

Т.Б. ЗАУСОНИНА

**ОПТИМИЗАЦИЯ
ВАЛОВОГО ВЫПУСКА
ОТРАСЛЕЙ ЭКОНОМИКИ НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ**



Издательство ТГТУ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

Т.Б. ЗАУСОНИНА

**ОПТИМИЗАЦИЯ ВАЛОВОГО ВЫПУСКА
ОТРАСЛЕЙ ЭКОНОМИКИ НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ**

Тамбов
Издательство ТГТУ
2004

ББК 65в6я73
337

Рецензенты:

Доктор экономических наук, профессор

В.И. Абдукаримов

Доктор экономических наук, профессор

Н.Т. Толстых

Заусонина Т.Б.

337 Оптимизация валового выпуска отраслей экономики на бесконечном горизонте / Т.Б. Заусонина. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 88 с.

Работа посвящена проблеме отыскания оптимального плана в непрерывной динамической модели валового выпуска экономики на бесконечном горизонте.

Предназначена для научных работников и специалистов, занимающихся проблемами разработки инструментальных математических методов экономики, а также студентов экономических специальностей.

ББК 65в6я73

ISBN 5-8265-0325-4

© Заусонина Т.Б., 2004
© Тамбовский государственный
технический университет (ТГТУ),
2004

Научное издание

ЗАУСОНИНА Татьяна Борисовна

**ОПТИМИЗАЦИЯ ВАЛОВОГО ВЫПУСКА
ОТРАСЛЕЙ ЭКОНОМИКИ НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ**

Монография

Редактор З.Г. Чернова
Компьютерное макетирование Е.В. Кораблевой

Подписано в печать 18.09.2004
Формат 60 × 84 / 16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman. Объем: 5,12 усл. печ. л.; 5,01 уч.-изд. л.
Тираж 400 экз. С. 693^М

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета,
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$x \in A$ означает, что x является элементом множества A (x принадлежит A).

$x \notin A$ означает, что x не является элементом множества A .

$A \subset B$ означает, что каждый элемент множества A является также элементом множества B (A есть подмножество множества B или A содержится в B).

$\{x, y, \dots, z\}$ – множество, состоящее из элементов x, y, \dots, z . Порядок и повторение в списке элементов несущественны.

$\{x \mid p(x)\}$ – множество всех тех x , для которых выполнено условие $p(x)$.

$\{x \in A \mid p(x)\}$ – множество всех тех x , которые принадлежат множеству A и удовлетворяют условию $p(x)$.

Объединение множеств A и B есть множество $\{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ оно обозначается $A \cup B$.

Пересечение множеств A и B есть множество $\{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$; оно обозначается $A \cap B$.

Дополнение множества A в множестве B (разностью множеств A и B) есть множество $\{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}$ и оно обозначается $B \setminus A$.

Декартово произведение множеств A и B есть множество, элементами которого являются упорядоченные пары (x, y) ; причем $x \in A$ и $y \in B$, оно обозначается $A \times B$.

\mathbb{R} – множество всех действительных чисел.

\mathbb{R}^n – декартово произведение n множеств действительных чисел $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – элементы пространства \mathbb{R}^n .

$\{x_k\}$ – последовательность $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ действительных чисел с общим членом x_k .

Вектора и матрицы обозначаются заглавными буквами A, B .

Запись $A = \|a_{ij}\|, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ означает, что матрица размерности, в ней n строк и m столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Запись $f(x) \rightarrow \max$ означает, что требуется максимизировать функцию $f(x)$;

Запись $f(x) \rightarrow \min$ означает: что требуется минимизировать функцию $f(x)$.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач исследователей в области экономической мысли является изучение действующих экономических механизмов и поиск путей возможного их совершенствования. Для этого строятся модели, отражающие наиболее важные черты и свойства экономики в целом или каких-то ее подразделений.

В данной работе сделана попытка построить оптимизационную модель валового выпуска отраслей экономики, которую, в принципе, можно применить к мировой экономике, экономике государства в целом, какого-либо ее региона, деятельности отрасли, межотраслевого комплекса, транснациональной корпорации. Она является модернизацией уже существующей оптимизационной модели. Предложенную модель назовем динамической моделью Леонтьева.

Важнейшим показателем, характеризующим развитие экономического субъекта, является валовой выпуск. Поэтому, оптимизируя этот показатель, тем самым находим наилучший вариант функционирования экономики. Несомненно, только валовой выпуск не может однозначно охарактеризовать работу экономической системы, необходимо оптимизировать еще и используемые ресурсы. В нашей модели под ресурсами будем понимать только прямые затраты и капиталоемкости, которые изменяются незначительно, а на коротком промежутке времени (3 – 5 лет) их вообще можно считать постоянными. Следовательно, достаточно оптимизировать только валовой выпуск.

Одной из важнейших задач настоящей работы является распространение динамической модели Леонтьева на бесконечный горизонт. Считать, что прямые затраты и инвестиции в этом случае остаются неизменными, неправильно. Поэтому затраты будем рассматривать зависящими от валового выпуска (что не влияет на результат исследования); кроме того, будем рассматривать динамическую модель Леонтьева с дополнительно введенными параметрами (смена технологий, изменение политической ситуации, экономической конъюнктуры и т.д.).

Разумеется, рынок решает не все возникающие в практике проблемы, его функции и возможности ограничены. Рыночные регуляторы порождают не только позитивные эффекты.

Когда возникают препятствия и перемены, например резкое повышение цен на сырье или топливо, существенный прогресс в технологии, политический кризис, рыночная экономика приспосабливается к новым условиям равновесия, как правило, при активном участии государства. Характер, темпы приспособления к новому положению зависят от конкретных условий, степени открытости экономики, соответствия изменившегося уровня цен социальным нуждам и требованиям, эффективности экономических регуляторов и экономической политики, используемой государством. Особенно важно вмешательство государства в экономическую жизнь в целях достижения макроэкономического равновесия в условиях переходной экономики.

Основной целью работы является нахождение равновесия в динамической модели Леонтьева. Термин «равновесие» невольно ассоциируется с застоем, отсутствием движения. Видимо, по этой причине многие считают, что теория равновесия не способна исследовать процессы экономического развития. Разумеется, эта точка зрения неосновательна.

С начала XIX в. существует целое направление экономической теории, занимающееся исследованиями в области равновесия. Следует различать статическое и динамическое равновесие. Под статическим равновесием понимают баланс всех факторов в какой-то определенный момент времени. Такой подход характерен для первоначального этапа изучения в области «равновесия» как экономической категории. Естественно, он не отвечает требованиям реальности, и поэтому равновесие стали рассматривать в динамике, используя для этого дискретные модели. Очевидно, что исследование равновесия на бесконечном горизонте с использованием таких моделей невозможно. В работе построена непрерывная динамическая модель.

Достижение равновесного состояния не гарантирует возможность его постоянного поддержания, поэтому необходимо искать именно устойчивое равновесие. Под устойчивым равновесием понимается такое состояние системы, в которое она вновь возвращается под влиянием своих внутренних сил, будучи выведенной из него внешними. Если равновесие обладает свойством устойчивости, то дополнитель-

ное регулирование представляется не обязательным, т.е. система сама поддерживает свою сбалансированность. В том случае, когда равновесие не обладает свойством устойчивости, его регулирование становится действительно необходимым.

В работе поставлена цель описать такую модель валового выпуска экономики, что бы она обеспечивала устойчивое равновесие на бесконечном горизонте оптимизации.

Содержание монографии представлено в трех главах. Первая глава посвящена проблеме продолжения оптимального решения на бесконечный горизонт. В п. 1 строится модель, которая описывает валовой выпуск и учитывает затраты экономики и капиталоемкость. Первоначально данная модель рассматривается на конечном горизонте планирования. При этом, описание какого-то конкретного способа решения получившейся задачи не было целью работы.

Предложенная модель является частным случаем оптимизационной модели А.П. Афанасьева, которая также рассматривается на конечном и бесконечном горизонте функционирования. Модель А.П. Афанасьева (а, следовательно, и предложенную модель) на конечном горизонте сводится к задаче или последовательности задач линейного программирования, для которых уже разработано довольно много способов решения и можно применить какой-нибудь из них (п. 2). Рассмотрены условия, позволяющие решить задачу оптимизации на конечном горизонте как автономную систему дифференциальных уравнений.

Наконец, п. 3 посвящен проблеме оптимизации на бесконечном горизонте. В теореме 3.1 показано, что если решение модели Афанасьева (динамическая модель Леонтьева) существует, то оно обязательно будет решением квазипериодической задачи. С экономической точки зрения квазипериодическое решение динамической модели Леонтьева на бесконечном горизонте оптимизации и задает равновесие. Тем не менее, оно может быть неустойчивым.

Во второй главе идет речь об устойчивости решения предложенной модели. Сначала, рассматривается, что такое «равновесие» как экономическая категория и как подходили к проблеме нахождения равновесия раньше (п. 4).

Затем решается вопрос о существовании единственного положения равновесия динамической модели Леонтьева, что и доказывается. Именно положение равновесия, являющееся решением асимптотически структурно устойчивой модели, задает устойчивое равновесие в экономическом понимании. С математической же точки зрения им является структурно и асимптотически устойчивое равновесие. Следующая глава посвящена исследованиям в этой области.

Определения структурной и асимптотической устойчивости приведены в п. 6. Получены также условия устойчивости равновесия модели валового выпуска как экономической категории. Данный факт отражен в теореме 7.1. Введение определений множества Красносельского 1-го рода и 2-го рода, предравновесного и равновесного множества позволило упростить изложение материала.

Целью главы 3 стало построение равновесных множеств. Простейший пример равновесного множества приведен в п. 7. Проблема построения алгоритма отыскания равновесного множества, который позволяет выделить случаи, когда равновесное множество для динамической модели Леонтьева существует, отражена в п. 8.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА
ВАЛОВОГО ВЫПУСКА ЭКОНОМИКИ
НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ**

В настоящей главе приведено построение оптимизационной модели отраслей рынка на бесконечном горизонте. В п. 1 построена модель валового выпуска отраслей экономики на конечном горизонте оптимизации в стоимостном выражении, исходя из того, что экономика состоит из n отраслей, а выпускает p' продуктов (динамическая модель Леонтьева).

Следующий параграф посвящен описанию модели математического программирования А.П. Афанасьева, в нем же приведены условия, при которых данная модель может быть сведена к задаче или последовательности задач линейного программирования. Далее доказывается, что полученная ранее модель является частным случаем модели А.П. Афанасьева. Поэтому все результаты, полученные Афанасьевым, применимы к рассматриваемой модели. Таким образом, для динамической модели Леонтьева получены условия ее решения на конечном горизонте, путем приведения ее к автономной системе дифференциальных уравнений.

Представляет интерес случай, когда предложенную модель можно рассматривать на бесконечном горизонте оптимизации, чему посвящен параграф главы. Теорема 3.1 отвечает на вопрос о структуре решений исследуемой модели, рассматриваемой на бесконечном горизонте. Как вспомогательное вводится определение квазипериодической модели. Теорема 3.1 утверждает, что квазипериодическая модель представляет собой общее положение динамической модели Леонтьева (как частный случай модели А.П. Афанасьева) на бесконечном горизонте.

Условия, при которых динамическую модель Леонтьева можно рассматривать на бесконечном горизонте, приведены в п. 4 в теореме 4.1.

1 Моделирование оптимизационного процесса валового выпуска отраслей экономики

Предположим, что имеется n различных отраслей O_1, \dots, O_n , каждая из которых производит свой продукт. В дальнейшем отрасль x_i будем коротко называть « i -я отрасль». В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Речь пойдет о некотором определенном промежутке времени $[T_0, T_1]$ (обычно таким промежутком служит плановый год) для чего введены следующие обозначения:

x_i – общий объем продукции отрасли i за данный промежуток времени – так называемый валовой выпуск отрасли i ;

x_{ij} – объем продукции отрасли i , расходуемый отраслью j в процессе производства;

y_i – объем продукции отрасли i , предназначенный к потреблению в непромышленной сфере – объем конечного потребления. Этот объем составляет обычно более 6,6 % всей произведенной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т.д.), поставки на экспорт.

Указанные величины можно свести в таблицу.

Производственное потребление	Конечное потребление	Валовой вы- пуск
---------------------------------	-------------------------	---------------------

го баланса. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы V и векторов x и y это соотношение называют также моделью Леонтьева. Таким образом получено построение дискретной модели Леонтьева.

Уравнение межотраслевого баланса можно использовать для целей планирования. В этом случае задача ставится так: для предстоящего планового периода $[T_0, T_1]$ задается вектор y конечного потребления. Требуется определить вектор x валового выпуска. Проще говоря, нужно решить задачу: сколько следует произвести продукции различных видов, чтобы обеспечить заданный уровень конечного потребления? В этом случае необходимо решить систему линейных уравнений (1.3) с неизвестными вектором x при заданных матрице V и векторе y . При этом нужно иметь в виду следующие особенности системы (1.3):

1 Все компоненты матрицы V и вектора y неотрицательны (это вытекает из экономического смысла V и y). Для краткости будем говорить о неотрицательности самой матрицы V и вектора y и записывать это так: $V \geq 0, y \geq 0$.

2 Все компоненты вектора x также должны быть неотрицательными: $x \geq 0$.

