Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской,
А.В. Лагутин, О.Г. Иванова,
В.М. Тютюнник

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

• *ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ* •

Министерство образования Российской Федерации

ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин,
О.Г. Иванова, В.М. Тютюнник**

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Рекомендовано УМО вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 071900 – «Информационные системы и технологии»

Тамбов
• Издательство ТГТУ •
2004

УДК 004(075)
ББК 🡐96я73
С71

Рецензенты:
Доктор технических наук, профессор
Ю.Л. Муромцев,
Доктор физико-математических наук, профессор
А.И. Булгаков

**Громов Ю.Ю., Земской Н.А., Лагутин А.В.,
Иванова О.Г., Тютюнник В.М.**
С71 Специальные разделы теории управления. Оптимальное управление динамическими системами: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 108 с.
ISBN 5-8265-0264-9

В учебном пособии рассмотрены основные понятия и определения математической теории оптимальных процессов управления. Проанализированы основные методы теории оптимальных процессов, дана постановка основных задач оптимального управления, необходимые условия оптимальности управления и математический аппарат, позволяющий получить решения для различных классов задач.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 071900 – «Информационные системы и технологии».

УДК 004(075)
ББК ←96я73

ISBN 5-8265-0264-9

Учебное издание

ГРОМОВ Юрий Юрьевич,
ЗЕМСКОЙ Николай Александрович,
ЛАГУТИН Андрей Владимирович,
ИВАНОВА Ольга Геннадьевна,
ТЮТЮННИК Вячеслав Михайлович

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ.
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынкова

Подписано к печати 25.02.2004.
Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объем: 6,28 усл. печ. л.; 6,00 уч.-изд. л.
Тираж 150 экз. С. 161^{М}

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, ул. Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Переход к рыночной экономике неотъемлем от процессов планирования, регулирования, управления и прогнозирования производственных и технологических процессов. В этой связи актуальны разработка и применение экономико-математических методов и моделей для решения возникающих производственно-хозяйственных задач, определения и выбора вариантов экономического развития на перспективу, обеспечения оптимального распределения ресурсов для выполнения отдельных комплексов работ и т.п. Насущные производственно-хозяйственные задачи не могут быть поставлены и решены без использования методов экономической кибернетики, включающей следующие разделы: системный анализ экономики, теорию экономической информации, теорию управляющих систем. Определение оптимального варианта текущего и перспективного развития, как правило, связано с решением динамических задач оптимизации (оптимального управления), имеющих большую размерность и множество разнообразных условий и ограничений, что обуславливает сложность решения из-за существенно многоэкстремального характера.

Развитие теории оптимального управления связано с ростом требований как к быстродействию и точности систем регулирования, так и переходом к рыночной экономике. Увеличение быстродействия возможно лишь при правильном распределении ограниченных ресурсов управления, и поэтому учет ограничений на управление стал одним из центральных в теории оптимального управления. С другой стороны, построение систем регулирования высокой точности привело к необходимости учета при синтезе регуляторов взаимовлияния отдельных частей (каналов) системы. Синтез таких сложных многомерных (многосвязных) систем также составляет предмет теории оптимального управления.

К настоящему времени построена математическая теория оптимального управления. На ее основе разработаны способы построения оптимальных по быстродействию систем и процедуры аналитического конструирования оптимальных регуляторов. Аналитическое конструирование регуляторов вместе с теорией оптимальных наблюдателей (оптимальных фильтров) образуют совокупность методов, которые широко используются при проектировании современных сложных систем регулирования.

Сложность задач теории оптимального управления потребовала более широкой математической базы для ее построения. В названной теории используются вариационное исчисление, теория дифференциальных уравнений, теории матриц. Развитие оптимального управления на этой базе привело к пересмотру многих разделов теории автоматического управления, и поэтому теорию оптимального управления иногда называют современной теорией управления. Хотя это и преувеличение роли лишь одного из разделов, однако развитие теории автоматического управления определяется последние десятилетия во многом развитием этого раздела.

В построение теории оптимального управления внесли большой вклад российские ученые Л.С. Понтрягин, Н.Н. Красовский, А.А. Красовский, А.М. Летов, В.Г. Болтянский, В.Ф. Кротов, В.И. Гурман, Н.Н. Моисеев, А.А. Фельдбаум, В.И. Зубов, А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин, А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров, Ю.Г. Евтушенко и зарубежные – Р.Е. Калман, М. Атанс, П.Л. Фолб, Э.Б. Ли, Л.М. Маркус и Р. Беллман.

В широком значении слово «оптимальный» означает наилучший в смысле некоторого критерия эффективности. При таком толковании любая научно обоснованная технико-экономическая система является оптимальной, так как при выборе какой-либо системы подразумевается, что она в каком-либо отношении лучше других. Критерии, с помощью которых осуществляется выбор (критерии оптимальности), могут быть различными. Этими критериями могут являться качество динамики процессов управления, надежность системы, энергопотребление, ее вес и габариты, стоимость и т.п., либо совокупность этих критериев с некоторыми весовыми коэффициентами.

Ниже термин «оптимальный» используется в узком смысле, когда система автоматического управления оценивается лишь качеством динамических процессов и при этом критерием (мерой) этого качества выступает интегральный показатель качества. Такое описание критериев качества позволяет использовать для нахождения оптимального управления хорошо разработанный в математике аппарат вариационного исчисления.

Далее рассматриваются два класса систем: системы программного управления, управляющее воздействие в которых не использует информацию о текущем состоянии объекта, и системы автоматического регулирования (системы стабилизации программного движения), действующие по принципу обратной связи.

Изложение начинается с рассмотрения вариационных задач, возникающих при построении оптимальных систем программного и стабилизирующего управления. Далее излагается математическая теория оптимального управления (принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана). Эта теория является фундаментом для построения оптимальных систем. Она доставляет большой объем информации о структуре оптимального управления. Вместе с тем практическое применение теории сталкивается с трудностями вычислительного характера. Дело в том, что математическая теория оптимального управления позволяет свести процесс построения оптимального управления к решению краевой задачи для дифференциальных уравнений (обыкновенных либо в частных производных). Трудности численного решения краевых задач приводят к тому, что построение оптимальных управлений для каждого класса объектов управления является самостоятельной творческой задачей, решение которой требует учета специфических особенностей объекта, опыта и интуиции разработчика.

Огромный вклад в развитие численных методов решения задач математической теории оптимального управления внесли российские ученые Р.П. Федоренко, Б.Т. Поляк [20 – 22], а также зарубежные Э. Полак [23] и др.

Эти обстоятельства побудили к отысканию классов объектов, для которых при построении оптимального управления краевая задача легко решается численно. Такими объектами управления оказались объекты, описываемые линейными дифференциальными уравнениями. Эти результаты, полученные А.М. Летовым [6] и Р. Калманом [16], явились основой нового направления синтеза систем оптимальной стабилизации, называемого аналитическим конструированием регуляторов.

ГЛАВА 1

РОЛЬ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

В общем процессе проектирования технических систем можно видеть проблемы двух типов.

1 Проектирование системы управления, направленной на достижение поставленной задачи (формирование траекторий, режимов, выбор методов управления, реализующих траектории и т.д.). Этот круг задач можно назвать проектированием движений.

2 Проектирование конструктивных и прочностных схем (выбор геометрических, аэродинамических, конструктивных и других параметров), обеспечивающих выполнение общих характеристик и конкретных режимов работы. Этот круг задач проектирования связан с выбором ресурсов, необходимых для реализации поставленных задач.

Проектирование движений (изменение технологических параметров) тесно связано с группой проблем второго типа, так как получаемая при проектировании движений информация является исходной (во многом определяющей) для решения этих проблем. Но и в тех случаях, когда имеется уже готовая техническая система (т.е. располагаемые ресурсы определены), в процессе его модификации могут быть осуществлены оптимизирующие приемы.

Проблемы первого типа решаются в настоящий момент наиболее эффективно и строго на основе общих методов математической теории оптимальных процессов управления.

Значение математической теории оптимальных процессов управления заключается в том, что она дает единую методологию решения весьма широкого круга задач оптимального проектирования и управления, устраняет инерции и недостаточную общность прежних частных методов и способствует ценными результатами и методами, полученными в смежных областях.

Теория оптимальных процессов позволяет решать широкий круг практических задач в достаточно общей постановке с учетом большинства ограничений технического характера, накладываемых на осуществимость технологических процессов. Роль методов теории оптимальных процессов особенно возросла в последние годы в связи с широким внедрением в процесс проектирования ЭВМ.

1.1 Общая задача оптимального управления и ее математическая модель

Исходная информация для решения задач оптимального управления содержится в постановке задачи. Задача управления может формулироваться в содержательных (неформальных) терминах, которые часто носят несколько расплывчатый характер. Для применения математических методов необходима четкая и строгая формулировка задач, которая бы устраняла возможные неопределенности и двусмысленности и одновременно делала бы задачу математически корректной. С этой целью для общей задачи необходима адекватная ей математическая формулировка, называемая математической моделью задачи оптимизации.

Математическая модель – достаточно полное математическое описание динамической системы и процесса управления в рамках выбранной степени приближения и детализации (ММ).

ММ отображает исходную задачу в некоторую математическую схему, в конечном итоге – в некоторую систему чисел. В ней, с одной стороны, явно указываются (перечисляется) все сведения, без которых невозможно приступить к аналитическому или численному исследованию задачи, а с другой, – те дополнительные сведения, которые вытекают из сущности задачи и которые отражают определенное требование к ее характеристикам.

Полная ММ общей задачи оптимизации управления состоит из ряда частных ММ:

- процесса управляемого движения;
- располагаемых ресурсов и технических ограничений;
- показателя качества процесса управления;
- управляющих воздействий.

Таким образом, математическая модель общей задачи управления характеризуется совокупностью определенных математических соотношений между ее элементами (дифференциальных уравнений, ограничений типа равенств и неравенств, функций качества, начальных и граничных условий и т.д.). В теории ОП устанавливаются общие условия, которым должны удовлетворять элементы ММ для того, чтобы соответствующая математическая задача оптимизации была бы:

- четко определена,
- имела бы смысл, т.е. не содержала условий, приводящих к отсутствию решения.

Отметим, что формулировка задач и ее ММ в процессе исследования не остаются неизменными, а находятся во взаимодействии друг с другом (рис. 1).

Обычно первоначальная формулировка и ее ММ претерпевают значительные изменения в конце исследования. Таким образом, построение адекватной ММ напоминает итерационный процесс, в ходе которого уточняется как постановка самой общей задачи, так и формулировка ММ. Важно подчеркнуть, что для одной и той же задачи ММ может быть неединственной (разные системы координат и т.д.). Поэтому необходим поиск такого варианта ММ, для которой решение и анализ задачи были бы наиболее просты.

Важным шагом в постановке и решении общей задачи управления является выбор критерия оптимальности. Этот выбор является неформальным актом, он не может быть предписан какой-либо теорией, а целиком определяется содержанием задачи. В некоторых случаях формальное выражение понимания оптимальности системы допускает несколько эквивалентных (или почти эквивалентных) формулировок.

В таких случаях успех и простота получаемого решения во многом определяется выбранной формой критерия оптимальности (при условии, что во всех случаях он достаточно полно определяет требования задачи к системе). После построения ММ процесса управления дальнейшее ее исследование и оптимизация проводится математическими методами.

1.2 Классификация методов теории оптимальных процессов

Методы теории оптимальных процессов (ТОП) можно условно разделить на прямые и непрямые (косвенные).

Непрямые методы сводят задачу оптимизации динамических характеристик системы, которые являются *функционалами*, к решению известных математических проблем.

К непрямым методам относятся:

1 Принцип максимума Л.С. Понтрягина [1, 2] и метод множителей Лагранжа классического вариационного исчисления [24 – 27]. Принцип максимума сводит решение задачи оптимизации функционалов к решению известных задач – максимизации или минимизации некоторой специальной функции конечного числа переменных в сочетании с решением краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. В классическом вариационном исчислении (ВИ) задача оптимизации функционала сводится к решению краевой задачи для системы ОДУ. Принцип максимума особенно удобен для решения оптимизационных задач, так как позволяет наиболее простым образом учесть различного рода ограничения на величины управляющих и фазовых переменных (переменных состояния). Классическое вариационное исчисление более удобно в задачах, описываемых ОДУ более общего вида (в частности, не разрешенных относительно производных) и не содержащих ограничений в виде неравенств на управляющие и фазовые переменные.

2 Принцип оптимальности, положенный в основу динамического программирования Р. Беллмана [19] и метод Гамильтона-Якоби классического вариационного исчисления [25 – 27]. В этих методах задача оптимизации функционала сводится к решению системы нелинейных ДУ в частных производных первого порядка с соответствующими граничными условием.

3 Некоторые методы, основание на использование результатов функционального анализа (метод моментов и т.д.).

Прямые методы ТОП сводят задачу оптимизации функционала к построению *минимизирующей* (или максимизирующей) последовательности, на основании которой с помощью предельного перехода может быть получено точное решение задачи (В.Ф. Кротов, В.И. Гурман [7, 8]). К прямым методам относятся методы, основанные на сведении задач оптимизации функционалов к задачам на условный экстремум функций конечного числа переменных, различные варианты градиентных методов (Э. Полак, Б.Т. Поляк [21 – 23]), методы типа Ритца-Галеркина и др.

Как в случае применения непрямых методов, так и в случаях использования прямых методов окончательное решение задачи оптимизации может отыскиваться либо в аналитической (замкнутой) форме, либо в числовой форме.

Решения в квадратурах (за исключением редких случаев, таких как линейные системы с квадратным критерием качества) могут быть найдены лишь для задач в упрощенной постановке.

С их помощью можно исследовать качественные особенности оптимального управления. Если аналитическое решение не слишком громоздко, из него можно получить необходимые технико-экономические выводы. Поскольку решение такого рода не зависит от конкретных числовых значений параметров системы и граничных условий, они обладают высокой степенью универсальности. Однако в задачах, постановка которых приближается к реальным технико-экономическим ситуациям, получение решений в замкнутой форме, как правило, либо невозможно, либо приводит к весьма сложным выражениям. В этом случае следует обратиться к численным методам решения.

Численные методы на современном этапе развития вычислительной математики обладают общностью, сравнимой с общностью аналитических методов. Хотя при их использовании возникают определенные проблемы, связанные с оценками скорости сходимости, устойчивости, ошибками округлений, ограниченной разрядностью и т.д.

1.3 Необходимые условия оптимальности управления, достаточные условия оптимальности и проблема

существования оптимального управления

Рассмотренные в данном пособии необходимые условия оптимальности управления для различного типа задач оптимизации получены на основе использования аналитических непрямых методов оптимизации и образуют совокупность функциональных соотношений, которым обязательно должно удовлетворять экстремальное решение.

При выводе их сделано существенное для последующего применения предположение *о существовании оптимального управления* (оптимального решения). Другими словами, если оптимальное решение существует, то оно обязательно удовлетворяет приведенным (необходимым) условиям. Однако этим же необходимым условиям могут удовлетворять и другие решения, не являющиеся оптимальными (подобно тому, как необходимому условию $\frac{df}{dx}=0$ для минимума функции одной переменной удовлетворяют, например, точки максимума и точки перегиба функции $f(x)$). Поэтому, если найденное решение удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, то это еще не означает, что оно является оптимальным.

Использование одних только необходимых условий дает возможность в принципе найти все решения, им удовлетворяющие, и отобрать затем среди них те, которые действительно являются оптимальными. Однако практически найти все решения, удовлетворяющие необходимым условиям, чаще всего не представляется возможным в силу большой трудоемкости такого процесса. Поэтому после того как найдено какое-либо решение, удовлетворяющее необходимым условиям, целесообразно проверить, является ли оно действительно оптимальным в смысле исходной постановки задачи.

Аналитические условия, выполнимость которых на полученном решении гарантирует его оптимальность, называются *достаточными условиями*. Формулировка этих условий и особенно их практическая (например, вычислительная) проверка часто оказывается весьма трудоемкой задачей.

В общем случае применение необходимых условий оптимальности было бы более обоснованным, если бы для рассматриваемой задачи можно было установить факт существования или существования и единственности оптимального управления. Этот вопрос является математически весьма сложным.

Проблема существования, единственность оптимального управления состоит из двух вопросов.

1 Существование допустимого управления (т.е. управления, принадлежащего заданному классу функций), удовлетворяющего заданным ограничениям и переводящего систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Иногда *граничные* условия задачи выбраны так, что система – в силу ограниченности ее энергетических (финансовых, информационных) ресурсов – не в состоянии их удовлетворить. В этом случае *не существует решения задачи оптимизации*.

2 Существование в классе допустимых управлений оптимального управления и его единственность.

Эти вопросы в случае нелинейных систем общего вида не решены еще с достаточной для приложений полнотой. Проблема осложняется также тем обстоятельством, что из единственности оптимального управления не следует единственность управления, удовлетворяющего необходимым условиям. К тому же, обычно удовлетворяется какое-либо одно, наиболее важное необходимое условие (чаще всего – принцип максимума).

Проверка дальнейших необходимых условий бывает достаточно громоздкой. Это показывает важность любой информации о единственности управлений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, а также о конкретных свойствах таких управлений.

Необходимо предостеречь от заключений о существовании оптимального управления на основании того факта, что решается «физичная» задача. На самом деле, при применении методов теории ОП приходится иметь дело с математической моделью. Необходимым условием адекватности описания физического процесса ММ как раз и является существование решения для математической модели. Поскольку при формировании математической модели вводятся различного рода упрощения, влияние которых на существование решений трудно предсказать, доказательство существования является отдельной математической проблемой.

Таким образом:

- из существования ОУ вытекает существование, по крайней мере, одного управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности; из существования управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности, не вытекает существование оптимального управления;
- из существования ОУ и единственности управления, удовлетворяющего необходимым условиям, вытекает единственность оптимального управления; из существования и единственности ОУ не следует единственность управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности.

1.4 Общая характеристика результатов, которые могут быть получены методами теории оптимального управления

ТОП является основой единой методологии проектирования оптимальных движений, технических, экономических и информационных систем. В результате применения методов ТОП к задачам конструирования различных систем могут быть получены:

1) оптимальные по тому или иному критерию временные программы изменения управляющих воздействий и оптимальные значения постоянных управляющих (проектных, настроечных) параметров с учетом различного рода ограничений на их значения;
2) оптимальные траектории, режимы с учетом ограничений на область их расположения;
3) оптимальные законы управления в форме обратной связи, определяющие структуру контура системы управления (решение задачи синтеза управления);
4) предельные значения ряда характеристик или иных критериев качества, которые затем можно использовать как эталон для сравнения с другими системами;
5) решение краевых задач попадания из одной точки фазового пространства в другую, в частности, задача попадания в заданную область;
6) оптимальные стратегии попадания в некоторую движущуюся область.

1.5 Условие рационального применения методов оптимизации

Методы оптимизации управления рационально применить:

1) в сложных технико-экономических системах, где отыскание приемлемых решений на основе опыта затруднительно. Опыт показывает, что оптимизация малых подсистем может приводить к большим потерям в критерии качества объединенной системы. Лучше приближенно решить задачу оптимизации системы в целом (пусть в упрощенной постановке), чем точно для отдельной подсистемы;
2) в новых задачах, в которых отсутствует опыт формирования удовлетворительных характеристик процесса управления. В таких случаях формулировка оптимальной задачи часто позволяет установить *качественный характер управления*;
3) на возможно ранней стадии проектирования, когда имеется большая свобода выбора. После определения большого количества проектных решений системы становится недостаточно гибкой и последующая оптимизация может не дать существенного выигрыша.

При необходимости определить направление изменения управления и параметров, дающих наибольшее изменение критерия качества (определение градиента качества).

Следует отметить, что для хорошо изученных и долго эксплуатируемых систем методы оптимизации могут давать небольшой выигрыш, так как найденные из опыта практические решения обычно приближаются к оптимальным.

В некоторых практических задачах наблюдается определенная «грубость» оптимальных управлений и параметров, т.е. большим локальным изменением управлений и параметров отвечают малые изменения критерия качества. Это дает иногда повод к утверждению, что на практике всегда пологие и строгие методы оптимизации не нужны.

На самом деле «грубость» управления наблюдается лишь в случаях, когда оптимальное управление соответствует стационарной точке критерия качества. В этом случае изменение управления на величину ε приводит к отклонению критерия качества на величину ε^2.

В случае управлений, лежащих по границе допустимой области, указанная грубость может и не иметь место. Это свойство должно исследоваться для каждой задачи специально. Кроме того, в некоторых задачах даже небольшие улучшения критерия качества, достигаемые за счет оптимизации, могут иметь существенное значение.

Сложные задачи оптимизации управления часто предъявляют чрезмерные требования к характеристикам ЭВМ, используемых при решении.

Контрольные вопросы

1 Расскажите о роли теории оптимальных процессов при решении технических задач.
2 Дайте характеристику общей задачи управления. Какие математические модели и почему она должна включать?
3 Дайте характеристику прямым и косвенным методам теории оптимальных процессов.
4 Перечислите условия рациональности применения методов оптимизации.
5 Дайте общую характеристику результатам, которые могут быть получены вследствие применения методов теории оптимальных процессов.
6 Расскажите о необходимых и достаточных условиях в теории оптимальных процессов.
7 Расскажите о проблеме существования оптимальных управлений.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

2.1 Математические модели. Переменные состояния (фазовые координаты) управляемого процесса

ТОП управления имеет дело с ММ технических или экономических (ТЭ) задач оптимизации процесса управления физическими системами. ММ есть достаточно полная сводка функциональных соотношений, описывающих основные свойства физических объектов, процессы их функционирования и управления в рамках выбранной степени приближения и детализации и отражающая все существенные требования к конкретным техническим характеристикам системы.

Математическая модель ТЭ задачи оптимизации процесса управления состоит из ряда частных математических моделей, включая ММ управляемого процесса, математическая модель ТЭ ограничений на величины управляющих воздействий и на возможное расположение на траектории, математическое описание показателя эффективности (критерия качества) процесса управления и т.д.

Основные элементы общей ММ ТЭ задачи оптимизации процесса управления приведены в табл. 1.

Математическая задача оптимизации процесса управления считается полностью определенной (корректно поставленной), если точно описаны все элементы ММ, представленные в табл. 1.

В основе ММ ТЭ задачи ОПУ лежит ММ управляемого процесса. Эта модель основывается на понятии переменных состояния (фазовых координат), которые вводятся в задачу следующим образом.

Пусть управляемая система S может быть *идеализирована*
настолько, что в каждый фиксированный момент времени, наблюдения $t = t'$ на интервале
$T = \{t,\ t_0 \le t \le t_1\},\ t' \in T$ ее свойства могут быть
описаны конечным множеством действительных чисел $x_1(t'),\ x_2(t'),\ ...,\ x_n(t')$, которые рассматриваются как компоненты некоторого вектора $\mathbf{x}(t') = (x_1(t'),\ x_2(t'),\ ...,\ x_n(t'))^T$.

При изменении момента времени наблюдения, вообще говоря, изменяется и вектор **x**. Это изменение может быть вызвано приложенными к объекту воздействиями. Если и при $t > t'$ свойства системы по-прежнему полностью описываются вектором

$$\mathbf{x} = (x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t))^T$$

и если n – наименьшее количество величин $x_i(t')$, с помощью которых оказывается возможным предсказать значение $\mathbf{x}(t)$ при всех $t > t'$ по известным значениям $x(t')$ и известным на T значениям приложенных воздействий, то вектор $\mathbf{x}(t)$ называется *вектором состояния* (детерминированной) системы S в момент t (или векторам фазовых координат).

Величины x_i называются *компонентами вектора состояния*, или фазовыми координатами.

Множество всех возможных состояний $\mathbf{x} = (x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t))^T$ в различные моменты времени $t \in T$ образуют n – мерное пространство состояний $X^n \subset R^n$ (n – мерное фазовое пространство), точка $\mathbf{x} \in X^n$ является *изображающей точкой* этого пространства.

Вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\ t)^T$, т.е. состояние в момент *t*, называется событием (фазой). Множество всех возможных событий $\mathbf{z}$ образует пространство $Z^{n+1} \subset R^{n+1}$ событий. Точка $\mathbf{z} \in Z^{n+1}$ является изображающей точкой пространства событий.

