau=0} = T_0,$$

или

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad \vartheta_{x=0} = 0, \quad \vartheta_{\tau=0} = \vartheta_0, \quad (4.26)$$

где  $\vartheta = (T - T_c)$ ;  $\vartheta_0 = (T_0 - T_c)$ .

С помощью обычной подстановки можно показать, что интеграл

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z e^{-Z^2} dZ$$

удовлетворяет системе (4.26), когда под аргументом подразумевается комплекс  $Z = \frac{x}{\sqrt{4a\tau}}$ .

Это означает, что интеграл такого вида является решением системы (4.26), описывающей распространение тепла в полуограниченном пространстве. Тепловой поток в любом сечении

$$-q = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{d\vartheta}{dZ} \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \text{или} \quad q = \frac{2\vartheta_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{4a\tau}} e^{-Z^2}.$$

Отсюда поток на поверхности ( $Z = 0$ )

$$q_n = \frac{2\vartheta_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{4a\tau}} = \sqrt{\frac{\lambda c p}{\pi \tau}} \vartheta_0 = b \vartheta_0,$$

где  $b = \sqrt{\frac{\lambda c p}{\pi \tau}}$ .

Параметр  $b$  характеризует аккумулирующую способность массива в данный момент и носит название коэффициента теплоусвоения. Как видно, на протяжении процесса теплового выравнивания он изменяется от  $\infty$  до 0. В количественном смысле коэффициент теплоусвоения массива при термической релаксации – это отношение теплового потока на поверхности в данный момент времени  $q_n(\tau)$  к постоянной максимальной разности температур системе  $\vartheta$ .

Когда имеет место нагрев полуограниченного пространства (массива), все соотношения по форме остаются без изменения. Необходимо лишь поменять местами параметры  $T_0$  и  $T_c$ , а под избыточными температурами понимать  $\vartheta = (T_c - T)$ ;  $\vartheta_0 = (T_c - T_0)$ .

Тогда аккумуляция тепла определяется путем интегрирования:

$$Q = \int_0^{\tau} q_n(\tau) d\tau = \vartheta_0 \int_0^{\tau} b(\tau) d\tau$$

или окончательно

$$Q = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \vartheta_0 \sqrt{\tau}, \quad (4.27)$$

где  $\beta = \sqrt{\lambda c\rho}$  – коэффициент тепловой активности вещества.

Все расчетные соотношения, полученные для полупространства, могут быть использованы и для плоской стенки. При этом вычисления будут сохранять относительную строгость до того момента, пока тепловое возмущение в достаточной мере не проникнет сквозь всю ее толщину.

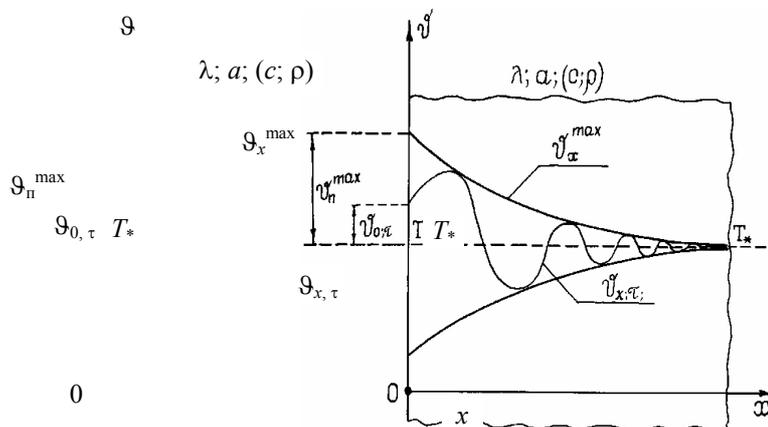
При больших значениях объемной теплоемкости ( $c\rho$ ) коэффициент теплоусвоения больше, а коэффициент температуропроводности – меньше. Это означает, что в процессе будет обеспечено большое проникновение тепла и медленное распространение температуры. При малых значениях  $c\rho$ , наоборот, обеспечивается малое проникновение тепла и быстрое распространение температуры.

В общем случае при большом значении  $\beta$  и в обычных условиях рука, приложенная к телу, будет ощущать холод. Таким образом, описанный процесс может быть использован для оценки контактного теплообмена между стопой ноги и полом помещения. За величину, характеризующую гигиенические свойства пола, принимается соотношение (4.27).

#### 4.9. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

#### ВОЛНЫ

Многие явления природы подчиняются закону простого гармонического колебания. Только периоды таких колебаний для разных условий могут быть различными. Так, период наиболее резких колебаний температуры земли равен одному году, а для ограждающих конструкций жилого помещения он составляет одни сутки. Существуют примеры, когда температурные колебания исчисляются периодом в долях секунды. Большинство из них происходят по закону косинуса, однако, даже самые сложные колебания все равно могут быть описаны путем наложения косинусоид. Температурные колебания легко создаются в лабораторных условиях. Изменяя температуру поверхности тела в прямом и обратном направлениях, внутри его удастся получить температурные волны, которые, угасая, идут в глубину объема.



**Рис 4.8. Изменение температуры в полуограниченном теле:**

$$\vartheta_{x,\tau} = (T_{x,\tau} - T^*) - \text{температурные волны};$$

$$\vartheta_{\Pi}^{\max} = (T_{\Pi}^{\max} - T^*) - \text{амплитуда колебаний на поверхности}$$

(максимальное отклонение температуры на поверхности);

$$\vartheta_x^{\max} = (T_x^{\max} - T^*) - \text{затухающие амплитуды колебаний по глубине}$$

(максимальное отклонение температуры по глубине)

На рис 4.8 показано распределение температуры в полуограниченном теле при циклическом подводе теплоты к его поверхности.

Если процесс теплового колебания продолжается достаточно долго, то начальные условия не будут оказывать влияние на распределение температуры. Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих явление распространения температурных волн, будет состоять из двух уравнений:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \quad \vartheta_{0,\tau} = \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{Z} \tau\right),$$

где  $Z$  – полный период колебаний;  $\omega = \frac{2\pi}{Z}$  – частота колебаний.

Решение системы имеет вид

$$\vartheta_{x,\tau} = \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos(\omega\tau - kx) e^{-kx},$$

где  $k = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$ .

Из этого решения вытекает ряд зависимостей, которые часто используются в технических расчетах.

*Глубина заметного проникновения температурных волн.* Колебания считаются затухшими, когда соблюдается отношение  $\frac{\vartheta_{x=L}^{\max}}{\vartheta_{\Pi}^{\max}} = 0,01$ .

При  $\cos(\omega\tau - kx) = 1$ , следует  $\vartheta_x^{\max} = \vartheta_{\Pi}^{\max} e^{-kx}$ . Тогда глубина заметного проникновения ( $x = L$ )  $L = \frac{4,6}{k} = 4,6 \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ .

*Плотность теплового потока на поверхности* может быть найдена по формуле

$$q_{\Pi\tau} = -\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{\Pi} = \lambda k \sqrt{2} \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos\left(\omega\tau + \frac{\pi}{4}\right)$$

или

$$q_{\Pi\tau} = B \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos\left(\omega\tau + \frac{\pi}{4}\right),$$

где  $B = \sqrt{\lambda c \rho \omega}$ .

Максимальная плотность теплового потока на поверхности

$$q_{\Pi\tau}^{\max} = B \vartheta_{\Pi}^{\max}.$$

Параметр  $B$  характеризует аккумулирующую способность массива и носит название *коэффициента теплоусвоения*, который в процессе распространения температурных волн остается постоянным. В количественном смысле коэффициент теплоусвоения массива при термических колебаниях – это отношение максимального теплового потока на поверхности, к максимальному отклонению температуры на поверхности.

*Накопление и расход тепловой энергии.* Многие рабочие процессы, имеющие практическое значение, представляют собой повторение одного и того же цикла. В тех случаях, когда система характеризуется температурой, имеют место полупериодические процессы накопления и расхода тепловой энергии. При описанных условиях накопление и расход тепловой энергии численно равны между собой и отличаются лишь противоположным знаком.

Таким образом,

$$Q = \pm \int_0^{0,5Z} q_{пт} dt = \pm \beta \vartheta_{п}^{\max} \frac{\sqrt{2}}{\omega},$$

где  $\beta = \sqrt{\lambda c_p}$  – коэффициент тепловой активности вещества.

При больших значениях объемной теплоемкости  $c_p$  коэффициент теплоусвоения больше, а коэффициент температуропроводности меньше. Это означает большое накопление тепла за полупериод и неглубокое проникновение температурных волн. При малых значениях  $c_p$  – наоборот. Все выведенные соотношения сохраняют свою строгость и для плоской стенки, если температурные волны не достигают противоположной поверхности. При незначительном проникновении ими можно пользоваться как приближенными.

Параллельно температурным волнам здесь может действовать проникающая теплопередача (рис. 4.9), поэтому при расчетах температурных волн приходится учитывать следующее:

$$\vartheta_{x,\tau} = T_{x,\tau} - \left( T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x \right), \quad \vartheta_{п}^{\max} = T_{п}^{\max} - T_1.$$

Если температурные колебания в плоской стенке имеют место с другой ее стороны, то во всех выражениях необходимо вместо  $x$  подставить  $\delta - x$ , оставив начало координат на прежнем месте и изменив лишь индексы соответствующих температур. Так, при колебаниях температуры слева распределение амплитуды по глубине вы-

ражалось соотношением

$$\vartheta_x^{\max} = \vartheta_{п1}^{\max} e^{-kx}.$$

В случае колебаний температуры справа

$$\vartheta_x^{\max} = \vartheta_{п2}^{\max} e^{-k(\delta-x)},$$

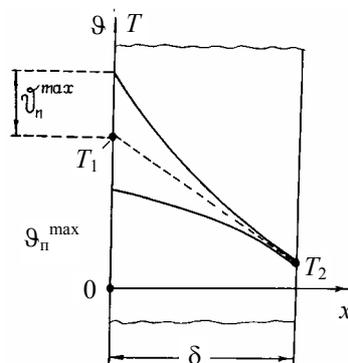


Рис. 4.9. Изменение температуры в стенке при циклическом подводе

где  $\vartheta_{п2}^{\max}$  – амплитуда коле-

баний температуры на поверхности плоской стенки справа.

Так, например, для проникающей теплопередачи при колебаниях слева

$$T_0(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x.$$

То же при колебаниях справа:

$$T_0(x) = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{\delta} (\delta - x) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\delta} (\delta - x).$$

С гигиенической точки зрения, более удовлетворительными являются ограждающие конструкции, обладающие более высокими значениями коэффициента теплоусвоения. В этом случае колебания производительности отопительных приборов будут в какой-то степени компенсироваться накоплением и расходом тепловой энергии ограждающими конструкциями, а температура воздуха в помещении будет более равномерной во времени.

#### 4.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКА ТЕПЛА НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Решение задачи при двусторонних колебаниях температуры на поверхности плоской стенки представляет большую сложность. Даже при упрощающих предпосылках оно оказывается громоздким и неудобным для практического применения. Определение теплового потока с помощью метода респонс-фактора упрощается благодаря возможности пользоваться выводами для случая односторонних температурных волн. При этом вначале целесообразно рассмотреть по отдельности четыре различных случая.

**С л у ч а й I** – температура внутри помещения и на улице остается постоянной. Наблюдается обычная проникающая теплопередача (рис. 4.10, а).

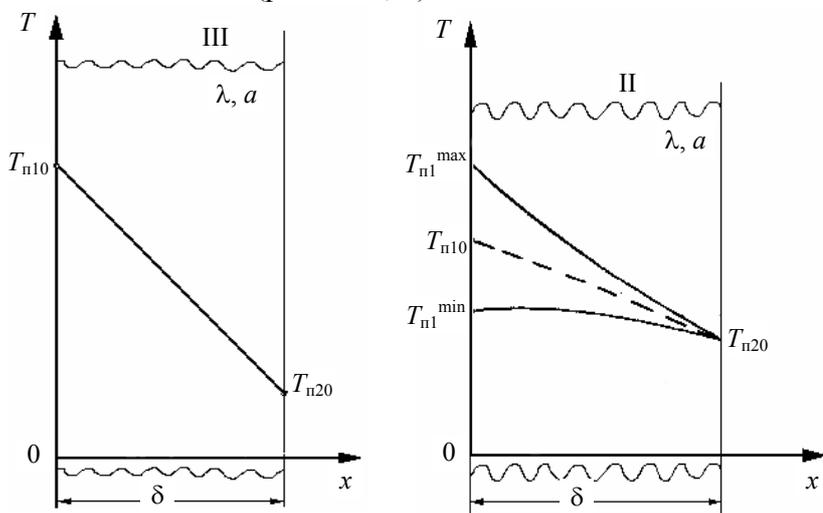
Распределение температуры имеет вид

$$T_0(x) = T_{н10} - \frac{T_{н10} - T_{н20}}{\delta} x.$$

Тепловой поток на внутренней поверхности

$$q_{0I} = -\lambda \left[ \frac{dT_0(x)}{dx} \right]_{x=0} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{н10} - T_{н20}).$$

**С л у ч а й II** – температура на улице остается постоянной, температура внутри помещения меняется по гармоническому закону, максимальное отклонение температуры внутри тела наблюдается относительно линии 0–0 (рис. 4.10, б).



а)

б)

**Рис. 4.10. Изменение температуры по толщине стенки при стационарном (а) режиме и при гармоническом изменении температуры внутри помещения (б)**

Формула распределения амплитуды по сечению стенки имеет вид

$$\vartheta_{xII} = \vartheta_{n1II}^{\max} e^{-k_{II}x},$$

где  $\vartheta_{xII} = T_{xII} - T_0(x)$ ;  $\vartheta_{n1II}^{\max} = T_{n1}^{\max} - T_{n10}$ ;  $k_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{aZ_{II}}}$ ,  $Z_{II}$  – период колебания.

Распределение температуры по сечению

$$T_{xII} = T_0(x) + \vartheta_{n1II}^{\max} e^{-k_{II}x}.$$

Тепловой поток на внутренней поверхности стенки

$$q_{II} = -\lambda \left[ \frac{dT_{xII}}{dx} \right]_{x=0} = q_{0I} + \lambda \vartheta_{n1II}^{\max} k_{II}.$$

С л у ч а й III – температура в помещении остается постоянной, температура на улице меняется по гармоническому закону, максимальное и минимальное отклонение температуры внутри тела наблюдается относительно линии 0–0. Формула распределения амплитуды по сечению стенки имеет вид

$$\vartheta_{xIII} = \vartheta_{n2III}^{\max} e^{-k_{III}(\delta-x)},$$

где  $\vartheta_{xIII} = T_{xIII} - T_0(x)$ ;  $\vartheta_{n2III}^{\max} = T_{n2}^{\max} - T_{n20}$ ;  $k = \sqrt{\frac{\pi}{aZ_{III}}}$ ,  $Z_{III}$  – период колебания.

Распределение температуры по сечению

$$T_{xIII} = T_0(x) + \vartheta_{n2III}^{\max} e^{-k_{III}(\delta-x)}$$

Тепловой поток на внутренней поверхности стенки

$$q_{III} = -\lambda \left[ \frac{dT_{xIII}}{dx} \right]_{x=0} = q_{0I} - \lambda \vartheta_{п2III}^{\max} k_{III} e^{-k_{III} \delta}.$$

С л у ч а й IV – тепловой поток на внутренней поверхности стенки при тепловом воздействии всех случаев одновременно.

Дополнительный тепловой поток (положительного или отрицательного знака), возникающий в системе как отклик на температурное возмущение, называется *респонс-фактором* (ответным фактором).

Так, в нашем случае респонс-фактор, вызванный на левой поверхности ограждения температурным возмущением этим возмущением,

$$(\Delta q)_{II} = q_{II} - q_{0I} = \lambda \vartheta_{п1x}^{\max} k_{II}.$$

Респонс-фактор вызванный на левой поверхности ограждения температурным возмущением на противоположной поверхности,

$$(\Delta q)_{III} = q_{III} - q_{0I} = -\lambda \vartheta_{п2III}^{\max} k_{III} e^{-k_{III} \delta}.$$

Основное свойство респонс-факторов формулируется так: *тепловой поток на поверхности ограждения после всех температурных возмущений равен сумме первоначального теплового потока и всех потоков респонс-фактора.*

Случаи II и III в отдельности встречаются крайне редко. Чаше они действуют одновременно. Их одновременное действие и характеризуется свойствами респонс-факторов:

$$q_{ист} = q_{0I} + \Delta q_{II} + \Delta q_{III}.$$

После подстановки  $q_{0I}$ ,  $\Delta q_{II}$ ,  $\Delta q_{III}$  в  $q_{ист}$  получаем

$$q_{ист} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{п10} - T_{п20}) + \lambda \vartheta_{п1II}^{\max} k_{II} - \lambda \vartheta_{п2III}^{\max} k_{III} e^{-k_{III} \delta}.$$

Следовательно, тепловой поток – это тот поток на внутренней поверхности ограждения, который будет иметь место, если произойдет температурное возмущение слева от  $T_{п10}$  до  $T_{п1}^{\max}$  и справа от  $T_{п20}$  до  $T_{п2}^{\max}$ .

Используя правило знаков теплового потока  $q_{ист}$  в законе Фурье, можно получить расчетные выражения для любых других вариантов температурного возмущения в плоской системе.

Тогда аккумуляция тепла определяется путем интегрирования:

$$Q = \int_0^{\tau} q_{ист}(\tau) d\tau = \vartheta_0 \int_0^{\tau} b(\tau) d\tau$$

или окончательно

$$Q = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \vartheta_0 \sqrt{\tau}, \quad (4.27)$$

где  $\beta = \sqrt{\lambda c \rho}$  – коэффициент тепловой активности вещества.

Все расчетные соотношения, полученные для полупространства, могут быть использованы и для плоской стенки. При этом вычисления будут сохранять относительную строгость до того момента, пока тепловое возмущение в достаточной мере не проникнет сквозь всю ее толщину.

При больших значениях объемной теплоемкости ( $c\rho$ ) коэффициент теплоусвоения больше, а коэффициент температуропроводности – меньше. Это означает, что в процессе будет обеспечено большое проникновение тепла и медленное распространение температуры. При малых значениях  $c\rho$ , наоборот, обеспечивается малое проникновение тепла и быстрое распространение температуры.

В общем случае при большом значении  $\beta$  и в обычных условиях рука, приложенная к телу, будет ощущать холод. Таким образом, описанный процесс может быть использован для оценки контактного теплообмена между стопой ноги и полом помещения. За величину, характеризующую гигиенические свойства пола, принимается соотношение (4.27).

#### 4.9. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Многие явления природы подчиняются закону простого гармонического колебания. Только периоды таких колебаний для разных условий могут быть различными. Так, период наиболее резких колебаний температуры земли равен одному году, а для ограждающих конструкций жилого помещения он составляет одни сутки. Существуют примеры, когда температурные колебания исчисляются периодом в долях секунды. Большинство из них происходят по закону косинуса, однако, даже самые сложные колебания все равно могут быть описаны путем наложения косинусоид. Температурные колебания легко создаются в лабораторных условиях. Изменяя температуру поверхности тела в прямом и обратном направлениях, внутри его удастся получить температурные волны, которые, угасая, идут в глубину объема.

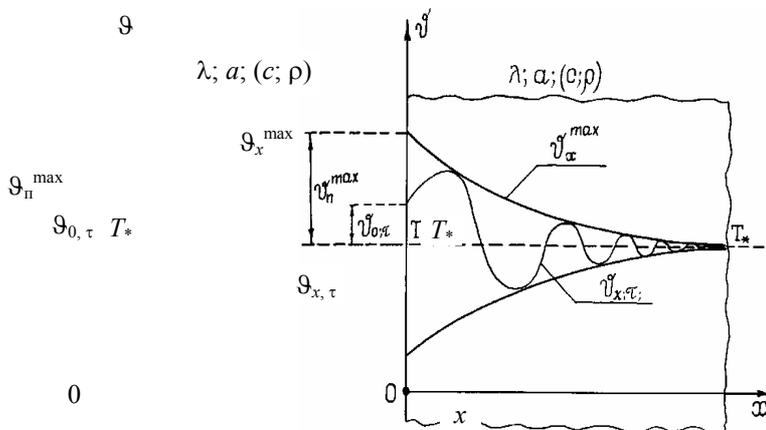


Рис 4.8. Изменение температуры в полуограниченном теле:

$\vartheta_{x,\tau} = (T_{x,\tau} - T^*)$  – температурные волны;

$\vartheta_{\Pi}^{\max} = (T_{\Pi}^{\max} - T^*)$  – амплитуда колебаний на поверхности

(максимальное отклонение температуры на поверхности);

$\vartheta_x^{\max} = (T_x^{\max} - T^*)$  – затухающие амплитуды колебаний по глубине

(максимальное отклонение температуры по глубине)

На рис 4.8 показано распределение температуры в полуограниченном теле при циклическом подводе теплоты к его поверхности.

Если процесс теплового колебания продолжается достаточно долго, то начальные условия не будут оказывать влияние на распределение температуры. Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих явление распространения температурных волн, будет состоять из двух уравнений:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \quad \vartheta_{0,\tau} = \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{Z} \tau\right),$$

где  $Z$  – полный период колебаний;  $\omega = \frac{2\pi}{Z}$  – частота колебаний.

Решение системы имеет вид

$$\vartheta_{x,\tau} = \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos(\omega\tau - kx) e^{-kx},$$

где  $k = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$ .

Из этого решения вытекает ряд зависимостей, которые часто используются в технических расчетах.

*Глубина заметного проникновения температурных волн.* Колебания считаются затухшими, когда соблюдается отношение  $\frac{\vartheta_{x=L}^{\max}}{\vartheta_{\Pi}^{\max}} = 0,01$ .

При  $\cos(\omega\tau - kx) = 1$ , следует  $\vartheta_x^{\max} = \vartheta_{\Pi}^{\max} e^{-kx}$ . Тогда глубина заметного проникновения ( $x = L$ )  
 $L = \frac{4,6}{k} = 4,6 \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ .

*Плотность теплового потока на поверхности* может быть найдена по формуле

$$q_{\Pi\tau} = -\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{\Pi} = \lambda k \sqrt{2} \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos\left(\omega\tau + \frac{\pi}{4}\right)$$

или

$$q_{\Pi\tau} = B \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos\left(\omega\tau + \frac{\pi}{4}\right),$$

где  $B = \sqrt{\lambda c \rho \omega}$ .

Максимальная плотность теплового потока на поверхности

$$q_{\Pi\tau}^{\max} = B \vartheta_{\Pi}^{\max}.$$

Параметр  $B$  характеризует аккумулирующую способность массива и носит название *коэффициента теплоусвоения*, который в процессе

распространения температурных волн остается постоянным. В количественном смысле коэффициент теплоусвоения массива при термических колебаниях – это отношение максимального теплового потока на поверхности, к максимальному отклонению температуры на поверхности.

*Накопление и расход тепловой энергии.* Многие рабочие процессы, имеющие практическое значение, представляют собой повторение одного и того же цикла. В тех случаях, когда система характеризуется температурой, имеют место полупериодические процессы накопления и расхода тепловой энергии. При описанных условиях накопление и расход тепловой энергии численно равны между собой и отличаются лишь противоположным знаком.

Таким образом,

$$Q = \pm \int_0^{0,5Z} q_{пт} dt = \pm \beta \vartheta_{п}^{\max} \frac{\sqrt{2}}{\omega},$$

где  $\beta = \sqrt{\lambda c\rho}$  – коэффициент тепловой активности вещества.

При больших значениях объемной теплоемкости  $c\rho$  коэффициент теплоусвоения больше, а коэффициент температуропроводности меньше. Это означает большое накопление тепла за полупериод и неглубокое проникновение температурных волн. При малых значениях  $c\rho$  – наоборот. Все выведенные соотношения сохраняют свою строгость и для плоской стенки, если температурные волны не достигают противоположной поверхности. При незначительном проникновении ими можно пользоваться как приближенными.

Параллельно температурным волнам здесь может действовать проникающая теплопередача (рис. 4.9), поэтому при расчетах температурных волн приходится учитывать следующее:

$$\vartheta_{x,\tau} = T_{x,\tau} - \left( T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x \right), \quad \vartheta_{п}^{\max} = T_{п}^{\max} - T_1.$$

Если температурные колебания в плоской стенке имеют место с другой ее стороны, то во всех выражениях необходимо вместо  $x$  подставить  $\delta - x$ , оставив начало координат на прежнем месте и изменив лишь индексы соответствующих температур. Так, при колебаниях температуры слева распределение амплитуды по глубине вы-

ражалось соотношением

$$\vartheta_x^{\max} = \vartheta_{п1}^{\max} e^{-kx}.$$

В случае колебаний температуры справа

$$\vartheta_x^{\max} = \vartheta_{п2}^{\max} e^{-k(\delta-x)},$$

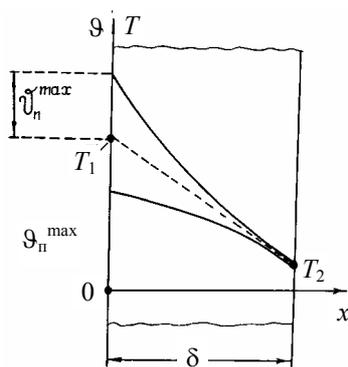


Рис. 4.9. Изменение температуры в стенке при циклическом подводе

где  $\vartheta_{п2}^{\max}$  – амплитуда коле-

баний температуры на поверхности плоской стенки справа.

Так, например, для проникающей теплопередачи при колебаниях слева

$$T_0(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x.$$

То же при колебаниях справа:

$$T_0(x) = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{\delta} (\delta - x) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\delta} (\delta - x).$$

С гигиенической точки зрения, более удовлетворительными являются ограждающие конструкции, обладающие более высокими значениями коэффициента теплоусвоения. В этом случае колебания производительности отопительных приборов будут в какой-то степени компенсироваться накоплением и расходом тепловой энергии ограждающими конструкциями, а температура воздуха в помещении будет более равномерной во времени.

#### 4.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКА ТЕПЛА НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Решение задачи при двусторонних колебаниях температуры на поверхности плоской стенки представляет большую сложность. Даже при упрощающих предположениях оно оказывается громоздким и неудобным для практического применения. Определение теплового потока с помощью метода респонс-фактора упрощается благодаря возможности пользоваться выводами для случая односторонних температурных волн. При этом вначале целесообразно рассмотреть по отдельности четыре различных случая.

**С л у ч а й I** – температура внутри помещения и на улице остается постоянной. Наблюдается обычная проникающая теплопередача (рис. 4.10, а).

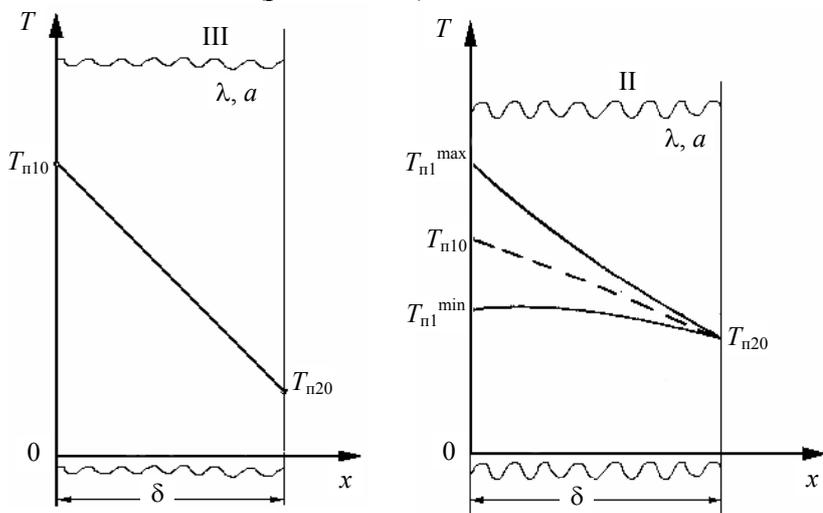
Распределение температуры имеет вид

$$T_0(x) = T_{n10} - \frac{T_{n10} - T_{n20}}{\delta} x.$$

Тепловой поток на внутренней поверхности

$$q_{0I} = -\lambda \left[ \frac{dT_0(x)}{dx} \right]_{x=0} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{n10} - T_{n20}).$$

**С л у ч а й II** – температура на улице остается постоянной, температура внутри помещения меняется по гармоническому закону, максимальное отклонение температуры внутри тела наблюдается относительно линии 0–0 (рис. 4.10, б).