Обратим внимание на смысл коэффициентов v_{ij} прямых затрат в случае стоимостного (а не натурального) баланса. В этом случае из (1.2) видно, что v_{ij} совпадает со значением x_{ij} при $x_j = 1$ (один рубль).

Таким образом, v_{ij} есть стоимость продукции отрасли i , вложенной в один рубль продукции отрасли j . Отсюда, между прочим, видно, что стоимостной подход по сравнению с натуральным обладает более широкими возможностями. При таком подходе уже необязательны рассматриваемые «чистые», т.е. однопродуктовые отрасли. Ведь и в случае многопродуктовых отраслей также можно говорить о стоимостном вкладе одной отрасли в выпуск одного рубля продукции другой отрасли. Например, о вкладе промышленной сферы в выпуск одного рубля сельскохозяйственной продукции или о вкладе промышленной группы А (производство средств производства) в выпуск одного рубля продукции группы В (производство предметов потребления). Вместе с тем надо понимать, что планирование исключительно в стоимостных величинах может легко привести к дисбалансу потоков материально-технического снабжения.

Метод экономического баланса продолжает развиваться и распространяться в экономической теории и на практике. Однако метод в той форме, в какой его развивал сам В. Леонтьев и его ближайшие ученики, имеет некоторые ограничительные «родовые» признаки.

Так, Василий Леонтьев предпочитал иметь дело только с линейными зависимостями и никогда не использует оптимизационные модели, хотя он и работал непосредственно с одним из первооткрывателей линейного программирования Дж. Данцингом и признает полезность техники оптимизационных расчетов. Аналогично его отношение к моделям экономического равновесия: признавая своим теоретическим предшественником Л. Вальраса (с его теорией и математической моделью общего экономического равновесия), он не пошел по пути построения прикладных межотраслевых моделей экономического равновесия. В настоящее время можно выделить три основных направления:

- включение в анализ новых проблемных аспектов (например, сферу потребления, демографические и социальные процессы, природопользование и охрану окружающей среды, военную экономику и т.д.);
- переход от статических к динамическим моделям (от анализа экономических состояний к исследованию процессов);
- распространение метода на многорегиональные системы (включая мировую экономику).

В данной работе будет разрабатываться второе направление, к тому же мы несколько отойдем от уравнения баланса и заменим его нестрогим неравенством.

Теперь перейдем к построению непрерывной динамической модели.

Рассмотрим некую абстрактную экономику, которая имеет n отраслей, производит и потребляет p' типов продуктов (товаров) (избавиться от ограничения, что каждая отрасль производит только один продукт и разные отрасли не могут производить одинаковые продукты, поможет то, что единицы измерения стоимостные).

Как уже сказано выше, время t в модели непрерывно, $t \in [t_0, T]$, где t_0 – начало планового периода; T – конец планового периода.

Валовой выпуск отраслей будем рассматривать как динамическую переменную и будем обозначать ее

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

вектор-функция валовых выпусков отраслей в момент времени t , где $x_i(t)$ – валовой выпуск i -ой отрасли в момент времени t . Пусть начальное значение этой вектор-функции известно:

$$x(t_0) = x_0.$$

Естественным ограничением является требование, чтобы валовой выпуск каждой отрасли был неотрицательным:

$$x_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Предположим, что вектор-функция валового выпуска отраслей является непрерывно дифференцируемой на рассматриваемом отрезке времени $[t_0, T]$. Тогда имеет смысл говорить о производной этой функции:

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)).$$

С экономической точки зрения $\dot{x}_i(t)$ означает, что в i -ой отрасли в момент времени t введено в производство $\dot{x}_i(t)$ новых мощностей или, иначе, показывает мгновенную скорость роста общественного продукта в i -ой отрасли в момент времени t .

Таким образом, $\dot{x}(t)$ показывает скорость роста общественного продукта или ввод новых мощностей. Эта переменная была рассмотрена В. Леонтьевым в работе «Исследование структуры американской экономики, 1919 – 1929». Чтобы скорость роста валового выпуска в i -ой отрасли увеличилась на один рубль в день необходимо увеличить мощность j -ой отрасли $j = 1, \dots, n$ на \dot{x}_{ij} р./день. Матрица, составленная из коэффициентов $u_{ij} = \frac{\dot{x}_{ij}}{\dot{x}_j}$, называется матрицей капиталоемкости. Леонтьев заметил, что по-

лученная матрица $U = ||u_{ij}||$ коэффициентов капиталоемкости аналогично матрице прямых затрат в течение ряда лет остается неизменной, поэтому ее можно рассматривать как постоянную. Однако главной целью наших исследований является распространение оптимального планирования валового выпуска на бесконечный горизонт. На больших промежутках времени считать, что затраты и капиталоемкость остаются неизменными, неуместно, поэтому в дальнейшем будем рассматривать эти матрицы как функции от x .

В уравнении баланса значение потребительского спроса считается экзогенно заданным, однако в реальности это далеко не так и каким будет спрос на продукцию отрасли предугадать достаточно сложно. Поэтому, чтобы избавиться от этой переменной, вместо уравнения баланса будем рассматривать неравенство

$$x \geq V(x)x + U(x) \dot{x}, \quad (1.4)$$

которое с экономической точки зрения означает, что валовой выпуск продуктов x должен покрывать текущие производственные затраты Vx и затраты продукции на расширение производственных мощностей $U\dot{x}$. Неравенство (1.4) легко преобразуется к виду

$$U(x) \dot{x}(t) \leq (E - V(x))x(t),$$

где E – единичная матрица.

Учитывая все вышесказанное, рассматриваемая модель примет вид:

$$U(x) \dot{x}(t) \leq (E - V(x))x(t);$$

$$x(t) \geq 0;$$

$$x(t_0) = x_0;$$

$$t \in [t_0, T].$$

Но перед нами стоит задача оптимизировать долгосрочный валовой выпуск отраслей экономической системы, т.е., чтобы в конце рассматриваемого периода валовой выпуск достиг максимального значения. Это можно выразить в виде целевой функции

$$\sum_{i=1}^n x_i(T) \rightarrow \max.$$

В результате получаем задачу

$$\sum_{i=1}^n x_i(T) \rightarrow \max;$$

$$U(x) \dot{x}(t) \leq (E - V(x))x(t), \quad \dot{x}(t) \geq 0;$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T],$$

где $x(t)$ – n -мерная вектор-функция; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p'$; t_0 – начало горизонта; T – конец горизонта оптимизации.

Полученную оптимизационную задачу назовем динамической моделью Леонтьева на конечном горизонте оптимизации.

В следующем параграфе будут приведены условия, когда полученную модель можно свести к задаче или последовательности задач линейного программирования или автономной системе дифференциальных уравнений. А в п. 3 будут получены условия, при выполнении которых динамическая модель Леонтьева может быть рассмотрена на бесконечном горизонте, т.е. получена следующая модель:

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{\infty} \dot{x}_i(t) dt \rightarrow \max;$$

$$U(x) \dot{x}(t) \leq (E - V(x))x(t), \quad \dot{x}(t) \geq 0;$$

$$x(t_0) = x_0; \quad t \geq t_0,$$

где $x(t)$ – N -мерная вектор-функция; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p'$; t_0 – начало горизонта оптимизации.

Полученная оптимизационная задача задает моделью оптимизации валового выпуска экономики на бесконечном горизонте, которую будем называть динамической моделью Леонтьева на бесконечном горизонте.

2 Модели с конечным горизонтом

Рассмотрим задачу оптимального управления со смешанными ограничениями на фазовые координаты и на управления, линейную по последним, с начальным значением в точке на левом конце и со свободным правым концом, с фиксированным временем, которая имеет следующий вид:

$$J[x, u] = \int_{t_0}^T g(x, t, u) dt \rightarrow \min; \quad (2.1)$$

$$\dot{x} = k(x, t)u + l(x, t); \quad (2.2)$$

$$m(x, t)u = n(x, t); \quad (2.3)$$

$$p(x, t)u \geq r(x, t); \quad (2.4)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T]; \quad (2.5)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^k,$$

где $k(x, t)$, $m(x, t)$ и $p(x, t)$ – матрицы форматов $n' \times k$, $p' \times k$, ($p' < k$) и $q \times k$ соответственно, а $l(x, t)$, $n(x, t)$ и $r(x, t)$ – вектора размерностей n' , p' и q соответственно.

Перейдем к другой, эквивалентной форме записи задачи, удобной для дальнейшего изложения.

Для этого введем новые переменные

$$\dot{x}_{n'+1} = 1, \quad x_{n'+1}(t_0) = t_0;$$

$$u_i(t) = \dot{x}_{n'+1+i}(t), \quad x_{n'+1+i}(t_0) = 0;$$

$$i = 1, \dots, k, \quad n = n' + k + 1, \quad p = n' + p'.$$

Тогда

$$J(x) = \int_{t_0}^T \langle G(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \rightarrow \min; \quad (2.6)$$

$$A(x(t)) \dot{x}(t) = B(x(t)); \quad (2.7)$$

$$C(x(t)) \dot{x}(t) \geq D(x(t)); \quad (2.8)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.9)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A и C – матрицы размерностей $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, а G , B и D – вектора размерностей n , p и q соответственно.

Очевидно, что какими бы ни были матрицы A , C и вектора B , D задачу (2.1) – (2.5) можно свести к задаче (2.6) – (2.9) положив $\dot{x} = u$.

Рассмотренные преобразования привел А.П. Афанасьев в своей работе [4], поэтому называем задачу оптимизации (2.6) – (2.9) моделью А.П. Афанасьева.

Приведем некоторые результаты работы [4] и работы [9, Глава 7], составляющие основу для дальнейшего исследования.

Предположим, что:

(а) Все функции A , B , C , D и G модели А.П. Афанасьева (2.6) – (2.9) удовлетворяют условиям Липшица.

Назовем режимом $r_i[t_i, t_{i+1}]$ совокупность ограничений (2.7) и те ограничения из (2.8), которые являются активными на некотором промежутке $[t_i, t_{i+1}] \subset [t_0, T]$ и вместе определяют некоторое решение $x_{r_i}(t)$ на указанном промежутке. Будем называть режим оптимальным, если промежуток $[t_i, t_{i+1}]$ определяет такой набор ограничений, что соответствующее решение $x_{r_i}^*(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ является частью оптимального решения $x^*(t)$. Совокупность уравнений (2.7) и активных ограничений из (2.8), определяющих режим, обозначим

$$R(x) \dot{x} = P(x).$$

Совокупность же неактивных ограничений из (2.8) обозначим

$$K(x) \dot{x} > L(x).$$

Назовем модель А.П. Афанасьева (2.6) – (2.9) локальной, если величина промежутка $[t_0, T]$ такова, что режим или последовательность режимов на этом промежутке можно установить в результате решения задачи или последовательности задач линейного программирования.

Свяжем с моделью А.П. Афанасьева (2.6) – (2.9) следующую задачу линейного программирования:

$$\langle G(x_0), y \rangle \rightarrow \min, \quad (2.10)$$

$$A(x_0)y = B(x_0), \quad (2.11)$$

$$C(x_0)y \geq D(x_0). \quad (2.12)$$

Предположим, что:

(b) Многогранник

$$Y(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n: R(x_0)y = P(x_0), K(x_0)y \geq L(x_0)\}$$

ограничен и имеет непустую внутренность (в этом случае решение задачи линейного программирования (2.10) – (2.12) существует).

(c) Пусть при этом

$$\text{rank}(R(x_0)) = \dim(P(x_0)) \leq n.$$

Оказывается, что при выполнении условий (a) – (c) найдется такой конечный промежуток $[t_0, T)$, $T > t_0$, что существует абсолютно непрерывное решение $x^*(t)$ модели А.П. Афанасьева (2.6) – (2.9) и при этом с необходимостью

$$R(x^*(t)) \dot{x}^*(t) = P(x^*(t))$$

почти для всех значений $t \in [t_0, T)$ (см. [9, с. 215]). Если при этом $\text{rank}(R(x_0)) = n$, то решение $x^*(t)$ определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^*(t) = R^{-1}(x^*(t))P(x^*(t)) \quad (2.13)$$

с начальным условием

$$x^*(t_0) = x_0. \quad (2.14)$$

Вернемся к рассмотрению динамической модели Леонтьева

$$\sum_{i=1}^n x_i(T) \rightarrow \max; \quad (2.15)$$

$$U(x) \dot{x}(t) \leq (E - V(x))x(t), \dot{x}(t) \geq 0; \quad (2.16)$$

$$x(t_0) = x_0, t \in [t_0, T], \quad (2.17)$$

где $x(t)$ – N -мерная вектор-функция; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p'$; t_0 – начало горизонта; T – конец горизонта оптимизации. Докажем, что она является частным случаем модели Афанасьева (2.6) – (2.9):

1) преобразуем целевую функцию

$$J(x) = \int_0^T \langle G(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \rightarrow \min,$$

положим $G(x(t)) \equiv (-1, \dots, -1)$ – вектор-строка размерности n , тогда

$$J(x) = \sum_{i=1}^n (-x_i(T) + x_i(t_0)) \rightarrow \min,$$

что эквивалентно целевой функции рассматриваемой динамической модели Леонтьева;

2) в равенстве (2.7) в качестве матрицы A и вектора D нулевую матрицу и нуль-вектор.

