МАТЕМАТИКА

Часть 2

♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Часть 2

Учебные задания
для студентов 1 курса инженерных и экономических специальностей

Тамбов
♦ Издательство ТГТУ ♦
2004

УДК 51(07)
ББК В11я73-5
М34

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор
А.И. Булгаков

Составители:

А.В. Медведев, *В.А. Попов*, *И.В. Петрова*,
А.В. Урусов, *А.В. Щербакова*

М34 Математика: Учебные задания. Ч. 2 / Сост.: А.В. Медведев, В.А. Попов, И.В. Петрова, А.В. Урусов, А.В. Щербакова. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 24 с.

Учебное издание охватывает следующие разделы учебных программ для технических и экономических специальностей: «Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений», «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости» и «Аналитическая геометрия в пространстве». Предложенные задачи являются типовыми, предназначены для аудиторной и самостоятельной работы студентов, а также могут служить основой при составлении вариантов проверочных заданий.

Предназначено для студентов 1 курса инженерных и экономических специальностей.

УДК 51(07)
ББК В11я73-5

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Часть 2

Учебные задания

Составители: МЕДВЕДЕВ Александр Васильевич,
ПОПОВ Вячеслав Александрович,
ПЕТРОВА Ирина Владимировна,
УРУСОВ Александр Иванович,
ЩЕРБАКОВА Антонина Васильевна

Редактор В.Н. Митрофанова
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынкова

Подписано к печати 27.12.2004
Формат 60 × 84 / 16. Бумага газетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman. Объем: 1,39 усл. печ. л.; 1,2 уч.-изд. л.
Тираж 500 экз. С. 903

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1 Даны матрицы A, B, C и число q. Вычислить
1) $B\cdot A$; 2) $\det(B\cdot A)$; 3) $A\cdot B$; 4) $A\cdot B+q\cdot C$; 5) $\det C$; 6) $\breve{A}$; 7) A^{-1}, если

а) $q=-3$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\\ 7 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -4 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -2\\ -2 & 3 & 3\\ 7 & -7 & 4\end{pmatrix}$;

б) $q=2$, $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -6\\ -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 3 & 5\\ -5 & 4 & -5\\ 8 & -7 & 8\end{pmatrix}$;

в) $q=-2$, $A=\begin{pmatrix}-5 & -3\\ 6 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & 9 & -7\\ -5 & -4 & 8\\ -2 & -7 & -4\end{pmatrix}$;

г) $q=3$, $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\\ 1 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1 & -3\\ -4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 7\\ -6 & 5 & 2\\ 3 & -2 & -4\end{pmatrix}$;

д) $q=-1$, $A=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 3 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 7 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 5 & 3\\ -4 & -5 & 2\\ -3 & -4 & 2\end{pmatrix}$;

е) $q=-4$, $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 6\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -2 & 1\\ 5 & -4 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-7 & -5 & 6\\ 9 & 2 & 6\\ -7 & -6 & 9\end{pmatrix}$.

2 Вычислить определитель матрицы A двумя способами: 1) получением нулей в i-й строке и разложением по элементам этой строки; 2) получением нулей в j-м столбце и разложением по элементам этого столбца, если

а) $i=2, j=3$, $A=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -3 & 3\\ -4 & -3 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2 & -2\\ -3 & -1 & 4 & -2\end{pmatrix}$;

б) $i=3, j=1$, $A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1 & 1\\ -4 & -2 & 4 & 4\\ -2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

в) $i=4, j=2$, $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 4 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 4 & -2\\ 2 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

г) $i=2, j=3$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3 & -2\\ -3 & 3 & -2 & -2\\ 4 & -1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

д) $i=3, j=1,\ A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

е) $i=1, j=4,\ A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

3 Решить следующие системы линейных алгебраических уравнений тремя способами (методом Гаусса, методом Крамера, матричным методом):

а) $\begin{cases} -5x+3y+5z=12, \\ 7x-5y-7z=-20, \\ 8x-3y-9z=-14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x-5y-7z=7, \\ 3x+4y-6z=22, \\ 7x+4y+5z=-30; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -3x-4y-7z=-4, \\ 9x+2y+6z=-8, \\ -4x+7y+9z=19; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -6x-3y+8z=-12, \\ -2x+7y-6z=54, \\ -2x+9y-8z=68; \end{cases}$ д) $\begin{cases} -2x-3y+3z=4, \\ -3x+5y+2z=-25, \\ 5x-9y-3z=44; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -4x+3y+7z=-38, \\ 5x+2y+4z=8, \\ -7x+4y+9z=-56; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} -9x+5y+8z=-5, \\ -7x+4y+6z=-4, \\ 9x-9y-4z=13. \end{cases}$

4 Решить матричное уравнение $A\cdot X=B$, где A, B, X – матрицы, если

а) $A=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 28 & 9 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 5 & -9 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -11 & -9 & 13 \\ -9 & 8 & 12 \\ 14 & -15 & -19 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} -4 & -7 & 7 \\ -5 & -3 & 7 \\ -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 20 & 25 & -18 \\ 10 & 26 & -15 \\ 10 & 22 & -13 \end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -38 & 10 \\ 47 & 10 & 13 \\ 14 & -26 & 10 \end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -5 & -8 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 34 & 6 & 17 \\ -23 & -15 & -4 \\ 23 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