а)

б)

**Рис. 4.10. Изменение температуры по толщине стенки при стационарном (а) режиме и при гармоническом изменении температуры внутри помещения (б)**

Формула распределения амплитуды по сечению стенки имеет вид

$$\vartheta_{xII} = \vartheta_{n1II}^{\max} e^{-k_{II}x},$$

где  $\vartheta_{xII} = T_{xII} - T_0(x)$ ;  $\vartheta_{n1II}^{\max} = T_{n1}^{\max} - T_{n10}$ ;  $k_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{aZ_{II}}}$ ,  $Z_{II}$  – период колебания.

Распределение температуры по сечению

$$T_{xII} = T_0(x) + \vartheta_{n1II}^{\max} e^{-k_{II}x}.$$

Тепловой поток на внутренней поверхности стенки

$$q_{II} = -\lambda \left[ \frac{dT_{xII}}{dx} \right]_{x=0} = q_{0I} + \lambda \vartheta_{n1II}^{\max} k_{II}.$$

С л у ч а й III – температура в помещении остается постоянной, температура на улице меняется по гармоническому закону, максимальное и минимальное отклонение температуры внутри тела наблюдаются относительно линии 0–0. Формула распределения амплитуды по сечению стенки имеет вид

$$\vartheta_{xIII} = \vartheta_{n2III}^{\max} e^{-k_{III}(\delta-x)},$$

где  $\vartheta_{xIII} = T_{xIII} - T_0(x)$ ;  $\vartheta_{n2III}^{\max} = T_{n2}^{\max} - T_{n20}$ ;  $k = \sqrt{\frac{\pi}{aZ_{III}}}$ ,  $Z_{III}$  – период колебания.

Распределение температуры по сечению

$$T_{xIII} = T_0(x) + \vartheta_{n2III}^{\max} e^{-k_{III}(\delta-x)}$$

Тепловой поток на внутренней поверхности стенки

$$q_{III} = -\lambda \left[ \frac{dT_{xIII}}{dx} \right]_{x=0} = q_{0I} - \lambda \vartheta_{n2III}^{\max} k_{III} e^{-k_{III}\delta}.$$

С л у ч а й IV – тепловой поток на внутренней поверхности стенки при тепловом воздействии всех случаев одновременно.

Дополнительный тепловой поток (положительного или отрицательного знака), возникающий в системе как отклик на температурное возмущение, называется *респонс-фактором* (ответным фактором).

Так, в нашем случае респонс-фактор, вызванный на левой поверхности ограждения температурным возмущением этим возмущением,

$$(\Delta q)_{II} = q_{II} - q_{0I} = \lambda \vartheta_{nIx}^{\max} k_{II}.$$

Респонс-фактор вызванный на левой поверхности ограждения температурным возмущением на противоположной поверхности,

$$(\Delta q)_{III} = q_{III} - q_{0I} = -\lambda \vartheta_{2nIII}^{\max} k_{III} e^{-k_{III} \delta}.$$

Основное свойство респонс-факторов формулируется так: *тепловой поток на поверхности ограждения после всех температурных возмущений равен сумме первоначального теплового потока и всех потоков респонс-фактора.*

Случаи II и III в отдельности встречаются крайне редко. Чаше они действуют одновременно. Их одновременное действие и характеризуется свойствами респонс-факторов:

$$q_{\text{ист}} = q_{0I} + \Delta q_{II} + \Delta q_{III}.$$

После подстановки  $q_{0I}$ ,  $\Delta q_{II}$ ,  $\Delta q_{III}$  в  $q_{\text{ист}}$  получаем

$$q_{\text{ист}} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{n10} - T_{n20}) + \lambda \vartheta_{n1II}^{\max} k_{II} - \lambda \vartheta_{n2III}^{\max} k_{III} e^{-k_{III} \delta}.$$

Следовательно, тепловой поток – это тот поток на внутренней поверхности ограждения, который будет иметь место, если произойдет температурное возмущение слева от  $T_{n10}$  до  $T_{n1}^{\max}$  и справа от  $T_{n20}$  до  $T_{n2}^{\max}$ .

Используя правило знаков теплового потока  $q_{\text{ист}}$  в законе Фурье, можно получить расчетные выражения для любых других вариантов температурного возмущения в плоской системе.

## 5. МАССОПРОВОДНОСТЬ КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТЫХ ТЕЛ

---

### 5.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЛАГОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

Под влажностью понимается весовое количество влаги, отнесенное к весовому количеству сухого материала, взятому в объеме точно таких же размеров. Таким образом, влажность является безразмерной величиной, выраженной в долях сухого материала. О влажности в данной точке тела можно гово-

речь при очень малом его объеме. При этом полем влажности называется совокупность значений влажности в различных точках пространства в различные моменты времени.

*Изовлажностной поверхностью* называется геометрическое место точек одинаковой влажности. Первая производная влажности по направлению ее наибольшего возрастания называется *градиентом влажности*. Градиент влажности, взятый с обратным знаком, называется *падением влажности*.

Основной закон влагопроводности формулируется следующим образом: *количество передаваемой влаги пропорционально падению влажности, времени, площади поперечного сечения, перпендикулярного направлению распространения влаги*:

$$dG = -\gamma \frac{\partial U}{\partial x} dF d\tau \quad \text{или} \quad dG = idF d\tau,$$

где  $i = -\gamma \frac{\partial U}{\partial x}$  – плотность потока влаги;  $\gamma$  – коэффициент влагопроводности вещества – количество влаги, передаваемое в единицу времени, через единицу поверхности, при перепаде влажности в одну единицу, на единицу длины.

Когда  $\frac{\partial U}{\partial x} = 1$ , плотность  $i = \gamma$ , т.е. коэффициент влагопроводности – это плотность потока влаги при единичном градиенте влажности.

Во многих расчетах фигурирует весовая влагоемкость материала – количество влаги, необходимое для повышения влажности одного килограмма материала в сухом состоянии на единицу влажности  $e$ .

При этом под плотностью сухого материала  $\rho_0$  понимают массу одного кубометра сухого материала. Произведение  $e\rho_0$  носит название *объемной влагоемкости материала*. Величины  $\gamma$ ,  $e$  находятся из опытов при стационарном  $\gamma$  и нестационарном  $e$  режимах (для некоторых веществ – табулированы).

## 5.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВЛАГОПРОВОДНОСТИ ПЛОСКИХ ТЕЛ

Если в неограниченной пластине ось координат  $x$  направить слева по толщине пластины, то элементарный объем, соответствующий бесконечно малому отрезку  $dx$ , будет равен  $dV = Fdx$ , где  $F$  – величина расчетной поверхности. Пусть в объеме пластины имеет место одномерное поле влажности, благодаря чему будет наблюдаться перемещение влаги по сечению тела, сопровождаемое ее прибылью или убылью в каждой конкретной точке (нестационарный режим) или постоянством (стационарный режим). Согласно законам физики, перемещение влаги в пространстве происходит от мест с большим числом единиц влажности к местам более низкого ее уровня. Пусть влага через выделенный плоский объем проходит слева направо, т.е. в направлении оси координат  $x$ . Тогда для выделенного элемента может быть составлен следующий баланс влаги:  $dI_{1x} = dI_{2x} + dI_{ep0}$ , где  $dI_{1x} = i_{1x}F d\tau$  – количество влаги, вошедшее внутрь объема  $dV$  через поверхность  $F$  слева за время  $d\tau$ ;  $dI_{2x} = i_{2x}F d\tau$  – количество влаги, вышедшее изнутри объема  $dV$  через поверхность  $F$  справа за то же время  $d\tau$ ;  $dI_{ep0} = e\rho_0 dV dU_\tau$  – количество влаги, появившееся в объеме  $dV$  или исчезнувшее из него за тот же самый отрезок времени  $d\tau$  (прибыль и убыль внутри объема зависит от соотношения между входящим и одновременно выходящим количеством влаги);  $dU_\tau$  – изменение влажности в объеме за время  $d\tau$ .

Баланс влаги можно записать

$$dI_{ep0} = dI_{1x} - dI_{2x} \quad \text{или} \quad e\rho_0 dV dU_\tau = (i_{1x} - i_{2x}) F d\tau. \quad (5.1)$$

Плотность влаги на поверхности  $F$  слева  $i_{1x}$  изменяется до плотности влаги на поверхности  $F$  справа  $i_{2x}$  на бесконечно малом отрезке  $dx$ . Поэтому разность в круглых скобках есть тоже бесконечно малая величина. Так как индекс 2 означает последующее значение плотности, а индекс 1 – предыдущее, то согласно правилам записи дифференциала,

$$(i_{1x} - i_{2x}) = -di_x = -\frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Частный дифференциал

$$dU_\tau = \frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau.$$

После подстановки в (5.1) получаем

$$\epsilon \rho_0 F dx \frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau = -\frac{\partial i}{\partial x} dx F d\tau.$$

Откуда

$$\epsilon \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{\partial \left( -\gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\gamma}{\epsilon \rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Отношение  $\frac{\gamma}{\epsilon \rho_0} = \chi$  есть *потенциалопроводность вещества*, которая характеризует скорость распространения влажности и при нестационарном режиме находится из опытов.

Окончательно имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \chi \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (5.2)$$

Выражение (5.2) называется *дифференциальным уравнением влагопроводности для одномерного поля влажности в неограниченной пластине*.

Если процесс стационарный (в точках объема нет накопления или растраты влаги во времени), то распределение влажности остается все время постоянным. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{d^2 U}{dx^2} = 0. \quad (5.3)$$

Дифференциальные уравнения (5.2) и (5.3) в декартовой системе координат удобно использовать для тел плоской формы. Для тел, имеющих цилиндрическую форму, более удобно использовать эти же уравнения, записанные в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \chi \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = 0, \quad (5.4)$$

где  $r$  – текущий радиус цилиндра бесконечной протяженности.

### 5.3. ВЛАГОПРОВОДНОСТЬ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ И НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Одномерные уравнения Фурье (5.2) и Лапласа вида (5.3), (5.4) ранее уже были решены для явлений теплопроводности (см. гл. 2) одномерных температурных полей. Для получения решений явления влагопроводности в них надо произвести замену величин соответствующим образом:

- 1) вместо температуры  $T$  необходимо подставить влажность  $U$ ;
- 2) вместо коэффициента теплопроводности  $\lambda$  следует подставить коэффициент влагопроводности  $\gamma$ ;

- 3) аналогом количества тепла  $Q$  является количество влаги  $G$ ;  
 4) аналогом плотности теплового потока  $q$  является плотность потока влаги  $i$ ;  
 5) вместо коэффициента температуропроводности  $a$  должен фигурировать коэффициент теплопроводности  $\chi$ ;

6) необходимо помнить, что аналогом плотности материала  $\rho$  в явлениях теплопроводности является плотность сухой части материала  $\rho_0$  в явлениях влагопроводности;

7) аналогом коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  является коэффициент массоотдачи  $\beta$ ;

8) аналогом теплоемкости материала  $c$  в явлениях теплопроводности является величина влагоемкости сухой части материала в явлениях влагопроводности  $e$ ;

9) вместо теплового критерия Био, равного  $Bi_T = \frac{\alpha R}{\lambda}$ , фигурирует влажностный критерий Био, равный  $Bi_{вл} = \frac{\beta R}{\gamma}$ ;

10) вместо теплового критерия Фурье, равного  $Fo_T = \frac{a\tau}{R^2}$ , фигурирует влажностный критерий Фурье, равный  $Fo_{вл} = \frac{\chi\tau}{R^2}$ .

С учетом замечаний в вышеназванных пунктах 1) – 4) при стационарном режиме влагопроводности через плоский слой можно записать

$$U = U_1 - \frac{U_1 - U_2}{\delta} x \quad (0 \leq x \leq \delta); \quad G = \frac{\gamma}{\delta} F(U_1 - U_2);$$

$$G = \frac{F(U_{1f} - U_{2f})}{\frac{1}{\beta_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\gamma_i} + \frac{1}{\beta_2}}, \quad (5.5)$$

где  $x$  – текущая координата в пластине с началом координат на поверхности стенки (слева);  $\delta_i$  – толщина стенки  $i$ -го слоя;  $F$  – расчетная поверхность влагопроводности;  $U$  – поле влажности;  $U_1$  и  $U_2$  – влажность на поверхности стенки слева и справа;  $U_{1f}$  – влажность среды более высокого уровня (слева);  $U_{2f}$  – то же среды более низкого уровня (справа);  $\frac{\delta_i}{\gamma_i}$  – термическое сопротивление влагопроводности любого

$i$ -го слоя;  $\beta_1$  – коэффициент влагоотдачи от среды более высокого уровня влажности к поверхности первого слоя (слева);  $\beta_2$  – то же от поверхности последнего слоя (справа) к среде более низкого уровня влажности;  $\gamma_i$  – коэффициент влагопроводности любого  $i$ -го слоя.

Влажность среды  $U_{1f}$  и  $U_{2f}$  это количество влаги в объеме среды, отнесенное к количеству сухого материала стенки точно такого же объема.

С учетом замечаний в пунктах 5) – 9) для нестационарного режима симметричного наполнения влагой (с двух сторон) неограниченной пластины, при условии  $0 \leq \tau < \infty$ ;  $0 \leq x \leq |\pm R|$ , можно записать

$$\frac{U_c - U}{U_c - U_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{\chi\tau}{R^2}},$$

где  $U$  – симметричное (относительно начала координаты  $x$ ) поле влажности;  $U_c$  – влажность окружающей (симметричной) среды;  $U_0$  – начальная влажность неограниченной пластины (одинаковая по всему сечению);  $x$  – текущая координата, направленная по толщине пластины от ее середины до поверхности;  $\tau$  – текущее время наполнения влагой объема неограниченной пластины;  $R$  – половина толщины пластины;

$\chi$  – коэффициент теплопроводности;  $\text{ctg } \mu = \frac{1}{\text{Bi}_{\text{вл}}} \mu$ ,  $\text{Bi}_{\text{вл}} = \frac{\beta R}{\gamma}$ ,  $\beta$  – коэффициент теплоотдачи от окружающей среды к поверхности неограниченной пластины слева и справа.

В последнее время стали получать все более широкое распространение неметаллические трубы для подачи жидкости, имеющие капиллярно-пористую структуру. Теплопроводность через цилиндрический слой при стационарном режиме рассчитывается по формулам:

$$U = U_1 - \frac{U_1 - U_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}, \quad G = \frac{\pi L (U_1 - U_2)}{\frac{1}{2\gamma} \ln \frac{d_2}{d_1}},$$

$$G = \frac{\pi L (U_{1f} - U_{2f})}{\frac{1}{\beta_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\gamma_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\beta_2 d_{(n+1)}}}. \quad (5.6)$$

Условия (5.5) и (5.6) называются формулами теплопередачи через многослойную стенку от среды с большим уровнем влажности к среде с меньшим уровнем влажности.

#### 5.4. ПАРПРОНИЦАЕМОСТЬ

В технической теплофизике чаще всего пользуются законом теплопроводности, аналогичным закону теплопроводности:  $dG_{\text{п}} = i_{\text{п}} dF d\tau$ , где  $i_{\text{п}} = -\mu_{\text{п}} \frac{\partial P_{\text{п}}}{\partial x}$  – плотность потока пара;  $\mu_{\text{п}}$  – коэффициент теплопроводности вещества;  $P_{\text{п}}$  – парциальное давление пара;  $x$  – координата пространства.

Используя понятие плотности потока пара, можно точно таким же путем, как и в случае теплопроводности, получить дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial P_{\text{п}}}{\partial \tau} = M \frac{\partial^2 P_{\text{п}}}{\partial x^2}, \quad (5.7)$$

где  $M = \frac{\mu_{\text{п}}}{e_{\text{п}} \rho_0}$  называется *теплопроводностью вещества*,  $e_{\text{п}}$  – теплоемкость сухого материала;  $\rho_0$  – плотность материала в сухом состоянии.

При стационарном режиме первая производная парциального давления пара по времени равна нулю, благодаря чему дифференциальное уравнение теплопроводности (5.7) упрощается:

$$\frac{d^2 P_{\text{п}}}{dx^2} = 0. \quad (5.8)$$

В цилиндрической системе координат, соответственно, имеем

$$\frac{\partial P_{\text{п}}}{\partial \tau} = M \left( \frac{\partial^2 P_{\text{п}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{\text{п}}}{\partial r} \right), \quad \frac{d^2 P_{\text{п}}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP_{\text{п}}}{dr} = 0.$$

Решение дифференциального уравнения паропроницаемости (5.8) может быть представлено по аналогии с влажностью. Расчетные формулы для плоской стенки, соответственно:

$$P_{\text{п}} = P_{\text{п1}} - \frac{P_{\text{п1}} - P_{\text{п2}}}{\delta} x \quad (0 \leq x \leq \delta), \quad G_{\text{п}} = \frac{\mu_{\text{п}}}{\delta} F (P_{\text{п1}} - P_{\text{п2}}),$$

$$G_{\text{п}} = \frac{F (P_{\text{п1f}} - P_{\text{п2f}})}{\frac{1}{\beta_{\text{п1}}} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\mu_{\text{пi}}} + \frac{1}{\beta_{\text{п2}}}}, \quad (5.9)$$

где  $P_{\text{п}}$  – поле парциального давления пара;  $x$  – текущая координата с началом координат на поверхности стенки слева;  $P_{\text{п1}}$  и  $P_{\text{п2}}$  – парциальное давление пара на поверхности стенки слева и справа;  $\delta_i$  – толщина стенки любого  $i$ -го слоя;  $F$  – расчетная поверхность паропроницаемости;  $\mu_{\text{пi}}$  – коэффициент паропроницаемости стенки (любого  $i$ -го слоя),  $P_{\text{п1f}}$  и  $P_{\text{п2f}}$  – парциальное давление пара среды более высокого уровня (слева) и более низкого уровня (справа);  $\frac{\delta_i}{\mu_{\text{пi}}}$  – термическое сопротивление паропроницаемости любого  $i$ -го слоя;  $\beta_{\text{п1}}$  – коэффициент паротдачи от среды более высокого уровня парциального давления пара к поверхности первого слоя (слева);  $\beta_{\text{п2}}$  – то же от поверхности последнего слоя (справа) к среде более низкого уровня парциального давления пара.

## 5.5. ВОЗДУХОПРОНИЦАЕМОСТЬ

Основной закон воздухопроницаемости, или фильтрации, записывается по аналогии с основным законом теплопроводности:

$$W = -f \frac{\partial P}{\partial x}, \quad dD = W dF d\tau,$$

где  $W$  – плотность потока фильтрации воздуха;  $f$  – коэффициент фильтрации;  $P$  – полное давление воздуха.

Используя понятие плотности потока фильтрации воздуха, можно точно таким же путем, как и в случае влажностью, получить дифференциальное уравнение фильтрации воздуха

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \Phi \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (5.10)$$

где  $\tau$  – текущее значение времени;  $\Phi = \frac{f}{e_{\text{воз}} \rho}$  – паропроводность вещества,  $e_{\text{воз}}$  – воздухоемкость материала;  $\rho$  – плотность вещества.

При стационарном режиме  $\frac{\partial P}{\partial \tau} = 0$ . Тогда из (5.10) следует  $\frac{d^2 P}{dx^2} = 0$ .

Для плоского слоя (по аналогии с паропроницаемостью)

$$P = P_1 - \frac{P_1 - P_2}{\delta} x; \quad D = \frac{f}{\delta} F (P_1 - P_2);$$

$$D_{\text{п}} = \frac{F (P_{1f} - P_{2f})}{\frac{1}{\beta_{\text{воз1}}} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{f_i} + \frac{1}{\beta_{\text{воз2}}}}, \quad (5.11)$$

где  $P$  – поле давления воздуха в плоской стенке;  $x$  – текущая координата с началом на поверхности стенки слева;  $P_1$  – полное давление воздуха на поверхности стенки слева;  $P_2$  – полное давление воздуха

на поверхности стенки справа;  $\delta_i$  – толщина стенки любого  $i$ -го слоя;  $F$  – расчетная поверхность фильтрации воздуха;  $f_i$  – коэффициент фильтрации любого  $i$ -го слоя;  $P_{1f}$  – полное давление воздушной среды более высокого уровня (слева);  $P_{2f}$  – полное давление воздушной среды более низкого уровня (справа);  $\frac{\delta_i}{f_i}$  – термическое сопротивление фильтрации любого  $i$ -го слоя;  $\beta_{\text{воз } 1}$  – коэффициент воздухоотдачи от среды более высокого уровня давления воздуха к поверхности первого слоя (слева);  $\beta_{\text{воз } 2}$  – то же от поверхности последнего слоя (справа) к среде более низкого уровня давления воздуха.

## 5.6. ВЛАГОПРОВОДНОСТЬ И ФИЛЬТРАЦИЯ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Распространение влаги путем влагопроводности обуславливается явлением диффузии молекул влаги, которая возникает всегда, когда имеет место разность в объеме капиллярно-пористого тела. Но перемещение влаги возможно и по другой причине – разности полных давлений в объеме тела. В случае одновременного действия этих двух эффектов плотность влажностного потока складывается как сумма плотности потока влагопроводности и плотности фильтрационного потока влаги. При этом в практических условиях может оказаться известной скорость фильтрации влаги. Тогда задача доводится до расчетного уравнения, так как общая плотность влажностного потока выражается соотношением

$$j = -\gamma \frac{dU}{dx} + \rho\omega, \quad (5.12)$$

где  $\omega$  – скорость фильтрации;  $\rho$  – плотность фильтруемой влаги.

Если ось  $x$  направить по толщине стенки  $\delta$  слева направо, то произведение  $(dxF)$  будет соответствовать элементарно малому объему стенки, высота которого перпендикулярна выбранной оси координат. Пусть на поверхности  $F$  слева действует плотность влажностного потока, направленная в сторону положительных значений оси координат, равная  $j_1$ . Тогда внутрь объема  $(dxF)$  будет входить в единицу времени количество влаги  $(Fj_1)$ . В этот же момент изнутри объема будет выходить количество влаги через поверхность  $F$  справа, равное  $(Fj_2)$ , где  $j_2$  – плотность влажностного потока на поверхности  $F$  справа. При стационарном режиме в элементарном объеме  $(dxF)$  не может быть накопления или убыли влаги.

Поэтому  $(Fj_1) - (Fj_2) = 0$ , т.е.  $(j_1 - j_2) = 0$ . Так как  $j_1$  изменяется до  $j_2$  на очень малом отрезке пути  $dx$ , то разность в круглых скобках есть бесконечно малая величина. С учетом правила записи дифференциала  $(j_1 - j_2) = -dj = 0$ .

Следовательно,

$$-d \left[ -\gamma \frac{dU}{dx} + \rho\omega \right] = 0 \quad \text{или} \quad -\frac{d}{dx} \left[ -\gamma \frac{dU}{dx} + \rho\omega \right] = 0.$$

После выполнения дифференцирования получаем

$$\gamma \frac{d^2U}{dx^2} - \omega \frac{d\rho}{dx} = 0.$$

Согласно понятию влажности

$$U = \frac{G_{\text{вл}}}{G_{\text{сух}}} = \frac{\rho_{\text{вл}} V}{\rho_{\text{сух}} V} = \frac{\rho_{\text{вл}}}{\rho_{\text{сух}}}.$$

С учетом этого

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \left( \frac{\omega \rho_{\text{сух}}}{\gamma} \right) \frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2U}{dx^2} - K \frac{dU}{dx} = 0.$$

Если положить  $K = -P$ , то решение уравнения будет иметь вид

$$U = U_1 - \frac{U_1 - U_2}{e^{+K\delta} - 1} (e^{+Kx} - 1),$$

где  $U$  – поле влажности в плоской стенке;  $U_1$  – влажность на поверхности стенки слева;  $U_2$  – то же справа;  $K = \frac{\omega \rho_{\text{сyx}}}{\gamma}$ .

Однако скорость  $\omega$  не всегда бывает известной величиной. В этих случаях плотность потока влаги выражается как

$$j = -\gamma \frac{dU}{dx} - f \frac{dP}{dx}. \quad (5.13)$$

При этом полагается, что диффузионный процесс влагопроводности и фильтрационный процесс распространения влаги не влияют друг на друга. Используя (5.12), по аналогии с (5.13) можно установить дифференциальное уравнение для стационарного режима

$$\frac{d^2 \left[ U + \frac{f}{\gamma} P \right]}{dx^2} = 0 \quad \text{или} \quad \left[ U + \frac{f}{\gamma} P(x) \right] = \varphi(x).$$

Зная вид  $\varphi(x)$ , получаем  $U = \varphi(x) - \frac{f}{\gamma} P(x)$ .

Таким образом, в этом случае поле влажности может быть рассчитано только тогда, когда, либо задано, либо измерено поле полных давлений в пластине  $P(x)$ .

### **5.7. СТАЦИОНАРНЫЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ РЕЖИМ ВЛАГОПРОВОДНОСТИ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ**

Явление стационарного распространения влаги в неизотермическом режиме усложняется тем, что процессы теплопроводности и влагопроводности, протекающие одновременно, оказывают взаимное влияние друг на друга. Последнее учитывается термоградиентным коэффициентом влажного материала, представляющим собой отношение изменения влажности к изменению температуры. С учетом термоградиентного коэффициента влажного материала плотность потока влаги определяется следующим выражением:

$$j = -\gamma \frac{dU}{dx} - \gamma H \frac{dT}{dx}, \quad (5.14)$$

где  $H = \frac{\Delta U}{\Delta T}$  – термоградиентный коэффициент влажного материала.

Для целого ряда случаев он может быть принят постоянным. Тогда используя (5.14), можно вывести дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + H \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2}{dx^2} (U + HT) = 0,$$

и решением последнего уравнения является функция от  $x$ :

$$(U + HT) = f(x),$$

а поле влажности находится через поле температуры:

$$U = f(x) - HT(x).$$

Таким образом, поле стационарного распределения температуры должно быть задано или определено экспериментально.

**П р и м е ч а н и е.** В периодической литературе иногда процессы теплопроводности, влагопроводности, паропроницаемости и фильтрации рассматривают как обобщенный способ тепломассообмена. Вместо "распространения тепла, влаги, пара, воздуха", фигурирует понятие "распространение субстанции". Вместо параметров "температура, влажность, давление", оперируют термином "потенциал". Аналогом коэффициента теплопроводности, влагопроводности, фильтрации является коэффициент распространения субстанции. Точно так же аналогом температуропроводности, паропроводности и так далее является потенциалопроводность. Результаты такого обобщенного исследования могут быть использованы в любом частном случае при условии соответствующей трансформации размерностей физических величин.

## 6. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

---

### 6.1. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СЛОЖНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Явления нагрева или охлаждения тел лучистым тепловым потоком представляют большой практический интерес, встречаются наряду с другими видами теплообмена и преобладают всюду, где действуют высокие температуры. В чистом виде явление радиационного нагрева может быть получено в условиях вакуума. Математически такой процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\xi - 1}{x} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (6.2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{п}}}{100} \right)^4 \right], \quad (6.3)$$

$$T(x, 0) = T_0. \quad (6.4)$$

Здесь  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенная степень черноты системы;  $T_c$  – температура излучающего источника;  $\xi = 1; 2$  – безразмерный фактор формы соответственно для неограниченной пластины и бесконечного цилиндра.