3) в неравенстве (2.8) примем за

$$C(x(t)) = \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(x(t)) = \begin{pmatrix} (V - E)x(t) \\ x(t) \end{pmatrix},$$

где C – матрица размерности $p \times n$, $p = p' + n$, а B – вектор размерности p .

Из доказанного следует, что все результаты, полученные для модели Афанасьева справедливы и для динамической модели Леонтьева на конечном горизонте.

Обозначим совокупность активных ограничений из (2.16)

$$R(x) \dot{x} = P(x),$$

а неактивных

$$K(x) \dot{x} = L(x).$$

Тогда при выполнении условий (а) – (с) найдется такой конечный промежуток $[t_0, T)$, $T > t_0$, что существует абсолютно непрерывное решение $x^*(t)$ динамической модели Леонтьева на конечном горизонте (2.6) – (2.9) и при этом с необходимостью

$$R(x^*(t)) \dot{x}^*(t) = P(x^*(t))$$

почти для всех значений $t \in [t_0, T)$ (см. [9, с. 215]). Если при этом $\text{rank}(R(x_0)) = n$, то решение $x^*(t)$ определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^*(t) = R^{-1}(x^*(t))P(x^*(t)) \quad (2.18)$$

с начальным условием

$$x^*(t_0) = x_0. \quad (2.19)$$

3 Модели с бесконечным горизонтом

Рассмотрим динамическую модель Леонтьева с конечным горизонтом оптимизации:

$$\sum_{i=1}^n x_i(T) \rightarrow \max; \quad (3.1)$$

$$U(x) \dot{x}(t) \leq (E - V(x))x(t), \quad \dot{x}(t) \geq 0; \quad (3.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.3)$$

где $x(t)$ – n -мерная вектор-функция; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p'$; t_0 – начало горизонта; T – конец горизонта оптимизации.

Как показано в п. 1, целевая функция динамической модели Леонтьева на бесконечном горизонте имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{\infty} \dot{x}_i(t) dt \rightarrow \max. \quad (3.4)$$

Получим условия, при которых оптимизационную задачу можно рассматривать на бесконечном горизонте, для чего следует вернуться к локальной модели А.П. Афанасьева:

$$J(x) = \int_{t_0}^{\infty} \langle G(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \rightarrow \min; \quad (3.5)$$

$$A(x(t)) \dot{x}(t) = B(x(t)); \quad (3.6)$$

$$C(x(t)) \dot{x}(t) \geq D(x(t)); \quad (3.7)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (3.8)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A и C – матрицы размерностей $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, а G , B и D – вектора размерностей n , p и q соответственно.

Предполагаем, что для нее выполнены условия (а) – (с) и матрица $R(x)$ невырождена, тогда для простоты обозначений положим

$$f(x) = R^{-1}(x)P(x).$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (3.9)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.10)$$

Тогда имеем право рассмотреть нелокальную модель А.П. Афанасьева

$$J(x) = \int_{t_0}^{\infty} \langle G(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \rightarrow \min; \quad (3.11)$$

$$A(x(t)) \dot{x}(t) = B(x(t)); \quad (3.12)$$

$$C(x(t)) \dot{x}(t) \geq D(x(t)); \quad (3.13)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (3.14)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A и C – матрицы размерностей $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, а G , B и D – вектора размерностей n , p и q соответственно.

Ответ на вопрос об общем положении решений этой модели дает следующая теорема

Теорема 3.1. Пусть E – некоторое непустое замкнутое ограниченное подмножество пространства \mathbb{R}^n и пусть для всех $x_0 \in E$ выполнены условия (a) – (c), причем

$$\text{rank}(R(x_0)) = \dim(P(x_0)) = n.$$

Тогда, если x_0 – некоторая точка множества E и решение $x(t)$ модели с конечным горизонтом (2.6) – (2.9), удовлетворяющее системе

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.15)$$

с начальными значениями (t_0, x_0) , может быть продолжено на всю полуось $t \geq t_0$ и целиком содержится при этом продолжении в множестве E , то для каждого положительного числа T из каждой последовательности

$$N_1, N_2, \dots, N_k, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \infty \quad (3.16)$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_l}, \dots, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} N_{k_l} = \infty,$$

что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x(t + (N_{k_l} - 1)T) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $t \geq t_0$, где $\varphi(t)$ – абсолютно непрерывное решение модели

$$J(\varphi) = \int_{t_0}^{\infty} \langle G(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt \rightarrow \min;$$

$$A(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = B(\varphi(t));$$

$$C(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \geq D(\varphi(t));$$

$$\varphi(t_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} x(t_0 + (N_{k_l} - 1)T),$$

содержащееся в E и удовлетворяющее условию

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = \varphi(t)$$

равномерно на всей полуоси $t \geq t_0$.

Доказательство. Без какой-либо потери общности для простоты обозначений положим $t_0 = 0$.

Пусть $x_1(t)$ – абсолютно непрерывное решение задачи (2.6) – (2.9), которое может быть продолжено на всю полуось $t \geq 0$ и содержится при этом в множестве E , т.е. с необходимостью $x_1(t)$ – абсолютно непрерывное решение системы (3.15) с начальными значениями $(0, x_0)$, определенное для всех значений t

≥ 0 и целиком содержащееся в E . Тогда, очевидно, $x_1(t)$ является также и решением интегрального уравнения

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t f(x_1(\tau))d\tau.$$

Для некоторого положительного числа T и всех значений $t \geq 0$ положим

$$x_N(t) = x_1(t + (N-1)T), \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

Тогда, как несложно заметить, при этих значениях t и N имеет место равенство

$$x_N(t) = x_0 + \int_0^T f(x_1(\tau))d\tau + \dots + \int_0^T f(x_{N-1}(\tau))d\tau + \int_0^t f(x_N(\tau))d\tau,$$

которое, очевидно, может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$x_N(t) = x_N(0) + \int_0^t f(x_N(\tau))d\tau. \quad (3.18)$$

Пусть теперь (3.16) – произвольная последовательность натуральных чисел, в соответствии с которой из последовательности (3.17) выберем подпоследовательность

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_k}, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \infty. \quad (3.19)$$

Поскольку множество E компактно, множество (3.19) равномерно ограничено на отрезке $[0, T]$. Кроме того, из равенства (3.18) непосредственно следует, что множество (3.19) равномерно непрерывно на $[0, T]$. Поэтому из него можно выбрать равномерно сходящуюся на отрезке $[0, T]$ последовательность

$$x_{N_{k_1}}, x_{N_{k_2}}, \dots, x_{N_{k_l}}, \dots, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} N_{k_l} = \infty, \quad (3.20)$$

пределом которой является функция φ , определенная и непрерывная для всех значений $0 \leq t \leq T$, т.е.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_{N_{k_l}}(t) = \varphi(t) \quad (3.21)$$

равномерно на $[0, T]$. При этом функция φ по построению целиком содержится в множестве E . Более того, в силу равенств (3.18) и (3.21) несложно заметить, что φ абсолютно непрерывна на $[0, T]$.

Для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность (3.20) совпадает с последовательностью (3.19). Ведем в рассмотрение последовательность моделей

$$\begin{aligned} J_{N_k}(x) &= \int_0^T \langle G(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \rightarrow \min; \\ A(x(t)) \dot{x}(t) &= B(x(t)); \\ C(x(t)) \dot{x}(t) &\geq D(x(t)); \\ x(0) &= x_{N_k}(0), \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$. Решение x_{N_k} каждой из этих моделей по построению существует и в силу равенства (3.18) является решением интегрального уравнения

$$x_{N_k}(t) = x_{N_k}(0) + \int_0^t f(x_{N_k}(\tau))d\tau. \quad (3.22)$$

Но так как в силу (3.21)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}(t) = \varphi(t)$$

равномерно на отрезке $[0, T]$, а в силу (3.22)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{x}_{N_k}(t) = \dot{\varphi}(t)$$

почти всюду на $[0, T]$, то согласно теореме Лебега

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \langle G(x_{N_k}(\tau)), \dot{x}_{N_k}(\tau) \rangle d\tau = \int_0^T \langle G(\varphi(\tau)), \dot{\varphi}(\tau) \rangle d\tau$$

и, следовательно, функция $\varphi(t)$ является абсолютно непрерывным решением модели

$$J(x) = \int_0^T \langle G(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt \rightarrow \min;$$

$$A(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = B(\varphi(t));$$

$$C(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \geq D(\varphi(t));$$

$$\varphi(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}(0).$$

Поэтому с необходимостью для всех значений $0 \leq t \leq T$ справедливо равенство

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\varphi(\tau)) d\tau. \quad (3.23)$$

в котором $\varphi_0 = \varphi(0)$, т.е. $\varphi(t)$ – абсолютно непрерывное решение системы (17ur) с начальными значениями $(0, \varphi_0)$.

Пусть

$$\Delta(N_1), \Delta(N_2), \dots, \Delta(N_k), \dots$$

– множество, элементы которого при всех значениях N_k определим по формуле

$$\Delta(N_k) = N_{k+1} - N_k.$$

При этом потребуем, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(N_k) = \infty;$$

последнего всегда можно добиться, удалив из множества (3.20) соответствующие элементы при сохранении его счетности.

Заметим теперь, что в силу равенства (3.18) множество (3.19) равномерно непрерывно и равномерно ограничено на всей полуоси $[0, \infty)$. Поэтому без потери общности можно считать, что для всех значений $t \geq 0$ имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}(t) = \varphi(t), \quad (3.24)$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $[0, \infty)$. Последнее, как несложно заметить, означает, что функция $\varphi(t)$, построенная по формуле (3.24), является абсолютно непрерывным решением модели

$$J(\varphi) = \int_0^{\infty} \langle G(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt \rightarrow \min;$$

$$A(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = B(\varphi(t));$$

$$C(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \geq D(\varphi(t));$$

$$\varphi(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}(0),$$

т.е. решением уравнения (3.23), определенным для всех значений $t \geq 0$ и содержащимся при этих значениях t в множестве E .

Поскольку для всех значений N_k

$$x_{N_{k+1}}(0) = x_{N_k}(\Delta(N_k)T), \quad (3.25)$$

то

$$\varphi_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}(\Delta(N_k)T). \quad (3.26)$$

Более того, так как функция φ целиком содержится в компактном множестве E , без какой-либо потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\Delta(N_k)T) = \varphi_0^*,$$

где φ_0^* – некоторая точка множества E .

Если

$$\varphi_0 \neq \varphi_0^*,$$

то в силу условий (3.25) и (3.26) найдется такое положительное число ε и такое натуральное число k_0 , зависящее от ε , что

$$|x_{N_k}(\Delta(N_k)T) - \varphi(\Delta(N_k)T)| \geq \varepsilon,$$

при $k > k_0$. Следовательно, для всех значений $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} |x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T) - \varphi(t + \Delta(N_k)T)| \geq \varepsilon. \quad (3.27)$$

Легко видеть, что множество M функций

$$\varphi(t), \varphi(t+T), \dots, \varphi(t+NT), \dots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$, по построению равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на $[0, T]$. Поэтому замыкание \overline{M} множества M – компактное в топологии равномерной сходимости на $[0, T]$ множество. Для всех значений $0 \leq t \leq T$ положим

$$x^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T), \quad (3.28)$$

причем в силу равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности множества (3.19) на отрезке $[0, T]$ можем принять существование такого предела. Пусть при этом

$$t_k = (\Delta(N_k) + 1)T, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда согласно неравенству (3.25) для всех значений $k > k_0$ наряду с (3.28) справедливо также и неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq t_k} |x_{N_k}(t) - \varphi(t)| \geq \varepsilon.$$

Обозначим через k_1 – некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $k_1 > k_0$. Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_1}} |x_{N_{k_1}}(t) - \varphi(t)| \geq \varepsilon.$$

Более того, найдется такое положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и такое натуральное число $k_2 > k_1$, что

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_1}} |x_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_1.$$

Далее, пусть теперь k_2 – некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $k_2 > k_1$. Тогда, как и ранее,

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_2}} |x_{N_{k_2}}(t) - \varphi(t)| \geq \varepsilon,$$

причем найдется такое положительное число $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и такое натуральное число $k_3 > k_2$, что

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_2}} |x_{N_{k_3}}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_2.$$

Продолжая действовать аналогичным образом, несложно построить такую последовательность положительных чисел

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l, \dots, \lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_l = 0$$

и такую последовательность натуральных чисел

$$k_1, k_2, \dots, k_l, \dots, \lim_{l \rightarrow \infty} k_l = \infty,$$

что

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_l}} |x_{N_{k_l}}(t) - \varphi(t)| \geq \varepsilon; \quad (3.29)$$

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_l}} |x_{N_{k_{l+1}}}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon_l. \quad (3.30)$$

Заметим теперь, что объединение

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} [0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0, t_{k_1}] \subset [0, t_{k_2}] \subset \dots \subset [0, t_{k_l}] \subset \dots$$

исчерпывает всю полуось $[0, \infty)$, а на каждом из этих отрезков $[0, t_{k_l}]$ выполнены неравенства (3.29) и (3.30). Поэтому в силу неравенства (3.27) $x^* \notin \overline{M}$. Последнее, однако, противоречит условиям (3.26) и (3.28). Отсюда следует, что

$$\varphi_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\Delta(N_k)T) \quad (3.31)$$

и, значит, в силу соотношений (3.24) и (3.31) для всех значений $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t + \Delta(N_k)T), \quad (3.32)$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $[0, \infty)$. Но согласно компактности множества \overline{M} отсюда непосредственно следует, что в равенстве (3.32) равномерная сходимость имеет место на всей полуоси $[0, \infty)$.

