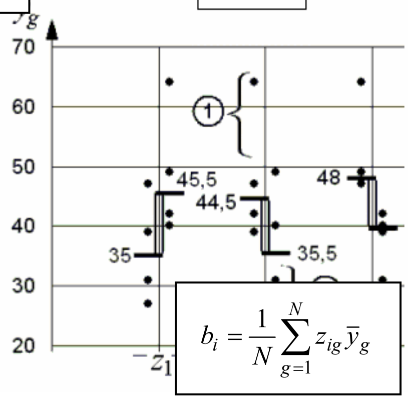
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ

$$\hat{y} = 27{,}83 - 0{,}75z_1 + 4{,}33z_2 + 3{,}72z_2 + 1{,}3z_1z_2 - 1{,}46z_2z_3 -$$

$$\boxed{N = 2^n}$$

$$\boxed{\mathrm{N} = 2^{\mathrm{n}}}$$



g	z_1	z_2	z_3
1	–1	–1	–1
2	+1	–1	–1
3	–1	+1	–1
4	+1	+1	–1
5	–1	–1	+1
6	+1	–1	+1
7	–1	+1	+1
8	+1	+1	+1

$$\boxed{b_i = \frac{1}{N}\sum_{g=1}^{N} z_{ig}\,\bar{y}_g}$$

$$\boxed{\mathbf{b_i} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathbf{g=1}}^{\mathbf{N}} \mathrm{z}_{\mathbf{ig}}\,\bar{\mathrm{y}}_{\mathbf{g}}}$$

Издательство ТГТУ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания по выполнению курсовой работы
по дисциплине "Планирование и организация эксперимента"
для студентов 4 курса дневного и 5 курса заочного отделений
специальностей 200503 и 220501

Тамбов
Издательство ТГТУ
2004

УДК 681.5.017
ББК В183.5я73-5
М34

Р е ц е н з е н т

Доктор технических наук, профессор
А.А. Чуриков

М34 Математическое моделирование автоматизированных систем контроля и управления: Метод. указания / Авт.-сост. А.Ю. Сенкевич. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 44 с.

В методических указаниях раскрывается содержание курсовой работы по дисциплине "Планирование и организация эксперимента", приводятся примеры расчетов и варианты заданий типовой курсовой работы.

Методические указания предназначены для выполнения курсовой работы студентами дневного и заочного отделений специальностей 200503 "Стандартизация и сертификация" и 220501 "Управление качеством".

УДК 681.5.017
ББК В183.5я73-5

Учебное издание

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ
КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ**

Методические указания

Автор-составитель **Сенкевич Алексей Юрьевич**

Редактор Т.М. Глинкина
Компьютерное макетирование Е.В. Кораблева

Подписано в печать 29.11.2004
Формат 60 × 84 / 16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman. Объем: 2,56 усл. печ. л.; 2,5 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. С. 830[М]

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета,
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Цель выполнения курсовой работы "Планирование и организация эксперимента" – закрепление и углубление знаний студентов по дисциплинам фундаментального, общетехнического и профессионального циклов, а также подробное изучение современных методов планирования экспериментов, математического моделирования объектов и систем контроля и управления.

Задачей курсовой работы является приобретение студентами навыков выбора необходимого плана эксперимента в соответствии с поставленной перед исследователем проблемой, построения матрицы планирования, обработки и анализа полученных результатов в зависимости от выбранного плана эксперимента.

Работа выполняется студентами дневного отделения в 8 семестре и студентами заочного отделения в 9 семестре в сроки, установленные учебными планами.

Варианты заданий выдаются преподавателем-консультантом на кафедре.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа должна быть выполнена в соответствии со стандартом предприятия СТП ТГТУ. Расчеты, выводы формул, принятие гипотез должны поясняться и обосновываться. Помимо этого все расчеты должны содержать начальные, промежуточные и окончательные данные.

Работа состоит из пояснительной записки на 20 – 25 страницах и графической части объемом 2 – 3 листа формата А4.

В состав пояснительной записки входят следующие разделы:

Задание на курсовую работу согласно варианту

Содержание

Введение

1 Применение полного или дробного факторного эксперимента для идентификации модели объекта контроля или управления

1.1 Составление матрицы планирования

1.2 Проведение эксперимента на объекте исследования

1.3 Проверка воспроизводимости эксперимента

1.4 Получение математической модели объекта

1.5 Проверка адекватности полученной модели

2 Применение метода случайного баланса для выделения наиболее существенных входных переменных многофакторного объекта

2.1 Составление матрицы планирования

2.2 Проведение эксперимента на объекте исследования

2.3 Проверка воспроизводимости эксперимента

2.4 Построение диаграммы рассеяния

2.5 Последовательное выделение наиболее существенных переменных при помощи вкладов или выборочных ортогональных матриц планирования

2.6 Выделение наиболее существенных парных взаимодействий

Выводы по работе.

Список использованной литературы

В состав графической части входят следующие инженерные документы (чертежи):

1 Схемы и математические модели исследуемых объектов контроля и управления.

2 Блок-схемы алгоритмов математического моделирования.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Статистические методы планирования активного эксперимента являются одним из эмпирических способов получения математического описания статики сложных объектов исследования (рис. 1), т.е. уравнения связи отклика объекта y и независимых управляемых нормированных[1] входных переменных (факторов) $\vec{z} = (z_1,\ z_2, ...,\ z_n)$ [1, 4].

---

[1] Понятие "нормированный фактор" будет рассмотрено ниже.

При этом математическое описание объекта может быть представлено в виде некоторого полинома – отрезка ряда Тейлора, в который разлагается неизвестная (искомая) зависимость в окрестности основной точки $\bar{z}_0$:

$$M\{y\} = \varphi(z_1, z_2, ..., z_n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i + \sum_{\substack{i;\ l=1 \\ i<l}}^{n} \beta_{il} z_i z_l + \sum_{i=1}^{n} \beta_{il} z_i^2 + ..., \qquad (1)$$

где $\beta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\Big|_{\bar{z}=\bar{z}_0}$; $\beta_{il} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial z_i}\Big|_{\bar{z}=\bar{z}_0}$; $\beta_{il} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i^2}\Big|_{\bar{z}=\bar{z}_0}$ – теоретические коэффициенты модели.

Рис. 1 Схема объекта контроля (управления)

Вследствие наличия неуправляемых и даже неконтролируемых факторов ε (рис. 1) изменение величины y носит случайный характер, поэтому функциональная зависимость $\varphi(\bar{z})$ не дает точной связи между управляемыми факторами и откликом y_g объекта в каждом g-м опыте, а лишь между управляемыми факторами и математическим ожиданием случайной величины y:

$$M\{y_g\} = \varphi(\bar{z}_g). \qquad (2)$$

Здесь $\bar{z}_g = (z_{1g}, z_{2g}, ..., z_{ng})$ – g-я точка пространства независимых управляемых факторов (факторного пространства). В таком случае по результатам эксперимента можно отыскать уравнение регрессии в форме некоторого полинома

$$\hat{y} = b_o + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i + \sum_{\substack{i;l=1 \\ i<l}}^{n} b_{il} z_i z_l + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} z_i^2 + ..., \qquad (3)$$

где выборочные коэффициенты регрессии b_0, b_i, b_{il}, b_{ii}, ... являются лишь оценками для теоретических коэффициентов β_0, β_i, β_{il}, β_{ii}, ... соответственно, а $\hat{y}$ – оценкой для $M\{y\}$.

Для построения линейных и неполных степенных математических моделей применяют полный факторный эксперимент или дробный факторный эксперимент, обладающие ортогональной матрицей планирования. Математическое описание поверхности отклика y объекта в окрестности точки базового (номинального) режима, задаваемого вектором $\bar{x}_0$ с реальными (размерными) значениями факторов $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, можно получить варьированием каждого из факторов x_i на двух уровнях, отличающихся от базового уровня x_{i0} на величину интервала варьирования Δx_i. Интервал варьирования по каждому управляемому фактору выбирают так, чтобы приращение величины отклика y к базовому значению y_0 при реализации $x_{i0} \pm \Delta x_i$ можно было выделить на фоне "шума" при небольшом числе параллельных опытов.

Для использования полного и дробного факторного экспериментов необходимо выполнение следующих основных предпосылок.

1 Результаты наблюдений y_1, y_2, …, y_N отклика в N точках факторного пространства представляют собой независимые нормально распределенные случайные величины, т.е. на них воздействуют нормально распределенные случайные помехи ε (рис. 1) с нулевым математическим ожиданием $M\{\varepsilon\} = 0$.

2 Дисперсии $\sigma^2\{y_g\}$ $(g = 1, 2, ..., N)$ равны. Это означает, что получаемые при проведении многократных повторных наблюдений над величиной y_g в точках $\bar{z}_g$ выборочные оценки $s_g^2\{y\}$ однородны, дисперсия же $\sigma^2\{y_g\}$ не зависит от математического ожидания $M\{y_g\}$, т.е. не отличается от дисперсии, полу-

ченной при повторных наблюдениях в любой другой точке $\vec{z}_g$ факторного пространства (воспроизводимость с равной точностью).

3 Независимые управляемые факторы z_1, z_2, …, z_n измеряются с пренебрежимо малыми ошибками по сравнению с ошибкой в определении y .

1 ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Полным факторным экспериментом (ПФЭ) называется эксперимент, реализующий все возможные неповторяющиеся комбинации уровней n независимых управляемых факторов, каждый из которых варьируют на двух уровнях [4]. Число этих комбинаций $N = 2^n$ определяет тип ПФЭ. Для упрощения дальнейшее изложение построим на примере планирования типа $N = 2^3$, т.е. на примере объекта с тремя (n = 3) независимыми управляемыми факторами x_1, x_2, x_3. При планировании эксперимента проводят преобразование размерных управляемых независимых факторов x_i в безразмерные (нормированные)

$$z_i = (x_i - x_{i0}) / \Delta x_i \, . \tag{4}$$

Это дает возможность легко построить ортогональную матрицу планирования (МП) и значительно облегчает дальнейшие расчеты, так как в этом случае верхние и нижние уровни варьирования $z_{i\text{в}}$ и $z_{i\text{н}}$ в относительных единицах равны соответственно +1 и –1 независимо от физической природы факторов, значений основных уровней $x_{i\text{в}}$ и $x_{i\text{н}}$ и интервалов варьирования факторов Δx_i.

