

**Е.Н. Туголуков**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО  
ОБОРУДОВАНИЯ  
МНОГОАССОРТИМЕНТНЫХ  
ХИМИЧЕСКИХ  
ПРОИЗВОДСТВ**

**МОСКВА  
«ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1»  
2004**

Е.Н. Туголуков

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО  
ОБОРУДОВАНИЯ  
МНОГОАССОРТИМЕНТНЫХ  
ХИМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВ**

---

МОСКВА  
«ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1»  
2004

УДК 66.01.011  
ББК Л11-1с116  
Т81

Рецензенты:  
Доктор технических наук, профессор  
*А.Ф. Егоров,*  
Доктор технических наук, профессор  
*С.И. Дворецкий*

**Туголуков Е.Н.**

Т81 Математическое моделирование технологического оборудования многоассортиментных химических производств. М.: «Издательство Машиностроение-1», 2004. 100 с.

В монографии рассматриваются вопросы разработки аппаратного оформления многоассортиментных химических производств. Приводится подробная схема использования метода конечных интегральных преобразований на примере решения задач нестационарной теплопроводности многослойных тел канонической формы и ограниченных тел канонической формы; с произвольными начальными условиями, с неоднородными несимметричными и нелинейными граничными условиями, с распределенными внутренними источниками тепла. Некоторые решения публикуются впервые. Описаны алгоритмы расчета теплообменного, емкостного и сорбционного оборудования по предлагаемой методике.

Предназначена для аспирантов, магистрантов и студентов химико-технологических специальностей вузов, а также для инженерно-технических работников химической промышленности.

УДК 66.01.011  
ББК Л11-1с116

ISBN 5-94275-107-2

© Туголуков Е.Н., 2004  
© «Издательство Машиностроение-1», 2004

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

ТУГОЛУКОВ Евгений Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ  
МНОГОАССОРТИМЕНТНЫХ  
ХИМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВ

МОНОГРАФИЯ

Редактор Т.М. Глинка  
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынова

Подписано к печати 27.02.2004  
Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная  
Объем: 5,81 усл. печ. л.; 5,60 уч.-изд. л.  
Тираж 400 экз. С. 171<sup>М</sup>

«Издательство Машиностроение-1»,  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Подготовлено к печати и отпечатано в издательско-полиграфическом центре  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в России на химических предприятиях наблюдается тенденция к обновлению производственных мощностей на основе современного оборудования, модернизации и компьютеризации существующих производств, внедрению новых технологий, обновлению ассортимента выпускаемой продукции. Это обусловлено целым рядом объективных причин.

Действующие проектные и конструкторские подразделения при разработке аппаратурного оформления химических производств, как правило, широко используют упрощенные расчетные методики, основанные на обобщенных эмпирических зависимостях, оперирующие усредненными характеристиками процессов и не ориентированные на полномасштабное использование средств современной компьютерной техники. Такие расчеты могут быть только оценочными. Поэтому инженеры при разработке аппаратурного оформления производственных процессов широко используют личный опыт и интуицию, а также добавку избыточных запасов к результатам стандартных расчетов.

В то же время интенсивное развитие возможностей компьютерной техники вызвало поистине революционные изменения в теории и практике синтеза технических систем и устройств.

Одним из направлений решения проблем действующего химического предприятия является разработка методик выбора аппаратурного оформления химического производства, отвечающего всем современным требованиям, на основе новейших научных достижений и широкого использования возможностей компьютерной техники.

Решающее значение приобретает подготовка специалистов на базе технологического образования, способных практически внедрять и развивать эти методики.

Автор выражает глубокую признательность заведующему кафедрой «Автоматизированное проектирование технологического оборудования» Тамбовского государственного технического университета, заслуженному деятелю РФ, доктору технических наук, профессору Е.Н. Малыгину, под руководством которого выполнена данная работа, и профессору кафедры «Химическая инженерия», заслуженному деятелю РФ, доктору технических наук, профессору В.И. Коновалову, который предопределил направление работ автора, а также рецензентам – директору Технологического института Тамбовского государственного технического университета, заведующему кафедрой «Технологическое оборудование и пищевые технологии», доктору технических наук, профессору С.И. Дворецкому и заведующему кафедрой «Математическая экономика и информатика» Тамбовского Государственного университета им. Г.Р. Державина, доктору физико-математических наук, профессору С.М. Дзюбе.

### **1 ЗАДАЧА РАЗРАБОТКИ АППАРАТУРНОГО ОФОРМЛЕНИЯ СОВРЕМЕННОГО ПРОМЫШЛЕННОГО ХИМИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА**

Появление новых производственных технологий и эффективных конструкций промышленного оборудования, а также резко возрастающие функциональные возможности компьютерной техники, ее доступность и простота эксплуатации открывают реальные возможности для разработки и внедрения конкурентоспособных высокоприбыльных производств, отвечающих современным требованиям энерго- и ресурсосбережения, а также экологической и аварийной безопасности.

При разработке аппаратурного оформления химических производств приходится иметь дело со множеством разнообразных прикладных задач, связанных с определением оптимальных конструктивных и режимных параметров единиц производственного оборудования [6].

Самый широкий комплекс задач приходится решать при разработке аппаратурного оформления многоассортиментных малотоннажных химических производств.

Это обусловлено следующими причинами:

- в многоассортиментных малотоннажных химических производствах наиболее широко представлены виды технологических процессов, способы осуществления и организации технологических операций, типы технологического оборудования, используемые в химической промышленности;
- оборудование, входящее в состав таких производств, работает в периодических, непрерывных и квазинепрерывных режимах;
- оборудование работает при различных во времени степенях загрузки;
- обрабатываемые на одном и том же оборудовании продукты могут иметь различные теплофизические характеристики;

- теплофизические характеристики продуктов и теплоносителей могут значительно изменяться в ходе производственных процессов вследствие изменения их температур, давлений, скоростей, а также при фазовых переходах.

Отсюда следует, что особо важное значение при разработке аппаратурного оформления многоассортиментных малотоннажных химических производств приобретает подход, заключающийся в комплексном математическом моделировании и расчете технологических стадий и операций во времени с учетом их взаимного влияния.

В наиболее общем случае речь идет о необходимости постановки и решения одной из следующих глобальных задач:

- задача разработки принципиально нового производства с заданными показателями производительности, реализующего новейшие технологии, отвечающего современным требованиям и обеспечивающего минимальные затраты на производство продукции;
- задача модернизации и обновления существующего производства на базе имеющихся в наличии производственных мощностей с целью изменения номенклатуры и объемов выпуска продуктов, а также реализации усовершенствованных (энергосберегающих, экологических) технологий.

В частных случаях речь идет о проблемах разработки нового технологического регламента производственного процесса и решения широкого круга оптимизационных задач:

- поиск оптимального аппаратурного оформления;
- определение оптимальных размеров партий продуктов для периодических производств;
- выбор оптимальных конструкций основного и вспомогательного производственного оборудования;
- определение оптимальных режимов функционирования основного и вспомогательного производственного оборудования;
- нахождение оптимальных вариантов размещения оборудования и трассировки коммуникаций;
- разработка оптимальных систем контроля и управления производством;
- разработка оптимального плана выпуска продукции;
- разработка оптимальных методов переработки или обезвреживания материальных отходов основного производства;
- разработка оптимальных методов утилизации тепловых отходов производственных процессов;
- оптимизация качественных показателей.

Все эти задачи приходится решать с учетом экологических требований, а также эргономических факторов.

Поскольку задачи являются взаимосвязанными, обособленное решение любой отдельно взятой задачи не позволяет радикально повлиять на экономические показатели производства в целом.

Таким образом, задача разработки нового производства или модернизации существующего объединяет взаимосвязанную совокупность всех возможных частных оптимизационных задач, возникающих на этапах разработки и функционирования химического производства, при наличии большого количества дополнительных требований и условий.

Разработка технологического регламента химического производства представляет собой уникальный процесс, заключающийся в обобщении научных достижений в предметной области, результатов лабораторных исследований и опыта эксплуатации промышленного оборудования.

Остальные частные задачи являются, по своей сути, оптимизационными, допускают формализованные постановки и решение. В своей совокупности они составляют самостоятельную оптимизационную задачу разработки аппаратурного оформления и определения режимов его функционирования, обеспечивающих минимальные затраты на производство заданного ассортимента продукции по заданной технологии с учетом утилизации отходов.

Рассмотрим возможные пути решения этой задачи.

Постановка и решение такой задачи в общем виде не представляются целесообразными, во-первых, из-за чрезмерной сложности и высокой размерности, во-вторых, из-за того, что локальные задачи, такие как задача выбора размеров партий продуктов, задача выбора основного и вспомогательного производственного оборудования на основе материальных и тепловых расчетов, задача определения режимов функционирования оборудования, задача компоновки и трассировки оборудования, задача календарного планирования, задача разработки системы оперативного контроля и управления технологическим процессом, задача выполнения экологических требований – все они являются самостоятельными и

представляют специфические области исследования со своими традициями, методиками и подходами к решению.

Наиболее приемлемым является многоуровневый итерационный алгоритм решения оптимизационной задачи разработки аппаратного оформления, охватывающий при каждой внешней итерации все или часть из перечисленных задач, взаимосвязь между которыми осуществляется через общие материальные, энергетические, геометрические и временные параметры производственного процесса. Результатом каждой внешней итерации является возможный вариант организации заданного производственного цикла, а критерием его качества - относительные приведенные затраты на производство единичного количества готового продукта.

Поскольку проработка каждого варианта является сложной инженерной задачей, стоимость такой проработки может вносить ощутимый вклад в общую стоимость разрабатываемого производства. Время, затрачиваемое на проработку дополнительных вариантов – это время, на которое задержится начало выпуска продукции. Поэтому разработка методик, обеспечивающих снижение продолжительности и стоимости проработки вариантов аппаратного оформления химического производства, весьма актуальна.

Очевидно, что перспективный способ реализации итерационного алгоритма, позволяющий принципиально снизить затраты времени и средств на проработку возможного варианта аппаратного оформления – разработка компьютерной интерактивной системы, включающей алгоритмы решения локальных задач с возможностью обмена информацией между ними, а также необходимую справочную информацию и эмпирические зависимости в виде баз данных. Такая система служит необходимым инструментом разработчика, являющегося ЛПП (лицом, принимающим решение).

Достоинства такой системы – наглядность промежуточных результатов; возможности реализации разнообразных оптимизационных алгоритмов; решения отдельно взятой локальной производственной задачи; обновления и добавления локальных алгоритмов; уточнения взаимосвязей между ними.

Такая интерактивная система может являться базовой частью системы информационной CALS-технологии (CALS – Continuous Acquisition and Life-cycle Support – непрерывная информационная поддержка жизненного цикла продукции). Это стратегия, принятая в качестве международного стандарта и направленная на повышение производительности и рентабельности производственных процессов за счет внедрения методов информационного взаимодействия между этапами производства и реализации продукта.

Рассмотрим возможную структуру интерактивной системы разработки аппаратного оформления многоассортиментных малотоннажных химических производств.

Практическая возможность прямого аналитического решения оптимизационной задачи выбора аппаратного оформления химического производства исключается не только высокой размерностью задачи, но и вероятностным характером многих переменных.

Очевидно, что самым надежным способом решения такой задачи является перебор возможных вариантов и сравнительная оценка их экономической эффективности. Но, в общем случае, и этот способ практически не реализуем, поскольку количество возможных вариантов может быть очень большим; многие переменные имеют непрерывный, а не дискретный характер; полномасштабный расчет каждого возможного варианта по сложности соответствует проектированию нового производства, выполняемому в настоящее время специализированными проектными организациями.

Принципиально важным является выбор рационального практически реализуемого алгоритма, обеспечивающего нахождение близкого к оптимальному решению поставленной задачи.

На основании заданного ассортимента, времени выпуска всех продуктов, объема выпуска каждого продукта и технологических регламентов, включающих перечень и соотношение исходных компонентов, а также последовательность и ориентировочную длительность операций по их переработке, определяется ряд основных характеристик производственного процесса, определяющих дальнейшие действия разработчика.

В первую очередь, необходимо сделать вывод о возможности и целесообразности осуществления как отдельных стадий, так и всего производственного процесса в целом в непрерывном, квазинепрерывном или периодическом режимах. В частных случаях ответы могут быть очевидны, в общем – необходимы сравнительные расчеты экономической эффективности различных вариантов.

Предусматривается возможность согласования в одной схеме операций, осуществляемых в непрерывном, квазинепрерывном и периодическом режимах работы различных единиц оборудования.

Для перспективного варианта предварительно определяются размеры партий по каждому продукту, обрабатываемому в периодическом режиме, либо текущая производительность непрерывно работающего оборудования.

Далее определяется тип единиц основного и вспомогательного оборудования, причем первоначально предпочтение отдается стандартному оборудованию из каталогов (или баз данных), а при его отсутствии – ближайшим известным аналогом. При этом целесообразно рассмотреть все типы основного производственного оборудования, в котором возможно осуществление заданных технологических операций. Например, сушку гранулированных материалов можно осуществлять на ленточных, полочных, барабанных, аэрофонтанных, пневмотранспортных сушилках либо в аппаратах взвешенного слоя.

Выбор конкретного типа каждого аппарата осуществляется по сумме экспертных оценок, характеризующих качество реализации отдельных факторов процесса в соответствующем аппарате. Для той же сушки гранулированных материалов это не только такие определяющие факторы, как время обработки продукта, движущая сила процесса и удельные энергозатраты, но и истираемость гранул, взрывоопасность пыли, адгезия и т.д.

При неоднозначности результатов экспертной оценки, отсутствии данных по экспертным оценкам для нужного типа оборудования либо в других сложных случаях необходимы сравнительные расчеты экономической эффективности использования различных типов оборудования.

При выборе типа аппарата должна предусматриваться возможность совмещения в нем производственных процессов (например, теплообмен и сушка при транспорте продуктов; сушка и грануляция во взвешенном слое и др.).

Далее определяется число аппаратов каждой стадии. Принципиальным является вопрос об оптимальном количестве (одинаковых либо различных по производительности) параллельно работающих аппаратов на соответствующей производственной стадии. С одной стороны, уменьшение количества аппаратов и укрупнение каждого из них позволяет стабилизировать качественные показатели продуктов, снизить количество и стоимость вспомогательного оборудования и коммуникаций, упростить контроль и управление. С другой стороны, увеличение количества аппаратов и уменьшение их габаритных размеров увеличивает гибкость схемы, обеспечивает резервируемость оборудования, расширяет диапазон объемов обрабатываемых партий продуктов, часто обеспечивает лучшие условия протекания тепло- и массообменных процессов, упрощает регламентные и ремонтные работы.

В общем случае на основе знания лишь материальных потоков невозможно найти определяющие размеры единиц производственного оборудования. Так, для емкостного оборудования возможна оценка объема аппарата, но не формы и соотношения его размеров; для сорбционного колонного оборудования и трубчатых реакторов возможна оценка площади поперечного сечения, но не их высоты (длины); для ректификационного и сушильного оборудования знания входных и выходных материальных потоков вообще недостаточно для оценки их геометрических параметров.

В то же время в многоассортиментных малотоннажных производствах наиболее распространенным основным оборудованием является емкостное. В стандартных емкостных аппаратах форма и соотношение размеров однозначно определяются объемом аппарата, поэтому в ряде случаев первоначальный выбор основного производственного оборудования возможен на основе знания только материальных потоков жидких продуктов.

Очевидно, что в общем случае определяющие размеры единиц производственного оборудования могут быть получены лишь на основе расчетов, определяющих условия протекания целевых и побочных процессов в нем.

Возможна постановка задачи нахождения любого приемлемого варианта из множества допустимых решений. При этом в качестве основного условия может выдвигаться требование обеспечения безостановочности производства за счет резервируемости оборудования, взаимозаменяемости отдельных аппаратов и возможности временного закливания отдельных частей схемы при нарушениях нормального хода производственного процесса.

Для каждого допустимого типа аппаратов возможны постановка и решение локальной оптимизационной задачи (например, выбор варианта, соответствующего минимуму капитальных затрат при условии использования только стандартного оборудования). Необходимо отметить, что в общем случае не обязательна постановка задачи выбора типа отдельного аппарата, как локальной оптимизационной задачи, поскольку минимуму капитальных затрат не соответствует минимум затрат приведенных. Хотя, с другой стороны, в условиях свободного рынка при краткосрочном планировании для уменьшения риска возникновения ситуации, при которой дорогостоящее оборудование в быстроменяющейся ситуации

окажется не востребовавшимся раньше, чем окупит себя, глобальный критерий оптимальности может быть выбран и нетрадиционно.

Затем, когда количество и типы аппаратов, а также последовательность операций и размеры материальных потоков определены, выполняются расчеты, определяющие условия протекания целевых и побочных процессов в основном и вспомогательном оборудовании, а также связывающих их коммуникациях. Последовательно, для каждого из возможных типов аппаратов каждой стадии, на основе фундаментальных знаний о кинетических закономерностях локальных процессов, предусмотренных технологическим регламентом, с учетом характеристик обрабатываемых продуктов, оцениваются определяющие и габаритные размеры основных и вспомогательных аппаратов, работающих совместно с основными. Одновременно определяются режимы функционирования оборудования, продолжительность локальных периодических процессов и затраты на их реализацию.

Продолжительность процессов, определяемая из условий их протекания в конкретном оборудовании, может отличаться от той, которая предусмотрена технологическим регламентом.

Расчет продолжительности протекания нестационарных и квазистационарных процессов, как правило, является одной из самых сложных задач, возникающих при разработке аппаратного оформления химического производства. Сложность эта обусловлена необходимостью учета множества индивидуальных взаимосвязанных факторов, меняющихся во времени и определяющих закономерности протекания процессов, в том числе их интенсивность. При этом необходимая исходная информация имеется далеко не всегда. Кроме того, существующие методики расчета длительности нестационарных процессов, как правило, являются упрощенными и оценочными.

Анализ результатов, полученных на данном этапе, позволяет выявить лимитирующие по времени, либо неэффективно использующие материальные и энергетические ресурсы, стадии и операции. Таким образом, возможно исключение явно бесперспективных направлений в ходе разработки оптимального аппаратного оформления разрабатываемого производства.

На основе выполненного анализа для рассматриваемого типа оборудования осуществляется определение конструктивных характеристик и организационных мероприятий, обеспечивающих уменьшение значений лимитирующих факторов.

Например, если лимитирующим по времени является процесс нагрева продукта, необходимо проанализировать возможные сочетания путей уменьшения этого времени:

- уменьшение размера партии продукта;
- увеличение температуры и (или) расхода теплоносителя;
- интенсификация процесса теплообмена путем организации рационального взаимного перемещения продукта и теплоносителя; исключения условий загрязнения теплообменных поверхностей; исключения застойных зон в пространствах, занимаемых продуктами и теплоносителями; изменения давления;
- увеличение площади поверхности теплообмена путем изменения конфигурации аппарата либо установки дополнительных теплообменных устройств, в том числе внешних контуров нагрева;
- совмещение, если это возможно, процесса нагрева с процессами, протекающими с выделением тепла;
- совмещение процессов транспорта продуктов с вспомогательными теплообменными процессами;
- организация производственного процесса, обеспечивающая использование тепла, накопленного оборудованием в предыдущих операциях;
- смешение с нагретым инертным компонентом;
- использование дополнительных источников тепла: СВЧ нагрев, индукционный нагрев, нагрев электрическим током;
- уменьшение тепловых потерь.

Сравнение по экономическим показателям эффективности возможных мероприятий может явиться обоснованием целесообразности разработки конструкций нестандартного оборудования, как основного, так и вспомогательного.

В основе необходимости разработки нестандартного оборудования лежат мероприятия по снижению значимости и влияния лимитирующих факторов.

Таким образом, действия разработчика в каждой конкретной ситуации могут включать в себя не только выбор иных типов и конструкций единиц производственного оборудования и режимов их функционирования, но и многократное решение задачи определения размеров партий продуктов, числа стадий производства и числа аппаратов каждой стадии.

После этого вновь выполняются расчеты, определяющие условия протекания целевых и побочных процессов в оборудовании, и анализируются вновь полученные результаты.

На данном этапе выполнения проекта возможен окончательный выбор типов единиц производственного оборудования, обеспечивающего минимальную сумму капитальных затрат и затрат на осуществление производственных процессов.

Оценка затрат может быть достаточно условной, так как она используется лишь в качестве сравнительной характеристики рассматриваемых вариантов.

Следующим этапом является выбор вспомогательного оборудования для производства в целом (например, котельное оборудование, хранилища, очистные сооружения, внешние коммуникации и т.д.).

Здесь так же, как и для основного оборудования, необходимо сравнение возможных типов оборудования по показателям экономической эффективности.

Далее для каждой единицы оборудования выполняются прочностные расчеты, определяющие возможность использования стандартного оборудования или уточняющие параметры нестандартного.

Затем решаются задачи компоновки оборудования и трассировки коммуникаций, причем постановка и решение этих задач как оптимизационных на данном этапе также не обязательны. Кроме того, постановка локальной оптимизационной задачи при трассировке коммуникаций на данном этапе затруднительна из-за отсутствия информации о том, является ли лимитирующим для производственного процесса в целом время транспорта продукта на каком-либо участке.

Если время транспорта не является лимитирующим, трассировка коммуникаций осуществляется, исходя из минимальной суммарной стоимости самих коммуникаций, транспортных затрат и соответствующей стоимости производственных помещений.

Возможной представляется ситуация, когда для каждой самостоятельной ветви коммуникаций ставится и решается оптимизационная задача с критерием оптимальности, определяемым локальными условиями.

При проектировании непрерывных производств, а также периодических, в которых время транспорта пренебрежимо мало по сравнению со временем производственных операций, решение задачи компоновки оборудования и трассировки коммуникаций можно выполнять однократно при расчете окончательного варианта.

Разработку схем управления, контроля и автоматики целесообразно осуществлять также при проработке окончательного варианта.

По уточненным значениям продолжительностей основных и вспомогательных производственных процессов решается задача календарного планирования, позволяющая составить графики работы оборудования, включающие последовательность и длительность основных и вспомогательных производственных операций, а также регламентных и ремонтных работ. Решение задачи календарного планирования необходимо для оценки реальной производительности по каждому продукту в условиях совмещенных производств за определенный производственный цикл.

По результатам решения задачи календарного планирования формулируется вывод об итоговой производственной мощности рассматриваемого варианта организации многоассортиментного производства: имеется ли запас производственных мощностей либо наработка заданного количества продукции в заданном ассортименте на рассматриваемом в текущей итерации варианте аппаратного оформления невозможны. В этом случае осуществляется возврат для повторного решения задачи разработки аппаратного оформления либо делается вывод о невозможности решения поставленной задачи в полном объеме на имеющемся в наличии производственном оборудовании (в этом случае может быть решена задача нахождения производственного плана, обеспечивающего максимальную прибыль при уменьшенном объеме выпуска продукции).

Для полученного таким образом варианта аппаратного оформления требуется выполнение окончательного технологического расчета, в котором, на основе определения реальных материальных и тепловых потоков, гидродинамических условий, полей концентраций, температур и давлений в совместно работающих единицах производственного оборудования и связывающих их коммуникациях, уточняются как локальные, так и глобальные характеристики производственного процесса.

Разработка способов переработки или (при невозможности либо нецелесообразности переработки) обезвреживания отходов производства является, по сути, самостоятельной задачей разработки нового производства, которое также может быть многоассортиментным. Такая задача, в свою очередь, может решаться по предлагаемой полномасштабной схеме.

Утилизация тепловых отходов в общем случае также может требовать разработки самостоятельного аппаратурного оформления. Возможно проектирование сопутствующего производства, эффективно использующего тепловые отходы основного производства.

Глобальным критерием оптимальности разработанного варианта служит его общая экономическая оценка.

Данная последовательность решения локальных задач приводит к нахождению возможного варианта аппаратурного оформления, как результата одной из глобальных итераций.

Таким образом, кратко сформулировать возможную последовательность действий при разработке аппаратурного оформления многоассортиментного малотоннажного химического производства можно следующим образом (в скобках – выходные данные).

1 Задание на разработку аппаратурного оформления производства (номенклатура, объемы и сроки выпуска, планируемая себестоимость продукции).

2 Разработка технологического регламента (ассортимент и объем выпускаемой продукции; перечень и соотношения исходных компонентов; перечень, последовательность и ориентировочная длительность технологических операций; возможные типы основного производственного оборудования).

3 Выбор числа стадий, размеров партий продуктов, числа аппаратов каждой стадии, типа единиц основного производственного оборудования (размеры партий продуктов, число стадий, число аппаратов каждой стадии, режим работы оборудования на каждой стадии, тип единиц производственного оборудования).

4 Расчет определяющих размеров единиц оборудования, длительности осуществления операций, выявление лимитирующих факторов, оценка затрат материальных и энергетических ресурсов на осуществление операций (определяющие размеры единиц оборудования, капитальные и эксплуатационные затраты на осуществление технологических операций, длительность осуществления операций, лимитирующие факторы по каждой операции, лимитирующие операции).