Заметим теперь, что выбор числа T и последовательности (3.16) выше, по существу, не играл никакой роли. Поэтому в силу соотношений (3.24) и (3.32) теорема 3.1 доказана.

Для удобства дальнейших построений введем следующее

Определение 3.1. Будем называть модель А.П. Афанасьева, рассматриваемую на бесконечном горизонте оптимизации (3.11) – (3.14) *квазипериодической моделью*, если можно подобрать такую последовательность натуральных чисел, что решение этой модели $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = \varphi(t). \quad (3.33)$$

Тогда теорему 3.1 можно записать в виде:

Пусть E – некоторое непустое замкнутое ограниченное подмножество пространства \mathbb{R}^n и пусть для всех точек $x_0 \in E$ выполнены условия (а) – (с), причем

$$\text{rank}(R(x_0)) = \dim(P(x_0)) = n.$$

Тогда, если x_0 – некоторая точка множества E и решение $x(t)$ локальной модели А.П. Афанасьева (2.6) – (2.9), можно продолжить на бесконечный горизонт (3.11) – (3.14), причем, если оно при этом целиком содержится в множестве E , то оно является абсолютно непрерывным решением квазипериодической модели (3.11) – (3.14), (3.33).

Вернемся к проблеме составления оптимального плана валового выпуска экономики. Естественным образом, перенося результаты, полученные в этом параграфе, на динамическую модель Леонтьева с конечным горизонтом, получим важное для дальнейших построений утверждение: рассмотрим модель

$$J(\varphi) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}(t) dt \rightarrow \max;$$

$$U(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \leq (E - V(\varphi(t)))\varphi(t), \quad \dot{\varphi}(t) \geq B(\varphi(t));$$

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad t \geq t_0,$$

где $x(t)$ – n -мерная вектор-функция; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p'$; t_0 – начало горизонта; T – конец горизонта оптимизации.

Она является моделью с бесконечным горизонтом (T можно взять за бесконечность), тогда согласно теореме 3.1, если какое-то решение этой модели содержится в некотором непустом замкнутом ограниченном множестве E подмножестве пространства \mathbb{R}^n , то для каждого положительного числа T существует абсолютно непрерывное решение модели

$$J(\varphi) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}(t) dt \rightarrow \max;$$

$$U(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \leq (E - V(\varphi(t)))\varphi(t), \quad \dot{\varphi}(t) \geq B(\varphi(t));$$

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad t \geq t_0;$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(t + (N_k l + 1 - N_k l)T) = \varphi(t),$$

равномерно на всей полуоси $t \geq t_0$.

4 Условия продолжения модели на бесконечный горизонт оптимизации

Рассмотрим сначала локальную модель А.П. Афанасьева

$$J(\varphi) = \int_0^T \langle G(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt \rightarrow \min; \quad (4.1)$$

$$A(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = B(\varphi(t)); \quad (4.2)$$

$$C(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \geq D(\varphi(t)), \quad (4.3)$$

где x – вектор-функция, $x \in \Sigma$, Σ , – некоторое открытое подмножество пространства \mathbb{R}^n , A и C – матрицы размерностей $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, а G , B и D – вектора размерностей n , p и q соответственно.

Продолжим модель А.П. Афанасьева на бесконечный горизонт, в этом случае целевая функция примет вид

$$J(\varphi) = \int_{t_0}^{\infty} \langle G(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (4.4)$$

и получим условия нелокального продолжения модели, а затем применим полученные результаты к динамической модели Леонтьева

$$\sum_{i=1}^n x_i(T) \rightarrow \max; \quad (4.5)$$

$$U(x) \dot{x}(t) \leq (E - V(x))x(t), \quad \dot{x}(t) \geq 0; \quad (4.6)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (4.7)$$

где $x(t)$ – вектор-функция, $x \in \Sigma$, Σ , – некоторое открытое подмножество пространства \mathbb{R}^n ; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p'$; t_0 – начало горизонта; T – конец горизонта оптимизации.

Пусть $W^1(x), \dots, W^m(x)$ – числовые функции, определенные и непрерывные вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial W^i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

в пространстве \mathbb{R}^n и пусть Σ , – область, задаваемая неравенствами

$$W^i(x) < 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Для всех $x_0 \in \Sigma$, примем везде в дальнейшем выполнение условий (а) – (с) и, более того, предположим, что

(d) Для всех $x_0 \in \Sigma$,

$$\text{rank}(R(x_0)) = n.$$

Для простоты обозначений положим

$$f(x) = R^{-1}(x)P(x)$$

и будем искать решение модели (4.4), (4.2) – (4.3) из решения локальной модели (4.1) – (4.3) посредством продолжения решения уравнения

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.8)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.9)$$

на всю полуось $t \geq t_0$.

Теорема 4.1. Пусть на границе $\partial\Sigma$ области Σ , выполнены условия

$$\langle \nabla W^i(x), f(x) \rangle < 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.10)$$

и пусть область Σ , ограничена. Тогда, если x_0 – некоторая точка области Σ , то решение $x(t)$ локальной модели А.П. Афанасьева (4.1) – (4.3), удовлетворяющее системе (4.8) с начальными значениями (t_0, x_0) , может быть продолжено на всю полуось $t \geq t_0$ и является при этом продолжением решением модели (4.4), (4.2) – (4.3), целиком содержащимся в области Σ . Более полно, для каждого положительного числа T из каждой последовательности

$$N_1, N_2, \dots, N_k, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \infty \quad (4.11)$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_l}, \dots, \lim_{l \rightarrow \infty} N_{k_l} = \infty,$$

что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x(t + (N_{k_l} - 1)T) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $t \geq t_0$, где $\varphi(t)$ – абсолютно непрерывное решение модели

$$J(\varphi) = \int_{t_0}^{\infty} \langle G(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt \rightarrow \min;$$

$$A(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = B(\varphi(t));$$

$$C(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \geq D(\varphi(t));$$

$$\varphi(t_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} x(t_0 + (N_{k_l} - 1)T),$$

содержащееся в Σ , и удовлетворяющее условию

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = \varphi(t)$$

равномерно на всей полуоси $t \geq t_0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что найдется такой промежуток $[t_0, t_1]$, что оптимальное управление будет определяться из решения задачи линейного программирования и, следовательно, системы (4.8) с начальными значениями (t_0, x_0) . Более того, очевидно, что данное решение может быть продолжено до выхода на границу $\partial\Sigma$ области Σ . Это и определяет некоторый режим.

Поскольку точка x_0 принадлежит к открытому множеству Σ , то имеют место неравенства

$$W^i(x_0) < 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Вдоль решения $x(t)$ положим

$$w^i(t) = W^i(x(t)), \quad i = 1, \dots, m.$$

Обозначим через Δ – некоторое покрытие границы $\partial\Sigma$ области Σ , областями, а через Λ пересечение $\Delta \cap \Sigma$, множеств Δ и Σ . Тогда, поскольку на границе $\partial\Sigma$ области Σ , имеют место равенства

$$W^i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

то покрытие Λ , очевидно, может быть подобрано так, что для всех значений $x \in \Lambda$ выполняются условия (4.10). Поэтому, если $x_0 \in \Lambda$, то для всех значений $t_0 \leq t < t_1$, для которых определено решение $x(t)$, справедливы также равенства

$$w^i(t) = w^i(t_0) + \int_{t_0}^t \langle \nabla W^i(x(\tau)), f(x(\tau)) \rangle d\tau, \quad i = 1, \dots, m,$$

т.е. в силу неравенства (4.10)

$$w^i(t) \leq w^i(t_0) < 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

причем при $t_0 < t < t_1$

$$w^i(t) < w^i(t_0), \quad i = 1, \dots, m.$$

Следовательно, решение $x(t)$ определено для всех значений $t \geq t_0$ и содержится при этих значениях t в некотором компактном множестве $E \subset \Sigma$.

Если точка x_0 не принадлежит к множеству Λ , то решение $x(t)$ не может покинуть область Σ , минуя Λ . Поэтому и в последнем случае $x(t)$ также определено для всех значений $t \geq t_0$ и содержится при этих значениях t в Σ . Но множество Σ , ограничено и, значит, решение $x(t)$ также ограничено при $t \geq t_0$. Другими словами, решение $x(t)$ локальной модели (4.1) – (4.3) может быть продолжено на всю полуось $t \geq t_0$ и является при этом продолжением решением модели (4.4), (4.2) – (4.3), содержащимся в множестве E .

Таким образом, в силу теоремы 3.1 теорема 4.1 доказана.

Замечание. Как и в случае теоремы 3.1 в условиях теоремы 4.1 выбор последовательности (4.11) не зависит от выбора числа T и обратно. При этом сами условия нелокальной продолжимости (4.10) весьма близки к соответствующим условиям теоремы 3.2 книги [21]. Отметим также, что теоремы 3.1 и 7.1 являются обобщением основных результатов работ [5, 6, 13], на случай рассматриваемой задачи.

Применяя полученные результаты к модели оптимизации валового выпуска экономики, можно заключить, что данный рынок, описываемый моделью (4.5) – (4.7), может функционировать бесконечно долго, если выполнены следующие условия:

Пусть область значений Σ , вектор-функции, задается системой неравенств

$$W^i(x_0) < 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $W^1(x), \dots, W^m(x)$ – числовые функции, определенные и непрерывные вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial W^i}{\partial x^j}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

в пространстве \mathbb{R}^n .

Предполагаем, что на границе $\partial\Sigma$ области Σ , выполнены условия (a) – (d). Тогда, если к тому же на границе области Σ , выполняются неравенства

$$\langle \nabla W^i(x), f(x) \rangle < 0, i = 1, \dots, m. \quad (4.12)$$

Из того, что x_0 – некоторая точка области Σ , следует, что решение $x(t)$ локальной модели (4.1) – (4.3), удовлетворяющее системе (4.8) с начальными значениями (t_0, x_0) , может быть продолжено на всю полуось $t \geq t_0$ и является при этом продолжением решением модели (4.4), (4.2) – (4.3), целиком содержащимся в области Σ .

*РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ
ВАЛОВОГО ВЫПУСКА НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ*

Вторая глава состоит из трех параграфов, п. 5 является обзорным для вопроса равновесия в экономике. В нем дается определение, что такое равновесие в экономической системе. Рассматриваются этапы развития направления, занимающегося проблемой равновесия в экономике. Вводится понятие устойчивого равновесия.

Шестой параграф возвращает нас к модели А.П. Афанасьева. Здесь получены условия существования и единственности равновесия в этой модели. Затем, вспомнив, что динамическая модель Леонтьева является частным случаем модели А.П. Афанасьева, приложим полученные результаты нашей модели. Тогда автоматически появляются условия существования и единственности равновесия в динамической модели В. Леонтьева. Причем, равновесие в оптимизационной динамической модели В. Леонтьева на бесконечном горизонте рассматриваем как положение равновесия в автономной системе дифференциальных уравнений.

Очевидно желание получить на просто равновесное решение модели, а именно устойчивое равновесие. Эта задача решается в п. 6. В нем содержится новый взгляд на устойчивое равновесие в экономике, которое с математической точки зрения рассматривается как структурно асимптотически устойчивое положение равновесия автономной системы дифференциальных уравнений. В предложениях 2 и 3 содержатся условия, при которых модель А.П. Афанасьева, а, следовательно, и исследуемая нами динамическая модель Леонтьева будет иметь структурно и асимптотически устойчивое равновесие. Для этого вводятся определения множеств Красносельского 1-го и 2-го рода, предравновесного и равновесного множеств.

5 Равновесие в экономике

Термин «равновесие» используется во многих областях науки (в механике, термодинамике, биологии т.п.) для обозначения такого состояния системы, которое при отсутствии внешних возмущений может сохраняться сколь угодно долго. Состояние экономического равновесия характеризуется тем, что ни один из экономических агентов не заинтересован в его изменении с помощью средств, которыми он располагает.

Теория равновесия считается одной из фундаментальных в экономической науке. Ее разработкой занимались известные экономисты Вальрас, Маршалл, Дж. Робинсон и Э. Чемберлин, Дж. Кларк и др.

В самом общем виде экономическое равновесие – это соответствие между ресурсами и потребностями. Как известно, потребности всегда опережают ресурсы. Поэтому обычно равновесие достигается либо посредством ограничения потребностей (на рынке потребности выступают в виде платежеспособного спроса), либо посредством увеличения и оптимизации ресурсов.

Достижению равновесия способствует ценовой механизм. Модели равновесия описывают результат функционирования идеального рынка и служат основой системного изучения разнообразных явлений, связанных с процессами потребления, производства, обмена, ценообразования, налогообложения и др.

Если рассматривать равновесие с точки зрения временного периода, то можно выделить:

- мгновенный период (краткосрочный, рыночный), в котором все факторы производства можно рассматривать как постоянные;
- краткосрочный период, если одна группа факторов рассматривается как постоянная, а другая как переменная;
- долгосрочный период, в котором все факторы производства рассматриваются как переменные.

В мгновенном периоде производитель вообще лишен возможности приспособить объем предложения к объему спроса, поскольку количество производственных ресурсов и интенсивность их использования заданы.