Выражение (6.3) – граничное условие задачи, представленное с помощью законов Фурье и Стефана–Больцмана. Разность четвертых степеней абсолютных температур, входящая в это условие, затрудняет аналитическое решение задачи (6.1) – (6.4) в строгой и явной форме. Поэтому для практических надобностей приходится использовать данные ЭВМ и зависимости, приближенно отражающие процесс лучистого нагревания тел. Критерием, характеризующим теплообмен на границах тела при радиационном нагревании, является безразмерный комплекс

$$Ki = \frac{\varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 R}{\lambda T_c}.$$

В зависимости от его величины можно выделить ряд частных примеров. Когда критерий  $Ki \rightarrow \infty$ , рассматриваемая краевая задача называется внутренней, так как температура поверхности становится равной температуре греющей среды с первых моментов времени, т.е. создаются граничные условия первого рода. Расчет температурного поля в этом случае производится строго на основе известного решения

$$T = T_c - (T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} B(x) e^{-\mu_n^2 Fo}.$$

Когда  $Ki \rightarrow 0$ , рассматриваемая краевая задача называется внешней, так как температура тела по всему объему оказывается одинаковой на протяжении всего процесса, т.е. имеет место нагрев термически тонкого тела. Расчет времени нагрева производится на основе решения

$$\tau = - \frac{(c\rho)RT_c}{4\xi\varepsilon_{\text{пр}}C_0\left(\frac{T_c}{100}\right)^4} \left\{ \ln \left[ \frac{T_c - T}{T_c + T} \frac{T_c + T_0}{T_c - T_0} \right] - 2 \left[ \text{arctg} \frac{T}{T_c} - \text{arctg} \frac{T_0}{T_c} \right] \right\}.$$

Если  $\frac{T_{\text{п}}}{T_c} < 0,5$ , то, согласно (6.3),  $T_{\text{п}}^4 \ll T_c^4$ . Это означает, что, пока  $T_{\text{п}} < 0,5T_c$ , нагрев тела фактически осуществляется постоянным тепловым потоком. В этот отрезок времени расчет температурного поля может производиться приближенно на основе решения

$$T = T_0 + \frac{\varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 R}{\lambda} \left\{ \xi Fo - \left[ \frac{\xi}{2(2+\xi)} - \frac{1}{2} x^2 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} z(x) e^{-\mu_n^2 Fo} \right\}.$$

При нагревании неограниченной пластины постоянным потоком в самые первые моменты времени расчет температуры более удобно производить, используя уравнение

$$T = T_0 + \frac{\varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 R}{\lambda} 2\sqrt{Fo} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \text{ierfc} \frac{(2n-1)-x}{2\sqrt{Fo}} + \text{ierfc} \frac{(2n-1)+x}{2\sqrt{Fo}} \right].$$

Здесь  $\text{ierfc}(0) = 0,564$ ,  $\text{ierfc}(1) = 0,05$ ,  $\text{ierfc}(2) = 0,001$  и т.д.

Поэтому для начальных распределений температуры, пока тепловое возмущение не затронет центральную часть тела, расчет может производиться с учетом лишь одного, первого, члена бесконечного ряда. Так,

$$T_{\text{п}} = T_0 + \frac{\varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left(\frac{T_0}{100}\right)^4 R}{\lambda} 2\sqrt{\text{Fo}} \left[ 0,564 + \text{ierfc} \frac{1}{\sqrt{\text{Fo}}} \right].$$

Начиная с некоторого момента времени, процесс нагревания вступает в стадию упорядоченного теплового режима, на протяжении которого наблюдаются закономерности:

$$\ln \left[ 1 - \left( \frac{T_{\text{п}}}{T_c} \right)^4 \right] - \frac{3,5}{1+m} \frac{T_{\text{п}}}{T_c} = -\mu_1^2 \frac{m}{1+m} \text{Fo} + \text{const},$$

$$\ln(T_{\text{п}} - T) - \frac{3,5}{1+m} \frac{T_{\text{п}}}{T_c} = -\mu_1^2 \frac{m}{1+m} \text{Fo} + \text{const}.$$

Здесь

$$m = 2\text{Ki} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2\xi}{\mu_1^2} \right) e^{-\text{Ki}} \right],$$

где  $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{1,31}$  – соответственно, для неограниченной пластины и бесконечного цилиндра.

При  $\text{Fo} \rightarrow \text{Fo}^*$  (начало упорядоченного периода) имеет место стремление к пределу  $T_{\text{п}} \rightarrow T_{\text{п}}^*$ ;  $T \rightarrow T^*$ . Таким образом, если известны значения входных параметров ( $\text{Fo}^*$ ,  $T_{\text{п}}^*$ ,  $T^*$ ), то константы в закономерностях упорядоченного теплового режима становятся известными. Тогда время нагревания (критерий Фурье) и температура внутри объема тела могут определяться по температуре поверхности.

Если лучистый тепловой поток при нагревании тела воздействует параллельно с другими видами теплообмена, то граничное условие (6.3) еще более усложняется. При суммарном тепловом потоке – одновременно лучистом и конвективном – оно записывается в форме

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{п}}}{100} \right)^4 \right] + \alpha (T_c - T_{\text{п}}).$$

Очень часто плоские тела нагревают путем прижатия к ним горячих поверхностей (граничные условия четвертого рода). Для строгого соблюдения граничных условий четвертого рода необходимо обеспечивать идеальный контакт между нагреваемыми и греющими поверхностями. Когда же этого достичь не удастся, граничные условия задачи приходится рассматривать как более сложные, выраженные суммарным тепловым воздействием

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} = q_1 s + (F - s)(q_2 + q_3),$$

где  $F$  – общая площадь теплообмена;  $s$  – общая площадь контактной теплопроводности;  $q_1$  – плотность теплового потока;  $q_2$  – плотность теплового потока через контакты;  $q_3$  – плотность теплового потока через контакты.

$q_2$  – тепловой поток теплопроводности через воздушные зазоры;  
 $q_3$  – радиационный тепловой поток через воздушные зазоры.

Строгое и явное решение системы (6.1) – (6.4) при суммарном тепловом потоке на границах тела получить не удастся. С целью упрощения суммарный теплообмен заменяют каким-либо одним видом теплообмена. Например, совместный лучистый и конвективный теплообмен часто сводят к конвективному (по форме), используя следующую схему:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{п}}}{100} \right)^4 \right] + \alpha_k (T_c - T_{\text{п}}) = \\ & = \left\{ \frac{\varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{п}}}{100} \right)^4 \right]}{(T_c - T_{\text{пов}})} + \alpha_k \right\} (T_c - T_{\text{п}}) = \\ & = (\alpha_{\text{л}} + \alpha_k) (T_c - T_{\text{п}}) = \alpha_0 (T_c - T_{\text{п}}). \end{aligned}$$

где  $\alpha_k$  – коэффициент теплоотдачи конвекцией;  $\alpha_{\text{л}}$  – коэффициент теплоотдачи лучеиспусканием;  $\alpha_0 = (\alpha_{\text{л}} + \alpha_k)$  – эффективный коэффициент теплообмена (обычно принимается как средняя за время процесса постоянная величина).

В итоге задача становится разрешимой. Однако результат такого аналитического решения может быть использован только в первом приближении, так как

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{\varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{п}}}{100} \right)^4 \right]}{(T_c - T_{\text{п}})}$$

в действительности является переменной величиной, имеющей широкие пределы изменения. Распределение температуры в пространстве и во времени более точно получается путем численного интегрирования системы (6.1) – (6.4) с помощью ЭВМ при любом выражении граничных условий.

## 6.2. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ РАЗНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Если температуры одновременно действующих источников тепла равны между собой, то граничное условие на поверхности твердого тела записывается следующим образом:

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=R} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_{\text{с}2}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{п}}}{100} \right)^4 \right] + \alpha (T_{\text{с}2} - T_{\text{п}}).$$

В тех случаях, когда температуры источников неодинаковы,

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=R} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_{\text{с}2}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{\text{п}}}{100} \right)^4 \right] + \alpha (T_{\text{с}1} - T_{\text{п}}).$$

Применяя методы теории подобия, эти граничные условия можно выразить через безразмерные критерии:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=1} = \text{Ki} [1 - \theta_n^4] + \text{Bi} (1 - \theta_n); \quad (6.5)$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=1} = \text{Ki} [1 - \theta_n^4] + \text{Bi} (\theta_{c1} - \theta_n), \quad (6.6)$$

где  $\theta = \frac{T}{T_{c2}}$ ;  $\text{Ki} = \frac{\varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left(\frac{T_{c2}}{100}\right)^4 R}{\lambda T_{c2}}$ ;  $\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}$ ;  $\theta_{c1} = \frac{T_{c1}}{T_{c2}}$ .

Как видно из формулы (6.5), температурное поле в теле при одинаковых температурах источников является функцией критериев  $\text{Ki}$  и  $\text{Bi}$ . Если же температуры лучистого и конвективного источников не равны, то как видно из формулы (6.6), температурное поле в теле зависит также от отношения температур источников  $\theta_{c1} = \frac{T_{c1}}{T_{c2}}$ .

Следовательно, анализ температурного поля усложняется, так как приходится учитывать влияние трех параметров  $\text{Ki}$ ;  $\text{Bi}$ ;  $\theta_{c1}$ .

Если ввести новую переменную  $\theta = A \vartheta$ , где  $A$  – некоторое постоянное положительное число, то выражение (6.7) перепишется так:

$$A \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=1} = \text{Ki} [1 - A^4 \vartheta_n^4] + \text{Bi} (\theta_{c1} - A \vartheta_n).$$

Прибавляя и вычитая величины  $\text{Bi}$  и  $(A^3 \text{Ki})$ , правую часть равенства можно представить как сумму

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) = \text{Ki} A^3 (1 - \vartheta_n^4) + \text{Bi} (1 - \vartheta_n) + \frac{\text{Ki}}{A} + \frac{\text{Bi}}{A} \theta_{c1} - \text{Ki} A^3 - \text{Bi}.$$

Выбор  $A$  должен быть таким, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\text{Ki}}{A} + \frac{\text{Bi}}{A} \theta_{c1} - \text{Ki} A^3 - \text{Bi} = 0, \text{ или } 1 + \left(\frac{\text{Bi}}{\text{Ki}}\right) \theta_{c1} - A^4 - \left(\frac{\text{Bi}}{\text{Ki}}\right) A = 0.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=1} = \text{Ki} A^3 (1 - \vartheta_n^4) + \text{Bi} (1 - \vartheta_n)$$

или

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=1} = \text{Ki}^* (1 - \vartheta_n^4) + \text{Bi} (1 - \vartheta_n), \quad (6.7)$$

где  $K_i^* = K_i A^3$ , а  $A$  является корнем уравнения (6.7).

Граничное условие (6.7) по своей форме аналогично граничному условию (6.5), когда температуры лучистого и конвективного источников одинаковы.

## 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛОВ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ТЕМПЕРАТУР НА ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ

В настоящее время расширяются работы по исследованию и разработке более совершенных способов определения теплофизических характеристик различных материалов. Несмотря на определенные успехи в этом направлении, методы предсказания свойств пока еще должного развития не получили, и главным источником информации остается эксперимент. Важнейшим условием повышения эффективности эксперимента является высокая производительность всего цикла измерений, включая монтаж и демонтаж образцов. Это требует разработки и внедрения неразрушающих методов испытания материалов, которые практически позволяют оценить качество продукции.

Все большее внимание исследователей привлекают быстродействующие и комплексные методы, создание которых возможно только на основе использования нестационарных процессов, когда можно определить одновременно многие теплофизические свойства материалов. Кроме того, нестационарные методы исследования затрачивают незначительное количество тепловой энергии и времени для проведения эксперимента.

### 7.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ

При нагревании или охлаждении твердого тела наблюдается несколько характерных тепловых режимов, протекающих последовательно: начальный и упорядоченный (если граничные условия симметричные); начальный, упорядоченный и стационарный (если граничные условия несимметричные).

Начальный тепловой период определяется исходным состоянием системы и описывается сложными математическими соотношениями. Упорядоченный режим наступает по истечении некоторого отрезка времени от начала процесса, когда внешнее тепловое воздействие затронет в какой-то мере центральные участки объема тела. Обычно эта стадия, в отличие от начальной, описывается более простыми аналитическими выражениями.

Главная особенность упорядоченного режима состоит в том, что с момента его наступления некоторая математическая комбинация температуры начинает изменяться во времени по закону прямой линии. Для решения многих практических задач очень важно знать тангенс угла наклона такой линии. В частности, это используется при определении теплофизических свойств материалов нестационарными методами. Упорядоченный тепловой режим асимптотически подходит к равновесному термодинамическому состоянию (при симметричном распространении тепла) или вписывается в стационарную стадию (при несимметричных краевых условиях), математическое описание которых еще более упрощается. Все эти тепловые режимы широко применяют в инженерной практике и научных исследованиях.

*Тепловой период нагревания или охлаждения тела, начиная с которого некоторый температурный комплекс  $\Phi$  любой точки изменяется во времени по закону прямой линии, называется упорядоченным тепловым режимом.*

Закономерности упорядоченного теплового режима включают в свою структуру коэффициент температуропроводности вещества. Она как составляющая и постоянная величина входит множителем в дифференциальное уравнение теплопроводности, описывающее процесс распространения тепла в твердых телах. Однако определить ее экспериментальным путем непосредственно из дифференциального уравнения невозможно, так как пришлось бы измерять вторую производную от температуры по координатам, что дает очень большую погрешность. Поэтому в существующих методах вначале решается дифференциальное уравнение для каких-то конкретных условий и только потом создается соответствующая экспериментальная установка.

Интерес к измерениям коэффициента температуропроводности обусловлен рядом причин. Прежде всего, температуропроводность является паспортной характеристикой существующих и вновь разрабатываемых материалов, число которых непрерывно растет. Тесно связаны со знанием температуропро-

водности задачи экономии энергии, расчета тепловых режимов сложных конструкций, оптимизации технологических процессов в различных температурных интервалах.

В литературе можно встретить ряд методов, позволяющих определять температуропроводность материалов и веществ. Эти методы обладают своими преимуществами и недостатками. К недостаткам методов относят необходимость создания постоянного теплового потока, либо проведения эксперимента в обстановке капельной среды при постоянной ее температуре или требование выдерживать малые геометрические размеры исследуемых образцов. Однако образцы гетерогенных, композиционных материалов, минералов, горных пород не могут быть сколь угодно малыми. Если на границе тела действует более сложный (лучистый или суммарный) теплообмен, то задачи такого рода значительно усложняются как теоретически, так и экспериментально. При использовании таких методов, как квазистационарный, импульсный, монотонного и периодического нагрева, термоупругих явлений требуется сложное и дорогостоящее оборудование. В большинстве методов установка датчиков температур проводится внутри тела, что связано с рядом трудностей, так как расположение термопар в центральной части нарушает целостность образца.

Закономерности распространения тепла в твердых телах всегда привлекали внимание многих исследователей. Большой вклад в науку внесли ученые: А.В. Лыков [39, 40], Н.Ю. Тайц [53], В.В. Курепин [32 – 36], Г.Н. Дульнев [19, 20], Г.М. Кондратьев [29], Е.С. Платунов [46, 47], Л.П. Филиппов [65, 66], В.П. Черпаков [69], А.Г. Шашков [73], С.Ф. Чистяков [71] и др.

## 7.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ В ПРИЗМЕ

Рассмотрим призму прямоугольного сечения (рис. 1.1) бесконечной длины ( $z \rightarrow \infty$ ), которая симметрично нагревается с боковых сторон. При любых граничных условиях этот процесс может быть описан дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right] \quad (7.1)$$

с условиями однозначности (симметрии, граничными и начальными):

$$\frac{\partial T(0, y, \tau)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0;$$

$$T(R, y, \tau) = T_n(y, \tau); \quad T(x, R, \tau) = T_n(x, \tau); \quad T(x, y, 0) = T_0.$$

Выражение (7.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2} \left[ 1 + \frac{\frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2}} \right] = \\ &= a \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2} \left( 1 + \frac{\text{grad}_y g}{\text{grad}_x g} \right) = a \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2} (1 + \beta_y), \end{aligned} \quad (7.2)$$

где  $\beta_y$  – отношение составляющей градиента теплового потока в направлении  $y$  к составляющей градиента теплового потока в направлении  $x$ .

Если призму нагревать симметрично конвективным потоком тепла, то температурное поле по ее сечению можно определить по принципу перемножения температурных критериев [39]:

$$T(x, y, \tau) = T_c - (T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R_A}\right) \times e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R_A^2}} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos\left(\mu_m \frac{y}{R_B}\right) e^{-\mu_m^2 \frac{a\tau}{R_B^2}}. \quad (7.3)$$

Составляющие градиента теплового потока в направлении  $x$  и  $y$  соответственно будут равны

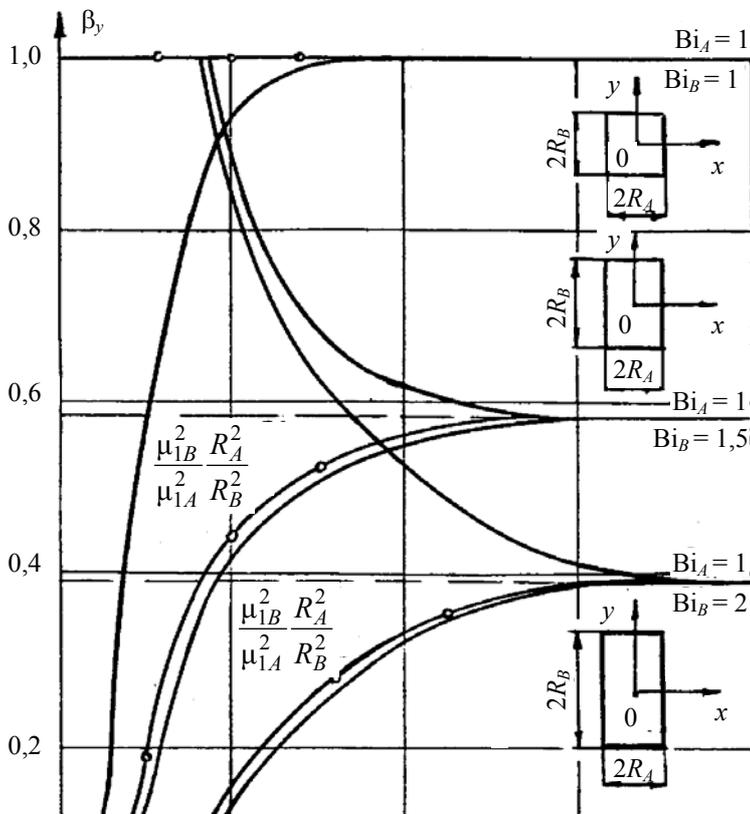
$$\frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2} = (T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\mu_n^2}{R_A^2} \cos\left(\mu_n \frac{x}{R_A}\right) \times e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R_A^2}} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos\left(\mu_m \frac{y}{R_B}\right) e^{-\mu_m^2 \frac{a\tau}{R_B^2}}; \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial y^2} = (T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R_A}\right) \times e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R_A^2}} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{\mu_m^2}{R_B^2} \cos\left(\mu_m \frac{y}{R_B}\right) e^{-\mu_m^2 \frac{a\tau}{R_B^2}}. \quad (7.5)$$

Используя решение (7.3) – (7.5) можно показать изменения соотношений составляющих градиента теплового потока  $\beta_y$  для различных вариантов (рис. 7.1). В начальном периоде теплового воздействия отношение составляющих градиента теплового потока является функцией критерия  $Fo$ , но с течением времени процесс становится автомодельным относительно аргумента  $\tau$ . Это происходит потому, что в области регулярного режима ( $\tau > \tau_*$ ) выражение (7.3) упрощается, а кривые асимптотически стремятся к пределу

$$\beta_y(Bi_A, Bi_B) = \frac{\mu_{1B}^2}{\mu_{1A}^2} \frac{R_A^2}{R_B^2},$$

где  $\mu_{1A}$  и  $\mu_{1B}$  – первые характеристические числа, зависящие от чисел Био, определяемых по выражениям  $Bi_A = (\alpha R_A) / \lambda_c$ ;  $Bi_B = (\alpha R_B) / \lambda_c$ .



**Рис. 7.1. График изменения величины  $\beta_y$ , когда на границах призмы действует конвективный тепловой поток ( $Bi_A = 1$ ;  $Bi_B = 1,5$ ;  $Bi_B = 2$ ):**

—○— — величина  $\beta_y$  для центра; — — величина  $\beta_y$  для поверхности

Таким образом, в регулярной стадии  $\beta_y$  не зависит от критерия  $Fo$ , а является функцией  $Bi_A$  и  $Bi_B$  и отношениями между измерениями сторон призмы  $R_A$  и  $R_B$  во второй степени. При  $R_B \rightarrow R_A$ , призма принимает форму квадратного сечения, а значение  $\beta_y$  начинает стремиться к своему предельному значению, равному единице. Отношение составляющих градиента теплового потока  $\beta_y$  (когда  $R_A = R_B$ ) при лучистом нагреве призмы квадратного сечения также равно единице в области упорядоченного теплового периода. Этот же результат получается при симметричном нагреве призмы квадратного сечения и суммарным потоком тепла (одновременно конвекцией и радиацией).

Следовательно, для области упорядоченного теплового периода в призме квадратного сечения бесконечной длины, условия нагревания могут быть описаны следующими зависимостями:

$$\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} = 2a \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial T(0, x, \tau)}{\partial x} = 0,$$

$$T(R, y, \tau) = T_{II}(y, \tau), \quad T(x, y, \tau_*) = T^*(x, y), \quad (7.6)$$

где  $\tau > \tau_*$ .

В процессах распространения тепла, описываемых системой уравнений (7.6), искомое температурное поле является функцией многих физических параметров. Поскольку любое явление природы не зависит от выбранной системы единиц и величин измерения, то наиболее целесообразно описывать его совокупностью уравнений в безразмерном виде (7.7) – (7.10). Безразмерная форма имеет ряд преимуществ и замечательна тем, что охватывает множество явлений, подобных друг другу и, кроме того, позволяет оперировать значительно меньшим числом аргументов:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (7.8)$$

$$\theta(1, Fo) = \theta_{II}(Fo), \quad (7.9)$$

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0. \quad (7.10)$$

Эти математические условия позволяют получить решение в неявной форме с точностью до неизвестной постоянной величины (константы)

$$\Phi = \ln [T(R, y, \tau) - T(0, y, \tau)] - 1,23 \int \frac{dT(R, y, \tau)}{T(R, y, \tau) - T(0, y, \tau)} = -4,94 \frac{a}{R^2} \tau + \text{const.} \quad (7.11)$$

Полученное выражение (7.11) является закономерностью упорядоченного теплового режима в призме квадратного сечения при любых симметричных условиях теплообмена на границе. Закономерность упорядоченного теплового режима (7.11) не лимитируется параметрами и физическими переменными внешней среды. При ее практическом использовании нет необходимости измерять температуру окружающей среды или поддерживать ее постоянной. В структуру закономерности не входят такие физические характеристики, как коэффициент теплообмена, степень черноты и др. Температура окружающей среды может изменяться во времени. Однако во всех случаях необходимым условием является наступление упорядоченного теплового периода, т.е. когда температурный комплекс  $\Phi$  начнет изменяться во времени по закону прямой линии.

Если температуру измерять в конкретных парах точек I–II, III–IV, V–VI сечения призмы (рис. 7.2), то выражение упорядоченного теплового режима для каждой пары запишется следующим образом:

$$\Phi_{I-II} = \ln (T_{II} - T_I) - 1,23 \int \frac{dT_{II}}{T_{II} - T_I} = -4,94 \frac{a}{R^2} \tau + \text{const}, \quad (7.12)$$

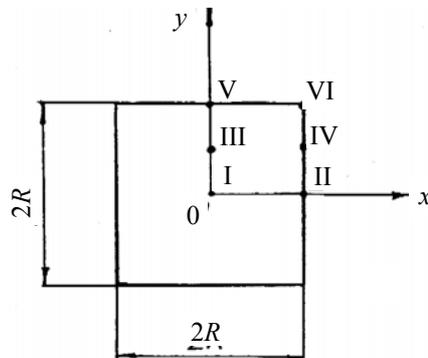
$$\Phi_{III-IV} = \ln (T_{IV} - T_{III}) - 1,23 \int \frac{dT_{IV}}{T_{IV} - T_{III}} = -4,94 \frac{a}{R^2} \tau + \text{const}, \quad (7.13)$$

$$\Phi_{V-VI} = \ln (T_{VI} - T_V) - 1,23 \int \frac{dT_{VI}}{T_{VI} - T_V} = -4,94 \frac{a}{R^2} \tau + \text{const}. \quad (7.14)$$

**Рис. 7.2. Расчетные точки**

**призмы квадратного сечения:**

- I  $\equiv (x = y = 0)$ ;
- II  $\equiv (x = R; y = 0)$ ;
- III  $\equiv (x = 0; y = 0,5 R)$ ;
- IV  $\equiv (x = R; y = 0,5 R)$ ;
- V  $\equiv (x = 0; y = R)$ ;
- VI  $\equiv (x = R; y = R)$



Когда призма нагревается конвективным потоком тепла, то температурное поле в области упорядоченного теплового режима может быть описано известным распределением [39]:

$$\frac{T_c - T}{T_c - T_0} = D_1^2 \cos\left(\mu_{1n} \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_{1n}^2 \frac{ax}{R^2}} \cos\left(\mu_{1m} \frac{y}{R}\right) e^{-\mu_{1m}^2 \frac{ay}{R^2}}. \quad (7.15)$$

Результат непосредственной подстановки решения (7.15) в закономерность (7.12) – (7.14) подтверждает правильность этих уравнений при любых значениях критерия конвективного теплообмена  $Bi$ .

Проверка закономерности упорядоченного теплового режима при симметричном нагревании призмы квадратного сечения бесконечной длины лучистым потоком тепла, осуществляется только числен-

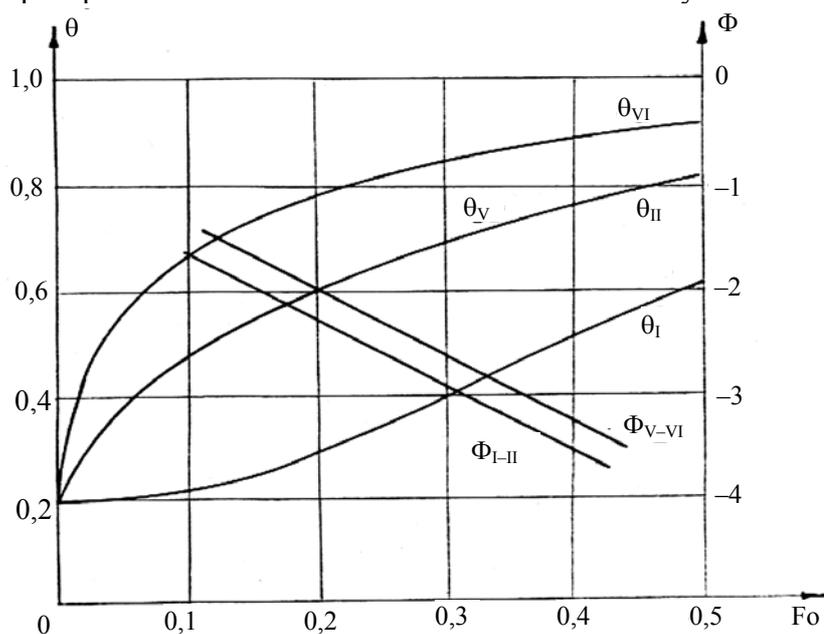
ным методом. При численном решении системы (7.7) – (7.10) был использован метод конечных разностей. Расчетные формулы, удобные для программирования и решения на ЭВМ имеют следующий вид:

$$\theta_{Fo+\Delta Fo, I} = \theta_{I, Fo} + 4\Delta Fo M^2 (\theta_{I+\Delta Y, Fo} - \theta_{I, Fo}) + 4\Delta Fo M Ki (1 - \theta_{I, Fo}^4), \quad (7.16)$$

$$\theta_{N, Fo+\Delta Fo} = \theta_{N, Fo} + \Delta Fo M^2 (\theta_{N+Y, Fo} + \theta_{N-Y, Fo} + 2\theta_{N-X, Fo} - 4\theta_{N, Fo}) + 2\Delta Fo M Ki (1 - \theta_{N, Fo}^4). \quad (7.17)$$

Проверка закономерности упорядоченного теплового режима при граничных условиях, соответствующих лучистому и суммарному потоку тепла (одновременно радиации и конвекции), проводится по результатам численного интегрирования на ЭВМ. На рис. 7.3 показан график зависимости безразмерных температур  $\theta$  от значений критерия Фурье ( $Fo$ ) в точках I, II, V, VI при нагревании призмы квадратного сечения суммарным тепловым потоком. По правой оси ординат на рисунках нанесены результаты вычислений  $\Phi_{I-II}$ ,  $\Phi_{V-VI}$  на основе закономерности (7.12) и (7.14).

Из графических построений видно, что тангенс угла наклона или ее угловой коэффициент  $\Delta\Phi/\Delta Fo$ , численно равен множителю 4,94. Подобные расчеты были выполнены для большого числа сочетаний критериев теплообмена  $Ki$  и  $Bi$  и показали высокую степень согласования.