Например, пусть некоторый входной фактор x_i (допустим, температура) имеет номинальное значение $x_{i0} = 75\ {}^\circ\text{C}$, интервал варьирования $\Delta x_i = 15\ {}^\circ\text{C}$. Тогда верхнему уровню варьирования $x_{i\text{в}} = x_{i0} + \Delta x_i = 90\ {}^\circ\text{C}$ будет соответствовать, согласно формуле (4), нормированное значение $z_{i\text{в}} = (90\ {}^\circ\text{C} - 75\ {}^\circ\text{C}) / 15\ {}^\circ\text{C} = +1$, а нижнему уровню $x_{i\text{н}} = 60\ {}^\circ\text{C}$ – нормированное значение $z_{i\text{н}} = -1$.

Если для трехфакторной задачи теоретическое уравнение регрессии относительно нормированных факторов имеет вид

$$M\{y\} = \beta_0 + \sum_{i=1}^{3} \beta_i z_i + \sum_{\substack{i;l=1 \\ i<l}}^{3} \beta_{il} z_i z_l + \beta_{123} z_1 z_2 z_2 \, , \tag{5}$$

(т.е. степенями факторов выше первой можно пренебречь), то ПФЭ дает возможность найти раздельные (не смешанные друг с другом) оценки коэффициентов β_i. Так как изменение выходной величины y носит случайный характер, то имеется возможность определить лишь выборочные коэффициенты регрессии b_i, b_{il} для оценивания теоретических коэффициентов β_i, β_{il}. Процесс нахождения модели (идентификации) методом ПФЭ состоит из: 1) планирования эксперимента; 2) проведения эксперимента на объекте исследования; 3) проверки воспроизводимости (однородности выборочных дисперсий s_g^2) эксперимента; 4) получения математической модели объекта с проверкой статистической значимости оценок выборочных коэффициентов регрессии; 5) проверки адекватности математического описания.

1.1 Планирование эксперимента. Матрицу планирования ПФЭ для рассматриваемого примера (n = 3) можно представить в виде табл. 1.

Таблица 1

g	z_0	z_1	z_2	z_3	z_1z_2	z_1z_3	z_2z_3	$z_1z_2z_3$
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Ее составляют по следующим правилам.

1 Каждая g-я строка матрицы содержит набор координат z_{ig} точки, в которой проводится g-й опыт (i = 1, 2, ..., n; g = 1, 2, ..., N).

2 Вводят фиктивную переменную z_0= +1 для определения свободного члена b_0 уравнения регрессии.

3 Поскольку переменные z_i принимают лишь значения +1 и –1, все взаимодействия $z_i z_l$ (i, l = 1, 2, 3; $i \neq l$) могут принимать только такие же значения.

4 В первой строке (g = 1) все управляемые факторы выбирают на нижнем уровне, т.е. z_i = –1. Последующие g-е варианты варьирования при составлении МП выбирают так: при построчном переборе всех вариантов частота смены знака факторов для каждого последующего фактора z_{i+1} вдвое меньше, чем для предыдущего z_i (см. табл. 1), т.е. знаки первого столбца чередуются через один, второго – через два, третьего – через четыре.

Три столбца управляемых факторов образуют собственно план эксперимента (обведено жирной чертой в табл. 1), а остальные столбцы МП получаются перемножением соответствующих значений управляемых факторов и необходимы для расчета оценок соответствующих коэффициентов при взаимодействиях.

Аналогично могут быть получены планы для сколь угодно большого числа n независимых управляемых факторов.

1.2 Проведение эксперимента на объекте исследования. Так как изменение отклика y носит случайный характер, то в каждой точке $\bar{x}_g$ приходится проводить m параллельных опытов и результаты наблюдений $y_{g1}, y_{g2}, ..., y_{gm}$ усреднять:

$$\bar{y}_g = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_{gk} . \tag{6}$$

Пусть в рассматриваемом случае число параллельных опытов в каждой строке МП m = 3. Перед реализацией плана на объекте необходимо рандомизировать (расположить в случайном порядке) варианты варьирования факторов, т.е. с помощью таблицы равномерно распределенных случайных чисел или компьютерной программы для проведения процесса рандомизации определить последовательность реализации вариантов варьирования плана в $N \times m$ опытах.

Далее проводят эксперимент, и результаты наблюдений эксперимента соответственно вариантам варьирования плана записывают в столбцы y_{g1}, y_{g2}, y_{g3} табл. 2, а в столбце $\bar{y}_g$ записывают осредненные значения.

Таблица 2

Параллельные опыты

g	z_0	z_1	z_2	z_3	y_{g1}	y_{g2}	y_{g3}	$\bar{y}_g$	s_g^2
1	+1	–1	–1	–1	20,5	23,1	22,2	21,93	1,74
2	+1	+1	–1	–1	15,4	14,9	13,8	14,70	0,67
3	+1	–1	+1	–1	26,5	28,7	25,4	26,87	2,82
4	+1	+1	+1	–1	32,0	32,8	34,0	32,93	1,01
5	+1	–1	–1	+1	28,0	29,0	30,5	29,17	1,58
6	+1	+1	–1	+1	27,1	28,5	29,0	28,20	0,97
7	+1	–1	+1	+1	36,2	34,9	38,0	36,37	2,42
8	+1	+1	+1	+1	32,4	32,0	33,0	32,47	0,25

1.3 Проверка воспроизводимости эксперимента есть не что иное, как проверка выполнения второй предпосылки регрессионного анализа об однородности выборочных дисперсий s_g^2. Задача состоит в проверке гипотезы о равенстве генеральных дисперсий $\sigma^2\{y_1\} = \sigma^2\{y_2\} = ... = \sigma^2\{y_N\}$ при опытах соответственно в точках $\bar{z}_1, ..., \bar{z}_N$. Оценки дисперсий находят по известной формуле

$$s_g^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(y_{gk} - \bar{y}_g)^2 . \tag{7}$$

Рассчитанные для рассматриваемого примера по формуле (7) значения s_g^2 занесены в последний столбец табл. 2.

Например, для первой строки получим

$$s_1^2 = \frac{1}{3-1}\left[(20{,}5 - 21{,}93)^2 + (23{,}1 - 21{,}93)^2 + (22{,}2 - 21{,}93)^2\right] \approx 1{,}74 .$$

Так как все оценки дисперсий получены по выборкам одинакового объема $m = 3$, то число степеней свободы для всех них одинаково и составляет

$$\nu_{1\text{вос}} = m - 1. \tag{8}$$

В этом случае для проверки гипотезы об однородности оценок s_g^2 дисперсий следует пользоваться *критерием Кохрэна*, который основан на законе распределения отношения максимальной оценки дисперсии к сумме всех сравниваемых оценок дисперсий, т.е.

$$G = \frac{\max\limits_g\left\{s_g^2\right\}}{\sum\limits_{g=1}^{N} s_g^2\{y\}} . \tag{9}$$

Если вычисленное по данным эксперимента (эмпирическое) значение критерия G окажется меньше критического значения $G_{\text{кр}}$, найденного по табл. П.1 (приложения) для $\nu_{1\text{вос}} = m - 1$ и $\nu_{2\text{вос}} = N$ и выбранного уровня значимости $q_{\text{вос}}$ (обычно $q_{\text{вос}} = 0{,}05$), то гипотеза об однородности выборочных дисперсий отвечает результатам наблюдений. При этом всю группу выборочных дисперсий s_g^2 можно считать оценками для одной и той же генеральной дисперсии $\sigma^2\{y\}$ воспроизводимости эксперимента, откуда наилучшая ее оценка имеет вид

$$s_{\text{вос}}^2\{y\} = \frac{1}{N}\sum_{g=1}^{N} s_g^2\{y\} \tag{10}$$

с числом степеней свободы

$$\nu_{\text{вос}} = N(m - 1). \tag{11}$$

Если проверка воспроизводимости эксперимента дала отрицательный результат, то остается признать его невоспроизводимость относительно управляемых факторов вследствие наличия неблагоприятных флуктуаций неуправляемых и неконтролируемых факторов. При этом следует либо увеличить число параллельных опытов для вариантов варьирования с большими значениями выборочных дисперсий s_g^2, либо использовать в дальнейшем модификацию метода наименьших квадратов, пригодную при невыполнении предпосылки о воспроизводимости эксперимента.

В нашем случае по формуле (9) $G = 2{,}82/11{,}46 \approx 0{,}25$. Для $\nu_{1\text{вос}} = m - 1 = 2$, $\nu_{2\text{вос}} = N = 8$ и выбранного уровня значимости $q_{\text{вос}} = 0{,}05$ найденное из табл. П.1 критическое значение критерия Кохрэна $G_{\text{кр}} = 0{,}5157$. Поскольку удовлетворяется условие $G < G_{\text{кр}}$, то воспроизводимость результатов эксперимента выполняется. При этом найденная по формуле (10) оценка дисперсии воспроизводимости $s_{\text{вос}}^2\{y\} \approx 1{,}44$.