В течение короткого периода неизменными считаются производственные мощности предприятия, но их использование, а значит, и объем продукции могут изменяться за счет изменения объема применения переменных факторов (числа отработанных человеко-дней или человеко-часов, расхода сырья и материалов). Эти изменения, однако, не могут выходить за пределы технической производственной мощности.

В длительном периоде производитель может не только варьировать интенсивность использования производственных мощностей, но и изменять их размеры, а следовательно, и масштабы производства.

Экономические процессы протекают во времени. Описывающие их модели делятся на два класса: динамические и статические. Динамическими обычно называют модели, непосредственно учитывающие фактор времени. В этих моделях все переменные являются функциями времени, которое в силу этого само становится важной переменной.

Рассмотрим понятия «равновесие», его «единственность» и «устойчивость» на примере статического равновесия спроса и предложения.

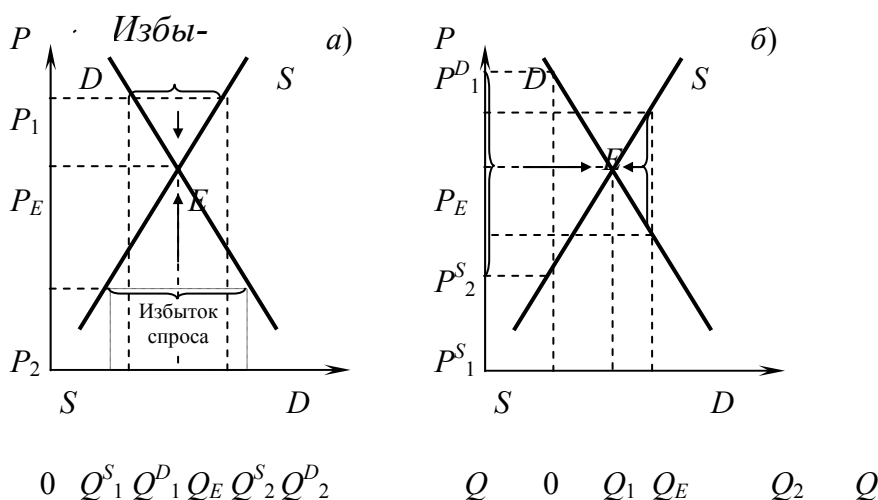


Рис. 5.1 Равновесие:

a – по Вальрасу; *б* – по Маршаллу

Существует два подхода к равновесию: равновесие по Вальрасу и по Маршаллу (рис. 5.1). Равновесие по Вальрасу применимо к краткосрочному периоду (избыток предложения или спроса влияет на изменение цен), а по Маршаллу – к долгосрочному (несбалансированность цен спроса и предложения влияет на предложение). Различию в этих подходах мы обязаны «обратным» расположением осей координат на графиках спроса и предложения. Маршалл оперировал, прежде всего, понятиями «цена спроса» и «цена предложения», поэтому функции спроса и предложения у него имеют вид

$$P^D = P^D(Q);$$

$$P^S = P^S(Q),$$

а условием равновесия являлось равенство

$$P^D(Q) = P^S(Q).$$

Вальрас же сосредоточил свое внимание на объемах спроса и предложения при равных ценах. Поэтому функции спроса и предложения у него имеют вид

$$Q^D = Q^D(P);$$

$$Q^S = Q^S(P),$$

а условием равновесия являлось равенство

$$Q^D(P) = Q^S(P).$$

Возникают вопросы: имеет ли равновесная цена единственное значение? Стабильно ли достигнутое однажды равновесие?

Рассматривается состояние равновесия в точке пересечения линий спроса и предложения, координаты которого определяют положительное значение равновесной цены ($P_E > 0$), и положительное значение равновесного объема ($Q_E > 0$). Однако линии спроса и предложения могут пересекаться и при нулевых их значениях. Две подобные ситуации представлены на рис. 5.2.

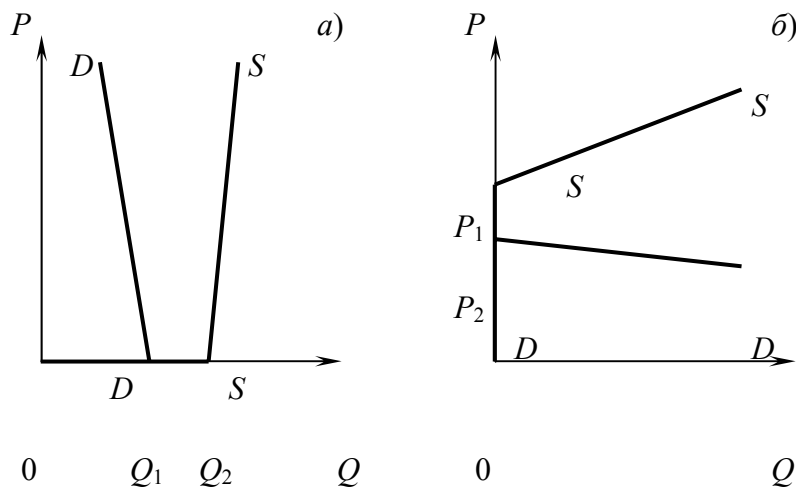


Рис. 5.2 Краевое равновесие:

a – при нулевой цене («свободные блага»);
б – при нулевом выпуске (не производимые блага)

В ситуации, представленной на рис. 5.2, *a*, объем спроса при любой неотрицательной цене ($P \geq 0$) ниже объема предложения. Это значит, что рассматриваемый товар является «свободным благом», т.е. может распространяться бесплатно, по потребностям, скажем, в форме прямого присвоения. Примерами «свободных благ» могут служить атмосферный воздух, вода в водоеме. Противоположная ситуация представлена на рис. 5.2, *б*. Здесь при любом объеме рынка цена спроса ниже цены предложения. Такой товар не может появиться на рынке, ни при каком уровне цены. Такая ситуация нередко возникает при освоении новых видов продукции, технология производства которых еще не отработана, серийность низка, а потребитель проявляет определенный консерватизм, такой товар можно продвинуть на рынок, если ввести субсидии (дотации) для продавца или покупателя.

Также возможна ситуация, когда кривые спроса и предложения пересекаются более чем в двух точках. Например, кривая предложения труда имеет вид дуги. Если при этом линия спроса имеет нормальный, отрицательный наклон, то линия предложения может дважды пересекаться линией спроса, в результате чего появляются две равновесные цены и два равновесных объема рынка (рис. 5.3).

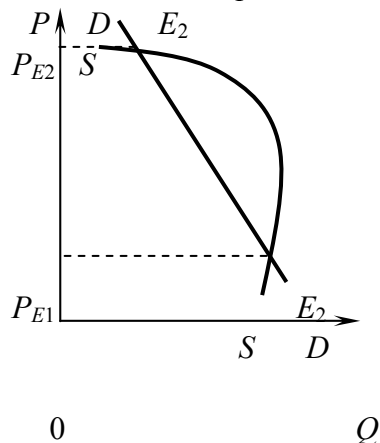


Рис. 5.3 Неединственность равновесия

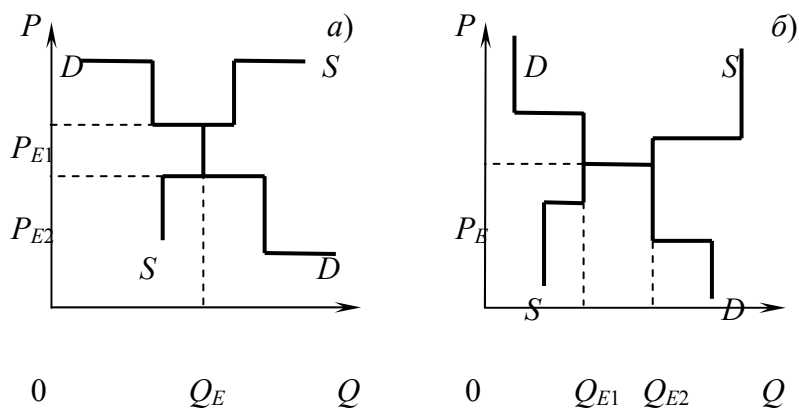


Рис. 5.4 Неопределенность равновесия

Два других случая неединственности равновесия представлены на рис. 5.4. Они характеризуются наличием у линий спроса и предложения общего сегмента (вертикального на рис. 5.4, а и горизонтального на рис. 5.4, б). В первом случае рынок оказывается сбалансированным в объеме Q_E при любой цене, лежащей в интервале между P_{E1} и P_{E2} . Во втором – при строго определенной цене P_E равновесия равновесный объем рынка может колебаться в интервале от Q_{E1} до Q_{E2} .

Устойчивостью равновесия называется способность экономики, выведенной из положения равновесия, вновь возвращаться к равновесию под влиянием лишь своих внутренних сил. Если равновесие обладает свойством устойчивости, то дополнительное регулирование представляется не обязательным, экономика сама поддерживает свою сбалансированность. В том случае, когда равновесие не обладает свойством устойчивости, его регулирование становится действительно необходимым.

Равновесие через посредство ценового механизма может устанавливаться как для отдельных товаров, так и в масштабе народного хозяйства на основе согласования агрегированного спроса и агрегированного предложения, иными словами, как на микро-, так и на макроуровне. Принято различать общее и частичное равновесие. Частичное равновесие – это количественное соответствие (равенство) двух взаимосвязанных параметров или сторон экономики. Например, частичное равновесие выступает в виде равновесия производства и потребления, покупательной способности и товарной массы, доходов и расходов госбюджета, спроса и предложения и т.п.

В отличие от частичного, общее равновесие означает соответствие (согласованное развитие) всех сфер экономической системы. В основе общего экономического равновесия лежит, прежде всего, соответствие между спросом и предложением товаров и услуг, причем соответствие между спросом и предложением не только потребительских благ, но и средств производства, рабочей силы и т.д.

Равновесие спроса и предложения формируются не сами по себе, а в процессе их взаимодействия. В относительно короткие отрезки времени (при неизменных размерах производства) «давит» спрос. В продолжительные периоды спрос выравнивается и определяющую роль играет предложение. В условиях свободной конкуренции и некоторых других предпосылок рынок в силу действия внутренних закономерностей стремится к достижению равновесия.

В результате колебания цен происходит выравнивание спроса и предложения товаров, в точке их пересечения устанавливается равновесная цена. Равновесие через посредство ценового механизма может устанавливаться как для отдельных товаров, так и в масштабе народного хозяйства на основе согласования агрегированного спроса и агрегированного предложения, иными словами, как на микро-, так и на макроуровне. Однако условия и методы обеспечения равновесного соответствия на микро- и макроуровнях неодинаковы. Процесс формирования экономического равновесия на макроуровне более сложен и противоречив.

Условием устойчивого и стабильного развития экономической системы является равновесие не только на рынке товаров, но и всех остальных рынках.

Равновесие системы не сводится только к рыночному равновесию. Во-первых, рыночные факторы не следует отделять от производственных. Диспропорции, нарушения в сфере производства неизбежно ведут к неравновесности на рынках. Во-вторых, экономическую систему только в теории можно рассматривать изолированно. В действительности наряду с рыночными воздействиями экономика испытывает влияние других, нерыночных факторов: политических, социальных, демографических. Существенное влияние оказывают методы государственного регулирования, которые не являются чисто рыночными.

Общее равновесие может иметь место и при структурных диспропорциях, когда налицо межотраслевая несбалансированность, перекосы цен, неэффективное использование ресурсов. Но это будет специфическое, не соответствующее рыночному «идеалу» равновесие. В то же время прогрессивная структура не ведет автоматически к устойчивому равновесию, потому что условия, о которых писал Вальрас, полностью не воплощаются на практике. Поэтому на основе существующих пропорций и частичных равновесий нельзя судить о равновесности народного хозяйства в целом.

Тем самым уменьшается неопределенность, характерная для задач векторной оптимизации. К сожалению, полностью устранить ее на этом пути не удастся, поскольку в некоторых ситуациях имеется много различных и даже неэквивалентных состояний равновесия. Множественность векторов равновесных цен нередко приводит к неустойчивости процессов обмена и регулирования в такой системе. Поэтому выяснение условий, обеспечивающих единственность ценового равновесия, является важной задачей.

Проблема экономического равновесия разрабатывается с начала XIX в. Условия частичного равновесия обстоятельно анализировал А. Маршалл. Проблему рыночного равновесия в условиях несовершенной конкуренции анализировал Дж. Робинсон и Э. Чемберлин. Они отмечали, что в условиях монополии цена устанавливается выше средних и предельных издержек. Причины нарушения равновесия в экономике и условия равновесия в развивающейся системе рассматривал Дж. Кларк.

Теоретиком общего экономического равновесия считается Л. Вальрас. Он пришел к выводу, что общее равновесие предполагает наличие ряда условий, в том числе свободную конкуренцию, равенство всех покупателей на рынке, неизменность экономических ситуаций, замкнутость экономических систем. Л. Вальрас построил модели общего равновесия, широко используя математический аппарат. Условия общего равновесия, о которых говорится в «чистой экономической теории» Вальраса, существуют в идеале как потенциальная возможность. Теоретическая конструкция Вальраса помогает выявить систему функциональных зависимостей, представить механизм формирования равновесных цен, уяснить, в силу чего рыночная экономика стремится к равновесному состоянию.