**Рис. 7.3. Нагрев призмы квадратного сечения суммарным потоком тепла:**

( $Ki = 0,5$ ;  $Bi = 0,5$ ;  $\theta_0 = 0,2$ ):  $\theta_I, \theta_{II}, \theta_V, \theta_{VI}$  – данные ЭВМ;  
 $\Phi_{I-II}, \Phi_{V-VI}$  – результаты расчета по формулам (7.12) и (7.14)

Эти теоретические исследования позволяют использовать закономерность упорядоченного теплового режима (7.12) – (7.14) для экспериментального определения коэффициента температуропроводности материалов на образцах, выполненных в виде призмы квадратного сечения. Причем, проведение опытов не требует измерений таких физических величин, как температура окружающей среды, коэффициент теплообмена, степень черноты. Нет необходимости в предварительном определении коэффициента теп-

лопроводности вещества. Отпадает необходимость в создании чисто конвективной или чисто лучистой окружающей среды, что сильно упрощает экспериментальную установку.

Наибольший интерес представляют точки V – середины грани призмы квадратного сечения и VI – ребра призмы. В этом случае все измерения температур производятся на поверхности призмы квадратного сечения, и отпадает необходимость проникать с термопарой вглубь образца, что имеет особое практическое значение.

### 7.3. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ТЕМПЕРАТУР НА ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ

Экспериментальное подтверждение по определению коэффициента температуропроводности различных материалов, проводилось на опытном стенде, включающем установку, исследуемые образцы и контрольно-измерительное оборудование. Для исследований были выбраны материалы: блочное оргстекло; фторопласт Ф-4; жаростойкий сухой бетон на портландцементе с шамотным заполнителем.

На рис. 7.4 изображена схема экспериментальной установки. Конструкция состоит из двух распо-

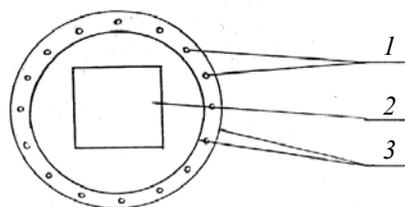
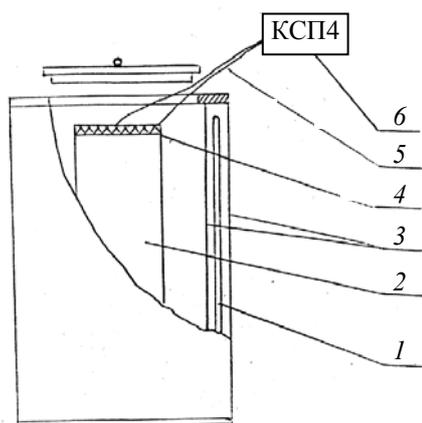


Рис. 7.4. Схема экспериментальной установки:

- 1 – коаксиальные нагреватели;
- 2 – исследуемый образец;
- 3 – внутренний и наружный экраны;
- 4 – теплоизоляция; 5 – термопары;
- 6 – потенциометр

лицах и графиках.

На всех последующих рисунках по оси абсцисс отложено время экспериментального наблюдения  $\tau$ , на левой оси ординат дается распределение опытных температур в соответствующих точках сечения призмы (I–II, III–IV, V–VI), а на правой оси ординат нанесены результаты вычислений температурного комплекса  $\Phi$ , на основе закономерностей (7.12) – (7.14) упорядоченного теплового режима:

ложенных друг в друге полых цилиндров, диаметром 200 мм (наружный экран) и 180 мм (внутренний экран), служащих изотермическими поверхностями. В зазоре между экранами установлен нагреватель, обеспечивающий симметричный нагрев призмы квадратного сечения. Снизу камера закрыта, а сверху имеется отверстие с крышкой, через которое образец опускается в установку.

Все исследуемые образцы выполнены в виде призм квадратного сечения, длина которых во много раз (в шесть и более) превышает ширину их грани, что обеспечивает условие бесконечной длины.

Измерение температур исследуемых материалов проводилось термопарами ТХК (градуировки хромель–копель), выполненными из проводов диаметром 0,2 мм. Перед установкой термопар в образец и после проведения опытов все нестандартные термопары подвергались градуировке в Волгоградской государственной контрольной лаборатории по измерительной технике.

Для регистрации изменений температур внутри объема в точках I и III (рис. 7.2) термопары вводились через просверленные отверстия, а на поверхности образца в точках II, IV, V, VI термопары укладывались в канавки.

Подготовленные к опыту образцы (призмы квадратного сечения) с термопарами помещали в испытательную цилиндрическую камеру и симметрично нагревали в установке от комнатной температуры до 80...100 °С за счет конвекции и радиации одновременно. Результаты измерений температур и расчетов коэффициента температуропроводности различных строительных материалов представлены в таб-

$$\Phi_{I-II} = \ln(T_{II} - T_I) - 1,23 \int \frac{dT_{II}}{T_{II} - T_I}, \quad (7.18)$$

$$\Phi_{III-IV} = \ln(T_{IV} - T_{III}) - 1,23 \int \frac{dT_{IV}}{T_{IV} - T_{III}}, \quad (7.19)$$

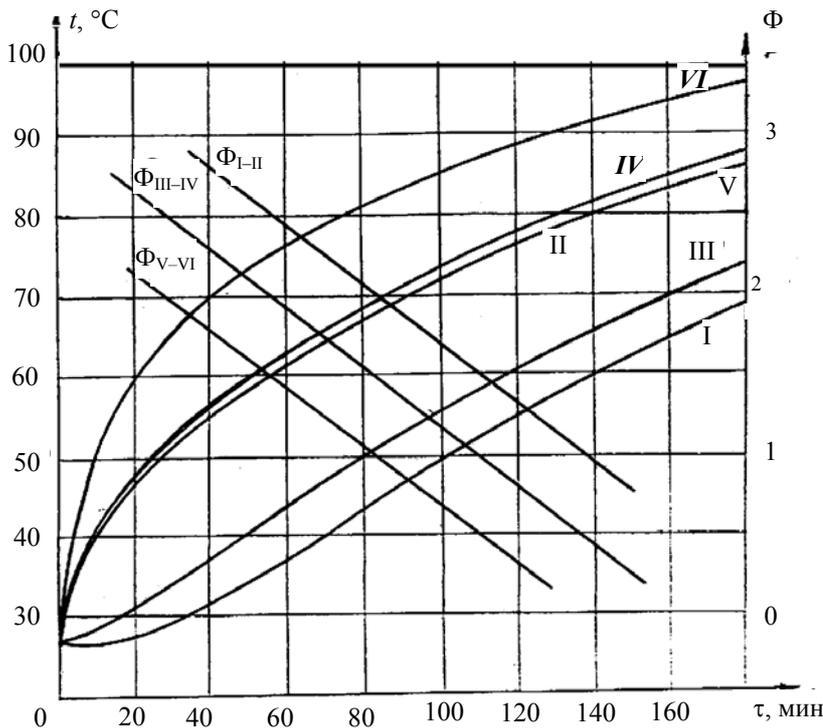
$$\Phi_{V-VI} = \ln(T_{VI} - T_V) - 1,23 \int \frac{dT_{VI}}{T_{VI} - T_V}. \quad (7.20)$$

На рис. 7.5 приведены результаты экспериментального распределения температур в точках I, II, III, IV, V, VI при нагревании призмы квадратного сечения из блочного оргстекла ( $2R = 90$  мм). Здесь же также показаны графики температурных комплексов  $\Phi_{I-II}$ ,  $\Phi_{III-IV}$ ,  $\Phi_{V-VI}$ , вычисленные соответственно для каждого сечения призмы по формулам (7.18) – (7.20).

Полученные угловые коэффициенты  $\Delta\Phi/\Delta\tau$  прямых линий  $\Phi_{I-II}$ ,  $\Phi_{III-IV}$ ,  $\Phi_{V-VI}$  для каждого сечения призмы усредняли и подсчитывали коэффициент температуропроводности материалов

$$a = \frac{R_*^2}{4,94} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau}, \quad (7.21)$$

где  $R_*$  – расстояние между термопарами, измеряющими температуры для соответствующего сочетания точек сечения призмы;  $\Phi$  – температурный комплекс, определяемый на основе закономерности упорядоченного теплового режима для каждого значения времени  $\tau$ ;  $\Delta\Phi/\Delta\tau$  – угловой коэффициент прямой линии в области упорядоченного теплового режима, определяется графически, как показано на последующих рисунках.



**Рис. 7.5. Нагрев призмы квадратного сечения из оргстекла ( $2R = 90$  мм) суммарным потоком тепла:**

I, II, III, IV, V, VI – значения температур в соответствующих точках сечения призмы;  $\Phi_{I-II}$ ,  $\Phi_{III-IV}$ ,  $\Phi_{V-VI}$  – результаты расчета по формулам (7.18) – (7.20)

В табл. 7.1 представлены: экспериментальные распределения температур (в течение 160 мин) при нагревании призмы из оргстекла в соответствующих сечениях V–VI, а также результаты расчетов температурных комплексов  $\Phi_{V-VI}$ . Для определения коэффициента температуропроводности оргстекла (и

любого материала) возможно два способа расчета. Первый (более точный), когда графически выявляется прямая линия температурного комплекса  $\Phi_{I-II}$ ,  $\Phi_{III-IV}$ , или  $\Phi_{V-VI}$ , на основе закономерности упорядоченного теплового режима (7.18) – (7.20), а угловой коэффициент  $\Delta\Phi/\Delta\tau$  построенной прямой линии численно равен множителю  $4,94 a / R^2$ . В результате усреднения полученного углового коэффициента  $\Delta\Phi/\Delta\tau$  подсчитывается значение коэффициента температуропроводности  $a$  материала по формуле (7.21).

### 7.1. Расчет коэффициента температуропроводности при нагревании оргстекла ( $R_* = 0,043$ м); сечение призмы (V–VI)

| Время $\tau$ , мин | $T_{VI}, ^\circ\text{C}$ | $T_V, ^\circ\text{C}$ | $\Delta t_i = T_{VI} - T_V$ | $\ln \Delta t_i$ | $1/\Delta t_i$ | $H_{cp} = 0,5 [(\Delta t_i)^{-1} + (\Delta t_{i+1})^{-1}]$ |
|--------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------------|------------------|----------------|--|
| 20                 | 61,5                     | 47,0                  | 14,5                        | 2,674            | 0,069          | 0,067  |
| 40                 | 70,0                     | 54,5                  | 15,5                        | 2,741            | 0,064          | 0,067  |
| 60                 | 75,0                     | 60,5                  | 14,5                        | 2,674            | 0,069          | 0,070  |
| 80                 | 80,0                     | 66,0                  | 14,0                        | 2,639            | 0,071          | 0,074  |
| 100                | 84,0                     | 71,0                  | 13,0                        | 2,565            | 0,077          | 0,080  |
| 120                | 87,5                     | 75,0                  | 12,5                        | 2,526            | 0,089          | 0,083  |
| 140                | 91,0                     | 79,0                  | 12,0                        | 2,484            | 0,083          | 0,087  |
| 160                | 94,0                     | 83,0                  | 11,0                        | 2,398            | 0,091          |  |

| Время $\tau$ , мин | $\Delta(t_p) = (t_p)_{i+1} - (t_p)_i$ | $f_i = H_{cp} / \Delta(t_p)$ | $F_i = F_{i-1} + f_i$ | $1,23F_i$ | $\Phi = \ln \Delta t_i - 1,23F_i$ | $a \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$ |
|--------------------|---------------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 20                 | 8,5                                   | 0,568                        |                       |           |                                   |                                      |
| 40                 | 5,0                                   | 0,334                        | 0,568                 | 0,699     | 2,042                             | 0,14                                 |
| 60                 | 5,0                                   | 0,351                        | 0,902                 | 1,110     | 1,565                             | 0,14                                 |
| 80                 | 4,0                                   | 0,297                        | 1,253                 | 1,541     | 1,098                             | 0,13                                 |
| 100                | 3,5                                   | 0,280                        | 1,550                 | 1,907     | 0,659                             | 0,11                                 |
| 120                | 3,5                                   | 0,291                        | 1,830                 | 2,251     | 0,275                             | 0,12                                 |
| 140                | 3,0                                   | 0,261                        | 2,121                 | 2,609     | -0,124                            | 0,12                                 |
| 160                |                                       |                              | 2,382                 | 2,930     | -0,532                            |                                      |

Второй способ, когда в процессе математических расчетов, значения температурного комплекса  $\Phi$  начнут повторяться в течение времени  $\tau$  с достаточной степенью точности, что соответствует упорядоченному тепловому режиму и выходу температурного комплекса  $\Phi$  на прямую линию, а коэффициент температуропроводности для каждого промежутка времени  $\Delta\tau$  в процессе расчета также будет повторять свои истинные значения.

Из представленных графиков и вычислений видно, что при симметричном нагревании призмы квадратного сечения из оргстекла ( $2R = 90$  мм), с определенного времени  $\tau = 60 \dots 80$  мин начинается упорядоченный тепловой режим и каждый температурный комплекс  $\Phi_{I-II}$ ,  $\Phi_{III-IV}$ ,  $\Phi_{V-VI}$  выходят на прямую линию, а угловой коэффициент  $\Delta\Phi/\Delta\tau$  каждой отдельной построенной прямой линии становится постоянным. Используя графические построения  $\Phi$  и в результате усреднения полученного углового коэффициента  $\Delta\Phi/\Delta\tau$  подсчитывается значение коэффициента температуропроводности  $a$  материала по формуле (7.21). По результатам расчетов из таблиц видно, что коэффициент температуропроводности оргстекла в области упорядоченного теплового режима повторяет свои значения для каждого последующего промежутка времени  $\Delta\tau$ .

В результате серии экспериментов при нагревании призмы квадратного сечения из оргстекла ( $2R = 90$  мм) имели следующие значения коэффициента температуропроводности в соответствующих сечениях:

$$a_{I-II} = 0,112 \cdot 10^{-6}, \text{ м}^2/\text{с}; a_{III-IV} = 0,118 \cdot 10^{-6}, \text{ м}^2/\text{с}; a_{V-VI} = 0,114 \cdot 10^{-6}, \text{ м}^2/\text{с}.$$

Результаты всех опытов показывают вполне удовлетворительное согласование значений коэффициента температуропроводности при нагревании призмы квадратного сечения из оргстекла ( $2R = 90$  мм). Аналогично проведена серия опытов с нагреванием и охлаждением призм квадратного сечения из оргстекла ( $2R = 40$  мм), из фторопласта ( $2R = 28$  мм), из бетона ( $2R = 50$  мм), красного и силикатного кирпича.

Однако наибольший интерес представляют точки V – середины грани призмы квадратного сечения и VI – ребра призмы. В этом случае все измерения температур производятся на поверхности призмы квадратного сечения и отпадает необходимость проникать с термопарой вглубь образца, что имеет особое практическое значение.

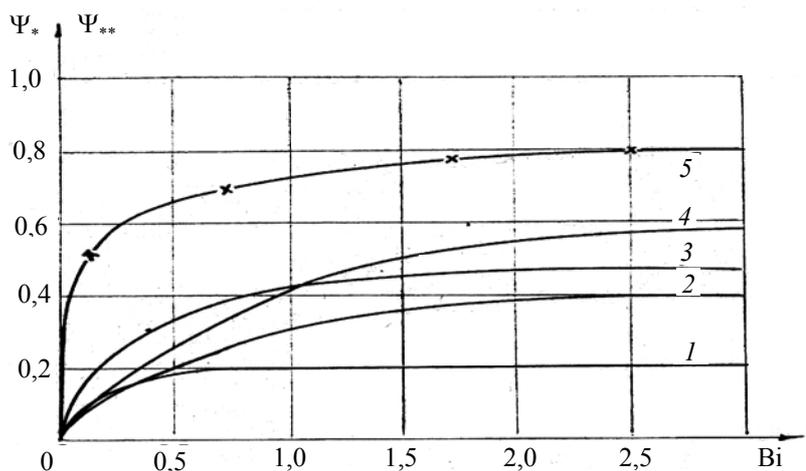
#### 7.4. ОЦЕНКА НАСТУПЛЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННОЙ ЧАСТИ ТЕПЛООВОГО ПЕРИОДА

При исследовании тепловых свойств материалов важно знать начало наступления упорядоченного теплового режима и иметь уверенность в том, что регулярный тепловой режим уже наступил, не имея в наличии значений критерия Фурье. Поэтому оценкой начала регулярной части процесса нагревания должно служить отношение

$$\Psi_* = \frac{T_{\text{ц}} - T_0}{T_{\text{п}} - T_0}, \quad (7.22)$$

где  $T_{\text{ц}}$ ,  $T_{\text{п}}$  – температуры центра и поверхности тела;  $T_0$  – начальная температура всего тела.

Используя способ оценки приближения, были построены графики (рис. 7.6) функции  $\Psi_* = f(\text{Bi})$  для тел различной формы: неограниченной пластины, бесконечного цилиндра, призмы квадратного сечения и шара. Каждое численное значение отношения  $\Psi_*$  на этих графиках гарантирует наступление начала регулярного периода нагревания с погрешностью в 1 %.



**Рис. 7.6. График зависимости отношения  $\Psi_*$  и  $\Psi_{**}$  от критерия теплообмена  $\text{Bi}$  для тел различной формы:**

1 – неограниченная пластина; 2 – бесконечный цилиндр;  
3 – призма квадратного сечения; 4 – шар; 5 – призма квадратного сечения:

—  $x = \Psi_*$ ; —  $x = \Psi_{**}$

Анализ максимальных значений  $\Psi_*$  приводит к заключению, что для условий конвективного теплообмена любой интенсивности зависимость (7.22) гарантирует наличие регулярного теплового периода  $\Psi_{*max} > 0,2\xi$ .

Особый интерес представляет такая фигура, как призма квадратного сечения, позволяющая оценить начало регулярного периода нагрева без установки термопары в центральную область объема. С этой целью измеряются температура ребра  $T_p$  и температура в середине грани  $T_{гр}$ . Критерием оценки в этом случае служит отношение

$$\Psi_{**} = \frac{T_{гр} - T_0}{T_p - T_0}. \quad (7.23)$$

График функции  $\Psi_{**} = f(Bi)$  показан на рис. 7.6, из которого видно, что для призмы квадратного сечения наступление упорядоченного теплового режима гарантировано с погрешностью порядка 1 % при  $\Psi_* = 0,44$ ;  $\Psi_{**} = 0,78$  и любой интенсивностью теплообмена на границе тепла.

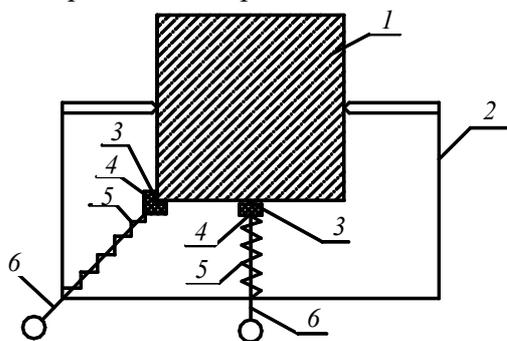
Имея такие данные, наступление упорядоченного теплового режима при симметричном нагревании призмы квадратного сечения любым способом может быть установлено по температурам ребра, центра грани и начальной температуре. Следовательно, нет необходимости знать величину критерия Фурье, а также проникать с термопарой в центральную часть объема образца.

## 7.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛОВ КОНТАКТНЫМ МЕТОДОМ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ

Отличительной особенностью контактных методов неразрушающего контроля ТФХ материалов и изделий является непосредственный контакт термоприемников с участком поверхности исследуемого объекта. Проблемы, связанные с особенностями контактных методов измерения температур на поверхности исследуемых объектов достаточно глубоко и детально проработаны и представлены в работах многих авторов [59, 68, 76, 78].

Для проведения опытов методом неразрушающего контроля и для измерения температуры ребра и середины грани на призме квадратного сечения разработано устройство с использованием контактных термопар, схема которого приведена на рис. 7.7.

**Рис. 7.7. Схема установки контактных термопар на призме квадратного сечения:**  
 1 – призма квадратного сечения; 2 – рамка;  
 3 – места установки термопар;  
 4 – фторопластовый теплоизолятор;  
 5 – пружина; 6 – шток



Для измерения температуры ребра и середины грани на призме квадратного сечения установлена рамка 2 с двумя штоками 6, на конце которых закреплены фторопластовые теплоизоляторы 4. Между поверхностью образца (призмы) и каждым фторопластовым теплоизолятором по изотермической поверхности призмы (вдоль образца) прокладывалась термопара. Пружины 5 создают дополнительное усилие сжатия для обеспечения более надежного контакта спаев термопар с образцом.

Подготовленные к опыту образцы (призмы квадратного сечения) с контактными термометрами помещали в испытательную цилиндрическую камеру и симметрично нагревали в установке за счет конвекции и радиации одновременно. На рис. 7.8 приведены результаты экспериментального распределения температур ребра  $t_p$  и середины грани  $t_{гр}$ , при нагревании призмы квадратного сечения ( $2R = 0,05$  м) из красного кирпича, воздушно-сухой влажности, плотностью  $\rho = 1700$  кг/м<sup>3</sup>.

На рис. 7.9 приведены результаты экспериментального распределения температур ребра  $t_p$  и середины грани  $t_{гр}$  при нагревании призмы квадратного сечения ( $2R = 0,05$  м) из силикатного кирпича, воздушно-сухой влажности, плотностью  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>. По оси абсцисс на графиках отложено время экспериментального наблюдения  $\tau$ , на левой оси ординат дается распределение опытных температур в соответствующих точках сечения призмы (ребра и середины грани), а на правой оси ординат нанесены результаты вычислений температурного комплекса  $\Phi$ , на основе закономерности упорядоченного теплового режима

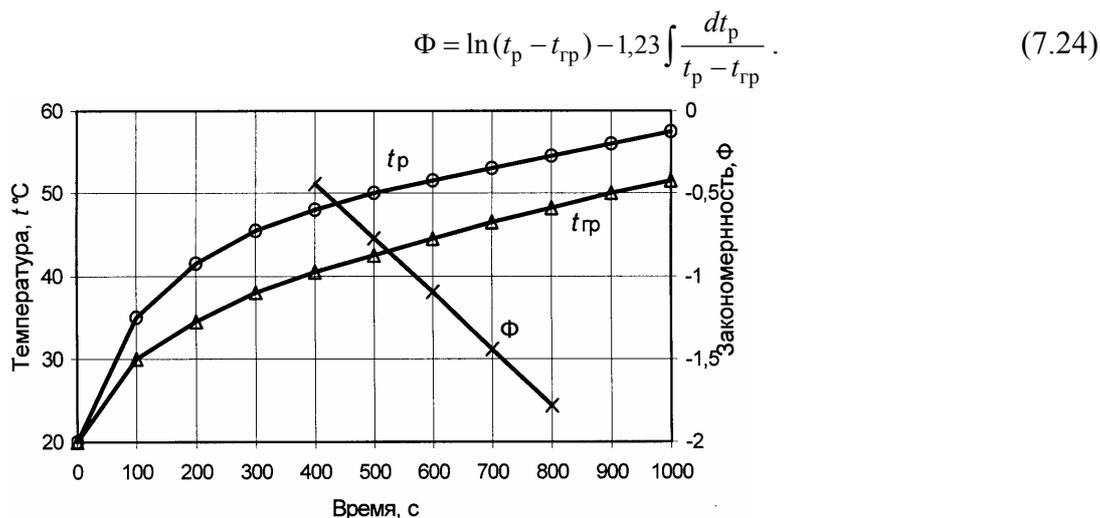
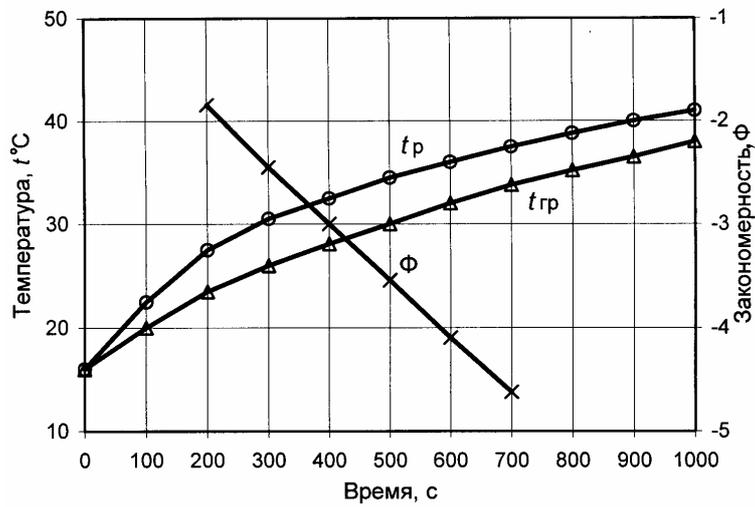


Рис. 7.8. Нагрев призмы квадратного сечения из красного кирпича

**воздушно-сухой влажности:**

$\rho = 1700$  кг/м<sup>3</sup>;  $2R = 0,05$  м; ( $R_* = 0,024$  м):  $t_p$  – температура ребра;  
 $t_{гр}$  – температура середины грани;  $\Phi$  – расчет по формуле (7.24)



**Рис. 7.9. Нагрев призмы квадратного сечения из силикатного кирпича воздушно-сухой влажности:**

$\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$ ;  $2R = 0,05 \text{ м}$ ; ( $R_* = 0,023 \text{ м}$ ):  $t_p$  – температура ребра;

$t_{гр}$  – температура середины грани;  $\Phi$  – расчет по формуле (7.24)

Полученный угловой коэффициент  $\Delta\Phi/\Delta\tau$  прямых линий  $\Phi$  в области упорядоченного теплового режима усредняли и подсчитывали коэффициент температуропроводности красного и силикатного кирпича по формуле (7.21).

В табл. 7.2 приведены расчеты критерия  $\psi_{**}$  и температуропроводности красного кирпича, выполненные в программе Excel.

**7.2. Расчет коэффициента температуропроводности при нагревании красного кирпича  $\rho = 1700 \text{ кг/м}^3$ , ( $R_* = 0,024 \text{ м}$ ),  $t_0 = 20 \text{ °C}$**

| Время $\tau$ , мин | $T_{VI}, \text{ °C}$                  | $T_V, \text{ °C}$          | $\Delta t_i = T_{VI} - T_V$ | $\ln \Delta t_i$                  | $(\Delta t_i)^{-1}$                  | $H_{cp} = 0,5 [(\Delta t_i)^{-1} + (\Delta t_{i+1})^{-1}]$ |
|--------------------|---------------------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|--|
| 100                | 35                                    | 30                         | 5                           | 1,609                             | 0,2                                  | 0,172  |
| 200                | 41,5                                  | 34,5                       | 7                           | 1,946                             | 0,143                                | 0,138  |
| 300                | 45,5                                  | 38                         | 7,5                         | 2,015                             | 0,133                                | 0,133  |
| 400                | 48                                    | 40,5                       | 7,5                         | 2,015                             | 0,133                                | 0,133  |
| 500                | 50                                    | 42,5                       | 7,5                         | 2,015                             | 0,133                                | 0,138  |
| 600                | 51,5                                  | 44,5                       | 7                           | 1,946                             | 0,143                                | 0,148  |
| 700                | 53                                    | 46,5                       | 6,5                         | 1,872                             | 0,154                                | 0,157  |
| 800                | 54,5                                  | 48,2                       | 6,3                         | 1,84                              | 0,159                                | 0,163  |
| 900                | 56                                    | 50                         | 6                           | 1,792                             | 0,167                                | 0,167  |
| 1000               | 57,5                                  | 51,5                       | 6                           | 1,792                             | 0,167                                |  |
| Время $\tau$ , мин | $\Delta(t_p) = (t_p)_{i+1} - (t_p)_i$ | $f_i = H_{cp} \Delta(t_p)$ | $F_i = F_{i-1} + 1,23F_i$   | $\Phi = \ln \Delta t_i - 1,23F_i$ | $a \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$ | $\psi_{**}$  |
| 100                | 6,5                                   | 1,115                      |                             |                                   |                                      | 0,66   |

|      |     |       |       |           |         |           |          |
|------|-----|-------|-------|-----------|---------|-----------|----------|
| 200  | 4,0 | 0,552 | 1,115 | 1,37      | 0,575   | 0,71<br>1 | 0,6<br>7 |
| 300  | 2,5 | 0,333 | 1,667 | 2,05      | - 0,035 | 0,47<br>8 | 0,7<br>0 |
| 400  | 2,0 | 0,266 | 2,000 | 2,46      | - 0,445 | 0,38<br>1 | 0,7<br>3 |
| 500  | 1,5 | 0,207 | 2,266 | 2,78<br>7 | - 0,772 | 0,37<br>7 | 0,7<br>5 |
| 600  | 1,5 | 0,222 | 2,473 | 3,04<br>2 | - 1,095 | 0,38<br>4 | 0,7<br>8 |
| 700  | 1,5 | 0,255 | 2,695 | 3,31<br>5 | - 1,443 | 0,49<br>5 | 0,8<br>0 |
| 800  | 1,5 | 0,245 | 2,950 | 3,62<br>9 | - 1,788 | 0,40<br>2 | 0,8<br>2 |
| 900  | 1,5 | 0,251 | 3,191 | 3,93<br>0 | - 2,138 | 0,40<br>7 | 0,8<br>3 |
| 1000 | 1,5 |       | 3,442 | 4,23<br>4 | - 2,442 | 0,39<br>3 |          |

Из рис. 7.8 и табл. 7.2 видно, что, начиная со времени 400 с, устанавливается упорядоченный тепловой режим, а коэффициент температуропроводности красного кирпича в диапазоне времени 400...900 с, определяемый по выражению (7.21), составляет  $a = 0,393 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . По данным НИИ Стройфизики [64] у красного кирпича плотности  $\rho = 1700 \text{ кг/м}^3$  и влажности 2 %, коэффициент температуропроводности равен  $a = 0,390 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Из рис. 7.9 видно, что, начиная со времени 300 с, устанавливается упорядоченный тепловой режим, а коэффициент температуропроводности силикатного кирпича, определяемый по выражению (7.21), в диапазоне времени 300...700 с составляет

$$a = \frac{R_*^2}{4,94} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} = \frac{(0,023)^2}{4,94} \frac{(-2,45) - (-4,62)}{700 - 300} = 0,58 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

По данным НИИ Стройфизики [64] у силикатного кирпича с плотностью  $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$  и влажностью 5 % коэффициент температуропроводности составляет  $a = 0,576 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Были также произведены исследования по сравнению варианта одновременного измерения температур на поверхности призмы квадратного сечения с использованием контактных термопар и расположением термопар в пазу на поверхности призмы [59, 78]. На рис. 7.10 приведены результаты экспериментального распределения температур ребра  $t_p$  и середины грани  $t_{sp}$  при нагревании призмы квадратного сечения ( $2R = 0,04 \text{ м}$ ) из белого оргстекла плотностью  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ .

По оси абсцисс на графиках отложено время экспериментального наблюдения  $\tau$ , на левой оси ординат дается распределение опытных температур в соответствующих точках сечения призмы (ребра и середины грани), а на правой оси ординат нанесены результаты вычислений температурного комплекса  $\Phi$ , на основе закономерности упорядоченного теплового режима (7.24). Расчеты критерия  $\psi_{**}$  и температуропроводности выполнены в программе Excel.

Из рис. 7.10 видно, что при установке термопары в пазу (○), начиная со времени 1600 с, устанавливается упорядоченный тепловой режим, а температуропроводность оргстекла в диапазоне времени 1600...2400 с составляет

$$a = \frac{R_*^2}{4,94} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} = \frac{(0,018)^2}{4,94} \frac{(-5,884) - (-7,463)}{2400 - 1600} = 0,129 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Критерий оценки начала регулярной стадии процесса  $\psi_{**} = 0,78$  наступает по времени при  $\tau = 2200$  с.

Из рис. 7.10 также видно, что при установке контактных термопар ( $\Delta$ ), начиная со времени 1800 с устанавливается упорядоченный тепловой режим, а коэффициент температуропроводности белого орг-стекла в диапазоне времени 1800...2800 с составляет

$$a = \frac{R_*^2}{4,94} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} = \frac{(0,0195)^2}{4,94} \frac{(-7,925) - (-9,572)}{2800 - 1800} = 0,126 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

По данным [64] у белого оргстекла плотностью  $\rho = 1220 \text{ кг/м}^3$  коэффициент температуропроводности составляет  $a = 0,138 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Эксперименты подтверждают достаточную точность полученных значений коэффициента температуропроводности материалов.

Разработанный метод выгодно отличается от известных методов быстродействием, небольшой погрешностью, обладает новизной и оригинальностью. Кроме того, методика позволяет легко автоматизировать теплофизический эксперимент, упрощается реализация на базе микропроцессорной техники, и поэтому является перспективной для использования в информационно-измерительных системах неразрушающего контроля ТФХ материалов.

## 8. НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЛЕКСНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ

### 8.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

#### *ТЕПЛОЕМКОСТИ МАТЕРИАЛОВ*

Многие явления природы подчиняются закону простого гармонического колебания. Температурные колебания распространяются по закону косинуса и легко создаются в лабораторных условиях, что позволяет определить объемную теплоемкость  $c_p$  материала. Явление распространения температурных волн описывается двумя уравнениями:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (8.1)$$

$$\vartheta_{0,\tau} = \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos(\omega \tau), \quad (8.2)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности материала,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\vartheta_{\Pi}^{\max}$  – амплитуда колебаний избыточной температуры на поверхности образца (максимальное отклонение температуры на поверхности образца от средней температуры),  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\omega = 2\pi/z$  – частота температурных колебаний на поверхности образца,  $\text{с}^{-1}$ ;  $z$  – полный период колебаний,  $\text{с}$ .

Решение системы уравнений (8.1) – (8.2) имеет вид (8.3), откуда вытекает ряд зависимостей, которые используются в технических расчетах

$$\vartheta_{x,\tau} = \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos(\omega\tau - kx) e^{-kx}, \quad (8.3)$$

где  $k = \sqrt{\omega/2a}$ .

Плотность теплового потока на поверхности образца может быть найдена с помощью выражения (8.3) по следующей формуле

$$q_{\Pi,\tau} = -\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{\Pi} = \lambda k \sqrt{2} \vartheta_{\Pi}^{\max} \cos\left(\omega\tau + \frac{\pi}{4}\right)$$

или

$$q_{п,τ} = B \vartheta_{п}^{\max} \cos\left(\omega\tau + \frac{\pi}{4}\right),$$

где  $B$  – параметр, зависящий от теплофизических свойств материала:

$$B = \sqrt{\lambda c_p \omega} = c_p \sqrt{a \omega}, \quad (8.4)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К);  $c_p$  – объемная теплоемкость материала, Дж/(м<sup>3</sup> · К).

Максимальная плотность теплового потока на поверхности равна

$$q_{п,τ}^{\max} = B \vartheta_{п}^{\max}.$$

Параметр  $B$  характеризует аккумулирующую способность материала и носит название коэффициента теплоусвоения, который в процессе распространения температурных волн остается постоянным. В количественном значении коэффициент теплоусвоения материала, конструкции (массива) при тепловых колебаниях – это отношение максимального теплового потока на поверхности к максимальному отклонению температуры на поверхности

$$B = q_{п,τ}^{\max} / \vartheta_{п}^{\max}. \quad (8.5)$$

Если температуропроводность  $a$  материала предварительно рассчитать, используя закономерность упорядоченного теплового режима, максимальный тепловой поток на поверхности  $q_{п,τ}^{\max}$  исследовать с помощью тепломера, а максимальную амплитуду колебаний температуры  $\vartheta_{п}^{\max}$  на поверхности материала измерить термомпарой, то тогда объемную теплоемкость можно определить по формуле

$$c_p = \frac{q_{п,τ}^{\max}}{\vartheta_{п}^{\max} \sqrt{a \omega}}. \quad (8.6)$$

При увеличении значений объемной теплоемкости ( $c_p$ ) коэффициент температуропроводности  $a$  уменьшается и это означает большое накопление тепла за период нагрева и неглубокое проникновение температурных волн. При малых значениях ( $c_p$ ) – наоборот. С экологической точки зрения более благоприятными являются конструкции, обладающие более высокими значениями коэффициента теплоусвоения.

В этом случае колебания мощности отопительных приборов будут в какой-то степени компенсироваться накоплением и расходом тепловой энергии ограждающими конструкциями, а температура воздуха в помещении будет более равномерной во времени.

## 8.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ МАТЕРИАЛА

Для расчета плотности теплового потока в зависимости от температуры наружной поверхности ограждающих конструкций зданий, сооружений и материалов были произведены теплотехнические расчеты в определенных интервалах температур. Математическая обработка коэффициентов теплоотдачи конвекцией и лучеиспусканием от воздуха и стен помещения к внутренней поверхности стены, внешней поверхности стены к наружному воздуху, от нагретой внутренней поверхности установки (рис. 7.4) к образцу (призме квадратного сечения), позволила получить расчетные зависимости плотности теплового потока.

Все расчетные формулы представлены в зависимости от температурного напора  $\Delta t$  и действительны только в определенном диапазоне температур, близких к реальным условиям.

1. Коэффициент теплоотдачи от воздуха к внутренней или наружной поверхности стены или оконного стекла

$$\alpha_{\text{общ}} = 4,6 + 0,035\Delta t + 1,7\Delta t^{0,333}, \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К},$$

где  $\Delta t$  – разность температур воздуха и стены ограждающей конструкции или оконного стекла.

Удельный тепловой поток при разности температур между воздухом и поверхностью стены или оконного стекла может быть представлен трехчленом вида

$$q = 4,6\Delta t + 0,035\Delta t^2 + 1,7\Delta t^{1,333}, \text{ Вт/м}^2, \quad (8.7)$$

где  $\Delta t = t_{\text{воз}} - t_{\text{ст}}$ , изменяется от 0 до 20 °С;  $t_{\text{воз}}$  – температура воздуха, изменяется от –15 до +30 °С.

2. Эффективный коэффициент  $\lambda_{\text{эф}}$  кондуктивной теплопроводности воздушной прослойки окна

$$\lambda_{\text{эф}} = (5,18 + 0,041t_1)\delta, \text{ Вт/м} \cdot \text{К},$$

где  $t_1$  – температура стекла, обращенного внутрь помещения, изменяется от +2 до +20 °С;  $\delta$  – расстояние между стеклами окна, изменяется от 0,05 м до 0,25 м.

Удельный тепловой поток  $q$  между стеклами окна может быть представлен выражением

$$q = (5,18 + 0,041t_1)\Delta t, \text{ Вт/м}^2,$$

где  $\Delta t = t_1 - t_2$ , изменяется от 0 до 30 °С;  $t_2$  – температура наружного стекла.

3. Коэффициент теплоотдачи от нагретой поверхности материала или ограждения к воздуху и окружающим предметам:

$$\alpha_{\text{общ}} = 4,6 + 0,035\Delta t + 1,5\Delta t^{0,333}, \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

Удельный тепловой поток от нагретой поверхности к воздуху может быть представлен трехчленом вида

$$q = 4,6\Delta t + 0,035\Delta t^2 + 1,5\Delta t^{1,333}, \text{ Вт/м}^2, \quad (8.8)$$

где  $\Delta t = t_{\text{нагр}} - t_{\text{воз}}$ ,  $t_{\text{нагр}}$  – температура нагретой поверхности ограждения, изменяется от + 40 до + 400 °С;  $t_{\text{воз}}$  – температура воздуха, изменяется от 0 до +30 °С.

4. Коэффициент теплоотдачи от нагретой внутренней поверхности установки (нагревательной печи) к образцу (призме квадратного сечения):

$$\alpha_{\text{общ}} = 4,6 + 0,035\Delta t + \Delta t^{0,333}, \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

Удельный тепловой поток от нагретой поверхности установки и воздуха (рис. 7.4) к призме квадратного сечения ( $2R = 0,05$  м) может быть представлен трехчленом вида

$$q = 4,6\Delta t + 0,035\Delta t^2 + \Delta t^{1,333}, \text{ Вт/м}^2, \quad (8.9)$$

где  $\Delta t = t_{\text{нагр}} - t_{\text{гр}}$ ;  $t_{\text{нагр}}$  – температура нагретой внутренней поверхности установки, изменяется от + 20 до + 200 °С;  $t_{\text{гр}}$  – температура поверхности образца, изменяется от + 20 до + 120 °С.

### **8.3. КОМПЛЕКСНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ**

При симметричном нагревании (охлаждении) призмы квадратного сечения бесконечной длины от начальной температуры  $t_0$ , когда тепловое возмущение не затрагивает центральные участки, тело или призму можно считать полуограниченным пространством. Наиболее истинной температурой поверхности призмы будет температура на середине ее грани  $t_{гр}$ , так как на температуру ребра призмы  $t_p$ , воздействует температурное поле, определяемое на основе принципа перемножения температурных критериев. Максимальная плотность теплового потока  $q_{п}^{\max}$  на поверхности призмы при ее симметричном нагревании зависит от температуры среды в экспериментальной установке  $t_{ср}$  и температуры середины грани  $t_{гр}$  на поверхности призмы. При охлаждении максимальная плотность теплового потока  $q_{п}^{\max}$  на поверхности призмы зависит от температуры охлаждающей жидкости  $t_{ж}$  и температуры середины грани  $t_{гр}$  на поверхности призмы. Плотность теплового потока на поверхности призмы квадратного сечения в начальном периоде можно определить по формулам (8.8) или (8.9).

Амплитуда колебаний температурной волны на поверхности призмы для каждого периода времени будет равна  $\vartheta_{п} = 0,5 (t_{гр} - t_0)$ . Время подъема температуры на поверхности призмы  $z_*$  будет показывать только половину времени полного периода колебаний температурной волны, т.е.  $z = 2 z_*$ .

Тогда объемная теплоемкость ( $c_p$ ) исследуемого материала выполненного в виде призмы квадратного сечения при симметричном нагревании или охлаждении определится из выражения

$$c_p = \frac{q_{п}^{\max}}{\vartheta_{п} \sqrt{\frac{a \pi}{z_*}}}. \quad (8.10)$$

После начального периода нагрева наступает упорядоченный тепловой режим и, продолжая измерения температур ребра  $t_p$  и середины грани  $t_{гр}$  на поверхности призмы квадратного сечения, определяется коэффициент температуропроводности  $a$  материала по формуле

$$a = \frac{\Delta \Phi R_*^2}{\Delta \tau 4,94}, \quad (8.11)$$

где  $R_*$  – расстояние между термопарами, измеряющими температуры ребра и середины грани;  $\Phi$  – температурный комплекс, определяемый на основе закономерности упорядоченного теплового режима в призме квадратного сечения для каждого значения времени  $\tau$ .

При нагревании призмы  $\Phi$  определяется по формуле

$$\Phi = \ln(t_p - t_{гр}) - 1,23 \int \frac{dt_p}{t_p - t_{гр}}. \quad (8.12)$$

При охлаждении призмы  $\Phi$  определяется по формуле

$$\Phi = \ln(t_{гр} - t_p) - 1,23 \int \frac{dt_{гр}}{t_{гр} - t_p}. \quad (8.13)$$

Угловой коэффициент прямой линии  $\Delta \Phi / \Delta \tau$  в области упорядоченного теплового режима определяется графически или в процессе математических расчетов. Получив из эксперимента значения коэффициентов температуропроводности и объемной теплоемкости исследуемого материала, определяется коэффициент теплопроводности материала по формуле

$$\lambda = a(cp). \quad (8.14)$$

Достоверность научно-методологических основ определения температуропроводности, объемной теплоемкости и теплопроводности по температурному полю на поверхности проводилось на призме из бетона, фторопласта, красного и силикатного кирпича. Для измерения температуры ребра и середины грани методом неразрушающего контроля на призме квадратного сечения закреплялись термопары с использованием контактного устройства, схема и описание которого приведена в разделе 7.5.

Для исследования была изготовлена призма квадратного сечения из фторопласта, которую вначале нагревали в печи до стационарного распределения температур на поверхности  $t_0 = 99 \text{ }^\circ\text{C}$ , а затем охлаждали на воздухе при комнатной температуре и естественной конвекции с  $t_{\text{ж}} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Расстояние между термопарами составило  $R = 0,0135 \text{ м}$ . В табл. 8.1 представлены результаты экспериментального измерения температур ребра призмы  $t_p$  и середины ее грани  $t_{\text{гр}}$ , а также расчеты по формуле (8.13) температурного комплекса  $\Phi$  для каждого значения времени  $\tau$  и расчеты по формуле (8.11) коэффициента температуропроводности фторопласта для каждого промежутка времени  $\Delta\tau$  в течение 30 мин. Полученное из опыта значение коэффициента температуропроводности  $a = 0,125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  используется для расчета значений объемной теплоемкости ( $cp$ ) и теплопроводности  $\lambda$  фторопласта. Плотность теплового потока  $q_{\text{п}}^{\text{max}}$  на поверхности призмы квадратного сечения из фторопласта в начальном периоде охлаждения определялось по формуле (8.8) при  $\Delta t = t_0 - t_{\text{ж}} = 99 - 30 = 69 \text{ }^\circ\text{C}$ . Результаты расчета сведены в табл. 8.2.

**8.2. Расчет объемной теплоемкости и  
коэффициента теплопроводности по температурному полю  
на поверхности при охлаждении фторопласта:  
 $t_0 = 99 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_{\text{ж}} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $q_{\text{п}}^{\text{max}} = 910 \text{ Вт/м}^2$ ,  $a = 0,125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$**

| Время<br>$z_*$ , с | $t_{\text{гр}}$ ,<br>$^\circ\text{C}$ | $\vartheta_{\text{п}} = 0,5(t_0 - t_{\text{гр}})$ | $c_{\text{р}} = \frac{q_{\text{п}}^{\text{max}}}{\vartheta_{\text{п}} \sqrt{\frac{a \pi}{z_*}}}$ ,<br>кДж / (м <sup>3</sup> · К) | $\lambda = a(c_{\text{р}})$ ,<br>Вт/(м · К) |
|--------------------|---------------------------------------|---|--|---|
| 200                | 76,0                                  | 11,5  | 1786   | 0,223                                       |
| 400                | 66,0                                  | 16,5  | 1761   | 0,220                                       |
| 600                | 61,0                                  | 19,0  | 1872   | 0,233                                       |
| 800                | 57,0                                  | 21,0  | 1952   | 0,244                                       |
| 1000               | 54,0                                  | 22,5  | 2040   | 0,255                                       |

Таким образом, методика, основанная на измерении только двух температур поверхности призмы квадратного сечения (ребра и середины грани), подтверждает точность определения коэффициентов температуропроводности, объемной теплоемкости и теплопроводности материалов по температурному полю на поверхности.

**9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛОВ В ТЕЛАХ КУБИЧЕСКОЙ  
И  
ШАРОВОЙ ФОРМЫ**

---

## 9.1. ЗАКОНОМЕРНОСТЬ УПОРЯДОЧЕННОГО ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА В КУБЕ

Для определения теплофизических свойств ограждающих конструкций возможно использование образцов, выполненных в виде куба. Процесс нагревания параллелепипеда при любых граничных условиях описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} &= a \left[ \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \right] = \\ &= a \left[ \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} \left( 1 + \frac{\frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial x^2}} + \frac{\frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial z^2}}{\frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial x^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.1)$$

с условиями однозначности: симметрии (9.2), граничными (9.3) – (9.5) и начальными (9.6)

$$\frac{\partial T(y, z, \tau)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T(x, z, \tau)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial z} = 0, \quad (9.2)$$

$$T(R, y, z, \tau) = T_{\Pi}(y, z, \tau), \quad (9.3)$$

$$T(x, R, z, \tau) = T_{\Pi}(x, z, \tau), \quad (9.4)$$

$$T(x, y, R, \tau) = T_{\Pi}(x, y, \tau), \quad (9.5)$$

$$T(x, y, z, 0) = T_0. \quad (9.6)$$

Выражение (9.1) можно записать в форме

$$\frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} (1 + \beta_y + \beta_z) \right], \quad (9.7)$$

где

$$\beta_y = \frac{\text{grad}_y q}{\text{grad}_x q} \quad (9.8)$$

есть отношение составляющей градиента теплового потока в направлении  $y$  к составляющей градиента теплового потока в направлении  $x$ . Соответственно и

$$\beta_z = \frac{\text{grad}_z q}{\text{grad}_x q} \quad (9.9)$$

есть отношение составляющей градиента теплового потока в направлении  $z$  к составляющей градиента теплового потока в направлении  $x$ .

Если параллелепипед нагревать симметрично конвективным потоком тепла, то температурное поле по его сечению можно определить по принципу перемножения температурных критериев:

$$\begin{aligned} \theta = 1 - (1 - \theta_0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{nA} D_{mB} D_{kC} \times \\ \times \cos\left(\mu_{nA} \frac{x}{R_A}\right) \cos\left(\mu_{mB} \frac{y}{R_B}\right) \cos\left(\mu_{kC} \frac{z}{R_C}\right) \times \\ \times \exp\left[-\left(\mu_{nA}^2 \frac{a}{R_A^2} \tau + \mu_{mB}^2 \frac{a}{R_B^2} \tau + \mu_{kC}^2 \frac{a}{R_C^2} \tau\right)\right]. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Используя решение (9.10), можно показать характер изменения соотношений (9.8) и (9.9). В регулярной стадии  $\beta_y$  не зависит от критерия Фурье, а является функцией  $Bi_A$  и  $Bi_B$  и отношения между измерениями сторон параллелепипеда  $R_A$  и  $R_B$  во второй степени. При  $R_B$ , стремящемся к  $R_A$ , значение  $\beta_y$  начинается стремиться к своему предельному значению, равному единице.

Используя данные ЭВМ можно показать, что отношение составляющих градиента теплового потока  $\beta_y$  (когда  $R_A = R_B$ ) при лучистом нагреве параллелепипеда также равно единице в области упорядоченного теплового периода. Этот же результат получается при симметричном нагреве параллелепипеда суммарным потоком тепла (одновременно конвекцией и радиацией). К аналогичному заключению можно прийти, исследуя отношение  $\beta_z$ . Таким образом, случай с кубом, когда  $R_A = R_B = R_C$ , а критерии  $Bi_A = Bi_B = Bi_C$ , представляет особый интерес.

При этом, какой бы вид теплообмена не имел место при симметричном нагреве или охлаждении куба, отношение составляющих градиента тепловых потоков  $\beta_y$  и  $\beta_z$  в области упорядоченного теплового режима будет всегда равно единице.

Следовательно, в области упорядоченного теплового периода для тел кубической формы условия нагревания могут быть описаны зависимостями:

$$\frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = 3a \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial x^2}, \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial T(0, y, z, \tau)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T(x, 0, z, \tau)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial T(x, y, 0, \tau)}{\partial z} = 0,$$

$$T(R, y, z, \tau) = T_{\Pi}(y, z, \tau),$$

$$T(x, y, z, \tau_*) = T_*(x, y, z), \text{ где } \tau > \tau_*.$$

Используя методику, можно получить решение в неявной форме с точностью до постоянного значения

$$\begin{aligned} \Phi = \ln[T(R, y, z, \tau) - T(0, y, z, \tau)] - \\ - 1,23 \int \frac{dT(R, y, z, \tau)}{T(R, y, z, \tau) - T(0, y, z, \tau)} = -7,41 \frac{a}{R^2} \tau + \text{const}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Полученное выражение является закономерностью упорядоченного теплового режима, которая соблюдается при любых симметричных условиях теплообмена на границах куба. Закономерность упорядоченного теплового режима (9.12) не лимитируется параметрами и физическими переменными

ми внешней среды. При ее практическом использовании нет необходимости измерять температуру окружающей среды или поддерживать ее постоянной. В структуру закономерности не входят такие физические характеристики, как коэффициент теплообмена, степень черноты и др. Температура окружающей среды может изменяться во времени. Однако во всех случаях необходимым условием является наступление упорядоченного теплового периода, т.е. когда температурный комплекс  $\Phi$  начнет изменяться во времени по закону прямой линии.

*Достоверность закономерности (9.12) подтверждается при любых значениях критерия конвективного теплообмена на поверхности  $Bi$ , а также в случае симметричного нагрева куба лучистым и суммарным потоками тепла.*

*Если температуру измерять в конкретных парах точек центра и поверхности куба I-II, I-III (рис. 9.1), то выражение упорядоченного теплового режима для каждой пары запишется следующим образом*

$$\Phi_{I-II} = \ln(T_{II} - T_I) - 1,23 \int \frac{dT_{II}}{T_{II} - T_I} = -7,41 \frac{a}{R^2} \tau + \text{const}, \quad (9.13)$$

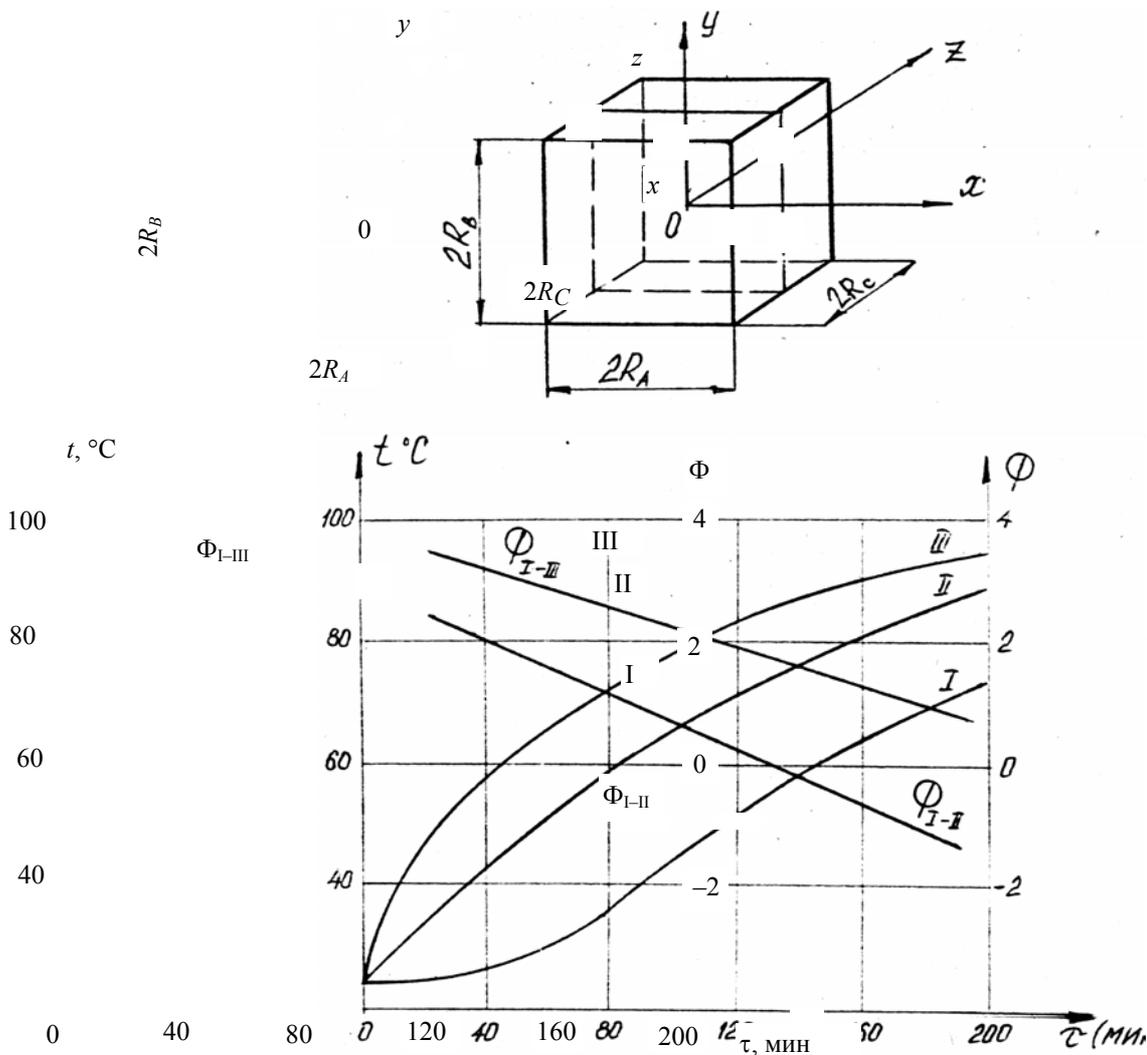
$$\Phi_{I-III} = \ln(T_{III} - T_I) - 1,23 \int \frac{dT_{III}}{T_{III} - T_I} = -7,41 \frac{a}{R_*^2} \tau + \text{const}, \quad (9.14)$$

где  $R_*^2 = 2R^2$ .