1.4 Получение математической модели объекта. При ПФЭ получаются независимые оценки b_0, b_i, b_{il} соответствующих коэффициентов модели β_0, β_i, β_{il}, т.е. $b_0 \to \beta_0$, $b_i \to \beta_i$, $b_{il} \to \beta_{il}$. Эти оценки легко найти по формулам

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{g=1}^{N} z_{0g}\bar{y}_g\ , \quad b_i = \frac{1}{N}\sum_{g=1}^{N} z_{ig}\bar{y}_g\ , \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n)\,, \tag{12}$$

$$b_{il} = \frac{1}{N}\sum_{g=1}^{N} z_{ig} z_{lg}\bar{y}_g\ , \quad (i,\ l = 1,\ 2,\ ...,\ n;\ i \neq l)\,. \tag{13}$$

Для нашего примера, используя данные табл. 1 и 2, получим:

$$b_0 = \frac{1}{8}(21{,}93 + 14{,}70 + 26{,}87 + 32{,}93 + ...) \approx 27{,}83\ ;$$

$$b_1 = \frac{1}{8}(-21{,}93 + 14{,}70 - 26{,}87 + 32{,}93 - ...) \approx -0{,}75\ ;$$

$$b_2 \approx 4{,}33\ ;\ b_3 \approx 3{,}72\ ;$$

$$b_{12} = \frac{1}{8}(21{,}93 - 14{,}70 - 26{,}87 + 32{,}93 + ...) \approx 1{,}30\ ;$$

$$b_{13} \approx -0{,}46\ ;\ b_{23} \approx -1{,}46\ ;\ b_{123} \approx -2{,}03\,.$$

После определения оценок b коэффициентов регрессии необходимо проверить гипотезы об их значимости, т.е. проверить соответствующие нуль-гипотезы $\beta = 0$. Проверку таких гипотез производят с помощью *критерия Стьюдента,* эмпирическое значение которого

$$t_i = |b_i| / s\{b\}\,, \tag{14}$$

где

$$s^2\{b\} = \frac{1}{Nm} s^2_{\text{вос}}\{y\}\ - \tag{15}$$

дисперсия оценки b коэффициента уравнения регрессии. Если найденная величина параметра t_i превышает значение $t_{\text{кр}}$, определенное из табл. П.2 для числа степеней свободы $\nu_{\text{зн}} = N(m - 1)$, при заданном уровне значимости $q_{\text{зн}}$ (обычно $q_{\text{зн}} = 0{,}05$), то проверяемую нуль-гипотезу H_0: $\beta = 0$ отвергают и соответствующую оценку b_i коэффициента признают значимой. В противном случае, нуль-гипотезу не отвергают и оценку b считают статистически незначимой, т.е. $\beta = 0$.

Статистическая незначимость оценки b_i коэффициента регрессии может быть обусловлена следующими причинами:

1) данный i-й фактор не имеет функциональной связи с откликом y, т.е. $\beta_i = 0$;

2) уровень x_{i0} базового режима $\bar{x}_0$ находится в точке частного экстремума функции отклика по фактору x_i, и тогда $\beta_i = \frac{\partial y}{\partial z_i} = 0$;

3) интервал варьирования Δx_i выбран слишком малым;

4) вследствие влияния неуправляемых и неконтролируемых факторов велика ошибка воспроизводимости эксперимента.

Ортогональное планирование позволяет определять доверительные границы независимо для каждого из коэффициентов регрессии. Поэтому если какая-либо из оценок коэффициентов окажется незначимой, то ее можно отбросить без пересчета всех остальных. После этого математическую модель объекта составляют в виде уравнения связи отклика y и факторов x_i, включающего только значимые оценки коэффициентов.

Для нашего примера дисперсия оценки коэффициентов в соответствии с формулой (15) $s^2\{b\} = \frac{1}{8 \cdot 3} \cdot 1{,}44 \approx 0{,}06$. Рассчитанные по формуле (14) эмпирические значения критерия Стьюдента t_i приведены в табл. 3.

Таблица 3

b_i	b_0	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}	b_{123}
t_i	113,81	3,08	17,70	15,22	5,30	1,89	5,98	8,30

Для числа степеней свободы $\nu_{зн} = N(m-1) = 8\cdot(3-1) = 16$ и уровня значимости $q_{зн} = 0{,}05$ критическое значение критерия Стьюдента, найденное из табл. П.2, $t_{кр} = 2{,}119$. Поэтому значимыми признают все оценки коэффициентов уравнения регрессии, кроме оценки b_{13}, так как для нее не выполняется условие $t_{13} > t_{кр}$.

Тогда окончательно искомая математическая модель изучаемого объекта запишется в виде

$$\hat{y} = 27{,}83 - 0{,}75z_1 + 4{,}33z_2 + 3{,}72z_3 + 1{,}3z_1z_2 - 1{,}46z_2z_3 - 2{,}03z_1z_2z_3\,. \quad (16)$$

1.5 Проверка адекватности математического описания. Чтобы проверить гипотезу об адекватности математического описания опытным данным, достаточно оценить отклонение предсказанной по полученному уравнению регрессии величины отклика $\hat{y}_g$ от результатов наблюдений $\bar{y}_g$ в одних и тех же g-х точках факторного пространства.

Для нашего примера значения $\hat{y}_g$, полученные в результате подстановки соответствующих величин факторов z_i в g-х точках факторного пространства в найденную ранее математическую модель (16), приведены в последнем столбце табл. 4.

Таблица 4

g	z_0	z_1	z_2	z_3	$\bar{y}_g$ ("эксперимент")	$\hat{y}_g$ ("модель")
1	+1	–1	–1	–1	21,93	22,40
2	+1	+1	–1	–1	14,70	14,24
3	+1	–1	+1	–1	26,87	27,32
4	+1	+1	+1	–1	32,93	32,48
5	+1	–1	–1	+1	29,17	28,70
6	+1	+1	–1	+1	28,20	28,66
7	+1	–1	+1	+1	36,37	35,90
8	+1	+1	+1	+1	32,47	32,94

Например, для первой строки табл. 4: $\hat{y}_1 = 27{,}83 - 0{,}75\cdot(-1) + 4{,}33\times$ $\times(-1) + 3{,}72\cdot(-1) + 1{,}3\cdot(+1) - 1{,}46\cdot(+1) - 2{,}03\cdot(-1) \approx 22{,}40$.

Рассеяние результатов наблюдений вблизи уравнения регрессии, оценивающего истинную функцию отклика, можно охарактеризовать с помощью дисперсии адекватности

$$s^2_{ад} = \frac{m}{N-d}\sum_{g=1}^{N}(\bar{y}_g - \hat{y}_g)^2\,, \quad (17)$$

где d – число членов аппроксимирующего полинома (значимых оценок коэффициентов модели объекта). Дисперсия адекватности определяется с числом степеней свободы

$$\nu_{ад} = N - d. \quad (18)$$

Для нашего примера в соответствии с формулой (17) получим

$$s^2_{ад} = \frac{3}{8-7}\cdot\left[(21{,}93-22{,}40)^2 + (14{,}70-14{,}24)^2 + \ldots\right] \approx 5{,}13\,.$$

Проверка гипотезы об адекватности состоит, по сути дела, в выяснении соотношения между дисперсией адекватности $s^2_{ад}$ и оценкой дисперсии воспроизводимости отклика $s^2_{вос}$. Если эти оценки дисперсий однородны, то математическое описание адекватно представляет результаты опытов; если же нет, то описание считается неадекватным. Проверку гипотезы об адекватности производят с использованием *F-критерия Фишера*. Критерий Фишера позволяет проверить гипотезу об однородности двух выборочных дисперсий $s^2_{ад}$ и $s^2_{вос}\{y\}$. В том случае, если $s^2_{ад} > s^2_{вос}\{y\}$, F-критерий характеризуется отношением

$$F = s^2_{\text{ад}} / s^2_{\text{вос}}\{y\}. \tag{19}$$

Если вычисленное по результатам наблюдений эмпирическое значение критерия F меньше критического $F_{\text{кр}}$, найденного из табл. П.3 для соответствующих степеней свободы:

$$\nu_{1\text{ад}} = N - d, \quad \nu_{2\text{ад}} = \nu_{\text{зн}} = N(m-1), \tag{20}$$

при заданном уровне значимости $q_{\text{ад}}$ (обычно $q_{\text{ад}} = 0{,}05$), то гипотезу об адекватности не отвергают. В противном случае гипотезу отвергают и математическое описание признается неадекватным.

Замечание. Если $s^2_{\text{ад}} < s^2_{\text{вос}}\{y\}$, то числитель и знаменатель в (19), а также ν_1 и ν_2 в (20) просто меняются местами.

В нашем случае согласно формуле (19) получим $F = 5{,}13/1{,}44 \approx 3{,}56$. Для чисел степеней свободы $\nu_{1\text{ад}} = 8 - 7 = 1$, $\nu_{2\text{ад}} = 8(3-1) = 16$ и уровня значимости $q_{\text{ад}} = 0{,}05$ по табл. П.3 найдем критическое значение критерия Фишера $F_{\text{кр}} = 4{,}49$. Таким образом, поскольку расчетное значение $F < F_{\text{кр}}$, можно сделать вывод о том, что полученная математическая модель адекватно описывает исследуемый объект контроля (управления) в окрестности базовой точки $\bar{x}_0 = (x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0})$.

Проверка адекватности возможна при $\nu_{1\text{ад}} > 0$. Если число N вариантов варьирования плана ПФЭ равно числу всех значимых оценок коэффициентов регрессии ($N = d$), то для проверки гипотезы об адекватности математического описания степеней свободы не остается ($\nu_{1\text{ад}} = 0$).

В том случае, когда гипотеза об адекватности отвергается, необходимо переходить к более сложной форме математического описания либо, если это возможно, проводить эксперимент с меньшим интервалом варьирования Δx_i. Следует отметить, что максимальная величина интервала варьирования определяется условием адекватного описания объекта в области варьирования. Если при больших интервалах варьирования математическая модель неадекватна, то возникают систематические ошибки в определении коэффициентов, для уменьшения которых следует сузить область варьирования. Однако с уменьшением интервала варьирования появляется целый ряд новых трудностей: растет отношение помехи к полезному сигналу, что приводит к необходимости увеличивать число параллельных опытов для выделения полезного сигнала на фоне шума. То есть уменьшаются абсолютные значения оценок b_i коэффициентов, величины которых непосредственно зависят от Δx_i (для уравнения с нормированными факторами z_i), и оценки коэффициентов могут стать статистически незначимыми.