Доказательство существования равновесия для специального случая впервые было дано А. Вальдом только в середине прошлого столетия. Прошло почти 20 лет, прежде чем в работах К. Эрроу и Ж. Дебре, Л. Маккензи и Д. Гейла были предложены и строго исследованы модели равновесия, включающие явное описание агентов, формирующих спрос и предложение, и определившие путь развития математической экономики на много лет вперед.

Создатели теории равновесия стремились описать механизм «совершенной конкуренции», рынок, на котором беспрепятственно действует большое число мелких производителей и потребителей, так что ни один из них не способен повлиять на рыночные цены. Однако еще в 1936 г. О. Ланге указал на возможность другой интерпретации моделей равновесия, которой в основном придерживались советские исследователи. Эти модели рассматриваются как схемы планирования на основе согласования децентрализованных решений. При этом число участников, относительные объемы их затрат и выпуска не имеют принципиального значения, ибо предполагается, что в системе действуют определенные правила изменения цен и нормы поведения, обеспечивающие отыскание равновесия.

Для того, что бы охарактеризовать ценовое равновесие с нормативной точки зрения, пользуются аксиоматическим подходом, который широко применяется в теории игр и при изучении различных принципов оптимальности выбора. Образцом здесь является работа Неша. Характеризация равновесия возможно на основе теорем о ядре экономики, однако в этом случае пришлось бы предполагать, что число

участников бесконечно. Кроме того, в модели с производством концепция ядра выглядит искусственной.

Основным методом исследования, используемым экономической теорией является исследование объектов познания не непосредственно, а косвенно, посредством анализа некоторых вспомогательных объектов, которые и называют моделями. Экономические модели должны в принципе отвечать ряду требований – содержательность и реалистичность принятых предпосылок и допущений, предсказательная способность, возможность информационного допущения и верификации, общность и ряд других. Основными видами моделей, используемых в экономической науке, являются оптимизационные и равновесные модели. При исследовании поведения отдельных экономических агентов применяются оптимизационные модели. Второй тип моделей – модели рыночного равновесия – используются при исследовании взаимоотношений между экономическими агентами.

Простейшие модели, используемые в экономике (например, модель Соллоу), дают представление о равновесии как о точке покоя (см., [19]). Данный результат, очевидно, следует рассматривать только лишь как первое приближение к описанию реальности.

В последнее время широкое распространение получили методы синергетической экономики (см., [20]). Модели, используемые здесь, являются гораздо более реалистичными, так как равновесие в данном случае естественным образом оказывается хаосом.

Если рассматривать экономическую систему как динамическую (в математическом понимании этого термина), то равновесие следует рассматривать как минимальное множество. Изучение минимальных множеств, восходящее к работам Дж. Биркгофа, тесно связано с использованием теории меры при изучении динамических систем. В случае конечной меры динамические системы начали изучаться еще в начале прошлого века А. Пуанкаре и К. Каратеодори. Как показали исследования, хаос здесь является не более чем проявлением свойства перемешивания в динамических системах.

Одним из основных открытий XX в. явилось открытие структурной устойчивости геодезических потоков на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, осуществленное Д.В. Аносовым (см. [1]). У-системы Д.В. Аносова при определенных условиях идеальным образом описывают равновесие в больших экономических системах и говорят об устойчивости равновесия как экономической категории.

С математической точки зрения, минимальное множество в полных метрических пространствах есть замыкание рекуррентной траектории и обратно. Как показано в работах [5, 13], в \square^n рекуррентными траекториями являются траектории, описываемые квазипериодическими процессами, и только они.

Теория экономического (и рыночного) равновесия имеет важное практическое значение. Положение и выводы этой теории положены в основу экономической политики; они используются для выработки наиболее эффективных методов хозяйственного регулирования, обоснованных прогнозов. Если в хозяйстве нет равновесия, то возникают различные негативные явления, отражающиеся на темпах экономического роста, росте потребления, снижается эффективность общественного производства.

6 Существование равновесия в модели оптимизации валового выпуска на бесконечном горизонте

Рассмотрим динамическую модель Леонтьева

$$\int_{t_0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) dt \rightarrow \max; \quad (6.1)$$

$$R(x) \dot{x}(t) \leq (E - P(x))x(t), \quad \dot{x}(t) \geq 0; \quad (6.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (6.3)$$

где $x(t)$ – вектор-функция, $x \in \Sigma$, Σ – некоторое открытое подмножество пространства \square^n ; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p$; t_0 – начало горизонта оптимизации.

Задачей этого параграфа является нахождение равновесия в этой модели как положение равновесия. Для этого вновь рассмотрим модель А.П. Афанасьева на бесконечном горизонте

$$J(\varphi) = \int_{t_0}^{\infty} \langle G(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \rangle dt \rightarrow \min; \quad (6.4)$$

$$A(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = B(\varphi(t)); \quad (6.5)$$

$$C(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \geq D(\varphi(t)); \quad (6.6)$$

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad (6.7)$$

где $\varphi \in A$ и C – матрицы размерностей $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, а G , B и D – вектора размерностей n , p и q соответственно.

Определение 6.1. Модель А.П. Афанасьева (6.4) – (6.7) называется *тривиальной квазипериодической моделью*, если ее решение $\varphi(t)$ является положением равновесия, т.е.

$$\dot{\varphi} \equiv 0. \quad (6.8)$$

Существование решений квазипериодической модели (6.4) – (6.7), и общность положения решений модели А.П. Афанасьева (6.4) – (6.7) в общем случае устанавливает следующее

Предложение 6.1. Пусть $\xi(t)$ – некоторое решение модели (6.4) – (6.7), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и ограниченное при этих значениях t . Тогда для каждого положительного значения T ω -предельное множество Ω решения $\xi(t)$ содержит решение $\varphi(t)$ квазипериодической модели (6.4) – (6.7), (3.33).

Более полно, каковы бы ни были положительное число T и последовательность

$$N_1, N_2, \dots, N_k, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \infty \quad (6.9)$$

натуральных чисел, найдется такая ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_l}, \dots, \lim_{l \rightarrow \infty} N_{k_l} = \infty,$$

и такое решение $\varphi(t)$, целиком содержащееся в множестве Ω , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t + (N_{k_l} - 1)T) = \varphi(t) \quad (6.10)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b]$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = \varphi(t)$$

равномерно на всей полуоси $[t_0, \infty)$.

Доказательство. Пусть g^t – фазовый поток, для которого поле f является полем фазовой скорости, и пусть $x_1(t)$ – решение модели (6.4) – (6.7), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и ограниченное при этих значениях t , то есть при всех значениях $t \geq t_0$ содержится в некотором компактном множестве $E \subset \square^n$

Для некоторого положительного числа T при всех значениях $t \geq 0$ положим

$$x_N(t) = x_1(t + (N - 1)T), \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (6.11)$$

Тогда, как несложно заметить, для этих значений t и N имеет место равенство

$$x_N(t) = g^t(g^T \dots g^T)x_0,$$

которое может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$x_N(t) = g^t x_N(0). \quad (6.12)$$

Пусть теперь (6.9) – произвольная последовательность натуральных чисел, в соответствии с которой из последовательности (6.11) выберем подпоследовательность

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_k}, \dots \quad (6.13)$$

Поскольку множество E компактно, множество (6.13) равномерно ограничено на отрезке $[0, T]$. Кроме того, поскольку оператор g^t непрерывен по t , из равенства (6.12) следует, что множество (6.11) равномерно непрерывно на $[0, T]$. Поэтому из этого множества можно выбрать равномерно сходящуюся на отрезке $[0, T]$ последовательность

$$x_{N_{k_1}}, x_{N_{k_2}}, \dots, x_{N_{k_l}}, \dots, \quad (6.14)$$

пределом которой является функция φ , определенная при всех значениях $0 \leq t \leq T$, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_{k_l}}(t) = \varphi(t)$$

равномерно на $[0, T]$. При этом функция φ по построению содержится в множестве E .

Поскольку при всех значениях $t \in \square$ оператор g^t непрерывно отображает множество Σ , в себя вдоль решения $x_1(t)$, заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_N(0) = g^t \varphi_0$$

равномерно на $[0, T]$, где φ_0 – некоторая точка множества E , такая что

$$\varphi(0) = \varphi_0. \quad (6.15)$$

Тогда, переходя в (6.12) к пределу при $N \rightarrow \infty$ вдоль множества (6.14), получим равенство

$$\varphi(t) = g^t \varphi_0,$$

справедливое для всех значений $0 \leq t \leq T$ и означающее, что $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемое решение модели (6.4) – (6.7).

Для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность (6.14) совпадает с последовательностью (6.13). Обозначим через

$$\Delta(N_1), \Delta(N_2), \dots, \Delta(N_k), \dots \quad (6.16)$$

множество, элементы которого при всех значениях N_k из множества (6.9) определим по формуле

$$\Delta(N_k) = N_k + 1 - N_k.$$

При этом будем считать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(N_k) = \infty,$$

последнего всегда можно добиться, удалив из множества (6.13) соответствующие элементы при сохранении его счетности.

Заметим теперь, что в силу равенства (6.12) множество (6.13) равномерно непрерывно и равномерно ограничено на каждой из полуосей $[t_0, \infty)$, где t_0 – любое действительное число. Поэтому без потери общности можно считать, что имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}(t) = \varphi(t), \quad (6.17)$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $[0, \infty)$. Если при этом решение $\xi(t)$ ограничено на всей оси \square , то сходимость в (6.16) равномерна на каждом из отрезков $[a, b] \subset \square$. В любом случае функция $\varphi(t)$, построенная по формуле (6.16), является решением модели (6.4) – (6.7), определенным для всех значений $t \in \square$ и ограниченным при $t \geq 0$.

Поскольку для всех значений N_k

$$x_{N_{k+1}}(0) = x_{N_k}(\Delta(N_k)T), \quad (6.18)$$

то имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}(\Delta(N_k)T). \quad (6.19)$$

Более того, согласно способу построения функции φ без какой-либо потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\Delta(N_k)T) = \varphi_0^*,$$

где φ_0^* – некоторая точка множества E .

Если

$$\varphi_0 \neq \varphi_0^*,$$

то в силу условий (6.18) и (6.19) найдется такое положительное число ε и такое натуральное число k_0 , что

$$|x_{N_k}(\Delta(N_k)T) - \varphi(\Delta(N_k)T)| > \varepsilon,$$

при $k > k_0$. Поэтому для всех значений $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T) - \varphi(t + \Delta(N_k)T)| > \varepsilon. \quad (6.20)$$

Легко видеть, что множество M функций

$$\varphi(t), \varphi(t+T), \dots, \varphi(t+NT), \dots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$, по построению равномерно непрерывно и равномерно ограничено на $[0, T]$. Поэтому замыкание \overline{M} множества M – компактное в топологии равномерной сходимости на $[0, T]$ множество.

Для всех значений $0 \leq t \leq T$ положим

$$x^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T),$$

причем по построению можем принять существование такого предела.

Далее заметим, что объединение

$$\bigcup_{k \geq 1} [0, t_k T]$$

отрезков $[0, t_k T]$ исчерпывает всю полуось $[0, \infty)$, а на каждом из этих отрезков $[0, t_k T]$ имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_l} = \varphi(t),$$

где $l > k$. Поэтому в силу неравенства (6.20) $x^* \notin \overline{M}$. Последнее, однако, противоречит условию (6.19). Следовательно,

$$\varphi_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\Delta(N_k)). \quad (6.21)$$

Легко видеть, что в силу соотношений (6.17) и (6.21) для всех значений справедливо равенство

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t + \Delta(N_k)T). \quad (6.22)$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b] \in \square$. Но в силу компактности множества \overline{M} несложно заметить, что в равенстве (6.22) равномерная сходимость имеет место на всей полуоси $[0, \infty)$. При этом согласно (6.20) видим, что \overline{M} – инвариантное множество, т.е. $g^k \overline{M} \subset \overline{M}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ (см., [3, с. 7–8]). Следовательно, сходимость в равенстве (6.22) равномерна на всей оси \square .

Сказанное, как несложно заметить, означает, что $\varphi(t)$ – решение квазипериодической модели (6.4) – (6.7), (3.33). Поэтому в силу соотношений (6.17) и (6.22) предложение 6.1 доказано.

Пусть на множестве Σ , определена некоторая полудифференцируемая функция

Φ и пусть M – ее полудифференциал. Предположим, что на множестве Σ , имеет место неравенство

$$M[x - y, f(x) - f(y)] \leq L[\Phi(x - y)],$$

где L – непрерывная функция, такая, что каждое решение $u(t)$ уравнения

$$\dot{u} = L(t, u) \quad (6.23)$$

с начальным условием

$$u(t_0) = u_0$$

определено для всех значений $|t| < \infty$, причем при $u_0 > 0$ это решение удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(t) = +\infty, \quad (6.24)$$

а при $u_0 < 0$ – условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(t) = -\infty. \quad (6.25)$$

И, наконец, если для любых двух различных точек x и y множества Σ , выполнено неравенство

$$M[x - y, f(x) - f(y)] < 0.$$

Тогда будем говорить, что Σ – множество Красносельского 1-го рода.

Простейшим примером множества Красносельского 1-го рода может служить множество, во всех точках которого выполнено условие

$$\langle K(x - y), f(x) - f(y) \rangle \leq -k^2|x - y|^2,$$

где K – некоторая симметрическая невырожденная матрица и k – некоторое действительное число.