2.2 Управление

Система *S* называется *управляемой на отрезке* (одно из определений управляемости) $[t_0,\ t_1]$, если ее поведение при $t > t_0$ зависит только от начального состояния $(t = t_0,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0))$, будущего поведения некоторого переменного вектора $\mathbf{u}$ (входа системы)

$$\mathbf{u} = (u_1,\ \ldots,\ u_m)^T,\ m \ge 1,$$

называемого *управляющим вектором* (или просто управлением) **u**, и постоянного вектора $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = (a_1,\ \ldots,\ a_r)^T,\ \ r \ge 0,$$

называемого *вектором управляющих* (проектных) *параметров*.

Вектор **u** принимает значение из некоторого множества U^m
m-мерного пространства R^m с координатами $u_1,\ u_2,\ ...,\ u_m$. Это множество может быть всем пространством R^m или его частью $U^m \subset R^m$. U^m – чаще всего компактное множество пространства R^m.

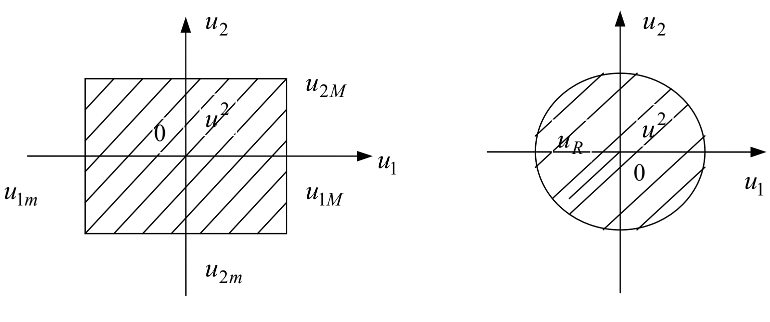
Множество U^m называется *множеством допустимых значений управления*. Некоторые виды множества U^m приведены на рис. 2.
Постоянный вектор **a** обычно принадлежит некоторому замкнутому множеству $A^r \subset R^r$.

2.3 Эволюция состояния системы. Дифференциальные уравнения движения

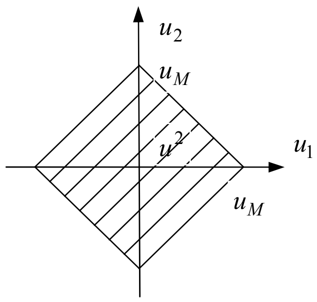
Изменение состояния (эволюция) системы *S* на временном интервале $T = \{t,\ t_0 \le t \le t_1\}$ часто с хорошей степенью приближения описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

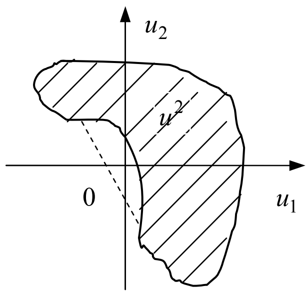
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор состояния; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$ – управляющий вектор; $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_r)^T$ – вектор проектных параметров.

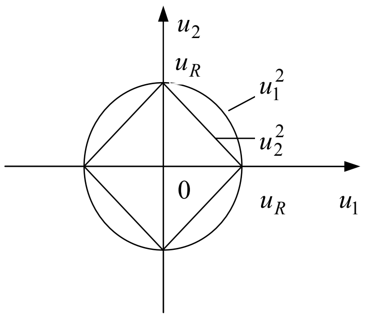


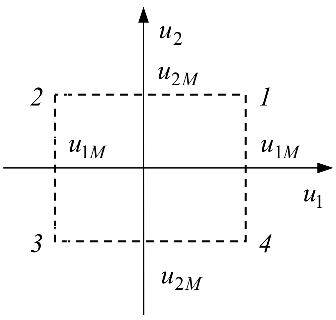
а) $U^2 : \begin{Bmatrix} u_{1m} \le u_1 \le u_{1M}\,; \\ u_{2m} \le u_2 \le u_{2M} \end{Bmatrix}$ *б*) $U^2 : \{u_1^2 + u_2^2 \le u_R^2\}$





в) $U^2 : \{|u_1| + |u_2| \le u_M\}$ *г*) $U^2 : \{f(u_1, u_2) \le 0\}$





д) $U^2 : \begin{Bmatrix} u_1^2 + u_2^2 = u_R^2; \\ |u_1| + |u_2| = u_R \end{Bmatrix}$ *е*) $U^2 : \begin{Bmatrix} (u_{1M}, u_{2M}), (u_{1m}, u_{2M}); \\ (u_{1M}, u_{2m}), (u_{1M}, u_{2m}) \end{Bmatrix}$

Рис. 2 Виды множества U^2 допустимых управлений:

а – *в* – замкнутые ограничения выпуклые области, содержащие начало координат; *г* – невыпуклая область, не содержащая начало координат; *д* – невыпуклые одномерные области U_1^2, U_2^2; *е* – дискретное множество допустимых значений (*1* – *4* изолированные точки)

Система (1) образует существенную часть математической модели динамической системы S. В ММ, описываемой системой ДУ, формальным признаком переменной состояния **x** является наличие ее производной $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ в левой части системы (1). Управляющая переменная **u** входит только в правую часть системы (1) и не встречается под знаком производной (это формальный признак управляющей переменной).

Предполагается, что вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})$ определена для любых значений $\mathbf{x} \in X^n$, $\mathbf{u} \in U^m$, $\mathbf{a} \in A^r$, $t \in T$, непрерывна по совокупности переменных t, **x**, **u**, **a** и непрерывно дифференцируема по **x**, **a**. Хотя гладкость является достаточно жестким требованием и может быть заменена требованием измеримости и ограниченности. Так как поведение вектора **u** может быть произвольным (за исключением условия $\mathbf{u} \in U^m$) и, кроме того, можно произвольно выбрать постоянный вектор $\mathbf{a} \in A^r$, то система уравнений (1) определяет управляемый процесс. Ход управляемого процесса будет определен на некотором интервале $t_0 \le t \le t_1$, если на этом интервале вектор **u** задан в одной из двух форм:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))^T; \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (\mathrm{v}_1(\mathbf{x}, t), \mathrm{v}_2(\mathbf{x}, t), ..., \mathrm{v}_m(\mathbf{x}, t))^T. \tag{3}$$

Вектор-функцию $\mathbf{u}(t)$ называют *программным* (*временным*) *управлением*, а вектор-функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – *координатным управлением* или *законом управления*. Закон управления (3) физически выражает известный принцип обратной связи, согласно которому величина управляющего воздействия определяется на основании измерения текущего состояния системы **x** и, быть может, момента времени t.

Каждому выбору векторов управляющих параметров **a** и управления **u** (вида (2), (3)) и каждому начальному состоянию (t_0, x_0) соответствует по (1) временная последовательность состояний $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, которая называется *фазовой траекторией* (поведением, эволюцией, движением) системы S. Пара вектор-функций $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)\}$ или $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(t)\}$ называется *процессом управления* или *режимом*.

2.4 Функционал. Критерий качества управления

Величина $J[u(t)]$ называется *функционалом* функции $u(t)$ на отрезке $t_0 \le t \le t_1$, если каждой функции $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, принадлежащей некоторому классу функций, поставлено в соответствие определенное число ($f(a)$, $f'(x)$, $\int\limits_0^t f(t)dt$, $\max\limits_{t_0 \le t \le t} f(t)$ и т.д.) из R.

Таким образом, функционал $J[u(t)]$ – это отображение, в котором роль независимого переменного (функционального аргумента) играет функция $u(t)$. При этом $J[u(t)]$ зависит от совокупности всех значений, принимаемых функцией $u(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, и может рассматриваться как функция бесконечного числа независимых переменных.

Для каждого фиксированного конечного момента времени $t_1 = t_1'$ состояние $\mathbf{x}(t_1')$ системы S, движущейся из начального состояния $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в соответствии с уравнением (1), является одновременно векторным функционалом (т.е. вектором, компонентами которого являются функционалы) от управления $\mathbf{u}(t)$ и вектор-функцией от вектора **a** и вектора начальных условий $\mathbf{x}_0(t_0)$. Критерии качества процессов управления являются функционалами.

Достаточно общая форма критерия качества в ТОП имеет вид

$$J[\mathbf{u}(t),\mathbf{a}] = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{a})dt\ , \qquad (4)$$

где $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет системе (1); $\mathbf{u}(t)$ – некоторое выбранное управление; $\mathbf{a}$ – управляющий параметр.

В частности, каждую из координат $x_i(t)$ системы (1) можно записать в форме

$$x_i(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x_i(t), u(t), a) + x_i(t_0), \quad i = \overline{1, n}\ .$$

2.5 Автономные системы

Если правые части (1) и функции Φ и f_0 в (4) от времени явно не зависят, то соответствующая задача называется *автономной*:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})\ ;$$

$$J[\mathbf{u}(t),\mathbf{a}] = \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})dt\ .$$

Автономные системы инвариантны относительно сдвига вдоль оси *t*, поэтому для автономных систем важна только длительность процесса $t_1 - t_0$ и можно положить $t_0 = 0$.

2.6 Допустимое программное управление

Вектор-функция $\mathbf{u}(t)$ называется допустимым программным управлением в задаче, если:

а) $\mathbf{u}(t)$ принадлежит к выбранному классу в большинстве практических приложений кусочно-непрерывных по *t* на интервале $[t_0,\ t_1]$ функций, т.е. может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода;

б) значения $\mathbf{u}(t)$ принадлежат заданному множеству U^m для всех $t \in [t_0,\ t_1]$.

Кусочно-непрерывные управления соответствуют предположению о «безынерционности».

Если желательно учесть «инерцию», то следует искать управление в классе непрерывных кусочно-гладких функций $\mathbf{u}(t)$. Такой класс допустимых управлений иногда сводится к предыдущему путем введения нового безынерционного управления $\overline{\mathbf{u}}(t)$, связанного со «старым» управлением $\mathbf{u}(t)$ соотношением

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \overline{\mathbf{u}}, \quad \overline{\mathbf{u}} \in U^m\ ,$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$;

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m)^T \ . \qquad (5)$$

Если U^m – замкнутая и ограниченная область, то это означает, что введены ограничения на значения первых производных от вектор-функции $\mathbf{u}(t)$.

Кусочно-непрерывным функциям $\bar{\mathbf{u}}(t)$ отвечают кусочно-гладкие функции $\mathbf{u}(t)$ в силу (5). Таким образом, в новой задаче $\mathbf{u}(t)$ становится переменной состояния, управляемой посредством $\bar{\mathbf{u}}(t)$ через систему (5).

Если условие $\mathbf{u} \in U^m$ в новой задаче можно снять, то задача сводится к предыдущей для кусочно-непрерывного управления $\bar{\mathbf{u}} \in U^m$.
В противном случае следует обратиться к задаче оптимизации с ограничениями на фазовые координаты. На рис. 3 приведены примеры управлений, принадлежащих как к классу кусочно-непрерывных функций, так и к другим классам.

Рассмотрение допустимых управлений в классе кусочно-непрерывных функций объясняется тем, что для оптимизации функционалов на этом классе функций разработан соответствующий математический аппарат – принцип максимума.

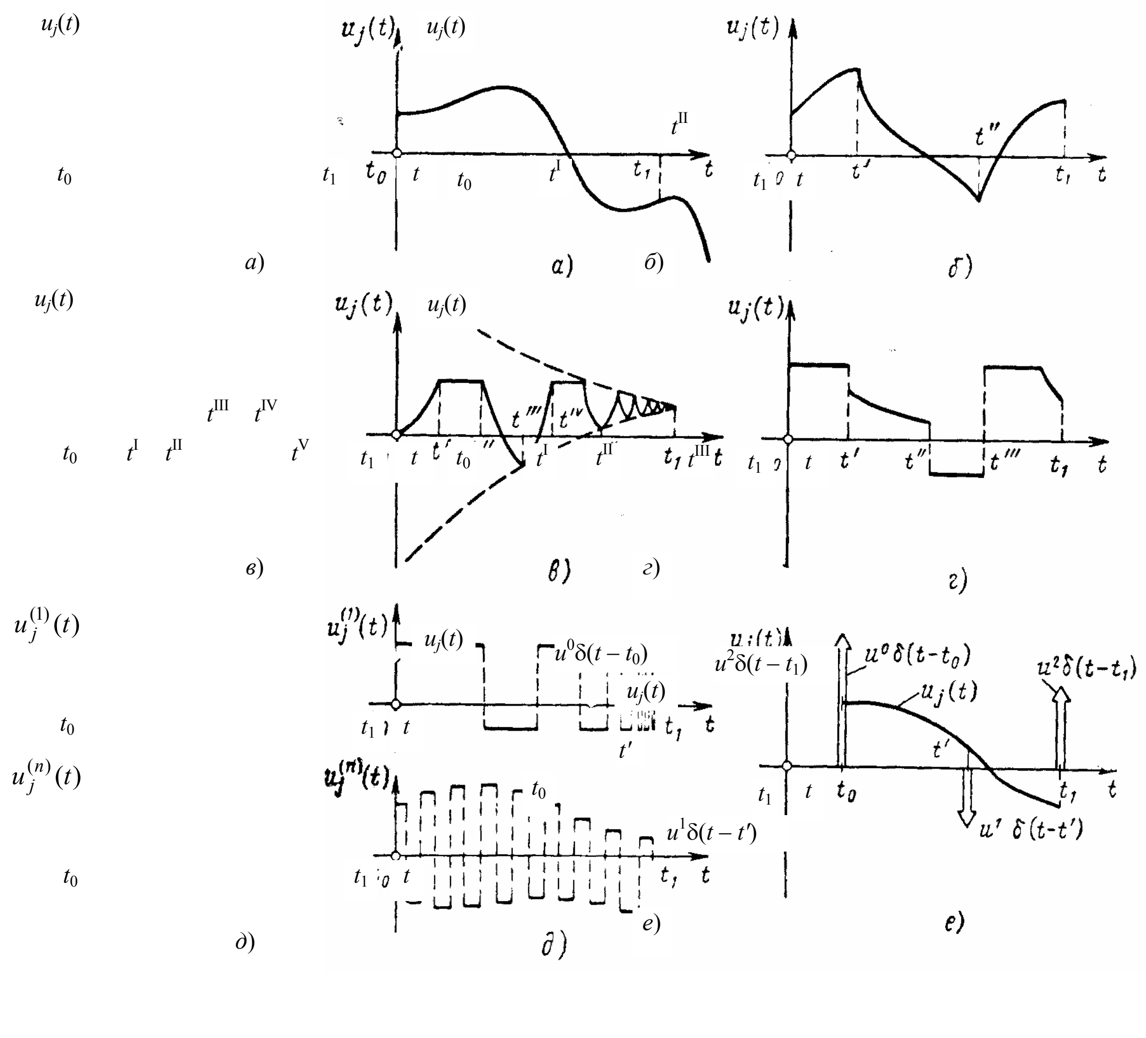


Рис. 3 Примеры управлений $u_j(t)$, принадлежащих различным классам функций:

а – гладкое управление; *б* – кусочно-гладкое непрерывное управление;

в – непрерывное управление (в окрестности $u_j(t)$, t недифференцируема);

г – кусочно-непрерывное управление; *д* – управление, не являющееся кусочно-непрерывным (u'_j содержит бесконечное число переключений в окрестности t_1; $u_j^2(t)$ – элемент последовательности, сходящейся к функции, разрывной в каждой точке $[t_0, t_1]$); *е* – управление, содержащее δ-функции Дирака; $\bar{u}^0, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ – константы

Для каждого допустимого управления $\mathbf{u}(t)$ в силу сделанных предположений относительно $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ существует единственное абсолютно-непрерывное решение системы $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, которое удовлетворяет системе (1) почти всюду на $[t_0, t_1]$ [т.е. за исключением конечного числа или счетного множества точек разрыва функции $\mathbf{u}(t)$] и при $t = t_0$ принимает заданное значение $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$.

2.7 Допустимый закон управления

Закон управления $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ является допустимым на $\mathbf{x} \in X^n$, $t \in [t_0, t_1]$, если

1) $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in U^m$, $\forall t \in T = [t_0, t_1]$, $\mathbf{x} \in X^n$;

2) $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{u}(t)$,

где $\mathbf{x}(t)$ – траектория системы S; $\mathbf{u}(t)$ – допустимое программное управление при законе управления $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Вектор $\mathbf{a}$ управляющих параметров называется допустимым, если его значение принадлежит заданному множеству $A^r \subset R^r$.

2.8 Допустимые траектории и процессы

Фазовая траектория $\mathbf{x}(t)$ системы S называется допустимой, если:

а) она получена из решения системы ДУ при допустимом управлении $\mathbf{u}(t)$ или при допустимом законе управления $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$;

б) значения $\mathbf{x}(t)$ принадлежат заданной области X^n пространства состояний $\bar{X}^n$.

Управляемый процесс $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ называется допустимым, если в нем под действием допустимого управления $\mathbf{u}(t)$ или допустимого закона управления $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ реализуется допустимая траектория.

2.9 Граничные условия. Краевая задача

Цель управляемого процесса $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ состоит в переходе системы S из некоторого заданного при $t = t_0$ начального состояния $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ в заданное конечное состояние $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ за время $T = t_1 - t_0$.

При этом все компоненты векторов $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ и моменты времени t_0, t_1 обязательно должны быть фиксированными, некоторые могут оставаться не заданными (*свободными*). В общем случае система S в начальный и конечный моменты времени может находиться в состояниях, описываемых уравнениями вида

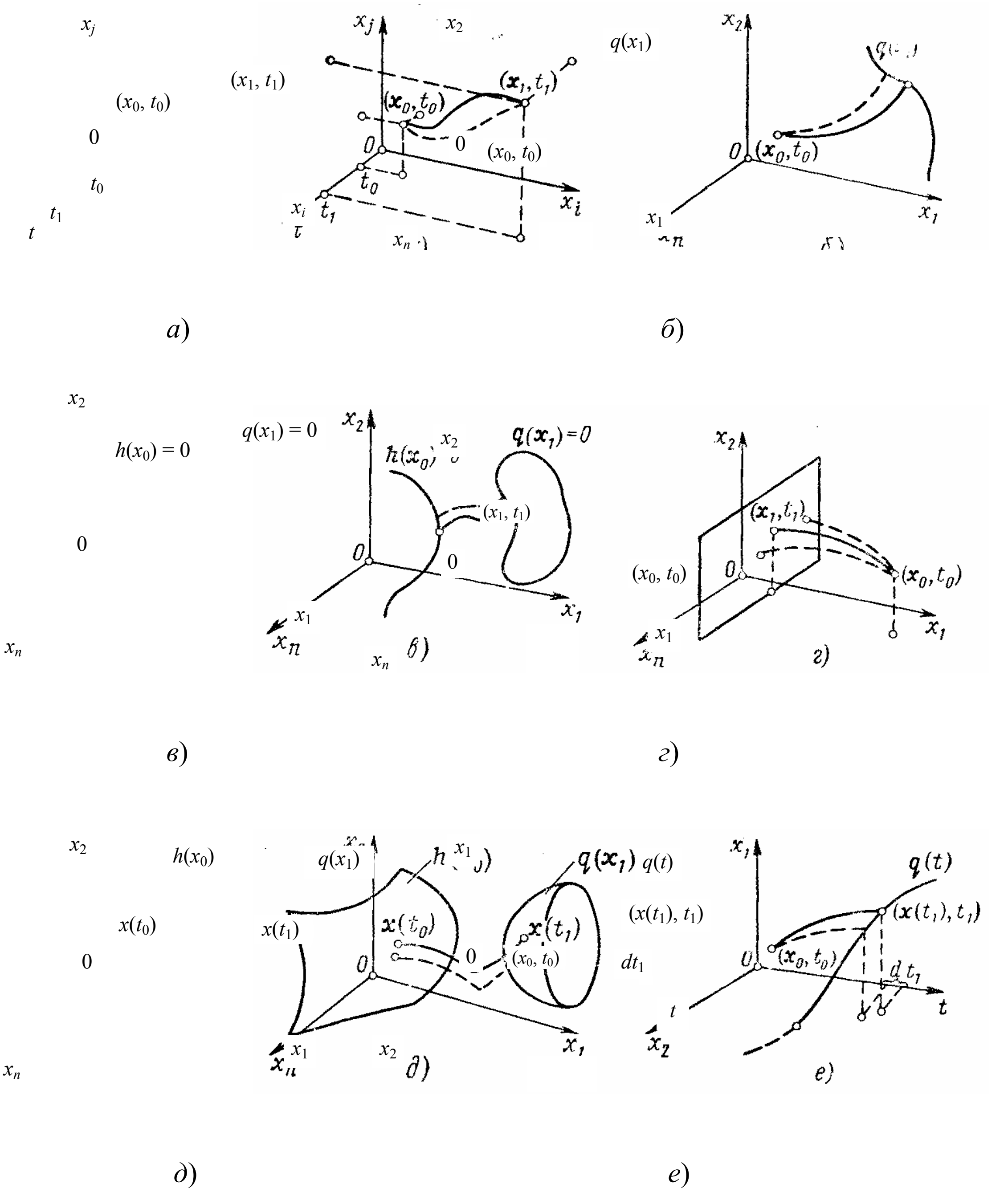


Рис. 4 Примеры граничных условий:

а – левый и правый концы фазовой траектории закреплены;

б – левый конец закреплен, правый – свободен; *в* – левый и правый концы подвижные; *г* – левый конец закреплен, правый – свободен, за исключением координаты x_1; *д* – общий случай подвижных граничных условий;

е – граничные условия в задаче встречи движений;

——— – оптимальная траектория; - - - - - - – произвольная траектория

$$\mathbf{h}(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{a}) = (h_1, h_2, ..., h_{l_1})^T = 0\,; \tag{6}$$

$$\mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = (h_1, h_2, ..., h_{l_1})^T = 0 \tag{7}$$

или более общими уравнениями вида

$$\mathbf{g}(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = (g_1, g_2, ..., g_l)^T = 0\,, \tag{8}$$

где $l_1 + l_2 \le 2n + 2 + r;\;\; l \le 2n + 2 + r$.

Уравнения (6) и (7) описывают (при фиксированном управляющем параметре *a*) обычно поверхность размерности $(n+1-l_2)$ и $(n+1-l_1)$ и $(u-l_2)$ в пространстве (t, $\mathbf{x}$) называются *раздельными граничными условиями* для концов фазовой траектории. Примеры граничных условий приведены на рис. 4. Уравнения (8) называются *смешанными граничными условиями*. Если значения фазовых координат в момент t_0 (или t_1) не фиксируются, то граничные условия для левого (или правого) конца траектории называются *свободными*. Раздельные условия вида (6) и (7) часто называют *подвижными граничными* условиями.

Определение уравнений $\mathbf{u}(t)$, при которых решение системы (1) удовлетворяет условиям (6) и (7), называется *двухточечной краевой*
задачей.

Перевод начального состояния $\mathbf{x}_0$ в конечное состояние $\mathbf{x}_1$ на заданном отрезке $[t_0, t_1]$ не всегда возможен. Однако, если найдется хотя бы одна пара векторов $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{a}\}$ или $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{a}\}$, осуществляющая указанный переход, то обычно существуют и другие пары векторов, реализующие этот же самый переход. В этом случае каждой паре $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{a}\}$ соответствует определенное значение критерия качества $J[\mathbf{u}, \mathbf{a}]$. Можно ставить задачу об отыскании таких $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{a}\}$, которые минимизируют или максимизируют этот критерий.

Контрольные вопросы

1 Что такое фазовые координаты?
2 Расскажите об эволюции системы и ее описании при помощи дифференциальных уравнений движения.
3 Функционал. Критерий качества управления.
4 Какие системы называются автономными?
5 Расскажите о допустимых программных управлениях.
6 Расскажите о допустимом законе управления.
7 Допустимые траектории и процессы. Граничные условия. Краевая задача. Виды краевых условий.

Глава 3

ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Основная задача оптимального программного управления в форме временной программы (2) для системы (1) с критерием (4) и краевыми условиями (8) формулируется следующим образом.