## 9.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛОВ В ТЕЛАХ КУБИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Экспериментальное подтверждение закономерности упорядоченного теплового режима (9.12) проводилось на кубах из оргстекла, фторопласта и бетона. Подготовленные к опыту кубы с термодарами помещали в испытательную камеру, которая предварительно была выведена на заданную температуру, либо нагревались вместе, от комнатной до температуры 80...100 °С. Особую трудность при этом представляет создание симметричного теплового потока для тел кубической формы. Для этого были использованы металлические экраны, выполненные из листовой меди и расположенные на расстоянии 5...6 мм друг от друга и от исследуемого образца. Медь достаточно равномерно распределяет температуру по экранам снизу, сбоку и сверху, и, таким образом, в небольшом зазоре между образцом и первым экраном естественная конвекция дестабилизирована, а воздух становится термически стратифицированным. Это обеспечивает симметричный нагрев радиационной и кондуктивной составляющей теплового потока.

На рис. 9.1 приведены результаты экспериментального распределения температур в кубе из оргстекла. Используя опытные данные термограмм точек I – в центре куба и II, III – на его поверхности (в центре грани и на середине ребра) также построены графики  $\Phi_{I-II}$  и  $\Phi_{I-III}$ , полученные на основе закономерности упорядоченного режима. Значения  $\Phi_{I-II}$  и  $\Phi_{I-III}$  соответственно вычислялись по формулам:



**Рис. 9.1. Нагрев куба из оргстекла ( $2R = 90$  мм) симметричным потоком тепла:**

I – температура в центре куба ( $x = 0; y = 0; z = 0$ );

II – температура в центре грани ( $x = R; y = 0; z = 0$ );

III – температура на середине ребра ( $x = R; y = R; z = 0$ );

$\Phi_{I-II}$  и  $\Phi_{I-III}$  – результаты расчета по формулам (9.15) и (9.16)

$$\Phi_{I-II} = \ln(T_{II} - T_I) - 1,23 \int \frac{dT_{II}}{T_{II} - T_I}; \quad (9.15)$$

$$\Phi_{I-III} = \ln(T_{III} - T_I) - 1,23 \int \frac{dT_{III}}{T_{III} - T_I}. \quad (9.16)$$

Каждый полученный угловой коэффициент  $\Delta\Phi / \Delta\tau$  усредняли и подсчитывали по нему значение коэффициента температуропроводности:

$$a = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} \frac{R^2}{7,41}; \quad a = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} \frac{R_*^2}{7,41}. \quad (9.17)$$

Коэффициент температуропроводности, полученный экспериментально при нагревании куба, составил:

- для оргстекла

$$a_{I-II} = 0,108 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad a_{I-III} = 0,119 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с};$$

- для фторопласта

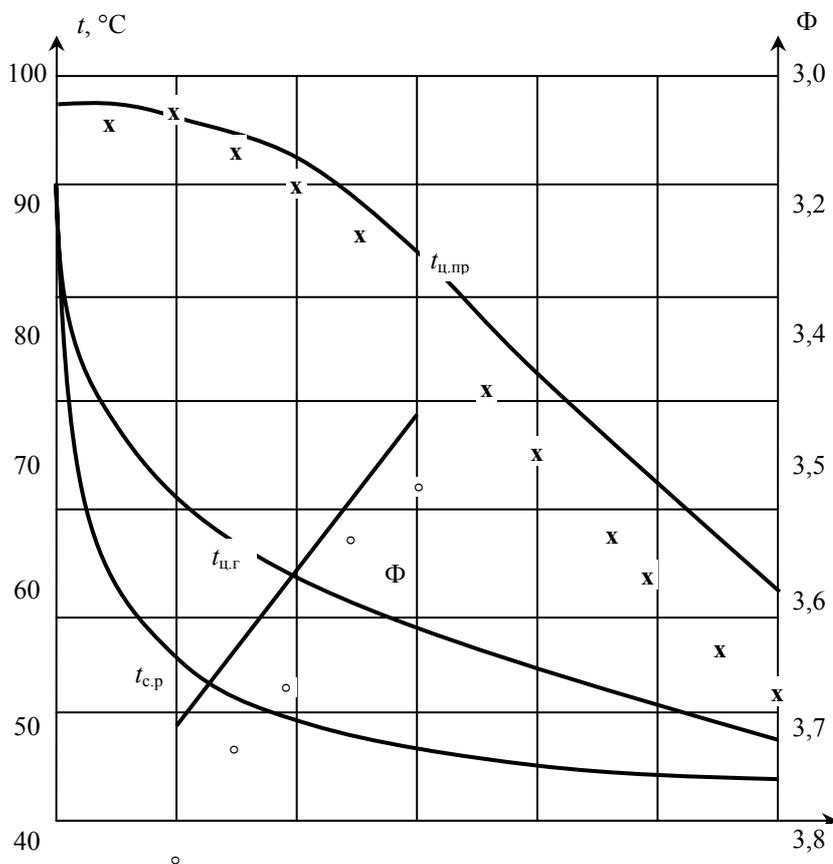
$$a_{I-II} = 0,110 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad a_{I-III} = 0,120 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Таким образом, проведенные эксперименты подтверждают заключение о том, что достигаются условия симметричного нагревания куба, и это позволяет использовать закономерность упорядоченного теплового режима (9.12) для определения коэффициента температуропроводности строительных, теплоизоляционных и облицовочных материалов.

### 9.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛОВ В КУБЕ МЕТОДОМ ТЕПЛООВОГО ПРОСЛУШИВАНИЯ

Температурное поле, возникающее в процессе нагревания или охлаждения тела конечных размеров (призмы, куба), может быть скоординировано распределением температуры по его поверхности. Такой закон теплового прослушивания позволяет установить связь между избыточными температурами в теле конечных размеров. Смысл его заключается в том, что при охлаждении (или нагреве) тела конечных размеров, например куба, избыточная температура его центра может координироваться избыточными температурами его вершины и центров граней. Это означает, что избыточную температуру центра куба можно определить по поверхностным измерениям температур, не проникая с термопарой внутрь его объема и не нарушая его целостность. При этом нет необходимости знать такие теплофизические характеристики вещества, как теплопроводность, теплоемкость, плотность.

На рис. 9.2 приведены результаты экспериментального распределения температур при нагревании куба из оргстекла ( $2R = 90 \text{ мм}$ ): центра поверхности грани –  $t_{ц.г}$  и середины ребра –  $t_{с.р}$ . Температура охлаждающего воздуха при естественной конвекции составляла  $t_{в} = 31 \text{ }^{\circ}\text{С}$ .



**Рис. 9.2. Охлаждение куба из оргстекла ( $2R = 90$  мм) на воздухе:**

$t_{ц.пр}$  – температура центра куба, получена путем теплового прослушивания по формуле (9.18);  $t_{ц.г}$  – экспериментальная температура центра поверхности грани;  $t_{с.р}$  – экспериментальная температура середины ребра;  $\Phi$  – рассчитан по формуле (9.19)

На рис. 9.2 также построена кривая предполагаемого значения температуры центра куба  $t_{ц.пр}$ , которая рассчитывалась путем теплового прослушивания по формуле

$$t_{ц.пр} = t_B + \frac{(t_{ц.г} - t_B)^2}{t_{с.р} - t_B}, \quad (9.18)$$

где  $t_{ц.г}$  и  $t_{с.р}$  – опытные значения температуры центра поверхности грани и середины ребра.

Используя еще раз экспериментальные значения температур центра поверхности грани  $t_{ц.г}$  и расчетные  $t_{ц.пр}$ , полученные путем теплового прослушивания, вычислялся температурный комплекс  $\Phi$  на основе закономерности упорядоченного режима в кубе по формуле

$$\Phi = \ln(t_{ц.пр} - t_{ц.г}) - 1,23 \int \frac{dt_{ц.г}}{t_{ц.пр} - t_{ц.г}}. \quad (9.19)$$

На рис. 9.2 построен прямой участок линии  $\Phi$ . Согласно закономерности упорядоченного теплового режима в кубе угловой коэффициент прямой линии  $\Delta\Phi / \Delta\tau$  численно равен множителю  $7,41 a / R^2$ , если по оси абсцисс отложено время экспериментального наблюдения за изменением температуры в соответствующих точках сечения куба. Полученный угловой коэффициент прямой линии  $\Delta\Phi / \Delta\tau$  усредняли и подсчитывали значение коэффициента температуропроводности оргстекла по формуле  $a = \frac{R^2}{7,41} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau}$ .

Коэффициент температуропроводности при охлаждении на воздухе куба из оргстекла ( $2R = 90$  мм) имел значение  $a = 0,119 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Таким образом, метод теплового прослушивания позволяет определять температуропроводность строительных материалов по экспериментальным измерениям температур только на поверхности куба. Метод исключает влияние внешних условий, не нарушает целостность образца и требует незначительного времени для эксперимента.

#### 9.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛОВ В ТЕЛАХ ШАРОВОЙ ФОРМЫ

Математические условия позволили получить решение в неявной форме с точностью до постоянной величины

$$\Phi = \ln \Delta t_{ц.-п} - 1,73 \int \frac{|d \Delta t_{п}(\tau)|}{\Delta t_{ц.-п}} = -9,86 \frac{a \tau}{R^2} + \text{const}. \quad (9.20)$$

Полученное выражение является закономерностью упорядоченного теплового режима в шаре, и она соблюдается при любых симметричных условиях теплообмена на его границе. Закономерность упорядоченного теплового режима (9.20) не лимитируется параметрами и физическими переменными внешней среды. При ее практическом использовании нет необходимости измерять температуру окружающей среды или поддерживать ее постоянной. В структуру закономерности не входят такие физические характеристики, как коэффициент теплообмена, степень черноты и др. Температура окружающей среды может изменяться во времени. Однако во всех случаях необходимым условием яв-

ляется наступление упорядоченного теплового периода, т.е. когда температурный комплекс  $\Phi$  начнет изменяться во времени по закону прямой линии.

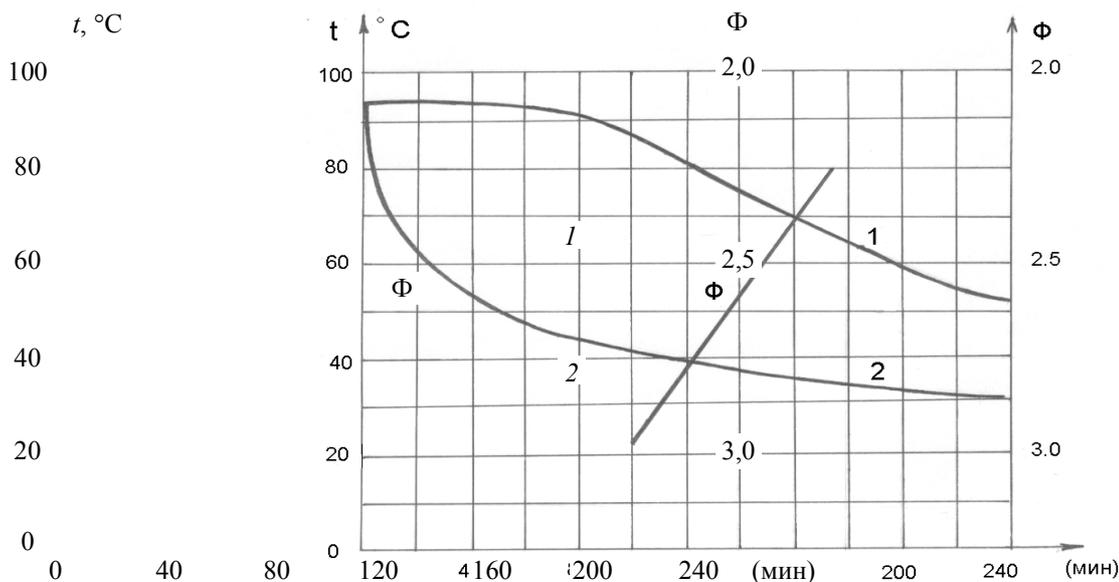
В безразмерной форме закономерность (9.21) можно записать так:

$$\Phi = \ln \Delta\theta_{ц-п} - 1,73 \int \frac{|d\theta_{п}(Fo)|}{\Delta\theta_{ц-п}} = -9,86Fo + \text{const}. \quad (9.21)$$

Достоверность закономерности упорядоченного теплового режима в шаре (9.21) подтверждается при любых значениях критерия конвективного теплообмена  $Vi$ , а также при лучистом и суммарном теплообмене на границе шара и по результатам опыта.

При проведении эксперимента был изготовлен образец в виде сплошного шара из оргстекла ( $2R = 160$  мм), который вначале нагревали в камере до температуры  $\sim 100$  °С, а затем охлаждали на воздухе при комнатной температуре и естественной конвекции. Экспериментальные исследования показали, что распределение температуры по его поверхности оказывается достаточно равномерным. Так, при комнатной температуре воздуха различие температуры между экваториальной точкой поверхности и другими соответствовало одному-двум градусам. Исключение составляли точки, находящиеся на самой вершине шара и очень близкие к ней. Там наблюдалось отклонение на четыре-пять градусов. В итоге за температуру поверхности можно было принимать ту, которая соответствовала экваториальной области шара.

На рис. 9.3 приведены результаты экспериментального распределения температур в центре и на поверхности шара из оргстекла ( $2R = 160$  мм) при его охлаждении, а также показан график температурного комплекса  $\Phi$ .



**Рис. 9.3. Охлаждение шара из оргстекла ( $2R = 160$  мм) на воздухе:**  
 1 – температура в центре шара; 2 – температура на поверхности шара;  
 $\Phi$  – результат расчета по формуле (9.22)

Значения  $\Phi$  рассчитывались по формуле

$$\Phi = \ln(t_{ц} - t_{п})_{ш} - 1,73 \int \frac{|d\Delta t_{п}|}{(t_{ц} - t_{п})_{ш}}. \quad (9.22)$$

Полученный угловой коэффициент  $\Delta\Phi / \Delta t$  усредняли и подсчитывали коэффициент температуропроводности оргстекла по формуле

$$a = \frac{R^2 \Delta\Phi}{9,86 \Delta\tau} = 0,108 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Таким образом, проведенные эксперименты подтверждают использование закономерности упорядоченного теплового режима (9.20) для определения коэффициента температуропроводности материалов.

## **10. МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ**

### **10.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ**

Для измерений температуры среды, веществ и определения теплофизических свойств материалов и изделий необходимо иметь измерительный комплекс, обобщенная или функциональная схема которого включает следующие элементы.

1. Датчики, находящиеся в контакте с исследуемой средой (телом) и являющиеся своего рода "преобразователями" температуры в иную физическую величину, подлежащую измерению. Для измерения температур используют термопары (типа ТХК, ТХА) или термопреобразователи сопротивления (типа ТСП, ТСМ). Термопары с термочувствительным элементом (определенной градуировки), термоэлектрические преобразователи или термоприемники (ТП) подключают к входам прибора – блока обработки данных.

2. Блок обработки данных может включать в себя регистрирующие или показывающие приборы, цифровые фильтры, вычислители или логические устройства, аналого-цифровые преобразователи, аналоговые модули входа, адаптеры интерфейса, а также ЭВМ.

3. Термоэлектродные или компенсационные провода, которые передают сигналы от термопар к прибору и изготовлены из тех же материалов (либо с аналогичными термоэлектрическими характеристиками), что и термопара.

При определении и исследовании теплофизических свойств материалов и изделий, основными параметрами измерений являются: температура, текущее время, геометрические размеры образца и расстояние между фиксированными точками тела, где установлены датчики температур.

Любые измерительные системы не могут обеспечить определение действительного значения температуры элементарного объема исследуемого объекта, поскольку физические принципы и исходные условия проведения измерений в той или иной степени оказываются нарушенными [17, 78]. Результат экспериментального измерения температуры  $t_3$  будет отличаться от ее действительного значения  $t_d$  на величину называемую абсолютной погрешностью измерения температуры  $\Delta t = t_3 - t_d$ .

Любая погрешность измерения может выражаться в долях действительного значения измеряемой величины и называется относительной погрешностью измерения.

Погрешность измерения определяется приближенно с определенной точностью в зависимости от метода, условий и применяемых средств измерений, способа фиксации результата, числа наблюдений и методов обработки экспериментальных данных. Абсолютную погрешность измерения температуры  $\Delta t$  можно разделить на три составляющие: методическую  $\Delta t_m$ , инструментальную  $\Delta t_{и}$  и погрешность наблюдения  $\Delta t_{н}$ :  $\Delta t = \Delta t_m + \Delta t_{и} + \Delta t_{н}$ .

Методическая погрешность измерения температуры  $\Delta t_m$  возникает из-за неточности выполнения методики измерений, недостаточной изученности явлений теплообмена между исследуемым объектом и термоприемником. Методические погрешности при исследовании теплофизических свойств материалов (температуропроводности, теплоемкости, теплопроводности), связанные с неточностью реализации теоретических предпосылок, могут быть вызваны следующими условиями: временем наступления упорядоченного теплового режима, неоднородностью температурного поля, изменением теплофизических свойств веществ от температуры и др.

Инструментальная (приборная) погрешность измерения температуры  $\Delta t_{\text{и}}$  возникает из-за несовершенства средств измерения температуры и использования этих средств в условиях, отличающихся от нормальных. Инструментальную погрешность разделяют на две составляющие: основную и дополнительную. Первая характеризует возможности средств измерений в нормальных условиях, а вторая учитывает влияние отклонений от этих условий. Паспорт или сертификат каждого прибора должен нормировать и регламентировать метрологические характеристики измерений в известных рабочих условиях. Приборную погрешность снижают путем применения современных контрольно-измерительных приборов и средств автоматизации, а также ЭВМ.

Погрешность регистрации наблюдения  $\Delta t_{\text{н}}$  определяется квалификацией и особенностями наблюдателя и возникает в результате неправильного отсчета и снятия показаний, расшифровки записей и результатов регистрации. Как правило, эта составляющая погрешности при исключении ошибок экспериментатора незначительна, по сравнению с  $\Delta t_{\text{м}}$  и  $\Delta t_{\text{и}}$ .

В зависимости от закономерности теплового режима погрешность  $\Delta t$  разделяют на систематическую  $\Delta t_{\text{сист}}$  и случайную  $\Delta t_{\text{сл}}$ :  $\Delta t = \Delta t_{\text{сист}} + \Delta t_{\text{сл}}$ .

Систематической погрешностью измерения температуры  $\Delta t_{\text{сист}}$  называют составляющую погрешности измерения, которая остается постоянной или закономерно изменяется в процессе измерений (либо при их повторении). Систематическую погрешность оценивают расчетным путем или экспериментально, а затем вводят соответствующую поправку в результат измерения температуры, либо самого метода.

Случайной погрешностью измерения температуры  $\Delta t_{\text{сл}}$  называют составляющую погрешности измерения  $\Delta t$ , которая заранее не предсказуема и изменяется случайным образом при повторных измерениях температуры теми же средствами измерения. Закономерности проявления случайной погрешности и оценка ее могут быть выявлены при многократных наблюдениях температуры с последующей статистической обработкой результатов измерений. В полученное значение случайной погрешности  $\Delta t_{\text{сл}}$  войдет и та часть систематической погрешности, которая из-за сложности и приближенности оценки  $\Delta t_{\text{сист}}$  не могла быть ранее учтена.

Измеряемая температура среды, веществ, материалов и изделий может быть стационарной (постоянной) или нестационарной (изменяться во времени). В зависимости от этого погрешность измерения температуры подразделяют на статическую  $\Delta t_{\text{ст}}$  и динамическую  $\Delta t_{\text{дин}}$ . Погрешность измерения нестационарной температуры включает в себя статическую  $\Delta t_{\text{ст}}$  и динамическую составляющую  $\Delta t_{\text{дин}}$ :  $\Delta t = \Delta t_{\text{ст}} + \Delta t_{\text{дин}}$ . Погрешность измерения стационарной температуры включает в себя только статическую  $\Delta t_{\text{ст}}$ , а динамическая составляющая  $\Delta t_{\text{дин}} = 0$ .

Статическая составляющая погрешности  $\Delta t_{\text{ст}}$  зависит от многих факторов: измерения температуры твердых тел, жидкостей, газов, движущихся сред или высокоскоростных потоков, монтажа ТП на поверхности или внутри тела (материала, изделия, массива), с высокой или низкой теплопроводностью, при установке ТП в пазу, цилиндрическом канале или с использованием защитных экранов, применения непогружаемых ТП контактным или бесконтактным способом. Существенно влияют на статическую составляющую погрешности  $\Delta t_{\text{ст}}$  направление теплового воздействия на исследуемый объект (нагрев или охлаждение), теплообмен между отдельными элементами ТП, теплоотдача излучением ТП и его окружением в газообразных, частично прозрачных и других объектах, влияние внутренних источников теплоты, характер изменения температуры внутри ТП и в зоне его расположения.

Для непогружаемых контактных термоприемников статическая составляющая погрешности  $\Delta t_{\text{ст}}$  зависит от процесса переноса тепла через зону механического контакта двух твердых тел или деталей [59, 60, 76]. На эффективность передачи тепла в зоне контакта оказывают влияние такие факторы, как физические свойства материалов, из которых выполнены термодатчик и исследуемый материал, свойства среды, заполняющей пространство между соприкасающимися поверхностями, чистота обработки и характер микрорельефа указанных поверхностей, сила сжатия и температура в зоне контакта. Так, термическое сопротивление контакта понижается с увеличением нагрузки на соприкасающиеся поверхности, увеличением частоты обработки контактных поверхностей, повышением температуры в зоне раздела.

Динамическая составляющая погрешности  $\Delta t_{\text{дин}}$  вызвана скоростью изменения исследуемой величины (температуры)  $t_{\text{д}}$  от времени  $\tau$  и невозможностью из-за инерционных свойств ТП, регистрации мгновенных значений нестационарной температуры средствами измерения.

Упрощенно структурная схема измерения температуры имеет вид последовательного соединения нескольких элементов – звеньев структурной схемы: датчика или первичного преобразователя температуры ТП,  $\epsilon$  или нескольких промежуточных вторичных преобразователей ПП и измерительного (регистратора на диаграмме, показывающего на дисплее ЭВМ) прибора ИП.

Исследуемое значение температуры или входное воздействие  $t_{вх}$  преобразуется чувствительным элементом ТП в выходной сигнал  $u_1$ , а именно, в термоэлектродвижущую силу, для термопарного ТП, или в электрическое сопротивление терморезисторного ТП, который поступает на ПП. В зависимости от выбора средства измерения, ПП выполняют функции масштабных или функциональных преобразований, передачи и усиления по мощности измерительной информации. Воздействие  $u_2$  преобразуется ИП в выходную величину  $u_{вых}$  в форме, пригодной для анализа температурного режима исследуемого объекта.

Каждый применяемый прибор вносит в результат измерения дополнительную инструментальную погрешность  $\Delta t_c$ , зависящую от особенностей конструкции и принципа действия. Результирующая погрешность всего измерительного комплекса определяется суммой погрешностей каждого элемента, который может иметь свои погрешности. Суммирование всех составляющих погрешностей определяет методическую погрешность  $\Delta t_m$  измерительного комплекса.

Принимая меры защиты (хороший тепловой контакт термопар с телом, установка ТП в изотермической поверхности, увеличение числа измерений, применение совершенных контрольно-измерительных приборов), можно уменьшить инструментальную, случайную и статическую погрешности до необходимого минимального значения. Если это удастся сделать, то единственным фактором оказывается тепловое воздействие исследуемого объекта. Если тепловое воздействие объекта изменяется во времени (нестационарные процессы), то остается лишь одна составляющая методической погрешности, обусловленная тепловой инерционностью или динамической погрешностью ТП. Для непогружаемых контактных термоприемников статическая составляющая погрешности  $\Delta t_{ст}$  учитывается независимо от характера теплового режима (стационарный или нестационарный).

Однако внести дополнительную динамическую составляющую погрешности может и любой из перечисленных выше источников измерительного комплекса, если интенсивность его воздействия с течением времени достаточно велика. Искажение показаний, обусловленное нестационарными тепловыми процессами в ТП и между ТП и окружающей средой, принято объяснять тепловой или термической инерцией, а искажение, вызываемое механическими и электромеханическими особенностями измерительного прибора и передающего элемента – механической или электромеханической инерцией измерительного комплекса.

Анализ источников погрешностей [17, 22, 24, 42, 50, 55, 56, 59, 68, 71, 76, 78] показывает, что основные погрешности имеют тепловую природу. Быстродействие современных регистрирующих приборов, особенно электронных, исчисляется долями секунд, а процесс теплообмена между ТП и средой может занимать значительно большее время. Количественный анализ методических погрешностей в конечном итоге заключается в обосновании и выборе математической модели, определяющей процесс теплового взаимодействия объекта исследования с ТП.

## 10.2. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

При исследовании ТФС материалов и измерении нестационарных температур на поверхности объекта (тела), термопара чаще всего располагается в прямоугольном канале (паз) с геометрическими размерами – глубиной  $h$  и шириной паза  $b$ . На рис. 10.1 показана схема расположения ТП цилиндрической формы на поверхности исследуемого материала.

**Рис. 10.1. Схема расположения термопары на поверхности материала:**

1 – материал; 2 – термопара (ТП); 3 – замазка; 4 – окружающая среда;  
 $q$  – удельный тепловой поток;  $b, h$  – геометрические размеры паза;  
 $t_c$  – температура окружающей среды

При реализации такого способа измерений желательно, чтобы глубина и ширина паза не превышали 0,2...0,8 мм. Замазка выбирается с относительно высокой теплопроводностью. Чувствительный элемент по возможности чеканится к исследуемой поверхности.

Паз с термопарой заполняется клеем, пастой, цементом или другим веществом, с коэффициентом теплопроводности меньшим или близким к исследуемому материалу. Так, снижение погрешностей измерения температур таких материалов, как оргстекло, фторопласт, бетон, красный и силикатный кирпич, достигалось следующими приемами:

1) термочувствительный элемент ТП должен находиться в хорошем тепловом контакте с телом, для чего крепление термопар к образцам из оргстекла проводилось опилками оргстекла, смешанными с дихлорэтаном; из фторопласта – опилками фторопласта смешанными с универсальным клеем (ТУ 6-15-1268–80); из бетона, красного и силикатного кирпича – цементом, смешанным с силикатным клеем;

2) спай термопары должен размещаться в изотермических плоскостях;

3) все провода термопар должны быть изолированы защитным фторопластовым кожухом (кембриком), во избежание теплоотдачи оголенного провода с окружающей средой.

В результате такой "защиты" термопар коэффициент теплопроводности исследуемого материала  $\lambda_1$  незначительно превышает теплопроводность замазки  $\lambda_3$ . Методическая погрешность измерения температуры поверхности объекта (образца) возникает ввиду разности значений теплопроводности  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$  и перераспределения тепловых потоков в области паза, а также смещения термопары на величину  $h/2$  от поверхности исследуемого объекта [78].

При измерении *стационарной* температуры поверхности тела и условии, что коэффициент теплоотдачи с поверхности тела в окружающую среду равен  $\alpha_0$ , распределение температуры по сечению ТП равномерное, а термопара занимает центральное положение внутри паза (рис. 10.1), погрешность  $\Delta t_3$  определяется по выражению [78]:

$$\Delta t_3 = t_3 - t_d = A (t_c - t_d) = A (t_3 - t_c) / (A - 1), \quad (10.1)$$

где  $t_3$  и  $t_d$  – измеренная (экспериментальная) и действительная температура поверхности тела;  $t_c$  – температура окружающей среды.

Показатель погрешности измерения температуры поверхности  $A$  определяется из выражения

$$A \approx [1 - \varphi \xi_0(1 + \eta)] / [1 + \mu(1 + \eta)]. \quad (10.2)$$

Входящие в формулу (10.2) параметры рассчитываются так:

$$\varphi = 1 + h/b; \quad \mu = 1 + 2h/b; \quad \xi_0 = \alpha_0 h / \lambda_0; \quad \xi_3 = \alpha_0 h / \lambda_3;$$

$$\eta = \varphi^2 \psi (1 + \mu) / \mu \xi_3 \omega; \quad \psi = [1 + \pi d / 2 (h + b)]^2; \quad \omega = 1 - \pi d^2 / 4hb;$$

где  $\lambda_3$  – теплопроводность замазки;  $d$  – диаметр термопары.