5 Обоснование целесообразности разработки нестандартного оборудования; обоснование целесообразности коррекции размеров партий продуктов и (или) рассмотрения иных типов единиц производственного оборудования, возможен переход к п. 3 (пути снижения влияния лимитирующих факторов, пути снижения длительности лимитирующих операций).

6 Выбор типа и расчет характеристик вспомогательного оборудования (тип, габариты, стоимость, эксплуатационные затраты на работу вспомогательного оборудования).

7 Прочностные расчеты (пригодность стандартного оборудования, уточненные характеристики нестандартного оборудования).

8 Решение задачи компоновки и трассировки оборудования (схема размещения оборудования и коммуникаций, капитальные и эксплуатационные затраты на транспорт продуктов, время транспорта продуктов).

9 Разработка схем контроля, управления и автоматики (тип, габариты, стоимость, энергопотребление элементов схем контроля, управления и автоматики).

10 Разработка календарного плана работы оборудования (итоговая производительность по каждому продукту, график производственных и регламентных работ).

11 Разработка оптимальных методов переработки или обезвреживания материальных отходов основного производства (проект сопутствующего производства, его экономические показатели).

12 Разработка и реализация оптимальных методов утилизации тепловых отходов производственных процессов (проект схемы утилизации тепловых отходов, эффект от реализации).

13 Оценка итоговых капитальных и эксплуатационных затрат на осуществление производственного процесса (итоговая себестоимость продукции).

14 Анализ целесообразности перехода к разработке иного варианта аппаратурного оформления проектируемого производства, выявление завышенных расходных статей, возможен переход к п. 3 (перечень расходных статей, подлежащих переработке, либо признание варианта окончательным).

## **2 ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ И РЕЖИМОВ ЕГО РАБОТЫ**

Из всех перечисленных локальных задач, составляющих глобальную задачу разработки аппаратурного оформления, задача нахождения основных размеров единиц производственного оборудования, оп-

ределения режимов его функционирования и длительности операций на основе соответствующих расчетов является наиболее сложной и ответственной. От результатов ее решения, в конечном итоге, зависит не только значительная часть расходных статей, но и надежность оборудования, и безопасность его эксплуатации.

Сложность задачи заключается в необходимости взаимосвязанного решения большого количества частных задач по определению условий протекания заданных процессов в конкретном оборудовании. Для моделирования каждого возможного сочетания типа процесса и типа оборудования необходимо использовать уникальные расчетные зависимости, расчетные методики, справочные и эмпирические данные. При этом, как правило, существующие расчетные зависимости являются упрощенными. Они получены на основе значительных допущений и используют усредненные по времени или объему характеристики процессов; справочные эмпирические зависимости позволяют найти лишь оценочные значения кинетических характеристик; часть требуемых для расчетов числовых данных вообще отсутствует.

Технологическое оборудование многоассортиментных малотоннажных химических производств, как правило, работает в периодических режимах. Поля определяющих параметров при этом являются нестационарными. Необходимость рассмотрения нестационарных и переходных процессов принципиально усложняет технологические расчеты, так как инженерные (т.е. упрощенные) методики расчета таких процессов дают еще менее надежные, а то и просто неприемлемые результаты. Кроме того, химические, в том числе каталитические, процессы, за исключением простейших, также очень плохо поддаются математической формализации.

Наиболее достоверные данные о ходе процессов, протекающих в реальных аппаратах, могут быть получены (кроме, естественно, прямых измерений) лишь на основе математического моделирования полей определяющих параметров, таких, как температура, концентрация, давление, напряженность, деформация и т.п.

Использование современных средств компьютерной техники делает такие расчеты не только практически реализуемыми, но и необходимыми при решении задач разработки и оптимизации современного промышленного химического производства.

При этом принципиальную важность приобретает качество используемых расчетных методик, обеспечивающее их адекватность моделируемым процессам и достоверность полученных результатов.

В настоящее время для класса производственных процессов в реализующем их промышленном оборудовании разработана новая унифицированная методика расчета полей определяющих параметров на основе аналитических решений систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими условиями однозначности. Доведены до практического использования реализующие эти решения унифицированные компьютерные алгоритмы.

Использование аналитических решений дифференциальных уравнений в частных производных при решении серьезных прикладных задач обеспечивает наглядность, простоту реализации и максимальную надежность принятия ответственных решений, что определяет их предпочтительное использование для решения практических задач.

Методика охватывает класс процессов, для которых определяющими являются температурные поля в производственном оборудовании, а также поля других параметров, имеющих идентичное с температурными полями математическое описание (поля концентраций влаги в высушиваемых материалах, поля концентраций поглощаемого компонента в гранулах адсорбентов, поля напряженности в гальванических ваннах и т.д.).

Разработанная методика предназначена для комплексного расчета как совместно работающих, так и отдельно взятых единиц производственного оборудования многоассортиментных малотоннажных химических производств в ходе решения задачи разработки оптимального аппаратного оформления новых или реконструируемых химических производств. В частном случае разработанная методика может быть использована для определения длительности процессов, протекающих в нестационарных режимах.

В настоящее время разработанная методика широко используется в проектно-конструкторских работах, выполняемых Технологическим институтом ТГТУ для ОАО «Пигмент», ОАО «Тамбовский завод "Комсомолец"» им. Н.С. Артемова, ФГУП «ТамбовНИХИ», в аспирантских работах, а также в учебном процессе при подготовке инженеров и магистров конструкторско-технологических специальностей.

Сущность методики состоит в представлении как стационарных, так и нестационарных полей определяющих параметров производственного оборудования как совокупности полей пространственно-

временных элементарных областей, моделируемых аналитическими решениями систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими условиями однозначности.

В общем случае под элементарной областью понимается область заданных размеров, рассматриваемая в течение заданного интервала времени и охватывающая как конструкционные элементы аппарата, влияющие на поля определяющих параметров, так и некоторые объемы заполняющих аппарат сред (продукты, теплоносители и хладагенты, насадки, сорбенты, катализаторы). Полная совокупность элементарных областей составляет весь рабочий объем аппарата за конечный период времени.

В частных случаях элементарная область может охватывать как все поперечное сечение аппарата, так и все внутреннее пространство аппарата.

Конкретный вид элементарной области и соответствующая ей математическая модель определяются геометрическими характеристиками оборудования и кинетическими закономерностями протекающих в нем процессов.

Одна из возможных классификаций элементарных областей приведена на рис. 2.1.



**Рис. 2.1 Классификация элементарных областей**

Рассмотрим сущность разработанной методики на примере моделирования температурных полей производственного оборудования.

В самом общем случае пространственное нестационарное температурное поле может быть описано дифференциальным уравнением Фурье – Кирхгофа [5]. Без учета переноса тепла диффузионной теплопроводностью, которым обычно пренебрегают вследствие его малости по сравнению с другими составляющими, уравнение имеет вид:

$$c_p \rho \frac{dt}{d\tau} = \text{div}(\lambda \nabla t) + Q_V + \frac{dp}{d\tau} + \eta \Phi_V + S_V, \quad (2.1)$$

где  $t = t(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$  – определяемая температура, как функция пространственных координат  $\alpha, \beta, \gamma$  и времени  $\tau$ ;  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  – полная производная температуры;  $\text{div}(\lambda \nabla t)$  – перенос тепла теплопроводностью в декартовых координатах  $x, y, z$ :

$$\text{div}(\lambda \nabla t) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right); \quad (2.2)$$

$c_p$  – удельная теплоемкость;  $\rho$  – плотность;  $\tau$  – время;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $Q_V$  – суммарная удельная мощность объемных источников тепла;  $dp / d\tau$  – работа сил давления;  $\eta$  – коэффициент вязкости;  $\Phi_V$  – диссипативная функция Релея;  $S_V$  – суммарная удельная работа внешних сил в процессе диффузионного переноса;  $v_x, v_y, v_z$  – проекции скорости на оси координат.

Полная производная температуры в декартовых координатах имеет вид:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} + v_z \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (2.3)$$

Это уравнение описывает температурное поле на основе фундаментальных законов переноса тепла в пространстве с учетом всех тепловых эффектов, которые встречаются при эксплуатации промышленного производственного оборудования.

К ним относятся следующие составляющие:

- теплоты разбавления и концентрирования растворов ( $Q_V$ );
- теплота фазовых переходов ( $Q_V$ );
- тепловые эффекты химических превращений ( $Q_V$ );
- теплота, приносимая перемешивающими устройствами ( $\Phi_V$ );
- теплота внутреннего трения в потоках продуктов и теплоносителей ( $\Phi_V$ );
- теплота, приносимая внешними электромагнитными, электрическими, акустическими и другими воздействиями ( $Q_V, S_V$ );
- теплота, приносимая работой сил давления ( $dp / d\tau$ ).

Кроме того, знание температурного поля позволяет определить тепловые потоки, температурные градиенты, интегральные теплоты, а также как локальные, так и интегральные тепловые потери в окружающую среду, в том числе через монтажные элементы.

Значения тепловых потоков определяют интенсивность и продолжительность тепловых процессов. Значения температурных градиентов в продукте, как правило, определяют его качественные показатели. Интегральные теплоты и потери определяют основную составляющую эксплуатационных затрат на осуществление процесса.

К сожалению, непосредственное использование дифференциального уравнения Фурье – Кирхгофа для прикладных расчетов практически невозможно по ряду причин. Во-первых, из-за наличия конвективных членов, что исключает возможность его прямого решения не только аналитическими, но и численными методами. Во-вторых, из-за того, что уравнение является нелинейным, т.е. большинство коэффициентов и членов уравнения являются функциями либо температуры, либо координат и времени. Это также исключает возможность получения прямого аналитического решения и значительно затрудняет использование численных методов решения.

Таким образом, практическое использование уравнения Фурье – Кирхгофа для решения прикладных задач возможно в общем случае при отсутствии в нем конвективных составляющих и постоянстве входящих в него коэффициентов.

Исследуем возможность отказа от рассмотрения конвективных членов, входящих в уравнение Фурье – Кирхгофа при моделировании тепловых полей в промышленном производственном оборудовании. Только при отсутствии конвективных составляющих появляется возможность получения аналитических (да и численных тоже) решений данного уравнения. Исключение составляет случай движения жидкости по каналу в режиме идеального вытеснения.

Рассмотрим такую возможность на примере емкостного и рекуперативного теплообменного оборудования.

В емкостном и рекуперативном теплообменном оборудовании внутренний (рабочий) объем содержит области с разными свойствами и механизмами переноса тепла.

Как правило, это:

- жидкий или газообразный (парообразный) продукт в состоянии, близком к идеальному перемешиванию или идеальному вытеснению, в котором преобладает конвективный механизм переноса тепла;
- элементы конструкции аппарата, через которые осуществляется перенос тепла теплопроводностью;
- теплоноситель или хладагент, также находящийся в жидкой или газообразной (парообразной) фазе, в состоянии, близком к идеальному перемешиванию или идеальному вытеснению, в котором также преобладает конвективный механизм переноса тепла.

В таких аппаратах теплообмен осуществляется через многослойные (в общем случае) неподвижные или подвижные элементы оборудования, разделяющие теплоносители между собой и с окружающей средой. Поэтому, как правило, расчет локальных тепловых потоков через такие конструктивные элементы оборудования, с учетом их собственной тепловой инерции и тепловой емкости, позволяет вести

пересчет температур продукта и теплоносителя на основе элементарных тепловых балансов при различных режимах их движения. Эти расчеты выполнимы, если известны температурные поля внутри вышеуказанных элементов оборудования.

Таким образом, моделирование температурных полей внутри производственного оборудования на основе решения дифференциальных уравнений теплопроводности для элементов оборудования, разделяющих потоки продуктов и теплоносителей, позволяет исключить из рассмотрения конвективные члены, входящие в дифференциальное уравнение Фурье – Кирхгофа, а использование пространственно-временной дискретизации теплового процесса – исключить необходимость нелинейной постановки задач теплопроводности.

При этом возможен учет влияния остальных факторов, связанных с тепловыми эффектами. Результирующая интегральная теплота, полученная или отданная элементарной областью, позволяет определить изменение энтальпии продукта и количество вещества, совершающего фазовый переход, если выполняются условия его осуществления. Эта результирующая теплота определяется как алгебраическая сумма элементарных теплот, проходящих через стенки оборудования, в том числе и в окружающую среду, и теплот, привносимых другими источниками.

Влияние каждого источника на элементарную область учитывается индивидуально в виде интегральных составляющих элементарного теплового баланса.

Такой прием позволяет исключить из дифференциального уравнения все слагаемые, связанные с учетом дополнительных тепловых эффектов и значительно упростить и унифицировать методику получения аналитических решений задач теплопроводности.

Данный подход проиллюстрирован на примере моделирования нестационарного температурного поля емкостного аппарата с рубашкой, перемешивающим устройством и встроенным змеевиковым теплообменником.

Возможно моделирование температурного поля для теплоносителя, движущегося в режиме идеального вытеснения по каналу, образованному конструктивными элементами оборудования, и самих этих элементов на основе совместного решения системы дифференциальных уравнений. В этом случае температурное поле внутри теплоносителя может быть описано одномерным дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных (8.12).

Граничные условия этого уравнения взаимосвязаны с граничными условиями задачи теплопроводности для элементов оборудования, контактирующих с теплоносителем.

При этом граничные условия задачи теплопроводности для элементов оборудования становятся переменными по длине зоны теплообмена.

Это, в общей постановке, практически исключает возможность прямого аналитического решения такой системы и требует использования итерационных алгоритмов.

Поэтому, за исключением ряда частных случаев, целесообразно рассчитывать температурное поле теплоносителя на основе элементарных тепловых балансов дискретных областей.

Такой подход проиллюстрирован на примере моделирования стационарного и нестационарного температурных полей одно- и многоходового кожухотрубчатого теплообменника.

С учетом вышеизложенного, моделирование температурных полей в производственном оборудовании возможно осуществлять на основе решения систем линейных дифференциальных уравнений теплопроводности для теплопередающих элементов оборудования. Эти уравнения допускают аналитические решения.

Взаимосвязанный расчет элементарных областей осуществляется следующим образом.

Для учета пространственного взаимовлияния соседних слоев многослойных элементов, как правило, используются граничные условия четвертого рода; для наружных поверхностей элементов, контактирующих с продуктами или теплоносителями – граничные условия третьего рода. При необходимости применения граничных условий первого или второго рода, могут быть использованы решения задач теплопроводности с граничными условиями третьего рода с соответствующими предельными значениями входящих в них коэффициентов.

При временной дискретизации в задачу теплопроводности для последующего интервала времени входит начальное условие, представляющее собой пространственный температурный профиль, соответствующий конечному моменту предыдущего интервала. Поскольку этот профиль описывается аналитической функцией, получение аналитического решения задачи теплопроводности с таким начальным условием возможно, хотя при этом неизбежны громоздкие математические выкладки.

Несмотря на громоздкость математических выражений, их компьютерная реализация не представляет принципиальных затруднений (здесь самое сложное – поиск случайных описок в математическом выводе расчетных формул и текстах процедур при отладке). Практика показывает надежность работы таких расчетных алгоритмов.

Таким образом, сама задача теплопроводности, на основе решения которой возможно моделирование нестационарных температурных полей в указанном классе единиц производственного оборудования, представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с условиями однозначности в виде системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений.

Знание температурного поля позволяет наиболее полно определить все тепловые характеристики процесса: тепловые потоки, температурные градиенты, интегральные теплоты, а также локальные и интегральные тепловые потери в окружающую среду, в том числе через монтажные элементы.

Значения тепловых потоков определяют интенсивность и продолжительность тепловых процессов. Значения температурных градиентов в продукте часто определяют его качественные показатели; температурные градиенты в конструкционных элементах оборудования в конечном итоге определяют надежность и долговечность оборудования. Интегральные теплоты и потери определяют одну из составляющих эксплуатационных затрат на осуществление процесса.

Температурное поле действующего оборудования является совокупностью температурных полей обрабатываемых продуктов, теплоносителей, вспомогательных компонентов и конструкционных элементов.

Пространственная и временная дискретизация области осуществления теплового процесса, как способ линеаризации задачи, лишь внешне напоминает пространственную и временную дискретизацию, лежащую в основе численных конечно-разностных методов решения дифференциальных уравнений. Во-первых, моделирование температурного поля элементарной области системой дифференциальных уравнений в частных производных позволяет получить непрерывное температурное поле, в отличие от дискретного поля при использовании численных методов. При этом резко повышается качество расчетов тепловых характеристик процесса. Во-вторых, согласование элементарных областей через граничные и начальные условия задач теплопроводности позволяет избежать накопления систематических погрешностей, присущих даже консервативным численным схемам.

Кроме того, решение задачи теплопроводности для многослойного объекта может рассматриваться как приближенное решение нелинейной задачи теплопроводности. Это соответствует гипотетическому варианту кусочно-линейного изменения теплофизических характеристик в пространстве и времени.

При решении прикладных задач такой подход до настоящего времени не использовался, по-видимому, из-за кажущейся сложности практической реализации. В действительности увеличение числа слоев в постановке задачи теплопроводности для канонических областей не приводит к принципиальному усложнению решения, так как в решении используются цепочные (или рекуррентные) соотношения, легко реализуемые при программировании. При этом некоторое увеличение объема вычислений не играет решающей роли благодаря высоким вычислительным возможностям современных компьютеров.

Как правило, встречающиеся в литературе постановки задачи теплопроводности включают постоянное начальное температурное распределение, что несколько упрощает математические выкладки при выводе аналитического решения, но принципиально ограничивает возможности практического использования данного решения. Дело в том, что в процессе моделирования температурных полей производственного оборудования при изменении условий протекания тепловых процессов (например, при переходе к следующей технологической операции) приходится решать новую задачу теплопроводности с начальным распределением температур, соответствующим концу предыдущего интервала времени.

Кроме того, дискретизация расчета по времени предполагает решение задачи теплопроводности с начальным температурным профилем, соответствующим концу предыдущего интервала времени в той же пространственной элементарной области.

Возможен ряд других ситуаций, при которых необходимо использование решения задачи теплопроводности с произвольным начальным распределением температур.

Таким образом, набор решений задач теплопроводности, необходимый для моделирования температурных полей элементарных областей производственного оборудования включает набор аналитических решений задач теплопроводности для многослойных твердых тел канонической формы, а также жидкости, движущейся по каналу. Аналитические решения задач теплопроводности для многослойных

тел канонической формы используются для моделирования температурных полей ленточных, штучных, монолитных и гранулированных продуктов, зерен катализаторов и сорбентов, конструктивных элементов оборудования. Аналитические решения задач теплопроводности для жидкости, движущейся по каналу, используются для моделирования температурных полей жидких и газообразных продуктов в ходе их обработки.

Ввиду многообразия вариантов постановок перечисленных задач теплопроводности и использования в них произвольных начальных условий и неоднородных граничных условий принципиальное значение приобретает выбор унифицированной методики получения аналитических решений в виде, удобном для практической компьютерной реализации.

### **3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИЛИ (И) МНОГОСЛОЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Практика показывает, что использование метода конечных интегральных преобразований для решения многомерных или (и) многослойных задач теплопроводности унифицирует и значительно упрощает процесс получения аналитического решения.

В конечном итоге решение сложной системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений с последующей формальной «записью» окончательного решения.

Выбранная постановка задач является классической и наиболее общей из допускающих прямые аналитические решения.

Несмотря на то, что методы конечных интегральных преобразований позволяют решать задачи, которые могут быть решены другими известными методами, они имеют ряд практических преимуществ:

- методы унифицированы и не требуют изобретательности в технических приемах;
- позволяют получать решение при неоднородных граничных условиях напрямую, без представления задачи в виде совокупности стационарной и нестационарной составляющих (хотя это несколько ухудшает сходимость рядов в окончательном решении);
- допускают преобразование по нескольким (или сразу всем) пространственным координатам одновременно, а так же по координатам, вдоль которых свойства среды изменяются ступенчато;
- допускают возможность решения нелинейных задач, хотя это и сопряжено со значительными техническими сложностями.

Необходимо отметить, что на практике целесообразнее для каждой конкретной задачи выбирать индивидуальные ядра интегральных преобразований (предпочтительнее по пространственным координатам) и соответствующие весовые функции по стандартной методике, чем использовать универсальное, широко распространенное, но сложно реализуемое преобразование Лапласа, используемое для исключения временной координаты.

Возможность использования метода конечных интегральных преобразований для случая, когда свойства среды меняются скачкообразно в направлении той координаты, по которой производится преобразование, отмечена в [4].

Для задачи с неоднородными линейными граничными условиями, целесообразно получать решение с выделением стационарной составляющей температурного поля. При этом достигается лучшая сходимость рядов, составляющих решение задачи теплопроводности, что практически приводит к значительному снижению объема вычислений и вычислительных погрешностей.

Иными словами, при решении задач теплопроводности в многослойных телах с неоднородными линейными граничными условиями, предпочтительно решение искать в виде алгебраической суммы решений стационарной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями и нестационарной задачи теплопроводности с однородными граничными условиями.

Кроме того, решение стационарных задач теплопроводности в ряде случаев имеет самостоятельное значение.

Для одномерных областей решение стационарной задачи теплопроводности не представляет сложности; метод конечных интегральных преобразований целесообразно использовать лишь для решения нестационарной задачи теплопроводности.

Для многомерных областей стационарную задачу теплопроводности также целесообразно решать методом конечных интегральных преобразований.

Рассмотрим возможность использования метода конечных интегральных преобразований для решения класса задач теплопроводности, которые могут быть использованы в ходе решения задач оптимизации конструктивных и режимных параметров оборудования многоассортиментных химических производств.

#### **4 МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБЛАСТИ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

Приведем методику решения линейной одномерной задачи теплопроводности для многослойной области канонической формы. Такими областями являются неограниченная многослойная пластина, неограниченный сплошной и полый многослойные цилиндры, сплошной и полый многослойные шары (рис. 4.1).

Рассмотрим задачу с произвольным начальным условием, неоднородными граничными условиями и распределенным внутренним источником тепла.

$$\frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left( \frac{\partial^2 t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + A_{k,i} \frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right) + Q_i(r_i, \tau); \quad (4.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i; \quad k = 0, 1, 2; \quad \tau > 0;$$

$$t_i(r_i, 0) = f_i(r_i); \quad (4.2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} + \alpha_1 (t_1(R_0, \tau) - t_{c1}(\tau)) = 0; \quad \alpha_1 < 0; \quad (4.3)$$

$$\lambda_N \frac{\partial t_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N (t_N(R_N, \tau) - t_{cN}(\tau)) = 0. \quad (4.4)$$

$$t_j(R_j, \tau) = t_{j+1}(R_j, \tau); \quad \lambda_j \frac{\partial t_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial t_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}}, \quad (4.5)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Здесь  $r$  – пространственная координата;  $\tau$  – время;  $N$  – число слоев многослойной области;  $t_i(r_i, \tau)$  – температурное поле  $i$ -й области;  $Q_i(r_i, \tau)$  – функция внутреннего источника тепла  $i$ -й области;  $\lambda_i, a_i^2$  – соответственно коэффициенты теплопроводности и температуропроводности  $i$ -й области;  $A_{k,i}$  – коэффициенты уравнения, определяемые видом координат:

для декартовой системы координат  $k = 0, A_{0,i} = 0$ ;

для цилиндрической системы координат  $k = 1, A_{1,i} = 1/r_i$ ;

для сферической системы координат  $k = 2, A_{2,i} = 2/r_i$ ;

$\alpha_1, \alpha_N$  – коэффициенты конвективной теплоотдачи от внешних поверхностей в окружающую среду;  $t_{c1}(\tau), t_{cN}(\tau)$  – температуры окружающей среды как функции времени;  $R_{i-1}, R_i$  – координаты границ  $i$ -й области.