Для выбора интервала варьирования проводят предварительные эксперименты. Интервал варьирования можно выбирать равным 0,05 … 0,3 от допустимого диапазона варьирования факторов, т.е. область варьирования составляет примерно 10 ... 60 % от всего диапазона. Начальную точку варьирования (базовую точку) выбирают как можно ближе к центру области факторного пространства, в которой ищется математическое описание объекта (или области ограничений).

2 ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Во многих практических задачах идентификации влияние взаимодействий второго и высших порядков (произведений факторов $z_i z_l$, $z_i z_l z_r$ и т.д.) отсутствует или пренебрежимо мало. Кроме того, на первых этапах исследования часто нужно получить в первом приближении лишь линейную аппроксимацию изучаемого уравнения связи при минимальном количестве опытов. Поэтому неэффективно использовать ПФЭ для оценивания коэффициентов лишь при линейных членах и некоторых парных произведениях из-за реализации большого числа вариантов варьирования (2^n), в особенности при большом числе факторов n [4]. При линейном росте числа независимых факторов число вариантов варьирования g для ПФЭ растет по показательному закону, в результате чего на проверку гипотезы об адекватности остается излишне много степеней свободы. В этом случае возможно применение дробного факторного эксперимента.

Дробным факторным экспериментом (ДФЭ) называется эксперимент, реализующий часть (дробную реплику) полного факторного эксперимента. ДФЭ позволяет получить, например, линейное приближение искомой функциональной зависимости $M\{y\} = \varphi(\bar{x})$ в некоторой небольшой окрестности точки базового режима при минимуме опытов.

2.1 Планирование эксперимента. Для решения трехфакторной ($n = 3$) задачи регрессии в линейном приближении можно ограничиться четырьмя вариантами варьирования, если в планировании ПФЭ типа $N = 2^2$ произведение $z_1 z_2$ приравнять третьему независимому фактору z_3. Такое планирование, представленное матрицей (табл. 5), позволяет найти свободный член b_0 и три оценки коэффициентов регрессии при линейных членах b_1, b_2, b_3 (из четырех опытов нельзя получить более четырех оценок коэффициентов регрессии).

Таблица 5

g	z_0	z_1	z_2	z_3	z_1z_2	z_1z_3	z_2z_3	$z_1z_2z_3$
1	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Применение ДФЭ всегда связано со смешиванием, т.е. с совместным оцениванием нескольких теоретических коэффициентов математической модели. В рассматриваемом случае, если коэффициенты регрессии β_{il} при парных произведениях отличны от нуля, каждый из найденных коэффициентов b_i служит оценкой двух теоретических коэффициентов регрессии:

$$b_0 \to \beta_0 + \beta_{123}; \quad b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}.$$

Это означает, что, найдя по результатам эксперимента оценку, например, b_0, мы реально получим "сумму" двух коэффициентов β_0 и β_{123}.

Действительно, указанные теоретические коэффициенты в таком планировании не могут быть оценены раздельно, поскольку столбцы МП для линейных членов и парных произведений совпадают (полностью коррелированны). Рассмотренный план ДФЭ представляет половину плана ПФЭ типа 2^3 и называется *полурепликой* от ПФЭ типа 2^3 или *планированием типа* $N = 2^{3-1}$ (см. табл. 5).

Для правильного планирования ДФЭ необходимо использовать все полученные ранее сведения теоретического и интуитивного характера об объекте и выделить те факторы и произведения факторов, влияние которых на отклик существенно. При этом смешивание нужно производить так, чтобы линейные коэффициенты $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ были смешаны с коэффициентами при взаимодействиях самого высокого порядка (так как обычно они в модели отсутствуют) или при тех взаимодействиях, о которых априори известно, что они не оказывают влияния на отклик. Следовательно, недопустимо произвольное разбиение плана ПФЭ типа 2^3 на две части для выделения полуреплики типа 2^{3-1}.

При большом числе n факторов для получения линейного приближения можно построить дробные реплики высокой степени дробности. Так, при $n = 7$ можно составить дробную реплику на основе ПФЭ типа 2^3, приравняв четыре из семи факторов к взаимодействиям трех других факторов: парным и тройному. Будем обозначать тип дробной реплики записью 2^{n-p}, если p факторов приравнены к произведениям остальных $n - p$ факторов.

План ДФЭ можно построить, приравнивая факторы различным взаимодействиям (парным, тройным и т.д.). Разумеется, при этом меняется система совместных оценок теоретических коэффициентов. Для получения системы совместных оценок и анализа разрешающей способности дробных реплик удобно пользоваться понятиями генерирующего и определяющего соотношений.

Генерирующее соотношение служит для построения дробной реплики. Так, в рассмотренном планировании мы задавали полуреплику плана ПФЭ типа 2^3 с помощью генерирующего соотношения $z_3 = z_1z_2$.

Определяющим соотношением называется соотношение, задающее элементы первого столбца матрицы планирования для фиктивной переменной (все они всегда равны +1). Выражение определяющего соотношения в рассматриваемом случае получается умножением левой и правой частей приведенного генерирующего соотношения на z_3 (элемент, стоящий в левой части), т.е. $1 = z_1z_2z_3$, так как всегда $z_i^2 = 1$.

Знание определяющего соотношения позволяет найти всю систему совместных оценок без изучения матрицы планирования ДФЭ. Соотношения, задающие эти оценки, можно найти, последовательно перемножив независимые факторы на определяющее соотношение:

$$z_0 = z_1z_2z_3; \quad z_1 = z_2z_3; \quad z_2 = z_1z_3; \quad z_3 = z_1z_2.$$

Отсюда легко находятся смешиваемые теоретические коэффициенты регрессии и их оценки:

$$b_0 \to \beta_0 + \beta_{123}; \quad b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}.$$

Если априори можно принять, что коэффициенты при всех парных и тройном взаимодействии равны нулю, то реализация этой полуреплики позволит получить раздельные оценки для всех четырех линейных коэффициентов регрессии. Разрешающая способность полуреплик определяется их генерирующими соотношениями. Разрешающая способность тем выше, чем более высок порядок взаимодействий, с коэффициентами которых смешаны линейные коэффициенты. Она увеличивается для главных полуреплик с ростом числа независимых факторов.

Например, требуется построить полуреплику ПФЭ для исследования объекта с четырьмя независимыми факторами z_1, z_2, z_3 и z_4. Для этого можно использовать генерирующее соотношение $z_4 = z_1 z_2 z_3$. Умножив обе его части на z_4, получим определяющее соотношение $1 = z_1 z_2 z_3 z_4$. Далее, умножая выбранное определяющее соотношение на одиночные факторы z_1, определим для них систему совместных оценок:

$$z_0 = z_1 z_2 z_3 z_4; \; z_1 = z_2 z_3 z_4; \; z_2 = z_1 z_3 z_4; \; z_3 = z_1 z_2 z_4; \; z_4 = z_1 z_2 z_3 .$$

Таким образом, оценка коэффициента β_0 будет смешана с оценкой β_{1234} (одинаковые строки в МП), β_1 – с β_{234} и т.д. Если требуется получить систему совместных оценок для парных взаимодействий, то необходимо аналогично умножить обе части определяющего соотношения последовательно на каждое парное взаимодействие $z_i z_l$. Например, для $z_1 z_2$ получим $z_1 z_2 = z_3 z_4$, а, следовательно, оценка коэффициента β_{12} будет смешана с оценкой β_{34}.

2.2 Проведение эксперимента на объекте исследования. Реализация плана ДФЭ ничем не отличается от реализации плана ПФЭ.

2.3 Проверка воспроизводимости эксперимента. Проверку однородности оценок дисперсии отклика в различных точках факторного пространства проводят в полном соответствии с методикой, изложенной для ПФЭ, различие состоит лишь в числе точек плана.

2.4 Получение математической модели объекта. Процедура определения оценок коэффициентов регрессии и проверки их значимости полностью совпадает с процедурой, применяемой при исследовании объекта методом ПФЭ.

2.5 Проверка адекватности математического описания. Адекватность математического описания функции отклика проверяют теми же методами, что и для ПФЭ.

3 МЕТОД СЛУЧАЙНОГО БАЛАНСА

3.1 Основные идеи и предпосылки. При оптимизации многофакторного объекта основным этапом является получение математической модели, адекватно описывающей статический объект в изучаемом диапазоне изменения его входных переменных (факторов). При этом естественно стремиться к тому, чтобы математическое описание было возможно более простым при максимуме подобия, особенно при разработке способов и систем оптимального управления, когда важно достичь или поддерживать глобальный, а не локальный или частный экстремум. Однако решение этой задачи в реальных условиях обычно связано с серьезными трудностями, вызванными весьма большим количеством переменных x_i, в той или иной степени влияющих на объект.

Методика регрессионного анализа основана на предположении, что учтены все или, по крайней мере, все существенные факторы, иначе полученная математическая модель окажется неадекватной в изучаемом диапазоне изменения переменных. Привлечение всего множества переменных к составлению математического описания может потребовать непомерного объема экспериментальной и вычислительной работы, что зачастую невыполнимо в силу технологических, экономических и прочих ограничений [4].

Возникает необходимость предварительного отсеивания несущественных переменных и выделения тех входных воздействий x_i, которые оказывают наиболее заметное влияние на целевую функцию.