Так, при исследовании бетона измеренная температура его поверхности составила  $t_3 = 100$  °С. Термопара ХК, диаметром  $d = 0,4 \cdot 10^{-3}$  м, расположена в прямоугольном пазу  $h = b = 0,8 \cdot 10^{-3}$  м. Температура окружающей среды  $t_c = 200$  °С, а коэффициент теплоотдачи  $\alpha_0 = 25$  Вт/(м<sup>2</sup> · К). Коэффициент теплопроводности бетона и цементной замазки, соответственно равны:  $\lambda_0 = 1$  Вт/(м · К),  $\lambda_3 = 0,5$  Вт/(м · К).

Предварительно находим параметры:  $\varphi = 2$ ;  $\mu = 3$ ;  $\xi_0 = 0,02$ ;  $\xi_3 = 0,04$ ;  $\psi = 1,94$ ;  $\omega = 0,804$ ;  $\eta = 322$ . Показатель погрешности измерения температуры поверхности тела, определяемый из выражения (10.2)  $A = -0,012$ . Погрешность измерения температуры поверхности бетона, определяемая из выражения (10.1),  $\Delta t_3 = A(t_3 - t_c) / (A - 1) = -1,18$  °С. Действительная температура поверхности бетона  $t_d = t_3 - \Delta t_3 = 101,2$  °С. Относительная погрешность измерения  $\Delta t = \Delta t_3 / t_d = 0,012 = 1,2$  %.

При измерении *нестационарной* температуры поверхности тела, когда распределение температуры по сечению ТП равномерное, а термопара занимает центральное положение внутри паза (рис. 10.2), погрешность измерения включает в себя только динамическую составляющую  $\Delta t_{дин}$ , которая приближенно оценивается по формуле [78]:

$$\Delta t_{дин} = t_3(\tau) - t_d(\tau) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_3) b, \quad (10.3)$$

где  $t_3(\tau)$  и  $t_d(\tau)$  – измеренная (экспериментальная) и действительная температура поверхности тела;  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_3$  – инерционная составляющая исследуемого тела и замазки, с;  $b$  – темп нагревания тела, °С/с.

Коэффициент или показатель тепловой инерции материала (тела) определяется из выражения [78]:

$$\varepsilon_0 = (h + b)^2 / 8\pi^2 a_0, \quad (10.4)$$

где  $a_0$  – коэффициент температуропроводности материала, м<sup>2</sup>/с.

Коэффициент или показатель тепловой инерции замазки определяется из выражения [78]:

$$\varepsilon_3 = \frac{4}{\lambda_3} \left[ (c\rho)_3 + \frac{(c\rho)_T}{\left(\frac{4bh}{\pi d^2}\right) - 1} \right] \left[ \frac{(bh) - \frac{\pi d^2}{4}}{2(b+h) + \pi d} \right]^2, \quad (10.5)$$

где  $\lambda_3$  – теплопроводность замазки, Вт/(м · К);  $d$  – диаметр термопары, м;  $b$  и  $h$  – геометрические размеры паза;  $(c\rho)_3$  и  $(c\rho)_T$  – объемная теплоемкость замазки и термопары, кДж/(м<sup>3</sup> · К).

Рассмотрим конкретные примеры нагревания в экспериментальной установке (рис. 7.4) образцов из оргстекла и бетона, выполненных в виде призмы квадратного сечения, со скоростью изменения температуры на поверхности исследуемого материала  $b \approx 0,025$  К/с. Термопара градуировки хромель-копель, диаметром  $d = 0,4 \cdot 10^{-3}$  м, расположена в прямоугольном пазу  $h = b = 0,8 \cdot 10^{-3}$  м. Коэффициент температуропроводности оргстекла и бетона соответственно равны:  $a_{орг} = 0,12 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $a_{бет} = 0,5 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Коэффициент теплопроводности цементной замазки (для бетона) и опилок оргстекла, смешанных с дихлорэтаном (для оргстекла), соответственно равны:  $\lambda_{ц.з} = 0,5$  Вт/(м · К),  $\lambda_{3.0} = 0,2$  Вт/(м · К).

Объемная теплоемкость цементной замазки, опилок оргстекла, и термопары ХК соответственно равны:  $(c\rho)_{ц.з} = 1,12 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К),  $(c\rho)_T = 4,35 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К),  $(c\rho)_{3.0} = 1,6 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К).

Предварительно находим коэффициент или показатель тепловой инерции материала из выражения (10.4):

- для оргстекла  $\varepsilon_{\text{орг}} = (h + b)^2 / 8\pi^2 a_{\text{орг}} = 0,27 \text{ с}$ ;
- для бетона  $\varepsilon_{\text{бет}} = (h + b)^2 / 8\pi^2 a_{\text{бет}} = 0,065 \text{ с}$

и показатель тепловой инерции замазки из выражения (10.5):

- для оргстекла  $\varepsilon_{3,0} = 0,71 \text{ с}$ ;
- для бетона  $\varepsilon_{ц.з} = 0,23 \text{ с}$ .

Динамическая составляющая  $\Delta t_{\text{дин}}$  приближенно оценивается по формуле (10.3) и соответственно равна:

- для оргстекла  $\Delta t_{\text{дин}} = (\varepsilon_{\text{орг}} - \varepsilon_{3,0}) b = -0,011 \text{ К}$ ;
- для бетона  $\Delta t_{\text{дин}} = (\varepsilon_{\text{бет}} - \varepsilon_{ц.з}) b = -0,004 \text{ К}$ .

При нестационарном нагревании образцов в диапазоне температур  $\Delta t 20...80 \text{ }^\circ\text{C}$ , относительная погрешность соответственно составит:

- для оргстекла  $\Delta \zeta = \Delta t_{\text{дин}} / \Delta t = 0,00028 = 0,028 \text{ \%}$ ;
- для бетона  $\Delta \zeta = \Delta t_{\text{дин}} / \Delta t = 0,00007 = 0,007 \text{ \%}$ .

### 10.3. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ КОНТАКТНЫМ МЕТОДОМ

При определении теплофизических свойств (ТФС) материалов и изделий измерение температур в стационарных и нестационарных процессах нагрева или охлаждения объектов производится контактными термопарами [59]. Методические погрешности свойственны в той или иной степени всем контактными методами измерений, независимо от принципа действия выбранных приборов. Суммарное воздействие различных источников и ошибок приводит к тому, что измерительный комплекс регистрирует не температуру материала  $t_d$ , а некоторую отличную от нее температуру  $t_s$ . Одна из основных задач при контактном измерении температуры заключается в определении действительной температуры  $t_d$  по измеренной температуре  $t_s$ , т.е. состоит в оценке суммарной погрешности измерения.

Возникает также и обратная задача – определение температуры измерительного комплекса, если действительное или предполагаемое изменение температуры среды, где находится ТП, задано, и как следствие ее – подбор измерительного комплекса с такими параметрами, при которых погрешность температурных измерений в данных условиях не превышала бы заранее заданного допустимого значения.

Для проведения опытов методом неразрушающего контроля и для измерения температуры ребра и середины грани на призме квадратного сечения разработано устройство с использованием непогружаемых контактных термопар, схема которого приведена на рис. 7.7. Разработанный метод выгодно отличается от известных быстродействием, небольшой погрешностью, обладает новизной и оригинальностью. Кроме того, методика позволяет легко автоматизировать теплофизический эксперимент, упрощается реализация на базе микропроцессорной техники, и поэтому является перспективным для использования в информационно-измерительных системах неразрушающего контроля ТФХ материалов.

Отличительной особенностью контактных методов неразрушающего контроля ТФХ материалов и изделий является непосредственный контакт термоприемников с участком поверхности исследуемого объекта. Проблемы, связанные с особенностями контактных методов измерения температур на поверхности исследуемых объектов достаточно глубоко и детально проработаны и представлены в работах многих авторов [59, 68, 76, 78].

На рис. 10.2 изображена модель контактной термопары с размерами термопреобразователя (термопары) и тепловой изоляции (теплоизолятора).

Для принятой конструкции непогружаемой контактной термопары, термоприемника (ТП), а также при известных условиях эксплуатации можно рассчитать общую погрешность контактной термопары. Индексы 1, 2, 3 на (рис. 10.2) соответственно относятся к термоприемнику, изолятору и исследуемому материалу, а геометрические размеры контактной термопары составляют соответственно:  $r_1 = 0,2 \text{ мм}$ ;  $r_2 = 2,0 \text{ мм}$ ;  $L_1 = 0,4 \text{ мм}$ ;

$L_2 = 5 \text{ мм}$ . Толщина изоляции в радиальном направлении  $\Delta r = r_2 - r_1 = 1,8 \text{ мм}$ , а толщина изоляции в осевом направлении  $\Delta = L_2 - L_1 = 4,6 \text{ мм}$ .

Для расчета метрологических характеристик контактной термопары, статической и динамической погрешности ТП необходимо иметь относительно простые явные зависимости – симплексы [59]:

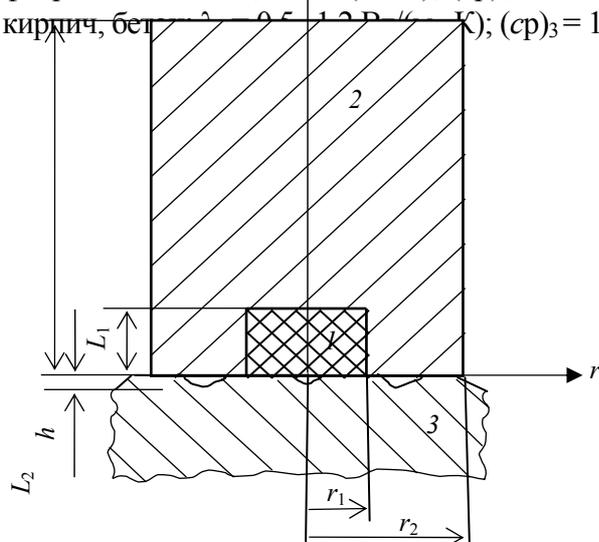
$$K_a = \alpha_k / \alpha_b; \quad K_{*\lambda} = \lambda_2 / \lambda_1; \quad K_\lambda = 100 K_{*\lambda}; \quad K_c = (cp)_2 / (cp)_1;$$

$$K_{\Delta r} = \Delta r / L_1; \quad K_\Delta = \Delta / L_1, \quad (10.6)$$

где  $\alpha_k, \alpha_b$  – коэффициенты теплообмена зоны контакта и поверхности термодатчика с внешней средой (воздухом);  $\lambda_2, \lambda_1$  – коэффициенты теплопроводности теплоизолятора и термодатчика;  $(cp)_2, (cp)_1$  – объемная теплоемкость теплоизолятора и термодатчика, кДж/(м<sup>3</sup> · К).

Теплофизические свойства для термопреобразователя градуировки ХК (хромель-копель), теплоизолятора (фторопласт) и исследуемых строительных материалов (бетон, красный и силикатный кирпич) приняты следующие:

- хромель-копель:  $\lambda_1 = 23,9$  Вт/(м · К);  $(cp)_1 = 4350$  кДж/(м<sup>3</sup> · К);
- фторопласт:  $\lambda_2 = 0,23$  Вт/(м · К);  $(cp)_2 = 1780$  кДж/(м<sup>3</sup> · К);
- кирпич, бетон:  $\lambda_3 = 0,5 \dots 1,2$  Вт/(м · К);  $(cp)_3 = 1600 \dots 1900$  кДж/(м<sup>3</sup> · К).



**Рис. 10.2. Модель (сечение) контактной термопары, используемой для определения теплофизических свойств материалов:**

$r_1$  и  $r_2$  – размеры термопары и теплоизолятора в радиальном направлении;

$L_1$  и  $L_2$  – размеры термопары и теплоизолятора в осевом направлении;

1 – термопара ХК (термодатчик); 2 – теплоизолятор;

3 – исследуемый материал;  $h$  – высота шероховатостей

Процесс переноса тепла через зону механического контакта двух твердых тел или деталей отличается исключительной сложностью. Эффективность переноса тепла зависит от следующих факторов: физических свойства материалов, из которых выполнены термопара и исследуемый образец; среды, заполняющей пространство между соприкасающимися поверхностями; чистота обработки и характер микрорельефа указанных поверхностей; сила сжатия и температура в зоне контакта. Термическое сопротивление контакта понижается с увеличением нагрузки на соприкасающиеся поверхности, увеличением частоты обработки контактных поверхностей, повышением температуры в зоне раздела.

Рассмотрим вопросы расчета контактной проводимости  $\alpha_k$  при теплообмене контактного ТП с поверхностью твердого тела. Так, при контакте шероховатых поверхностей предложено определять  $\alpha_k$  по формуле [59, 76]:

$$\alpha_k = 2\lambda_c / (h_2 + h_3) + 7 \cdot 10^3 P \lambda_m / ES_H, \quad (10.7)$$

где  $\lambda_c$  – коэффициент теплопроводности межконтактной среды (воздуха), Вт/(м · К);  $h_2, h_3$  – средняя высота выступов микрошероховатостей соприкасающихся поверхностей, м;  $P$  – нормальная нагрузка, Н;  $\lambda_m$  – приведенный коэффициент теплопроводности соприкасающихся материалов;  $E$  – предел прочности или временное сопротивление разрыву менее пластичного материала, Н/м<sup>2</sup>;  $S_H$  – номинальная (геометрическая) площадь контакта, м<sup>2</sup>.

Первое слагаемое выражения (10.7) представляет собой тепловую проводимость межконтактной среды, а второе – является тепловой проводимостью через места фактического контакта. Среднее значение температуры в зоне контакта составляет  $\approx 60$  °С, а коэффициент теплопроводности межконтактной среды (воздуха)  $\lambda_c = 0,029$  Вт/(м · К). Нормальная нагрузка пружин (рис. 10.3) составляет  $P = 0,1$  кг =  $0,98 \approx 1$  Н.

Теплоизолятор выполнен из фторопласта со следующими параметрами и характеристиками:  $h_2 = 1$  мкм =  $10^{-6}$  м;  $S_H = 4$  мм ×  $10$  мм =  $4 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>;  $\lambda_2 = 0,23$  Вт/(м · К). Материал теплоизолятора наряду с низкой теплопроводностью должен удовлетворять и ряду требований, выдвигаемых объектами контроля и условиями эксплуатации (механическая прочность и др.).

Исследуемый материал – красный кирпич (силикатный кирпич или бетон) имеет следующие параметры и характеристики:

$$h_3 \approx 100 \text{ мкм} \approx 10^{-4} \text{ м}; \quad \lambda_3 \approx 0,8 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \quad E \approx 70 \text{ кг/см}^2 \approx 70 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Приведенный коэффициент теплопроводности  $\lambda_m$  соприкасающихся материалов определяется по соотношению

$$\lambda_m = 2 \lambda_2 \lambda_3 / (\lambda_2 + \lambda_3) = 2 \cdot 0,23 \cdot 0,8 / (0,23 + 0,8) = 0,36 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}.$$

Контактная проводимость, вычисленная по формуле (10.7), составляет

$$\alpha_k = 2 \cdot 0,029 / (1,01 \cdot 10^{-4}) + (7 \cdot 10^3) \cdot 1 \cdot 0,36 / (70 \cdot 10^5) (4 \cdot 10^{-6}) = \\ = 580 + 90 = 670 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Одной из основных особенностей контактной термопары является теплоотдача, обусловленная тем, что в процессе эксплуатации большая часть поверхности участвует в теплообмене не с материалом, а с внешней средой. Даже в стационарном режиме через ТП проходит тепловой поток, величина и направление которого влияет, в конечном счете, на погрешность контактной термопары. Коэффициент теплообмена

поверхности контактной термопары (теплоизолятора) с внешней средой (воздухом) при естественной конвекции принимается равным  $\alpha_b \approx 10$  Вт/(м<sup>2</sup> · К).

Тогда метрологические симплексы (10.6) соответственно будут равны:

$$K_a = \alpha_k / \alpha_b = 670 / 10 = 67; \quad K_{*\lambda} = \lambda_2 / \lambda_1 = 0,23 / 23 = 0,01;$$

$$K_\lambda = 100 K_{*\lambda} = 1; \quad K_c = (c_p)_2 / (c_p)_1 = 1780 / 4350 = 0,4.$$

Симплексы в радиальном и осевом направлении соответственно равны:

$$K_{\Delta r} = \Delta r / L_1 = 1,8 / 0,4 = 4,5; \quad K_\Delta = \Delta / L_1 = 4,6 / 0,4 = 11,5.$$

Показатель степени  $m = 0,3 K_{\lambda}^{0,41} - 1,3 = -1$ .

Статическая погрешность измерения температуры  $\Delta t_{ст}$ , вызванная теплообменом ТП с внешней средой может быть рассчитана по формуле [59]:

- в радиальном направлении

$$\Delta t_{ст} = (0,046 + 3,74 K_a^{-0,77}) [(1,38 - K_{\lambda}^{-0,38}) K_{\Delta r}^m - 0,011 K_{\lambda}];$$

- в осевом направлении

$$\Delta t_{ст} = (0,046 + 3,74 K_a^{-0,77}) [(1,38 - K_{\lambda}^{-0,38}) K_{\Delta}^m - 0,011 K_{\lambda}]. \quad (10.8)$$

Для исследованных материалов (например, красного кирпича) и принятых условий эксплуатации статическая погрешность измерения температуры  $\Delta t_{ст}$ , составляет:

- в радиальном направлении

$$\begin{aligned} \Delta t_{ст} &= (0,046 + 3,74 / 25,5) [(1,38 - 1) / 4,5 - 0,011] = \\ &= (0,046 + 0,147) [(0,38) / 4,5 - 0,011] = (0,193) [0,073] = 0,014 = 1,4 \%; \end{aligned}$$

- в осевом направлении

$$\begin{aligned} \Delta t_{ст} &= (0,046 + 0,147) [(1,38 - 1) / 11,5 - 0,011] = \\ &= (0,183) [(0,38 - 1) / 11,5 - 0,011] = (0,183) [0,022] = 0,0042 = 0,42 \%. \end{aligned}$$

При увеличении толщины изоляции в радиальном и осевом направлении до значений  $r_2 = 2,5$  мм;  $L_2 = 8$  мм;  $\Delta r = 2,3$  мм;  $\Delta = 7,6$  мм симплексы примут следующие значения:

$$K_{\Delta r} = \Delta r / L_1 = 2,3 / 0,4 = 5,8; \quad K_{\Delta} = \Delta / L_1 = 7,6 / 0,4 = 19.$$

Номинальная (геометрическая) площадь контакта составит  $S_n = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ .

Контактная проводимость, вычисленная по формуле (10.7), составляет

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 2 \cdot 0,029 / (1,01 \cdot 10^{-4}) + (7 \cdot 10^3) \cdot 1 \cdot 0,36 / (70 \cdot 10^5) \cdot (5 \cdot 10^{-6}) = \\ &= 580 + 103 = 683 \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}). \end{aligned}$$

Симплекс  $K_a$  соответственно будет равен:  $K_a = \alpha_k / \alpha_b = 683 / 10 = 68$ .

Статическая погрешность измерения температуры  $\Delta t_{ст}$  в этом случае соответственно равна:

- в радиальном направлении

$$\begin{aligned} \Delta t_{ст} &= (0,046 + 0,145) [(1,38 - 1) / 5,8 - 0,011] = \\ &= (0,191) [(0,38 - 1) / 5,8 - 0,011] = (0,191) [0,055] = 0,0104 = 1,04 \%; \end{aligned}$$

- в осевом направлении

$$\begin{aligned} \Delta t_{ст} &= (0,046 + 0,145) [(1,38 - 1) / 19 - 0,011] = \\ &= (0,191) [0,009] = 0,0017 = 0,17 \%. \end{aligned}$$

Выражение (10.8) дает возможность решить и обратную задачу: на стадии проектирования контактной термопары найти требуемую толщину теплоизолятора. Так, если задана допустимая статическая погрешность  $\Delta t_{ст. доп}$ , известны условия эксплуатации и выбран материал теплоизолятора, то его минимально возможную толщину определяют по соотношению [59]:

$$\delta_{ст} = L_1 \{ [(0,046 + 3,74 K_a^{-0,77})^{-1} \Delta t_{ст. доп} + 0,011 K_\lambda] (1,38 - K_\lambda^{-0,38})^{-1} \}^{1/m}.$$

Так, если задать допустимую статическую погрешность  $\Delta t_{ст. доп} = 1 \%$ , то при уже известных условиях эксплуатации и выбранном материале теплоизолятора его минимально возможная толщина составит

$$\begin{aligned} \delta_{ст} &= L_1 / [(0,046 + 0,147)^{-1} \cdot 0,01 + 0,011] (1,38 - 1)^{-1} = \\ &= 0,4 / [(0,193)^{-1} \cdot 0,01 + 0,011] (2,63) = \\ &= 0,4 / [0,063] (2,63) = 0,4 / 0,165 = 2,4 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Если задать допустимую статическую погрешность  $\Delta t_{ст. доп} = 2 \%$ , то при уже известных условиях эксплуатации и выбранном материале теплоизолятора его минимально возможная толщина составит

$$\begin{aligned} \delta_{ст} &= L_1 / [(0,046 + 0,147)^{-1} \cdot 0,02 + 0,011] (1,38 - 1)^{-1} = \\ &= 0,4 / [(0,193)^{-1} \cdot 0,02 + 0,011] (2,63) = \\ &= 0,4 / [0,115] (2,63) = 0,4 / 0,3 = 1,3 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Анализ зависимости (10.8) позволяет оценить влияние эксплуатационных и конструктивных параметров на  $\Delta t_{ст}$ . Так, увеличение  $K_a$ , снижение  $K_\lambda$ , увеличение относительной толщины изоляции  $K_{\Delta}$  ( $K_\Delta$ ) снижает статическую погрешность. Увеличение толщины теплоизолятора с целью снижения погрешности  $\Delta t_{ст}$  наиболее эффективно при использовании материалов с высокими теплоизоляционными свойствами.

*Динамическая погрешность* измерения температур контактной термопарой, когда тепловое воздействие на исследуемый материал изменяется во времени, обусловлена тепловой инерционностью. Для оценки влияния инерционности ТП при измерении нестационарной температуры воспользуемся соотношением [78]:

$$\Delta t_{дин} = \varepsilon_1 b, \quad (10.9)$$

где  $\varepsilon_1$  – коэффициент или показатель тепловой инерции термоприемника, с;  $b$  – скорость изменения температуры исследуемого образца (массива), К/с.

Для исследуемых материалов (оргстекло, фторопласт, бетон, кирпич) скорость изменения температуры в области упорядоченного теплового режима, где определяется коэффициент температуропроводности материала, составляет  $b \approx 0,025$  К/с.

Показатель тепловой инерции непогружаемой контактной термопары  $\varepsilon_1$  определяется из соотношения [59]:

$$\varepsilon_1 = \tau_1 (L_1)^2 / a_1, \quad (10.10)$$

где  $\tau_1$  – безразмерный аналог термической инерции;  $a_1$  – коэффициент температуропроводности термоприемника (термопары ХК), м<sup>2</sup>/с.

Коэффициент температуропроводности термоприемника (термопары градуировки ХК) равен

$$a_1 = \lambda_1 / (cp)_1 = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Безразмерный аналог термической инерции контактной термопары в радиальном и осевом направлении определяется по соотношению [59]:

$$\tau_1 = 10 K_c (F K_{\Delta r}^U + D K_{\lambda}^W + 13,7 K_a^{-0,5} - 3,63);$$

$$\tau_1 = 10 K_c (F K_{\Delta}^U + D K_{\lambda}^W + 13,7 K_a^{-0,5} - 3,63), \quad (10.11)$$

где симплексы  $K_c = 0,4$ ;  $K_{\lambda} = 1$ ;  $K_a = 67$ ;  $K_{\Delta r} = 4,5$ ;  $K_{\Delta} = 11,5$ ; а коэффициенты  $F$ ,  $U$ ,  $D$ ,  $W$  соответственно равны:

$$F = 1,57 K_{\lambda}^{-0,7} + 0,34 = 1,57 + 0,34 = 1,91;$$

$$U = 1,76 - 0,26 \lg K_{\lambda} = 1,76 - 0 = 1,76;$$

$$D = 6,28 - 10 K_a^{-0,4} = 6,28 - 10 / 5,37 = 4,42;$$

$$W = -(4,1 K_a^{-1,1} + 0,19) = -(4,1 / 102 + 0,19) = -0,6.$$

Безразмерный аналог термической инерции контактной термопары, определяемый по (10.11), равен:

- в радиальном направлении

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 10 K_c (F K_{\Delta r}^U + D K_{\lambda}^W + 13,7 K_a^{-0,5} - 3,63) = \\ &= 4 (1,91 \cdot 4,5^{1,76} + 4,42 \cdot 1^{-0,6} + 13,7 \cdot 67^{-0,5} - 3,63) = \\ &= 4 (26,96 + 4,42 + 1,67 - 3,63) = 4 \cdot 29,4 = 118; \end{aligned}$$

- в осевом направлении

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 10 K_c (F K_{\Delta}^U + D K_{\lambda}^W + 13,7 K_a^{-0,5} - 3,63) = \\ &= 4 (1,91 \cdot 11,5^{1,76} + 4,7 \cdot 1^{-0,6} + 13,7 \cdot 67^{-0,5} - 3,63) = 4 \cdot 143 = 572. \end{aligned}$$

Показатель тепловой инерции контактной термопары  $\varepsilon_1$ , определяемый по соотношению (10.10), равен:

- в радиальном направлении

$$\varepsilon_1 = \tau_1 (L_1)^2 / a_1 = 118 \cdot (0,4)^2 \cdot 10^{-6} / 5,3 \cdot 10^{-6} = 3,6 \text{ с};$$

- в осевом направлении

$$\varepsilon_1 = \tau_1 (L_1)^2 / a_1 = 572 \cdot (0,4)^2 \cdot 10^{-6} / 5,3 \cdot 10^{-6} = 17,3 \text{ с}.$$

Динамическая погрешность измерения температур контактной термопарой, обусловленная тепловой инерционностью, определяется по соотношению (10.9) и составляет:

- в радиальном направлении

$$\Delta t_{\text{дин}} = \varepsilon_1 b = 3,6 \cdot 0,025 = 0,09 \text{ К};$$

- в осевом направлении

$$\Delta t_{\text{дин}} = \varepsilon_1 b = 17,3 \cdot 0,025 = 0,43 \text{ К.}$$

При увеличении толщины изоляции в радиальном и осевом направлении до значений  $r_2 = 2,5 \text{ мм}$ ;  $L_2 = 8 \text{ мм}$ ;  $\Delta r = 2,3 \text{ мм}$ ;  $\Delta = 7,6 \text{ мм}$ , симплексы примут следующие значения:

$$K_a = 68; \quad K_{\Delta r} = \Delta r / L_1 = 2,3 / 0,4 = 5,8; \quad K_{\Delta} = \Delta / L_1 = 7,6 / 0,4 = 19.$$

Соответственно  $\tau_1$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\Delta t_{\text{дин}}$ , вычисленные по соотношениям (10.9) – (10.11) примут следующие значения:

- в радиальном направлении

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 10 K_c (F K_{\Delta r}^U + D K_{\lambda}^W + 13,7 K_a^{-0,5} - 3,63) = \\ &= 4 (1,91 \cdot 5,8^{1,76} + 4,42 \cdot 1^{-0,6} + 13,7 \cdot 68^{-0,5} - 3,63) = 4 \cdot 44,6 = 178,4; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = \tau_1 (L_1)^2 / a_1 = 178,4 \cdot (0,4)^2 \cdot 10^{-6} / 5,3 \cdot 10^{-6} = 5,4 \text{ с};$$

$$\Delta t_{\text{дин}} = \varepsilon_1 b = 5,4 \cdot 0,025 = 0,13 \text{ К};$$

- в осевом направлении

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 10 K_c (F K_{\Delta}^U + D K_{\lambda}^W + 13,7 K_a^{-0,5} - 3,63) = \\ &= 4 (1,91 \cdot 19^{1,76} + 4,42 \cdot 1^{-0,6} + 13,7 \cdot 68^{-0,5} - 3,63) = 4 \cdot 342,6 = 1370. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = \tau_1 (L_1)^2 / a_1 = 1370 \cdot (0,4)^2 \cdot 10^{-6} / 5,3 \cdot 10^{-6} = 41,4 \text{ с.}$$

$$\Delta t_{\text{дин}} = \varepsilon_1 b = 41,4 \cdot 0,025 = 1,03 \text{ К.}$$

Учитывая, что погрешность измерительного комплекта с контактными термопарами обычно относят к диапазону (рис. 7.8 и 7.9) контролируемых температур  $\Delta t_k = t_{k, \text{max}} - t_{k, \text{min}} = 60 - 20 = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ , очевидно, что относительная максимальная погрешность динамической составляющей  $\Delta t_{\text{дин}}^*$  определится из соотношения  $\Delta t_{\text{дин}}^* = \Delta t_{\text{дин, max}} / \Delta t_k = 1,03 / 40 = 0,025 = 2,5 \%$ .