Для исключения координаты  $r$ , вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато, используется формула перехода к изображениям:

$$U(\mu, \tau) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_0^{R_m} \rho(r_m) t_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m, \quad (4.6)$$

где  $\rho(r)$  – весовая функция, являющаяся решением уравнения

$$\frac{d\rho(r_m)}{dr} - A_{k,m} \rho(r_m) = 0. \quad (4.7)$$

Ядро интегрального преобразования  $W_m(r_m, \mu)$  является решением задачи Штурма – Лиувилля с соответствующими однородными граничными условиями, определяемое с точностью до постоянного множителя (здесь  $\mu$  – параметр):

$$\frac{d^2 W_m(r_m, \mu)}{dr_m^2} + A_{k,m} \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} + \frac{\mu^2}{a_m^2} W_m(r_m, \mu) = 0; \quad (4.8)$$

$$m = 1, 2, \dots, N, \quad R_{m-1} \leq r_m \leq R_m;$$

$$\lambda_1 \frac{dW_1(R_0, \mu)}{dr_1} + \alpha_1 W_1(R_0, \mu) = 0; \quad (4.9)$$

$$\lambda_N \frac{dW_N(R_N, \mu)}{dr_N} + \alpha_N W_N(R_N, \mu) = 0; \quad (4.10)$$

$$W_j(R_j, \mu) = W_{j+1}(R_j, \mu); \quad \lambda_j \frac{dW_j(R_j, \mu)}{dr_j} = \lambda_{j+1} \frac{dW_{j+1}(R_j, \mu)}{dr_{j+1}}, \quad (4.11)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Решение уравнения (4.8) имеет вид [3]:

$$W_m(r_m, \mu) = C1_m \exp\left(-\frac{r_m}{2} \left(A_{k,m} + \sqrt{A_{k,m}^2 - 4\frac{\mu^2}{a_m^2}}\right)\right) + \quad (4.12)$$

$$+ C2_m \exp\left(-\frac{r_m}{2} \left(A_{k,m} - \sqrt{A_{k,m}^2 - 4\frac{\mu^2}{a_m^2}}\right)\right).$$

В декартовой системе координат

$$W_m(r_m, \mu) = C1_m \sin\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) + C2_m \cos\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right). \quad (4.13)$$

В цилиндрической системе координат

$$W_m(r_m, \mu) = C1_m J_0\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) + C2_m Y_0\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right), \quad (4.14)$$

где  $J_0(z)$ ,  $Y_0(z)$  – функции Бесселя нулевого порядка, первого и второго рода соответственно.

В сферической системе координат

$$W_m(r_m, \mu) = \frac{1}{z_m} \left( C1_m \sin\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) + C2_m \cos\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) \right). \quad (4.15)$$

Коэффициенты  $C1_m$  и  $C2_m$  определяются из граничных условий (4.9) – (4.11), причем  $C1_1 = 1$ .

Для перехода к изображениям необходимо формулу (4.6) применить почленно к уравнению (4.1) и начальному условию (4.2).

В общем случае интегралы в правой части (4.6) берутся по частям с учетом граничных условий (4.3) – (4.5).

В изображениях имеем задачу:

$$\frac{dU(\mu_n, \tau)}{d\tau} + \mu_n^2 U(\mu_n, \tau) = G(\mu_n, \tau) + \quad (4.16)$$

$$+ \frac{\alpha_N}{\lambda} W(R_N, \mu_n) t_{cN}(\tau) - \frac{\alpha_1}{\lambda} W(R_1, \mu_n) t_{c1}(\tau);$$

$$U(\mu_n, 0) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(z_m) f_m(r_m) W_m(r_m, \mu_n) dr_m, \quad (4.17)$$

где (4.17) – изображение начального условия;  $G(\mu_n, \tau)$  – изображение функции источника тепла  $Q_m(z_m, \tau)$ :

$$G(\mu_n, \tau) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(z_m) Q_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu_n) dr_m. \quad (4.18)$$

Решение задачи(4.16) – (4.17) в изображениях имеет вид [3]:

$$U(\mu_n, \tau) = \exp(-\mu_n^2 \tau) \times \left( U(\mu_n, 0) + \int_0^\tau (G(\mu_n, \tau) + FW(\mu_n, \tau)) \exp(\mu_n^2 \tau) d\tau \right), \quad (4.19)$$

где 
$$FW(\mu_n, \tau) = \frac{\alpha_N}{\lambda} W(R_N, \mu_n) t_{cN}(\tau) - \frac{\alpha_1}{\lambda} W(R_0, \mu_n) t_{c1}(\tau). \quad (4.20)$$

Обратный переход осуществляется по формуле:

$$t_m(r_m, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) W_m(r_m, \mu_n)}{S_n}, \quad (4.21)$$

где 
$$S_n = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) W_m^2(r_m, \mu_n) dz_m. \quad (4.22)$$

## 5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА С ФУНКЦИОНАЛЬНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ТЕМПЕРАТУРОЙ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ СО СТОРОНЫ БОКОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрим другой пример решения задачи теплопроводности, используемой при моделировании температурных полей элементарных областей производственного оборудования химической промышленности.

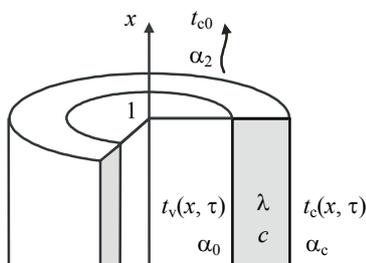
Цилиндрические стенки аппаратов, охваченные рубашкой, а также трубки кожухотрубчатых теплообменников омываются теплоносителем, температура которого меняется во времени и по длине зоны теплообмена.

Температурное поле такой стенки моделируется решением задачи теплопроводности для полого ограниченного цилиндра с функционально меняющейся температурой окружающей среды со стороны боковых поверхностей (рис. 5.1).

В приводимой постановке задача записана относительно температуры окружающей среды с торцевых поверхностей:

$$\frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left( \frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial r} \right), \quad (5.1)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad \tau > 0;$$



**Рис. 5.1** Полый ограниченный цилиндр с переменными температурами окружающей среды со стороны боковых поверхностей

$$t(x, r, 0) = f(x, r) - t_{c0}; \quad (5.2)$$

$$\lambda \frac{\partial t(0, r, \tau)}{\partial x} + \alpha_1 t(0, r, \tau) = 0; \quad \alpha_1 < 0; \quad (5.3)$$

$$\lambda \frac{\partial t(l, r, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 t(l, r, \tau) = 0; \quad (5.4)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, R_0, \tau)}{\partial r} + \alpha_0 (t(x, R_0, \tau) - t_v(x, \tau) + t_{c0}) = 0; \quad \alpha_0 < 0; \quad (5.5)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, R_1, \tau)}{\partial r} + \alpha_c (t(x, R_1, \tau) - t_c(x, \tau) + t_{c0}) = 0. \quad (5.6)$$

Для торцевых поверхностей могут быть выбраны иные граничные условия с соответствующей постановкой задачи.

Решение задачи (5.1) – (5.6) также может быть получено методом конечных интегральных преобразований, примененных последовательно по линейной и цилиндрической координате.

Для исключения координаты  $x$  используем формулу перехода к изображениям

$$T(r, \tau) = \int_0^l t(x, r, \tau) S(\mu, x) dx; \quad (5.7)$$

где  $S(\mu, x)$  – ядро интегрального преобразования, являющееся решением задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{d^2 S(x)}{dx^2} = -\mu^2 S(x); \quad (5.8)$$

$$\lambda \frac{dS(0)}{dx} + \alpha_1 S(0) = 0; \quad (5.9)$$

$$\lambda \frac{dS(l)}{dx} + \alpha_2 S(l) = 0. \quad (5.10)$$

Задача (5.8) – (5.10) с точностью до постоянного множителя имеет решение:

$$S(x) = \sin(\mu x + \varphi), \quad (5.11)$$

где 
$$\varphi = -\arctg\left(\frac{\lambda \mu}{\alpha_1}\right); \quad (5.12)$$

$\mu_n$  –  $n$ -й положительный корень уравнения

$$\alpha_3 \sin(\mu l + \varphi) + \lambda \mu \cos(\mu l + \varphi) = 0. \quad (5.13)$$

Обратный переход может быть выполнен по формуле

$$t(x, r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(r, \tau) S(\mu_n, x)}{N_n}, \quad (5.14)$$

где

$$\begin{aligned} N_n &= \int_0^l S^2(\mu_n, x) dx = \\ &= 0,5 \left( l - \frac{1}{\mu_n} (\sin(\mu_n l + \varphi_n) \cos(\mu_n l + \varphi_n) - \sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n)) \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

В изображениях задача (5.1) – (5.6) имеет вид:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} + \mu^2 T(r, \tau) \right); \quad (5.16)$$

$$T(r, 0) = \int_0^l (f(x, r) - t_{c0}) S(\mu, x) dx; \quad (5.17)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R_0, \tau)}{\partial r} + \alpha_0 (T(R_0, \tau) - U(\tau)) = 0; \quad (5.18)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R_1, \tau)}{\partial r} + \alpha_c (T(R_1, \tau) - W(\tau)) = 0, \quad (5.19)$$

где 
$$U(\tau) = \int_0^l (t_v(x, \tau) - t_{c0}) S(\mu, x) dx; \quad (5.20)$$

$$W(\tau) = \int_0^l (t_c(x, \tau) - t_{c0}) S(\mu, x) dx. \quad (5.21)$$

Теперь возможно исключение координаты  $r$  путем использования следующего интегрального преобразования

$$V(\tau) = \int_{R_0}^{R_1} T(r, \tau) r P(\eta, r) dr; \quad (5.22)$$

с обратным переходом по формуле

$$T(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(\eta_k, \tau) V(\tau)}{Z_k}, \quad (5.23)$$

причем  $P(\eta, r)$  является решением задачи

$$\frac{d^2 P(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP(r)}{dr} + \eta^2 P(r) = 0; \quad (5.24)$$

$$\lambda \frac{\partial P(R_0)}{\partial r} + \alpha_0 P(R_0) = 0; \quad (5.25)$$

$$\lambda \frac{\partial P(R_1)}{\partial r} + \alpha_c P(R_1) = 0. \quad (5.26)$$

Это решение с точностью до постоянного множителя имеет вид [3]:

$$P(r) = J_0(\eta r) + AY_0(\eta r), \quad (5.27)$$

где

$$A = \frac{\eta \lambda J_1(\eta R_0) - \alpha_0 J_0(\eta R_0)}{-\eta \lambda Y_1(\eta R_0) + \alpha_0 Y_0(\eta R_0)}, \quad (5.28)$$

а  $\eta_k$  –  $k$ -й положительный корень уравнения

$$\frac{\eta \lambda J_1(\eta R_1) - \alpha_c J_0(\eta R_1)}{-\eta \lambda Y_1(\eta R_1) + \alpha_c Y_0(\eta R_1)} = \frac{\eta \lambda J_1(\eta R_0) - \alpha_0 J_0(\eta R_0)}{-\eta \lambda Y_1(\eta R_0) + \alpha_0 Y_0(\eta R_0)}. \quad (5.29)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z_k &= \int_{R_0}^{R_1} r P^2(r) dr = \\ &= \frac{R_1^2}{2} \left( (J_0(\eta_k R_1) + A_k Y_0(\eta_k R_1))^2 + (J_1(\eta_k R_1) + A_k Y_1(\eta_k R_1))^2 \right) - \\ &- \frac{R_0^2}{2} \left( (J_0(\eta_k R_0) + A_k Y_0(\eta_k R_0))^2 + (J_1(\eta_k R_0) + A_k Y_1(\eta_k R_0))^2 \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Применяя преобразование (5.22) к задаче (5.16) – (5.19), переходим к новым изображениям:

$$\frac{dV(\tau)}{d\tau} + \eta_k^2 a^2 V(\tau) = \frac{\alpha_0 R_0^2}{\lambda} P(R_0) U(\tau) + \frac{\alpha_c R_1^2}{\lambda} P(R_1) W(\tau); \quad (5.31)$$

$$V(0) = \int_{R_0}^{R_1} \int_0^l (f(x, r) - t_{c0}) S(x) r P(r) dx dr. \quad (5.32)$$

Решением задачи (5.31) – (5.32) является функция

$$\begin{aligned} V(\tau) &= \exp(-\eta_k^2 a^2 \tau) \left( \int_{R_0}^{R_1} \int_0^l (f(x, r) - t_{c0}) S(x) r P(r) dx dr + \right. \\ &+ \frac{\alpha_0 a^2 R_0}{\lambda} P(R_0) \int_0^\tau \int_0^l (t_v(x, \tau) - t_{c0}) S(x) \exp(\eta_k^2 a^2 \tau) dx d\tau + \\ &\left. + \frac{\alpha_c a^2 R_1}{\lambda} P(R_1) \int_0^\tau \int_0^l (t_c(x, \tau) - t_{c0}) S(x) \exp(\eta_k^2 a^2 \tau) dx d\tau \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Возврат к оригиналам выполняется по формуле

$$t(x, r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V(\tau) P(r) S(x)}{N_n Z_k}. \quad (5.34)$$

При расчете температурного поля элементарной области аппаратов, имеющих трубчатые элементы, целесообразно использовать рассмотренную задачу в упрощенной постановке, соответствующей условиям работы трубчатого элемента. В этом случае

$$\frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left( \frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial r} \right); \quad (5.35)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad \tau > 0;$$

$$t(x, r, 0) = f(x, r) - t_{c0}; \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial t(0, r, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial t(l, r, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (5.38)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, R_0, \tau)}{\partial r} + \alpha_0 (t(x, R_0, \tau) - t_v(x, \tau) + t_{c0}) = 0; \quad \alpha_0 < 0; \quad (5.39)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, R_1, \tau)}{\partial r} + \alpha_c (t(x, R_1, \tau) - t_c(x, \tau) + t_{c0}) = 0. \quad (5.40)$$

Методика решения остается прежней, но ряд формул приобретает упрощенный вид.

$$\text{Формула (5.9):} \quad \frac{\partial S(0)}{\partial x} = 0. \quad (5.41)$$

$$\text{Формула (5.10):} \quad \frac{\partial S(l)}{\partial x} = 0. \quad (5.42)$$

$$\text{Формула (5.11):} \quad S(x) = \cos(\mu x). \quad (5.43)$$

$$\text{Формула (5.12):} \quad \varphi = 0. \quad (5.44)$$

$$\text{Формула (5.13):} \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}. \quad (5.45)$$

Формула (5.15):

$$N_n = \int_0^l S^2(\mu_n, x) dx = 0,5 \left( l + \frac{1}{\mu_n} \sin(\mu_n l) \cos(\mu_n l) \right). \quad (5.46)$$

$$\text{Формула (5.17):} \quad T(r, 0) = \int_0^l f(x, r) S(\mu, x) dx. \quad (5.47)$$

Формула (5.20):  $U(\tau) = \int_0^l t_v(x, \tau) S(\mu, x) dx.$  (5.48)

Формула (5.21):  $W(\tau) = \int_0^l t_c(x, \tau) S(\mu, x) dx.$  (5.49)

Формула (5.32):  $V(0) = \int_{R_0}^{R_1} \int_0^l f(x, r) S(x) r P(r) dx dr.$  (5.50)

Формула (5.33):

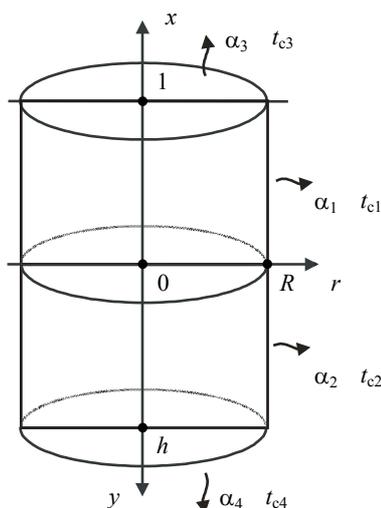
$$V(\tau) = \exp(-\eta_k^2 a^2 \tau) \left( \int_{R_0}^{R_1} \int_0^l f(x, r) S(x) r P(r) dx dr + \frac{\alpha_0 a^2 R_0}{\lambda} P(R_0) \int_0^{\tau} \int_0^l t_v(x, \tau) S(x) \exp(\eta_k^2 a^2 \tau) dx d\tau + \frac{\alpha_c a^2 R_1}{\lambda} P(R_1) \int_0^{\tau} \int_0^l t_c(x, \tau) S(x) \exp(\eta_k^2 a^2 \tau) dx d\tau \right). \quad (5.51)$$

## 6 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Решение данной задачи может быть использовано для расчета стационарных температурных полей и тепловых потоков в составных цилиндрических изделиях; в составных цилиндрических элементах аппаратов, конструкций и сооружений; в цилиндрических образцах, у которых скачкообразно изменяются теплофизические параметры или граничные условия на боковой поверхности.

Задача теплопроводности для составного тела (рис. 6.1) может быть решена следующим образом. Решаются соответствующие задачи теплопроводности для каждого из контактирующих тел независимо друг от друга при произвольных температурах на поверхности контакта или произвольных тепловых потоках через поверхность контакта. Затем, из граничных условий 4-го рода на поверхности контакта, определяются функции, первоначально заданные как произвольные.

В данном случае для упрощения математических выражений целесообразно выбрать координаты так, как показано на рисунке. Выбранное расположение координат определяет знаки тепловых потоков в постановке задачи.



**Рис. 6.1 Составной конечный цилиндр**

$$\frac{\partial^2 t_1(x,r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_1(x,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_1(x,r)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial^2 t_2(y,r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_2(y,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_2(y,r)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq y \leq h; \quad (6.2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(l,r)}{\partial x} + \alpha_3 (t_1(l,r) - t_{c3}) = 0; \quad (6.3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(x,R)}{\partial r} + \alpha_1 (t_1(x,R) - t_{c1}) = 0; \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial t_1(x,0)}{\partial r} = 0; \quad (6.5)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(h,r)}{\partial y} + \alpha_4 (t_2(h,r) - t_{c4}) = 0; \quad (6.6)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(y,R)}{\partial r} + \alpha_2 (t_2(y,R) - t_{c2}) = 0; \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial t_2(y,0)}{\partial r} = 0; \quad (6.8)$$

$$t_1(0,r) = t_2(0,r). \quad (6.9)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0,r)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial t_2(0,r)}{\partial y}. \quad (6.10)$$

Будем считать произвольным тепловой поток через стыковую поверхность тел. Вследствие осевой симметрии он будет являться только функцией радиальной координаты.

Тогда стационарное температурное поле первого тела является решением задачи:

$$\frac{\partial^2 t_1(x,r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_1(x,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_1(x,r)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (6.11)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(l,r)}{\partial x} + \alpha_3 (t_1(l,r) - t_{c3}) = 0; \quad (6.12)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(x,R)}{\partial r} + \alpha_1 (t_1(x,R) - t_{c1}) = 0; \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial t_1(x,0)}{\partial r} = 0; \quad (6.14)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0,r)}{\partial x} = -m(r). \quad (6.15)$$

Решение задачи (6.11) – (6.15) может быть получено методом конечных интегральных преобразований. Для исключения координаты  $r$  используется формула перехода к изображениям:

$$T(x,\mu) = \int_0^R \rho(r) t_1(x,r) P(r,\mu) dr, \quad (6.16)$$

где  $\rho(r) = r$  – весовая функция, являющаяся решением уравнения [4]

$$\frac{d\rho(r)}{dr} - \frac{\rho(r)}{r} = 0. \quad (6.17)$$

Ядро интегрального преобразования  $P(r,\mu)$  является решением вспомогательной задачи (здесь  $\mu$  – параметр):

$$\frac{d^2 P(r,\mu)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP(r,\mu)}{dr} + \mu^2 P(r,\mu) = 0; \quad (6.18)$$

$$\lambda_1 \frac{dP(R,\mu)}{dr} + \alpha_1 P(R,\mu) = 0; \quad (6.19)$$

$$\frac{dP(0,\mu)}{dr} = 0. \quad (6.20)$$

Решение задачи (6.18) – (6.20) с точностью до постоянного множителя имеет вид:

$$P(r,\mu) = J_0(\mu r), \quad (6.21)$$

где  $\mu$  – последовательные положительные корни уравнения

$$\alpha_1 J_0(\mu R) - \mu \lambda_1 J_1(\mu R) = 0. \quad (6.22)$$

Обратный переход осуществляется по формуле:

$$t_1(x, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(x, \mu_n) P(r, \mu_n)}{Z_n}, \quad (6.23)$$

где

$$Z_n = \int_0^R r P^2(r, \mu_n) dr = \int_0^R r J_0^2(r, \mu_n) dr = 0,5 R^2 (J_0^2(\mu_n R) + J_1^2(\mu_n R)). \quad (6.24)$$

Здесь  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  – Бесселевы функции первого рода, нулевого и первого порядка соответственно. Применяя преобразование (6.16) к задаче (6.11) – (6.15), переходим к изображениям:

$$\frac{d^2 U(x, \mu)}{dx^2} - \mu_n^2 U(x, \mu) = 0; \quad (6.25)$$

$$\lambda_1 \frac{dU(l, \mu)}{dx} + \alpha_3 U(l, \mu) + S = 0; \quad (6.26)$$

$$\lambda_1 \frac{dU(0, \mu)}{dx} = M. \quad (6.27)$$

Здесь

$$U(x, \mu) = T(x, \mu) - K; \quad (6.28)$$

$$K = \frac{\alpha_1 R t_{c1}}{\lambda_1 \mu^2} J_0(\mu R); \quad (6.29)$$

$$S = \alpha_3 \left( K - \frac{R t_{c3}}{\mu} J_1(\mu R) \right); \quad (6.30)$$

$$M = - \int_0^R r m(r) J_0(\mu r) dr. \quad (6.31)$$

Решение задачи (6.25) – (6.27) имеет вид [3]:

$$U(x, \mu) = A \operatorname{sh}(\mu x) + B \operatorname{ch}(\mu x), \quad (6.32)$$

где  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий (6.26) – (6.27):

$$A = \frac{M}{\lambda_1 \mu}; \quad (6.33)$$

$$B = -\frac{S+MC}{D}, \quad (6.34)$$

здесь

$$C = \operatorname{ch}(\mu l) + \frac{\alpha_3}{\lambda_1 \mu} \operatorname{sh}(\mu l); \quad (6.35)$$

$$D = \alpha_3 \operatorname{ch}(\mu l) + \lambda_1 \mu \operatorname{sh}(\mu l). \quad (6.36)$$

Теперь можно записать решение задачи (6.11) – (6.15):

$$t_1(x, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\mu_n)}{Z_n} \left( \frac{M_n}{\lambda_1 \mu_n} \operatorname{sh}(\mu_n x) - \frac{S_n + M_n C_n}{D_n} \operatorname{ch}(\mu_n x) + K_n \right). \quad (6.37)$$

Стационарное температурное поле второго тела является решением задачи, аналогичной задаче (6.11) – (6.15):

$$\frac{\partial^2 t_2(y, r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_2(y, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_2(y, r)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (6.38)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(h, r)}{\partial y} + \alpha_4 (t_2(h, r) - t_{c4}) = 0; \quad (6.39)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(y, R)}{\partial r} + \alpha_2 (t_2(y, R) - t_{c2}) = 0; \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial t_2(y, 0)}{\partial r} = 0; \quad (6.41)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(0, r)}{\partial y} = -m(r). \quad (6.42)$$

Решение этой задачи может быть записано формально путем соответствующей замены величин, входящих в решение задачи (6.11) – (6.15):

$$\begin{aligned} y &\rightarrow x, \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_1, \quad \alpha_2 \rightarrow \alpha_1, \quad \alpha_4 \rightarrow \alpha_3, \quad t_{c2} \rightarrow t_{c1}, \\ t_{c4} &\rightarrow t_{c3}, \quad \gamma_n \rightarrow \mu_n, \quad M_{1n} \rightarrow M_n, \quad K_{1n} \rightarrow K_n, \\ S_{1n} &\rightarrow S_n, \quad C_{1n} \rightarrow C_n, \quad D_{1n} \rightarrow D_n, \quad Z_{1n} \rightarrow Z_n. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Теперь числа  $M_1$  и  $M$  могут быть найдены из условия равенства температур (6.9) и неразрывности тепловых потоков (6.10) на поверхности контакта тел:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\mu_n)}{Z_n} \left( -\frac{S_n + M_n C_n}{D_n} + K_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_n)}{Z_{1n}} \left( -\frac{S_{1n} + M_{1n} C_{1n}}{D_{1n}} + K_{1n} \right); \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\mu_n)}{Z_n} M = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_n)}{Z_{1n}} M_{1n}. \end{cases} \quad (6.44)$$

Будем последовательно умножать левые и правые части равенства на  $r J_0(r\mu_k)$  и интегрировать в пределах от 0 до  $R$ . В результате получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{Z_k} \left( -\frac{S_k + M_k C_k}{D_k} + K_k \right) \int_0^R r J_0^2(r \mu_k) dr = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z_{1n}} \left( -\frac{S_{1n} + M_{1n} C_{1n}}{D_{1n}} + K_{1n} \right) \int_0^R r J_0(r \mu_k) J_0(r \gamma_n) dr; \quad (6.45) \\ & \frac{M_k}{Z_k} \int_0^R r J_0^2(r \mu_k) dr = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z_{1n}} \int_0^R r J_0(r \mu_k) J_0(r \gamma_n) dr. \end{aligned} \right.$$

Здесь использовано свойство ортогональности Бесселевых функций:

$$\int_0^R r J_0(\mu_n r) J_0(\mu_k r) dr = 0, \quad \text{если } n \neq k. \quad (6.46)$$

Если в расчетах используется  $N$  членов ряда, система (6.45) представляет собой систему линейных уравнений, из которой определяются числа  $M_{1k}, M_k$ ;  $1 \leq k \leq N$ .