Среди всех допустимых на отрезке $[t_0, t_1]$ программных управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in U^m$ и управляющих параметров $\mathbf{a} \in A^r$, переводящих точку $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в точку $(t_1, \mathbf{x}_1)$, найти такие, для которых функционал (4) на решениях системы (1) примет наименьшее (наибольшее) значение с выполнением условий (8).

Управление $\mathbf{u}(t)$, решающее эту задачу, называется оптимальным (программным) управлением, а вектор $\mathbf{a}$ – оптимальным параметром.

Если пара $\{\mathbf{u}^*(t), \mathbf{a}^*\}$ доставляет абсолютный минимум функционалу $J[\mathbf{u}(t), \mathbf{a}]$ на решениях системы (1), то выполняется соотношение

$$J_{\min} = J^* = J[\mathbf{u}^*(t), \mathbf{a}^*] \leq J[\mathbf{u}(t), t] \tag{9}$$

для $\forall \mathbf{u} \in U^m$, $\mathbf{a} \in A^r$, являющихся допустимыми и осуществляющих заданный переход с выполнением условия (8). Аналогичное определение имеет место для абсолютного максимума (с заменой знака неравенства $\leq$ знаком $\geq$).

Из определения абсолютного минимума (9) следует, что абсолютное минимальное значение функционала $J^* = J[u^*, a^*]$ является единственным, чего нельзя утверждать, вообще говоря об оптимальном управлении $\mathbf{u}^*(t)$ и оптимальном параметре $\mathbf{a}^*$.

3.1 Основная задача оптимального координатного управления

Основная задача оптимального координатного управления известна в теории оптимальных процессов как *проблема синтеза оптимального закона управления*, а в некоторых задачах – *как задача об оптимальном законе поведения*.

Задача синтеза оптимального закона управления для системы (1) с критерием (4) и краевыми условиями (6) и (7), где для упрощения предполагается, что функции f_0, f, h, g, Ф от вектора $\mathbf{a}$ не зависят, формулируется следующим образом.

Среди всех допустимых законов управления $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ найти такой, что для любых начальных условий (t_0, x_0) из (6) при подстановке этого закона в (1) и в (4) осуществляется заданный переход (7) и критерий качества $J[\mathbf{u}]$ принимает наименьшее (наибольшее) решение.

3.2 Оптимальные траектории

Траектория системы (1), соответствующая оптимальному управлению $\mathbf{u}^*(t)$ или оптимальному закону $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$, называется оптимальной траекторией. Совокупность оптимальных траекторий $\mathbf{x}^*(t)$ и оптимального управления $\mathbf{u}^*(t)$ образует оптимальный управляемый процесс $\{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)\}$.

Установлено, что при отсутствии вектора $\mathbf{a}$ управляющих параметров в f_0, f, h, g, Ф задача программного и координатного управления эквивалентны.

Так как закон оптимального управления $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ имеет форму закона управления с обратной связью, то он остается оптимальным для любых значений начальных условий (x_0, t_0) и любых координат $\mathbf{x}$.

В отличие от закона $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ программное оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$ является оптимальным лишь для тех начальных условий, для которых оно было вычислено. При изменении начальных условий будет меняться и функция $\mathbf{u}^*(t)$. В этом состоит важное, с точки зрения практической реализации системы управления, отличие закона оптимального управления $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ от программного оптимального управления $\mathbf{u}^*(t)$, поскольку выбор начальных условий на практике никогда не может быть сделан абсолютно точно.

3.3 Свойства оптимальных управлений и оптимальных траекторий

1 Всякая часть оптимальной траектории (оптимального управления) также в свою очередь является оптимальной траекторией (оптимальным управлением). Это свойство математически формулируется следующим образом.

Пусть $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ – оптимальное управление для выбранного функционала $J[\mathbf{u}]$, соответствующее переходу из состояния $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в состояние $(t_1, \mathbf{x}_1)$ по оптимальной траектории $\mathbf{x}^*(t)$. Числа t_0, t_1 и вектор $\mathbf{x}_0$ – фиксированные, а вектор $\mathbf{x}_1$, вообще говоря, свободен. На оптимальной траектории $\mathbf{x}^*(t)$ выбираются точки $\mathbf{x}^*(\tau_0)$ и $\mathbf{x}^*(\tau_1)$, соответствующие моментам времени $t = \tau_0, t = \tau_1$, где $t_0 \le \tau_0 \le \tau_1 \le t_1$. Тогда управление $\mathbf{u}^*(t)$ на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$ является оптимальным, соответствующим переходу из состояния $\mathbf{x}^*(\tau_0)$ в состояние $\mathbf{x}^*(\tau_1)$, а дуга $[\mathbf{x}^*(\tau_0), \mathbf{x}^*(\tau_1)]$ является оптимальной траекторией S.

Таким образом, если начальное состояние системы есть $\mathbf{x}^*(\tau_0)$ и начальный момент времени $t = \tau_0$, то независимо от того, каким образом пришла система к этому состоянию, ее оптимальным последующим движением будет дуга траектории $\mathbf{x}^*(t)$, $\tau_0 \le t \le \tau_1$, являющейся частью оптимальной траектории между точками $(t_0, \mathbf{x}_0)$ и $(t_1, \mathbf{x}_1)$. Это условие является необходимым и достаточным свойством оптимальности процесса и служит основой динамического программирования.

П р и м е ч а н и е. Приведенная краткая формулировка основного свойства оптимальных траекторий не должна толковаться слишком широко. Требование, чтобы начальная и конечная точки траекторий сравнения лежали на оптимальной траектории в те же моменты времени τ_0, τ_1, что и точки оптимальной траектории, или чтобы свободный правый конец x_1' траектории сравнения оканчивался в тот же момент t_1, что и конец оптимальной траектории, являются существенными. Без их выполнения это свойство, вообще говоря, не имеет места. Так, если заданы только начальная точка $x_0 = x(t_0)$ и моменты времени t_0 и τ_0, а $x(\tau_0)$ свободен, то отрезок траектории $\mathbf{x}^*(t)$, $t_0 \le t \le \tau_0$ может и не быть оптимальным. В этом случае оптимальным может быть, вообще говоря, другой отрезок $x'(t)$ (рис. 5).

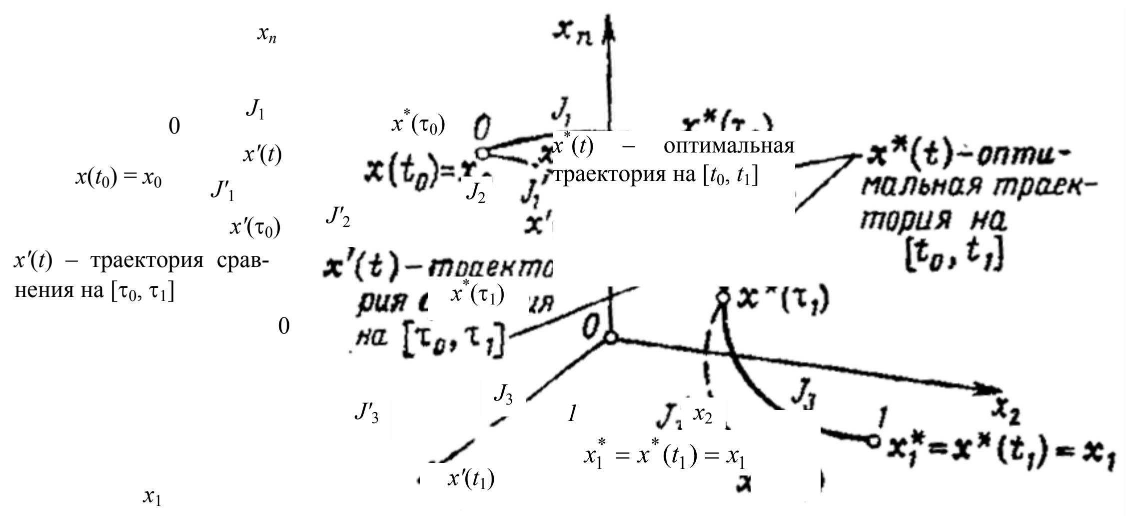


Рис. 5 Основное свойство оптимальных траекторий:

$J_2' > J_2$; J_1, J_1' $(i = 1, 2, 3)$ – значения функционала на участках оптимальной траектории и на траекториях сравнения, соответственно

2 Автономные системы инвариантны относительно сдвига вдоль оси t. Это означает, что если $\mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ совершает переход $\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1$ и сообщает функционалу $J[\mathbf{u}]$ значение J^*, то при любом действи-

тельном τ управление $\mathbf{u}^*(t+\tau)$, $t_0-\tau \le t \le t_1-\tau$ также совершает переход $\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1$ и придает функционалу $J[\mathbf{u}]$ значение J^*.

3.4 Геометрическая интерпретация основной задачи оптимального управления

Основным задачам оптимального управления при закрепленных концах можно дать следующую эквивалентную геометрическую формулировку.

Пусть при $t=t_0$ задано начальное состояние $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}(t_0)$, а при $t=t_1$ – конечное состояние $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}(t_1)$, где t_0, t_1, x_0, x_1 – фиксированные значения. Тогда в функционале $J[\mathbf{u}]$ (4) слагаемое $\Phi(t_0, t_1, x_0, x_1)$ является известным числом Φ_0.

Введем новую переменную $\mathbf{x}_0$, закон изменения которой имеет вид

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}) \tag{10}$$

с начальным условием

$$x_0(t_0) = x_{00} = \Phi_0 .$$

Присоединим эту переменную к системе (1). Тогда при $t=t_0$ система находится в точке $(x_0(t_0), x_1(t_0), ..., x_n(t_0))^T$, а при $t=t_1$ – в точке $(x_0(t_1), x_1(t_1), ..., x_n(t_1))^T$, где

$$x_0(t_1) = \Phi_0 + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})dt = J[\mathbf{u}] .$$

Таким образом, если в $(n+1)$-мерном пространстве точек $(x_0, \mathbf{x})$ провести через точку $(0, x_1)$ прямую П параллельно оси $0x_0$, то решение системы (1), (10) проходит при $t=t_1$ через точку на прямой П с координатой $x_0(t_1)=J$.

Теперь основная задача оптимального программного управления формулируется геометрически как на рис. 6.

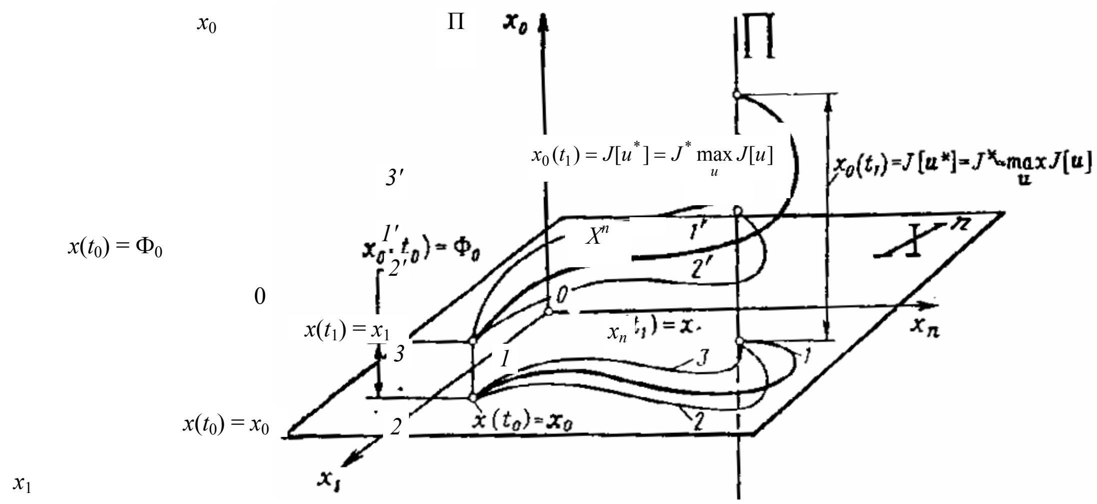


Рис. 6 Геометрическая формулировка основной задачи

оптимального управления:

1 – оптимальная траектория; *1′* – изменение критерия качества *J* вдоль оптимальной траектории; *2*, *3* – неоптимальные траектории, проходящие через точки (x_0, t_0), (x_1, t_1); *2′*, *3′* – изменение критерия качества *J* вдоль неоптимальных траекторий

В (n + 1)-мерном фазовом пространстве $(x_0, x_1, ..., x_n)^T$ даны:

1) при $t = t_0$ точка $(\Phi_0, \mathbf{x}_0)$;

2) прямая П, параллельная оси $0x_0$ и проходящая через точку $(0, \mathbf{x}_1)$.

Среди всех допустимых программных управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, обладающих тем свойством, что соответствующее решение $(x_0(t), \mathbf{x}(t))$ системы (1), (10) с начальным условием $(\Phi_0, x_1(t_0), ..., x_n(t_0))^T$ пересекает при $t = t_1$ прямую П, найти такое, для которого точка пересечения с прямой П имеет наименьшую (наибольшую) координату $x_0(t_1) = J$.

Контрольные вопросы

1 Основная задача оптимального координатного управления.

2 Оптимальные траектории.

3 Основные свойства оптимальных управлений и оптимальных траекторий.

4 Геометрическая интерпретация основной задачи.

Глава 4

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

4.1 Краткая формулировка задачи

Пусть даны:

- система дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}), \qquad (11)$$

где $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})$ определены для всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \widetilde{X}^n \subset R^n$, $t_0 \le t \le t_1$, $\mathbf{u} \in U^m$, $\mathbf{a} \in A^r$, непрерывны по совокупности переменных $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})$ и непрерывно дифференцируемы по $(\mathbf{x}, \mathbf{a})$;

- соотношения, которым удовлетворяют начальные $(t_0, \mathbf{x}_0)$ и конечные $(t_1, \mathbf{x}_1)$ фазы движения системы (11):

$$g_j(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = 0 \ (j = 1, 2, ..., l < 2n + 2 + r), \qquad (12)$$

где функции g_j непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам;

- критерий качества управления (функционал)

$$J[\mathbf{u}(t), \mathbf{a}] = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}) dt, \qquad (13)$$

где Φ, f_0 обладают всеми необходимыми производными.

Множество U^m представляет собой замкнутую и ограниченную область евклидова m-мерного пространства R^m. Функция $\mathbf{u}(t)$ считается допустимой, если она кусочно-непрерывна и ее значения принадлежат множеству $U^m : \mathbf{u}(t) \in U^m$, т.е. такие управления $u_i(t)$, каждое из которых непрерывно для всех рассматриваемых t, за исключением лишь конечного числа моментов времени, где функции $u_i(t)$ может терпеть разрывы первого рода. Во избежание недоразумений отметим, что, по определению разрывов первого рода, в точке разрыва τ предполагается существование конечных пределов

$$u(\tau - 0) = \lim_{\substack{t \to \tau \\ t < \tau}} u(t), \quad u(\tau + 0) = \lim_{\substack{t \to \tau \\ t > \tau}} u(t).$$

4.2 Некоторые вспомогательные построения и терминология

Вводятся:

- зависящий от времени вектор сопряженных координат (вектор-функция множителей Лагранжа)

$$\lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), ..., \lambda_n(t))^T; \qquad (14)$$

- постоянный вектор $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\, \mu_2,\, ...,\, \mu_l)^T\,; \tag{15}$$

- вспомогательные функции (гамильтониан задачи оптимизации и функция Лагранжа)

$$H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{a}) + \lambda_0 f_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{a}) \tag{16}$$

и

$$L(t_0,t_1,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\mathbf{a},\boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=1}^{l} \mu_j g_j(t_0,t_1,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\mathbf{a}) + \lambda_0 \Phi(t_0,t_1,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\mathbf{a})\,; \tag{17}$$

- система дифференциальных уравнений, сопряженная к (11) (13) и определяющая изменение вектора $\lambda(t)$,

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{\partial f_k(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{a})}{\partial x_i} \quad (i = \overline{0,\, n})\,. \tag{18}$$

З а м е ч а н и е . Система линейных дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y}$ называется сопряженной для системы $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$, если $B(t) = -A^T(t)$ и размерность векторов **x** и **y** (а также матриц $B(t)$ и $A(t)$) одинаковы. Таким образом, система (18) является фактически сопряженной к линеаризованной системе (11), (20):

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\hat{x}((t),\, \hat{u}(t)} \delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\hat{x}(t),\, \hat{u}(t)} \delta\mathbf{u}(t)\,,$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t),\, \hat{\mathbf{u}}(t)$ – некоторая опорная траектория и опорное управление, соответственно.

С помощью функции H исходная система уравнений (1) записывается в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = f_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{a}) \quad (i = \overline{0,\, n})\,. \tag{19}$$

Индексу $i = 0$ соответствует новая переменная $x_0(t)$, определяемая скалярным уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(t,\, \mathbf{x},\, \mathbf{u},\, \mathbf{a})\,, \tag{20}$$

с начальным условием

$$x_0(t_0) = x_{00} = \Phi(t_0,\, t_1,\, \mathbf{x}_0,\, \mathbf{x}_1,\, \mathbf{a})\,. \tag{21}$$

Система уравнений

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \tilde{\mathbf{f}};\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}\right)^T = -\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}\right)^T \boldsymbol{\lambda},\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где $H = \boldsymbol{\lambda}^T \tilde{\mathbf{f}}$, $\partial \tilde{\mathbf{f}} / \partial \mathbf{x}$ – матрица Якоби, $\tilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, ..., x_n)$, $\tilde{\mathbf{f}} = (f_0, f_1, ..., f_n)$; $\mathbf{x} \in \tilde{X}^{n+1}$ – называется *канонической системой* дифференциальных уравнений, связанной с основной задачей.

4.3 Принцип максимума Л.С. Понтрягина

Пусть $\mathbf{u}^*(t) = (u_1^*(t), ..., u_m^*(t))^T$, $t \in [t_0, t_1]$ – такое допустимое управление, а $\mathbf{a}^* = (a_1^*, a_2^*, ..., a_r^*)^T$ – такое допустимое значение вектора параметров, что соответствующая им траектория $\mathbf{x}^*(t)$ системы (11) удовлетворяет условиям (12) для концов.

Для оптимальности (в смысле минимума) критерия качества (13) управления $\mathbf{u}^*(t)$, траектории $\mathbf{x}^*(t)$ и вектора управляющих параметров $\mathbf{a}^*$ необходимо существование такого ненулевого переменного вектора $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), ..., \lambda_n(t))^T$, $\lambda_0(t) = \text{const} \ge 0$ (обычно можно принимать $\lambda_0 = 1$, см. следствие 2, п. 4.4) и такого постоянного вектора $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_l)^T$, что выполняются следующие условия.

1 Вектор-функции $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и вектор $\mathbf{a}^*$ удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1^*}{dt} = \frac{\partial H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*)}{\partial \lambda_i};\\ &\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*)}{\partial x_i}\\ &(i = \overline{0, n}).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

2 Функция $H(t, \mathbf{x}^*(t), u, \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*)$ переменного $\mathbf{u} \in U^m$ при каждом $t \in [t_0, t_1]$, т.е. при фиксированных $\mathbf{x}^*$ и $\boldsymbol{\lambda}$ и при фиксированном векторе $\mathbf{a}^*$ достигает при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ минимума):

$$\begin{aligned}&H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*) = H^*(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*) =\\ &= \min_{\mathbf{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*).\end{aligned} \tag{24}$$

Случай максимума функционала $J[\mathbf{u}, \mathbf{a}]$ сводится к задаче в данной постановке путем рассмотрения функционала $J_1[\mathbf{u}, \mathbf{a}] = -J[\mathbf{u}, \mathbf{a}]$.

Замечание. В отличие от классической формулировки принципа максимума Л.С. Понтрягина в данном случае операция max в (24) заменена на min. В соответствии с такой заменой необходимое условие (24) можно было бы назвать принципом минимума. Следует обратить внимание, что в данном случае $\lambda_0 \ge 0$, тогда как в классической формулировке $\lambda_0 \le 0$.

Таким образом, оптимальное управление определяется как

$$\mathbf{u}^*(t)=\mathbf{u}^*(t,\,\mathbf{x}^*(t),\,\boldsymbol{\lambda}(t),\,\mathbf{a}^*)=\arg\min_{\mathbf{u}\in U^m} H(t,\,\mathbf{x}^*(t),\,\mathbf{u},\,\boldsymbol{\lambda}(t),\,\mathbf{a}^*)\,. \quad (25)$$

Принцип максимума, следовательно, утверждает, что оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$ в каждый момент времени t минимизирует проекцию фазовой скорости $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}=\tilde{\mathbf{f}}(t,\,\mathbf{x},\,\mathbf{u})$ управляемого процесса (т.е. проекцию скорости изображающей точки $\tilde{\mathbf{x}}\in\tilde{X}^{n+1}$) на направление, задаваемое вектором $\boldsymbol{\lambda}(t)$; напомним, что

$$H=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f_i=\boldsymbol{\lambda}^T\dot{\tilde{\mathbf{x}}}=\boldsymbol{\lambda}^T\tilde{\mathbf{f}}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{a})\ -$$

скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}$.

3 Сопряженные переменные $\lambda_i(t)$ и функция $H(t,\,\mathbf{x}^*(t),\,\mathbf{u}^*(t),\,\boldsymbol{\lambda}(t),\,\mathbf{a}^*)$ непрерывны вдоль оптимальной траектории (аналог условия Эрдмана-Вейерштрасса классического вариационного исчисления).

4 Условия трансверсальности. Для концевых точек $(t_0,\,\mathbf{x}_0)$, $(t_1,\,\mathbf{x}_1)$ и вектора параметров $\mathbf{a}^*$ при *произвольных* вариациях концевых точек и параметров выполняются обобщенные условия трансверсальности

$$\left[H\delta t-\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\delta x_i\right]_{t_0}^{t_1}+dL+\sum_{\rho=1}^{r}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial a_\rho}\delta a_\rho dt=0\,. \qquad (26)$$

Здесь dL – полная вариация функции $L(t_0,\,t_1,\,\mathbf{x}_0,\,\mathbf{x}_1,\,\boldsymbol{\mu},\,\mathbf{a})$ определяемой уравнением (17):

$$\begin{gathered}dL=\frac{\partial L}{\partial t_0}\delta t_0+\frac{\partial L}{\partial t_1}\delta t_1+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i(t_0)}\delta x_i(t_0)+\\+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i(t_1)}\delta x_i(t_1)+\sum_{\rho=1}^{r}\frac{\partial L}{\partial a_\rho}\delta a_\rho\,,\end{gathered} \qquad (27)$$

где $\delta t_0,\,\delta t_1,\,\delta x_i(t_0),\,\delta x_i(t_1),\,\delta a_\rho$ – произвольные вариации концевых точек и параметров.

Обобщенные условия трансверсальности (26) с учетом выражения (27) приводят в силу независимости δt_0, δt_1, $\delta t_i(t_0)$, $\delta t_i(t_1)$, δa_ρ к следующим $2n+2+r$ соотношениям:

$$\left.\left(-H+\frac{\partial L}{\partial t_0}\right)\right|_{t_0}\delta t_0=0\,; \qquad (28)$$

$$\left(H+\frac{\partial L}{\partial t_1}\right)\Bigg|_{t_1}\delta t_1=0; \qquad (29)$$

$$\left(\lambda_i+\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)\Bigg|_{t_0}\delta x_i(t_0)=0 \quad (i=\overline{1,\,n}); \qquad (30)$$

$$\left(-\lambda_i+\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)\Bigg|_{t_1}\delta x_i(t_1)=0 \quad (i=\overline{1,\,n}); \qquad (31)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a_\rho}+\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial a_\rho}dt\right)\delta a_\rho=0 \quad (\rho=\overline{1,\,r}). \qquad (32)$$

Если какое-либо конечное условие $x_i(t_0),\, x_i(t_1)$ или параметр a_ρ закреплены (не варьируются), то соответствующая вариация равна нулю: $\delta z=0$ $(z=t_0,\, t_1,\, x_i(t_0),\, x_i(t_1),\, a_\rho)$. Если какое-либо конечное условие $x_i(t_0)$, $x_i(t_1)$ или управляющий параметр a_ρ свободны, то равен нулю коэффициент при свободной вариации δz в (30) – (32).