5 Найти решения следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} 2x-3y+4z=13, \\ -2x+5y+2z=-3, \\ -2x-2y+3z=6, \\ 3x+3y-4z=-8, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4x-3y+2z=-15, \\ 4x+y+5z=-1, \\ 3x+2y+z=6, \\ 2x+4y-3z=14, \end{cases}$ в) $\begin{cases} -3x+3y-2z=0, \\ -2x+4y+3z=13, \\ 7x-7y+4z=-2, \\ 5x-2y+2z=-4, \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x+2y+3z=4, \\ -3x+3y+z=-1, \\ -x+2y+z=0, \\ 6x+3y+4z=5, \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x-3y+2z-5w=-8, \\ -5x-2y-5z+3w=3, \\ 3x+7y+3z+4w=11, \end{cases}$

е) $\begin{cases} 4x-4y+3z-2w=-1, \\ 3x-2y-2z-4w=-3, \\ -5x+7y-4z+3w=5, \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x+3y-6z-4w=11, \\ -3x+4y+10z-2w=9, \\ 4x-3y-8z+3w=-5, \end{cases}$

з) $\begin{cases} 4x+8y+3z-2w=8, \\ 3x+2y-4z+3w=11 \\ -2x+5y+7z+2w=7, \end{cases}$ и) $\begin{cases} 3x+2y+4z+4w=7, \\ 2x+4y+5z-3w=-1, \\ 4x+3y+3z+2w=-6, \\ 3x+4y+3z-3w=0, \end{cases}$

к) $\begin{cases} 2x+3y+4z+5w=3, \\ 3x+2y+2z+4w=2, \\ -5x-2y+3z-2w=5, \\ 4x-9y+5z+3w=26 \end{cases}$

Линейная алгебра

1 Образует ли множество векторов на плоскости, начала которых находятся в начале координат, а концы – в пределах первой четверти, линейное пространство (с обычными операциями)?

2 Образует ли линейное пространство множество всех векторов на плоскости с исключением векторов, параллельных некоторой заданной прямой?

3 Рассмотрим совокупность P одних положительных вещественных чисел. Введем операции по следующим правилам: под «сложением» двух чисел будем понимать их обычное умножение, а под произведением элемента $r \in P$ на вещественное число λ будем понимать (обычное) возведение числа r в степень λ. Является ли P с указанными операциями линейным пространством?

4 Может ли линейное пространство состоять: 1) из одного вектора; 2) из двух различных векторов?

5 Задано множество всевозможных упорядоченных систем действительных чисел $(x_1; x_2; ...; x_n)$, $(y_1; y_2; ...; y_n)$, $(z_1; z_2; ...; z_n)$, ... Сумма двух любых элементов определяется равенством $(x_1; x_2; ...; x_n) + (y_1; y_2; ...; y_n) =$ $= (x_1 + y_1; x_2 + y_2; ...; x_n + y_n)$, а произведение любого элемента на любое действительное число – равенством $\lambda(x_1; x_2; ...; x_n) = (\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n)$. Доказать, что это множество является линейным пространством.

6 Образует ли линейное пространство множество всевозможных упорядоченных систем действительных чисел вида $(x_1; x_2; 0; 0)$, $(y_1; y_2; 0; 0)$, $(z_1; z_2; 0; 0)$, ... Сложение элементов и умножение элементов на действительное число определяется так же как в задаче 5.

7 Образует ли линейное пространство множество всевозможных упорядоченных систем действительных чисел вида $(x_1; x_2; 1; 1)$, $(y_1; y_2; 1; 1)$, $(z_1; z_2; 1; 1)$, ... Сложение элементов и умножение элементов на действительное число определяется так же как в задаче 5.

8 Является ли линейным пространством множество всех многочленов не выше второй степени.

9 Является ли линейным пространством множество всех многочленов второй степени.

10 Заданы функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$, ... Является ли множество этих функций линейным пространством, если эти функции образуют:

а) совокупность всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$;

б) совокупность всех дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$;

в) совокупность всех элементарных функций.

11 Образует ли линейное пространство множество всех квадратных матриц размера 2×2. Сложение элементов и умножение элементов на действительное число определяется по правилам проведения линейных операций над матрицами.

12 Образует ли линейное пространство множество всех квадратных матриц вида $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$, … . Сложение элементов и умножение элементов на действительное число определяется по правилам проведения линейных операций над матрицами.

13 Образует ли линейное пространство множество всех квадратных матриц вида $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 & 1 \\ 1 & y_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z_1 & 1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}$, … . Сложение элементов и умножение элементов на действительное число определяется по правилам проведения линейных операций над матрицами.

14 Доказать, что множество всех решений системы линейных однородных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$ образует линейное пространство.