При этом использование предложения 6.1 и понятия множества Красносельского 1-го рода приводит к следующему предложению, позволяющей установить существование решений тривиальной квазипериодической модели (6.4) – (6.7), (6.8) и довольно полно описать структуру ограниченных решений модели (6.4) – (6.7).

Предложение 6.2. Пусть $\xi(t)$ – некоторое решение модели (6.4) – (6.7), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и содержащееся при этих значениях t в некотором компактном подмножестве E множества Красносельского 1-го рода Σ . Тогда ω -предельное множество, Ω решения $\xi(t)$ состоит из одной точки Λ – решения тривиальной квазипериодической модели (6.4) – (6.7), (6.8).

Доказательство. Пусть $\xi(t)$ – некоторое решение модели (6.4) – (6.7) с начальным условием

$$\xi(0) = \xi_0,$$

определенное для всех значений $t \geq 0$ и содержащееся при этих значениях t в множестве E . Тогда согласно предложению 6.1 квазипериодическая модель (6.4) – (6.7), (3.33) имеет решение $\varphi_T(t)$, т.е. найдется такая последовательность натуральных чисел (6.9), что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi(t + (N_k - 1)T) = \varphi_T(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b]$ полуоси $t \geq 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_T(t + (N_k + 1 - N_k)T) = \varphi(t)$$

равномерно на всей полуоси $t \geq 0$ (см., например, [5]).

Заметим теперь, что решение $\varphi_T(t)$ определено для всех значений $|t| < \infty$ и ограничено при этих значениях t .

В самом деле, если бы решение $\varphi_T(t)$ было не определено для всех значений

$|t| < \infty$, то при некотором значении $t' < 0$ точка $\varphi_T(t')$ оказалась бы на границе $\partial\Sigma$ множества Σ . При этом, так как $\varphi_T(t)$ является решением квазипериодической модели, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_T(t' + (N_k + 1 - N_k)T) = \varphi_T(t').$$

Последнее, однако, невозможно, поскольку при всех значениях $t \geq 0$ решение $\varphi_T(t)$ содержится в компактном подмножестве E открытого множества Σ , а $\varphi_T(t') \in \partial\Sigma$.

Для всех значений $|t| < \infty$ положим

$$\varphi_{NT}(t) = \varphi_T(t + (N - 1)T), \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (6.26)$$

Каждая из функций множества (6.26), как несложно заметить, является решением квазипериодической модели (6.4) – (6.7), (3.33) с начальным условием

$$\varphi_{NT}(0) = \varphi_T(N)$$

определенным для всех значений $|t| < \infty$ и содержащимся при этих значениях t в множестве E . Но множество Σ , содержащее E , однородно, а в однородном множестве квазипериодическая модель (6.4) – (6.7), (3.33) может иметь только одно решение, определенное для всех значений $|t| < \infty$ и ограниченное при этих значениях t (см. [22, с. 223]). Последнее означает, что

$$\varphi_T(0) = \varphi_{2T}(0) = \dots = \varphi_{NT}(0) = \dots,$$

т.е. решение $\varphi_T(t)$ является периодическим решением, периода, равного T .

Но так как выбор числа T , по существу не играл никакой роли, а множество Σ , однородно, то все решения $\varphi_T(t)$, для каждого положительного числа T , совпадают, то есть являются одним решением. Такое возможно только если получившееся решение тривиально.

Таким образом, предложение 6.2 доказано.

Применим предложения 6.1 и 6.2 к динамической модели Леонтьева (6.1) – (6.3).

Динамическая модель Леонтьева (6.1) – (6.3) будет иметь единственное положение равновесия, являющееся решением тривиальной квазипериодической модели (6.1) – (6.3), (6.8), при условии, что некоторое решение $\xi(t)$ оптимизационной модели (6.1) – (6.3), определенное при всех значениях $t \geq t_0$ и при этих значениях t содержащееся в замкнутом ограниченном подмножестве множества Σ , которое является множеством Красносельского 1-го рода.

Решение тривиальной квазипериодической модели уже дает нам равновесие в динамической модели Леонтьева представляет больший интерес по сравнению с решением квазипериодической модели, но все равно не гарантирует устойчивость равновесия. Оказывается, эта модель имеет устойчивое равновесие, если автономная система дифференциальных уравнений, соответствующая ограничениям (6.2) – (6.3) будет асимптотически структурно устойчивой. Именно об этом пойдет речь в следующем параграфе.

7 Устойчивость равновесия

Получим условия, гарантирующие устойчивость равновесия в динамической модели Леонтьева бесконечном горизонте оптимизации

$$\int_{t_0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) dt \rightarrow \max, \quad (7.1)$$

$$R(x) \dot{x}(t) \leq (E - P(x))x(t), \quad \dot{x}(t) \geq 0, \quad (7.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (7.3)$$

где $x(t)$ – вектор-функция, $x \in \Sigma$, Σ – некоторое открытое подмножество пространства \square^n ; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p$; t_0 – начало горизонта оптимизации.

Для этого вернемся к модели А.П. Афанасьева на бесконечном горизонте

$$J(\varphi) = \int_{t_0}^T \langle G(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt \rightarrow \min; \quad (7.4)$$

$$A(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = B(\varphi(t)); \quad (7.5)$$

$$C(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \geq D(\varphi(t)); \quad (7.6)$$

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad (7.7)$$

где $\varphi \in A$ и C – матрицы размерностей $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, а G , B и D – вектора размерностей n , p и q соответственно.

Введем определения асимптотической и структурной устойчивости модели.

Пусть на множестве Σ , тривиальная квазипериодическая модель (7.4) – (7.7), (6.8) имеет решение $\varphi(t)$, описывающее положение равновесия Λ . Тогда будем говорить, что решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво в целом на множестве Σ , если выполнены следующие три условия:

1) если ξ_0 – произвольная точка множества Σ , то решение $\xi(t)$ модели (7.4) – (7.7) с начальным условием

$$\xi(t_0) = \xi_0 \quad (7.8)$$

определено для всех значений $t \geq t_0$ и содержится при этих значениях t в множестве Σ ;

2) решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову;

3) каждое решение $\xi(t)$ с начальным условием (7.8), отличное от $\varphi(t)$, связано с $\varphi(t)$ равенством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) \equiv \varphi(t). \quad (7.9)$$

Предположим теперь, что Σ , – множество Красносельского 1-го рода. Тогда, если для всех значений $0 \leq t_0 \leq 1$ и $\xi_0 \in \Sigma$, решение $\xi(t)$ модели (7.4) – (7.7) с начальным условием (7.8) определено для всех значений $t \geq t_0$ и ограничено при этих значениях t , то будем говорить, что Σ – предравновесное множество для модели (7.4) – (7.7).

Используя понятие предравновесного множества, имеем следующее весьма важное для дальнейших построений

Предложение 7.1. Пусть Σ , – предравновесное множество для модели (7.4) – (7.7). Тогда на множестве Σ , тривиальная квазипериодическая модель (7.4) – (7.7), (6.8) имеет единственное решение – положение равновесия Λ , которое асимптотически устойчиво в целом на множестве Σ .

Доказательство. Пусть ξ_0 – некоторая точка множества Σ , и пусть $\xi(t)$ – решение модели (7.4) – (7.7) с начальным условием (7.8). Тогда, поскольку множество Σ , является множеством Ляпунова для модели (7.4) – (7.7), решение $\xi(t)$ определено для всех значений $t \geq t_0$ и содержится при этих значениях t в некотором компактном подмножестве E множества Σ . Так как при этом множество Ляпунова по определению однородно, то согласно предложению 6.2 тривиальная квазипериодическая модель (7.4) – (7.7), (6.8) имеет на множестве Σ , единственное решение $\varphi(t)$, соответствующее положению равновесия Λ .

Для всех значений $t \geq 0$ положим теперь

$$\xi_M(t) = \xi(t + (N - 1)T), \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (7.10)$$

Легко видеть, что каждая функция из множества (7.10) является решением модели (7.4) – (7.7) с начальным условием

$$\xi_M(0) = \xi(NT),$$

при всех значениях $t \geq 0$ содержащимся в множестве E . Поэтому в силу предложения 6.1 для каждого из решений (7.10) выполняется равенство (6.10). Но так как решение модели (7.4) – (7.7) непрерывно зависит от начальных условий, отсюда следует, что в условиях предложения 6.2 множество (6.9) совпадает с множеством натуральных чисел и, значит, для решения $\xi(t)$ выполнено условие (7.9).

Но выбор значения $\xi_0 \in \Sigma$, здесь по существу не играл никакой роли. Поэтому любое непериодическое решение $\xi(t)$ модели (7.4) – (7.7) определено для всех значений $t \geq t_0$, содержится при этих значениях t в множестве E и удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\xi(t) - \varphi(t)| = 0,$$

т.е. для доказательства предложения 6.2 остается показать, что решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову.

Для доказательства последнего заметим, что решения модели (7.4) – (7.7) непрерывно зависят от начальных условий. Поскольку при этом множество E компактно, то решения модели (7.4) – (7.7) равномерно непрерывно зависят от начальных условий на множестве $[0, 1] \times E$. Но так как функция f не за-

висит от t , решения модели (7.4) – (7.7) равномерно непрерывно зависят от начальных условий на всем множестве $\square \times E$, т.е. решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову.

Таким образом, предложение 7.1 доказано.

Введем в модель А.П. Афанасьева (7.4) – (7.7) дополнительный параметр μ – m -мерный вектор

$$J(x, \mu) = \int_{t_0}^T \langle G(x(t), \mu), \dot{x}(t) \rangle dt \rightarrow \min; \quad (7.11)$$

$$A(x(t), \mu) \dot{x}(t) = B(x(t), \mu); \quad (7.12)$$

$$C(x(t), \mu) \dot{x}(t) \geq D(x(t), \mu); \quad (7.13)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (7.14)$$

где $x \in \Sigma$, $\mu \in \Gamma$, Σ , и Γ некоторые открытые подмножества пространств \square^n и \square^m соответственно, A и C – матрицы $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, а G , B и D – вектора размерностей n , p и q соответственно. Здесь под μ мы будем понимать влияние внешних факторов, которых в нашем случае m .

Обобщим определения 6.1 и 6.2 на случай модели (7.11) – (7.14).

Определение 7.1. Будем называть модель А.П. Афанасьева (7.11) – (7.14) *квазипериодической*, если решение этой модели $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = x(t). \quad (7.15)$$

Определение 7.2. Модель (7.11) – (7.14) будем называть *тривиальной квазипериодической*, если ее решение $x(t)$ является положением равновесия, т.е.

$$\dot{x} \equiv 0. \quad (7.16)$$

Совокупность уравнений (7.12) и активных ограничений из (7.13), определяющих режим, будет обозначать

$$R(x, \mu) \dot{x} = P(x, \mu).$$

Совокупность же неактивных ограничений из (7.13) будем обозначать

$$K(x, \mu) \dot{x} > L(x, \mu).$$

Если при этом $\text{rank}(R(x_0, \mu)) = \text{rank}(P(x_0, \mu)) = N$, то решение $x(t)$ определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = R^{-1}(x(t), \mu)P(x(t), \mu).$$

В случае, когда матрица $R(x)$ невырождена, для простоты обозначений положим

$$f(x, \mu) = R^{-1}(x, \mu)P(x, \mu).$$

Пусть, как и ранее, на множестве Σ , определена некоторая полудифференцируемая функция Φ и пусть, как и ранее, M – ее полудифференциал. Предположим, что для всех значений $\mu \in \Gamma$ во всех точках x, y множества Σ , имеет место неравенство

$$M[x - y, f(x, \mu) - f(y, \mu)] \leq L[\Phi(x - y)], \quad (7.17)$$

где L – непрерывная функция, такая, что каждое решение $u(t)$ уравнения (6.23) удовлетворяет условиям (6.24) и (6.25). И, наконец, пусть для всех $\mu \in \Gamma$ и для любых двух различных точек x и y множества Σ , выполнено неравенство

$$M[x - y, f(x, \mu) - f(y, \mu)] < 0.$$

Тогда будем говорить, что Σ , – множество Красносельского 2-го рода.

Простейшим примером множества Красносельского 2-го рода может служить множество, во всех точках которого при $|t| < \infty$ и $\mu \in \Gamma$ выполнено условие

$$\langle K(x - y), f(x, \mu) - f(y, \mu) \rangle \leq -k^2|x - y|^2,$$

где, как и ранее, K – некоторая симметрическая невырожденная матрица и k – некоторое действительное число.

Предположим теперь, что Σ , – множество Красносельского 2-го рода. Тогда, если для всех значений $\mu \in \Gamma$ множество Σ , является предравновесным множеством, то будем говорить, что Σ – равновесное множество для модели (7.11) – (7.14).

Пусть для всех $\mu \in \Gamma$ тривиальная квазипериодическая модель (7.11) – (7.14), (7.16) имеет асимптотически устойчивое в целом на множестве Σ , решение $\varphi_\mu(t)$, соответствующее положению равновесия Λ . Если при этом

$$\lim_{\mu' \rightarrow \mu''} \varphi_{\mu'}(t) = \varphi_{\mu''}(t)$$

равномерно на всей полуоси $t \geq t_0$, то будем говорить, что модель (7.11) – (7.14) асимптотически структурно устойчива на множестве Σ .