Таким образом, совокупность условий, выражающих принцип максимума (23), (25), условий трансверсальности (26), дают необходимые условия оптимальности программного управления.

Условия принципа максимума позволяют среди множества всех траекторий и управлений, переводящих систему из $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в $(t_1, \mathbf{x}_1)$, выделить те отдельные, вообще говоря, изолированные траектории и управления, которые могут быть оптимальными.

В формулировке принципа максимума участвует $2n + 2 + m + 1$ неизвестных функций $x_0(t),\, x_1(t),\, ...,\, x_n(t):\lambda_0(t),\, \lambda_1(t),\, ...,\, \lambda_n(t)$; $u_1(t),\, ...,\, u_m(t)$, для определения которых имеется $(n + 1)$ дифференциальных уравнений физической системы (11), (20), $(n + 1)$ дифференциальных уравнений сопряженной системы (18) и m конечных соотношений для u_j, вытекающих из (24).

Следовательно, для $(2n + 2 + m)$ неизвестных функций имеется $(2n + 2 + m)$ соотношений. Если известны все начальные условия

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_0&=\tilde{\mathbf{x}}(t_0)=(\Phi,\, x_1(t_0),\, x_2(t_0),\, ...,\, x_n(t_0))^T;\\ \boldsymbol{\lambda}_0&=\boldsymbol{\lambda}(t_0)=(\lambda_0(t_0),\, \lambda_1(t_0),\, \lambda_2(t_0),\, ...,\, \lambda_n(t_0))^T\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

и фиксированное значение управляющего параметра **a**, то система (23) может быть проинтегрирована. Однако начальный и конечный моменты времени t_0, t_1, начальное и конечное значения вектора фазовых координат $\mathbf{x}_0=(x_{10},...,\, x_{n0}),\, \mathbf{x}_1=(x_{11},\, ...,\, x_{n1})$, начальное и конечное значения вектора сопряженных переменных $\boldsymbol{\lambda}_0=(1,\, \lambda_{10},\, ...,\, \lambda_{n0})$, $\boldsymbol{\lambda}_1=(1,\, \lambda_{11},\, ...,\, \lambda_{n1})$, постоянный вектор $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\, \mu_2,\, ...,\, \mu_l)$ и вектор управляющих параметров $\mathbf{a}=(a_1,\, a_2,\, ...,\, a_r)$ для оптимального решения заранее неизвестны. Они могут быть определены из условий трансверсальности (28) – (32) и граничных условий (12). В самом деле, для определения $(2 + 4n + l + r)$ неизвестных $t_0,\, t_1,\, \mathbf{x}_0,\, \mathbf{x}_1,\, \boldsymbol{\lambda}_0,\, \boldsymbol{\lambda}_1,\, \boldsymbol{\mu},\, \mathbf{a}$ имеется два условия (28), (29), $2n$ условий (30), (31), r условий (32) и l условий (12); кроме того, $2n$ соотношений вида $\mathbf{x}(t_1)=\varphi_1(t_0,\, t_1,\, \boldsymbol{\lambda}_0,\, \mathbf{x}_0)$, $\boldsymbol{\lambda}(t_1)=\varphi_2(t_0,\, t_1,\, \boldsymbol{\lambda}_0,\, \mathbf{x}_0)$ будут получены в результате интегрирования системы (23). Таким образом, для полученной краевой задачи имеется достаточное число соотношений, позволяющих считать ее, по крайней мере теоретиски, разрешимой. Необходимо также отметить, что принцип максимума дает глобальный минимум. Численные методы решения краевых задач приведены в [20, 23].

4.4 Некоторые следствия принципа максимума

1 Непосредственным следствием системы (23) и условия (24) является выполнение между точками разрыва функции $\mathbf{u}(t)$ соотношения

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{34}$$

Это условие для автономных систем (т.е. систем, не зависящих явно от t) приводит к первому интегралу: H = const вдоль всей оптимальной траектории, хотя в общем случае условие (34) неверно, условия скачка обоснованы и получены.

2 В большинстве практических случаев $\lambda_0 > 0$ (так называемый нормальный случай) и поэтому без нарушения общности в силу однородности функции H по переменным λ_i можно принять $\lambda_0 = 1$.

Примечание. Из-за однородности H по λ_i управление $\mathbf{u}$ из (25) определяется не самими величинами λ_i, а их отношениями к одной из них, например, к λ_0. Это эквивалентно принятию $\lambda_0 = 1$. Случай $\lambda_0 = 0$ является особым (анормальным) и здесь не рассматривается.

3 Условия (24), (25) принципа максимума позволяют найти оптимальные значения всех m компонент вектора $\mathbf{u}$.

Если минимум H по $\mathbf{u}$ достигается во внутренней точке множества U^m и функции f_i дифференцируемы по $\mathbf{u}$, то u_j^* определяются из условия

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u_j}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \tag{35}$$

Это условие совместно с (23) образует условие Эйлера-Лагранжа классического вариационного исчисления для задачи (11) – (13) [24 – 27].

Примечание. Минимум H по $\mathbf{u}$ далеко не всегда достигается во внутренней точке множества U^m, а в тех случаях, когда он достигается во внутренней точке, последняя не обязательно является стационарной (рис. 7). Типы минимизирующих точек довольно разнообразны. Из них особо следует отметить случаи нестрогого минимума, так как принцип максимума не позволяет для них однозначно определить $\mathbf{u}^*$. Этот случай в теории оптимального управления является особым.

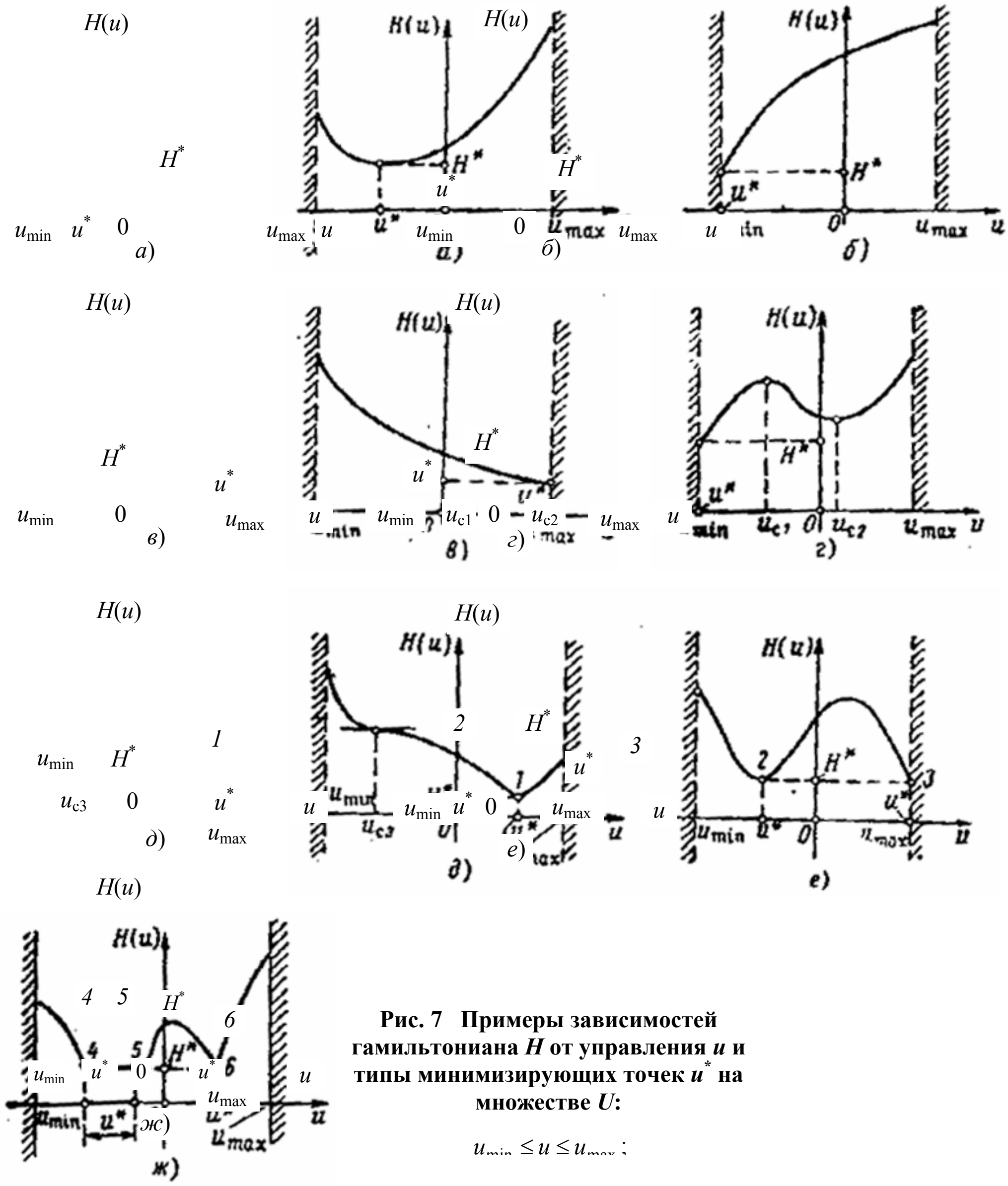


Рис. 7 Примеры зависимостей гамильтониана *H* от управления *u* и типы минимизирующих точек u^* на множестве *U*: $u_{min} \le u \le u_{max}$;

а – внутренний min $H(u)$ в стационарной точке; *б*, *в* – граничный min $H(u)$;
г – граничный min $H(u)$; u_{c1}, u_{c2} – стационарные точки локальных max и min;
д – внутренний min $H(u)$ в угловой точке; u_{c3} – точка перегиба;
е – две изолированные минимизирующие точки *2* и *3*; *ж* – нестрогий min $H(u)$ на отрезке *4 – 5* и изолированный min $H(u)$ в точке *6*

Если функция *H* достигает минимального значения в точке на границе Γ_{U^m} области U^m, то условие (35) не является более необходимым в этой точке. При этом возможны три случая:

а) множество U^m описывается системой связей в виде равенств

$$\chi_S(u_1, u_2, ..., u_m) = 0 \quad (s = 1, 2, ..., \nu < m)\,; \tag{36}$$

тогда минимум *H* при условиях (36) находится методом неопределенных множителей Лагранжа;

б) множество U^m задано системой неравенств

$$\aleph_{s_1}(u_1, u_2, ..., u_m) \le 0 \quad (s_1 = 1, 2, 3, ...); \tag{37}$$

тогда задача сводится на каждом шаге интегрирования к проблеме нелинейного программирования;

в) множество U^m является ограниченной областью, не имеющей границ (например, замкнутой двумерной поверхностью типа сферы или эллипсоида в трехмерном пространстве). Для всякой непрерывной функции $H(\mathbf{u})$, имеющей непрерывные частные производные, заданной на замкнутой поверхности и выраженной через параметрические координаты этой поверхности, точка максимума H по этим параметрическим координатам принадлежит к числу решений (35), где роль u_j играют параметрические координаты поверхности.

Пример. Пусть $H(u_1, u_2, u_3)$ задана на сфере. Тогда замена $u_1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $u_2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $u_3 = r\cos\theta$ приводит к $H(u_1, u_2, u_3) = \widetilde{H}(\theta, \varphi, r)$ – периодической функции с периодом 2π по $\overline{\theta}$ и φ и в точке минимума $\widetilde{H} = H$ имеют место равенства

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \theta} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \varphi} = 0 .$$

4 Условия (35) определяют лишь внутреннюю стационарную точку функции H. Если $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$ удовлетворяет системе (35) и доставляет минимум функции $H(\mathbf{u})$, то должны быть выполнены необходимые условия второго порядка: матрица частных производных второго порядка функции $H(\mathbf{u})$

$$H_{\mathbf{uu}} = \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} \quad (i, j = \overline{1, m}) \tag{38}$$

должна быть неотрицательно определенной в точке $\mathbf{u}^*$ минимума функции $H(\mathbf{u})$.

Положительная определенность матрицы $H_{\mathbf{uu}}$ при выполнении условий (35) в точке $\mathbf{u}^*$ является достаточным условием для относительного (но не абсолютного!) минимума $H(\mathbf{u})$ в этой точке. Условие (38) неотрицательной определенности матрицы $H_{\mathbf{uu}}$ представляет собой условия Лежандра-Клебша классического вариационного исчисления [25 – 27].

Проверка положительной определенности матрицы $H_{\mathbf{uu}}$ может проводиться по критерию Сильвестра: для положительной определенности матрицы $H_{\mathbf{uu}}$ необходимо и достаточно, чтобы ее угловые миноры были положительными. В частности, для положительно определенной матрицы $H_{\mathbf{uu}}$ выполняется условие

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} \Bigg|_{\mathbf{u}^*} > 0 , \tag{39}$$

являющееся аналогом условия Гильберта неособенности (невырожденности) вариационной задачи (см. п. 9.4).

5 Приведенная формулировка принципа максимума остается справедливой и для случая, когда область U^m зависит явным образом от времени t:

$$U^m = U^m(t).$$

З а м е ч а н и е . Принцип максимума является, вообще говоря, лишь необходимым условием. Любое допустимое оптимальное управление, если оно существует, удовлетворяет принципу максимума. Однако не всякое допустимое управление, удовлетворяющее принципу максимума, является оптимальным. Поэтому после определения управления на основе необходимых условий следует убедиться в его оптимальности. Для этого служат достаточные условия оптимальности.

В некоторых случаях принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности управления $\mathbf{u}(t)$. Пусть, например, найдено допустимое управление $\mathbf{u}^*(t)$, которое переводит заданное начальное состояние $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ линейной относительно фазовых координат системы

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u} \in U^m, \tag{40}$$

где U^m – замкнутое ограниченное множество; $A(t)$, $\mathbf{h}(\mathbf{u}, t)$ – непрерывные функции t, $\mathbf{u}$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)$ в заданное конечное состояние $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. Введем такую систему начальных значений сопряженных переменных

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = (\lambda_{00}, \lambda_{10}, ..., \lambda_{n0})^T, \ \ \lambda_{00} > 0,$$

что $\mathbf{u}^*(t)$ минимизирует в каждый момент t функцию

$$H = \lambda_{00} h_0(\mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{h}(\mathbf{u}, t)$$

по всем $\mathbf{u} \in U^m$,

где $$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -A^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) - \lambda_{00}\frac{\partial f_0^T(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}}.$$

Тогда управление $\mathbf{u}^*(t)$ минимизирует на траекториях $\mathbf{x}^*(t)$ системы (40), проходящих через $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, критерий качества

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} [f_0(\mathbf{x},t) + h_0(\mathbf{u},t)]dt\,,$$

если только $f_0(\mathbf{x}, t)$ является однозначной выпуклой вниз функцией $\mathbf{x}$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Замечание. Функция $f_0(\mathbf{x}, t)$ называется выпуклой вниз по $\mathbf{x}$ при $t \in [t_0, t_1]$, если для всех $\mathbf{x} \in R^n$, $\overline{\mathbf{x}} \in R^n$

$$\frac{\partial f_0(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}(\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + f_0(\mathbf{x}, t) \le f_0(\overline{\mathbf{x}}, t)\,.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Приведите формулировку принципа максимума.
2 Расскажите о следствиях принципа максимума.
3 Каким условием является принцип максимума?

Глава 5

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.1 Задача синтеза оптимального закона управления

Для синтеза оптимального закона управления систем с обратной связью, оптимальных замкнутых контуров управления, оптимальных законов наведения и т.д. более естественен другой подход, чем использованный при решении задач, описанных в гл. 4, 9.

В отличие от уравнений Эйлера–Лагранжа и принципа максимума Понтрягина, использующих временное представление оптимального управления [в форме $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(t)$] для единичного объекта управления, этот подход рассматривает оптимальное управление в форме закона $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ (координатное управление, управление в форме обратной связи) для множества однородных объектов, отличающихся различными начальными состояниями.

С точки зрения механики этот подход соответствует рассмотрению распространения «волн возбуждения» от некоторого источника в неоднородной среде. Общность обоих подходов устанавливает проективная геометрия, с точки зрения которой траектория точки в фазовом пространстве может рассматриваться и как последовательность точек и как огибающая своих касательных.

Последовательное применение описываемого подхода к задачам оптимального управления приводит для непрерывных процессов к дифференциальному уравнению (нелинейному) в частных производных первого порядка типа уравнения Гамильтона–Якоби [25 – 27].

Один из возможных способов получения этого уравнения состоит в использовании принципа оптимальности динамического программирования. Динамическое программирование является довольно общим методом, разработанным для решения общих задач многоэтапного выбора (т.е. задач, в которых результаты предыдущих операций можно использовать для управления ходом будущих операций).

5.2 Принцип оптимальности динамического программирования

Принцип оптимальности. В основе динамического программирования лежит сформулированный Р. Беллманом принцип оптимальности: «Оптимальная политика обладает тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и первоначально принятое решение, последующие решения должны составлять оптимальную политику относительно состояния, получившегося в результате первоначально принятого решения» [19, 28]. Или, оптимальное управление не зависит от того, каким образом пришла система к данному состоянию при $t = t'$ (т.е. не зависит от «предыстории» движения) и для будущих моментов времени полностью определяется лишь состоянием системы в рассматриваемый момент времени.

Как частный случай в динамическом программировании рассматриваются задачи управления непрерывными процессами (основная задача оптимального координатного управления).

Краткая формулировка задачи. Пусть дана система уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{41}$$

где
$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)^T \in U^m;$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in X^n;$$

$$\mathbf{f} = (f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), ..., f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))^T,$$

и граничные условия

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1. \tag{42}$$

Требуется синтезировать закон оптимального управления $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$, минимизирующий значение функционала

$$J[t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})dt. \tag{43}$$

Необходимые условия. Пусть в $(n + 1)$-мерном пространстве (X^n, T) имеется некоторая область $G(\mathbf{x}, t)$ начальных значений $\mathbf{x}_0, t_0((\mathbf{x}_0, t_0) \in G(\mathbf{x}, t))$, для каждой точки которой существует оптимальное (в смысле минимума $J[t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}]$ управление $\mathbf{u}^*(t)$, переводящее эти начальные точки в некоторую фиксированную точку $(\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1, t_1)$; $\mathbf{x}_1, t_1$ – заданы. На таких оптимальных управлениях минимальное значение критерия качества (43) будет зависеть лишь от начальных значений $\mathbf{x}_0, t_0$. Таким образом,

$$J_{\min}=J^*=V(t_0, \mathbf{x}_0),$$

где $V(t_0, \mathbf{x}_0)$ – некоторая функция (n + 1) переменного $t_0, x_{10}, ..., x_{n0}$.

Имея в виду произвольную точку области $G(\mathbf{x}, t)$, в дальнейшем, в целях упрощения записи, нижний индекс «0» будем опускать.

Таким образом, функция $V(t, \mathbf{x})$ – минимальное значение критерия качества (43) на оптимальных траекториях системы (41), начинающихся в точке $(t, \mathbf{x})$ и заканчивающихся в фиксированной точке $(t_1, \mathbf{x}_1)$:

$$V(t, \mathbf{x})=\min_{\mathbf{u}\in U^m}\int_t^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})dt \tag{44}$$

на траекториях (1) из $(t, \mathbf{x})$ в $(t_1, \mathbf{x}_1)$.

Функция $V(t, \mathbf{x})$ является аналогом «действия» в аналитической механике и «экстремального интеграла» в классическом вариационном исчислении.

Если функция $V(t, \mathbf{x})$ существует и является непрерывно дифференцируемой по $(t, \mathbf{x})$, то она удовлетворяет основному уравнению динамического программирования, которое является необходимым и достаточным условием, – дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (уравнению Гамильтона–Беллмана)

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\min_{\mathbf{u}\in U^m} H(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u})=0 \tag{45}$$

с граничным условием

$$V(t_1, \mathbf{x}_1)=0; \tag{46}$$

здесь

$$H(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}, \mathbf{u})=f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})+V_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{47}$$

где

$$V_{\mathbf{x}}=\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{(см. табл. 2).}$$

Уравнение (45) аналогично уравнению Гамильтона–Якоби классического вариационного исчисления – достаточное условие:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{H}(t,\, \mathbf{x},\, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}) = 0\,, \tag{48}$$

где функция **H** получена в результате подстановки в функцию $H(t,\, \mathbf{x},\, V_x,\, \mathbf{u})$ управления $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(t,\, \mathbf{x},\, V_{\mathbf{x}})$, найденного из условия стационарности этой функции:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \quad (j = \overline{1,\, m})\,. \tag{49}$$

Из (45) можно определить оптимальный закон управления

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}) = \arg\min_{\mathbf{u} \in U^m} H\left(t,\, \mathbf{x},\, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}},\, \mathbf{u}\right) = \mathbf{u}^*\left(t,\, \mathbf{x},\, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right). \tag{50}$$

Геометрический смысл условия (50) пояснен на рис. 3.8. Если функция $V(t,\, \mathbf{x})$ найдена путем решения уравнения (45) с условием (46), то проблема синтеза решена, так как для известной функции $V(t,\, \mathbf{x})$ имеем

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*\left(t,\, \mathbf{x},\, \frac{\partial V(t,\, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right) = \mathbf{v}^*(t,\, \mathbf{x})\,. \tag{51}$$

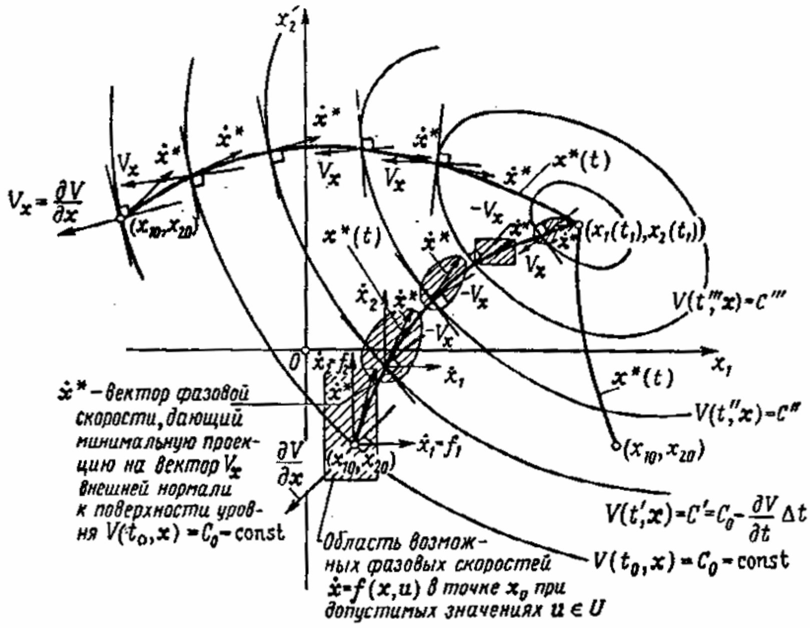


Рис. 3.8 Геометрический смысл условия $\min\limits_{\mathbf{u} \in U^m} H(t,\, \mathbf{x},\, V_{\mathbf{x}},\, \mathbf{u}) = \min\limits_{\mathbf{u} \in U^m} [V_{\mathbf{x}} f(t,\, \mathbf{x},\, \mathbf{u})]$:

$$V(t,\, \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{u} \in U^m} J[u(t)],\;\; V_{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}},\;\; n = m = 2,\;\; f_0 = 0,$$

$\dot{\mathbf{x}}^*$ – оптимальная фазовая скорость: $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}(t,\, \mathbf{x},\, \mathbf{u}^*)$;

$\mathbf{u}^*(t,\, \mathbf{x})$ – оптимальное управление: $\mathbf{u}^* = \arg\min\limits_{\mathbf{u} \in U^m} H(t,\, \mathbf{x},\, V_{\mathbf{x}},\, \mathbf{u})$;

$\mathbf{x}^*$ – оптимальная траектория

Подобно тому, как принцип максимума Понтрягина придает удобную форму и уточняет условие Вейерштрасса (см. п. 9.3) для основной задачи оптимального программного управления в случае замкнутой области значений управления U^m, так и уравнение Гамильтона–Беллмана является уточнением и обобщением уравнения Гамильтона–Якоби. Уточнение состоит в том, что вместо условия стационарности $\partial H/\partial \mathbf{u} = 0$ там, где оно не отвечает существу дела, в (45) используется условие

$$\min_{\mathbf{u}\in U^m} H\left(t,\, \mathbf{x},\, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}},\, \mathbf{u}\right).$$

В приведенном условии (45) требование непрерывной дифференцируемости (гладкости) функции $V(t, \mathbf{x})$ является существенным. Но в отличие от принципа максимума, где утверждается существование необходимой для него вектор-функции $\boldsymbol{\lambda}(t)$, существование гладкого потенциала $V(t, \mathbf{x})$ в методе динамического программирования не доказывается. Это снижает ценность необходимого условия (45), так как для негладкой функции $V(t, \mathbf{x})$ трудно сохранить необходимость его в полном объеме.