15 Из линейного пространства исключен вектор **x**. Может ли полученное после этого исключения множество векторов являться линейным пространством.

16 Доказать, что если среди векторов **x**, **y**, **z**, ... имеется нуль-вектор, то рассматриваемые векторы линейно зависимы.

17 Рассматривается линейное пространство многочленов не выше второй степени. Являются ли векторы $P_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $P_2 = 2 + 3t + 4t^2$, $P_3 = 3 + 5t + 7t^2$ линейно зависимыми.

18 Рассматривается линейное пространство многочленов не выше второй степени. Являются ли векторы $P_1 = 1 + 2t^2$, $P_2 = 1 + 3t$, $P_3 = 4 + t$ линейно зависимыми.

19 Рассматривается линейное пространство квадратных матриц второго порядка. Являются ли векторы $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ линейно зависимыми.

20 Рассматривается линейное пространство квадратных матриц второго порядка. Являются ли векторы $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ линейно зависимыми.

21 Выяснить, будут ли векторы $\mathbf{a_1}$ = (1, 0, 1), $\mathbf{a_2}$ = (1, 1, 2), $\mathbf{a_3}$ = (2, 1, 2) линейно зависимыми или линейно независимыми.

22 Выяснить, будут ли векторы $\mathbf{a_1}$ = (1, 1, 1, 1), $\mathbf{a_2}$ = (1, 2, 1, 2), $\mathbf{a_3}$ = (3, 1, 3, 1), $\mathbf{a_4}$ = (0, 1, 0, 1) линейно зависимыми или линейно независимыми.

23 Доказать, что система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

24 Найти все значения λ, при которых вектор **b** = (7, –2, λ) линейно выражается через векторы $\mathbf{a_1}$ = (2, 3, 5), $\mathbf{a_2}$ = (3, 7, 8), $\mathbf{a_3}$ = (1, –6, 1).

25 Найти разложение вектора **x** в базисе векторов **p**, **q**, **r**, если:

а) **x** = {–2, 4, 7}, **p** = {0, 1, 2}, **q** = {1, 0, 1}, **r** = {–1, 2, 4};

б) **x** = {6, 12, –1}, **p** = {1, 3, 0}, **q** = {2, –1, 1}, **r** = {0, –1, 2};

в) **x** = {1, –4, 4}, **p** = {2, 1, –1}, **q** = {0, 3, 2}, **r** = {1, –1, 1};

г) **x** = {–9, 5, 5}, **p** = {4, 1, 1}, **q** = {2, 0, –3}, **r** = {–1, 2, 1}.

26 Рассматривается линейное пространство многочленов не выше второй степени. Найти координаты многочлена $P = 8 + 2t + 6t^2$ в базисе $P_1 = 1 + t + t^2$, $P_2 = 1 + t$, $P_3 = 1$.

27 Рассматривается линейное пространство многочленов не выше третьей степени. Найти координаты многочлена $P = 4 - 3t + 3t^2 + t^3$ в базисе $P_1 = 1 + t + t^2 + t^3$, $P_2 = 1 + t + t^2$, $P_3 = 1 + t$, $P_4 = 1$.

28 Рассматривается линейное пространство квадратных матриц второго порядка. Найти координаты матрицы $e = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

29 Рассматривается линейное пространство квадратных матриц второго порядка. Найти координаты матрицы $e = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 20 & 14 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

30 Выяснить, какие из преобразований (операторов) $A\mathbf{x}$ являются линейными и для линейных преобразований векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ найти их матрицу:

а) $A\mathbf{x} = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$; б) $A\mathbf{x} = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 1)$.

31 Будут ли линейными операторами в пространстве всех многочленов от t:

а) умножение на t; б) умножение на t^2; в) дифференцирование.

32 Будут ли линейными операторами в пространстве квадратных матриц:

а) умножение матрицы на элемент матрицы a_{11};

б) умножение матрицы на наибольший элемент матрицы.

33 В четырехмерном линейном пространстве рассматривается линейное преобразование A. Написать это преобразование в координатной форме, если $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$, $A\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $A\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

34 Пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, e_3 заданны линейно независимые векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Найти линейное преобразование, переводящее векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ соответственно в $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, если $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 1, 2)$.

35 Найти линейное преобразование, переводящее векторы $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 2)$ соответственно в векторы $\mathbf{b}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 5, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 1)$.

36 Пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ задан вектор $\mathbf{x} = (6, 1, -3)$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, если $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

37 Пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ задан вектор $\mathbf{x} = (1, 2, 4)$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, если $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = 1{,}5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

38 Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

39 Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

40 Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Векторная алгебра

1 По данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить следующие векторы:

1) $2\mathbf{a}$; 2) $-0{,}5\mathbf{b}$; 3) $3\mathbf{a} + 0{,}25\mathbf{b}$; 4) $0{,}5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

2 Даны: $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 19$ и $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 24$. Вычислить $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

3 Даны: $|\mathbf{a}| = 11$, $|\mathbf{b}| = 23$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 30$. Вычислить $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

4 Даны вершины $A(3, 2, -5)$, $B(1, 4, 3)$ и $C(-3, 0, 1)$ треугольника. Найти координаты середин его сторон.