Вводя соответствующие обозначения, получим систему (6.45) в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & G_k M_k - \sum_{n=1}^N H_{nk} G_{1n} M_{1n} = L_k, \quad 1 \leq k \leq N; \\ & M_k - \sum_{n=1}^N H_{nk} M_n = 0, \end{aligned} \right. \quad (6.47)$$

где  $G_k = \frac{C_k}{D_k}$ ;  $G_{1k} = \frac{C_{1k}}{D_{1k}}$ ;  $(6.48)$

$$H_{nk} = \frac{R}{Z_n} \frac{\mu_n J_1(\mu_n R) J_0(\gamma_k R) - \gamma_k J_0(\mu_n R) J_1(\gamma_k R)}{\mu_n^2 - \gamma_k^2}; \quad (6.49)$$

$$L_k = -\frac{S_k}{D_k} + K_k + \sum_{n=1}^N H_{nk} \left( \frac{S_{1k}}{D_{1k}} - K_{1k} \right). \quad (6.50)$$

Подставляя из второго уравнения системы (6.47)  $M_k$  в первое, получаем систему  $N$  линейных уравнений относительно неизвестных  $M_{1n}$ :

$$\sum_{n=1}^N H_{nk} (G_k + G_{1n}) M_{1n} = -L_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (6.51)$$

Затем определяются числа  $M_k$ :

$$M_k = \sum_{n=1}^N H_{nk} M_n, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (6.52)$$

## 7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЭЛЕМЕНТАХ ОБОРУДОВАНИЯ, ИМЕЮЩИХ ФОРМУ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

Рассмотрим случай, когда постоянный тепловой поток подводится к торцу стержня или двум соседним торцам пластины, а поверхность стержня или плоские поверхности пластины омываются теплоносителем при свободной или вынужденной конвекции.

При выводе уравнения используются следующие допущения:

- температура теплоносителя по длине стержня или поверхности пластины не меняется;
- источники тепла в стержне или пластине отсутствуют;

- перепад температур в поперечном сечении стержня или по толщине пластины отсутствует;
- теплопроводность материала стержня или пластины не зависит от температуры;
- стержень или пластина имеют постоянное сечение.

Рассмотрим температурное поле стержня.

Выделим элементарную область длиной  $\Delta x$  по направлению движения теплового потока.

Запишем составляющие теплового баланса для элементарной области.

$Q_1$  – тепловая мощность, подводимая теплопроводностью к элементарной области;

$Q_2$  – тепловая мощность, отводимая теплопроводностью из элементарной области.

Тогда тепловая мощность, отдаваемая теплоносителю на элементарном участке, равна

$$Q_1 - Q_2 = \alpha f (t(x) - t_t), \quad (7.1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от поверхности стержня к теплоносителю;  $f = \Pi \Delta x$  – омываемая площадь поверхности элементарной области;  $\Pi$  – периметр элементарной области;  $t(x)$  – текущая температура стержня;  $t_t$  – температура теплоносителя;  $x$  – координата, направленная по длине стержня.

С другой стороны

$$Q_1 - Q_2 = F (q_1 - q_2), \quad (7.2)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержня;  $q_1, q_2$  – плотности тепловых потоков, соответственно подводимых к элементарной области и отводимых от нее теплопроводностью.

Устремляя  $\Delta x$  к нулю, имеем:

$$q_1 - q_2 = -\frac{dq(x)}{dx} \Delta x = -\frac{d}{dx} \left( -\lambda \frac{dt(x)}{dx} \right) dx = \lambda \frac{d^2 t(x)}{dx^2} dx. \quad (7.3)$$

Тогда 
$$\lambda \frac{d^2 t(x)}{dx^2} F dx = \alpha \Pi (t(x) - t_t) dx. \quad (7.4)$$

Введя обозначения  $T(x) = t(x) - t_t$  и  $k^2 = \frac{\alpha \Pi}{\lambda F}$ , 
$$(7.5)$$

окончательно получим: 
$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - k^2 T(x) = 0. \quad (7.6)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$T(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx). \quad (7.7)$$

При использовании краевых условий вида:

$$-\lambda \frac{dT(0)}{dx} = q_0; \quad (7.8)$$

$$-\lambda \frac{dT(L)}{dx} = \alpha_t (t(L) - t_t), \quad (7.9)$$

где  $q_0$  – входящий тепловой поток;  $L$  – длина стержня;  $\alpha_t$  – торцевой коэффициент теплоотдачи,

имеем: 
$$C_1 = \frac{\alpha_t t_t + \frac{q_0}{\lambda k} (\alpha_t \operatorname{sh}(kL) + \lambda k \operatorname{ch}(kL))}{\alpha_t \operatorname{ch}(kL) + \lambda k \operatorname{sh}(kL)}; \quad (7.10)$$

$$C_2 = -\frac{q_0}{\lambda k}. \quad (7.11)$$

Теперь рассмотрим температурное поле пластины.

Обозначим толщину пластины  $h$ .

При подводе тепловых мощностей к соседним торцам пластины получаем двумерное температурное поле.

Выделим элементарную область размерами  $\Delta x \times \Delta y \times h$ .

Запишем составляющие теплового баланса для выделенной элементарной области.

$Q_{x1}$  – тепловая мощность, подводимая теплопроводностью к элементарной области в направлении координаты  $x$ ;

$Q_{x2}$  – тепловая мощность, отводимая теплопроводностью из элементарной области в направлении координаты  $x$ ;

$Q_{y1}$  – тепловая мощность, подводимая теплопроводностью к элементарной области в направлении координаты  $y$ ;

$Q_{y2}$  – тепловая мощность, отводимая теплопроводностью из элементарной области в направлении координаты  $y$ .

Тогда тепловая мощность, отдаваемая теплоносителю на элементарном участке, равна

$$Q_{x1} - Q_{x2} + Q_{y1} - Q_{y2} = (\alpha_1 + \alpha_2) f (t(x, y) - t_t), \quad (7.12)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи от наружных поверхностей пластины к теплоносителю;  $f = \Delta x \Delta y$  – омываемая площадь поверхности элементарной области на каждой из плоскостей пластины;  $t(x, y)$  – текущая температура пластины;  $t_t$  – температура теплоносителя;  $x, y$  – координаты.

С другой стороны,

$$Q_{x1} - Q_{x2} = F_x (q_{x1} - q_{x2}), \quad Q_{y1} - Q_{y2} = F_y (q_{y1} - q_{y2}), \quad (7.13)$$

где  $F_x = h \Delta y$ ,  $F_y = h \Delta x$  – площади поперечного сечения элементарной области в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;  $q_{x1}$ ,  $q_{y1}$ ,  $q_{x2}$ ,  $q_{y2}$  – плотности тепловых потоков, соответственно подводимых к элементарной области и отводимых от нее теплопроводностью в соответствующих направлениях.

Устремляя одновременно  $\Delta x$  и  $\Delta y$  к нулю, имеем:

$$\begin{aligned} q_{x1} - q_{x2} &= -\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} \right) dx = \lambda \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2} dx; \\ q_{y1} - q_{y2} &= -\frac{\partial q(x, y)}{\partial y} \Delta y = -\frac{\partial}{\partial y} \left( -\lambda \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \right) dy = \lambda \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} dy. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Тогда

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} \right) h dx dy = (\alpha_1 + \alpha_2) (t(x, y) - t_t) dx dy. \quad (7.15)$$

Введя обозначения  $T(x, y) = t(x, y) - t_t$  и  $k^2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{\lambda h}$ , (7.16)

окончательно получим:  $\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} - k^2 T(x, y) = 0. \quad (7.17)$

При граничных условиях вида:

$$-\lambda \frac{\partial T(0, y)}{\partial x} = q_{x0}; \quad (7.18)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = q_{y0}; \quad (7.19)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(L_x, y)}{\partial x} = \alpha_{xt} T(L_x, y); \quad (7.20)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, L_y)}{\partial y} = \alpha_{yt} T(x, L_y), \quad (7.21)$$

где  $q_{x0}, q_{y0}$  – входящие тепловые потоки по направлениям  $x$  и  $y$ ;  $L_x, L_y$  – длины пластины в направлениях  $x$  и  $y$ ;  $\alpha_{xt}, \alpha_{yt}$  – торцевые коэффициенты теплоотдачи, получаем задачу, которая решается методом конечных интегральных преобразований.

Ядро интегрального преобразования, позволяющего исключить координату  $y$ , является решением вспомогательной задачи

$$\frac{d^2 P(y)}{dy^2} + \mu^2 P(y) = 0 \quad (7.22)$$

с однородными граничными условиями:

$$\frac{dP(0)}{dy} = 0; \quad (7.23)$$

$$-\lambda \frac{dP(L_y)}{dy} = \alpha_{yt} P(L_y). \quad (7.24)$$

С точностью до постоянного множителя

$$P(y) = \cos(\mu y), \quad (7.25)$$

где  $\mu$  – последовательные положительные корни уравнения

$$\mu \lambda \sin(\mu L_y) = \alpha_{yt} \cos(\mu L_y). \quad (7.26)$$

Переход к изображениям выполняется по формуле

$$U(x) = \int_0^{L_y} T(x, y) \rho(y) P(y) dy, \quad (7.27)$$

где  $\rho(y) = 1$ .

Обратный переход выполняется по стандартной формуле

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(x) P(y)}{N}, \quad (7.28)$$

где суммирование ведется по значениям  $\mu_n$  и

$$N = \int_0^{L_y} \rho(y) P^2(y) dy = \int_0^{L_y} \cos^2(\mu y) dy = \frac{1}{2\mu} (\mu L_y + \sin(\mu L_y) \cos(\mu L_y))$$

(7.29)

Переходим к изображениям задачи (7.17) – (7.21):

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} - v^2 U(x) + \frac{q_{y0}}{\lambda} = 0, \quad v^2 = \mu^2 + k^2; \quad (7.30)$$

$$-\lambda \frac{dU(0)}{dx} = Q_{x0}; \quad (7.31)$$

$$-\lambda \frac{dU(L_x)}{dx} = \alpha_{xt} U(L_x), \quad (7.32)$$

где

$$Q_{x0} = \int_0^{L_y} q_{x0} P(y) dy = \frac{q_{x0}}{\mu} \sin(\mu L_y). \quad (7.33)$$

Решение задачи имеет вид:

$$U(x) = A \operatorname{sh}(vx) + B \operatorname{ch}(vx) + \frac{q_{y0}}{\lambda v^2}. \quad (7.34)$$

$A$  и  $B$  определяются из краевых условий:

$$A = -\frac{Q_{x0}}{v\lambda}; \quad (7.35)$$

$$B = -\frac{A(\lambda v \operatorname{ch}(v L_x) + \alpha_{xt} \operatorname{sh}(v L_x)) + \frac{\alpha_{xt} q_{y0}}{\lambda v^2}}{\alpha_{xt} \operatorname{ch}(v L_x) + \lambda v \operatorname{sh}(v L_x)}. \quad (7.36)$$

Таким образом, все компоненты решения (7.28) определены.

## 8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ЖИДКОСТЬЮ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В РЕЖИМЕ ИДЕАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ ПО КАНАЛУ

Рассмотрим случай, когда движущаяся жидкость омывает стенки канала с двумя разными температурами. Эта ситуация соответствует случаям движения теплоносителя по кольцевому каналу рубашки емкостного аппарата или по межтрубному пространству кожухотрубчатого аппарата. Случай, когда движущаяся жидкость омывает стенки канала с одной температурой, рассмотрен в [7].

При выводе уравнения используются следующие допущения:

- температура жидкости по сечению канала не меняется;
- жидкость несжимаемая;
- теплофизические характеристики жидкости не зависят от температуры;
- канал имеет постоянное сечение.

Допущение о независимости теплофизических характеристик жидкости от температуры принято исходя из того соображения, что рассматриваемый поток находится внутри малой пространственной области.

Рассмотрим нестационарный температурный режим.

Пусть движущаяся жидкость омывает стенки канала с двумя различными температурами, изменяющимися во времени и по длине элементарной области.

Примем следующие обозначения:

$x$  – пространственная координата по направлению движения потока;

$\tau$  – время;

$t(x, \tau)$  – текущая температура жидкости;

$G$  – массовый расход жидкости;

$c$  – теплоемкость жидкости;

$q_i$  – плотность теплового потока через стенку канала;  
 $\Delta F_i = \Pi_i \Delta x$  – площадь  $i$ -й стенки канала элементарной области;  
 $\Pi_i$  – омываемый периметр  $i$ -й стенки канала;  
 $\alpha_i$  – коэффициент конвективной теплоотдачи от  $i$ -й стенки канала к жидкости;  
 $t_{F_i}(x, \tau)$  – температура  $i$ -й стенки канала;  
 $i = 1, 2$  – индекс поверхности канала.

Выделим элементарную область длиной  $\Delta x$  по направлению движения потока.  
 Запишем составляющие теплового баланса для элементарной области.  
 Тепло, привносимое потоком жидкости за время  $\Delta \tau$

$$Q_0 = G c t(x, \tau) \Delta \tau ; \quad (8.1)$$

тепло, уносимое потоком жидкости за время  $\Delta \tau$

$$Q_3 = -G c t(x + \Delta x, \tau) \Delta \tau ; \quad (8.2)$$

тепло, отдаваемое элементарной области первой поверхностью

$$Q_1 = q_1 \Delta F_1 = \alpha_1 (t_{F_1}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Delta F_1 \Delta \tau ; \quad (8.3)$$

тепло, отдаваемое элементарной области второй поверхностью

$$Q_2 = q_2 \Delta F_2 = \alpha_2 (t_{F_2}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Delta F_2 \Delta \tau . \quad (8.4)$$

Составляющие элементарного теплового баланса можно записать через приращения независимых переменных:

$$Q_1 = \alpha_1 (t_{F_1}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Pi_1 \Delta x \Delta \tau ; \quad (8.5)$$

$$Q_2 = \alpha_2 (t_{F_2}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Pi_2 \Delta x \Delta \tau . \quad (8.6)$$

Изменение теплосодержания жидкости в элементарной области за время  $\Delta \tau$ :

$$Q = S \Delta x \rho c (t(x, \tau + \Delta \tau) - t(x, \tau)) , \quad (8.7)$$

где  $S$  – площадь сечения канала;  $\rho$  – плотность жидкости.

Изменение теплосодержания жидкости обусловлено результирующим количеством тепла, подведенным к жидкости в элементарной области:

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (8.8)$$

или

$$\begin{aligned}
 S \Delta x \rho c (t(x, \tau + \Delta \tau) - t(x, \tau)) = \\
 = G c t(x, \tau) \Delta \tau + \alpha_1 (t_{F_1}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Pi_1 \Delta x \Delta \tau + \\
 + \alpha_2 (t_{F_2}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Pi_2 \Delta x \Delta \tau - G c t(x + \Delta x, \tau) \Delta \tau .
 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Разделив уравнение почленно на произведение  $\Delta x \Delta \tau$  и выполнив предельные переходы, получим:

$$\begin{aligned}
 S \rho c \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = -G c \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} + \\
 + \alpha_1 (t_{F_1}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Pi_1 + \alpha_2 (t_{F_2}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Pi_2 .
 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Далее, поделив уравнение почленно на произведение  $S\rho c$  и перегруппировав слагаемые, получим окончательный вид уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} + W \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2}{S\rho c} t(x, \tau) = \\ = \frac{\alpha_1 \Pi_1 t_{F_1}(x, \tau) + \alpha_2 \Pi_2 t_{F_2}(x, \tau)}{S\rho c}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

где  $W = \frac{G}{S\rho}$  – скорость движения жидкости.

Запишем задачу в виде:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} + W \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} + K t(x, \tau) = F(x, \tau); \quad (8.12)$$

$$t(0, \tau) = t_0(\tau); \quad t(x, 0) = f(x), \quad (8.13)$$

где

$$\begin{aligned} K &= \frac{\alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2}{S\rho c}; \\ F(x, \tau) &= \frac{\alpha_1 \Pi_1 t_{F_1}(x, \tau) + \alpha_2 \Pi_2 t_{F_2}(x, \tau)}{S\rho c}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Полное решение уравнения (8.12) приводится в [1].

При использовании решения для моделирования температурных полей элементарных областей возможно применение более простого решения задачи (8.12) – (8.13), полученного при использовании конечно-разностного аналога частной производной  $\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau}$ :

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} \approx \frac{t(x, \tau) - t(x, \tau - d\tau)}{d\tau}. \quad (8.15)$$

При этом для фиксированного значения времени  $d\tau$  внутри каждого временного интервала температурное поле потока является функцией только координаты  $x$  и описывается уравнением:

$$\frac{dt(x)}{dx} + Pt(x) = V(x), \quad (8.16)$$

где  $P = \frac{K d\tau + 1}{W d\tau}; \quad V(x) = \frac{1}{W} \left( F(x, d\tau) + \frac{f(x)}{d\tau} \right); \quad (8.17)$

$f(x)$  – температурное поле теплоносителя в элементарной области в начальный момент.

При начальном условии вида  $t(0) = t_0$  имеем решение уравнения (8.16):

$$t(x) = \exp(-Px) \left( t_0 + \int_0^x V(\xi) \exp(P\xi) d\xi \right). \quad (8.18)$$

Средняя температура жидкости на участке длиной  $\Delta x$  равна

$$\bar{t} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} t(x) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \exp(-Px) \left( t_0 + \int_0^x V(\xi) \exp(P\xi) d\xi \right) dx. \quad (8.19)$$

Если канал образован одной стенкой замкнутого периметра с температурой  $t_F(x, \tau)$ , то

$$K = \frac{\alpha \Pi}{Sp_c}; \quad F(x, \tau) = \frac{\alpha \Pi t_F(x, \tau)}{Sp_c}, \quad (8.20)$$

где  $\Pi$  – периметр сечения канала;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

В стационарном случае задача упрощается:

$$\frac{dt(x)}{dx} + K t(x) = S(x), \quad (8.21)$$

где

$$K = \frac{\alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2}{Gc};$$

$$S(x) = \frac{\alpha_1 \Pi_1 t_{F_1}(x) + \alpha_2 \Pi_2 t_{F_2}(x)}{Gc}. \quad (8.22)$$

При начальном условии вида  $t(0) = t_0$  решение уравнения (8.21) имеет вид

$$t(x) = \exp(-Kx) \left( t_0 + \int_0^x S(x) \exp(Kx) dx \right). \quad (8.23)$$

Если температуры стенок постоянны, т.е.  $t_{F_1}(x) = \text{const} = t_{F_1}$  и  $t_{F_2}(x) = \text{const} = t_{F_2}$ , то

$$t(x) = V + (t_0 - V) \exp(-Kx), \quad (8.24)$$

где

$$V = \frac{\alpha_1 \Pi_1 t_{F_1}(x) + \alpha_2 \Pi_2 t_{F_2}(x)}{\alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2}. \quad (8.25)$$

Средняя температура жидкости на участке длиной  $\Delta x$  равна

$$\bar{t} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} t(x) dx = V + \frac{(t_0 - V)}{K \Delta x} (1 - \exp(-K \Delta x)). \quad (8.26)$$

Если канал образован одной стенкой замкнутого периметра с температурой  $t_F(x)$ , то

$$t(x) = \exp(-K_1 x) \left( t_0 + K_1 \int_0^x t_F(x) \exp(K_1 x) dx \right), \quad (8.27)$$

где

$$K_1 = \frac{\alpha \Pi}{Gc}. \quad (8.28)$$

Если температура стенки постоянна, т.е.  $t_F(x) = \text{const} = t_F$ , то

$$t(x) = t_F + (t_0 - t_F) \exp(-K_1 x), \quad (8.29)$$

а средняя температура жидкости на участке длиной  $\Delta x$  равна

$$\bar{t} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} t(x) dx = t_F + \frac{(t_0 - t_F)}{K_1 \Delta x} (1 - \exp(-K_1 \Delta x)). \quad (8.30)$$

Таким образом, решения задач (4.1) – (4.5), (5.1) – (5.6) и (8.12) – (8.13) составляют минимальный набор аналитических решений задач теплопроводности, необходимый для математического моделиро-

вания полей определяющих параметров класса элементарных областей производственного оборудования.

## 9 РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При математическом моделировании температурных полей, как правило, основным источником погрешностей служат значения конвективных коэффициентов теплоотдачи, входящие в граничные условия третьего рода задачи теплопроводности.

Коэффициент теплоотдачи является комплексной характеристикой интенсивности теплообмена теплоотдающей (тепловоспринимающей) поверхности и омывающего ее потока жидкости (газа). Он зависит от большого количества физических, геометрических и режимных параметров теплообменного процесса (10 и более). Поэтому вывод прямых аналитических зависимостей для расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи на основе фундаментальных знаний о природе процессов теплопереноса в пространстве не представляется возможным.

Существуют различные возможности для определения численных значений коэффициентов конвективной теплоотдачи в конкретных условиях протекания теплообменного процесса.

Классическая инженерная методика расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи, базирующаяся на теории подобия, основана на использовании критериальных уравнений алгебраического типа, обобщающих экспериментальные данные по различным веществам, выступающим в роли теплоносителей, для каждого набора условий протекания теплообменного процесса. Поэтому использование критериальных уравнений, являющихся по сути результатом многомерной аппроксимации, приводит в каждом конкретном расчете к погрешностям, не поддающимся оценке. Как правило, погрешность расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи по критериальным уравнениям составляет 30 – 50 %. По замечанию А.А. Гухмана, высказанному в частной беседе, эта погрешность может достигать 900 %.

Другой путь связан с непосредственным измерением температурных полей в лабораторных или промышленных условиях на действующем оборудовании для исследуемых условий протекания теплообменных процессов и видов теплоносителей. По результатам измерений температурных полей могут быть вычислены локальные значения коэффициентов теплоотдачи.

Существует ряд методик расчета коэффициентов теплоотдачи по экспериментальным данным, это:

1) расчет непосредственно по определению коэффициента теплоотдачи как удельного количества тепла, приходящегося на единицу площади поверхности теплообмена в единицу времени и отнесенного к единичной разности температур поверхности и определяющей температуры потока;

2) итеративный алгоритм нахождения коэффициента теплоотдачи, в котором при каждой итерации решается прямая задача теплопроводности, т.е. рассчитывается температурное поле в моделируемых условиях, и корректируется значение коэффициента теплоотдачи, входящего в граничные условия задачи теплопроводности; итерации выполняются до приемлемого совпадения расчетного и измеренного температурных полей;

3) прямой расчет коэффициента теплоотдачи по результатам решения обратной задачи теплопроводности для исследуемого процесса.

Первый способ позволяет найти усредненные значения коэффициентов теплоотдачи по результатам экспериментов, выполненных на экспериментальных установках, позволяющих определять значения тепловых потоков. Этот способ широко освещен в литературе и является своего рода классическим.

Второй способ является «кустарным», т.е. не имеет строгого математического обоснования, хотя он относительно прост и нагляден. Этот способ целесообразно использовать в оценочных расчетах.

Третий способ математически строг, но сложен и специфичен. Решению обратных задач теплопроводности посвящено много работ, но их результаты часто оказываются не адаптированными для решения прикладных инженерных задач.

Рассмотрим возможные, относительно простые, пути определения коэффициента теплоотдачи по результатам экспериментальных исследований с использованием решения обратных задач теплопроводности.

В [7] приводится методика, основанная на использовании интегральных преобразований Лапласа для решения обратной задачи теплопроводности в цилиндрических координатах.

В качестве иллюстрации такого подхода (для декартовых координат) рассмотрим процесс конвективного теплообмена плоской неограниченной вертикальной пластины с окружающей средой, имеющей постоянную температуру.

Пусть измеряется температура во времени в какой-то точке пластины. Температурное поле такой пластины описывается решением следующей задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad \tau \geq 0; \quad (9.1)$$

с начальным условием

$$t(x, 0) = t_0 = \text{const} \quad (9.2)$$

и граничными условиями

$$\lambda \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial x} + \alpha(t(R, \tau) - t_c) = 0; \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (9.4)$$

где  $x$  – координата, направленная по нормали к поверхности пластины;  $\tau$  – время;  $t(x, \tau)$  – температурное поле пластины;  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коэффициент температуропроводности материала пластины;  $\lambda, c, \rho$  – теплопроводность, теплоемкость и плотность материала пластины соответственно;  $t_0$  – начальная температура пластины;  $t_c$  – температура окружающей среды;  $R$  – полутолщина пластины;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

Путем замены переменной  $T(x, \tau) = t(x, \tau) - t_0$  можно получить задачу с нулевым начальным распределением:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (9.5)$$

$$T(x, 0) = 0; \quad (9.6)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} + \alpha(T(R, \tau) - t_c + t_0) = 0; \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (9.8)$$

Выполним преобразование Лапласа данной задачи по формуле

$$S(x, p) = \int_0^{\infty} T(x, \tau) \exp(-p\tau) d\tau. \quad (9.9)$$

Получаем задачу в изображениях:

$$a \frac{d^2 S(x, p)}{dx^2} - p S(x, p) = 0; \quad (9.10)$$

$$\lambda \frac{\partial S(R, p)}{\partial x} + \alpha \left( S(R, p) - \frac{t_c + t_0}{p} \right) = 0; \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial S(0, p)}{\partial x} = 0. \quad (9.12)$$

Решение этой задачи в изображениях имеет вид

$$S(x, p) = A \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} x \right) + B \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} x \right), \quad (9.13)$$

где  $\operatorname{sh}(z)$  и  $\operatorname{ch}(z)$  – гиперболические функции.