Если число всех возможных факторов, влияющих на объект, не превышает 6 – 7, то для предварительного изучения объекта можно применить методы дробного или полного факторного эксперимента. Однако при большом числе рассматриваемых факторов методы ПФЭ и даже ДФЭ, предназначенные для тщательного изучения поверхности отклика, оказываются слишком громоздкими и трудоемкими для постановки отсеивающих опытов. В случае изучения более 8 – 10 факторов, если эксперименты недороги и если заведомо известно, что лишь немногие переменные являются существенными, следует применять метод случайного баланса (МСБ) [4].

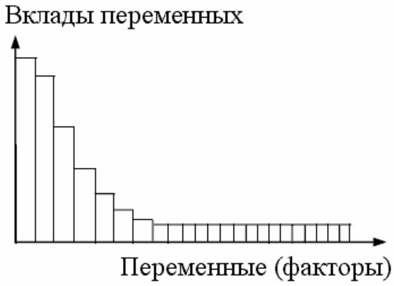


РИС. 2

Важнейшей теоретической предпосылкой МСБ является априорное знание того, что из всей совокупности рассматриваемых переменных z_i только небольшое их число (например, 10 ... 15 %) являются действительно существенными, остальные же могут быть отнесены к "шумовому полю" (рис. 2).

ПОД "ШУМОВЫМ ПОЛЕМ" ОБЫЧНО ПОНИМАЮТ СЛУЧАЙНЫЕ ПОМЕХИ ε, О КОТОРЫХ НИЧЕГО ИЛИ ПОЧТИ НИЧЕГО НЕИЗВЕСТНО, И МАЛОЗНАЧИМЫЕ ИЛИ НЕЗНАЧИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ (ЛИНЕЙНЫЕ И ПАРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ), КОТОРЫЕ НЕТ СМЫСЛА КОНТРОЛИРОВАТЬ. ПОСТУЛИРУЕТСЯ, ЧТО ДЛЯ УСПЕШНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МСБ РАССМАТРИВАЕМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ, РАСПОЛОЖЕННЫЕ В ПОРЯДКЕ УБЫВАНИЯ ВКЛАДОВ, ВНОСИМЫХ ИМИ В ОБЩУЮ ДИСПЕРСИЮ ОТКЛИКА, ДОЛЖНЫ ОБРАЗОВЫВАТЬ БЫСТРО ЗАТУХАЮЩУЮ КРИВУЮ (РИС. 2). ВКЛАДЫ СУЩЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ ДОЛЖНЫ НАМНОГО (МИНИМУМ НА ПОРЯДОК) ПРЕВЫШАТЬ ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМУЮ ШУМОВЫМ ПОЛЕМ. КРОМЕ ТОГО, ПРЕДПОЛАГАЕТСЯ, ЧТО ОБЪЕКТ УПРАВЛЯЕМ, ЧТО МЕЖДУ ОТДЕЛЬНЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ ДИСПЕРСИИ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА И ВХОДНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ МОЖЕТ БЫТЬ УСТАНОВЛЕНО СООТВЕТСТВИЕ, ЧТО ОПЫТЫ ВОСПРОИЗВОДИМЫ, А ОТДЕЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ СЛУЧАЙНЫ И НЕЗАВИСИМЫ ДРУГ ОТ ДРУГА, Т.Е. ВЫПОЛНЯЮТСЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА.

Основная идея метода заключается в том, что вместо дробных реплик, которые представляют собой систематические ортогональные выборки из ПФЭ, берутся случайные выборки. Тогда вектор-столбцы матрицы планирования можно считать не коррелированными (не связанными) или слабо коррелированными друг с другом. Совместные оценки оказываются смешанными случайным образом. Появляется возможность с высокой надежностью выделить и независимо оценить все доминирующие переменные.

МСБ использует так называемые перенасыщенные планы, при которых выполняется условие

$$u + 1 > N, \tag{21}$$

где u – общее количество исследуемых переменных, в том числе l линейных факторов и $u - l$ парных взаимодействий; 1 представляет постоянный член; N – число опытов (строк матрицы планирования). Формально неравенство (21) означает, что число степеней свободы $\nu < 0$. При этом условии, разумеется, невозможно получить независимые количественные оценки коэффициентов уравнения регрессии для всех рассматриваемых переменных. Но этого и не требуется при проведении отсеивающих (предварительных) опытов, задачей которых является выделение существенных переменных и отнесение всех несущественных или малосущественных переменных к "шумовому полю". Тогда выделенные существенные переменные (линейные члены и парные взаимодействия) могут быть независимо оценены и количественно, если их число h подчиняется условию

$$h + 1 < N, \tag{22}$$

причем это оценивание производится, очевидно, с тем большей ошибкой, чем больше доля дисперсии функции отклика, вызываемая "шумовым полем". При использовании МСБ математическую модель сложного объекта

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{h} \hat{a}_i z_i + \sum_{r=h+1}^{u} \hat{a}_r z_r + \varepsilon \tag{23}$$

расщепляют на части, где h – число значимых переменных; $u - h$ – число незначимых переменных; ε – случайная составляющая (помехи). Под z_i, z_r понимаются нормированные линейные факторы и парные взаимодействия.

Из сказанного следует, что МСБ обладает меньшей чувствительностью, чем ПФЭ и ДФЭ. Под чувствительностью метода обычно понимается способность выделять коэффициенты $\hat{a}_i$ уравнения регрессии, значимо отличающиеся от нуля (т.е. способность отбрасывать нуль-гипотезу H_0: $a_i = 0$). Зато он обладает большей разрешающей способностью: в благоприятных условиях, при одинаковом числе опытов, он позволяет независимо выделить существенные переменные среди гораздо большего числа рассматриваемых переменных, чем при ДФЭ и тем более ПФЭ.

3.2 Построение матрицы планирования. Построение матрицы планирования для проведения отсеивающих опытов выполняют на основе предпосылки, что исследуемые факторы должны быть смешаны случайным образом. Все линейные факторы z_i ($i = 1, 2, ..., n$) разбивают на группы, при этом стремятся заведомо взаимодействующие факторы включить в одну группу. Если же нет априорных сведений о физике процесса, то разбивку факторов по группам можно производить формально, с использованием таблицы (или программы) случайных чисел. Затем для каждой группы составляют МП на основе ПФЭ или ДФЭ. Все групповые МП должны иметь одинаковое количество строк, чтобы их можно было впоследствии состыковать. Число N строк каждой групповой матрицы должно удовлетворять условию (21) и равенству

$$N = 2^p, \tag{24}$$

причем p выбирается обычно наименьшим, при котором выполняется неравенство $N > n$, где n – число линейных факторов. План отсеивающего эксперимента образуют путем стыковки групповых МП случайным смешиванием их строк.

Поясним это на примере. Пусть требуется исследовать 6 факторов z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 и 15 их парных взаимодействий и с помощью МСБ выделить самые существенные. Разобьем 6 факторов на две группы: I – z_1, z_2, z_3; II – z_4, z_5, z_6. Тогда группе I соответствует матрица ПФЭ типа 2^3 (табл. 6), а группе II – аналогичная (табл. 7).

Таблица 6

Номер строки g_1	z_1	z_2	z_3
1	–1	–1	–1
2	+1	–1	–1
3	–1	+1	–1
4	+1	+1	–1
5	–1	–1	+1
6	+1	–1	+1
7	–1	+1	+1
8	+1	+1	+1

Таблица 7

Номер строки g_2	z_4	z_5	z_6
1	–1	–1	–1
2	+1	–1	–1
3	–1	+1	–1
4	+1	+1	–1
5	–1	–1	+1
6	+1	–1	+1
7	–1	+1	+1
8	+1	+1	+1

Общая МП для МСБ составляется в виде табл. 8 путем построчной стыковки табл. 6 и 7 после рандомизации их строк с помощью таблицы случайных чисел или компьютерной программы для реализации процесса рандомизации. В этом случае полученная МП является нормальной (симметричной), т.е. каждый из факторов планируется одинаковое число раз как на уровне –1, так и на уровне +1. Это повышает точность расчетов. Общая МП в данном примере может иметь вид табл. 8.

Таблица 8

Номер строки общей МП g	Номер строки табл. 6 g_1	z_1	z_2	z_3	Номер строки табл. 7 g_2	z_4	z_5	z_6
1	3	–1	+1	–1	4	+1	+1	–1
2	4	+1	+1	–1	7	–1	+1	+1
3	7	–1	+1	+1	8	+1	+1	+1
4	5	–1	–1	+1	5	–1	–1	+1
5	2	+1	–1	–1	3	–1	+1	–1
6	8	+1	+1	+1	6	+1	–1	+1
7	6	+1	–1	+1	2	+1	–1	–1
8	1	–1	–1	–1	1	–1	–1	–1

При составлении общей МП для МСБ стремятся к тому, чтобы максимальное число ее вектор-столбцов было ортогональным, причем в ортогональную часть стремятся включить наиболее существенные факторы, если их можно оценить априорно. Если удастся угадать все существенные факторы и включить их в одну группу, то это означает, что для них одновременно окажется выполненным ПФЭ. Задача построения МП, наиболее близкой к ортогональной, весьма сложна и может быть решена только с использованием ЭВМ [1]. Результаты МСБ анализируются с помощью диаграмм рассеяния либо с помощью выборочных ортогональных МП.

3.3 Построение диаграмм рассеяния. Построение диаграммы рассеяния поясним на примере. Пусть исследуется влияние шести факторов по плану, приведенному в табл. 8, а результаты эксперимента даны в табл. 9 (столбец y_g).

Таблица 9

g	k	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	y_g	y_g^{I}
1	5	–1	+1	–1	+1	+1	–1	27	39,5
2	4	+1	+1	–1	–1	+1	+1	49	49
3	8	–1	+1	+1	+1	+1	+1	31	43,5
4	6	–1	–1	+1	–1	–1	+1	39	39
5	2	+1	–1	–1	–1	+1	–1	64	64
6	7	+1	+1	+1	+1	–1	+1	40	52,5
7	3	+1	–1	+1	+1	–1	–1	42	54,5
8	1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	47	47

В графе k дан случайный порядок проведения опытов по строкам МП. Для уменьшения влияния помех и получения оценки дисперсии воспроизводимости могут выполняться параллельные опыты.