5 Даны вершины $A(2, -1, 4)$, $B(3, 2, -6)$ и $C(-5, 0, 2)$ треугольника. Вычислить длину медианы, проведенной из вершины A.

6 Даны три вершины $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$ и $C(-1, 1, 2)$ параллелограмма. Найти его четвертую вершину D.

7 Отрезок прямой, ограниченный точками $A(-1, 8, 3)$ и $B(9, -7, 2)$ разделен точками на пять равных частей. Найти координаты этих точек.

8 Определить при каких значениях α и β векторы $\mathbf{a} = \{-2, 3, \beta\}$ и $\mathbf{b} = \{\alpha, -6, 2\}$ коллинеарны.

9 Проверить, что четыре точки $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, 3)$ и $D(3, -5, 3)$ служат вершинами трапеции.

10 Даны два вектора $\mathbf{a} = \{3, -2, 6\}$ и $\mathbf{b} = \{-2, 1, 0\}$. Определить координаты следующих векторов:

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; 3) $2\mathbf{a}$; 4) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$; 5) $0{,}5\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

11 Даны два вектора $\mathbf{a} = \{2, 4, 3\}$ и $\mathbf{b} = \{-1, 5, 8\}$. Определить координаты следующих векторов:

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; 3) $3\mathbf{a}$; 4) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$; 5) $0{,}5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

12 Векторы **a** и **b** образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$; зная, что |**a**| = 3 и |**b**| = 4, вычислить:

1) $\mathbf{ab}$; 2) $\mathbf{a}^2$; 3) $\mathbf{b}^2$; 4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$; 5) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})$; 6) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$.

13 Векторы **a** и **b** образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что |**a**| = 5 и |**b**| = 3, вычислить:

1) $\mathbf{ab}$; 2) $\mathbf{a}^2$; 3) $\mathbf{b}^2$; 4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$; 5) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})$; 6) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$.

14 Даны векторы $\mathbf{a} = \{4, -2, -4\}$ и $\mathbf{b} = \{6, -3, 2\}$. Вычислить:

1) $\mathbf{ab}$; 2) $\sqrt{\mathbf{a}^2}$; 3) $\sqrt{\mathbf{b}^2}$; 4) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; 5) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$.

15 Даны векторы $\mathbf{a} = \{2, 4, 4\}$ и $\mathbf{b} = \{2, -6, 3\}$. Вычислить:

1) $\mathbf{ab}$; 2) $\sqrt{\mathbf{a}^2}$; 3) $\sqrt{\mathbf{b}^2}$; 4) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})$; 5) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$.

16 Даны вершины четырехугольника $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$ и $D(-5, -5, 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

17 Вычислить проекцию вектора $\mathbf{a} = \{5, 2, 5\}$ на ось вектора $\mathbf{b} = \{2, -1, 2\}$ и найти косинус угла между этими векторами.

18 Вычислить проекцию вектора $\mathbf{a} = \{6, 3, 2\}$ на ось вектора $\mathbf{b} = \{2, 2, 1\}$ и найти косинус угла между этими векторами.

19 Даны вершины $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$ треугольника. Определить его внутренний угол при вершине B.

20 Даны три вектора $\mathbf{a} = \{2, -1, -3\}$, $\mathbf{b} = \{1, -3, 2\}$ и $\mathbf{c} = \{3, -4, 12\}$. Найти вектор **x**, удовлетворяющий условиям: $\mathbf{xa} = -5$, $\mathbf{xb} = -11$, $\mathbf{xc} = 20$.

21 Определить и построить вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, если:

1) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; 3) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

22 Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$;

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$;

3) $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$;

4) $2\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + 3\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 4\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$.

23 Векторы **a** и **b** образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что |**a**| = 1 и |**b**| = 2, вычислить:

1) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$; 2) $|(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})|^2$; 3) $|(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (3\mathbf{a} - \mathbf{b})|^2$.

24 Даны векторы $\mathbf{a} = \{3, -1, -2\}$ и $\mathbf{b} = \{1, -2, -1\}$. Вычислить:

1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; 2) $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$; 3) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (\mathrm{a} - \mathbf{b})$.

25 Даны векторы $\mathbf{a} = \{1, 1, -3\}$ и $\mathbf{b} = \{3, 2, 0\}$. Вычислить:

1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; 2) $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times \mathbf{b}$; 3) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (\mathrm{a} - 3\mathbf{b})$.

26 Построить параллелограмм на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ и вычислить его площадь и высоту.

27 Даны вершины $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$ и $C(6, 2, 0)$ треугольника. Вычислить его площадь и длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

28 Даны вершины $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ и $C(1, 3, -1)$ треугольника. Вычислить его площадь и длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

29 С помощью векторного произведения выяснить, коллинеарны ли векторы $\mathbf{a} = \{1, 0, 3\}$ и $\mathbf{b} = \{2, 0, 6\}$.