$A$  и  $B$  определяются из граничных условий (9.3), (9.4):

$$\begin{aligned} & \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \left( A \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) + B \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) \right) + \\ & + \alpha \left( A \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) + B \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) \right) - \alpha \frac{t_c - t_0}{p} = 0; \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \left( A \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} 0 \right) + B \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} 0 \right) \right) = 0, \quad (9.15)$$

откуда

$$A = 0, \quad (9.16)$$

$$B = \frac{\alpha(t_c - t_0)}{p \left( \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) + \alpha \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) \right)}. \quad (9.17)$$

Тогда

$$S(x, p) = \frac{\alpha(t_c - t_0) \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} x \right)}{p \left( \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) + \alpha \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) \right)}. \quad (9.18)$$

Если известно изображение температурного поля  $S(x, p)$ , значение коэффициента теплоотдачи может быть найдено аналитически:

$$\alpha = \frac{S(x, p) p \lambda \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right)}{(t_c - t_0) \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} x \right) - p S(x, p) \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right)}. \quad (9.19)$$

Изображение температурного поля  $S(x, p)$  определяется по формуле

$$\begin{aligned}
S(x, p) &= \int_0^{\infty} (t_i(x, \tau_i) - t_0) \exp(-p \tau_i) d\tau_i = \\
&= \int_0^{\tau_k} (t_i(x, \tau_i) - t_0) \exp(-p \tau_i) d\tau_i + \frac{t_k(x, \tau_k) - t_0}{p} \exp(-p \tau_k),
\end{aligned} \tag{9.20}$$

где  $t_i(x, \tau_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  – экспериментальные значения температур, измеренных в фиксированной точке в различные моменты времени.

Можно показать, что расчетный результат не зависит от численного значения параметра интегрального преобразования Лапласа  $p$ , которое может быть как действительным, так и комплексным.

Однако практически метод может быть использован только для регулярного температурного режима из-за его ярко выраженной неустойчивости по отношению к погрешности измерений температур при нерегулярных температурных режимах.

Другой метод решения обратной задачи теплопроводности основан на использовании конечных интегральных преобразований. Он устойчив, но требует экспериментального определения температурного профиля по толщине образца хотя бы в единственный момент времени. Определение пространственно-температурного профиля может быть сложно осуществимо практически, особенно для действующего промышленного оборудования.

Проиллюстрируем этот метод на том же примере для пластины, температурное поле которой описывается решением задачи (9.1) – (9.4).

Введем другую замену переменной

$$T(x, \tau) = t(x, \tau) - t_c, \tag{9.21}$$

позволяющую перейти к задаче с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \tag{9.22}$$

$$T(x, 0) = T_0 = t_0 - t_c; \tag{9.23}$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} + \alpha T(R, \tau) = 0; \tag{9.24}$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0. \tag{9.25}$$

Применим к этой задаче конечное интегральное преобразование

$$W(\tau) = \int_0^R T(x, \tau) \rho V(x) dx, \tag{9.26}$$

где функция  $V(x)$ , являющаяся ядром интегрального преобразования, определяется как решение вспомогательной задачи Штурма – Лиувилля:

$$\frac{d^2 S(x)}{dx^2} + \mu^2 S(x) = 0; \tag{9.27}$$

$$\lambda \frac{dS(R)}{dx} + \alpha S(R) = 0; \tag{9.28}$$

$$\frac{dS(0)}{dx} = 0. \tag{9.29}$$

Решение этой задачи с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$S(x) = \sin(\mu x + \varphi). \quad (9.30)$$

Тогда 
$$\frac{dS(x)}{dx} = \mu \cos(\mu x + \varphi). \quad (9.31)$$

Из граничного условия (9.29) 
$$\mu \cos(\varphi) = 0, \quad (9.32)$$

откуда (минимальный положительный корень) 
$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad (9.33)$$

следовательно 
$$S(x) = \cos(\mu x). \quad (9.34)$$

Из граничного условия (9.28) имеем

$$-\lambda \mu \sin(\mu R) + \alpha \cos(\mu R) = 0, \quad (9.35)$$

откуда в конечном итоге и определяется искомый коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \lambda \mu \operatorname{tg}(\mu R). \quad (9.36)$$

Весовая функция  $\rho$  определяется, как решение уравнения

$$a \rho' = 0, \quad (9.37)$$

откуда  $\rho = \text{const}$ , в частности,  $\rho = 1$ .

$$(9.38)$$

Выполняем переход к изображениям:

$$\frac{dW(\tau)}{d\tau} + a \mu^2 W(\tau) = 0; \quad (9.39)$$

изображение начального условия (9.23):

$$W(0) = \int_0^R T_0 \cos(\mu x) dx = \frac{T_0}{\mu} \sin(\mu R). \quad (9.40)$$

Решение задачи (9.22) – (9.23) в изображениях:

$$W(\tau) = W(0) \exp(-\mu^2 a \tau) = \frac{T_0}{\mu} \sin(\mu R) \exp(-\mu^2 a \tau). \quad (9.41)$$

Изображение температурного профиля находим по формуле:

$$W(\tau) = \int_0^R T_i \cos(\mu x) dx, \quad (9.42)$$

где  $T_i = T(x_i, \tau)$  – массив экспериментальных значений температур;  $i = 1, 2, \dots, N$  – номер точки измерения температуры.

От точности вычисления этого интеграла, естественно, зависит погрешность конечного результата. При использовании численной схемы интегрирования не ниже третьего порядка точности погрешность расчета коэффициента теплоотдачи практически определяется погрешностью измерения температур.

При наличии не менее четырех точек измерения температуры по толщине пластины с равномерными интервалами удобна схема Эйлера третьего порядка точности [2]

$$I = \int_0^R T_i \cos(\mu x) dx \approx h(G_2 - 7(G_1 + G_N) + G_{N-1})/12 + h \sum_{i=1}^N G_i, \quad (9.43)$$

где  $h$  – величина интервала;  $G_i = T_i \cos(\mu x_i)$  – подынтегральная функция;  $x_i$  – координата  $i$ -й точки измерения температуры.

Значение  $\mu$  определяется как любой положительный корень уравнения

$$I = \frac{T_0}{\mu} \sin(\mu R) \exp(-\mu^2 a \tau). \quad (9.44)$$

Лучше выбирать первый корень во избежание накопления погрешности компьютерного счета.

Теперь для момента времени  $\tau$  из уравнения (9.36) можно найти искомое значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ .

Устойчивость метода обусловлена сглаживанием значений экспериментальных температур при интегрировании по толщине пластины.

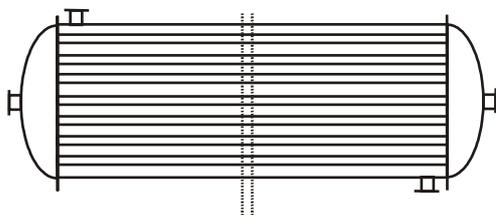
## 10 МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Рассмотрим элементарную область одноходового кожухотрубчатого теплообменника, работающего в стационарном температурном режиме.

Примем допущение о том, что температурное поле в кожухотрубчатом теплообменнике одномерно, т.е. температуры теплоносителей меняются только по длине зоны теплообмена и остаются постоянными по сечению аппарата, перпендикулярному его продольной оси.

Принятое допущение позволяет выделить элементарную область длиной  $\Delta x$  вдоль оси аппарата, охватывающую все его поперечное сечение, включая трубный пучок, корпус и теплоизоляционное покрытие (рис. 10.1).

Температурное поле элементарной области кожухотрубчатого теплообменника, являющееся совокупностью температурных полей стенок трубок, стенки корпуса, теплоизоляционного покрытия и теплоносителей, описывается сопряженной нелинейной задачей теплообмена, прямое аналитическое решение которой не представляется возможным.



$\Delta x$

**РИС. 10.1 ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОБЛАСТЬ КОЖУХОТРУБЧАТОГО ТЕПЛООБМЕННИКА**

Примем допущение о постоянстве теплофизических характеристик теплоносителей внутри элементарной области. Значения теплофизических характеристик определяются сначала температурами теплоносителей на входе в элементарную область, а затем, в ходе расчета, средними температурами теплоносителей в элементарной области.

Температуры стенок трубок и корпуса принимаются постоянными по длине элементарной области. По толщине их температуры меняются.

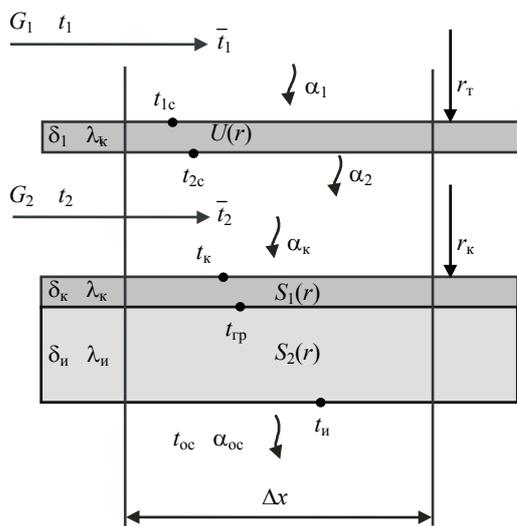
Пусть горячий теплоноситель находится в трубном пространстве, и его характеристики имеют индекс 1.

Пусть  $G_1, G_2$  – массовые расходы теплоносителей;  $t_1, t_2$  – температуры теплоносителей на входе в элементарную область;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k, \alpha_{oc}$  – коэффициенты теплоотдачи соответственно от внутренней и внешней поверхностей трубки к теплоносителям, от внутренней поверхности корпуса, от наружной поверхности теплоизоляции;  $c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, \lambda_1, \lambda_2$  – соответственно теплоемкости, плотности и теплопроводности теплоносителей;  $c_T, c_k, c_{и}, \rho_T, \rho_k, \rho_{и}, \lambda_T, \lambda_k, \lambda_{и}$  – соответственно теплоемкости, плотности и теплопроводности материала трубок, корпуса и теплоизоляционного покрытия;  $d_k, d_T$  – соответственно внутренние диаметры кожуха аппарата и трубки трубного пучка;  $\delta_T, \delta_k, \delta_{и}$  – соответственно толщины стенок трубок, стенки корпуса и теплоизоляционного покрытия;  $t_{oc}$  – соответственно температура окружающей среды.

При известных температурных полях стенки трубки, корпуса и слоя теплоизоляции расчет тепловых потоков и температур теплоносителей внутри элементарной области и на выходе из нее не представляет трудностей, поэтому рассмотрим возможности расчета этих полей.

Структура элементарной области кожухотрубчатого теплообменника, работающего в стационарном температурном режиме, представлена на рис. 10.2.

Здесь стенка трубки трубного пучка рассматривается как полый неограниченный цилиндр, в частном случае однослойный.



**Рис. 10.2 Структура элементарной области кожухотрубчатого теплообменника, работающего в стационарном температурном режиме**

Теплоизолированная стенка корпуса аппарата также рассматривается как полый неограниченный цилиндр, в частном случае двухслойный.

В предлагаемой методике не учитываются продольные тепловые потоки в стенках трубок, корпуса аппарата и слое теплоизоляционного покрытия, хотя этот учет и не представляет принципиальных сложностей.

Это обосновано следующими соображениями:

- продольные тепловые потоки в тонких стенках и стенках с низкой теплопроводностью при небольших перепадах температур пренебрежимо малы; так, в кожухотрубчатом теплообменнике тепловая мощность продольного теплового потока в стенках трубок на 2 – 3 порядка меньше тепловой мощности, передаваемой от горячего к холодному теплоносителю;

• для элементарной области входящие и выходящие продольные тепловые потоки близки, в результате чего в элементарном тепловом балансе они практически взаимно компенсируются.

Таким образом, температурное поле элементарной области описывается следующими функциями:

- $t_1(x)$  – температурное поле потока в трубном пространстве;
- $U(r)$  – температурное поле стенки трубки трубного пучка;
- $t_2(x)$  – температурное поле потока в межтрубном пространстве;
- $S_1(r_1)$  – температурное поле стенки корпуса аппарата;
- $S_2(r_2)$  – температурное поле слоя теплоизоляционного покрытия.

Эти функции являются решениями соответствующих задач теплопроводности, совокупность которых составляет математическую модель температурного поля элементарной области.

$$\frac{dt_1(x)}{dx} + K_1 t_1(x) = V_1(x), \quad 0 \leq x \leq \Delta x; \quad (10.1)$$

$$t_1(0) = t_{10}; \quad (10.2)$$

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} = 0, \quad r_T \leq r \leq r_T + \delta_T; \quad (10.3)$$

$$\lambda_T \frac{dU(r_T)}{dr} + \alpha_1 (U(r_T) - \bar{t}_1) = 0; \quad (10.4)$$

$$\lambda_T \frac{dU(r_T + \delta_T)}{dr} + \alpha_2 (U(r_T + \delta_T) - \bar{t}_2) = 0; \quad (10.5)$$

$$\frac{dt_2(x)}{dx} + K_2 t_2(x) = V_2(x), \quad 0 \leq x \leq \Delta x; \quad (10.6)$$

$$t_2(0) = t_{20}; \quad (10.7)$$

$$\frac{d^2 S_i(r_i)}{dr_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{dS_i(r_i)}{dr_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i; \quad (10.8)$$

$$\lambda_K \frac{dS_1(R_0)}{dr_1} + \alpha_K (S_1(R_0) - \bar{t}_2) = 0; \quad (10.9)$$

$$\lambda_H \frac{dS_2(R_2)}{dr_2} + \alpha_{oc} (S_2(R_2) - t_{oc}) = 0; \quad (10.10)$$

$$S_1(R_1) = S_2(R_2); \quad \lambda_K \frac{dS_1(R_1)}{dr_1} = \lambda_H \frac{dS_2(R_1)}{dr_2}, \quad (10.11)$$

где 
$$K_1 = \frac{\alpha_1 \Pi_1}{G_1 c_1}, \quad V_1(x) = K_1 t_{F_1}(x); \quad (10.12)$$

$$K_2 = \frac{\alpha_K \Pi_K + \alpha_2 \Pi_2}{G_2 c_2}, \quad V_2(x) = \frac{\alpha_K \Pi_K t_{F_K}(x) + \alpha_2 \Pi_2 t_{F_2}(x)}{G_2 c_2}; \quad (10.13)$$

$$\Pi_1 = 2\pi r_T n, \quad \Pi_2 = 2\pi(r_T + \delta_T) n, \quad \Pi_K = 2\pi r_K; \quad (10.14)$$

$$R_0 = r_K, \quad R_1 = r_K + \delta_K, \quad R_2 = r_K + \delta_K + \delta_H. \quad (10.15)$$

Если температуры поверхностей стенок трубок и корпуса в элементарной области постоянны, т.е.  $t_{F_1}(x) = \text{const} = t_{F_1}$ ,  $t_{F_2}(x) = \text{const} = t_{F_2}$  и  $t_{F_k}(x) = \text{const} = t_{F_k}$ , то искомые функции с учетом граничных условий имеют вид:

$$t_1(x) = t_{F_1} + (t_{10} - t_{F_1}) \exp(-K_1 x); \quad (10.16)$$

$$U(r) = A_U + B_U \ln(r); \quad (10.17)$$

$$t_2(x) = V_2 + (t_{20} - V_2) \exp(-K_2 x); \quad (10.18)$$

$$S_i(r_i) = A_i + B_i \ln(r_i), \quad i = 1, 2, \quad (10.19)$$

где 
$$V_2 = \frac{\alpha_k \Pi_k t_{F_k} + \alpha_2 \Pi_2 t_{F_2}}{\alpha_k \Pi_k + \alpha_2 \Pi_2}; \quad (10.20)$$

$$B_U = \frac{\bar{t}_2 - \bar{t}_1}{\ln\left(1 + \frac{\delta_T}{r_T}\right) + \lambda_T \left(\frac{1}{\alpha_2(r_T + \delta_T)} - \frac{1}{\alpha_1 r_T}\right)}; \quad (10.21)$$

$$A_U = \bar{t}_1 - B_U \left(\ln(r_T) + \frac{\lambda_T}{\alpha_1 r_T}\right); \quad (10.22)$$

$$B_1 = \frac{\bar{t}_2 - t_{oc}}{\ln(R_0) + \frac{\lambda_k}{R_0 \alpha_k} - \frac{\lambda_k}{\lambda_n} \left(\ln(R_2) + \frac{\lambda_n}{R_2 \alpha_{oc}}\right) + \lambda_k \ln(R_1) \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_n}\right)}; \quad (10.23)$$

$$A_1 = \bar{t}_2 - B_1 \left(\ln(R_0) + \frac{\lambda_k}{\alpha_k R_0}\right); \quad (10.24)$$

$$B_2 = \frac{\lambda_k}{\lambda_n} B_1; \quad (10.25)$$

$$A_2 = A_1 + B_1 \ln(R_1) \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right). \quad (10.26)$$

Средняя температура жидкости в элементарной области:

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} t_1(x) dx = t_{F_1} + \frac{(t_{10} - t_{F_1})}{K_1 \Delta x} (1 - \exp(-K_1 \Delta x)); \quad (10.27)$$

$$\bar{t}_2 = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} t_2(x) dx = V_2 + \frac{(t_{20} - V_2)}{K_2 \Delta x} (1 - \exp(-K_2 x)). \quad (10.28)$$

Сопряжение температурных полей происходит на поверхностях трубок и корпуса:

$$t_{F_1} = U(r_T); \quad t_{F_2} = U(r_T + \delta_T); \quad t_{F_k} = S_1(r_k). \quad (10.29)$$

Численное значение коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_k$  отрицательно для учета направления тепловых потоков и сохранения общности подхода к решению задач теплопроводности, принятому в данной работе.

В общем случае:

$$\alpha_1 = \alpha_1(\bar{t}_1, U(r_T)), \quad \alpha_2 = \alpha_2(\bar{t}_2, U(r_T + \delta_T));$$

$$\alpha_k = \alpha_k(\bar{t}_2, V_1(r_k)), \quad \alpha_{oc} = \alpha_{oc}(t_{oc}, V_2(r_k + \delta_k + \delta_n)).$$

Явный вид этих зависимостей определяется соответствующими критериальными уравнениями.

При наличии в межтрубном пространстве перегородок или экранов, вводятся соответствующие поправки.

Так как коэффициенты теплоотдачи зависят от температур сопряженных температурных областей, расчет температурного поля элементарной области выполняется по следующей итеративной методике.

1 Используя для расчета коэффициентов теплоотдачи температуры поверхностей стенок трубки и корпуса из предыдущей элементарной области, находим средние температуры теплоносителей в текущей элементарной области по формулам (10.27), (10.28).

2 По полученным значениям средних температур и коэффициентов теплоотдачи рассчитываем температуры поверхностей стенок трубки и корпуса по формулам (10.17) и (10.19).

3 Для найденных температур поверхностей стенок трубки и корпуса уточняем коэффициенты теплоотдачи и средние температуры теплоносителей в текущей элементарной области.

4 Повторяем пункты 2 и 3.

5 Вычисляем конечные температуры теплоносителей по формулам (10.16), (10.18).

Тепловой баланс элементарной области может быть использован для независимой проверки и оценки качества расчета (как и тепловой баланс по всему аппарату в целом).

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_n, \quad (10.30)$$

где  $\Delta Q_1$  – тепловая мощность, отдаваемая горячим теплоносителем;  $\Delta Q_2$  – тепловая мощность, получаемая холодным теплоносителем;  $\Delta Q_n$  – тепловая мощность потерь в окружающее пространство.

Здесь 
$$\Delta Q_1 = G_1 c_1 (t_{1k} - t_{10}); \quad (10.31)$$

$$\Delta Q_{21} = G_2 c_2 (t_{2k} - t_{20}); \quad (10.32)$$

$$\Delta Q_n = \alpha_{oc} 2\pi R_2 \Delta x (V_2(R_2) - t_{oc}). \quad (10.33)$$

При достижении соответствующих условий осуществления фазовых переходов фиксируется температура и определяется количество теплоносителя, совершившего в элементарной области фазовый переход:

$$\Delta G = \frac{\Delta Q}{r_f}, \quad (10.34)$$

где  $r_f$  – удельная теплота фазового перехода.

Выполняется пересчет теплофизических характеристик теплоносителя, частично совершившего фазовый переход.

Проверяется, весь ли теплоноситель совершил фазовый переход.

После того, как весь теплоноситель совершит фазовый переход, продолжается дальнейший пересчет его температур.

Таким образом, расчет элементарной области включает следующие действия:

- расчет текущих значений теплофизических характеристик теплоносителей в зависимости от их текущих температур и агрегатного состояния;
- расчет скоростей теплоносителей и коэффициентов теплоотдачи;

- расчет средних значений температур теплоносителей в элементарной области;
- итеративный расчет поверхностных температур стенки, разделяющей теплоносители;
- итеративный расчет поверхностных температур теплоизолированного корпуса аппарата;
- расчет выходных температур теплоносителей и тепловых потерь для элементарной области.

Результатирующими данными расчета элементарной области являются:

- $t_{1k}, t_{2k}$  – конечные температуры горячего и холодного теплоносителей;
- $G_{\phi 1}, G_{\phi 2}$  – массовые расходы части теплоносителей, совершившей фазовый переход;
- $\Delta Q_{\text{п}}$  – тепловая мощность, теряемая в окружающую среду.

При составлении расчетных программ представляется целесообразной разработка не одной универсальной процедуры теплового расчета элементарной области одноходового кожухотрубчатого теплообменника, работающего в стационарном температурном режиме, а четырех процедур для различных вариантов теплообменных процессов.

- 1 Теплообмен при отсутствии фазовых переходов в теплоносителях.
- 2 Теплообмен при конденсации одного из теплоносителей.
- 3 Теплообмен при испарении одного из теплоносителей.
- 4 Теплообмен при одновременных фазовых переходах в обоих теплоносителях.

В этом случае расчет представляет собой последовательное использование перечисленных процедур в заданной последовательности.

Этим исключается необходимость задания избыточных исходных данных для расчета частных случаев теплообменных процессов.

Теперь рассмотрим элементарную область кожухотрубчатого теплообменника при нестационарном температурном режиме работы.

Пусть горячий теплоноситель также находится в трубном пространстве и его характеристики имеют индекс 1. Также сохраняются все остальные обозначения, принятые при моделировании стационарного режима.

При нестационарном температурном режиме расходы теплоносителей и их начальные температуры могут оставаться постоянными или меняться во времени.

В этом случае элементарная область представляет собой элементарный внутренний объем аппарата, определяемый так же, как в стационарном случае, но рассматриваемый в течение элементарного интервала времени  $\Delta t$ .

Допущение о постоянстве теплофизических характеристик теплоносителей внутри элементарной области, принятое для элементарной области при стационарном режиме, остается в силе.

Тепловой баланс элементарной области в нестационарном температурном режиме:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_{\text{т}} + \Delta Q_{\text{к}} + \Delta Q_{\text{и}} + \Delta Q_{\text{п}}, \quad (10.35)$$

где  $\Delta Q_1$  – тепловая мощность, отдаваемая горячим теплоносителем;  $\Delta Q_2$  – тепловая мощность, получаемая холодным теплоносителем;  $\Delta Q_{\text{т}}$  – тепловая мощность, затрачиваемая на нагрев стенок трубок;  $\Delta Q_{\text{к}}$  – тепловая мощность, затрачиваемая на нагрев стенки корпуса;  $\Delta Q_{\text{и}}$  – тепловая мощность, затрачиваемая на нагрев слоя теплоизоляции;  $\Delta Q_{\text{п}}$  – тепловая мощность потерь в окружающее пространство.

Температурное поле элементарной области при нестационарном температурном режиме также моделируется решением сопряженной задачи теплопроводности, включающей задачи нестационарной теплопроводности для полого многослойного неограниченного цилиндра с произвольным начальным распределением и несимметричными неоднородными граничными условиями 3-го рода на внутренней и внешней поверхностях (температурные поля стенок трубок и теплоизолированного корпуса), и уравнениями движения жидкости, движущейся в режиме идеального вытеснения по каналу (температурные поля теплоносителей в трубном и межтрубном пространствах).

Необходимость использования постановки задач теплопроводности с произвольным начальным распределением диктуется методикой использования температурного поля элементарной области для моделирования температурного поля аппарата, при которой для очередной элементарной области прихо-

дится решать новую задачу теплопроводности с начальным температурным профилем, соответствующим концу предыдущего интервала времени для той же пространственной области.

При отсутствии загрязнений стенка трубки рассматривается как полый однослойный неограниченный цилиндр, при наличии – соответственно как многослойный. Теплоизолированный корпус аппарата в зависимости от наличия загрязнений, покрытий, экранов, также может рассматриваться как двух- или многослойный полый неограниченный цилиндр.