На диаграмме рассеяния для каждого фактора проводится своя ордината (рис. 3). Слева от нее отмечаются точками те значения отклика y_g, которые соответствуют положению данного фактора на нижнем уровне варьирования $z_{ig} = -1$, а справа – для $z_{ig} = +1$ (i – номер фактора; g – номер строки МП). Затем находятся частные медианы – отдельно для случайного рассеяния точек слева и отдельно для точек справа.

Напомним, что выборочной оценкой медианы $\hat{y} = \mathrm{Me}\,\{y\}$ для дискретных данных в математической статистике называется такое значение случайной величины y, по обе стороны которого лежат равные количества точек измерения y, независимо от их конкретных значений [2]. Если количество точек четное ($2N$), то медиана лежит посередине между N-й и $(N + 1)$-й точками, если же – нечетное $(2N + 1)$, то медианой является $(N + 1)$-я точка [2].

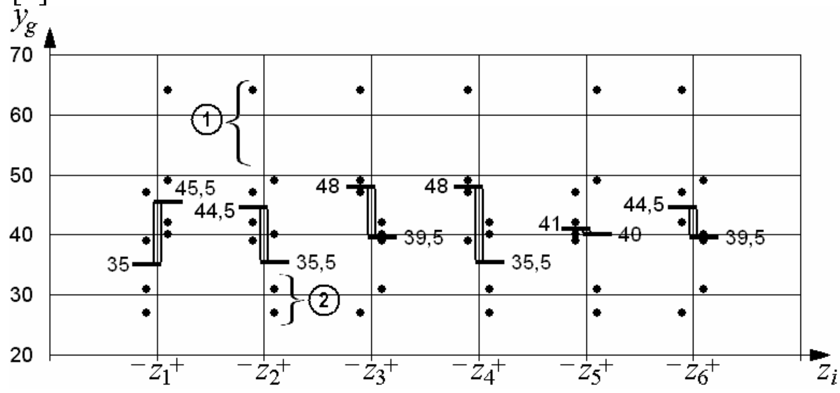


Рис. 3 Пример диаграммы рассеяния

Разность между медианой справа $\mathrm{Me}\{y\}|_{z_i=+1}$ и медианой слева $\mathrm{Me}\{y\}|_{z_i=-1}$ (но не наоборот!) называется *вкладом* фактора z_i в целевую функцию y и обозначается B_{z_i} (для взаимодействия z_iz_r факторов – $B_{z_iz_r}$):

$$B_{z_i} = \mathrm{Me}\{y\}|_{z_i=+1} - \mathrm{Me}\{y\}|_{z_i=-1}. \tag{25}$$

Из рис. 3, построенного по данным табл. 9, находим:

$B_{z_1} = 45{,}5 - 35{,}0 = 10{,}5;\quad B_{z_2} = 35{,}5 - 44{,}5 = -9{,}0;$

$B_{z_3} = 39{,}5 - 48{,}0 = -8{,}5;\quad B_{z_4} = 35{,}5 - 48{,}0 = -12{,}5;$

$B_{z_5} = 40{,}0 - 41{,}0 = -1{,}0;\quad B_{z_6} = 39{,}5 - 44{,}5 = -5{,}0.$

Визуальное и численное сравнение вкладов дает возможность обнаружить наиболее существенные переменные: вклады для них по модулю являются наибольшими. Но в ряде случаев абсолютная величина вкладов не является достаточным критерием наибольшей существенности переменных [1, 3]. Поэтому используют также дополнительные критерии: коррелированность вектор-столбцов, наличие, число и характер выделяющихся точек. Поясним понятие "выделяющиеся точки" на рис. 3. Для фактора z_2 на уровне $z_2 = -1$ имеется одна точка, расположенная выше, чем самая высокая точка на уровне $z_2 = +1$, а на уровне $z_2 = +1$ имеются две точки, расположенные ниже, чем самая низкая точка на уровне $z_2 = -1$. Поэтому общее количество выделяющихся точек для z_2 – три.

Таблица 10

Фактор z_i	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
Величина вклада B_{z_i}	10,5	–9,0	–8,5	–12,5	–1,0	–5,0
Число выделяющихся точек n_{z_i}	5	3	0	5	0	0

Величины вкладов и количество выделяющихся точек для каждого из шести рассматриваемых факторов приведены в табл. 10.

Если окажется, что вклады двух факторов примерно равны, то более существенным признают тот, в диаграмме рассеяния которого значительно больше выделяющихся точек в верхней и нижней частях диаграммы, даже если он имеет несколько меньший по величине вклад. Например, на основании данных табл. 10 можно сделать вывод, что, несмотря на примерно одинаковые вклады z_2 и z_3, фактор z_3

признается несущественным по сравнению с z_2 и тем более с z_4 и z_1. Факторы z_3, z_5 и z_6 не имеют выделяющихся точек потому, что у этих трех факторов размах разброса точек на одном из уровней превышает размах разброса точек на другом уровне, причем так, что на уровне, где размах меньше, нет точек, расположенных ни выше, ни ниже. Необходимо учитывать и характер расположения выделяющихся точек: располагаются ли они согласно знаку вклада или противоположно ему.

3.4 Последовательное выделение существенных переменных. Выделение наиболее существенных переменных и их ранжирование можно произвести двумя способами: с помощью *вкладов* и *ортогональных выборочных МП*. Чтобы исключить влияние наиболее существенных факторов с помощью *вкладов*, эти факторы надо как бы "стабилизировать" на одном из двух уровней варьирования. В рассмотренном примере (рис. 3) следует сначала выделить z_4 ($B_{z_4} = -12{,}5$ и пять выделяющихся точек). Стабилизация z_4 осуществляется вычитанием вклада B_{z_4} со своим знаком из величины y_g в тех строках табл. 9, где $z_{4g} = +1$ (при стабилизации z_4 на уровне $z_{4g} = -1$), т.е. с помощью формулы

$$y_g^{\mathrm{I}} = y_g - B_{z_i}, \tag{26}$$

где y_g – исходное (опытное) значение отклика в g-й строке исходной МП (см. табл. 9); y_g^{I} – значение отклика в g-й строке после первой (индекс "I") корректировки (стабилизации); B_{z_i} – вклад наиболее существенного нормированного фактора. Значение y_g на другом уровне варьирования ($z_{4g} = -1$) остается при этом неизменным. Результаты первой корректировки (стабилизации) представлены в последнем столбце табл. 9. По новым данным y_g^{I} строят новую диаграмму рассеяния и уже по ней определяют следующую по рангу влияния переменную, имеющую наибольший вклад, после чего описанную процедуру повторяют. Очевидно, ранее выделенные ("стабилизированные") наиболее существенные переменные на каждой последующей диаграмме рассеяния не подлежат изучению: соответствующие им ординаты остаются незаполненными.

Процесс выделения существенных переменных прекращают, когда выполнено условие (22) либо когда на очередной диаграмме рассеяния все вклады B_{z_i} оказываются примерно одинаково малыми по абсолютной величине и сравнимыми по t-критерию Стьюдента с удвоенной ошибкой коэффициентов нормированного уравнения регрессии. Методом случайного баланса, как это следует из соотношений (22) и (23), можно получить уравнение регрессии

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 z_1 + \hat{a}_2 z_2 + \ldots + \hat{a}_h z_h + \xi, \tag{27}$$

где z_1, z_2, ..., z_h – выделенные наиболее существенные нормированные линейные факторы и их взаимодействия, h удовлетворяет условию (22), а ξ – все "шумовое поле". Описанный порядок выделения и ранжирования существенных переменных с помощью диаграмм рассеяния и вкладов представляет собой, очевидно, трудоемкую процедуру, требующую тем большего внимания, чем больше общее число u переменных и взаимодействий.

Эту трудоемкость можно снизить, если применить *выборочные ортогональные МП* (ВОМП) для 2-3 наиболее существенных факторов z_i, оцененных по первой диаграмме рассеяния (рис. 3), построенной по исходной МП (табл. 9).

Построение ВОМП для двух факторов рассмотрим на примере табл. 9 и рис. 3. Визуальное оценивание и расчет вкладов с привлечением дополнительных критериев показали, что самыми существенными факторами являются z_4 и z_1, имеющие и наибольшие абсолютные величины вкладов, и наибольшее число выделяющихся точек (по пять). Построим ВОМП ПФЭ типа $N_{\text{выб}} = 2^2$ для этих двух факторов (табл. 11), где $n_{\text{выб}} = 2$ – число факторов в ВОМП, $g_{\text{выб}}$ – номер строки ВОМП.

Столбцы y_g заполняются данными табл. 9 следующим образом. Для каждой строки ВОМП (табл. 11) выбирается строка в исходной МП (табл. 9), где факторы z_4 и z_1 имеют такие же знаки. Например, для первой строки табл. 11 ($z_4 = -1$ и $z_1 = -1$) выбираются строки 4 и 8 табл. 9 со значениями отклика $y_4 = 39$ и $y_8 = 47$. Таким образом, в каждой строке ВОМП (табл. 11) оказалось по 2 параллельных опыта (y_{g1} и y_{g2}). Построчные средние значения отклика даны в графе $\bar{y}_{g_{\text{выб}}}$.