5.3 Ослабленное необходимое условие

Уточненное необходимое условие для основной задачи оптимального координатного управления на основе принципа оптимальности, частично свободное от требования непрерывной дифференцируемости функции $V(t, \mathbf{x})$, формулируется следующим образом.

Формулировка задачи. Пусть краевые условия имеют вид

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0\,. \tag{52}$$

Минимизируемый функционал имеет вид

$$J[t_0,\, \mathbf{x}_0,\, \mathbf{u}] = \Phi(t_1,\, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,\, \mathbf{x},\, \mathbf{u})dt \tag{53}$$

и определен на траекториях системы (41) с управлением

$$\mathbf{u}(t) \in U^m(t,\, \mathbf{x})\,.$$

Закон управления $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ считается допустимым, если $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$, $\mathbf{v}(t,\, \mathbf{x}(t)) \in U^m(t,\, \mathbf{x})$, и является кусочно-непрерывным.

Если управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ доставляет минимум функционалу J, то ему соответствует оптимальная траектория $\mathbf{x}^*(t)$.

Пусть

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u} \in U^m} \left\{ \Phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \right\} = \\ = \Phi(t_1, \mathbf{x}^*(t_1^*)) + \int_{t_0}^{t_1^*} f_0(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt. \tag{54}$$

Тогда

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) \le \Phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt,$$

где $\mathbf{u}(t)$ произвольно.

Необходимые условия. Предполагается, что искомое оптимальное управление $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x})$ существует. Тогда можно установить необходимые условия для основной задачи оптимального координатного управления.

Пусть в области G пространства состояний X^n выполняются следующие условия.

1 Для $x \in G$ в момент t функция

$$H\left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u}\right) = f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

имеет абсолютный минимум по $\mathbf{u}$, т.е. $\min\limits_{\mathbf{u}} H = H^*(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}})$ при $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}})$ по всем допустимым $\mathbf{u}(t) \in U^m(t, \mathbf{x})$, где $V_{\mathbf{x}} = \partial V / \partial \mathbf{x}$ – градиент $V(t, \mathbf{x})$.

2 Решение $\mathbf{x}(t)$ системы (41) существует и является непрерывной функцией для всех допустимых $\mathbf{u}(t) \in U^m(t, \mathbf{x})$.

3 Функция $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ непрерывна по t.

4 Функция $V_t(t, \mathbf{x}) = \partial V / \partial t$ непрерывна по t и $\mathbf{x}$; вектор-функции $V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ либо непрерывны по t и $\mathbf{x}$, либо имеют равные левый и правый пределы для скалярного произведения $V_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$ вдоль любой траектории $\mathbf{x}(t)$ системы (41):

$$\lim_{t \to t_0 + 0} [V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \mathbf{u}(t))] = \lim_{t \to t_0 - 0} [V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))].$$

5 Существует оптимальное движение для каждого начального $x_0 \in G$ в некоторое состояние, удовлетворяющее условию $\mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}_1) = 0$ и причем такое, что траектория не выходит из G.

6 Каждая точка в G, не удовлетворяющая условию $\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = 0$, имеет окрестность, целиком лежащую в G.

Тогда функция $V(t, \mathbf{x})$ в области G удовлетворяет уравнению Гамильтона–Беллмана

$$\min_{\mathbf{u}\in U^m}\left\{\left[\frac{dV}{dt}\right]_{\mathbf{u}}+f_0(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\right\}=0\,, \quad (55)$$

или

$$\min_{\mathbf{u}\in U^m}\left\{\frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial t}+V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x})\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})+f_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\right\}=$$
$$=\frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\min_{\mathbf{u}\in U^m}H(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}),\mathbf{u})= \quad (55')$$
$$=\frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial t}+H^*(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}))=0$$

с граничным условием

$$V(t,\mathbf{x})=\Phi(t,\mathbf{x}) \quad (55'')$$

на гиперповерхности $q(t, \mathbf{x}) = 0$.

Здесь обозначено

$$H^*(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}))=\min_{\mathbf{u}\in U^m}H(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}),\mathbf{u})\,,$$

$\left[\frac{dV}{dt}\right]_{\mathbf{u}}$ – полная производная вдоль траектории, реализуемой под действием управления **u**.

Так как при известной функции $V(t, \mathbf{x})$

$$\mathbf{u}^*=\arg\min_{\mathbf{u}\in U^m}H=\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}))=\mathbf{v}^*(t,\mathbf{x})\,,$$

то найденное решение $V(t, \mathbf{x})$ уравнения (55) одновременно дает решение проблемы синтеза оптимального закона управления.

З а м е ч а н и я .

1 Требование 4 влечет за собой непрерывность функций $\left[\frac{dV}{dt}\right]_{\mathbf{u}}$ и $V(t, \mathbf{x})$ по времени t.

2 Когда $V_t, V_{\mathbf{x}}$ и f_i непрерывны по t и $\mathbf{x}$, уравнение (55) представляет собой уравнение Гамильтона–Якоби.

Общая последовательность действий, которой целесообразно придерживаться при решении задачи синтеза оптимального закона управления методом динамического программирования, представлена в табл. 2.

2 Последовательность действий при использовании метода динамического программирования

Шаг	Последовательность действий
1	Образуется функция H, в которой сопряженные

	переменные λ_i заменяются на компоненты вектора $$\frac{dV}{d\mathbf{x}} = \mathrm{grad}_x V(t,\mathbf{x}) = V_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial x_n}\right),$$ т.е. $$H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}}) = V_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) + f_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$$
2	Минимизируется $H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}})$ по $\mathbf{u} \in U^m$ и находится явная зависимость управления $\mathbf{u}^*$ от компонент вектора V_x: $$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\mathbf{x},V_{\mathbf{x}},t) = \arg\min_{\mathbf{u}\in U^m} H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}})$$
3	Находится минимальное значение H^* путем подстановки в H значения $\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}})$: $$H^*(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}}) = H(t,\mathbf{x},\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}}),V_{\mathbf{x}})$$
4	Решается дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона–Беллмана $$H^*(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}}) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$ с соответствующим граничным условием для функции $V(t, \mathbf{x})$ $V(t,\mathbf{x}) = \Phi(t,\mathbf{x})$ на гиперповерхности $\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = 0$
5	Подставляя результаты шага 4 в выражение для $\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x},V_{\mathbf{x}})$, получаем закон управления с обратной связью $$\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*\left(t,\mathbf{x},\frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)$$

5.4 Сводка общих процедур метода динамического программирования для вычисления оптимального закона управления $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x})$

П р и м е р 2. Синтез оптимального закона управления для линейной системы с квадратичным критерием качества. Проблема аналитического конструирования оптимальных автопилотов.

Пусть нестационарная линейная система описывается векторным линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + C\mathbf{f}(t) \tag{I}$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}; \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{II}$$

где t_1 – фиксировано; $t_0, \mathbf{x}_0$ – известные величины (которые, однако, специально не выбираются), и пусть критерий качества имеет вид

$$J[\mathbf{u}] = \mathbf{l}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}}R_1\mathbf{x}_1 + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\begin{bmatrix} \mathbf{l}_2^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{l}_3^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{u} + \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}Q(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\mathbf{T}}N(t)\mathbf{u} + \mathbf{u}^{\mathbf{T}}N^T(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^{\mathbf{T}}P(t)\mathbf{u}) \end{bmatrix} dt. \tag{III}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$; $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)^T$; C, $A(t)$ – матрицы размерности $n \times n$; $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_m)^T$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$; $B(t)$, $N(t)$ – матрицы размерности $n \times m$; $R_1, Q(t)$ – положительно полуопределенные симметричные матрицы размерности $n \times n$; $P(t)$ – положительно определенная симметричная матрица размерности $m \times m$; $P(t)$ – известная функция времени; $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2(t)$, $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2(t)$ – n-мерные векторы; $\mathbf{l}_3(t)$ – m-мерный вектор.

Напомним, что симметричная матрица Q называется положительно полуопределенной, если все ее собственные значения неотрицательны или если соответствующая ей квадратичная форма неотрицательна, т.е. $\mathbf{x}^TQ\mathbf{x} \geq 0$ для всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \neq 0$. Для того, чтобы матрица Q была положительно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные (а не только угловые!) миноры были неотрицательны:

$$Q\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_p \\ i_1 & i_2 \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0 \ (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n;\ p = \overline{1, n}).$$

Предполагается, что на значения управляющего вектора $\mathbf{u}$ не накладывается каких-либо ограничений, а матрицы $Q(t)$, $N(t)$, $P(t)$ таковы, что выполняется условие

$$Q(t) - N(t)P^{-1}(t)N^T(t) \geq 0$$

(это условие гарантирует отсутствие сопряженных точек в данной задаче).

Необходимо найти закон управления с обратной связью

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t),$$

минимизирующий критерий $J[\mathbf{u}]$. Заметим, что значения вектора фазовых координат $\mathbf{x}$ при $t = t_1$ не заданы (т.е. рассматриваемая задача относится к числу задач оптимального управления со свободным правым концом).

Пусть $V(t, \mathbf{x})$ – минимальное значение критерия качества $J[\mathbf{u}]$ при движении системы (I) из произвольной начальной точки $(t, \mathbf{x})$ (нижний индекс «0» опущен) на отрезке времени $[t, t_1]$, $t \leq t_1$:

$$J^* = J_{\min}V(t, \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{u}} J[\mathbf{u}].$$

При решении задачи методом динамического программирования целесообразно руководствоваться последовательностью действий, изложенной в сводке общих процедур (см. табл. 2). В соответствии с табл. 2 составляем функцию $H(t,\, \mathbf{x},\, \boldsymbol{\lambda},\, \mathbf{u})$ (гамильтониан) для данной задачи

$$H(t,\, \mathbf{x},\, \boldsymbol{\lambda},\, \mathbf{u}) = f_0(t,\, \mathbf{x},\, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T f(t,\, \mathbf{x},\, \mathbf{u}) = \mathbf{l}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \mathbf{l}_3^{\mathbf{T}}u + \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{x}^T N\mathbf{u} + \mathbf{u}^T N^T \mathbf{x} + \mathbf{u}^T P\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + C\mathbf{f})$$

и заменяем сопряженный вектор $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{T}}$ на градиент $V_{\mathbf{x}}(t,\, \mathbf{x})$ (градиент $\dfrac{\partial V(t,\, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = V_{\mathbf{x}}(t,\, \mathbf{x})$ функции $V(t,\, \mathbf{x})$ считается вектором-строкой) функции $V(t, \mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$:

$$H(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{l}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \mathbf{l}_3^{\mathbf{T}}\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T N\mathbf{u} + \mathbf{u}^T P\mathbf{u}) + V_{\mathbf{x}}(A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + C\mathbf{f})\,.$$

Дифференциальное уравнение Гамильтона–Беллмана (45) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\mathbf{u}}\left\{\begin{aligned}&\mathbf{l}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \mathbf{l}_3^{\mathbf{T}}\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T N\mathbf{u} + \mathbf{u}^T P\mathbf{u}) + \\ &+ V_{\mathbf{x}}(A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + C\mathbf{f})\end{aligned}\right\} = 0\,, \qquad \text{(IV)}$$

где функция $V(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет граничному условию (55''):

$$V(t_1,\, \mathbf{x}) = \mathbf{l}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T R_1\mathbf{x}\,. \qquad \text{(V)}$$

Поскольку, по предположению, $P(t)$ – положительно определенная матрица, то минимум $H(t,\, \mathbf{x},\, V_{\mathbf{x}},\, \mathbf{u})$ по достигается в стационарной точке, где $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$.

$$\mathbf{u}^* = \arg\min_{\mathbf{u}} H(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = -P^{-1}[\mathbf{l}_3 + N^T\mathbf{x} + B^T V_{\mathbf{x}}^T]\,. \qquad \text{(VI)}$$

Подставляя теперь полученное выражение для $\mathbf{u}^*$ в (VI), находим окончательный вид основного дифференциального уравнения динамического программирования (в данном случае это будет дифференциальное уравнение Гамильтона–Якоби, так как $\mathbf{u}^*$ найдено из условия стационарности H):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t} + V_{\mathbf{x}}Ax - \frac{1}{2}V_{\mathbf{x}}BP^{-1}\mathbf{l}_3 - V_{\mathbf{x}}BP^{-1}N^T\mathbf{x} - \frac{1}{2}V_{\mathbf{x}}BP^{-1}B^T V_{\mathbf{x}}^T + \\ &+ V_{\mathbf{x}}C\mathbf{f} + \mathbf{l}_2^T\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{l}_3^T P^{-1}\mathbf{l}_3 - \mathbf{l}_3^T P^{-1}N^T\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{l}_3 P^{-1}B^T V_{\mathbf{x}}^T + \\ &+ \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T NP^{-1}N^T\mathbf{x} = 0.\end{aligned} \qquad \text{(VII)}$$

Доказано, что в линейных системах с квадратичным критерием качества при сделанных предположениях относительно матриц $Q(t)$, $P(t)$, $N(t)$, R_1 решение уравнения (VII) с краевым условием (V) существует и его можно искать в виде

$$V(t,\ \mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{T}} R(t)\mathbf{x} + \mathbf{q}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{x} + r(t)\,, \tag{VIII}$$

где $R(t)$ – симметричная матрица размерности $n \times n$; $\mathbf{q}(t)$ – n-мерный вектор; $r(t)$ – скаляр.

Частные производные функции $V(t,\ \mathbf{x})$, записанной в форме (VIII), имеют вид

$$\frac{\partial V(t,\ \mathbf{x})}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \dot{R}(t)\mathbf{x} + \dot{\mathbf{q}}^T(t)\mathbf{x} + \dot{r}(t)\,; \tag{IX}$$

$$V_{\mathbf{x}}^T(t,\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = R(t)\mathbf{x} + \mathbf{q}(t); \quad \frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^T R + \mathbf{q}^T\,. \tag{X}$$

Подставляя выражения (IX) и (X) в уравнение (VII) и учитывая, что:

1) при одновременном умножении произвольной матрицы M слева и справа на вектор $\mathbf{x}$ имеет место соотношение $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(M + M^T)\mathbf{x}$ (т.е. происходит выделение симметричной части $\frac{1}{2}(M + M^T)$ матрицы M);

2) скалярное произведение обладает свойством транспонируемости $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbf{x}^T[\dot{R} + R(A - BP^{-1}N^T) + (A - BP^{-1}N^T)^T R + Q - NP^{-1}N^T - \\
&- RBP^{-1}B^T R]\mathbf{x} + [\dot{\mathbf{q}}^T + \mathbf{q}^T(A - BP^{-1}N^T) - \mathbf{l}_3^T P^{-1}B^T R - \mathbf{q}^T BP^{-1}B^T R - \\
&- \mathbf{l}_3^T P^{-1}N^T + \mathbf{l}_2^T + (C\mathbf{f})^T R]\mathbf{x} + \dot{r} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T BP^{-1}B^T\mathbf{q} - \mathbf{l}_3^T P^{-1}B^T\mathbf{q} + \mathbf{q}^T C\mathbf{f} - \\
&- \frac{1}{2}\mathbf{l}_3^T P^{-1}\mathbf{l}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{XI}$$

Поскольку условие (XI) должно выполняться тождественно для любых значений $\mathbf{x}$ и поскольку при $t = t_1$ для любых значений $\mathbf{x}$ должно выполняться тождественно следующее соотношение [см. (V) и (VIII)]:

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T R(t_1)\mathbf{x} + \mathbf{q}^T(t_1)\mathbf{x} + r(t_1) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T R_1\mathbf{x} + \mathbf{l}_1^T x\,,$$

то для определения матрицы $R(t)$, вектора $q(t)$ и скаляра $r(t)$ получаем следующие уравнения и граничные условия:

1)

$$\dot R + R(A - BP^{-1}N^T) + (A - BP^{-1}N^T)^T R - RBP^{-1}B^T R + Q - \\ - NP^{-1}N^T = \dot R + RA + A^T R - (RB + N)P^{-1}(N^T + B^T R) + Q = 0; \tag{XII}$$

$$R(t_1) = R_1. \tag{XII'}$$

2)

$$\dot{\mathbf{q}}^T + \mathbf{q}^T(A - BP^{-1}N^T) - \mathbf{l}_3^T P^{-1}B^T R - \mathbf{q}^T BP^{-1}B^T R - \\ - \mathbf{l}_3^T P^{-1}N^T + \mathbf{l}_2^T + (C\mathbf{f})^T R = 0; \tag{XIII}$$

$$\mathbf{q}^T(t_1) = \mathbf{l}_1^T. \tag{XIII'}$$

3)

$$\dot r - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T BP^{-1}B^T\mathbf{q} - \mathbf{l}_3^T P^{-1}B^T\mathbf{q} + \mathbf{q}^T C\mathbf{f} - \frac{1}{2}\mathbf{l}_3^T P^{-1}\mathbf{l}_3 = 0; \tag{XIV}$$

$$r(t_1) = 0. \tag{XIV'}$$

Полученные уравнения следует интегрировать в обратном времени от $t = t_1$ к $t = t_0$.

Оптимальный закон управления с обратной связью имеет вид

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) = -P^{-1}(t)[B^T(t)R(t) + N^T(t))\mathbf{x} + B^T(t)\mathbf{q}(t) + \mathbf{l}_3(t)]. \tag{XV}$$

Решения некоторых других задач оптимального управления для линейных систем с квадратичным критерием качества приведены в табл. 3. В пп. 1 – 7 (строках 1 – 7) этой таблицы приведены постановка и решения задачи синтеза оптимального закона управления при свободных граничных условиях на правом конце траектории, а в п. 8 – постановка и решение задачи при заданных граничных условиях на правом конце. В пп. 1 – 6, 8 рассматриваются однородные линейные системы, в п. 7 – неоднородная линейная система. В п. 1 дано решение задачи синтеза для нестационарной линейной системы и нестационарного квадратичного критерия качества при фиксированном конечном интервале времени процесса управления, в п. 2 – для стационарной (независящей явно от t) системы и стационарного критерия качества при фиксированном конечном интервале времени процесса управления, в п. 3 – для стационарной системы и стационарного критерия качества на неограниченном интервале времени ($[0, \infty]$), в п. 4 – для нестационарной системы и нестационарного квадратичного критерия более общего вида, чем в пп. 1 – 3 (критерий содержит перекрестные члены типа $x^T N u$). В п. 5 приведено решение задачи, которая в определенном смысле эквивалентна задаче п. 4 (см. 5-й столбец таблицы), в п. 6 дано решение для оптимизации отклонения системы от заданного желаемого поведения, в п. 7 рассмотрен случай синтеза оптимального закона управления для неоднородной линейной системы, в п. 8 – синтез оптимального закона управления при заданных граничных условиях на правом конце и квадратичном критерии более общего вида. Некоторые из приведенных в табл. 3 решений (пп. 1 – 4, 6, 7) являются частными случаями рассмотренной выше задачи.

Контрольные вопросы

1 Принцип оптимальности динамического программирования.

2 Ослабленное необходимое условие.

Глава 6

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБОГО УПРАВЛЕНИЯ

6.1 Краткая формулировка задачи

При решении задач встречаются случаи, когда управление **u** входит в дифференциальные уравнения математической модели объекта линейно,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t) + R(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}\ , \tag{56}$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)^T, \quad \mathbf{x} \in X^n;$$
$$\mathbf{u} = (u_1,\, u_2,\, ...,\, u_m)^T, \quad \mathbf{u} \in U^m;$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)^T;$$

$$R = \{r_{ij}(t, \mathbf{x})\} \ (i = \overline{1, n}, \ \ j = \overline{1, m});$$
$$t \in [t_0, t_1],$$

а критерий качества имеет вид

$$J[\mathbf{u}, t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} [\boldsymbol{\gamma}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^T \mathbf{r}_0(\mathbf{x}, t)] dt, \tag{57}$$

где $\mathbf{r}_0 = (r_{01}, r_{02}, ..., r_{0m})^T$; $\mathbf{u}^T \mathbf{r}_0 = \sum_{j=1}^{m} r_0 u_j$.

Функция Гамильтона H для (56), (57) имеет вид

$$H = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \gamma_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} r_{ij} u_j = \\ = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \gamma_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij} \right) u_j. \tag{58}$$

Если U^m – m-мерный прямоугольник:

$$U^m = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)^T \,|\, a_1 \le u_1 \le b_1, \ a_2 \le u_2 \le b_2, \ ..., \ a_m \le u_m \le b_m\}$$
$$a_j < b_j \ (j = \overline{1, m})$$

(a_j, b_j могут зависеть от t), то в силу принципа максимума (см. п. 4.3) для минимизации $J[\mathbf{u}]$ оптимальное управление определяется из условия

$$\mathbf{u} = \arg\min_{\mathbf{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) \tag{59}$$

или

$$u_j = \begin{cases} a_j \ \ \text{при} \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij} > 0; \\ b_j \ \ \text{при} \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij} < 0. \end{cases} \tag{60}$$

При некоторых значениях **x** и λ функция H в (58) может оказаться независящей явно от какой-либо компоненты u_j на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ $\tau_2 - \tau_1 > 0$. В этом случае выполняется соотношение (рис. 9)

$$\Phi_j(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij}(\mathbf{x}, t) \equiv 0, \tag{61}$$

которое формально совпадает с условием:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij}(\mathbf{x}, t) \equiv 0 \tag{62}$$

на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$.

Отрезок $[\tau_1, \tau_2]$, на котором имеет место соотношение (61), называется участком *особого управления для компоненты* u_j, а оптимальное управление $u_j^*(t)$ на таком участке существует) называется *особым оптимальным управлением*. Такое название объясняется тем, что поскольку гамильтониан H от u_j не зависит, оптимальное управление не может быть найдено непосредственно с помощью принципа максимума. Более того, в случае выполнения условия (61) ни необходимые условия классического вариационного исчисления, ни необходимые условия динамического программирования (см. п. 5.2) не могут служить для непосредственного вычисления компоненты u_j^*, хотя все эти условия формально не выполняются.

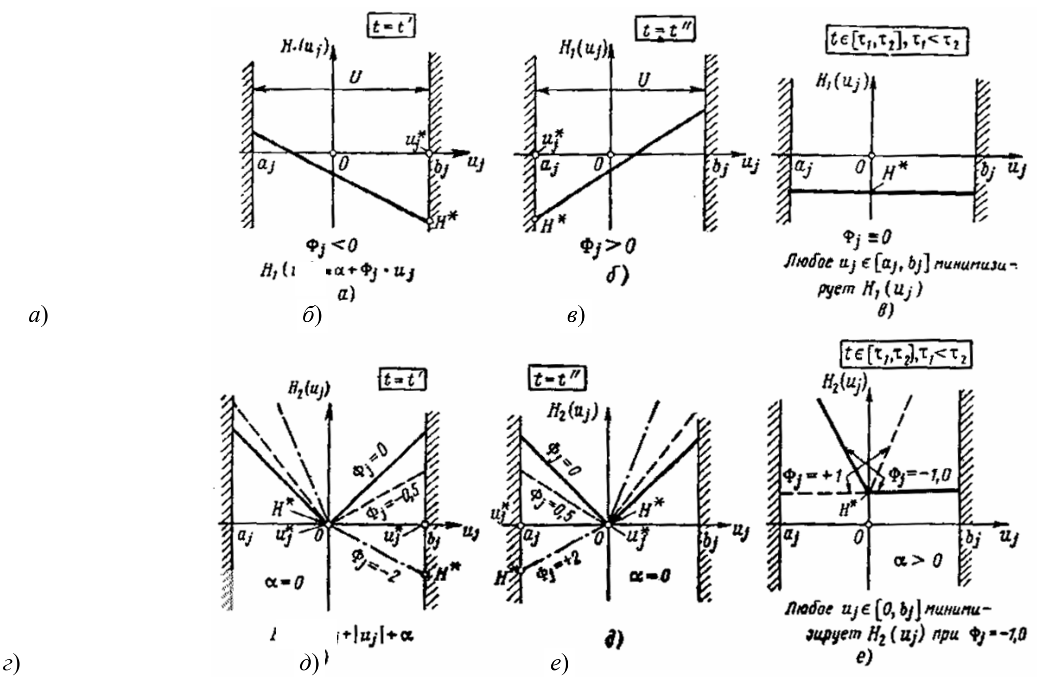


Рис. 9 Поведение гамильтонианов $H_1(u_j) = \alpha + \Phi_j u_j$ **и** $H_2(u_j) = \Phi_j u_j + |u_j| + \alpha$ **в зависимости от** Φ_j**:**

а, *б*, *г*, *д* – строгий минимум (регулярное управление);

в, *е* – нестрогий минимум (особое управление)

Так, например, если гамильтониан H от управления u_j не зависит, то H достигает максимума при любом u_j.