30 Векторы **a**, **b** и **c**, образующую правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что |**a**| = 4, |**b**| = 2 и |**c**| = 3, вычислить **abc**.

31 Вектор **c** перпендикулярен к векторам **a** и **b**, угол между векторами **a** и **b** равен 30°. Зная, что |**a**| = 6, |**b**| = 3 и |**c**| = 3, вычислить **abc**.

32 Даны три вектора $\mathbf{a} = \{0, 1, -3\}$, $\mathbf{b} = \{3, 2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 3, 2\}$. Вычислить **abc**.

33 Установить, компланарны ли векторы:

$\mathbf{a} = \{2, 3, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -1, 3\}$, $\mathbf{c} = \{1, 9, -11\}$;

$\mathbf{a} = \{1, 1, -3\}$, $\mathbf{b} = \{0, 1, 0\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$;

$\mathbf{a} = \{2, -1, 2\}$, $\mathbf{b} = \{1, 2, -3\}$, $\mathbf{c} = \{3, -4, 7\}$.

34 Доказать, что четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

35 Вычислить объем пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(5, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$, $C(1, 2, 4)$, $D(0, 0, 0)$.

36 Даны вершины пирамиды: $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

1 В треугольнике ABC составить уравнения медианы и высоты, проведенных из вершины A. $A(-4; 2)$, $B(-7; 7)$, $C(-13; -13)$.

2 В треугольнике ABC составить уравнение прямой, проходящей через вершину A перпендикулярно медиане BM. $A(0; 4)$, $B(2; 6)$, $C(8; -2)$.

3 В треугольнике ABC найти проекцию вершины B на сторону AC. $A(2; 4)$, $B(4; 10)$, $C(6; -2)$.

4 Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2; 1)$:

а) параллельно прямой $3x + 2y - 5 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $A(2; 1)$ $3x + 4y - 2 = 0$.

5 Зная координаты вершины $A(1; 3)$ треугольника ABC и уравнения двух его медиан $x - 2y + 1 = 0$; $y - 1 = 0$ составить уравнения всех сторон треугольника.

6 Пусть стороны AB, BC и AC треугольника ABC лежат на прямых, имеющих следующие уравнения: $x + y + 1 = 0$; $x + 6y + 1 = 0$. Составить уравнения высоты, проведенной из вершины A.

7 Пусть стороны AB, BC и AC треугольника ABC лежат на прямых, имеющих следующие уравнения: $2x + y - 2 = 0$; $5x + y - 2 = 0$; $x = 1$. Написать уравнение медианы, проведенной из вершины B.

8 Найти точку B^* симметричную точке $B(3; 5)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(0; 1)$ и $C(8; -3)$.

9 Даны координаты вершин четырехугольника $ABCD$: $A(0; 1)$, $B(3; 6)$, $C(8; 2)$, $D(5; -2)$. Найти угол между диагональю AC и стороной AD.

10 Даны вершина $A(2; 6)$ треугольника ABC и уравнения высот $y = x$ и $y = -2x$, проходящих через вершины B и C. Написать уравнение стороны BC треугольника ABC.

11 Одна из сторон квадрата лежит на прямой $3x + 2y - 7 = 0$, а координаты одной из вершин квадрата $A(-2; 3)$. Найти площадь этого квадрата.

12 Одна из вершин квадрата $A(1; 2)$ лежит на стороне, уравнение которой $2x + y - 4 = 0$. Написать уравнение диагонали квадрата, выходящей из точки A.

13 Найти точку A^* симметричную точке $A(2; 4)$ относительно прямой $2x + 3y - 12 = 0$. Сделать чертеж.

14 В треугольнике ABC: $A(-2; 2)$, $B(2; 5)$, $C(6; -4)$. Написать уравнение биссектрисы, выходящей из вершины A.

15 Даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма $ABCD$: $A(-4; 2)$, $B(0; 6)$, $C(6; -2)$. Найти координаты вершины D. Написать уравнение диагонали BD.

16 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -3)$ и точку M, делящую отрезок BC в отношении 3 : 2, где $B(4; 1)$, $C(6; 4)$.

17 Найти точку пересечения медиан треугольника ABC: $A(0; 2)$, $B(4; 1)$, $C(2; -6)$.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Привести уравнение линии к каноническому виду, определить тип линии, найти эксцентриситет, координаты фокусов(а). Изобразить эту линию.

1) $4x^2 + 25y^2 + 32x - 150y + 189 = 0$.

2) $4x^2 + 16y^2 + 8x - 160y + 340 = 0$.

3) $x^2 - 2x + 6y + 7 = 0$.

4) $x^2-8x+8y-8=0$.

5) $36x^2+9y^2+288x+18y+261=0$.

6) $16x^2-25y^2-64x+100y-436=0$.

7) $25x^2-9y^2+200x-36y+139=0$.

8) $9x^2-9y^2-90x+72y=0$.

9) $9x^2+36y^2-18x+216y+9=0$.

10) $4x^2-36y^2-24x-288y-684=0$.