Таблица 11

$g_{\text{выб}}$	z_4	z_1	y_{g1}	y_{g2}	$\bar{y}_{g_{\text{выб}}}$	$s^2_{g_{\text{выб}}}$
1	–1	–1	39	47	43	32
2	+1	–1	27	31	29	8
3	–1	+1	49	64	56,5	112,5
4	+1	+1	40	42	41	2

Табл. 11 позволяет рассчитать оценки коэффициентов нормированного уравнения регрессии по формуле (12), а также произвести их статистическое оценивание по методике и формулам, приведенным выше в разделе, посвященном ПФЭ. В графе $s^2_{g_{\text{выб}}}$ приведены несмещенные оценки построчных дисперсий, однородность которых проверяется с помощью G-критерия Кохрэна по формуле (9), если в каждой строке ВОМП имеется одинаковое число параллельных опытов $m_{\text{выб}}$. Для рассматриваемого примера расчетное значение критерия Кохрэна $G \approx 0{,}73$, а критическое (согласно табл. П.1) – $G_{\text{кр}} = 0{,}9065$ для чисел степеней свободы $\nu_1 = 1$ и $\nu_2 = 4$ при уровне значимости $q = 0{,}05$ (см. формулы (8 и 11)). Так как $G < G_{\text{кр}}$, то можно сделать вывод об однородности оценок дисперсий.

По формуле (12) оценки коэффициентов нормированного уравнения регрессии (27) на основе данных ВОМП табл. 11 получились $\hat{a}_4 \approx -7{,}4$ и $\hat{a}_1 \approx 6{,}4$.

Если оценки коэффициентов $\hat{a}_4$ и $\hat{a}_1$ окажутся статистически значимыми, то приступают к выделению наиболее существенных факторов z_4 и z_1. С этой целью исходную табл. 9 корректируют по аналогичной (26) формуле

$$y_g^{\mathrm{I}} = y_g - 2\hat{a}_4 - 2\hat{a}_1, \tag{28}$$

стабилизировав z_4 и z_1 на уровнях $z_4 = -1$ и $z_1 = -1$. При этом в тех g-х строках, где $z_{4g} = +1$, из исходных значений отклика y_g вычитают удвоенное значение коэффициента $\hat{a}_4$, где $z_{1g} = +1$ – удвоенное значение $\hat{a}_1$. Если $z_{ig} = -1$, то вычитание соответствующего $2\hat{a}_i$ не производится.

Вычитать удвоенные коэффициенты уравнения регрессии следует потому, что $\hat{a}_i$ характеризует среднее изменение отклика y при переходе нормированного фактора с базового уровня $z_i = 0$ на уровень $z_i = +1$, в то время как вклад B_{z_i} характеризует усредненное изменение отклика y при переходе z_i с уровня $z_i = -1$ на уровень $z_i = +1$.

В результате получится скорректированная таблица (табл. 12).

Таблица 12

g	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	y_g	y_g^{I}
1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	27	41,8
2	–1	+1	–1	–1	+1	+1	49	36,2
3	–1	+1	+1	–1	+1	+1	31	45,8
4	–1	–1	+1	–1	–1	+1	39	39
5	–1	–1	–1	–1	+1	–1	64	51,2
6	–1	+1	+1	–1	–1	+1	40	42
7	–1	–1	+1	–1	–1	–1	42	44
8	–1	–1	–1	–1	–1	–1	47	47

По данным этой таблицы (по столбцу y_g^{I}) можно построить новую диаграмму рассеяния, анализируя которую, выделяют следующие два наиболее существенных фактора. На очередных диаграммах рассеяния ординаты для ранее выделенных наиболее существенных переменных оставляют незаполненными. Отметим, что дисперсия точек на диаграммах рассеяния после выделения наиболее существенных факторов заметно уменьшается по сравнению с первоначальной картиной, поскольку после стабилизации остаются факторы, оказывающие более слабое влияние на величину отклика y.

3.5. Операции с парными взаимодействиями. В табл. 9 и на рис. 3 мы имели дело только с линейными факторами. Однако табл. 9 можно дополнить вектор-столбцами парных взаимодействий $z_i z_r$, а диаграмму рассеяния – ординатами для парных взаимодействий и анализировать их описанным выше образом наравне с линейными факторами. Однако число парных взаимодействий быстро растет с увеличением числа n факторов. В связи с этим в [3] приводится правило выбора наиболее существенных парных взаимодействий по виду диаграмм рассеяния для одиночных факторов z_i. Оно состоит в следующем.

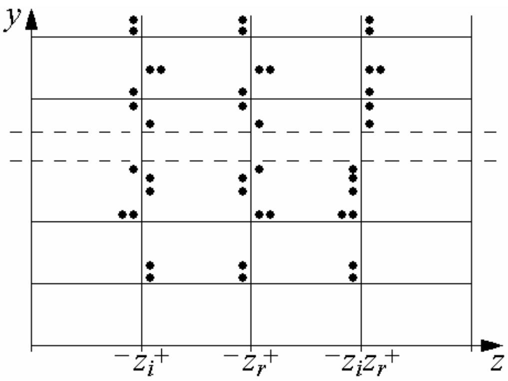


Рис. 4 Диаграмма рассеяния для парных взаимодействий

Предполагается, что наиболее существенное взаимодействие, например $z_i z_r$, по сравнению с другими взаимодействиями должно иметь и наибольшее число выделяющихся точек на обоих уровнях. Но для того, чтобы произведение $z_{ig} z_{rg}$ было отрицательным, g-е точки отклика y_g факторов z_i и z_r должны быть на разных уровнях, а для того, чтобы оно было положительным – на одинаковых уровнях. Очевидно, наибольшее число выделяющихся точек (т.е. обычно и наибольший вклад $B_{z_i z_r}$) окажется в том случае, если z_i и z_r в одной из частей диаграммы рассеяния, например в верхней, имеют одинаковый по уровням разброс соответствующих g-х точек, а в другой части (нижней) – противоположный, как бы зеркально отображенный, разброс g-х точек по уровням. Это видно из рис. 4, где показаны лишь верхние и нижние части диаграммы рассеяния, построенные по отвлеченным данным, а средние части изображены пунктирными линиями.

Следует иметь в виду, что иногда даже сравнительно слабые линейные факторы могут породить весьма существенные парные взаимодействия, и наоборот.

3.6 Вычисление оценок коэффициентов и статистическое оценивание результатов. Оценки коэффициентов нормированного уравнения регрессии можно получить по вкладам:

$$\hat{a}_i = 0{,}5 B_{z_i}; \quad \hat{a}_{ir} = 0{,}5 B_{z_i z_r}. \tag{29}$$

Как указывалось в п. 3.4, расчет вкладов для каждого последующего существенного фактора производят на основании диаграммы рассеяния, построенной по скорректированным данным, после выделения более существенных переменных. Критерий для прекращения выделения наиболее существенных факторов при использовании вкладов строится на основании приближенной оценки дисперсии коэффициентов $\hat{a}_i$:

$$B_{z_i} \le B_{z\text{кр}} = 2 t_{\text{кр}} s\{\hat{a}_i\}, \tag{30}$$

где

$$s^2\{\hat{a}_i\} = \frac{1}{Nm} s^2_{\text{вос}}\{y\}, \tag{31}$$

причем N – общее число строк исходной МП для МСБ; m – число параллельных опытов в ней; усредненная оценка дисперсии воспроизводимости

$$s^2_{\text{вос}}\{y\} = \frac{1}{N}\sum_{g=1}^{N} s_g^2\{y\}, \tag{32}$$

$s_g^2\{y\}$ – построчная дисперсия в g-й строке исходной МП для МСБ (см. п. 1.3); число степеней свободы, по которым из табл. П.2 выбирают $t_{\text{кр}}\{\nu;\, q\}$ составляет

$$\nu = N(m-1). \tag{33}$$

При использовании вкладов расчет и статистическое оценивание B_{z_i} или $\hat{a}_i$ производят обычно последовательно, причем расчет и оценивание существенности очередного фактора выполняют по скорректированным данным после выделения предыдущего, более существенного фактора.

При использовании ВОМП вычисление оценок $\hat{a}_i$ коэффициентов выполняют по формуле, учитывающей число $N_{\text{выб}}$ строк ВОМП:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{N_{\text{выб}}}\sum_{g_{\text{выб}}=1}^{N_{\text{выб}}} z_{ig_{\text{выб}}}\bar{y}_{g_{\text{выб}}}. \tag{34}$$

Критическое значение выборочной оценки $\hat{a}_{i\text{кр}}$ находят с помощью следующих формул:

$$\hat{a}_{i\text{кр}} = t_{\text{кр}} s\{\hat{a}_i\}; \tag{35}$$

$$s^2\{\hat{a}_i\} = \frac{1}{N_{\text{выб}} m_{\text{выб}} m} s^2_{\text{вос.выб}}\{y\}; \tag{36}$$

$$s^2_{\text{вос.выб}}\{y\} = \frac{1}{N_{\text{выб}}}\sum_{g_{\text{выб}}=1}^{N_{\text{выб}}} s^2_{g_{\text{выб}}}\{y\}; \tag{37}$$

$$s^2_{g_{\text{выб}}}\{y\} = \frac{1}{m_{\text{выб}}-1}\sum_{k=1}^{m_{\text{выб}}}\left(y_{g_{\text{выб}}k} - \bar{y}_{g_{\text{выб}}}\right)^2. \tag{38}$$

Формулы (36) – (38) справедливы при условии, если во всех строках ВОМП оказалось одинаковое число параллельных опытов, т.е. $m_{g_{\text{выб}}} = m_{\text{выб}} = \text{const}$.

Критическое значение t-критерия Стьюдента выбирают из табл. П.2 при выбранном уровне значимости q (обычно q = 0,05) для числа степеней свободы

$$\nu_{\text{зн}} = \nu_{\text{вос}} = N_{\text{выб}} m\left(m_{\text{выб}} - 1\right). \tag{39}$$

Оценки $\hat{a}_i$, оказавшиеся бóльшими $\hat{a}_{i\text{кр}}$, т.е. $\hat{a}_i > \hat{a}_{i\text{кр}}$, признают статистически значимыми.