В обозначениях, аналогичных принятым для моделирования стационарного режима, температурное поле элементарной области кожухотрубчатого теплообменника, работающего в нестационарном температурном режиме, моделируется системой уравнений:

$$\frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial \tau} + W_1 \frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial x} + K_1 t_1(x, \tau) = F_1(x, \tau), \quad 0 \leq x \leq \Delta x; \quad (10.36)$$

$$t_1(0, \tau) = t_{10}(\tau); \quad t_1(x, 0) = f_1(x); \quad (10.37)$$

$$\frac{\partial U(r, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left( \frac{\partial^2 U(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad r_\tau \leq r \leq r_\tau + \delta_\tau, \quad \tau > 0; \quad (10.38)$$

$$U(r, 0) = f_i(r); \quad (10.39)$$

$$\lambda_\tau \frac{\partial U(r_\tau, \tau)}{\partial r} + \alpha_1 (U(r_\tau, \tau) - \bar{t}_1) = 0; \quad \alpha_1 < 0; \quad (10.40)$$

$$\lambda_\tau \frac{\partial U(r_\tau + \delta_\tau, \tau)}{\partial r} + \alpha_2 (U(r_\tau + \delta_\tau, \tau) - \bar{t}_2) = 0; \quad (10.41)$$

$$\frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial \tau} + W_2 \frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial x} + K_2 t_2(x, \tau) = F_2(x, \tau), \quad 0 \leq x \leq \Delta x; \quad (10.42)$$

$$t_2(0, \tau) = t_{20}(\tau); \quad t_2(x, 0) = f_2(x); \quad (10.43)$$

$$\frac{\partial S_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left( \frac{\partial^2 S_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial S_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right), \quad i = 1, 2, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i; \quad (10.44)$$

$$S_i(r_i, 0) = \vartheta_i(r_i); \quad (10.45)$$

$$\lambda_\kappa \frac{dS_1(R_0, \tau)}{dr_1} + \alpha_\kappa (S_1(R_0, \tau) - \bar{t}_2) = 0; \quad (10.46)$$

$$\lambda_\mu \frac{dS_2(R_2, \tau)}{dr_2} + \alpha_{oc} (S_2(R_2, \tau) - t_{oc}) = 0; \quad (10.47)$$

$$S_1(R_1, \tau) = S_2(R_2, \tau); \quad \lambda_\kappa \frac{dS_1(R_1, \tau)}{dr_1} = \lambda_\mu \frac{dS_2(R_1, \tau)}{dr_2}, \quad (10.48)$$

где 
$$K_1 = \frac{\alpha_1 \Pi_1}{G_1 c_1}, \quad F_1(x, \tau) = K_1 t_{F_1}(x, \tau); \quad (10.49)$$

$$K_2 = \frac{\alpha_\kappa \Pi_\kappa + \alpha_2 \Pi_2}{G_2 c_2}, \quad V_2(x, \tau) = \frac{\alpha_\kappa \Pi_\kappa t_{F_\kappa}(x, \tau) + \alpha_2 \Pi_2 t_{F_2}(x, \tau)}{G_2 c_2}; \quad (10.50)$$

$$\Pi_1 = 2\pi r_T n, \quad \Pi_2 = 2\pi(r_T + \delta_T)n, \quad \Pi_k = 2\pi r_T; \quad (10.51)$$

$$R_0 = r_k, \quad R_1 = r_k + \delta_k, \quad R_2 = r_k + \delta_k + \delta_H. \quad (10.52)$$

Здесь  $\bar{t}_1, \bar{t}_2$  – средние температуры теплоносителей в элементарной области,  $t_{F_1}(x, \tau), t_{F_2}(x, \tau), t_{F_k}(x, \tau)$  – температуры внутренней и наружной поверхностей трубок, внутренней поверхности корпуса.

Решения уравнений (10.36) – (10.48) имеют следующий вид.

$$t_1(x, d\tau) = \exp(-P_1 x) \left( t_{10}(d\tau) + \int_0^x \theta_1(x, d\tau) \exp(P_1 x) dx \right), \quad (10.53)$$

где

$$P_1 = \frac{K_1 d\tau + 1}{W_1 d\tau}; \quad \theta_1(x, d\tau) = \frac{1}{W_1} \left( F_1(x, d\tau) + \frac{f_1(x)}{d\tau} \right). \quad (10.54)$$

$$U(r, \tau) = A + B \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi(v_n, \tau) \zeta(r, v_n)}{Z_n}, \quad (10.55)$$

где

$$B = \frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_2}{\ln(r_T) - \ln(r_T + \delta_T) + \lambda_T \left( \frac{1}{r_T \alpha_1} - \frac{1}{(r_T + \delta_T) \alpha_2} \right)}; \quad (10.56)$$

$$A = \bar{t}_1 - B \left( \ln(r_T) + \frac{\lambda_c}{\alpha_1 r_T} \right); \quad (10.57)$$

$$\xi(v_n, \tau) = \xi(v_n, 0) \exp(-v_n^2 \tau); \quad (10.58)$$

$$\zeta(r, v_n) = J_0 \left( \frac{v_n r}{a_c} \right) + D_n Y_0 \left( \frac{v_n r}{a_c} \right); \quad (10.59)$$

$$\xi(v_n, 0) = \int_{r_T}^{r_T + \delta_T} r (f_t(r) - A - B \ln(r)) \zeta(r, v_n) dr; \quad (10.60)$$

$$D_n = \frac{\frac{\lambda_T v_n}{a_t} J_1 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) - \alpha_1 J_0 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right)}{\alpha_1 Y_0 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) - \frac{\lambda_T v_n}{a_t} Y_1 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right)}; \quad (10.61)$$

$v_n$  – последовательные положительные корни уравнения

$$J_0 \left( \frac{v(r_T + \delta_T)}{a_t} \right) - \frac{v \lambda_T}{a_t \alpha_2} J_1 \left( \frac{v(r_T + \delta_T)}{a_t} \right) + D \left( Y_0 \left( \frac{v(r_T + \delta_T)}{a_t} \right) - \frac{v \lambda_T}{a_t \alpha_2} Y_1 \left( \frac{v(r_T + \delta_T)}{a_t} \right) \right) = 0; \quad (10.62)$$

$$\begin{aligned}
Z_n &= \int_{r_T}^{r_T+\delta_T} r \zeta^2(r, v_n) dr = \int_{r_T}^{r_T+\delta_T} r \left( J_0 \left( \frac{v_n r}{a_t} \right) + D_n Y_0 \left( \frac{v_n r}{a_t} \right) \right)^2 dr = \\
&= 0,5 (r_T + \delta_T)^2 \left( J_0^2 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) + J_1^2 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) \right) + (r_T + \delta_T)^2 D_n \times \\
&\quad \times \left( J_0 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) Y_0 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) + J_1 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) Y_1 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) \right) + \\
&+ 0,5 (r_T + \delta_T)^2 D_n^2 \left( Y_0^2 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) + Y_1^2 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) \right) - \\
&- 0,5 r_T^2 \left( J_0^2 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) + J_1^2 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) \right) - \\
&- r_T^2 D_n \left( J_1 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) Y_1 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) + J_1 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) Y_1 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) \right) - \\
&\quad - 0,5 r_T^2 D_n^2 \left( Y_0^2 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) + Y_1^2 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) \right). \tag{10.63}
\end{aligned}$$

$$t_2(x, d\tau) = \exp(-P_2 x) \left( t_{20}(d\tau) + \int_0^x \theta_2(x, d\tau) \exp(P_2 x) dx \right), \tag{10.64}$$

где  $P_2 = \frac{K_2 d\tau + 1}{W_2 d\tau}$ ;  $\theta_2(x, d\tau) = \frac{1}{W_2} \left( V_2(x, d\tau) + \frac{f_2(x)}{d\tau} \right)$ .  $\tag{10.65}$

$$S_i(r_i, \tau) = A_i + B_i \ln(r_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(\mu_n, \tau) \omega_i(r_i, \mu_n)}{Y_n}, \tag{10.66}$$

где

$$B_1 = \frac{\bar{t}_2 - t_{oc}}{\ln(R_0) + \frac{\lambda_\kappa}{R_0 \alpha_\kappa} - \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_\mu} \left( \ln(R_2) + \frac{\lambda_\mu}{R_2 \alpha_{oc}} \right) + \lambda_\kappa \ln(R_1) \left( \frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_\kappa} \right)}; \tag{10.67}$$

$$A_1 = \bar{t}_2 - B_1 \left( \ln(R_0) + \frac{\lambda_\kappa}{\alpha_\kappa R_0} \right); \tag{10.68}$$

$$B_2 = \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_\mu} B_1; \tag{10.69}$$

$$A_2 = A_1 + B_1 \ln(R_1) \left( 1 - \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_\mu} \right). \tag{10.70}$$

$$\begin{aligned}
Y_n &= \sum_{m=1}^2 \frac{\lambda_m}{a_m^2} \left( 0,5 R_m^2 C_{m,n}^2 \left( J_0^2 \left( \frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) + J_1^2 \left( \frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + R_m^2 C_{m,n} D_{m,n} \left( J_0 \left( \frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) Y_0 \left( \frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) + J_1 \left( \frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) Y_1 \left( \frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0,5 R_m^2 D_{m,n}^2 \left( Y_0^2 \left( \frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) + Y_1^2 \left( \frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) \right) - \\
& -0,5 R_{m-1}^2 C_{m,n}^2 \left( J_0^2 \left( \frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) + J_1^2 \left( \frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) \right) - \\
& - R_{m-1}^2 C_{m,n} D_{m,n} \times \\
& \times \left( J_1 \left( \frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) Y_1 \left( \frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) + J_1 \left( \frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) Y_1 \left( \frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) \right) - \\
& -0,5 R_{m-1}^2 D_{m,n}^2 \left( Y_0^2 \left( \frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) + Y_1^2 \left( \frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) \right) \Bigg). \tag{10.71}
\end{aligned}$$

$$\omega_m(r_m, \mu_n) = C_{m,n} J_0 \left( \frac{\mu_n r_m}{a_m} \right) + D_{m,n} Y_0 \left( \frac{\mu_n r_m}{a_m} \right); \tag{10.72}$$

$$C_{1,n} = 1; \tag{10.73}$$

$$D_{1,n} = \frac{\frac{\lambda_1 \mu_n}{a_1} J_1 \left( \frac{\mu_n R_0}{a_1} \right) - \alpha_1 J_0 \left( \frac{\mu_n R_0}{a_1} \right)}{\alpha_1 Y_0 \left( \frac{\mu_n R_0}{a_1} \right) - \frac{\lambda_1 \mu_n}{a_1} Y_1 \left( \frac{\mu_n R_0}{a_1} \right)}; \tag{10.74}$$

$$C_{2,n} = \frac{C_{1,n} J_0 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_1} \right) + D_{1,n} Y_0 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_1} \right) - D_{2,n} Y_0 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_2} \right)}{Y_0 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_2} \right)}; \tag{10.75}$$

$$\begin{aligned}
D_{2,n} = & \frac{\frac{\lambda_1 a_{21}}{\lambda_2 a_1} J_0 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_2} \right) \left( C_{1,n} J_1 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_1} \right) + D_{1,n} Y_1 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_1} \right) \right) -}{J_0 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_2} \right) Y_1 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_2} \right) -} \\
& \rightarrow \frac{-J_1 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_2} \right) \left( C_{1,n} J_0 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_1} \right) + D_{1,n} Y_0 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_1} \right) \right)}{-J_1 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_2} \right) Y_0 \left( \frac{\mu_n R_1}{a_2} \right)}; \tag{10.76}
\end{aligned}$$

$\mu_n$  –  $n$ -й положительный корень уравнения

$$C_2 \left( J_0 \left( \frac{\mu R_2}{a_2} \right) - \frac{\mu \lambda_2}{a_2 \alpha_{oc}} J_1 \left( \frac{\mu R_2}{a_2} \right) \right) + D_2 \left( Y_0 \left( \frac{\mu R_2}{a_2} \right) - \frac{\mu \lambda_2}{a_2 \alpha_{oc}} Y_1 \left( \frac{\mu R_2}{a_2} \right) \right) = 0. \tag{10.77}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\mu_n, 0) = & \sum_{m=1}^2 \frac{\lambda_m}{a_m} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m (\vartheta_m(r_m) - A_m - B_m \ln(r_m)) \times \\
& \times \left( C_{m,n} J_0 \left( \frac{\mu_n r_m}{a_m} \right) + D_{m,n} Y_0 \left( \frac{\mu_n r_m}{a_m} \right) \right) dr_m; \tag{10.78}
\end{aligned}$$

$$\sigma(\mu_n, \tau) = \sigma(\mu_n, 0) \exp(-\mu_n^2 \tau). \tag{10.79}$$

В формулах (10.71) – (10.78) индекс 1 относится к стенке корпуса, а индекс 2 – к слою теплоизоляции;

$$R_0 = r_k; \quad R_1 = r_k + \sigma_k; \quad R_2 = r_k + \sigma_k + \sigma_n.$$

Средние температуры в элементарной области

$$\bar{t}_1(d\tau) = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \exp(-P_1 x) \left( t_{10}(d\tau) + \int_0^x \theta_1(\psi, d\tau) \exp(P_1 \psi) d\psi \right) dx; \quad (10.80)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}(\tau) = & A - \frac{B}{2} + \frac{B}{(r_T + \delta_T)^2 - r_T^2} \left( (r_T + \delta_T)^2 \ln(r_T + \delta_T) - r_T^2 \ln(r_T) \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_c}{v_n Z_n} \left( (r_T + \delta_T) \left( J_1 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) + D_n Y_1 \left( \frac{v_n (r_T + \delta_T)}{a_t} \right) \right) - \right. \\ & \left. - r_T \left( J_1 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) + D_n Y_1 \left( \frac{v_n r_T}{a_t} \right) \right) \right) \exp(-v_n^2 \tau) \times \\ & \times \int_{r_T}^{r_T + \delta_T} r (f(r) - A - B \ln(r)) \zeta(r, v_n) dr. \end{aligned} \quad (10.81)$$

$$\bar{t}_2(d\tau) = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \exp(-P_2 x) \left( t_{20}(d\tau) + \int_0^x \theta_2(\psi, d\tau) \exp(P_2 \psi) d\psi \right) dx; \quad (10.82)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_i(\tau) = & A_i - \frac{B_i}{2} + \frac{B_i}{R_i^2 - R_{i-1}^2} \left( R_i^2 \ln(R_i) - R_{i-1}^2 \ln(R_{i-1}) \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{\mu_n Y_n} \left( R_i \left( C_{i,n} J_1 \left( \frac{\mu_n R_i}{a_i} \right) + D_{i,n} Y_1 \left( \frac{\mu_n R_i}{a_i} \right) \right) - \right. \\ & \left. - R_{i-1} \left( C_{i,n} J_1 \left( \frac{\mu_n R_{i-1}}{a_i} \right) + D_{i,n} Y_1 \left( \frac{\mu_n R_{i-1}}{a_i} \right) \right) \right) \times \\ & \times \exp(-\mu_n^2 \tau) \sum_{m=1}^2 \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m (\vartheta_m(r_m) - A_m - B_m \ln(r_m)) \omega_m(r_m, \mu_n) dr_m. \end{aligned} \quad (10.83)$$

Методика теплового расчета элементарной области кожухотрубчатого теплообменника, работающего в нестационарном температурном режиме, аналогична методике расчета для стационарного режима.

Одно из отличий состоит в учете дополнительных составляющих элементарного теплового баланса, учитывающих изменение теплосодержания стенок трубок, корпуса и слоя теплоизоляции в элементарной области.

Тепловая мощность, затраченная на нагрев стенок трубок в элементарной области:

$$\Delta Q_T = c_T \pi \left( (r_T + \delta_T)^2 - r_T^2 \right) \Delta x n \rho_T \left( \bar{U}(\Delta\tau) - \bar{U}_b(\Delta\tau_b) \right), \quad (10.84)$$

где  $\bar{U}_b(\Delta\tau_b)$  – средняя температура стенки трубки в элементарной области в конце предыдущего элементарного временного интервала.

Тепловая мощность, затраченная на нагрев стенки корпуса в элементарной области:

$$\Delta Q_k = c_k \pi \left( (r_k + \delta_k)^2 - r_k^2 \right) \Delta x \rho_k \left( \bar{S}_1(\Delta\tau) - \bar{S}_{1b}(\Delta\tau_b) \right), \quad (10.85)$$

где  $\bar{S}_{1b}(\Delta\tau_b)$  – средняя температура стенки корпуса в элементарной области в конце предыдущего элементарного временного интервала.

Тепловая мощность, затраченная на нагрев слоя теплоизоляции в элементарной области:

$$\Delta Q_{ii} = c_{ii} \pi \left( (r_{ii} + \delta_{ii})^2 - r_{ii}^2 \right) \Delta x \rho_{ii} \left( \bar{S}_2(\Delta\tau) - \bar{S}_{2b}(\Delta\tau_b) \right), \quad (10.86)$$

где  $\bar{S}_{2b}(\Delta\tau_b)$  – средняя температура слоя теплоизоляции в элементарной области в конце предыдущего элементарного временного интервала.

Другое отличие состоит в том, что для расчета коэффициентов теплоотдачи используются характеристики, рассчитанные для текущей элементарной пространственной области в конце предыдущего элементарного временного интервала.

Так как коэффициенты теплоотдачи зависят от температур сопряженных температурных областей, расчет температурного поля элементарной области выполняется по итеративной методике.

1 Используя для расчета коэффициентов теплоотдачи температуры поверхностей стенок трубки и корпуса из расчета для предыдущего временного интервала текущей элементарной области, находим средние температуры теплоносителей в текущей элементарной области по формулам (10.80), (10.82).

2 По полученным значениям средних температур и коэффициентов теплоотдачи рассчитываем температуры поверхностей стенок трубки и корпуса по формулам (10.55) и (10.66) соответственно.

3 Для найденных температур поверхностей стенок трубки и корпуса уточняем коэффициенты теплоотдачи и средние температуры теплоносителей в текущей элементарной области.

4 Повторяем пункты 2 и 3.

5 Вычисляем конечные температуры теплоносителей по формулам (10.53), (10.64).

6 Выполняем проверку независимого теплового баланса (10.35).

Действия при наличии фазовых переходов полностью аналогичны действиям при расчете стационарного температурного режима.

Для текущей пространственной элементарной области запоминаются значения следующих переменных, используемых при расчете начального распределения температуры в очередной элементарный временной интервал:

$\bar{t}_1, \bar{t}_2, t_{1k}, t_{2k}$  – средние и конечные температуры теплоносителей в конце элементарного временного интервала (при наличии фазовых переходов  $G_{1k}, G_{2k}$  – остаточное количество теплоносителей в исходном агрегатном состоянии);

$v_n, \mu_n$  – массивы собственных чисел задач теплопроводности для стенок трубки и корпуса;

$D_n, C_{i,n}, D_{i,n}, \frac{\xi(v_n, \Delta\tau)}{Z_n}, \frac{\sigma(\mu_n, \Delta\tau)}{Y_n}$  – массивы коэффициентов, входящих в решение нестационарных задач теплопроводности для стенок трубки и корпуса в конце элементарного временного интервала;

$A, B, A_i, B_i$  – коэффициенты, входящие в стационарную составляющую решений задач теплопроводности для стенок трубки и корпуса;

$\Delta\tau$  – продолжительность элементарного временного интервала.

Методика расчета температурного поля кожухотрубчатого теплообменника предполагает расчет температурного поля кожухотрубчатых теплообменников: одноходовых при прямоточном и противоточном движении теплоносителей; многоходовых; с U-образными трубами; при наличии перегородок и экранов в межтрубном пространстве; при наличии фазовых переходов теплоносителей; с учетом тепловых потерь в окружающую среду.

Сначала рассмотрим методику расчета температурного поля одноходового кожухотрубчатого теплообменника, работающего в стационарном температурном режиме, основанную на многократных расчетах температурного поля соответствующей элементарной области.

Исходными данными для расчета являются следующие.

1 Данные по аппарату:

$D_k$  – внутренний диаметр корпуса аппарата;

$d_T$  – внутренний диаметр трубок;

$\delta_k$  – толщина стенки корпуса;

$\delta_T$  – толщина стенки трубок;

$\delta_{и}$  – толщина слоя теплоизоляции;

$\delta_z$  – толщина загрязнений;

$n$  – число трубок в пучке;

$m$  – число ходов;

$l_p$  – расстояние между перегородками;

$s_e$  – площадь поперечного сечения, отделенная экранами;

$\lambda_T, \lambda_k, \lambda_{и}, \lambda_z$  – коэффициенты теплопроводности материалов трубок, корпуса, теплоизоляции и загрязнений соответственно.

2 Данные по веществам, участвующим в теплообмене:

$P_1, P_2$  – давления в трубном и межтрубном пространствах;

$\rho_1(t), \rho_2(t)$  – плотности;

$c_1(t), c_2(t)$  – теплоемкости;

$\lambda_1(t), \lambda_2(t)$  – теплопроводности;

$\mu_1(t), \mu_2(t)$  – динамические вязкости;

$\beta_1(t), \beta_2(t)$  – коэффициенты объемного расширения;

$\sigma_1(t), \sigma_2(t)$  – поверхностные натяжения;

$r_1(t), r_2(t)$  – удельные теплоты фазовых переходов;

$t_{ф1}(P), t_{ф2}(P)$  – температуры фазовых переходов;

$t_{oc}$  – температура окружающей среды.

3 Данные, определяющие вариант расчета:

$k_1$  – индекс, определяющий взаимное направление движения теплоносителей;

$F$  – площадь поверхности теплообмена;

$G_1, G_2$  – массовые расходы теплоносителей;

$t_{1н}, t_{2н}$  – начальные температуры теплоносителей;

$t_{1к}, t_{2к}$  – конечные температуры теплоносителей.

Вследствие большого количества исходных данных для каждого отдельного расчета целесообразно использовать расчетную программу совместно с базами данных, одна из которых содержит характеристики аппаратов, другая – теплофизические характеристики веществ. В этом случае достаточно будет задавать тип аппарата и названия веществ, взаимодействующих в аппарате.

Из последних значений исходных данных ( $F, G_1, G_2, t_{1н}, t_{2н}, t_{1к}, t_{2к}$ ) могут быть неизвестны 1 или 2 значения при условии, что остальные однозначно определяют ситуацию.

Очевидно, что не могут быть однозначно определены следующие пары неизвестных:  $G_1$  и  $G_2$ ;  $t_{1н}$  и  $t_{1к}$ ;  $t_{2н}$  и  $t_{2к}$ .

Варианты, когда не заданы температуры теплоносителей на одном из концов теплообменника, не сулят осложнений, так как любой формально корректный набор исходных данных однозначно определяет температурное поле внутри аппарата.

Если не заданы площадь поверхности теплообмена и одна из четырех температур теплоносителей, становится необходимой проверка заданных значений исходных данных на корректность, так как возможны такие сочетания исходных данных, при которых передаваемые тепловые мощности не соответствуют тепловым емкостям теплоносителей (не говоря уже о прямо нереальных сочетаниях значений исходных данных).

Таким образом, для случаев, когда не заданы температуры теплоносителей на одном из концов теплообменника или не задана площадь поверхности теплообмена, расчет температурного поля аппарата представляет собой однократный последовательный тепловой расчет элементарных областей, составляющих внутренний объем аппарата до достижения либо заданной суммарной площади поверхности теплообмена, либо заданной температуры одного из теплоносителей на противоположном началу расчета конце аппарата.

Если не задан один из расходов теплоносителей либо неизвестны температуры на разных концах теплообменника, выполняется многократный последовательный тепловой расчет элементарных областей, составляющих внутренний объем аппарата по итеративному алгоритму, обеспечивающему нахождение значения одной из неизвестных величин, при котором заданные значения на другом конце аппарата совпадают с расчетными.

При этом пересчет температур теплоносителей осуществляется с учетом направления их движения (прямоток или противоток), направления расчета (от горячего конца к холодному, или наоборот) и взаимного расположения теплоносителей (горячий теплоноситель в трубном или межтрубном пространстве).