Условия (61) не могут установить различие между управлениями u_j, дающими минимум или максимум функционалу $J[\mathbf{u}]$. На участке особого управления выполняется соотношение

$$\det\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j}\right\} \equiv 0 \quad (i, j = \overline{1, m}) \text{ на } [\tau_1, \tau_2], \tag{62}$$

показывающее, что условие Гильберта невырожденности вариационной задачи нарушено. Задачи, для которых имеет место условие, в классическом вариационном исчислении называются *вырожденными*. Если множество U^m – замкнуто и ограничено, то в вырожденных задачах может наблюдаться два режима оптимального управления: *регулярный*, когда **u** определяется из принципа максимума [как, например, (60)], и *особый*, когда **u** не может быть найдено из принципа максимума [как, например, при выполнении (61)] и когда требуется особая процедура для его отыскания.

6.2 Процедура нахождения особого управления

Общая теория вырожденных вариационных задач разработана недостаточно. Наиболее полно исследован случай особого управления по одной компоненте u_j. В этом случае решение можно получить следующим образом.

Условие (62) показывает, что режим особого управления на участке $[\tau_1, \tau_2]$ (участке особого управления) имеет место, если

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i r_{ij}(t, \mathbf{x}) \equiv 0 .$$

Последовательное дифференцирование этого соотношения по t приводит к соотношениям

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right) \equiv 0 \text{ на } [\tau_1, \tau_2] \ (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{64}$$

Можно показать, что первое ненулевое значение величины

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right]$$

возможно лишь при четном k. Обозначим его $k = k_{\min} = 2p$. Число p называется *порядком вырожденности* (сингулярности) вариационной задачи (оптимального управления).

При $k = 2p$ управление u_j войдет в $\frac{d}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)$ явным образом. Теперь величину особого оптимального управления u_j^* можно найти из условия

$$\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right) = 0 \text{ на } [\tau_1, \tau_2], \qquad (65)$$

которое линейно по u_j (в силу линейности по **u** системы (56)). Уравнения сопряженной системы в данном случае имеют вид

$$\frac{d\lambda_s}{dt} = -\sum_{i=0}^{n}\lambda_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_s}\right)u_j \ . \qquad (66)$$

Считая, что все остальные компоненты вектора **u** регулярны, т.е. определяются соотношениями типа (60), условие (65) можно записать в виде

$$\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right) = M_1(\mathbf{x}, \lambda, t) + u_j M_2(\mathbf{x}, \lambda, t) = 0\,, \qquad (67)$$

откуда и может быть найдено особое управление для компонент

$$u_j = -\frac{M_1(\mathbf{x}, \lambda, t)}{M_2(\mathbf{x}, \lambda, t)}\,.$$

6.3 Необходимое условие оптимальности особого управления

Для минимума критерия качества $J[\mathbf{u}]$ на особом управлении u_j^* в задаче (56)–(57) должно выполняться следующее необходимое условие:

$$(-1)^p \frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right] \geq 0, \quad p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \qquad (68)$$

При максимизации критерия качества знак в неравенстве (68) следует заменить на обратный.

Отметим, что при $p = 0$, т.е. для невырожденных задач, это условие переходит в условие $\partial^2 H / \partial u_j^2 \geq 0$ (при $m = 1$) и, таким образом, (68) является аналогом условия Лежандра–Клебша для особых (вырожденных) экстремалей (для одномерного управления u_j). При $p = 1$ условие (68) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right] \le 0 .$$

6.4 Необходимые условия в точках сопряжения особого и регулярного управлений

Результаты, полученные в пп. 6.2 и 6.3, применимы, если значения оптимального особого управления $u_j^*(t)$ являются внутренними точками множества U^m на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$. Необходимые условия для перехода с регулярного оптимального управления на особое оптимальное в случае, когда U^m – m-мерный прямоугольник $a_j(t) \le u_j(t) \le b_j(t)$, а τ_1 – момент времени начала перехода, определяются следующими неравенствами:

$$[M_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) + b_j(t) M_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t)]_{\tau_1} < 0 \qquad (69)$$

(необходимое условие для возможности перехода регулярного управления с верхней границы $u_j(t) = b_j(t)$ на особое оптимальное управление) и

$$[M_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) + a_j(t) M_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t)]_{\tau_1} > 0 \qquad (70)$$

(необходимое условие для возможности перехода регулярного управления) с верхней границы $u_j(t) = b_j(t)$ на особое оптимальное управление).

Требование совместного выполнения условий (69) и (70) может быть представлено в виде неравенства

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right]_{\tau_1} \le 0 . \qquad (71)$$

Это условие является необходимым для возможности перехода с обеих границ регулярного управления на особое. Необходимое условие (71) легче проверить, так как оно не связано с вычислением $M_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t)$. Однако следует иметь в виду, что оно является более слабым, чем условия (69) и (70), поскольку последние из него не вытекают.

Контрольные вопросы

1 Что такое особое управление и когда оно возникает?
2 Процедура нахождения особого управления.
3 Необходимое условие оптимальности особого управления.

4 Необходимые условия в точках сопряжения особого и регулярного управлений.

Глава 7

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИМИ ТОЛЬКО ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ x

В технических приложениях имеется ряд задач, когда при формировании оптимальной траектории необходимо учитывать ограничения на область допустимых значений фазовых координат. Например, при наборе самолетом высоты или при рассмотрении траекторий спуска

$$q = \frac{\boldsymbol{\rho}(h(t))v^2(t)}{2} \le q_{\text{зад}},$$

т.е.

$$q(h(t), v(t), t) - q_{\text{зад}} \le 0 .$$

При движении ЛА типичными также являются ограничения на допустимые значения высоты полета h и массы m ЛА:

$$h(t) \ge 0; \quad m(t) \ge m.$$

В общем случае ограничения указанного типа можно записать в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) \ge 0 , \tag{72}$$

где

$$\boldsymbol{\varphi} = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{\mu_1})^T; \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T .$$

7.1 Краткая формулировка задачи

Пусть эволюция рассматриваемой системы S описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) , \tag{73}$$

где

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., x_n)^T; \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T; \ \mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)^T;$$

$\mathbf{u} \in U^m$; U^m – некоторая замкнутая и ограниченная область в пространстве R^m .

З а д а н ы :

- начальное значение

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 , \tag{74}$$

- интервал времени $[t_0, t_1]$,
- критерий качества

$$J[\mathbf{u}] = \Phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt . \tag{75}$$

Необходимо найти такое кусочно-непрерывное управление $\mathbf{u}(t) \in U^m$, которое переводит начальное условие $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в некоторую конечную точку $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$, удовлетворяющую условиям

$$\mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0, \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_l)^T , \tag{76}$$

$$l < n + 1,$$

и минимизирует функционал $J[\mathbf{u}]$ на траекториях, удовлетворяющих условиям

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) \geq 0, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{\mu_1})^T . \tag{76'}$$

Здесь значения функции ϕ_i не зависят явно от управления $\mathbf{u}$. Предполагается, что t, f_0, ϕ обладают непрерывными производными до второго порядка.

7.2 Необходимые условия оптимальности

В постановке п. 7.1 вся оптимальная траектория полета в общем случае может состоять из двух типов участков: участков, целиком лежащих внутри допустимой области, и участков, лежащих на границе допустимой области (рис. 10). Количество таких участков и их чередование зависит от конкретной задачи и граничных условий. На участках, целиком расположенных внутри допустимой области, условия (72) выполняются в виде строгих неравенств

$$\phi(t, \mathbf{x}) > 0 .$$

Для этих участков справедлив принцип максимума, сформулированный в п. 4.3.

На участках, лежащих на границе допустимой области, одно или несколько условий типа (72) выполняются в виде равенств. Эти участки называются граничными, для них принцип максимума п. 4.3 уже не справедлив. Наличием этих участков данная задача и отличается от задач п. 4.1.

Известно несколько эквивалентных подходов к получению необходимых условий оптимальности для участков, расположенных на границе $\phi(t, \mathbf{x}) = 0$. Будучи эквивалентными, эти подходы ведут к различным вычислительным процедурам получения решения.

а)

в)

д)

ж)

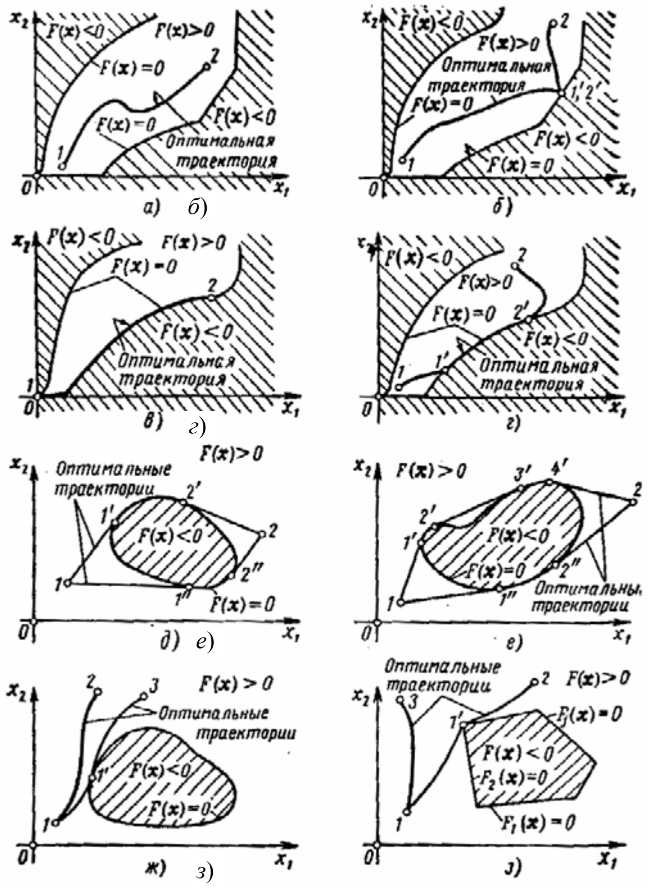


Рис. 10 Типы возможных оптимальных траекторий в задачах с ограничениями на фазовые координаты:

а – г – случаи, когда допустимые траектории располагаются внутри некоторой области (не обязательно замкнутой); *а* – траектория, целиком лежащая внутри допустимой области; *б* – траектория, имеющая с границей области одну общую точку (типа отражения от границы); *в* – траектория, целиком лежащая на границе; *г* – траектория, частично расположенная на границе;

д – з – случаи, когда допустимые траектории располагаются вне некоторой области; *д* – случай двух траекторий, доставляющих относительный минимум в задаче о кратчайшем пути на плоскости; *е* – случай невыпуклой запрещенной области; траектории с несколькими участками входа и схода;

ж – *1–2* – траектория, не имеющая общих точек с границей; *1–3* – траектория, имеющая одну общую точку (касание) с границей; *з* – случай негладкой границы допустимой области; *1* – начальная точка траектории; *2* – конечная точка траектории; *1′* – точка входа на границу; *2′* – точка схода с границы

Рассмотрим случай одного скалярного ограничения вида

$$\phi_i(t, \mathbf{x}) \geq 0 .$$

7.3 Первый тип необходимых условий оптимальности для граничных участков траектории

Для простоты рассматривается случай, когда лишь одно из ограничений типа (72) выполняется в виде равенства (например, ограничение ϕ_1). Пусть это ограничение

$$\phi_1(t, \mathbf{x}) = 0 \tag{77}$$

таково, что полная производная по времени

$$\frac{d\phi_1(t, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{78}$$

содержит управление **u** явно.

Необходимое и достаточное условие того, что (77) имеет место на некотором ненулевом отрезке $[t_1', t_2']$, водится к уравнению

$$\dot{\phi}_1 = \frac{d\phi_1(t, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{\phi}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \tag{79}$$

Составляется гамильтониан H_1 для граничных участков

$$H_1 = H + \beta \dot{\phi}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{80}$$

где

$$H = \lambda_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i \lambda_i ;$$

$\beta = 0$ на участках, где $\phi_1 > 0$; $\beta \neq 0$ на участках, где $\phi_1 = 0$.

Теперь необходимые условия для граничного участка совпадают с необходимыми условиями п. 8.3 с заменой в условиях (95), (97), (101) функции $\aleph$ на $\dot{\phi}_1$. Отличие этой задачи от задачи п. 8.2 заключается в условиях, накладываемых на переменные в точках выхода траектории на границу и схода с нее. В этих точках сопряженные переменные $\lambda_i(t)$ могут претерпевать разрывы. Если имеется всего два участка, то сопряженные переменные непрерывны. При этом условие $\phi_1(t, \mathbf{x}) = 0$ может толковаться либо как связь, наложенная на начальные значения $(t_0, \mathbf{x}_0)$, либо как связь, наложенная конечные значения $(t_1, \mathbf{x}_1)$, в зависимости от порядка следования участков с $\phi_1 > 0$ и $\phi_1 = 0$.

При трех участках, если сначала идет граничный участок, затем участок с $\phi_1 > 0$ и далее снова граничный участок, множители тоже непрерывны вдоль всей траектории. При всех других порядках следования участков, если последних больше трех, сопряженные переменные имеют разрыв типа скачка. Этот скачок в значениях $\lambda_i(t)$ можно осуществить на любом конце граничного участка, при этом на другом конце множители уже могут быть выбраны непрерывными (выбор конца, на котором происходит скачок, не имеет значения). Если этот конец выбран в момент времени t_2', то условия скачка имеют вид

$$\boldsymbol{\lambda}^{+}(t_2) = \boldsymbol{\lambda}^{-}(t_2) - C\frac{\partial\phi_1(t^2)}{\partial\mathbf{x}}; \qquad (81)$$

$$H^{+}(t_2') = H^{-1}(t_2') + C\frac{\partial\phi_1(t_2')}{\partial t}; \qquad (82)$$

$$\phi_1^{-}(t_2') = 0, \qquad (83)$$

где C – произвольная постоянная; индексы «+» и «–» обозначают пределы справа и слева, соответственно.

Если условия (81) подставить в (82), то коэффициент при C будет $\dot{\phi}_1$ и, таким образом, условие (82) не зависит от C, а содержит только значения $\lambda^{-}(t_2')$. После указанной подстановки уравнение (82) может быть использовано в качестве эквивалентного необходимого условия.

В данной задаче решение $\mathbf{x}(t), \lambda(t)$ не зависит от λ_{i0}, C как от параметров

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \lambda_{i0}, C); \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t, \lambda_{i0}, C).$$

В каждой точке разрыва непрерывности сопряженных переменных должна добавляться новая константа C. Величина C не может быть определена заранее из необходимых условий и является дополнительным параметром, определяющим точку схода. Поскольку число граничных участков заранее неизвестно, задача становится проблемой с переменным числом параметров, что существенно усложняет ее практическое решение даже с помощью ЭВМ.

Пример 3. Пусть имеются три участка оптимальной траектории, следующие в таком порядке:

1 участок – траектория в открытой области, $\phi_1 > 0$;

2 участок – граничная траектория, $\phi_1 = 0$;

3 участок – снова траектория в открытой области, $\phi_1 > 0$.

Необходимые условия в конечной точке дают (n + 1) уравнение относительно (n + 2) неизвестных λ_{i0}, t_1, C. Условия (82), (83) и

$$\beta(t_2' + 0) = 0 \qquad (84)$$

определяют точку t_2' и дают дополнительное уравнение относительно неизвестных λ_{i0}, t_1, C. Задача, таким образом, свелась к нахождению решения (n + 2) уравнений с (n + 2) неизвестными.

Если участков больше, чем три, задача сводится к многоточечной краевой проблеме.

7.4 Второй тип необходимых условий для оптимальности управления на граничных участках

Пусть $t_{\text{вх}}$ – момент входа траектории на границу допустимой области, $t_{\text{сх}}$ – момент схода с этой границы. Гамильтониан H_2 для граничных участков может быть представлен в следующем виде:

$$H_2 = \lambda_0 f_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \beta_1 \phi_1 + \beta_2 \dot{\phi}_1 = H + \beta_1 \phi_1 + \beta_2 \dot{\phi}_1 ,$$

где $\beta_1 = \beta_2 = 0,$ если $\phi_1 > 0$; $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$, если $\phi_1 = 0$, а $\dot{\phi}_1$ определяется правой частью соотношения (78).

На граничном участке (т.е. при $t_{\text{вх}} \leq t \leq t_{\text{сх}}$) вдоль оптимальной траектории выполняются условия

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial H_2}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^t, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left(\frac{\partial H_2}{\partial \mathbf{x}} \right)^T, \quad \phi_1 = 0, \dot{\phi}_1 = 0 . \tag{85}$$

Оптимальное управление на граничном участке определяется из условия минимума H по $\mathbf{u} \in U_1^m(t, \mathbf{x})$, где $U_1^m(t, \mathbf{x})$ – та часть значений $\mathbf{u}$ из области U^m, которая удовлетворяет условию $\phi_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$.

Если минимум H по $\mathbf{u}$ в области $U_1^m(t, \mathbf{x})$ достигается в ее внутренней точке, то

$$\frac{\partial H_2}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\dot{\phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) = 0, \quad \phi_1(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \dot{\phi}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 .$$

Значения вектора $\boldsymbol{\lambda}$ и гамильтониана H_2 непрерывны в точке входа на границу допустимой области:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_{\text{вх}} + 0) = \boldsymbol{\lambda}(t_{\text{вх}} - 0); \quad H_2(t_{\text{вх}} + 0) = H_2(t_{\text{вх}} - 0) .$$

Остальные недостающие граничные условия могут быть найдены из общих условий трансверсальности (см. п. 4.3). В частности, из этих условий следует, что при $t = t_1$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \Bigg|_{t=t_1}; \quad L = \Phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} + H_2(t_1) = 0 \text{ (если } t_1 \text{ – не задано).}$$

Кроме того, к этим условиям надо добавить заданное граничное условие (76):

$$\mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0 .$$

Контрольные вопросы

1 Необходимые условия оптимальности.

2 Первый тип необходимых условий оптимальности для граничных участков траектории.

3 Второй тип необходимых условий для оптимальности управления на граничных участках.

Глава 8

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИМИ ОДНОВРЕМЕННО ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ x И УПРАВЛЕНИЕ u

При рассмотрении технических систем часто встречаются задачи, в которых допустимые значения управляющих функций не должны превосходить пределов, зависящих от текущего состояния системы.

Ограничения рассматриваемого типа можно записать в виде

$$\aleph(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \le 0\,, \tag{86}$$

где $\aleph$ явным образом зависит от состояния **x** и управления **u**. Принцип максимума, сформулированный в п. 4.3, справедлив лишь для неравенств типа

$$\aleph_i(t, \mathbf{u}) \le 0\,, \tag{87}$$

т.е. не содержащих фазовых координат **x** явно.

Ниже приводится формулировка принципа максимума, пригодная для ограничений типа (86).

8.1 Краткая формулировка задачи

Пусть эволюция системы S описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,, \tag{88}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – n-мерный вектор состояния; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$ – m-мерный вектор управления.

На значения управляющего вектора **u** наложены ограничения

$$\aleph(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \ge 0\,, \tag{89}$$

где $\aleph = (\aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_{\nu_1})^T$ – ν_1-мерный вектор, причем число связей, одновременно удовлетворяющихся в виде равенств, не превосходит *m*.

Область U^m допустимых значений **u** зависит от *t*, **x**: $U^m = U^m(t, \mathbf{x})$ и задается уравнением (89). Предполагается, что вектор **u** явно входит в уравнение (89).

В начальный момент времени $t = t_0$ задано состояние системы

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \tag{90}$$

Необходимо перевести систему *S* из состояния $\mathbf{x}_0$ в некоторое конечное состояние, определяемое соотношениями

$$\mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0 , \tag{91}$$

где $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_{l_2})$, $l_2 \le n+1$.

Требуется найти такой допустимый кусочно-непрерывный вектор **u**(*t*), удовлетворяющий (89), что функционал

$$J[\mathbf{u}] = \Phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \tag{92}$$

принимает минимальное значение на решениях системы (88).

Решения **x**(*t*) системы (88) предполагаются непрерывными и обладающими, по крайней мере, абсолютно непрерывными производными. Точки t_α, где одна или более компонент вектора **u** терпят разрыв первого рода, называются угловыми точками. Точки t_s, в которых изменяется знак «>» на «=» (или наоборот) в одном или нескольких ограничениях (89), называются точками соединения.

8.2 Типы граничных условий

Задача, в которой $\Phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) \equiv 0$, а граничные условия (97) имеют вид

$$x_i(t_1) - x_{i1} = 0 \quad (i = \overline{1, l_2 \le n}) \tag{93}$$

или

$$x_i(t_1) - x_{i1} = 0 \quad (i = \overline{1, l_2 - 1 \le n}) , \tag{94}$$

$$t_1 - t_{зад} = 0 ,$$

где x_{i1}, $t_{зад}$ – заданные числа, называется иногда *простейшей*.

При $l_2 = n$ условия (93) приводят к задаче с закрепленным правым концом и свободным временем. При $l_2 < n$ условия (93) приводят к задаче с частично свободным правым концом и свободным временем t_1. Условия типа (94) относятся к задаче с закрепленным временем $t_1 = t_{зад}$ и частично свободным правым концом траектории.

8.3 Необходимые условия оптимальности

Если $\mathbf{u}^*(t) \in U^m(\mathbf{x}, t)$ [U^m определяется условиями (89)] является управлением, минимизирующим функционал J[**u**], то найдутся такие постоянные числа $\lambda_0 = 1, \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_{l_2})^T$, не все равные нулю, и такие одновременно не обращающиеся в нуль переменные векторы $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t), ..., \lambda_n(t))^T$ (непрерывный на $[t_0, t_1]$) и $\boldsymbol{\beta}(t) = (\beta_1(t), ..., \beta_{v_1}(t))^T$ (непрерывный на $[t_0, t_1]$ всюду, за исключением, быть может, точек разрыва управления **u**(t), где, однако, у него существуют единственные право- и левосторонние пределы), что на $[t_0, t_1]$ имеют место соотношения

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^T - \left(\frac{\partial \aleph}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{\beta} = -\left(\frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{x}}\right)^T; \tag{95}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T; \tag{96}$$

$$\beta_j \aleph_j = 0 \quad (j = \overline{1, v_1}), \tag{97}$$

где

$$\boldsymbol{\beta} \le 0. \tag{98}$$

Для всех фиксированных $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ и **u**, удовлетворяющих (89), выполняется принцип максимума (см. п. 4.3)

$$H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}^*) \le H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}), \tag{99}$$

т.е.

$$\min_{u \in U^m} H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}^*),$$

где гамильтониан H определяется, как и в п. 4.2, выражением

$$H = \lambda_0 f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}, \tag{100}$$

а

$$H_1 = H + \boldsymbol{\beta}^T \aleph. \tag{101}$$

Если минимум H достигается во внутренней точке области U^m, то

$$\frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} + \left(\frac{\partial \aleph}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \boldsymbol{\beta}. \tag{102}$$

В угловых точках t_α выполняются следующие условия:

а) сопряженный вектор $\boldsymbol{\lambda}(t)$ непрерывен, т.е.

$$\boldsymbol{\lambda}(t_\alpha + 0) = \boldsymbol{\lambda}(t_\alpha - 0); \tag{103}$$

б) функция H непрерывна, т.е.

$$H(t_\alpha, \mathbf{x}(t_\alpha), \boldsymbol{\lambda}(t_\alpha), \mathbf{u}^*(t_\alpha + 0)) = H(t_\alpha, \mathbf{x}(t_\alpha), \boldsymbol{\lambda}(t_\alpha), \mathbf{u}^*(t_\alpha - 0)) \tag{104}$$

(условие (99) соблюдается со знаком равенства);

в) уравнения (97) и (102) сохраняются.