Если число параллельных опытов в $g_{\text{выб}}$-х строках ВОМП оказалось неодинаковым, то вместо (37) следует применять формулу

$$s^2_{\text{вос.выб}}\{y\} = \frac{1}{\sum\limits_{g_{\text{выб}}=1}^{N_{\text{выб}}} m_{g_{\text{выб}}}}\sum_{g_{\text{выб}}=1}^{N_{\text{выб}}} m_{g_{\text{выб}}} s^2_{g_{\text{выб}}}\{y\}, \tag{40}$$

а вместо (36) – формулу

$$s^2\{\hat{a}_i\} = \frac{1}{m\sum\limits_{g_{\text{выб}}=1}^{N_{\text{выб}}} m_{g_{\text{выб}}}} s^2_{\text{вос.выб}}\{y\}, \tag{41}$$

причем число степеней свободы для $t_{\text{кр}}$ составляет

$$\nu_{зн} = \nu_{вос} = m \sum_{g_{выб}=1}^{N_{выб}} m_{g_{выб}} - N_{выб} \,. \tag{42}$$

Проверку адекватности полученной неполной квадратичной модели (27) производят с помощью F-критерия Фишера, аналогично методике, изложенной в разделе, посвященном ПФЭ.

4 ЗАДАНИЕ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1 Изучить методические указания к выполнению курсовой работы.

2 Идентифицировать в зависимости от варианта задания методом полного факторного эксперимента **(количество факторов *n* = 3)** или ДФЭ **(количество факторов *n* = 4)** неполную степенную математическую модель предполагаемого объекта исследования.

В процессе идентификации **необходимо выполнить** следующее.

2.1 В соответствии с вариантом задания и исходными данными (табл. 13) составить требуемую матрицу планирования.

Для ДФЭ найти определяющие соотношения полуреплик планирования типа 2^{4-1} с генерирующими соотношениями:

1) $z_4 = z_1z_2z_3$; 2) $z_4 = -z_1z_2z_3$; 3) $z_4 = z_1z_2$; 4) $z_4 = -z_1z_2$;

5) $z_4 = z_1z_3$; 6) $z_4 = -z_1z_3$; 7) $z_4 = z_2z_3$; 8) $z_4 = -z_2z_3$.

Выбрать из этих полуреплик одну для реализации ДФЭ, если априори известно, что на отклик могут оказывать влияние только три парных взаимодействия x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4 и линейные члены x_1, x_2, x_3 и x_4. Выбор производить из условия получения несмешанных оценок линейных коэффициентов и коэффициентов трех указанных парных взаимодействий. Выбор пояснить. Построить МП выбранной полуреплики.

2.2 Используя схему методики проведения эксперимента, снять необходимую выборку с соответствующими значениями входных факторов при помощи программы "Моделирование объектов" (прил. 4).

2.2.1 Для ПФЭ провести по $\boldsymbol{m = 5}$ серий параллельных измерений отклика y в соответствии с составленным планом ПФЭ типа $\mathbf{2^3}$ с центром в точке $\bar{x}_0$ с координатами $\boldsymbol{x_{10}}$, $\boldsymbol{x_{20}}$, $\boldsymbol{x_{30}}$ (в зависимости от варианта табл. 13) и интервалами варьирования $\boldsymbol{\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 10}$.

2.2.2 Для ДФЭ использовать данные подпункта 4.2.2.1, полагая также $\boldsymbol{\Delta x_4 = 10}$.

2.3 Проверить воспроизводимость результатов эксперимента.

2.4 Получить математическую модель, предполагаемого, объекта исследования и проверить статистическую значимость всех полученных оценок коэффициентов уравнения регрессии (выявить факторы, оказывающие влияние на отклик).

2.5 Проверить адекватность математического описания.

2.6 Сделать выводы.

3 Используя МСБ, выделить наиболее существенные входные переменные среди заданного числа $n = 8$ линейных факторов в многофакторном объекте и провести их статистическое оценивание. В ходе выполнения работы **необходимо выполнить** следующее.

3.1 В соответствии с вариантом задания и исходными данными составить матрицу планирования для МСБ из 16 строк, основываясь на предпосылке, что исследуемые независимые линейные факторы, варьируемые на двух уровнях, должны быть смешаны случайным образом.

3.2 Используя схему методики проведения эксперимента для МСБ, снять необходимую выборку с соответствующими значениями входных факторов при помощи программы "Моделирование объектов" (прил. 4). Центр плана – точка $\bar{x}_0$ с координатами $\boldsymbol{x_{10}, ..., x_{80}}$ (см. табл. 13); интервалы варьирования $\boldsymbol{\Delta x_1, ..., \Delta x_8 = 10}$, количество параллельных опытов (серий) $\boldsymbol{m = 2}$.

Замечание. Так как в программе "Моделирование объектов" (прил. 4) предусмотрена работа с объектами, имеющими максимум 4 входа, то при изучении 8 факторов сначала проводится эксперимент для первой группы из четырех факторов (x_1, x_2, x_3, x_4) – снимаются по два отклика y_{1g}, затем – для второй группы (x_5, x_6, x_7, x_8) – фиксируются по два отклика y_{2g}. Результирующие значения для каждой g-й строки общей матрицы планирования получаются суммированием соответствующих откликов y_{1g} и y_{2g}, т.е. $y_g = y_{1g} + y_{2g}$.

3.3 Проверить воспроизводимость результатов эксперимента.

3.4 С помощью диаграмм рассеяния выделить, используя процедуру стабилизации, 4 наиболее существенных фактора **способом вкладов** или **способом выборочных ортогональных матриц планирования** (в зависимости от варианта задания, см. табл. 13).

Замечание. После каждой стабилизации производить проверку условия малости вкладов (значимости оценок коэффициентов $\hat{a}_i$) по t-критерию Стьюдента.

3.5 По правилу, учитывающему вид диаграмм рассеяния основных факторов, выбрать 3 наиболее существенных парных взаимодействия и построить для них диаграмму рассеяния.

3.6 Рассчитать оценки коэффициентов $\hat{a}_i$ и $\hat{a}_{ir}$ для выделенных существенных факторов и парных взаимодействий и составить неполную квадратичную модель объекта.

3.7 Проверить адекватность полученной неполной квадратичной модели.

ТАБЛИЦА 13

Варианты заданий

№ варианта	ПФЭ (1-е задание)			МСБ с помощью вкладов (2-е задание)							
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	40	50	60	10	20	30	40	50	60	70	80
5	30	40	50	15	25	45	30	40	15	25	75
9	45	55	65	10	35	45	40	10	20	30	15
13	35	50	75	20	50	30	40	85	15	20	70
17	60	40	30	30	25	20	15	40	60	80	50
21	30	40	30	40	70	60	45	55	35	20	10
25	20	40	40	50	30	10	10	20	30	40	50
29	40	30	60	60	25	25	35	35	45	45	50
33	55	65	70	70	20	20	25	50	60	40	30
37	35	50	45	80	25	45	75	20	10	50	15

Продолжение табл. 13

№ варианта	ПФЭ (1-е задание)			МСБ с помощью ортогональных матриц планирования (2-е задание)							
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	40	30	40
2	25	45	55	40	50	40	50	30	20	10	20
6	25	50	45	30	40	30	40	20	25	5	25
10	50	80	60	45	55	45	55	60	35	10	35
14	60	50	20	35	50	35	50	60	30	15	30
18	40	60	20	60	40	60	40	15	40	60	40
22	80	50	30	30	40	30	40	20	40	40	20
26	75	40	20	10	20	10	20	30	40	20	30
30	15	55	60	15	25	15	25	45	30	25	45
34	20	50	60	10	35	10	35	45	40	35	45
38	30	40	15	15	30	15	30	75	10	30	75

№ варианта	ДФЭ (1-е задание)				МСБ с помощью вкладов (2-е задание)							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
3	20	70	40	50	85	15	20	70	40	50	30	80
7	80	50	30	40	40	60	80	50	30	40	20	75
11	20	10	45	55	55	35	20	10	45	55	60	15
15	30	40	35	50	20	50	30	40	35	50	60	20
19	20	15	60	40	30	25	20	15	60	40	15	30

23	60	45	30	40	40	70	60	45	30	40	20	40
27	60	70	10	20	50	50	60	70	10	20	30	40
31	15	25	5	25	60	40	15	25	5	25	45	30
35	20	30	10	35	70	10	20	30	10	35	45	40
39	45	80	15	30	80	25	45	80	15	30	75	10

№ варианта	ДФЭ (1-е задание)				МСБ с помощью ортогональных матриц планирования (2-е задание)							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
4	50	30	15	20	40	50	60	50	30	15	35	75
8	40	20	60	80	30	40	15	25	20	75	60	30
12	55	60	35	20	40	10	20	70	60	55	25	75
16	50	60	50	30	40	85	15	50	60	45	10	80
20	40	15	25	20	15	40	60	40	15	35	45	20
24	40	20	70	60	45	55	35	10	20	85	15	40
28	20	30	50	60	10	20	30	15	50	20	50	30
32	25	45	40	15	50	30	15	20	40	30	25	20
36	35	45	10	20	40	20	60	80	40	40	70	60
40	30	75	25	45	55	60	35	20	20	50	50	60

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. М.: Металлургия, 1969.

2 Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.

3 Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М.: Наука, 1965.

4 Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум): Учеб. пособие / Под. ред. Г.К. Круга. М.: Высш. школа, 1983.

5 Рузинов Л.П., Слободчикова Р.И. Планирование эксперимента в химии и химической технологии. М.: Химия, 1980.

6 Бондарь А.Г., Статюха Г.А. Планирование эксперимента в химической технологии. Киев: Вища школа, 1976.

7 Статистические методы планирования эксперимента: Лаб. работы / Сост.: С.В. Мищенко, С.В. Григорьева, В.Г. Серегина, Э.В. Злобин: Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002.