11) $y^2-4y-6x+28=0$.

21) $y^2+8y+8x+8=0$.

ПЛОСКОСТЬ

1 Даны точки $A(3; –2; –1)$, $B(0; 0; –2)$, $C(–3; 1; 0)$, $D(–4; –2; 2,5)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x – 3y + 4z = 0$. (Ответ: точки A, B и D.)

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(–3; 0; 2)$ и перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; 3; 5)$. (Ответ: $2x + 3y + 5z – 4 = 0$.)

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; 4; 5)$ и перпендикулярно вектору $\vec{n} = (–1; –3; 2)$. (Ответ: $x + 3y – 2z – 5 = 0$.)

4 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; –3; –1)$ и перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(3; 4; 1)$ и $M_2(1; –2; –3)$. (Ответ: $x + 3y + 2z + 9 = 0$.)

5 Даны точки $A(3; –2; 4)$ и $B(1; 4; 2)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{AB}$. (Ответ: $x – 3y + z – 7 = 0$.)

6 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; –1; 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2; 3; –4)$, $M_2(–1; 2; –3)$. (Ответ: $3x + y – z = 0$.)

7 Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6; –10; 1)$ и отсекает на оси OX отрезок $a = –3$, а на оси OZ – отрезок $c = 2$. (Ответ: $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$.)

8 Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; –3; –4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины. (Ответ: $x + y + z + 5 = 0$.)

9 Составьте уравнение плоскости, параллельной плоскости XOY и проходящей через точку $M_0(2; –2; 3)$. (Ответ: $z – 3 = 0$.)

10 Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2; –3; 3)$ параллельно плоскости $3x + y – 3z = 0$. (Ответ: $(–2; –6; 2)$).

11 Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(–2; 7; 3)$ параллельно плоскости $x – 4y + 5z – 1 = 0$. (Ответ: $–1/15; 4/15; –1/3$.)

12 Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1; 5; 6)$, $M_2(–1; 7; 10)$. (Ответ: $x – y – 2z + 22 = 0$.)

13 Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси OX и проходящей через точку $M_0(2; –1; 3)$. (Ответ: $x – 2 = 0$.)

14 Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной оси OZ и проходящей через точку $M_0(–2; –3; –1)$. (Ответ: $z – 1 = 0$.)

15 Составьте уравнение плоскости, параллельной плоскости XOZ и проходящей через точку $M_0(-3; -2; 4)$. (Ответ: $y + 2 = 0$.)

16 Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось OX и через точку $M(3; 2; 4)$. (Ответ: $2y - z = 0$.)

17 Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось OZ и через точку $M(1; 1; 1)$. (Ответ: $x - y = 0$.)

18 Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось OY и через точку $M(-2; -3; -4)$. (Ответ: $2x - z = 0$.)

19 Составьте уравнение плоскости, параллельной оси OZ и проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(-2; 3; 4)$. (Ответ: $4x + 5y - 7 = 0$.)

20 Составьте уравнение плоскости, параллельной оси OY и проходящей через точки $M_1(1; -2; -1)$ и $M_2(3; 2; -4)$. (Ответ: $3x + 2z - 1 = 0$.)

21 Составьте уравнение плоскости, параллельной оси OX и проходящей через точки $M_1(-4; 2; 5)$ и $M_2(-5; -1; 3)$. (Ответ: $2y - 3z + 11 = 0$.)

22 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -1; 3)$ и параллельной векторам $\vec{a} = (3; 0; -1)$ и $\vec{b} = (-3; 2; 2)$. (Ответ: $2x - 3y + 6z - 25 = 0$.)

23 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; 3; -5)$ и $N(-1; 1; -6)$ параллельно вектору $\vec{a} = (4; 4; 3)$ и ???. (Ответ: $2x - 5y + 4z + 31 = 0$.)

24 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-4; -3; 1)$ и параллельной векторам $\vec{a} = (5; 2; -3)$ и $\vec{b} = (1; 4; -2)$. (Ответ: $8x + 7y + 18z + 35 = 0$.)

25 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 3; 4)$ и параллельной плоскости $x + 2y - 3z + 4 = 0$. (Ответ: $x + 2y - 3z + 8 = 0$.)

26 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; -2; 3)$ и параллельной плоскости $2x - 3y + z - 1 = 0$. (Ответ: $2x - 3y + z - 7 = 0$.)

27 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2; -3; 1)$ и $M_2(1; 4; -2)$ и перпендикулярной плоскости $2x + 3y - z + 4 = 0$. (Ответ: $2x - 3y - 5z = 0$.)

28 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -4; -3)$ и $B(4; -2; -1)$ и перпендикулярной плоскости $x - y - 3z + 7 = 0$. (Ответ: $2x - y + z - 9 = 0$.)

29 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; -3)$ и $M_2(-3; 4; 1)$ и перпендикулярной плоскости $x - y - 3z + 2 = 0$. (Ответ: $x + y - 1 = 0$.)