В ходе расчета кожухотрубчатого теплообменного аппарата, работающего в стационарном температурном режиме, средние и конечные температуры теплоносителей в текущей элементарной области, а также знаки составляющих теплового баланса определяются следующим образом.

$$t_1(x) = t_{F1} + (t_{10} - t_{F1}) \exp(-k_t K_1 x); \quad (10.87)$$

$$t_2(x) = V_2 + (t_{20} - V_2) \exp(-k_m K_2 x); \quad (10.88)$$

$$\bar{t}_1 = t_{F1} + k_t \frac{(t_{10} - t_{F1})}{K_1 \Delta x} (1 - \exp(-k_t K_1 \Delta x)); \quad (10.89)$$

$$\bar{t}_2 = V_2 + k_m \frac{(t_{20} - V_2)}{K_2 \Delta x} (1 - \exp(-k_m K_2 x)); \quad (10.90)$$

$$\Delta Q_1 = k_t G_1 c_1 (t_{1к} - t_{10}); \quad (10.91)$$

$$\Delta Q_{21} = k_m G_2 c_2 (t_{2к} - t_{20}), \quad (10.92)$$

где коэффициенты  $k_t$  (трубное пространство) и  $k_m$  (межтрубное пространство) определяются в зависимости от значений коэффициентов  $k_1, k_2, k_3$  следующим образом:

$$k_t = k_3 \max(k_1, k_2); \quad k_m = k_1 k_2. \quad (10.93)$$

Значения коэффициентов  $k_1, k_2, k_3$  определяются условиями расчета:

$k_1 = 1$  при прямоточном направлении движения теплоносителей,  $k_1 = -1$  – при противоточном;

$k_2 = 1$  при расположении горячего теплоносителя в трубном пространстве, иначе  $k_2 = -1$ ;

$k_3 = 1$  при направлении расчета в сторону понижения температуры горячего теплоносителя, иначе  $k_3 = -1$ .

Расчет представляет собой последовательный одно- или многократный просчет температурных полей элементарных областей до достижения заданной конечной температуры одного из теплоносителей либо до просчета заданной площади поверхности (длины) аппарата, либо до выяснения некорректности набора исходных данных.

При последовательном просчете температурных полей элементарных областей выходные температуры теплоносителей предыдущей элементарной области являются входными для последующей.

При расчете многоходовых и  $U$ -образных кожухотрубчатых теплообменников выполняется совместный итеративный расчет каждого хода, как независимого теплообменника, с учетом соответствующих геометрических условий. Здесь также определяется одна из неизвестных температур на входе (выходе) теплообменника, при которой расчетные температуры теплоносителя в трубном пространстве в области изменения направления движения совпадают по расчетам всех проходов. При такой методике предполагается добавление дополнительного вложенного итеративного цикла на каждые два хода.

В качестве примера приводятся изображения температурных полей одноходового кожухотрубчатого теплообменника, работающего в стационарном температурном режиме при прямоточном направлении движения продукта и хладагента.

Характеристики аппарата:

внутренний диаметр кожуха – 0,462 м;

толщина стенки корпуса – 0,009 м;

толщина теплоизоляции – 0,07 м;

внутренний диаметр труб – 0,0025 м;

толщина стенок труб – 0,0002 м;

длина труб – 2 м;

число труб – 110.

Характеристики теплообменного процесса

В теплообменнике осуществляется охлаждение перегретого пара бензола, конденсация паров и переохлаждение жидкого бензола. Расход паров бензола 0,034 кг/с; начальная температура паров – 150 °С; конечная температура жидкого бензола – 25 °С.

В качестве хладагента используется охлажденная вода. Начальная температура воды – 5 °С; конечная температура воды – 20 °С; расход воды 0,278 кг/с.

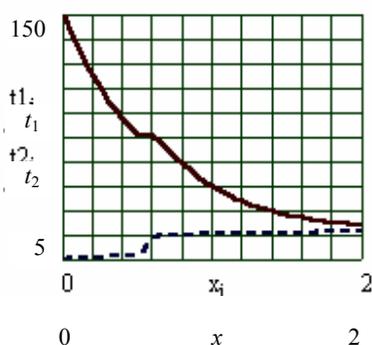
Температура окружающей среды – 15 °С.

На рис. 10.3 представлено изменение температур жидкостей по длине зоны теплообмена. На рис. 10.4 – 10.8 представлены температурные поля одной из элементарных областей в аппарате.

На рисунках:  $x$  – координата по длине зоны теплообмена;  $r$  – координата, перпендикулярная оси аппарата.

Рассмотрим методику расчета температурного поля одноходового кожухотрубчатого теплообменника, работающего в нестационарном температурном режиме.

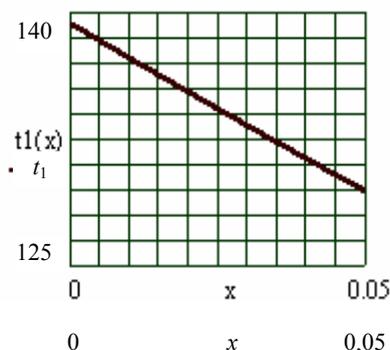
Исходными данными для расчета является набор исходных данных, необходимых для расчета стационарного режима работы, дополненный следующими данными, необходимыми для учета исходного состояния аппарата и собственной тепловой емкости его конструктивных элементов (тепловой емкостью загрязнений можно пренебречь):



**Рис. 10.3** Изменение температур

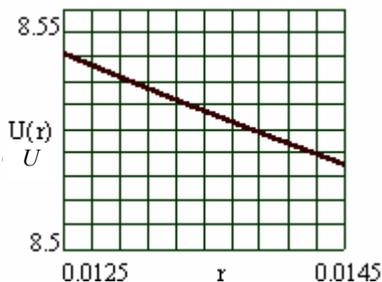
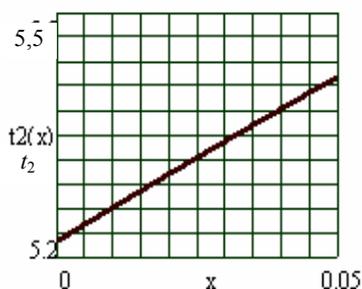
по длине аппарата:

$t_1$  – бензол;  $t_2$  – вода



**Рис. 10.4** Изменение температуры

паров бензола в элементарной области





Аналитический расчет температурных профилей для малых значений времени представляет дополнительные трудности. При значениях критерия Фурье  $Fo = \frac{a\tau}{R^2} < 0,5$  (здесь  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коэффициент температуропроводности;  $\tau$  – время;  $R$  – определяющий геометрический размер) прямой расчет для достижения приемлемой точности требует резкого увеличения числа членов ряда со всеми вытекающими негативными последствиями. Сомнительной альтернативой является использование специального математического аппарата, использующего предельные соотношения.

Приемлемый компромиссный вариант видится в другом подходе.

Переменные начальные температуры и расходы теплоносителей могут быть представлены в виде ступенчатых функций. Тогда, при высоких скоростях теплоносителей, ступенчатое изменение исходных температур повлечет за собой соответствующее ступенчатое изменение текущих температур. При этом длительность элементарного временного интервала будет лимитироваться не скоростью движения теплоносителей, а скоростью изменения их входных температур.

В этом случае для каждой пространственной элементарной области в каждый элементарный момент времени необходимо многократно решать нестационарные задачи теплопроводности, а также хранить и передавать информацию о локальных температурных полях в ряде массивов с размерностью, определяемой необходимым числом членов ряда.

Хотя, несмотря на относительную громоздкость и сложность, возможна практическая реализация полномасштабного расчета, существуют возможности упрощенного решения поставленной задачи.

Необходимо отметить, что стремление к снижению объема вычислений и объемов хранимой и передаваемой информации при выполнении расчетов нестационарных температурных полей обусловлено не ограниченностью компьютерных ресурсов, а необходимостью разработки надежного алгоритма, предназначенного для практического использования. Менее громоздкие математические выражения упрощают понимание и реализацию расчетной методики. Меньший объем вычислений обеспечивает, как правило, меньшую расчетную погрешность; упрощается отладка программ; облегчается понимание смысла промежуточных результатов и оценка их достоверности. Уменьшение объемов хранимой и передаваемой информации увеличивает надежность работы компьютерных программ (уменьшается или полностью исключается вероятность компьютерных сбоев).

Практика показывает, что при разработке и реализации математических моделей производственных процессов, основанных на расчетах полей определяемых параметров, принципиальное значение приобретает разумный баланс физических и математических допущений, при которых требуемые качественные характеристики расчетных результатов обеспечивались математическими выражениями приемлемой степени сложности.

Проиллюстрируем выдвинутую концепцию следующим образом.

- Тепловой расчет элементарной области аппарата, работающего в нестационарном температурном режиме, необходимо выполнять многократно для каждого элементарного временного интервала.
- Необходимо сохранять массивы данных, определяющих температурное поле аппарата в предыдущий момент времени.
- Температурный перепад по толщине стенки трубки трубного пучка невелик (как правило, 2 – 4 градуса).
- Использование критериальных уравнений для вычисления значений коэффициентов теплоотдачи приводит к значительным погрешностям, практически не поддающимся оценке.

Ввиду перечисленных выше факторов представляется целесообразным использовать расчетную методику, при которой количество вложенных итераций в каждом тепловом расчете элементарной области мало, что приводит к резкому снижению объема вычислений и упрощению логической структуры расчетного алгоритма практически без увеличения суммарной погрешности; кроме того, резко снижается объем передаваемой информации при переходе от предыдущего временного интервала к последующему.

При необходимости уменьшения объемов хранимой и передаваемой информации можно поступить следующим образом.

В начальный момент времени температура стенки трубки принимается постоянной по толщине. Если задано распределение температуры, как функция координаты, то в качестве начального распределения принимается среднеинтегральная температура, определяемая формулой

$$t_0 = \text{const} = \bar{t}(0) = \frac{2}{(r_T + \delta_T)^2 - r_T^2} \int_{r_T}^{r_T + \delta_T} r t(r) dr. \quad (10.94)$$

Таким образом, как в начальный, так и в последующие моменты времени может быть использовано решение нестационарной задачи теплопроводности с постоянным начальным распределением

$$t(r, 0) = \bar{t}_b(\tau_{bk}) = \frac{2}{(r_T + \delta_T)^2 - r_T^2} \int_{r_T}^{r_T + \delta_T} r t_b(r, \tau_{bk}) dr = t_0 = \text{const}, \quad (10.95)$$

где  $t_b(r, \tau)$  – температурное поле текущей элементарной пространственной области в предыдущий элементарный временной интервал;  $\tau_{bk}$  – время конца предыдущего элементарного временного интервала.

Тепловая мощность, отдаваемая от горячего теплоносителя к стенке трубки в элементарной области:

$$\Delta Q_1 = \alpha_1 \Delta F_1 \left( \frac{1}{\tau_b} \int_0^{\tau_{bk}} t(r_T, \tau_b) d\tau - t_1 \right); \quad (10.96)$$

тепловая мощность, отдаваемая от стенки трубки к холодному теплоносителю в элементарной области:

$$\Delta Q_x = \alpha_2 \Delta F_2 \left( \frac{1}{\tau_b} \int_0^{\tau_{bk}} t(r_T + \delta_T, \tau_b) d\tau - t_2 \right); \quad (10.97)$$

тепловая мощность, затраченная на нагрев стенок трубок в элементарной области:

$$\Delta Q_c = c_c \pi \left( (r_T + \delta_T)^2 - r_T^2 \right) \Delta x n \rho_c \left( \bar{t}(\tau_k) - \bar{t}_b(\tau_{bk}) \right) = \Delta Q_1 - \Delta Q_x. \quad (10.98)$$

Интегралы, входящие в (10.96) и (10.97) могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} t(r, \tau) d\tau &= A + B \ln(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z_n \mu_n^2 \tau} \left( J_0 \left( \frac{\mu_n r}{a_c} \right) + D_n Y_0 \left( \frac{\mu_n r}{a_c} \right) \right) \left( 1 - \exp(-\mu_n^2 \tau) \right) \times \\ &\times \int_{r_T}^{r_T + \delta_T} r \left( f(r) - A - B \ln(r) \right) \left( J_0 \left( \frac{\mu_n r}{a_c} \right) + D_n Y_0 \left( \frac{\mu_n r}{a_c} \right) \right) dr. \end{aligned} \quad (10.99)$$

Теперь рассмотрим теплообмен межтрубного пространства с окружающей средой через теплоизолированный корпус аппарата в нестационарном температурном режиме.

И здесь не исключается полномасштабный расчет, хотя он будет еще более громоздким из-за необходимости расчета нестационарного температурного поля как минимум двухслойного полого цилиндра, представляющего теплоизолированный корпус аппарата.

Но с учетом того, что тепловые потери в окружающую среду часто бывают пренебрежимо малы, целесообразно осуществлять эту часть расчета также по упрощенной методике.

Собственная тепловая емкость слоя теплоизоляции, как правило, в несколько раз больше тепловой емкости стенки корпуса аппарата, в результате чего общая тепловая емкость теплоизолированного корпуса аппарата существенно влияет на протекание нестационарных и переходных тепловых процессов.

Температурный перепад в слое теплоизоляции, как правило, значителен, поэтому передача температурного профиля элементарной пространственной области теплоизолированного корпуса при переходе к очередному временному интервалу представляется неизбежной.

При расчете температурного поля слоя теплоизоляции также можно избежать использования алгоритма, включающего вложенные итерации, для определения коэффициентов теплоотдачи.

Можно поступить двояко. Во-первых, как и для стенки трубки трубного пучка, для расчета коэффициентов теплоотдачи можно использовать температуры стенки  $t_{bk}(r_k, \tau_{bk})$  и  $t_{bi}(r_i + \delta_i, \tau_{bk})$ , рассчитанные для текущей элементарной пространственной области в конце предыдущего элементарного временного интервала.

Во-вторых, в качестве определяющей температуры для теплоносителей, омывающих теплоизолированный корпус аппарата, можно принимать их собственные температуры, т.е. соответственно среднюю температуру теплоносителя в межтрубном пространстве и температуру окружающей среды.

Такое упрощение представляется приемлемым, так как тепловой поток через слой теплоизоляции невелик, и, следовательно, температуры стенок и определяющие температуры, используемые для расчета коэффициентов теплоотдачи, близки к температурам омывающих их теплоносителей.

По результатам решения задачи (10.44) – (10.48) остальные составляющие элементарного теплового баланса (10.35) вычисляются следующим образом.

Тепловая мощность, отдаваемая теплоносителем в межтрубном пространстве к стенке корпуса в элементарной области:

$$\Delta Q_3 = \alpha_k \Delta F_k \left( \frac{1}{\tau_b} \int_0^{\tau_{bk}} t_k(r_k, \tau_b) d\tau - t_2 \right), \quad (10.100)$$

где  $\Delta F_k = \pi d_k \Delta x$ .

Тепловая мощность, отдаваемая от наружной поверхности теплоизоляции в элементарной области к окружающей среде:

$$\Delta Q_{\Pi} = \alpha_{oc} \Delta F_{\Pi} \left( \frac{1}{\tau_b} \int_0^{\tau_{bk}} t_{\Pi}(r_{\Pi} + \delta_{\Pi}, \tau_b) d\tau - t_{oc} \right), \quad (10.101)$$

где  $\Delta F_{\Pi} = \pi(d_{\Pi} + \delta_{\Pi}) \Delta x$ .

Тепловая мощность, затраченная на нагрев стенки корпуса в элементарной области:

$$\Delta Q_k = c_k \pi \left( (r_k + \delta_k)^2 - r_k^2 \right) \Delta x n \rho_k (\bar{t}_k(\tau_k) - \bar{t}_{kb}(\tau_{bk})), \quad (10.102)$$

где  $\bar{t}_{kb}(\tau_{bk})$  – средняя температура стенки корпуса в элементарной области в конце предыдущего элементарного временного интервала.

Тепловая мощность, затраченная на нагрев слоя теплоизоляции в элементарной области:

$$\Delta Q_{\Pi} = c_{\Pi} \pi \left( (r_{\Pi} + \delta_{\Pi})^2 - r_{\Pi}^2 \right) \Delta x n \rho_{\Pi} (\bar{t}_{\Pi}(\tau_{\Pi}) - \bar{t}_{\Pi b}(\tau_{bk})), \quad (10.103)$$

где  $\bar{t}_{\Pi b}(\tau_{bk})$  – средняя температура слоя теплоизоляции в элементарной области в конце предыдущего элементарного временного интервала.

Тепловая мощность, полученная холодным теплоносителем в элементарной области:

$$\Delta Q_2 = \Delta Q_x - \Delta Q_k - \Delta Q_{\Pi} - \Delta Q_{\Pi} = \Delta Q_x - \Delta Q_3. \quad (10.104)$$

Интегралы, входящие в выражения (10.100) – (10.101) вычисляются по формуле (10.99).

## 11 МЕТОДИКА РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЕМКОСТНОГО АППАРАТА

В химической промышленности в емкостных аппаратах выполняется ряд операций по обработке жидких продуктов. К ним относятся: нагрев, охлаждение, выдержка жидкостей; отгонка летучих фракций; химические превращения; растворение гранулированных и сыпучих материалов; смешивание жид-

костей; частичная догрузка компонентов. В реальных производственных процессах встречаются различные комбинации перечисленных операций. Как правило, все эти операции протекают в нестационарных температурных режимах.

Расчет нестационарного температурного поля емкостного аппарата также может быть осуществлен на основе многократного последовательного теплового расчета соответствующих элементарных областей.

При этом предполагается, что жидкий продукт в аппарате идеально перемешивается, т.е. его температура не зависит от пространственных координат и меняется только во времени. Это допущение не является обязательным, так как при организованном движении жидкости в аппарате не исключается возможность расчета дискретного конвективного температурного поля на основе расчетов элементарных областей, хотя в этом случае расчетный алгоритм значительно усложняется.

При одновременном действии двух теплообменных устройств – рубашки и встроенного змеевика – их расчет ведется совместно с выделением для каждого из них своих элементарных пространственных и общей временной областей.

Для рубашки в качестве элементарной выделяется кольцевая область, расположенная в поперечном сечении аппарата и включающая стенку корпуса аппарата (возможно, многослойную), омываемую жидким продуктом или воздухом (газом), находящимся в аппарате над жидкостью, и теплоизолированную стенку корпуса рубашки, контактирующую с окружающей средой. Длина элементарной области вдоль поверхности корпуса –  $\Delta x$ .

Для встроенного теплообменного устройства в качестве элементарной выделяется область, включающая поперечное сечение встроенного теплообменного устройства с омывающими его жидким продуктом и теплоносителем, расположенная в плоскости, перпендикулярной его оси и имеющая длину  $\Delta x_1$ .

Методика теплового расчета емкостного аппарата из-за принятого допущения и наличия дополнительных источников тепла несколько отличается от методики расчета кожухотрубчатого теплообменника.

В ходе реализации производственных операций в емкостном аппарате могут изменяться:

- количество жидкого продукта в аппарате (добавление компонентов или отбор продукта, частичная отгонка и др.);
- теплофизические характеристики жидкого продукта (составление смесей, химические превращения, изменение внешних условий, растворение, упаривание и др.).

Кроме того, последовательность операций в емкостном аппарате может быть произвольной.

Все это определяет структуру исходных данных для теплового расчета емкостного аппарата.

1 Данные по аппарату:

$D_k$  – внутренний диаметр корпуса аппарата;

$H_k$  – высота цилиндрической части аппарата;

$D_d$  – глубина днища аппарата;

$D_r$  – внутренний диаметр корпуса рубашки;

$D_z$  – диаметр навивки встроенного змеевика;

$d_z$  – диаметр трубки встроенного змеевика;

$h_z$  – шаг навивки встроенного змеевика;

$\delta_k$  – толщина стенки корпуса;

$\delta_p$  – толщина покрытия стенки корпуса (эмаль, гуммирование, плакирование или др.);

$\delta_t$  – толщина стенки рубашки;

$\delta_{и}$  – толщина слоя теплоизоляции;

$\delta_z$  – толщина стенки трубки встроенного змеевика;

$n$  – число входов в рубашку;

$m$  – число заходов встроенного змеевика;

$N_e$  – мощность электродвигателя мешалки;

тип перемешивающего устройства;

$\omega_m$  – угловая скорость вращения мешалки;

$\lambda_t, \lambda_k, \lambda_{и}, \lambda_p$  – коэффициенты теплопроводности материалов трубок встроенного змеевика, корпуса аппарата и рубашки, теплоизоляции и покрытия корпуса соответственно.

2 Данные, определяющие вариант расчета:

последовательность и вид операций.

3 Данные по веществам для каждой из операций (индекс «1» относится к продукту в аппарате, индекс «2» – к теплоносителю в рубашке, индекс «3» – к теплоносителю в змеевике, индекс «4» – к газовой или паровой среде над поверхностью продукта в аппарате):

$P_1, P_2, P_3$  – давления в аппарате; рубашке и змеевике;

$\rho_1(t), \rho_2(t), \rho_3(t), \rho_4(t)$  – плотности;

$c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t)$  – теплоемкости;

$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t)$  – теплопроводности;

$\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t), \mu_4(t)$  – динамические вязкости;

$\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t), \beta_4(t)$  – коэффициенты объемного расширения;

$\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t)$  – поверхностные натяжения;

$r_1(t), r_2(t), r_3(t)$  – удельные теплоты фазовых переходов;

$t_{\phi 1}(P), t_{\phi 2}(P), t_{\phi 3}(P)$  – температуры фазовых переходов;

$q_{r1}$  – удельный тепловой эффект химических превращений;

$dq_{c1}$  – дифференциальная теплота изменения концентрации;

$q_{v1}$  – мощность внешних воздействий,

$t_{oc}$  – температура окружающей среды.

Очевидно, что для задания такого количества исходных данных целесообразно использование соответствующих баз данных на емкостное оборудование и теплофизические характеристики веществ и теплоносителей.

Практические трудности возникают при использовании многокомпонентных смесей, наличии сложных химических реакций, а также в определении ряда характеристик.

Плотность смеси жидкостей приближенно может быть рассчитана по аддитивному закону [9]:

$$\rho_{см} = \frac{1}{\sum_i \frac{\bar{x}_i}{\rho_i}}, \quad (11.1)$$

где  $\bar{x}_i$  – массовая доля  $i$ -го компонента.

Динамическая вязкость смеси неассоциированных жидкостей приближенно может быть рассчитана аналогичным образом:

$$\mu_{см} = \frac{1}{\sum_i \frac{x_{vi}}{\mu_i}}, \quad (11.2)$$

где  $x_{vi}$  – массовая доля  $i$ -го компонента.

Жидкий теплоноситель в рубашке можно считать движущимся в режиме идеального вытеснения лишь при наличии достаточного количества точек его ввода. В противном случае необходимо учитывать наличие застойных зон внутри рубашки путем либо уменьшения активной площади поверхности теплообмена, либо усреднения скорости и температуры теплоносителя в кольцевой элементарной области.

Для каждого элементарного временного интервала выполняется последовательный тепловой расчет элементарных областей, включающих корпус и рубашку аппарата. При этом суммируются тепловые мощности, отдаваемые элементарными областями продукту:

$$Q_{1j} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Delta F_i \left( \frac{1}{\tau_j} \int_0^{\tau_j} t_{i,j}(r_k, \tau) d\tau - t_{pj} \right), \quad (11.3)$$

где  $Q_{1j}$  – тепловая мощность, отдаваемая корпусом аппарата продукту на  $j$ -м элементарном временном интервале;  $N$  – количество элементарных пространственных областей, составляющих корпус и рубашку аппарата;  $t_{i,j}(r_k, \tau)$  – температура внутренней поверхности корпуса аппарата, являющаяся решением за-

дачи нестационарной теплопроводности для стенки корпуса аппарата в  $i$ -й элементарной пространственной области в  $j$ -м элементарном временном интервале;  $\alpha_i, \Delta F_i$  – коэффициент теплоотдачи и площадь теплоотдающей поверхности  $i$ -й элементарной пространственной области;  $\tau_j$  – продолжительность  $j$ -го элементарного временного интервала;  $t_{pj}$  – температура продукта в аппарате в течение  $j$ -го элементарного временного интервала.

Отдельно суммируются тепловые мощности потерь элементарных областей в окружающую среду:

$$Q_{пj} = \sum_{i=1}^N \alpha_{ioc} \Delta F_{ioc} \left( \frac{1}{\tau_j} \int_0^{\tau_j} t_{i,j}(r_n + \delta_n, \tau) d\tau - t_{oc} \right), \quad (11.4)$$

где  $Q_{пj}$  – тепловая мощность потерь в окружающую среду на  $j$ -м элементарном временном интервале;  $t_{i,j}(r_n + \delta_n, \tau)$  – температура наружной поверхности теплоизоляционного покрытия, являющаяся решением задачи нестационарной теплопроводности для теплоизолированной стенки корпуса рубашки аппарата в  $i$ -й элементарной пространственной области в  $j$ -м элементарном временном интервале;  $\alpha_{oc}, \Delta F_{oc}$  – коэффициент теплоотдачи к окружающей среде и площадь наружной поверхности теплоизоляции  $i$ -й элементарной пространственной области;  $t_{oc}$  – температура окружающей среды.

Затем для того же элементарного временного интервала выполняется последовательный тепловой расчет элементарных областей, включающих встроенное теплообменное устройство. При этом также суммируются тепловые мощности, отдаваемые элементарными областями продукту.

$$Q_{vj} = \sum_{i=1}^M \alpha_{vi} \Delta F_{vi} \left( \frac{1}{\tau_j} \int_0^{\tau_j} t_{vi,j}(r_k, \tau) d\tau - t_{pj} \right), \quad (11.5)$$

где  $Q_{vj}$  – тепловая мощность, отдаваемая встроенным теплообменным устройством продукту на  $j$ -м элементарном временном интервале;  $M$  – количество элементарных пространственных областей, составляющих встроенное теплообменное устройство;  $t_{vi,j}(r_k, \tau)$  – температура теплоотдающей поверхности встроенного теплообменного устройства, являющаяся решением задачи нестационарной теплопроводности для стенки встроенного теплообменного устройства в  $i$ -й элементарной пространственной области в  $j$ -м элементарном временном интервале;  $\alpha_{vi}, \Delta F_{vi}$  – коэффициент теплоотдачи и площадь теплоотдающей поверхности  $i$ -й элементарной пространственной области встроенного теплообменного устройства.