Условия а) – в) являются аналогом условий Вейерштрасса–Эрдмана.

В конечной точке $(t_1, \mathbf{x}_1)$ для любых значений dt_1, $d\mathbf{x}(t_1)$ выполняются условия трансверсальности

$$\begin{gathered}
\left[f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_1}\right]_{t=t_1} dt_1 + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}\right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}\right]^T_{t=t_1} d\mathbf{x}(t_1) = 0; \\
\mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0.
\end{gathered} \tag{105}$$

Из (105) следует, что

$$H(t_1) = (f_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f})_{t_1} = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t_1} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_1}\right]_{t_1}; \tag{106}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}\right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{\mu}\right]_{t_1}. \tag{107}$$

Для простейшей задачи условия (106) и (107) упрощаются. Так, например, в случае (93) они имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&H(t_1) = 0; \\
&\lambda_i(t_1) = \mu_i (i = \overline{1, l_2}); \\
&\lambda_i(t_1) = 0 (i = \overline{l_2 + 1, n}).
\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

8.4 Аналог необходимого условия Клебша

Обозначим через $\overline{\aleph}$ те компоненты вектора ограничений $\aleph$, которые в каждой точке минимизирующей кривой $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ удовлетворяются в виде равенств. Пусть $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ – соответствующий им вектор множителей. Тогда

$$\overline{H}_1 = H + \overline{\boldsymbol{\beta}}^T \overline{\aleph} \tag{109}$$

и для внутренних точек области U^m на минимизирующем управлении $\mathbf{u}^*(t)$ имеет место неравенство

$$\boldsymbol{\eta}^T \frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial \mathbf{u}^2} \boldsymbol{\eta} \geq 0 \tag{110}$$

для всех $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m)^T \neq 0$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial \overline{\aleph}}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\eta} = 0\,. \tag{111}$$

Здесь

$$\frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial \mathbf{u}^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial u_1^2}, & \dots, & \dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial u_1 \partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial u_m \partial u_1}, & \dots, & \dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial u_m^2} \end{bmatrix}.$$

Условия (110) и (111) эквивалентны требованию положительности корней s характеристического уравнения

$$D(s) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial \mathbf{u}^2} - sE, & \left(\dfrac{\partial \overline{\aleph}}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \\ \dfrac{\partial \overline{\aleph}}{\partial \mathbf{u}} & 0 \end{bmatrix} = 0\,. \tag{112}$$

Неравенство нулю определителя матрицы

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial \mathbf{u}^2} & \left(\dfrac{\partial \overline{\aleph}}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \\ \dfrac{\partial \overline{\aleph}}{\partial \mathbf{u}} & 0 \end{bmatrix} \tag{113}$$

во всех точках $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ оптимальной траектории эквивалентно условию Гильберта (см. п. 9.4) и в данном случае означает непрерывность управления $\mathbf{u}^*(t)$. Если указанный определитель отличен от нуля в каждой точке экстремали, то задача называется *невырожденной*.

С л е д с т в и я . 1) Условия для открытого ядра области $U^m(t,\mathbf{x})$ (условия (95) – (99)) означают, что во всех точках траектории, в которых минимум H по $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\in U^m(\mathbf{x},t)$ достигается при выполнении строгих неравенств

$$\aleph_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u})>0 \quad (i=\overline{1,v}) \tag{114}$$

(т.е. в так называемом открытом ядре области $U^m(\mathbf{x},t)$) справедлив принцип максимума (см. п. 4.3), не учитывающий наличие связей (89). Здесь все $\beta_i=0$ $(i=\overline{1,v_1})$ и дифференциальные уравнения (95)–(96) при условии (99), дающем $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})$ имеют единственное решение:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(t,\, t_0,\, \mathbf{x}_0,\, \lambda_{i0});\\ \lambda_i &= \lambda_i(t,\, t_0,\, \mathbf{x}_0,\, \lambda_{i0}).\end{aligned}\right\} \tag{115}$$

В этом случае

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\, t_0,\, \mathbf{x}_0,\, \lambda_{i0}) \tag{116}$$

и решение задачи оптимизации погружено в (2n + 1) параметрическое семейство решений, причем решение (115) зависит от параметров $(t,\, t_0,\, x_{i0},\, \lambda_{i0})$ по крайней мере непрерывно.

Если же на траектории нет точек разрыва функции $\mathbf{u}(t)$, то решение, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемо по $(t,\, t_0,\, x_{i0},\, \lambda_{i0})$.

2) Если $\aleph_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$ не зависит явно от $\mathbf{x}$, то условия (95), (99) эквивалентны принципу максимума п. 4.3, так как в этом случае $U^m(\mathbf{x},t)$ зависит лишь от t: $U^m=U^m(t)$.

3) Условия для границы области $U^m(\mathbf{x},t)$ находятся следующим образом. Если при определении минимума H по $\mathbf{u}$ часть компонент вектора $\aleph$ удовлетворяются в виде равенств, то недостающие множители β_j могут быть найдены из условий (102). Если минимум H по $\mathbf{u}$ достигается во внутренней точке области U^m, то управление u_j и множители β_j находятся из условий (102) и тех из (89), которые выполняются в виде равенств

$$\begin{gathered}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}+\left(\frac{\partial \overline{\aleph}}{\partial \mathbf{u}}\right)^T\tilde{\boldsymbol{\beta}}=0;\\ \overline{\aleph}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})=0.\end{gathered} \tag{117}$$

Из (117) находятся $\mathbf{u}$ и $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$. При этом $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})$ непрерывны в точке соединения, если только в ней нет разрыва в функции $\mathbf{u}(t)$.

Контрольные вопросы

1 Типы граничных условий.
2 Необходимые условия оптимальности.
3 Аналог необходимого условия Клебша.

Глава 9

ЭЛЕМЕНТЫ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Задачи, в которых уравнения движения не приведены к форме Коши (т.е. не записаны в виде дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных)*, а управляющие функции $\mathbf{u}(t)$ явно не введены (и по каким-либо причинам такое приведение невозможно или нежелательно), можно решать методами классического вариационного исчисления.

Отметим, что с точки зрения вычислений всегда желательно привести систему уравнений к форме Коши, так как именно для такой системы разработаны эффективные алгоритмы численного интегрирования.

9.1 Задачи Больца, Майера, Лагранжа

Задача Больца. Одна из наиболее общих формулировок для задач с однократными интегралами и дополнительными условиями заключается в следующем.

Пусть класс траекторий определяется:

1) кривыми $\mathbf{x}(t)$ с координатами $x_i(t)$ $(i=\overline{1, n})$, $t_0 \le t \le t_1$;
2) параметрами a_j $(j=\overline{1, r})$.

Параметры a_j можно рассматривать как некоторые постоянные координаты кривой C: $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{a})^Y$ в $(n + r)$-мерном пространстве, $z = (x_1, x_2, ..., x_n, a_1, ..., a_r)^T$.

Пусть кривые $(\mathbf{x}(t), \mathbf{a})$ удовлетворяют уравнениям движения (или уравнениям связей, вообще говоря, неинтегрируемым) вида

$$F_j = (t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) = 0 \quad (j = \overline{1, m < n}) \tag{118}$$

и условиям

$$I_k = \Phi_k(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}) + \int_{t_0}^{t_1} f_k(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a})dt = 0 \quad (k = \overline{1, \rho}), \tag{119}$$

где

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)^T .$$

Необходимо найти кривую из указанного класса траекторий, которая минимизирует функционал

$$J = \Phi(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{a}) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a})dt \,. \tag{120}$$

Задача Майера. Эта задача формально получается из задачи Больца при $f \equiv 0,\ f_k \equiv 0\ (k = \overline{1, \rho})$. В этом случае краевые условия (119) становятся общими граничными условиями, число которых должно быть $\rho = 2n + r + 2$. Если фиксирован вектор параметров **a**, то число степеней свободы σ системы дифференциальных уравнений (118), равное разности между числом зависимых переменных и числом независимых дифференциальных уравнений, для задачи Майера равно: $\sigma = n - m$.

Задача Лагранжа. Эта задача вытекает из задачи Больца при $\Phi \equiv 0,\ f_k \equiv 0,\ k = \overline{1, \rho}$.

Виды связей и граничных условий. Связи вида (119) при $\Phi_k = \Phi_k(\mathbf{a})$, т.е. при $\int_{t_0}^{t_t} f_k(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a})dt = -\Phi_k(\mathbf{a})$, где все или часть компонент вектора **a** фиксирована, называются *изопериметрическими*. Если $f_k \equiv 0$, то связи типа (119) задают подвижные граничные условия. Если связи типа (119) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Phi_{k_1} \equiv x_{k_1}(t_0) - x_{k_1 0} = 0\ \ (k_1 = \overline{1, n});\\
&\Phi_{k_2} \equiv x_{k_2}(t_1) - x_{k_2 1} = 0\ \ (k_2 = \overline{1, n});\\
&\Phi_{2n+1} \equiv t_0 - t_{00} = 0,\ \Phi_{2n+2} \equiv t_1 - t_{10},
\end{aligned}$$

где $x_{k_1 0}, ..., t_{10}$ – заданные числа, то граничные условия называются *закрепленными*.

Если $k_1 = \overline{1, n};\ k_2 = \overline{1, n^1 < n};\ t_0 - t_{00} = 0;\ t_1 - t_{10} = 0$, то n^1 концов закреплено, а остальные условия называются свободными граничными условиями.

Если граничные условия $\Phi_k(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = 0$ при $(f_k = 0,\ k = \overline{1, \rho})$ можно разбить на две группы $\Phi_{k_1}(t_0, \mathbf{x}_0) = 0$; $\Phi_{k_2}(t_1, \mathbf{x}_1) = 0$; $k_1 = \overline{1, \rho_1},\ k_2 = \rho_1 + 1, ..., \rho,\ \rho_1 < n$ и если $\Phi \equiv q(t_1, \mathbf{x}_1) - h(t_0, \mathbf{x}_0)$, то задача называется задачей с *разделенными условиями* для концов.

Общие условия (119) называются *смешанными* граничными условиями.

9.2 Первое необходимое условие экстремума функционала в задаче Больца

Первое необходимое условие экстремума состоит из:

- правила множителей Лагранжа;
- уравнений Эйлера–Лагранжа;
- условий Эрдмана–Вейерштрасса;
- условий трансверсальности.

Пусть минимизирующая кривая *C*: $\{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ \mathbf{a}\}$ допускает в любой точке слабые (малые как по $\mathbf{x}(t)$, так и по $\dot{\mathbf{x}}(t)$) вариации $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t),\ \delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$ по любым совместимым со связями (118) направлениям в пространстве $X^n, \mathbf{x} \in X^n$ и функции f, f_k, Φ, Φ_k обладают непрерывными производными до третьего порядка. Тогда необходимые условия экстремума формулируются следующим образом.

Правило множителей Лагранжа: существуют функции μ_0, μ_k, $\lambda_j(t)$ и функции

$$F = \boldsymbol{\mu}_0 f + \sum_{k=1}^{\rho} \boldsymbol{\mu}_k f_k + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\lambda}_j(t) F_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}); \qquad (121)$$

$$L = \boldsymbol{\mu}_0 \Phi(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{\rho} \boldsymbol{\mu}_k \Phi_k(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}) \qquad (122)$$

такие, что множители $\boldsymbol{\mu}_0 \geq 0$, $\boldsymbol{\mu}_k$ – постоянные и решение исходной задачи на условный экстремум лежит среди решений задачи на безусловный экстремум для вспомогательного функционала $\bar{J} = L + \int_{t_0}^{t_1} F dt$.

Всегда можно считать $\boldsymbol{\mu}_0 = 1$, за исключением особых (анормальных) случаев.

Уравнения Эйлера–Лагранжа. Между угловыми точками (см. 126) минимизирующей кривой: C: $\{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$ выполняются уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i F_{\dot{x}_i}\right) = F_t; \qquad (123)$$

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \qquad (124)$$

где

$$F_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}; \quad F_{\dot{x}_i} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}; \quad F_t = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

З а м е ч а н и е. Уравнение (123) является следствием остальных (при условии, что все $x_i(t)$ обладают вторыми производными) и для функций F, не содержащих явно t, приводит к первому интегралу.

$$F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} = C \qquad (125)$$

в силу (127), (128), непрерывному при переходе через угловую точку.

Решения $\mathbf{x}$(t) уравнения Эйлера–Лагранжа называются экстремалями независимо от того, являются ли они минимизирующими, максимизирующими или седловыми кривыми для функционала J со связями (118), (119).

Условия Эрдмана–Вейерштрасса. Величины $F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i F_{\dot{x}_i}$ и $F_{\dot{x}_i}$ $(i = \overline{1, n})$ непрерывны вдоль кривой C: $\{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$. В частности, если при $t = t'$ кривая C имеет угловую точку, т.е. хотя бы по одной компоненте $x_i(t)$ имеет место разрыв (первого рода) в производной:

$$\dot{x}_i^- = \left.\frac{dx_i(t)}{dt}\right|_{t=t'-0} \ne \left.\frac{dx_i(t)}{dt}\right|_{t=t'+0} = \dot{x}_i^+ , \qquad (126)$$

то справедливы соотношения

$$F_{\dot{x}_i^-} = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right|_{\dot{x}_i=\dot{x}_i^-} = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right|_{\dot{x}_i=\dot{x}_i^+} = F_{\dot{x}_i}^+ \quad (i=\overline{1,\,n}) \qquad (127)$$

и

$$F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} = \left.\left(F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i F_{\dot{x}_i}\right)\right|_{\dot{x}_i=\dot{x}_i^-} = \left.\left(F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i F_{\dot{x}_i}\right)\right|_{\dot{x}_i=\dot{x}_i^+} = F^+ - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^+ F_{\dot{x}_i}^+ . \qquad (128)$$

Здесь

$$F^- = F(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{a})\big|_{\dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}^-}; \quad F^+ = F(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{a})\big|_{\dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}^+};$$
$$\dot{\mathbf{x}}^+ = (\dot{x}_1^+, \dot{x}_2^+, ..., \dot{x}_n^+)^T; \quad \dot{\mathbf{x}}^- = (\dot{x}_1^- = \dot{x}_2^-, ..., \dot{x}_n^-)^T.$$

Условие трансверсальности. Концевые точки 0 и 1 кривой C: $\{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ \mathbf{a}\}$ таковы, что равенство

$$\left[\left(F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i F_{\dot{x}_i}\right)dt + \sum_{i=1}^{n} F_{\dot{x}_i} dx_i\right]_0^1 + dL + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t_1} F_{a_j} da_j dt = 0 \qquad (129)$$

выполняется тождественно для $dt_0, dt_1, dx_{i0} = dx_i(t_0),\ dx_{i1} = dx_i(t_1),\ da_j$ (т.е. для всех произвольных и независимых значений указанных вариаций концов траекторий и вариаций параметров). Здесь dL – полный дифференциал функции $L(t_0,\ t_1,\ \mathbf{x}(t_0),\ \mathbf{x}(t_1),\ \mathbf{a},\ \boldsymbol{\mu}_k)$:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t_0} dt_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_{i0}} dx_{i0} + \frac{\partial L}{\partial t_1} dt_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_{i1}} dx_{i1} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial L}{\partial a_j} da_j . \qquad (130)$$

З а м е ч а н и е. Если $t_0 = t_0(\mathbf{a}),\ t_1 = t_1(\mathbf{a})$, то $dt_0 = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial t_0(\mathbf{a})}{\partial a_j} da_j$, $dt_1 = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial t_1(\mathbf{a})}{\partial a_j} da_j$. В силу независимости величин $dt_0,\ dt_1,\ dx_{i0},\ dx_{i1}$ условие (129) эквивалентно $2n + 2 + r$ равенствам вида

$$\left(F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} + \frac{\partial L}{\partial t}\right)_{t=t_1} dt_1 = 0, ..., \left(F_{\dot{x}_i} + \frac{\partial L}{\partial x_i}\right)_{t=t_1} dx_{i1} = 0 \quad (i=\overline{1,n}); \qquad (131)$$

$$\left(F-\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i F_{\dot{x}_i}+\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{t=t_0} dt_0,\ ...,\ \left(F_{\dot{x}_i}+\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)_{t=t_0} dx_{i0}=0\ \ (i=\overline{1,n})\,; \qquad (132)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a_j}+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F}{\partial a_j}dt\right)da_j=0\ \ (i=\overline{1,\,n}) \qquad (133)$$

число которых достаточно для того, чтобы совместно с уравнениями (118), (119), (124) определить недостающие значения $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_k\,(k=\overline{1,\rho}),\ \boldsymbol{\lambda}_j(t)\ (j=\overline{1,m}),\ x_i(t)\ (i=\overline{1,n}),\ a_j(j=\overline{1,r})$.

9.3 Второе необходимое условие минимума функционала в задаче Больца (условие Вейерштрасса) для случая $f\equiv 0, f_k\equiv 0$

Для допустимой кривой C: $\{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t),\ \mathbf{a}\}$, реализующей минимум в задаче Больца, всегда существует такая система множителей $\boldsymbol{\mu}_k\ (k=\overline{0,\rho}), \boldsymbol{\lambda}_j(t)\,(j=\overline{1,m})$, что для кривой C с этими множителями выполняется правило множителей (см. п. 9.2), а для всякого элемента $(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda})$ (в том числе и в угловых точках) кривой **C** функция Вейерштрасса $\mathbf{E}(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\boldsymbol{\lambda},\dot{\mathbf{X}})$:

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\boldsymbol{\lambda},\dot{\mathbf{X}})=F(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{X}},\boldsymbol{\lambda})-F(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\boldsymbol{\lambda})-\sum_{i=1}^{n}(\dot{X}_i-\dot{x}_i)F_{\dot{x}_i}(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\boldsymbol{\lambda}) \qquad (134)$$

удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\boldsymbol{\lambda},\dot{\mathbf{X}})\ge 0\,. \qquad (135)$$

Неравенство (135) имеет место при всех возможных допустимых элементах $(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{X}},\boldsymbol{\lambda})$, не совпадающих с элементами $(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\boldsymbol{\lambda})$ кривой C, но удовлетворяющих условиям

$$F_j(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{a})=0\ \ (j=\overline{1,m})\,.$$

Если минимизирующая кривая C: $\{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t),\ \mathbf{a}\}$ *нормальна*, то система множителей $\mu_0=1, \mu_k, \lambda_j(t)\,(j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,\rho})$ – единственна и условие Вейерштрасса для этой системы выполняется.

9.4 Третье необходимое условие минимума в задаче Больца (условие Лежандра–Клебша) для случая $f=0, f_k=0$

Если кривая C: $\{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$ реализует минимум в задаче Больца, то всегда найдется такая система множителей μ_0, μ_k $(k=\overline{1,\rho})$, $\lambda_j(t)$ $(j=\overline{1,m})$, что для этой кривой С удовлетворяется правило множителей, а для всякого ее элемента $(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F_{\dot{x}_i \dot{x}_k}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})\,\xi_i \xi_k \geq 0 \tag{136}$$

при любых $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \neq (0, 0, ..., 0)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} F_{j\dot{x}_j}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\xi_i = 0 \quad (j=\overline{1,m}), \tag{137}$$

где

$$F_{jx_i} = \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_i}; \quad F_{\dot{x}_i \dot{x}_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}.$$

В рассматриваемой задаче важную роль играет матрица

$$\begin{bmatrix} F_{\dot{x}_i \dot{x}_k} & F_{\gamma \dot{x}_i} \\ F_{\alpha \dot{x}_k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}} & F_{\dot{\mathbf{x}}} \\ (F_{\dot{\mathbf{x}}})^T & 0 \end{bmatrix} \tag{138}$$

$$(i,k=\overline{1,n}),\ F_{\dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial(F_1, F_2, ..., F_m)}{\partial(\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n)};\ F_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\right]\ (\alpha, \gamma = \overline{1,m}).$$

Определитель этой матрицы называется определителем Гильберта. Вариационные задачи с отличным от нуля определителем Гильберта называется *регулярными* (*невырожденными*).

9.5 Четвертое необходимое условие в задаче Больца (условие Якоби–Майера–Кнезера)

Условие Якоби–Майера–Кнезера носит нелокальный (интегральный) характер и характеризует экстремальность всей кривой в целом на основе рассмотрения поведения экстремалей, лежащих в малой окрестности от данной экстремали.

Условие Якоби–Майера–Кнезера. Чтобы экстремаль C: $\{\mathbf{x}(t)\}$ доставляла на отрезке $[t_0, t_1]$ минимум функционалу в задаче Больца, необходимо, чтобы отрезок $[t_0, t_1]$ не содержал точек, сопряженных с t_0.

Сопряженная точка. Считается, что экстремаль C: $\{\mathbf{x}(t)\}$ имеет на интервале (t_0, t_1) точку $\tilde{t}$, $t_0 < \tilde{t} < t_1$, сопряженную с t_0, если существует последовательность экстремалей, выходящих из той же начальной точки $(t_0, \mathbf{x}(t_0))$ и бесконечно близких к данной экстремали $\mathbf{x}(t)$, такая, что каждая из этих экстремалей пересекает данную экстремаль $\mathbf{x}(t)$ и последовательность точек пересечения имеют точку $\tilde{t}$ своим пределом. Сопряженная точка $(\tilde{t}, \mathbf{x}(\tilde{t}))$ является точкой касания экстремали $\mathbf{x}(t)$ с огибающей семейства экстремалей, в которое данная экстремаль $\mathbf{x}(t)$ включена (заметим, что огибающая может вырождаться в точку). Это показывает, что в сопряженной точке $(\tilde{t}, \mathbf{x}(\tilde{t}))$ расстояние между данной экстремалью $\mathbf{x}(t)$ и произвольной близкой экстремалью $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, выходящей из той же начальной точки $(t_0, \mathbf{x}(t_0))$, есть величина выше первого порядка малости по сравнению с указанным расстоянием вне сопряженной точки $(\tilde{t}, \mathbf{x}(\tilde{t}))$ (т.е. при $t_0 \le t < \tilde{t}$).

Методы определения сопряженных точек весьма трудоемки. В частности, они могут основываться на вычислении определителей Майера–Кнезера.

Для задачи Майера (см. п. 9.1) с закрепленными концами

$$F_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0 \;\; (j = \overline{1,m}), \;\; t_0 \le t \le t_1, \tag{139}$$

где t_0, t_1 – заданные числа,

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \;\; \hat{\mathbf{x}}(t_1) = \hat{\mathbf{x}}_1 = (x_1(t_1), ..., x_{n-1}(t_1)), \tag{140}$$

где $\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_1$ – заданные векторы,

и с функционалом

$$J = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = x_n(t_1) \tag{141}$$

сопряженная точка $\tilde{t}$ может быть вычислена как момент времени, в который обращается в нуль определитель Кнезера:

$$D(\tilde{t}, \lambda_0) = \left.\frac{\partial(x_1, x_2, ..., x_{n-1})}{\partial(\lambda_{10}, \lambda_{20}, ..., \lambda_{n-1,0})}\right|_{t=\tilde{t}} = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1(t,\lambda_0)}{\partial \lambda_{10}} & \cdots & \dfrac{\partial x_1(t,\lambda_0)}{\partial \lambda_{n-1,0}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_{n-1}(t,\lambda_0)}{\partial \lambda_{10}} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}(t,\lambda_0)}{\partial \lambda_{n-1,0}} \end{vmatrix}\right|_{t=\tilde{t}} = 0, \tag{142}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, ..., \lambda_{n-1,0})^T; \tag{143}$$

где $\hat{\mathbf{x}}(x, \boldsymbol{\lambda}_0) = (x_1(t, \boldsymbol{\lambda}_0), ..., x_{n-1}(t, \boldsymbol{\lambda}_0))$ – экстремаль, удовлетворяющая при $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$ заданным условиям (140).