30 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной плоскостям $x + 2y - 2z + 4 = 0$ и $x - 2y + z - 4 = 0$. (Ответ: $2x + 3y + 4z - 3 = 0$.)

31 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - y + 2z - 3 = 0$. (Ответ: $9x - 5y - 16z = 0$.)

32 Найти острый угол между плоскостями $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ и $3x - 4y - z + 3 = 0$. (Ответ: $\varphi = 59°21'$.)

33 Найдите острый угол между плоскостями $x - y + z + 1 = 0$ и $2x + 3y - z - 3 = 0$. (Ответ: $\varphi = 72°02'$.)

34 Определить, при каком значении B плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и $2x + By + 10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны. (Ответ: $B = 3$.)

35 Определить, при каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x - 3y + 2z + 5 = 0$ будут перпендикулярны. (Ответ: $C = -9$.)

36 Найти расстояние от точки $A(2; 3; 4)$ до плоскости $4x + 3y + 12z - 5 = 0$. (Ответ: 60/13.)

37 Найдите расстояние от точки $A(1; -2; 1)$ до плоскости $10x - 2y + 11z - 10 = 0$. (Ответ: 1.)

38 Найдите расстояние от точки $A(2; 3; -2)$ до плоскости $6x - 7y - 6z - 22 = 0$. (Ответ: 11.)

39 Найдите расстояние между параллельными плоскостями $2x - 3y + 6z + 28 = 0$ и $2x - 3y + 6z - 14 = 0$. (Ответ: 6.)

40 Найдите расстояние между параллельными плоскостями $x - y + 2z - 4 = 0$ и $x - y + 2z + 10 = 0$. (Ответ: $\sqrt{6}$.)

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3; -1; 2)$:

а) параллельно вектору $\vec{a}(2; 1; -3)$;

б) параллельно оси OY;

в) параллельно прямой $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

2 Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку В(2; 4; –5):

а) параллельно вектору $\vec{m}(0; -1; 3)$;

б) параллельно оси OZ;

в) параллельно прямой $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z}{3}$.

3 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две точки $A(2; -5; 0)$ и $B(3; -1; 4)$ и записать его в параметрическом виде.

4 Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(4; 2; -3)$ и $B(1; 0; -1)$ и записать их в каноническом виде.

5 Дана прямая $\begin{cases} 3x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$:

а) найти какой-нибудь ее на направляющий вектор $\vec{m}$;

б) записать уравнения этой прямой в каноническом виде.

6 Дана прямая $\begin{cases} 2x + 4y - z - 5 = 0 \\ 4x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$:

а) найти какой-нибудь ее на направляющий вектор $\vec{m}$;

б) записать уравнения этой прямой в параметрическом виде.

7 Составить канонические и параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases} 4x + y - 3 = 0 \\ x - y + 2z + 8 = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x - 4y + z - 8 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 7x - 2y + 4 = 0 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases}$.

8 Проверить, параллельны ли прямые:

а) $\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -t + 1 \\ z = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + 4y - 5z + 3 = 0 \\ x + 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$;

б) $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{-4}$ и $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2 = 0 \\ 2x + 8y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$.

9 Проверить, перпендикулярны ли прямые:

а) $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t + 2 \\ z = -t + 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

10 Найти точки пересечения прямой, проходящей через точки $A_1(2; 0; -4)$ и $A_2(3; 1; -5)$, с координатными плоскостями.

11 Найти точки пересечения прямой, проходящей через точки $B_1(-1; 3; -2)$ и $B_2(2; -1; 4)$, с координатными плоскостями.

12 Даны вершины треугольника ABC: $A(2; -5; 4)$, $B(3; 2; -1)$, $C(0; 4; -3)$. Составить:

а) уравнение стороны AB треугольника ABC;

б) уравнение медианы, проведенной из вершины A;

в) уравнение средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AB;

г) уравнение биссектрисы его внутреннего угла при вершине C;

д) уравнение его высоты, опущенной из вершины B.

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ

1 Вычислить угол между прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$ и плоскостью $x + 2y - 3z + 4 = 0$. (Ответ: $\varphi = 14°22'$.)

2 Вычислить угол между прямой $\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{4}$ и плоскостью $2x - 3y - 2z + 5 = 0$. (Ответ: $\varphi = 21°07'$.)

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; 2; -3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{2}$. (Ответ: $4x + 3y + 2z + 4 = 0$.)

4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; -4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+5}{3}$. (Ответ: $2x + 4y + 3z + 12 = 0$.)

5 Через точку $M(1; 3; 2)$ провести прямую, перпендикулярную плоскости $x - 2y + 2z - 3 = 0$. (Ответ: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$.)

6 Составьте уравнение перпендикуляра к плоскости $4x - 5y - z - 3 = 0$, проходящего через точку $M(-1; 1; -2)$. (Ответ: $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{-1}$.)

7 Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{5}$ с плоскостью $x + 2y - 3z - 4 = 0$. (Ответ: (6; 5; 4).)

8 Найти точку пересечения прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{5}$ с плоскостью $2x + 3y + z - 22 = 0$. (Ответ: (1; 7; –1).)