Выражения (10.9) – (10.11) дают возможность решить и обратную задачу: на стадии проектирования контактной термопары найти требуемую толщину теплоизолятора. Так, если задана допустимая динамическая погрешность  $\Delta t_{\text{дин, доп}}$  (К) или  $\Delta t_{\text{дин, доп}}^*$  (%), известны условия эксплуатации и выбран материал теплоизолятора, то его минимально возможную толщину определяют по соотношению [59]:

$$\delta_{\text{дин}} = L_1 [(0,1 \tau_{1\text{доп}} K_c^{-1} - D K_{\lambda}^W - 13,7 K_a^{-0,5} + 3,63) F^{-1}]^{1/U}. \quad (10.12)$$

Так, если задать допустимую динамическую погрешность  $\Delta t_{\text{дин, доп}} = 1 \text{ К}$ , то при уже известных условиях эксплуатации, выбранном материале теплоизолятора, скорости изменения температуры в области упорядоченного теплового режима  $b \approx 0,025 \text{ К/с}$  показатель тепловой инерции контактной термопары  $\varepsilon_{1\text{доп}} = \Delta t_{\text{дин, доп}} / b = 1 / 0,025 = 40 \text{ с}$ .

Безразмерный аналог термической инерции контактной термопары

$$\tau_{1\text{доп}} = \varepsilon_{1\text{доп}} a_1 / (L_1)^2 = 40 \cdot 5,3 \cdot 10^{-6} / (0,4)^2 \cdot 10^{-6} = 1325.$$

Минимально возможная толщина теплоизолятора контактной термопары, определяемая по соотношению (10.12), составит

$$\begin{aligned} \delta_{\text{дин}} &= L_1 [(0,1 \tau_{1\text{доп}} K_c^{-1} - D K_\lambda^W - 13,7 K_a^{-0,5} + 3,63) F^{-1}]^{1/U} = \\ &= 0,4 [(0,1 \cdot 1325 \cdot 0,4^{-1} - 4,42 \cdot 1^{-0,215} - 13,7 \cdot 67^{-0,5} + 3,63) \cdot 1,91^{-1}]^{1/1,76} = \\ &= 0,4 [(331 - 4,42 - 1,67 + 3,63) \cdot 0,52]^{0,57} = 0,4 [(328) \cdot 0,52]^{0,57} = \\ &= 0,4 [170,6]^{0,57} = 0,4 \cdot 18,72 = 7,5 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Анализ зависимостей (10.9) – (10.11) позволяет оценить влияние эксплуатационных и конструктивных параметров на  $\Delta t_{\text{дин}}$ . Динамическая погрешность и инерционность контактной термопары в большей степени зависит от толщины тепловой изоляции, чем от ее теплопроводности. Так, пятикратное уменьшение  $K_\lambda$  увеличивает безразмерный аналог термической инерции контактной термопары  $\tau_1$  в три раза, а такое же возрастание  $K_\Delta$  приводит к росту  $\tau_1$  в 10 раз [59]. Влияние на динамические свойства контактной термопары изменения симплекса  $K_a$  ощутимо проявляется только при неэффективной изоляции ТП от внешней среды и наиболее значительно для малых значений  $K_a$ . Так, уменьшение  $K_a$  от 300 до 10 увеличивает безразмерный аналог термической инерции контактной термопары (при  $K_\Delta = 2$ ,  $K_\lambda = 10$ ) на 40 %, а для контактной термопары с изоляцией, которая характеризуется параметрами  $K_\Delta = 10$  и  $K_\lambda = 1$ , такое же изменение  $K_a$  ухудшает динамику только на 1 %.

Приведенные исследования и расчеты статических и динамических погрешностей контактных термопар позволяют также вести проектирование измерительного комплекта (термоприемник и вторичный прибор) с заданными метрологическими характеристиками. Для этого необходимо выбрать материалы элементов теплоизолятора и термопары и определить их размеры, найти допустимые значения давления ТП на материал, подобрать соответствующий вторичный прибор. По быстрдействию вторичные приборы существенно превосходят ТП и динамические свойства всего измерительного комплекта можно характеризовать показателем термической инерции термоприемника.

Предельная погрешность измерения температуры всего измерительного комплекта определяется из соотношения

$$\Delta t_k = [(\Delta t_{\text{дин}}^*)^2 + (\Delta t_{\text{пр}})^2 \pm (\Delta t_{\text{ст}})^2]^{0,5}, \quad (10.13)$$

где  $\Delta t_{\text{пр}}$  – погрешность вторичного прибора, зависящая от класса точности вторичного прибора  $K_{\text{пр}}$ ,

$$\Delta t_{\text{пр}} = 0,01 K_{\text{пр}} = 0,01 \cdot 0,5 = 0,005.$$

В выражении (10.13)  $\Delta t_{\text{ст}}$  берется со знаком "+" при нагревании образца и со знаком "-" при его охлаждении.

*Предельная погрешность* измерения температуры всего измерительного комплекта с контактными термопарами, при максимальных статических и динамических погрешностях определяется из соотношения (10.13):

- при нагревании

$$\begin{aligned} \Delta t_k &= [(\Delta t_{\text{дин}}^*)^2 + (\Delta t_{\text{пр}})^2 + (\Delta t_{\text{ст}})^2]^{0,5} = [(0,025)^2 + (0,005)^2 + (0,014)^2]^{0,5} = \\ &= [(0,000625) + (0,000025) + (0,000196)]^{0,5} = \\ &= [0,000846]^{0,5} = 0,029 = 2,9 \%. \end{aligned}$$

- при охлаждении

$$\Delta t_k = [(\Delta t_{\text{дин}}^*)^2 + (\Delta t_{\text{пр}})^2 - (\Delta t_{\text{ст}})^2]^{0,5} = [(0,025)^2 + (0,005)^2 - (0,014)^2]^{0,5} =$$

$$= [(0,000625) + (0,000025) - (0,000196)]^{0,5} =$$

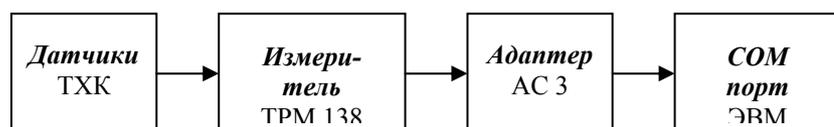
$$= [0,000454]^{0,5} = 0,021 = 2,1 \%$$

Для того, чтобы свести к минимуму влияние погрешности вторичного прибора на результат измерения, достаточно выбрать автоматический прибор определенной градуировки, удовлетворяющей условию  $\Delta t_{\text{пр}} \leq 0,2 \Delta t_{\text{к. доп}}$ .

#### 10.4. МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Для определения и исследования теплофизических свойств (температуροпроводности, теплоемкости, теплопроводности) веществ, материалов и изделий, может быть использован современный измерительный комплекс компании ОВЕН [30]. Обобщенная или функциональная схема ОВЕН включает следующие элементы: измеритель ТРМ 138 с датчиками разного типа; блок обработки данных с логическими и выходными устройствами; интерфейс связи RS-485 с адаптером интерфейса АС 3 [30].

Структурную схему для определения и исследования теплофизических свойств веществ, материалов и изделий можно представить в виде последовательного соединения нескольких элементов – звеньев (рис. 10.3).



**Рис. 10.3. Структурная схема средств ОВЕН для измерения ТФС материалов**

Универсальный восьмиканальный измеритель-регулятор ТРМ 138 предназначен для измерения, регистрации и регулирования температуры, а также регистрации измеренных параметров на ЭВМ [30].

ТРМ 138 имеет восемь входов, к которым могут быть подключены датчики разного типа и любой конфигурации, что позволяет одновременно измерять и контролировать несколько различных величин. Для измерения температуры по входам подключены датчики температур – термопары ТХК или термопреобразователи сопротивления. Универсальный измеритель ТРМ 138 с термопарами ТХК(L) имеет диапазон измерений  $-50 \dots + 750$  °С, разрешающую способность 0,1 °С, предел основной приведенной погрешности 0,25 %.

Блок обработки данных предназначен для обработки входных сигналов, цифровой фильтрации, коррекции, масштабирования, вычисления дополнительных математических величин, индикации измерительных параметров и формирования управляющих сигналов. Вычисленное или измеренное значение температуры подается на входы логических устройств (ЛУ) для дальнейшей обработки и выдачи управляющих сигналов.

ЛУ регистрируют и выдают аналоговый сигнал в диапазоне 4...20 мА, пропорциональный значению измеряемого параметра. Блок обработки данных ТРМ 138

включает в себя восемь ЛУ. К каждому ЛУ может быть подключено одно из восьми выходных устройств, порядковый номер которого задается при программировании.

В приборе TPM 138 могут быть установлены в любой комбинации следующие выходные устройства (ВУ): ЦАП "параметр – ток 4...20 мА"; транзисторные оптопары 200 мА 40 В; семисторные оптопары 50 мА 300 В.

Интерфейс связи с ЭВМ предназначен для передачи данных и информации от прибора TPM 138 на компьютер, а также приема данных от компьютера к другим приборам, оснащенным таким же интерфейсом связи. В нашем случае прибор имеет встроенный двунаправленный интерфейс RS-485. Через этот интерфейс прибор может передавать текущее значение измеренных температур и состояния входных устройств.

Адаптер интерфейса АС 3 предназначен для взаимного преобразования сигналов интерфейса RS-485 и подключения до 32 многоканальных приборов TPM 138, TPM 101, СИ 8, ПКП 1.

Супервизорный контроль и сбор данных для определения теплофизических свойств веществ, материалов и изделий (температуропроводности, теплоемкости, теплопроводности) производится системой SCADA (Supervisory, Control and Data Acquisition). SCADA – система OWEN PROCESS MANAGER (OPM) – программное обеспечение, предназначенное для осуществления связи ПК (ЭВМ) с приборами ОВЕН, подключенными с помощью преобразователя интерфейса RS-485 ОВЕН АС 3 [30].

Система OPM используется для создания схемы технологических процессов на мониторе ПК и сохранения этой схемы на диске для последующего использования. Процесс сбора данных предусматривает опрос всех приборов с периодичностью, отдельно задаваемой для каждого прибора, отображение результатов этого опроса, а также сохранение указанных пользователем значений в файлы протокола.

OPM предоставляет следующие возможности:

- регистрация на ПК через заданные промежутки времени данных с выбранных пользователем каналов приборов;
- отображение текущих показаний приборов в цифровом или графическом виде на экране ПК;
- возможность просмотра архива измерений за любой промежуток времени в табличном и графическом виде с помощью подсистемы OWEN REPORT VIEWER (ORV).

Организация интерфейса связи приборов с ПК проходит в следующей последовательности. При запуске OPM тестирует рабочий компьютер и автоматически определяет свободные COM-порты, к которым через адаптер интерфейса могут быть подключены приборы ОВЕН. Информация о COM-портах выводится на экран ПК в главном окне программы. Выбор адаптера интерфейса зависит от типа интерфейса подключаемых приборов. К одному COM-порту возможно подключить только один адаптер интерфейса. При необходимости увеличить количество отображаемых каналов на ПК следует установить дополнительные COM-порты. Максимальное количество COM-портов определяется характеристиками ПК.

Для подключения приборов с интерфейсом RS-485 используется преобразователь RS-485 АС 3. Без использования средств усиления сигнала преобразователя АС 3 к нему можно подсоединять до 32 приборов, с использованием усилителя – максимальное количество каналов отображения для одного порта составляет 256.

## **Работа с программой SCADA [30]**

*Настройка программы.* При запуске OPM на экране появляется главное окно программы, в котором пользователь создает схему технологического процесса. Окно содержит панель управления и меню. При нажатой правой кнопки мыши всплывает меню настройки, в котором необходимо задать:

- тип подключаемого адаптера интерфейса (добавить интерфейс);
- подключаемые к адаптеру интерфейса приборы ОВЕН;
- параметры опроса приборов компьютера (добавить прибор/параметры опроса/частота опроса).

Для приборов, подключаемых с помощью преобразователя интерфейса АС 3, необходимо указать сетевой адрес подключенного прибора ОВЕН, который предварительно вводится в прибор при его программировании.

При задании параметров опроса возможно либо задать частоту опроса прибора, либо задать постоянный опрос. В случае постоянного опроса прибор опрашивается с максимально возможной для данной системы "компьютер–интерфейс–приборы" частотой. Эта частота опроса зависит от мощности компьютера, количества приборов в сети, наличия помех в линиях и т.п.

После записи конфигурации в файл необходимо запустить процесс, что возможно сделать либо из меню программы, либо кнопкой ► на панели инструментов. На экране главного окна будут отображаться все текущие значения измеряемых величин. Процесс, запущенный на исполнение, может быть в любой момент завершён или временно приостановлен. Изменения в схему процесса можно вносить только после его завершения. Изменённую схему процесса можно сохранить под прежним или новым именем.

*Архивация и регистрация данных.* Система ОРМ позволяет архивировать данные только тех каналов подключённых приборов, которые указаны пользователем. Для этого в пяти дополнительных окнах программы создаются ссылки на выбранные каналы. Выбор одного из пяти окон осуществляется кнопками 1 – 5 на панели инструментов. Значения, регистрируемые по заданным ссылкам, заносятся в файл архив. Частота архивации данных определяется пользователем для каждой ссылки отдельно.

Просмотр файла архива осуществляется с помощью программы OWEN Report Viewer (ORV). Программа ORV позволяет открывать и просматривать файлы архива в табличном или графическом виде, а также конфигурировать отображение архивных данных для данного процесса.

На рис. 10.4 показаны образцы материалов, выполненные в виде призмы квадратного сечения, куба, шара, стержня, а также просмотр файла на ЭВМ при определении температуропроводности красного кирпича в графическом виде.



**Рис. 10.4. Просмотр файла на ЭВМ  
при определении температуропроводности красного кирпича  
в графическом виде**

Пользователь может самостоятельно определять, какие из происшедших событий, зафиксированных в архивном файле, следует включать в отображаемые таблицы и графики. Можно также ограничивать временные рамки отображаемых событий с тем, чтобы более подробно рассматривать отдельные эпизоды технологического процесса. Для последующей работы, вычисления ТФС материалов и обработки данных из архива, желательно их сохранение в форматах Access, FoxPro, Dbase или Excel.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

---

Теоретические основы технической теплофизики позволяют разрабатывать современные абсолютные и относительные методы определения теплофизических свойств материалов. Математические модели тепловых процессов в физических объектах или исследуемых образцах позволяют с помощью несложных математических расчетов и зависимостей адекватно описать физику процесса и решить технические вопросы теплотехники и теплотехнологий.

В настоящее время появляется тенденция проводить измерения таким образом, чтобы результаты этих измерений были двумерными показателями. Двумя компонентами такого двумерного вектора могут быть, например, температура на поверхности и в центре исследуемого тела, либо амплитуда и период температурного сигнала. С другой стороны, сами измерения, например температуры на поверхности образца, содержат данные, которые могут описывать целый ряд других параметров. Предпринималось значительное число попыток для отыскания таких видов преобразований первичных данных, которые обеспечивали бы зависимость каждой составляющей только от одного или двух измеряемых параметров и нечувствительность к измерениям других параметров. Иногда это удается сделать.

Так был получен абсолютный метод определения коэффициента температуропроводности материалов, основанный на измерении температур на поверхности образца в двух точках (на ребре и середине грани призмы квадратного сечения). Причем, постановка опытов не требует измерений таких физических величин, как температура окружающей среды, коэффициент теплообмена, степень черноты, тепловой поток. Нет необходимости в создании чисто конвективной или чисто лучистой окружающей среды, что значительно упрощает экспериментальные установки для исследования и определения температуропроводности материалов.

Предложена методика, позволяющая установить начало наступления упорядоченной части теплового периода в телах различной формы (призма, куб, стержень, шар, пластина), а в призме квадратного сечения – по тепловым изменениям на поверхности. Разработаны научно-методологические основы комплексного определения коэффициентов температуропроводности, теплопроводности и объемной теплоемкости материалов по температурным измерениям на поверхности призмы квадратного сечения.

Простота техники эксперимента позволяет проводить испытания непосредственно в условиях производства и тем самым координировать влияние технологических факторов на свойства готовых изделий, экономичность их производства и тем самым оптимизировать энергосбережение на объектах агро-промышленного комплекса и жилищно-коммунального хозяйства.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

---

1. **Аметистов Е.В., Соколов Г.Я., Платунов Е.С.** Основы теории теплообмена. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 242 с.
2. **Белов Е.А.** Цифровой экспресс-измеритель теплообогревающих конструкций с прямым отсчетом // Промышленная теплотехника. 1986. № 4. С. 756 – 760.
3. **Беляев Н.М., Рядно А.А.** Методы теории теплопроводности: В 2 ч. М.: Высшая школа, 1982. 671 с.
4. **Богословский В.Н.** Тепловой режим здания. М.: Стройиздат, 1979.
5. **Богуславский Л.Д.** Энергосбережение в системах теплоснабжения, вентиляции и кондиционирования воздуха: Справочное пособие. М.: Стройиздат, 1990.
6. **Бойков Г.П., Видин Ю.В., Фокин В.М.** Определение теплофизических свойств строительных материалов. Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1992. 172 с.
7. **Бойков Г.П., Видин Ю.В., Журавлев В.Н.** Основы теплообмена. Красноярск, 2000. 272 с.
8. **Бровкин В.Л.** Частное решение уравнения теплопроводности для определения теплофизических коэффициентов // Изв. вузов. Энергетика. 1980. № 11. С. 120.
9. **Варганов И.С., Геращенко О.А.** Тепловой метод неразрушающего контроля с помощью датчика теплового потока // Промышленная теплотехника. 1987. № 4. С. 77–80.
10. **Волькенштейн В.С.** Скоростной метод определения теплофизических характеристик материалов. Л.: Энергия, 1971. 145 с.
11. **Видин Ю.В.** Инженерные методы расчетов процессов теплопереноса. Красноярск, 1974. 144 с.
12. **Видин Ю.В., Иванов В.В.** Расчет температурных полей в твердых телах, нагреваемых конвекцией и радиацией одновременно Красноярск, 1965. 95 с.
13. **Видин Ю.В., Воронков Г.В., Кондратьев Е.А.** Законы распределения тепла в телах конечных размеров и их приложение к нагреву суммарным тепловым потоком // Теплофизика высоких температур. 1969. № 4. С. 795 – 798.
14. **Вик, Эзикши.** Квазистационарное распределение температуры в периодически контактирующих стержнях конечной длины // Теплопередача: Труды американского общества инженеров-механиков. 1981. № 1. С. 149.
15. **Власов В.В.** Автоматические устройства для определения теплофизических характеристик твердых материалов. М.: Машиностроение, 1977. С. 168.
16. **Гаврилов Р.Н., Никифоров Н.Д.** Метод определения теплофизических свойств горного массива без нарушения естественной структуры // ИФЖ. 1983. № 6. С. 1023 – 1024.
17. **Гордов А.М., Малков Я.В., Эргарт Н.Н.** Точность контактных методов измерения температуры. М.: Изд-во стандартов. 1976. 232 с.
18. **ГОСТ 23789–79.** Метод испытаний. М.: Изд-во стандартов, 1980. 12 с.
19. **Дульнев Г.Н., Сигалов А.В.** Температуропроводность неоднородных систем // ИФЖ. 1980. Т. 39, № 5. С. 859.
20. **Дульнев Г.Н., Лукьянов Г.Н.** Комплекс методик, программ и аппаратуры для автоматизации теплофизических исследований // ИФЖ. 1981. Т. 40, № 4. С. 717.
21. **Елисеев В.Н., Соловов В.А.** Теоретическое и экспериментальное исследование погрешности измерения температур термопарами в теплоизоляционных материалах // ИФЖ. 1983. № 5. С. 737 – 742.
22. **Зайдель А.Н.** Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974. 108 с.
23. **Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.** Теплопередача. М.: Энергия, 1975. 485 с.
24. **Кассандрова О.Н., Лебедев В.В.** Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. 109 с.
25. **Епифанов Г.И.** Физика твердого тела. М.: Высшая школа, 1977. С. 100.
26. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 397 с.
27. **Козлов В.П.** Аналитические основы неразрушающих способов комплексного определения теплофизических характеристик материалов / В.П. Козлов, В.Н. Липовцев, Г.П. Писарик // Промышленная теплотехника. 1987. № 2. С. 96 – 102.
28. **Коздоба Л.А.** Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. 227 с.

29. **Кондратьев Г.М.** Регулярный тепловой режим. М.: Гостехиздат, 1954. 408 с.
30. **Контрольно-измерительные приборы и средства автоматизации.** Каталог продукции компании ОВЕН, 2003 г. 153 с.
31. **Кулаков М.В., Макаров Б.И.** Измерение температуры твердых тел. М.: Энергия, 1969. 142 с.
32. **Курепин В.В., Петров Г.С., Карпов В.Г.** Промышленные теплофизические приборы первого поколения. // Промышленная теплотехника. 1981. Т. 3, № 1. С. 29 – 31.
33. **Курепин В.В., Козин В.М., Левочкин Ю.В.** Приборы для теплофизических измерений с прямым отсчетом // Промышленная теплотехника. 1982. Т. 4, № 3. С. 91.
34. **Курепин В.В., Дикалов А.И.** Определение теплофизических характеристик методом мгновенного теплового импульса при учете влияния контактных термических сопротивлений // ИФЖ. 1981. Т. 40, № 6. С. 1046.
35. **Курепин В.В., Калинин В.А.** Скоростной метод определения коэффициента теплопроводности и температуропроводности твердых тел // Изв. Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1979. № 2. С. 24.
36. **Курепин В.В., Платунов Е.С., Белов Е.А.** Энтальпийный термозонд для неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов // Промышленная теплотехника. 1982. № 4. С. 78.
37. **Крейт О., Блек У.** Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983. 256 с.
38. **Ли, Тейлор.** Температуропроводность материала с диспергированными включениями // Теплопередача: Труды американского общества инженеров-механиков. 1978. № 4. С. 177 – 182.
39. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
40. **Лыков А.В.** Теплообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978. 479 с.
41. **Методы определения теплопроводности и температуропроводности /** Под ред. А.В. Лыкова. М.: Энергия, 1973. 336 с.
42. **Мецик М.С.** Методы обработки экспериментальных данных и планирование эксперимента по физике. Иркутск: Иркут. гос. ун-т. 1981. 111 с.
43. **Михеев М.А., Михеева И.М.** Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1973. 319 с.
44. **Осипова В.А.** Экспериментальное исследование процессов теплообмена. М.: Энергия, 1979. 319 с.
45. **Петров В.Г., Денисов В.Г., Масленников Л.А.** Процессы тепло- и влагообмена в промышленной изоляции. М.: Энергоатомиздат, 1983. 192 с.
46. **Платунов Е.С., Козин В.М., Левочкин Ю.В.** Цифровой экспресс-измеритель теплофизических свойств вещества // Промышленная теплотехника. 1982. Т. 4, № 1. С. 51 – 65.
47. **Платунов Е.С.** Теплофизические измерения в монотонном режиме. Л.: Энергия, 1973. 143 с.
48. **СНиП II-3-9.** Строительная теплофизика. М.: Стройиздат, 1996.
49. **Сапожников С.З., Серых Г.М.** Способ определения теплофизических свойств материалов: А. с. № 458753. /
50. **Сергеев О.А.** Метрологические основы теплофизических измерений. М.: Изд-во стандартов. М.: 1972. 170 с.
51. **Серых Г.М., Колесников Б.П., Сысоев В.Г.** Прибор для комплексного определения теплофизических характеристик материалов // Промышленная теплотехника. 1981. Т. 3, № 1. С. 85 – 91.
52. **Сперроу Э.М., Сесс Р.Д.** Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971. 294 с.
53. **Тайц Н.Ю.** Технология нагрева стали / Н.Ю. Тайц. М.: Металлургиздат, 1962. 442 с.
54. **Теория теплообмена /** Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979. 495 с.
55. **Тепло- и массообмен.** Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред. В.А. Григорьева и В.М. Зорина. М.: Энергоиздат, 1982. 512 с.
56. **Теплотехнический справочник /** Под общ. ред. В.И. Юренева и П.Д. Лебедева. М.: Энергия, 1975. Т. 2. 896 с.
57. **Табунщиков Ю.А., Хромец Д.Ю.** Тепловая защита ограждающих конструкций зданий и сооружений. М.: Стройиздат, 1986.
58. **Теплотехника /** Под общ. ред. В.Н. Луканина. М.: Высшая школа, 2002.
59. **Фандеев Е.И., Ушаков В.Г., Луцаев Г.А.** Непогружаемые термоприемники. М.: Энергия, 1979. 64 с.

60. **Фокин В.М.** Научно-методологические основы определения теплофизических свойств материалов методом неразрушающего контроля. М.: Изд-во Машиностроение-1, 2003. 140 с.
61. **Фокин В.М.** Температуропроводность ионных кристаллов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 1994. № 3–4. С. 41 – 46.
62. **Фокин В.М., Шаронова О.В., Бойков Г.П.** Оценка наступления упорядоченной части теплового периода при нагревании бруса квадратного сечения // Изв. Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Технические науки. 1988. № 2. С. 62 – 65.
63. **Фокин В.М.** Определение температуропроводности строительных материалов: Монография. Волгоград: ВолгГАСА. 2002. 127 с.
64. **Франчук А.У.** Таблицы теплотехнических показателей строительных материалов. М.: НИИСФ, 1969.
65. **Филиппов Л.П.** Измерения теплофизических свойств веществ методом периодического нагрева. М.: Энергоатомиздат, 1984.
66. **Филиппов Л.П.** Направления развития методов измерений теплофизических свойств веществ и материалов. // Энергетика. 1980. № 3. С. 125.
67. **Цирельман Н.М.** Способ определения коэффициента температуропроводности: А. с. СССР № 539264.
68. **Чернышова Т.И., Чернышов В.Н.** Методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов М.: Машиностроение, 2001, 240 с.
69. **Черпаков В.П.** Теория регулярного теплообмена. М.: Энергия, 1975. 225 с.
70. **Чеховский В.Я., Беляев Р.А., Вавилов Ю.В.** Установка для измерения тепло- и температуропроводности твердых материалов // ИФЖ. 1972. Т. 22, № 6. С. 1049.
71. **Чистяков С.Ф.** Теплотехнические измерения и приборы / С.Ф. Чистяков, Д.Б. Радун. М.: Высшая школа, 1972. 392 с.
72. **Чуриков А.А.** Разработка и исследование методов и устройств для автоматического неразрушающего контроля температурозависимых теплофизических свойств твердых теплозащитных материалов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1980. 16 с.
73. **Шашков А.Г., Волохов Г.М., Абраменко Т.М.** Методы определения теплопроводности и температуропроводности М.: Энергия, 1973. С. 165 – 178.
74. **Шенк Х.** Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. М.: Мир, 1972. 381 с.
75. **Шейнери, Мартин.** Температуропроводность высоконаполненного каучука // Теплопередача: Труды американского общества инженеров-механиков. 1974. № 2. С. 129–130.
76. **Шлыков Ю.П., Ганин Е.А.** Контактный теплообмен. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1963.
77. **Юрчак Р.П., Ткач Г.Ф., Петрунин Г.И.** Исследование теплофизических свойств диэлектриков при высоких температурах // Теплофизические свойства твердых веществ. Киев: Наукова думка. 1973. С. 83 – 87.
78. **Ярышев Н.А.** Теоретические основы измерения нестационарной температуры. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 256 с.
79. **Яскин А.С.** Комплексный метод определения теплопроводности, теплоемкости и температуропроводности керамических материалов при температурах до 2000 °С: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1989. 18 с.
80. **Champoussin I.C.** Sur la pertinence des modeles thermocinetiques et leestimation de levrs caracteristiques // Heat and Mass Trasfer. 1983. № 8. P. 1229 – 1239.
81. **Davis L.I.E.** Determination of Physical properties of heat transfer sensors from vacuum soat loss obser- vation // Trans of the Heat Transfer. 1982. № 1. P. 219 – 221.
82. **Tarzia D.A.** Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through of inverse one- phase Lame-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition of the fixed face // Heat and mass transfer. 1983. № 8. P. 1151 – 1157.