Теперь можно определить суммарную тепловую мощность, сообщаемую продукту за  $j$ -й элементарный временной интервал от действия всех присутствующих источников тепла с учетом знаков.

В общем случае имеем:

$$Q_j = Q_{1j} + Q_{vj} + Q_{hj} + Q_{dj} + Q_{cj} + Q_{mj} + Q_{sj} + Q_{ej} + Q_{pj} + Q_{пj}, \quad (11.6)$$

где  $Q_{1j}$  – тепловая мощность, отдаваемая корпусом аппарата, охваченным рубашкой;  $Q_{vj}$  – тепловая мощность, отдаваемая встроенным теплообменным устройством;  $Q_{hj}$  – мощность дифференциальных теплот разбавления (концентрирования) растворов;  $Q_{dj}$  – мощность теплот фазовых переходов;  $Q_{cj}$  – мощность тепловых эффектов химических превращений;  $Q_{mj}$  – тепловая мощность, привносимая перемешивающими устройствами;  $Q_{sj}$  – тепловая мощность внутреннего трения;  $Q_{ej}$  – тепловая мощность, привносимая внешними электромагнитными, электрическими, акустическими и другими воздействиями;  $Q_{pj}$  – тепловая мощность, привносимая работой сил давления;  $Q_{пj}$  – тепловая мощность потерь в окружающую среду.

После этого производится расчет изменения энтальпии продукта в аппарате за элементарный временной интервал с учетом тепловых мощностей всех присутствующих источников тепла:

$$\Delta I_j = \frac{Q_j \tau_j}{G}. \quad (11.7)$$

Затем определяется либо текущая температура продукта, либо количество вещества, совершившего фазовый переход.

Таким образом, расчет температурного поля емкостного аппарата за элементарный временной интервал включает многократное решение задач нестационарной теплопроводности для стенок корпуса, рубашки и встроенного теплообменного устройства с последующим учетом всех присутствующих составляющих элементарного теплового баланса.

## 12 МЕТОДИКА РАСЧЕТА СОРБЦИОННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Рассмотрим методику расчета сорбционного оборудования на основе моделирования температурного и концентрационного полей элементарной области адсорбционного колонного аппарата.

В качестве элементарной области выделим тонкий слой толщиной  $\Delta x$ , охватывающий все поперечное сечение колонного аппарата, включая обечайку, и рассматриваемый в течение времени  $\Delta t$ .

Толщина слоя может быть соизмерима с эквивалентным диаметром гранулы сорбента.

Процессы тепло- и массообмена при сорбции протекают взаимосвязано.

Температурное поле элементарной области сорбционного колонного аппарата, являющееся совокупностью температурных полей гранул сорбента, газового потока и стенки корпуса описывается сопряженной нелинейной задачей теплообмена, прямое аналитическое решение которой не представляется возможным.

Поле концентраций элементарной области сорбционного колонного аппарата, которое также является совокупностью полей концентраций гранул сорбента и газового потока, также описывается сопряженной нелинейной задачей диффузии, которая также аналитически не решается.

Кроме того, коэффициенты задачи теплопроводности зависят от текущих концентраций, а диффузионные характеристики зависят от текущих температур.

Примем допущение о том, что температурное и концентрационное поле газового потока в колонном аппарате одномерно, т.е. температура и концентрация газового потока меняются только вдоль продольной оси колонны и остаются постоянными по сечению аппарата, перпендикулярному его продольной оси.

Примем допущение о постоянстве теплофизических характеристик газового потока и гранул сорбента внутри элементарной области. Значения теплофизических характеристик определяются средними температурами и концентрациями в потоке и гранулах сорбента в элементарной области.

Данное допущение позволяет использовать для расчета температурных и концентрационных полей линейные дифференциальные уравнения в частных производных, допускающие аналитические решения.

Температура и концентрация газового потока, а также температура стенки корпуса принимаются постоянными по длине элементарной области.

Введем следующие обозначения:

$G_H$  – массовый расход газовой смеси на входе в элементарную область;

$x_H$  – концентрация поглощаемого компонента газовой смеси на входе в элементарную область;

$t_H$  – температура газовой смеси на входе в элементарную область;

$D_g, D_c$  – соответственно коэффициенты диффузии поглощаемого компонента в газе-носителе и гранулах сорбента;

$\alpha_1, \alpha_k, \alpha_{oc}$  – коэффициенты теплоотдачи соответственно от поверхности гранул и внутренней поверхности корпуса к газовому потоку, а также от наружной поверхности корпуса (или теплоизоляции, если она есть) в окружающую среду;

$c_1, \rho_1, \lambda_1$  – соответственно теплоемкость, плотность и теплопроводность газовой смеси;

$c_c, c_k, \rho_c, \rho_k, \lambda_c, \lambda_k$  – соответственно теплоемкости, плотности и теплопроводности гранул сорбента и материала корпуса;

$r_k$  – внутренний радиус кожуха аппарата;

$d_c$  – эквивалентный диаметр гранулы сорбента;

$\delta_k$  – толщина стенки корпуса;

$t_{oc}$  – температура окружающей среды.

При известных температурных и концентрационных полях гранул сорбента и температурном поле стенки корпуса с учетом принятых допущений расчет температуры и концентрации газового по-

тока внутри элементарной области и на выходе из нее не представляет трудностей, поэтому рассмотрим возможности расчета этих полей.

Расчет температурного поля стенки корпуса, представляющего собой полый неограниченный цилиндр, в частном случае однослойный, подробно рассматривался при моделировании температурного поля элементарной области кожухотрубчатого теплообменника.

Предполагается, что гранула сорбента имеет каноническую форму: шар, ограниченный цилиндр, параллелепипед.

Пусть гранула сорбента имеет форму шара.

В этом случае температурное и концентрационное поле элементарной области описывается следующими функциями:

- $t_1$  – средняя температура газового потока;
- $t(r, \tau)$  – температурное поле гранулы сорбента;
- $t_k(r_1)$  – температурное поле стенки корпуса;
- $c_1$  – средняя концентрация поглощаемого компонента в газовом потоке;
- $c(r, \tau)$  – концентрационное поле гранулы сорбента.

Функции  $t(r, \tau)$  и  $t_k(r_1)$  являются решениями соответствующих задач теплопроводности, функции  $c(r, \tau)$  – решением задачи диффузии.

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a_c^2 \left( \frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right) + \frac{q}{c_c \rho_c}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad \tau > 0; \quad (12.1)$$

$$t(r, 0) = f(r); \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (12.3)$$

$$\lambda_c \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial r} + \alpha_c (t(R, \tau) - t_c) = 0, \quad \alpha_c < 0. \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial t_k(r_1, \tau)}{\partial \tau} = a_k^2 \left( \frac{\partial^2 t_k(r_1, \tau)}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial t_k(r_1, \tau)}{\partial r_1} \right), \quad r_k \leq r_1 \leq r_k + \delta_k, \quad \tau > 0; \quad (12.5)$$

$$t_k(r_1, 0) = f(r_1); \quad (12.6)$$

$$\lambda_k \frac{\partial t_k(r_k, \tau)}{\partial r_1} + \alpha_k (t_k(r_k, \tau) - t_1) = 0; \quad \alpha_k < 0; \quad (12.7)$$

$$\lambda_k \frac{\partial t_k(r_k + \delta_k, \tau)}{\partial r_1} + \alpha_{oc} (t_k(r_k + \delta_k, \tau) - t_{oc}) = 0; \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial c(r, \tau)}{\partial \tau} = D_c \left( \frac{\partial^2 c(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad 0 \leq r \leq R, \quad \tau > 0; \quad (12.9)$$

$$c(r, 0) = f_c(r); \quad (12.10)$$

$$\frac{\partial c(0, \tau)}{\partial r} < \infty; \quad (12.11)$$

$$D_c \frac{\partial c(R, \tau)}{\partial r} + \beta (c(R, \tau) - c^*) = 0; \quad (12.12)$$

Задачи (12.1) – (12.4) и (12.9) – (12.12) являются частными случаями задачи нестационарной теплопроводности для многослойного шара, решение которой приведено выше.

Решения задач (12.1) – (12.12) имеют следующий вид.

$$t(r, \tau) = t_c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) W(r, \mu_n)}{Z_n}, \quad (12.13)$$

где 
$$W(r, \mu_n) = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\mu_n r}{a_c}\right); \quad (12.14)$$

$\mu_n$  –  $n$ -й положительный корень уравнения

$$\frac{\mu}{a_c} \cos\left(\frac{\mu R}{a_c}\right) + \left(\frac{\alpha_c}{\lambda_c} - \frac{1}{R}\right) \sin\left(\frac{\mu R}{a_c}\right) = 0; \quad (12.15)$$

$$Z_n = \int_0^R r^2 W^2(r, \mu_n) dr = 0,5 \left( R - \frac{a_c}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n R}{a_c}\right) \cos\left(\frac{\mu_n R}{a_c}\right) \right); \quad (12.16)$$

$$U(\mu_n, \tau) = \left( U(\mu_n, 0) - \frac{Q_n}{\mu_n^2} \right) \exp(-\mu_n^2 \tau) + \frac{Q_n}{\mu_n^2}; \quad (12.17)$$

$$U(\mu_n, 0) = \int_0^R r^2 (f(r) - t_c) W(r, \mu_n) dr; \quad (12.18)$$

$$Q_n = \frac{q}{c_c \rho_c} \int_0^R r^2 W(r, \mu_n) dr = \frac{q}{c_c \rho_c} \left( \frac{a_c}{\mu_n} \right)^2 \left( \sin\left(\frac{\mu_n R}{a_c}\right) - \frac{\mu_n R}{a_c} \cos\left(\frac{\mu_n R}{a_c}\right) \right). \quad (12.19)$$

Среднеобъемная температура равна:

$$\begin{aligned} \bar{t}(\tau) &= \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 t(r, \tau) dr = t_c + \frac{3}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau)}{Z_n} \int_0^R r^2 W(r, \mu_n) dr = \\ &= t_c + \frac{3}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) a_c}{Z_n \mu_n} \left( \frac{a_c}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n R}{a_c}\right) - R \cos\left(\frac{\mu_n R}{a_c}\right) \right). \end{aligned} \quad (12.20)$$

Плотность теплового потока через границу шара (без учета направления потока):

$$S(\tau) = \lambda_c \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial r} = \frac{\lambda_c}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau)}{Z_n} \left( \frac{\mu_n R}{a_c} \cos\left(\frac{\mu_n R}{a_c}\right) - \sin\left(\frac{\mu_n R}{a_c}\right) \right). \quad (12.21)$$

Изменение теплосодержания шара за время  $d\tau$ :

$$dI = V_c \rho_c c_c (\bar{t}(\tau + d\tau) - \bar{t}(\tau)), \quad (12.22)$$

где  $V_c = \frac{4\pi R^3}{3}$  – объем шара радиусом  $R$ .

$$t_k(r_1, \tau) = A + B \ln(r_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi(v_n, \tau) \zeta(r_1, v_n)}{Z_n}, \quad (12.23)$$

$$\text{где } B = \frac{t_1 - t_{oc}}{\ln(r_k) - \ln(r_k + \delta_k) + \lambda_k \left( \frac{1}{r_k \alpha_k} - \frac{1}{(r_k + \delta_k) \alpha_{oc}} \right)}; \quad (12.24)$$

$$A = t_1 - B \left( \ln(r_k) + \frac{\lambda_k}{\alpha_k r_k} \right); \quad (12.25)$$

$$\xi(v_n, \tau) = \xi(v_n, 0) \exp(-v_n^2 \tau); \quad (12.26)$$

$$\zeta(r_1, v_n) = J_0 \left( \frac{v_n r_1}{a_k} \right) + H_n Y_0 \left( \frac{v_n r_1}{a_k} \right); \quad (12.27)$$

$$\xi(v_n, 0) = \int_{r_k}^{r_k + \delta_k} r_1 (f_1(r_1) - A - B \ln(r_1)) \zeta(r_1, v_n) dr_1; \quad (12.28)$$

$$H_n = \frac{\frac{\lambda_k v_n}{a_k} J_1 \left( \frac{v_n}{a_k} r_k \right) - \alpha_k J_0 \left( \frac{v_n}{a_k} r_k \right)}{\alpha_k Y_0 \left( \frac{v_n}{a_k} r_k \right) - \frac{\lambda_k v_n}{a_k} Y_1 \left( \frac{v_n}{a_k} r_k \right)}; \quad (12.29)$$

$v_n$  – последовательные положительные корни уравнения

$$J_0 \left( \frac{v(r_k + \delta_k)}{a_k} \right) - \frac{v \lambda_k}{a_k \alpha_{oc}} J_1 \left( \frac{v(r_k + \delta_k)}{a_k} \right) + H \left( Y_0 \left( \frac{v(r_k + \delta_k)}{a_k} \right) - \frac{v \lambda_k}{a_k \alpha_{oc}} Y_1 \left( \frac{v(r_k + \delta_k)}{a_k} \right) \right) = 0; \quad (12.30)$$

$$\begin{aligned} Z_n &= \int_{r_k}^{r_k + \delta_k} r_1 \zeta^2(r_1, v_n) dr_1 = \int_{r_k}^{r_k + \delta_k} r_1 \left( J_0 \left( \frac{v_n r_1}{a_k} \right) + H_n Y_0 \left( \frac{v_n r_1}{a_k} \right) \right)^2 dr_1 = \\ &= 0,5 (r_k + \delta_k)^2 \left( J_0^2 \left( \frac{v_n (r_k + \delta_k)}{a_k} \right) + J_1^2 \left( \frac{v_n (r_k + \delta_k)}{a_k} \right) \right) + (r_k + \delta_k)^2 H_n \times \\ &\times \left( J_0 \left( \frac{v_n (r_k + \delta_k)}{a_k} \right) Y_0 \left( \frac{v_n (r_k + \delta_k)}{a_k} \right) + J_1 \left( \frac{v_n (r_k + \delta_k)}{a_k} \right) Y_1 \left( \frac{v_n (r_k + \delta_k)}{a_k} \right) \right) + \\ &+ 0,5 (r_k + \delta_k)^2 H_n^2 \left( Y_0^2 \left( \frac{v_n (r_k + \delta_k)}{a_k} \right) + Y_1^2 \left( \frac{v_n (r_k + \delta_k)}{a_k} \right) \right) - \\ &- 0,5 r_k^2 \left( J_0^2 \left( \frac{v_n r_k}{a_k} \right) + J_1^2 \left( \frac{v_n r_k}{a_k} \right) \right) - \\ &- r_k^2 H_n \left( J_1 \left( \frac{v_n r_k}{a_k} \right) Y_1 \left( \frac{v_n r_k}{a_k} \right) + J_1 \left( \frac{v_n r_k}{a_k} \right) Y_1 \left( \frac{v_n r_k}{a_k} \right) \right) - \end{aligned}$$

$$- 0,5 r_k^2 H_n^2 \left( Y_0^2 \left( \frac{v_n r_k}{a_k} \right) + Y_1^2 \left( \frac{v_n r_k}{a_k} \right) \right). \quad (12.31)$$

$$c(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(\gamma_n, \tau) V(r, \gamma_n)}{Y_n}, \quad (12.32)$$

где 
$$V(r, \gamma_n) = \frac{1}{r} \sin(\gamma_n r); \quad (12.33)$$

$\gamma_n$  –  $n$ -й положительный корень уравнения

$$\frac{\gamma}{\beta} \cos(\gamma R) + \left( \frac{\beta}{D_c} - \frac{1}{R} \right) \sin(\gamma R) = 0. \quad (12.34)$$

$$Y_n = \int_0^R r^2 V^2(r, \gamma_n) dr = 0,5 \left( R - \frac{1}{\gamma_n} \sin(\gamma_n R) \cos(\gamma_n R) \right). \quad (12.35)$$

$$S(\gamma_n, \tau) = S(\gamma_n, 0) \exp(-\gamma_n^2 D_c \tau), \quad (12.36)$$

$$S(\gamma_n, 0) = \int_0^R r^2 (f_c(r) - c^*) V(r, \gamma_n) dr. \quad (12.37)$$

Коэффициент массоотдачи  $\beta$  определяется из критериальных уравнений [9]:

$$\text{Re}_3 > 30, \quad \text{Nu}_D = 0,395 \text{Re}_3^{0,64} \text{Pr}_D^{0,333}; \quad (12.38)$$

$$2 < \text{Re}_3 \leq 30, \quad \text{Nu}_D = 0,725 \text{Re}_3^{0,47} \text{Pr}_D^{0,333}; \quad (12.39)$$

$$\text{Re}_3 < 2, \quad \text{Nu}_D = 0,515 \text{Re}_3^{0,85} \text{Pr}_D^{0,333}. \quad (12.40)$$

Здесь 
$$\text{Nu}_D = \frac{\beta d_c^2}{D_g}; \quad \text{Re}_3 = \frac{w d_c \rho}{\mu}; \quad \text{Pr}_D = \frac{\nu}{D_g}. \quad (12.41)$$

Численное значение коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_k$  отрицательно для учета направления тепловых потоков и сохранения общности подхода к решению задач теплопроводности, принятому в данной работе.

В неподвижном слое зернистого материала коэффициент теплоотдачи между потоком и поверхностью частицы

$$\text{Nu} = \begin{cases} 0,0035 \left( \frac{\text{Re}}{\varepsilon} \right)^{1,5} \text{Pr}^{0,33}, & \frac{\text{Re}}{\varepsilon} < 200; \\ 0,4 \left( \frac{\text{Re}}{\varepsilon} \right)^{0,67} \text{Pr}^{0,33}, & \frac{\text{Re}}{\varepsilon} \geq 200. \end{cases} \quad (12.42)$$

Коэффициент теплоотдачи между потоком и стенкой аппарата в неподвижном слое зернистого материала

$$\text{Nu} = \begin{cases} 0,31 \text{Re}^{0,5} \frac{(1-\varepsilon)^{0,5}}{\varepsilon}, & \text{Re} \in (1,5, 57); \\ 0,1 \text{Re}^{0,8} \frac{(1-\varepsilon)^{0,2}}{\varepsilon}, & \text{Re} \in (57, 150). \end{cases} \quad (12.43)$$

$$\text{В (12.42) и (12.43)} \quad \text{Nu} = \frac{\alpha d_3}{\lambda}, \quad \text{Re} = \frac{\omega d_3}{\nu}, \quad d_3 = \sqrt{\frac{F}{\pi}},$$

где  $\omega$  – скорость потока в свободном сечении аппарата;  $F$  – площадь поверхности частицы зернистого материала;  $\varepsilon$  – порозность зернистого слоя.

Расчет температурного и концентрационного полей элементарной области выполняется по следующей итеративной методике.

1 Используя температуру газового потока и концентрацию поглощаемого компонента в нем на выходе из предыдущей элементарной области, температуру зерна сорбента и концентрацию поглощаемого компонента в нем в предыдущий временной интервал текущей элементарной области, находим значения теплофизических характеристик газового потока и зерна сорбента, коэффициентов тепло- и массоотдачи, а также равновесные концентрации в текущей элементарной области.

2 По начальным температурам и концентрациям в элементарной области рассчитываем концентрационное поле в зерне сорбента, количество поглощенного компонента, изменение концентрации газового потока.

3 Рассчитываем количество тепла, выделяющееся в процессе сорбции.

4 Рассчитываем температурное поле зерна сорбента с учетом теплоотдачи к газовому потоку. Вычисляем температуру газового потока на выходе из элементарной области.

5 Для уточненных значений средних температур повторяем пункты 1 – 4 до совпадения с заданной точностью средних температур в соседних итерациях.

Тепловой и материальный балансы элементарной области могут быть использованы для независимой проверки и оценки качества расчета (как и балансы по всему аппарату в целом).

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_k + \Delta Q_{\text{п}}, \quad (12.44)$$

где  $\Delta Q_1$  – тепловая мощность теплоты адсорбции;  $\Delta Q_2$  – тепловая мощность, затраченная на нагрев гранул сорбента;  $\Delta Q_3$  – тепловая мощность, затраченная на нагрев газового потока;  $\Delta Q_k$  – тепловая мощность, затраченная на нагрев стенки корпуса;  $\Delta Q_{\text{п}}$  – тепловая мощность потерь в окружающее пространство.

Общий расчет аппарата представляет собой последовательный расчет элементарных областей, причем для каждого временного интервала последовательно просчитываются элементарные области по длине слоя сорбента с сохранением массивов коэффициентов, определяющих текущие температурные и концентрационные поля.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методика расчета конструктивных и режимных параметров производственного оборудования химической промышленности, основанная на использовании понятия элементарной области, является современным инженерным инструментом, находящим все более широкое применение при решении ряда прикладных производственных задач, а также при обучении студентов, магистрантов и аспирантов технических специальностей.

Предложенная методика, основанная на использовании аналитических решений задач теплопроводности, обеспечивает высокое качество и полноту технологических расчетов промышленного оборуду-

дования, что подтверждается результатами промышленных испытаний и проверками по независимым тепловым и материальным интегральным балансам.

В настоящее время по данной методике выполняются расчеты теплообменного, емкостного, реакционного, сорбционного и сушильного оборудования для предприятий ОАО «Пигмент», ОАО «Тамбовский завод "Комсомолец"» им. Н.С. Артемова, ФГУП «ТамбовНИХИ».

Идеология представленной методики моделирования технологических процессов и оборудования, а также ряд математических моделей аппаратов химической промышленности, разработанных по данной методике, используются в настоящее время в учебных процессах при подготовке дипломированных специалистов, магистрантов и аспирантов технологического института ТГТУ.

Предложенная методика моделирования полей определяющих параметров производственного оборудования может быть использована для решения ряда других прикладных задач:

- выявление лимитирующих факторов и лимитирующих стадий производственного процесса;
- выработка оптимальных управляющих воздействий при пуске, эксплуатации и останове технологического оборудования;
- определение условий достижения заданных качественных показателей выпускаемой продукции;
- принятие оперативных решений на основе прогнозирования развития нештатных ситуаций в ходе производственного процесса;
- оптимальное планирование экспериментальных и исследовательских работ;
- исследование кинетических характеристик процессов и теплофизических характеристик веществ.

Использование метода конечных интегральных преобразований позволяет реализовать унифицированный подход к решению задач теплопроводности в различных постановках:

- для многослойных тел канонической формы;
- для ограниченных тел канонической формы;
- при произвольных начальных условиях;
- при произвольных сочетаниях неоднородных граничных условий различного рода;
- при неоднородных граничных условиях, включающих функции, зависящие от времени и температуры;
- для системы канонических тел, находящихся в идеальном тепловом контакте;
- для канонических тел с подвижными границами;
- для ряда частных случаев нелинейных задач теплопроводности.

Работы по получению аналитических решений задач теплопроводности, перечисленных в трех последних пунктах, проводятся в настоящее время.

Ряд решений задач теплопроводности публикуется впервые. Это решения для  $n$ -слойных полых и сплошных шара и неограниченного цилиндра с распределенными источниками тепла; для конечного полого цилиндра с температурой окружающих сред, меняющихся во времени и вдоль боковых поверхностей; для составного конечного цилиндра.

Данная работа дополняет и продолжает работы, осуществляемые на кафедре АПТО ТГТУ под руководством заслуженного деятеля науки РФ, доктора технических наук, профессора Е.Н. Малыгина.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными. Точные решения. М.: Международная программа образования, 1996. 496 с.
- 2 Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- 3 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 2-е изд. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. 703 с.
- 4 Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
- 5 Лыков А.В. Теплообмен: Справочник. М.: Энергия, 1972. 560 с.
- 6 Малыгин Е.Н., Карпушкин С.В. Автоматизированный расчет оборудования гибких технологических производств // Химическая промышленность. 1985. № 2. С. 118 – 123.
- 7 Пономарев С.В., Мищенко С.В., Дивин А.Г. Метод, устройство и автоматизированная система для исследования зависимости теплофизических свойств жидкости от скорости сдвига // Вестник ТГТУ. 1995. Т. 1, № 1 – 2. С. 39 – 52.
- 8 Протодьяконов И.О., Марцулевич Н.А., Марков А.В. Явления переноса в процессах химической технологии / Под ред. П.Г. Романкова. Л.: Химия, 1981. 264 с.
- 9 Процессы и аппараты химической технологии. Явления переноса, макрокинетика, подобие, моделирование, проектирование. В 5 т. / Под ред. акад. А.М. Кутепова. М.: Логос, 2000. Т. 1. 480 с.