9 Составьте уравнение перпендикуляра к плоскости $x - 3y + 2z - 26 = 0$, проходящего через точку (–2; 2; –4). Найдите координаты основания этого перпендикуляра (Ответ: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{2}$; (1; –7; 2).)

10 Убедиться в том, что прямая $\frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{-2}$ параллельна плоскости $5x - 2y + 7z + 3 = 0$.

11 Проверьте, что прямая $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+1}{3}$ параллельна плоскости $3x-5y-3z-4=0$.

12 Проверьте, что прямая $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$ лежит в плоскости $2x-y-2z-9=0$.

13 Проверьте, что прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{5}$ лежит в плоскости $3x-4y-2z-7=0$.

14 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases}2x+y-3z+4=0\\ x-y+z+3=0\end{cases}$ и точку $M(2;\ 1;\ -1)$. (Ответ: $2x-5y+7z+8=0$.)

15 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases}2x-4y+5z+5=0\\ 2x-y+2z-1=0\end{cases}$ и точку $M(3;\ 2;\ 1)$. (Ответ: $4x+2y-z-7=0$.)

16 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;\ 4;\ 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$. (Ответ: $y-z-4=0$.)

17 Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. (Ответ: $x+2y-2z-1=0$.)

18 Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z-1=0$, а прямая $x=t+7,\ y=t-2,\ z=2t+1$ лежит в этой плоскости.

19 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ -1)$ и прямую $x=t-3$, $y=2t+5$, $z=-3t+1$. (Ответ: $10x+13y+{}$ $+12z-47=0$.)

20 Найти проекцию точки $M(4;\ -3;\ 1)$ на плоскость $x-2y-z-15=0$. (Ответ: $M(5;\ -5;\ 0)$.)

21 При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax+2y-2z-7=0$? (Ответ: $A=-1$, $n=-6$.)

22 Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

23 Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-6}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases}2x+y-4z+2=0\\ 4x-y-5z+4=0\end{cases}$.

24 Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$. (Ответ: $M(2;\ 3;\ 6)$.)

25 Найти проекцию точки $P(3;\ 1;\ -1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$. (Ответ: $P(5;\ 5;\ 5)$.)

26 При каком значении A плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$? (Ответ: $A=-1$.)

27 При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$? (Ответ: $C=1{,}5$; $m=-6$.)

28 При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$? (Ответ: $A=4$, $B=-8$.)

29 Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-z+1=0$, а прямая $x=t+7$, $y=t-2$, $z=2t+1$ лежит в этой плоскости.

30 Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-8=0$. (Ответ: $M(2;0;1)$.)

31 При каких значениях B и D прямая $x-2y+z-9=0$, $3x+By+$ $+z+D=0$ лежит в плоскости OXY? (Ответ: $B=-6$, $D=-27$.)

32 Найти точку, симметричную точке $M(4;3;10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$. (Ответ: $M_1(2;9;6)$.)

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1 Определить координаты центра и найти радиус каждой из следующих сфер:

а) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$;

б) $x^2+y^2+z^2+8x=0$;

в) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$;

г) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z-22=0$.

2 Составить уравнение сферы в каждом из следующих случаев:

а) сфера имеет центр $O(-3;2;5)$ и радиус $r=5$;

б) сфера имеет центр $O(0;0;0)$ и радиус $r=2$;

в) сфера проходит через точку $A(-2;5;3)$ и имеет центр $O(4;-2;3)$;

г) точки $A(3;4;-6)$ и $B(5;-6;4)$ являются концами одного из диаметров сферы;

д) центром сферы является начало координат и плоскость $16x-15y-12z+75=0$ является касательной к сфере;

е) сфера имеет радиус $r=3$ и касается плоскости $x+2y+2z+3=0$ в точке $A(1;1;-3)$.

3 Установить как расположена точка $A(2;-1;3)$ относительно каждой из следующих сфер – внутри, вне или на поверхности:

а) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;

б) $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z-3=0$;

в) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$.

4 Привести уравнение поверхности к каноническому виду, определить вид и расположение поверхности, пользуясь переносом системы координат. Сделать чертеж.

а) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;

б) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+44=0$;

в) $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$;

г) $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$.

5 Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ и $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

в) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$;

г) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$ и $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

6 Найти линии пересечения поверхностей второго порядка и координатных плоскостей. Определить вид линии и поверхности. Сделать чертеж.

а) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$;

б) $2x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$;

в) $-2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$;

г) $2y^2 + z^2 = 2x$;

д) $z^2 - y^2 = x$;

е) $y^2 - 6z = 0$.

7 Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

а) $y = 5x$, $y = 0$, $x = 3$, $z = 0$;

б) $y = 3x$, $y = 0$, $x = z$, $z = x^2 + y^2$;

в) $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$, $z = x$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$;

д) $4(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

е) $z=4\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 5 - x^2 - y^2$.

8 Установить, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

9 Установить, что плоскость $z + 1 = 0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

10 Установить, что плоскость $y + 6 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.