З а м е ч а н и е. При применении численных методов решения краевой задачи иногда [например, в методе Ньютона] одновременно с основной экстремалью $\mathbf{x}(t)$ вычисляется $(n - 1)$ дополнительных экстремалей $\mathbf{x}^{n-1}(t)$, лежащих в близкой окрестности к основной и выходящих из той же точки (начальной) $(t_0, \mathbf{x}_0)$ по линейно-независимым направлениям (соответствующим линейно-независимым начальным условиям для множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}_0$). В этом случае можно утверждать, что точка $\tilde{t}$ будет сопряженной с точкой t_0 в сформулированной выше задаче, если в точке $\tilde{t}$ определитель

$$\Delta(\widetilde{t},\lambda_0)=\begin{vmatrix} x_1(t)-x_1^{(1)}(t), & x_2(t)-x_2^{(1)}(t), & \cdots, & x_{n-1}(t)-x_{n-1}^{(1)}(t) \\ x_1(t)-x_1^{(2)}(t), & x_2(t)-x_2^{(2)}(t), & \cdots, & x_{n-1}(t)-x_{n-1}^{(2)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1(t)-x_1^{(n-1)}(t), & x_2(t)-x_2^{(n-1)}(t), & \cdots, & x_{n-1}(t)-x_{n-1}^{n-1}(t) \end{vmatrix}_{t=\widetilde{t}} \quad (144)$$

представляет бесконечно малую величину более высокого порядка, чем при $t_0 \le t \le \widetilde{t}$.

Контрольные вопросы

1 Задачи Больца, Майера, Лагранжа, привести формулировки.
2 Первое необходимое условие экстремума функционала в задаче Больца.
3 Второе необходимое условие минимума функционала в задаче Больца (условие Вейерштрасса) для случая $f \equiv 0, f_k \equiv 0$.
4 Третье необходимое условие минимума в задаче Больца (условие Лежандра–Клебша) для случая $f = 0, f_k = 0$.
5 Четвертое необходимое условие в задаче Больца (условие Якоби–Майера–Кнезера).

Г л а в а 1 0

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ С РАЗРЫВНЫМИ ФАЗОВЫМИ КООРДИНАТАМИ

Для ряда технических систем в частности механики полета (особенно для ракетодинамики) важен случай, в котором допускаются конечные разрывы (разрывы первого рода) в фазовой траектории (например, мгновенный «сброс» массы после отделения ступени). При расчете ступенчатых ракет, химических реакторов, а так же целого ряда химико-технологических и информационных процессов, полезны результаты следующей задачи с фиксированным заранее числом разрывов и варьируемой переменной величиной «скачка» в точке разрыва.

10.1 Краткая формулировка задачи

Пусть $q-1$ – число интервалов, внутри которых траектория непрерывна; $t_j \ (j=\overline{1,q})$ – моменты времени, в которые наступают разрывы фазовых координат. Точки t_j считаются в общем случае неизвестными. Индекс j указывает, что функции рассматриваются на j-ом отрезке времени

$$t_j \le t \le t_{j+1} .$$

На каждом j-м отрезке задана система связей

$$\mathbf{F}^{(j)}(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))=0 , \quad (145)$$

где

$$\mathbf{F}^{(j)} = (F_1^{(j)},\, F_2^{(j)},\, ...,\, F_m^{(j)})^T;$$
$$\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)^T;$$
$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1,\, \dot{x}_2,\, ...,\, \dot{x}_n)^T,$$

и краевые условия в точке разрыва функций $x_i(t)$

$$\mathbf{g}(t_j, \mathbf{x}(t_r^+), \mathbf{x}(t_s^-)) = 0, \qquad (146)$$

где

$$\mathbf{g} = (g_1,\, g_2,\, ...,\, g_p)^T;$$
$$j = \overline{1,\, q};$$
$$r = j;\; 1 \le j \le q-1;$$
$$s = j;\; 2 \le j \le q;$$
$$t_1 < t_2 < ... < t_j < ... < t_q;$$
$$p \le 2(q-1)n + q.$$

Требуется минимизировать функционал

$$J = \Phi(t_j, \mathbf{x}(t_r^+), \mathbf{x}(t_s^-)). \qquad (147)$$

З а м е ч а н и е. Здесь величины $\mathbf{x}(t_r^+)$ суть правосторонние пределы в точке разрыва t_j, а $\mathbf{x}(t_s^-)$ – левосторонние пределы.

10.2 Необходимые условия оптимальности

Необходимые условия экстремума функционала (147) состоят из:

- правила множителей Лагранжа;
- уравнений Эйлера–Лагранжа;
- условий Эрдмана–Вейерштрасса;
- условий трансверсальности.

Для рассматриваемых разрывных задач эти условия имеют следующий вид.

Правило множителей. Вводятся функции Лагранжа для разрывных задач:

$$F^{(j)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i^{(j)} \quad (j = \overline{1, q-1}) \qquad (148)$$

и

$$L = \Phi + \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{\mu}_k g_k, \qquad (149)$$

а затем отыскиваются функции $x_i(t), \lambda_i(t), \boldsymbol{\mu}_k$, удовлетворяющие (145), (146) и доставляющие стационарное значение вспомогательному функционалу $\bar{J}$ (стационарной величиной называется такое значение J, вариация δJ которой равна нулю: $\delta J = 0$):

$$\bar{J} = L + \int_{t_1}^{t_q} F dt = L + \sum_{j=1}^{q-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F^{(j)} dt . \qquad (150)$$

В этом случае вариация $\delta\bar{J}$ функционала $\bar{J}$ имеет следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\delta\bar{J} = {} & \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_i(t_1)} - \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t_1}\right] dx_i(t_1) + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_i(t_2^-)} + \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t_2^-}\right] dx_i(t_2^-) + \\
& + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_i(t_2^+)} - \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t_2^+}\right] dx_i(t_2^+) + \ldots + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial x_i(t_q)} + \left(\frac{\partial F^{(q-1)}}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t_q}\right] dx_i(t_q) + \\
& + \left[\frac{\partial L}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)_{t_1}\right] dt_1 + \left[\frac{\partial L}{\partial t_2} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)_{t_2^-} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}\right)_{t_2^+}\right] dt_2 + \\
& + \ldots + \left[\frac{\partial L}{\partial t_q} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F^{(q-1)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)_{t_q}\right] dt_q + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2^-}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_i}\right]\delta x_i dt + \\
& + \ldots + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{q-1}^+}^{t_q}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^{(q-1)}}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial F^{(q-1)}}{\partial x_i}\right]\delta x_i(t) dt .
\end{aligned}$$

$$(151)$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа. Из выражения (151) вытекает, что если $\mathbf{x}(t)$ – кривая, доставляющая стационарное значение функционалу $\bar{J}$ (т.е. $\delta\bar{J} = 0$), то между точками разрывов удовлетворяются уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^{(j)}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial F^{(j)}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,q-1}) . \qquad (152)$$

Условия Эрдмана–Вейерштрасса и условия трансверсальности. В концевых точках t_1, t_q и точках разрыва t_j выполняются соотношения, обобщающие условия трансверсальности и условия Эрдмана–Вейерштрасса (см. п. 9.2):

1) при $t = t_1$

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t=t_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_i(t_1)} - \left[\frac{\partial F^{(j)}}{\partial \dot{x}_i}\right]_{t=t_1} = 0 ; \qquad (153)$$

2) при $t = t_j$ $(j = 2, 3, ..., q-1)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i(t_j^-)} + \left[\frac{\partial F^{(j-1)}}{\partial \dot{x}_i(t)}\right]_{t=t_j^-} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_i(t_j^+)} - \left[\frac{\partial F^{(j)}}{\partial x_i(t)}\right]_{t=t_j^+} = 0 \,; \qquad (154)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F^{(j)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{i\,t=t_j^+} - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F^{(j-1)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t=t_j^-} = 0 \,; \qquad (155)$$

3) при $t = t_q$

$$\frac{\partial L}{\partial t_g} - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F^{(q-1)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t_q} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_i(t_q)} + \left[\frac{\partial F^{(q-1)}}{\partial \dot{x}_i}\right]_{t_q} = 0 \,. \qquad (156)$$

Для задач с фиксированными величинами разрывов (скачков) краевые условия типа (146) включают соотношения вида

$$g_k \equiv x_i(t_j^-) - x_i(t_j^+) - \Delta_i^{(j)} \,, \qquad (157)$$

где $\Delta_i^{(j)}$ – постоянная (величина скачка x_i в момент времени t_j), $i = \overline{1,n},\ j = \overline{2,q-1},\ k = \overline{1,p}$.

Тогда при $t = t_j\ (j = \overline{2,q-1})$ условия (154) и (155) имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F^{(j)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t=t_j^+} - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F^{(j-1)}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t=t_j^-} = 0 \,; \qquad (158)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i(t_j)} - \left[\frac{\partial F^{(j)}}{\partial \dot{x}_i}\right]_{t=t_j^+} + \left[\frac{\partial F^{(j-1)}}{\partial \dot{x}_i}\right]_{t=t_j^-} = 0 \,. \qquad (159)$$

Контрольные вопросы

1 Перечислите необходимые условия оптимальности.
2 Приведите физическую интерпретацию задачи с разрывами.

Глава 11

ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

11.1 Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа

Задачей Лагранжа называется следующая экстремальная задача в пространстве $\Xi = C^1(\Delta, \mathbf{R}^n) \times C(\Delta, \mathbf{R}^r) \times \mathbf{R}^2$:

$$B_0(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1) \to \inf' ; \quad (з)$$

$$\Phi(\mathbf{x}(\cdot),\ \mathbf{u}(\cdot),\ t_0,\ t_1) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \varphi(t,\ \mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)) = 0 ; \quad (1)$$

$$B_i(\mathbf{x}(\cdot),\ \mathbf{u}(\cdot),\ t_0,\ t_1) \le 0, \quad i = \overline{1, m'} ; \quad (2)$$

$$B_i(\mathbf{x}(\cdot),\ \mathbf{u}(\cdot),\ t_0,\ t_1) = 0, \quad i = \overline{m'+1,\ m} , \quad (3)$$

где

$$B_i(\mathbf{x}(\cdot),\ \mathbf{u}(\cdot),\ t_0,\ t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u})\, dt + \psi_i(t_0,\ \mathbf{x}(t_0),\ t_1,\ \mathbf{x}(t_1)), \quad i = \overline{0, m} .$$

Здесь Δ – заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, $f_i : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$ – функции $n + r + 1$ переменных, $\psi_i : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – функции $2n + 2$ переменных, $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n$ вектор-функция $n + r + 1$ переменных.

Ограничение (1) называется дифференциальной связью, вектор-функция $\mathbf{x}(\cdot) = (x_1(\cdot), ..., x_n(\cdot))$ – фазовой переменной, вектор-функция $\mathbf{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), ..., u_r(\cdot))$ – управлением.

Четверка $(\mathbf{x}(\cdot),\ \mathbf{u}(\cdot),\ t_0,\ t_1)$ называется управляемым процессом в задаче Лагранжа, если $\mathbf{x}(\cdot) \in C^1(\Delta,\ \mathbf{R}^n)$, $\mathbf{u}(\cdot) \in C(\Delta,\ \mathbf{R}^r)$, $t_0, t_1 \in \operatorname{int}\Delta$, $t_0 < t_1$, и всюду на отрезке $[t_0, t_1]$ выполняется дифференциальная связь (1), и допустимым управляемым процессом, если эта четверка является управляемым процессом и, кроме того, выполнены ограничения (2), (3).

Допустимый управляемый процесс $\hat{\xi} = (\hat{\mathbf{x}}(\cdot),\ \hat{\mathbf{u}}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1)$ называется оптимальным (в слабом смысле) процессом, или слабым минимумом в задаче (з), если существует такое $\delta > 0$, что для любого допустимого управляемого процесса $\xi = (\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1)$, удовлетворяющего условию $\left\|\xi - \hat{\xi}\right\|_{\Xi} < \delta$, выполнено неравенство $\mathbf{B}(\xi) \ge \mathbf{B}(\hat{\xi})$.

Правило решения.

1 Составить функцию Лагранжа:

$$\begin{gathered} \mathrm{A}(\mathbf{x}(\cdot),\ \mathbf{u}(\cdot),\ t_0,\ t_1;\ \mathbf{p}(\cdot),\ \lambda) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}(t)(\dot{\mathbf{x}} - \varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) \right) dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) , \\ \lambda = (\lambda_0,\ \lambda_1,\ ...,\ \lambda_m),\ p(\cdot) \in C^1([t_0,\ t_1], \mathbf{R}^{n*}). \end{gathered}$$

2 Выписать необходимые условия оптимального в слабом смысле процесса $\hat{\xi} = (\hat{\mathbf{x}}(\cdot),\ \hat{\mathbf{u}}(\cdot),\ \hat{t}_0,\ \hat{t}_1)$:

а) стационарности по x – уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_x(t)=0 \Leftrightarrow \dot{p}(t)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\hat{f}_{ix}(t)-\mathbf{p}(t)\hat{\varphi}_x(t)\forall t\in[\hat{t}_0,\,\hat{t}_1]$$

для лагранжиана

$$L=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(t,\,\mathbf{x},\,\mathbf{u})+\mathbf{p}(t)(\dot{\mathbf{x}}-\varphi(t,\,\mathbf{x},\,\mathbf{u}))\,;$$

б) трансверсальности по x:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k)=(-1)^k\hat{l}_{x(t_k)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_k)=(-1)^k\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\hat{\psi}_{ix(t_k)},\;\; k=0,1$$

для терминанта

$$l=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\psi_i(t_0,\,\mathbf{x}(t_0),\,t_1,\,\mathbf{x}(t_1))\,;$$

в) стационарности по u:

$$\hat{L}_u(t)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\hat{f}_{iu}(t)-\mathbf{p}(t)\hat{\varphi}_u(t)=0\quad\forall t\in[\hat{t}_0,\,\hat{t}_1]\,;$$

г) стационарности по t_k:

$$\hat{\mathrm{A}}_{t_k}=0 \Leftrightarrow (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\hat{f}_i(\hat{t}_k)+\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(\hat{\psi}_{it_k}+\hat{\psi}_{ix(t_k)}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{t}_k))=0,\;\; k=0,1$$

(условие стационарности по t_k выписывается только для подвижных концов);

д) дополняющей нежесткости

$$\lambda_i\mathrm{B}_i(\hat{\xi})=0,\quad i=\overline{1,m'}\,;$$

е) неотрицательности

$$\lambda_i\geq 0,\quad i=\overline{0,m'}\,.$$

3 Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполняются условия п. 2 с множителями Лагранжа λ и $p(\cdot)$, одновременно не равными нулю. При этом бывает полезно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4 Среди всех найденных в п. 3 допустимых экстремальных процессов отыскать решение или доказать, что решения нет.

Предлагаем проверить, что правило решения составлено в полном соответствии с общим принципом Лагранжа.

Набор условий для нахождения оптимального процесса является полным. Действительно, для определения неизвестных функций $\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{p}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)$ мы имеем систему из дифференциальных уравнений (1) и условий б), в). Выражая из последнего (разумеется, когда это можно сделать, например, если выполнены условия теоремы о неявной функции) $\mathbf{u}(\cdot)$ через $\mathbf{x}(\cdot)$ и $\mathbf{p}(\cdot)$, мы получаем систему из $2n$ скалярных дифференциальных уравнений. Ее общее решение зависит от $2n$ произвольных постоянных и еще от множителей Лагранжа λ_i, среди которых m независимых. Добавляя сюда еще t_0 и t_1, получаем всего $2n + m + 2$ неизвестных. Для их определения мы имеем $2n$ условий трансверсальности б), m условий дополняющей нежесткости и заданных ограничений (3) и два условия стационарности по t_k. Таким образом, число неизвестных совпадает с числом уравнений. (Разумеется, разрешимости полученной системы уравнений указанное обстоятельство не гарантирует.)

11.2 Принцип максимума в форме Лагранжа

Задачей оптимального управления (в понтрягинской форме) будем называть следующую задачу в пространстве $KC^1(\Delta, R^n) \times KC(\Delta, R^r) \times R^2$ [14]:

$$\mathrm{B}_0(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1) \to \inf; \tag{з}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \tag{1}$$

$$\mathbf{u}(t) \in U \forall t \in [t_0, t_1]; \tag{2}$$

$$\mathrm{B}_i(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1) \le 0, \quad i = \overline{1, m'}; \tag{3}$$

$$\mathrm{B}_i(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1) = 0, \quad i = \overline{m'+1, m}, \tag{4}$$

где

$$\mathrm{B}_i(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\,dt + \psi_i(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1)), \quad i = \overline{0, m}.$$

Здесь Δ – заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, f_i : $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$ – функции $n + r + 1$ переменных, $\psi_i : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – функции $2n + 2$ переменных; $\varphi : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n$ – вектор-функция $n + r + 1$ переменных, U – произвольное множество из $\mathbf{R}^r$. Частным случаем задачи (з) является задача, в которой один из концов или даже оба закреплены.

Вектор-функция $\mathbf{x}(\cdot)$ называется фазовой переменной, $\mathbf{u}(\cdot)$ – управлением. Уравнение (1), называемое дифференциальной связью, должно выполняться во всех точках непрерывности управления $\mathbf{u}(\cdot)$ на интервале (t_0, t_1) (это множество будет обозначаться через T).

Четверка $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1)$ называется управляемым процессом в задаче оптимального управления, если $\mathbf{x}(\cdot) \in KC^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $\mathbf{u}(\cdot) \in KC(\Delta, \mathbf{R}^r)$ и выполняются дифференциальная связь (1) и ограничение типа включения (2). Управляемый процесс является допустимым, если, кроме того, выполняются соотношения (3) и (4).

Допустимый управляемый процесс $\hat{\xi} = (\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ называется (локально) оптимальным (или еще говорят оптимальным в сильном смысле процессом), если существует $\delta > 0$ такое, что для всякого допустимого управляемого процесса $\xi = (\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1)$, для которого

$$\left\|(\mathbf{x}(\cdot), t_0, t_1) - (\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)\right\|_{C(\Delta,\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^2} < \delta$$

выполняется неравенство $\mathrm{B}_0(\xi) \geq \mathrm{B}_0(\hat{\xi})$.

Правило решения.

1 Составить функцию Лагранжа:

$$\mathrm{A} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}(t)(\dot{\mathbf{x}} - \varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))\right)dt +$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\psi_i(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1));$$

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m), \mathbf{p}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^{n^*}).$$

2 Выписать необходимые условия оптимальности процесса $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$:

а) стационарности по x – уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\hat{f}_{ix}(t) - \mathbf{p}(t)\hat{\varphi}_x(t),$$

для лагранжиана

$$L = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}(t)(\dot{\mathbf{x}} - \varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}));$$

б) трансверсальности по x:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_k) = (-1)^k \hat{l}_{x_k} \Leftrightarrow p(\hat{t}_k) = (-1)^k \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{\psi}_{ix_k}, \; k = 0, 1,$$

для терминанта

$$l = l(t_0, x_0, t_1, x_1) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i (t_0, x_0, t_1, x_1);$$

в) оптимальности по u – принцип минимума в лагранжевой форме:

$$\begin{aligned} &\min_{u \in U} \hat{L}(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t), \mathbf{u}) = \hat{L}(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \min_{u \in U} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i (t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}) - \mathbf{p}(t) \varphi(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i (t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) - \mathbf{p}(t) \varphi(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \end{aligned}$$

или в гамильтоновой (понтрягинской) форме в виде принципа максимума:

$$\max_{u \in U} H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t)) = H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), \mathbf{p}(t)),$$

где

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \boldsymbol{\varphi}(t, x, u) - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i (t, x, u) \; -$$

функция Понтрягина;

г) стационарности по t_k:

$$\begin{aligned} &\hat{\mathrm{A}}_{t_k} = 0 \Leftrightarrow (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_i (\hat{t}_k) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (\hat{\psi}_{it_k} + \hat{\psi}_{ix_k} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_k)) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1} \hat{l}_{t_k}, \quad k = 0, 1 \end{aligned}$$

(условие стационарности выписывается только для подвижных концов);

д) дополняющей нежесткости

$$\lambda_i \mathrm{B}_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = \overline{1, m'};$$

е) неотрицательности

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{0, m'}.$$

3 Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполняются условия п. 2 с множителями Лагранжа λ и $p(\cdot)$, одновременно не равными нулю. При этом бывает удобно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4 Отыскать решение среди найденных допустимых экстремальных процессов или показать, что решения нет.

Можно показать, что описанное выше правило решения находится в полном соответствии с принципом Лагранжа снятия ограничений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем учебном пособии представлена точка зрения авторов на процесс подготовки студентов информационно-инженерных специальностей по данной дисциплине.

Особое внимание уделено изучению роли методов теории оптимальных процессов при решении прикладных технико-экономических задач.

Рассмотрен набор необходимых условий оптимальности как для основной задачи оптимального управления, так и для случаев, когда управление является особым, а задача осложнена фазовыми и смешанными ограничениями. Элементы классического вариационного исчисления рассматриваются как следствие использования «принципа максимума».

В отдельных главах представлены задачи с разрывными фазовыми координатами. Особое внимание уделено рассмотрению принципа максимума в форме Лагранжа, что на взгляд авторов облегчает его понимание. Приведена методика изучения необходимых условий оптимальности для решения прикладных задач.

Следует отметить, что отсутствие методов выбора оптимизируемых функционалов ограничено сдерживает применение методов теории оптимальных процессов при решении прикладных задач.

Это связано с трудностями построения математических критериев, определяющих свойства переходных процессов в замкнутых динамических системах.

За рамками предлагаемого учебного пособия остается широкий круг вопросов, связанных с построением оптимальных управлений системами, функционирующими в условиях неопределенности стохастической или нечеткой природы.

Следует отметить, что для более глубокого изучения вопросов, рассматриваемых в данном учебном пособии необходимо обратиться к списку литературы, в который включены работы, ставшие классическими.

Изложение представленного материала не перегружено математическими конструкциями, выходящими за рамки математики для инженерных специальностей высших учебных заведений.

Исследования авторов настоящего учебного пособия, направленные на совершенствование процесса обучения специалистов в области информационных систем по рассматриваемой дисциплине, найдут отражение в дальнейших разработках и публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

2 Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

3 Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

4 Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

5 Красовский А.А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1969. 238 с.

6 Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.

7 Кротов В.Ф., Лагома Б.А., Лобанов С.М. и др. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. М.: Высшая школа, 1990. 429 с.

8 Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448 с.

9 Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 420 с.

10 Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматлит, 1963. 552 с.

11 Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Физматлит, 1975. 495 с.

12 Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. М.: Наука, 1971. 115 с.

13 Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 470 с.

14 Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.

15 Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.

16 Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Труды I конгресса ИФАК / Изв. АН СССР. М., 1961. Т. 2. 231 с.

17 Атанс М., Фалб П.Л. Оптимальное управление. М.: Наука, 1968. 764 с.

18 Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

19 Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960. 326 с.

20 Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.

21 Поляк Б.Т. Методы линеаризации при наличии ограничений // Итоги науки и техники. Матем. анализ Е. 2 / ВИНИТИ. М., 1974. С. 147 – 148.

22 Поляк Б.Т. Методы решения задач на условный экстремум при наличие случайных помех // ВМ и МФ. М., 1979. Т. 19, № 1. С. 147 – 148.

23 Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1974. 374 с.

24 Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

25 Цлаф Л.Я. Вариационное исчисления и интегральные уравнения. М.: Наука, 1970. 191 с.

26 Петров Ю.П. Вариационные методы теории управления. М.: Наука, 1973.

27 Цирлин А.М., Балакирев В.С., Дудников Е.Г. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. М.: Наука, 1984.

28 Калихман И.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1979. 125 с.