Легко видеть, что в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров у асимптотически структурно устойчивой на множестве Σ , модели (7.11) – (7.14) переходят одна в другую при $\mu' \rightarrow \mu''$. Более того, в качестве тривиального следствия предложения 6.2 имеет место следующая

Теорема 7.1. Пусть Σ – равновесное множество для модели (7.11) – (7.14). Тогда модель (7.11) – (7.14) асимптотически структурно устойчива на множестве Σ .

Замечание. Конструктивный пример предравновесного множества приведен в работе [14], а равновесного множества – в [8].

Существование, асимптотическая и структурная устойчивость положения равновесия модели (7.4) – (7.7), очевидно, является условием существования устойчивого равновесия как экономической категории данной модели.

Исходя из всего выше сказанного, применим результаты данного параграфа к модели валового выпуска отраслей экономики на бесконечном горизонте (7.11) – (7.14).

Пусть $\xi(t)$ – некоторое решение модели (7.11) – (7.14), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и содержащееся при этих значениях t в подмножестве E множества Красносельского 1-го рода Σ , тогда существует единственное решение тривиальной квазипериодической модели (7.11) – (7.14),

$$\dot{\varphi} \equiv 0, \quad (7.18)$$

состоящее из одной точки Λ – положения равновесия этой модели.

Если же множество Σ , – предравновесное множество для модели (7.11) – (7.14). Тогда на множестве Σ , тривиальная квазипериодическая модель (7.11) – (7.14), (7.18) имеет единственное решение – положение равновесия Λ , которое асимптотически устойчиво в целом на множестве Σ .

До сих пор мы рассматривали динамическую модель Леонтьева валового выпуска как эндогенную, но в реальности это далеко не так, поэтому естественно в модель (7.11) – (7.14) добавить дополнительные экзогенные параметры μ . Тогда модель (7.11) – (7.14) примет вид:

$$J(x, \mu) = \int_{t_0}^{\infty} \dot{x}(t) dt \rightarrow \max;$$

$$U(x(t), \mu) \dot{x}(t) \leq (E - V(x(t)), \mu)x(t), \dot{x}(t) \geq 0;$$

$$x(t_0) = x_0, t \geq t_0,$$

где $x(t)$ – вектор-функция, $x \in \Sigma$, $\mu \in \Gamma$, Σ , и Γ – некоторые открытые подмножества пространств \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m соответственно; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p'$; t_0 – начало горизонта оптимизации.

Теорема 7.1 для динамической модели Леонтьева с параметром μ будет означать следующее. Если Σ – равновесное множество, тогда модель (7.11) – (7.14) будет асимптотически структурно устойчивой на множестве Σ .

Множество Σ , зависит от функции $f(x)$ из автономной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),$$

к которой сводятся ограничения (7.2) – (7.3). Поэтому, варьируя затраты и капиталоемкость, мы можем добиться равновесности множества Σ . Тем самым автоматически получить асимптотически структурно устойчивую динамическую модель Леонтьева (7.11) – (7.14). Как проверить, является ли Σ , равновесным множеством, показано в следующей главе.

Заключительная глава работы содержит простейший пример равновесного множества и алгоритм его построения. Вопрос о существовании равновесного множества является исключительно важным, так как подобрав соответствующим образом функцию прямые затраты и инвестиции можно получить устойчивое равновесие.

Глава состоит из двух параграфов; п. 8 приведен простейший пример равновесного множества, который позволяет наглядно убедиться, что такое множество существует.

Девятый параграф является практической реализацией всего изложенного выше материала. Здесь дан алгоритм построения равновесных множеств, который можно применить к динамической модели Леонтьева на бесконечном горизонте.

8 Частный случай равновесного множества

Предположим, что множество Σ , совпадает с пространством \square^n . Предположим, что при $\mu \in \Gamma$ во всех точках x, y пространства \square^n имеет место неравенство

$$\langle K(x - y), f(x, \mu) - f(y, \mu) \rangle \leq -k^2 |x - y|^2, \quad (8.1)$$

где K – симметрическая положительно определенная матрица, а функция k – некоторое действительное число.

Тогда условие (8.1) представляет собой частный случай условия (7.17). При этом уравнение (6.23) принимает вид

$$\dot{u} = -aku,$$

где a – некоторое положительное число [21, с. 224]. Следовательно, каждое его решение $u(t)$ с начальным условием

$$u(t_0) = u_0 > 0$$

определено для всех значений $|t| < \infty$ и удовлетворяет условию (6.24). Поэтому пространство \square^n является равномерно однородным множеством. Более того, поскольку

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0,$$

то, как несложно заметить, каждое решение $\xi(t)$ модели (7.11) – (7.14) определено для всех значений $t \geq t_0$ и ограничено при этих значениях t .

Таким образом, при выполнении условий (8.1) пространство \square^n будет равномерным множеством Ляпунова для модели (7.11) – (7.14). Значит, в силу теоремы п. 8 модель (7.11) – (7.14) асимптотически структурно устойчива в пространстве \square^n .

Условие (8.1) выглядит мало привлекательно для практического использования, поскольку требует задания k с одной стороны и проверки неравенства (8.1) для всех значений x и y – с другой. Все эти трудности, однако, могут быть в значительной мере обойдены при использовании следующих достаточно простых преобразований.

В самом деле, пусть

$$F(x, \mu) = \left(\frac{\partial f^i(x, \mu)}{\partial x^j} \right)$$

– матрица Якоби для функции f . Тогда, поскольку для всех значений $(x, y) \in \square^n$ и $\mu \in \Gamma$ справедливо равенство

$$f(x, \mu) - f(y, \mu) = \int_0^1 F[y + \theta(x - y), \mu](x - y) d\theta,$$

то при этих значениях x, y, μ имеет место неравенство

$$\langle K(x-y), f(x, \mu) - f(y, \mu) \rangle \leq \sup_z \langle K(x-y), F(z, \mu)(x-y) \rangle. \quad (8.2)$$

Так как по построению K – симметрическая матрица, то неравенство (8.2) может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$\langle K(x-y), f(x, \mu) - f(y, \mu) \rangle \leq \sup_z \langle x-y, KF(z, \mu)(x-y) \rangle. \quad (8.3)$$

Для простоты обозначений положим

$$\Lambda(z, \mu) = KF(z, \mu)$$

и заметим, что для всех значений $z \in \square^n$ и $\mu \in \Gamma$ справедливо равенство

$$\Lambda(z, \mu) = \frac{\Lambda(z, \mu) + \Lambda'(z, \mu)}{2} + \frac{\Lambda(z, \mu) - \Lambda'(z, \mu)}{2},$$

где штрих означает транспонирование. Поскольку

$$\frac{\Lambda(z, \mu) - \Lambda'(z, \mu)}{2}$$

– кососимметрическая матрица, то, как известно, для всех значений $(x, y) \in \square^n$ и $\mu \in \Gamma$ имеет место равенство

$$\langle x-y, \frac{\Lambda(z, \mu) - \Lambda'(z, \mu)}{2}(x-y) \rangle = 0.$$

Поэтому неравенство (8.3) может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$\langle K(x-y), f(x, \mu) - f(y, \mu) \rangle \leq \sup_z \langle x-y, \frac{\Lambda(z, \mu) + \Lambda'(z, \mu)}{2}(x-y) \rangle. \quad (8.4)$$

Обозначим через $\lambda(z, \mu)$ – наибольшее собственное число матрицы

$$\frac{\Lambda(z, \mu) + \Lambda'(z, \mu)}{2}$$

Тогда, в силу неравенства (8.4) имеем

$$\langle K(x-y), f(x, \mu) - f(y, \mu) \rangle \leq \sup_{z, \mu} \lambda(z, \mu) |x-y|^2. \quad (8.5)$$

Таким образом, если принять

$$K = \sup_{z, \mu} \lambda(z, \mu),$$

то при выполнении условия

$$\sup_{z, \mu} \int_0^1 \lambda(z, \mu) dt < 0$$

из неравенств (8.1) и (8.5) следует, что пространство \square^n будет равномерным множеством Ляпунова для модели (7.11) – (7.14). Поэтому модель (7.11) – (7.14) будет асимптотически структурно устойчивой в пространстве \square^n .

9 Алгоритм построения равновесных множеств

Рассмотрим динамическую модель Леонтьева на бесконечном горизонте

$$\int_{t_0}^{\infty} \dot{x}(t) dt \rightarrow \max; \quad (9.1)$$

$$R(x) \dot{x}(t) \leq (E - P(x))x(t), \quad \dot{x}(t) \geq 0; \quad (9.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (9.3)$$

где $x(t)$ – вектор-функция, $x \in \Sigma$, Σ – некоторое открытое подмножество пространства \mathbb{R}^n ; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат, U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p'$; t_0 – начало горизонта оптимизации.

На рис. 9.1 приведен алгоритм нахождения равновесного множества.

Пусть

$$z^* = \arg \sup_z J(z).$$

Тогда неравенство

$$\sup_z z\lambda(z^*) < 0$$

влечет за собой существование и устойчивость в целом положения равновесия $\varphi(t)$ модели (9.1) – (9.3).

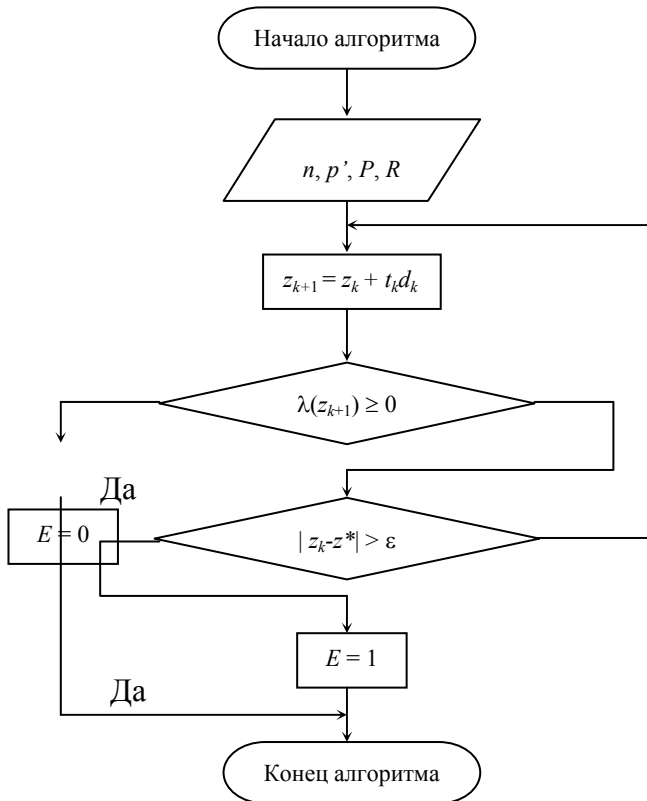


Рис. 9.1 Алгоритм нахождения равновесного множества

Для отыскания величины z^* в зависимости от гладкости поля f выберем тот или иной метод нелинейного программирования с формулой

$$z_{k+1} = z_k + t_k d_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.4)$$

где z_k – k -е приближение к величине z^* , а d_k и t_k – соответствующие направления поиска и шаг в данном направлении. Тогда имеем следующий алгоритм проверки условий существования асимптотически структурной устойчивости единственного положения равновесия модели (9.1) – (9.3):

- 1 Вычислить z_{k+1} по формуле (9.4).
- 2 Вычислить наибольшее собственное число $\lambda(z_{k+1})$ матрицы

$$\frac{KF(z_{k+1}) + F'(z_{k+1})K}{2}.$$

- 3 Если окажется, что

$$\lambda(z_{k+1}) \geq 0,$$

то установить код завершения E равным нулю и прекратить вычисления. В противном случае перейти к шагу 4.

4 Проверить, является ли значение z_{k+1} достаточно близким к величине z^* . Если да, то перейти к шагу 5. В противном случае увеличить k на единицу и перейти к шагу 1.

5 Установить код завершения E равным единице и прекратить вычисления.

Если по окончании работы данного алгоритма окажется, что код завершения E равен нулю, то вопрос о существовании у модели (9.1) – (9.3) асимптотически структурно устойчивого положения равновесия, вообще говоря, остается открытым. В противном случае динамическая модель Леонтьева имеет устойчивое в целом положение равновесия L .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной книге показана разработанная оптимизационная модель валового выпуска отраслей региональной экономики на конечном горизонте

$$\sum_{i=1}^n x_i(T) \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$U(x) \dot{x}(t) \leq (E - V(x))x(t), \dot{x}(t) \geq 0; \quad (2)$$

$$x(t_0) = x_0, t \in [t_0, T], \quad (3)$$

где $x(t)$ – N -мерная вектор-функция, $x \in \Sigma$, некоторому открытому подмножеству пространства \square^n ; E – единичная матрица; V – матрица прямых затрат; U – матрица капиталоемкости, все эти матрицы имеют порядок $n \times p'$; t_0 – начало горизонта; T – конец горизонта оптимизации.

Она может быть применена к описанию валового выпуска мировой, государственной, региональной экономике, межотраслевого комплекса, транснациональной корпорации.

В работе получены условия продолжения данной модели на бесконечный горизонт функционирования. Причем, если такое продолжение имеет место, то решение данной модели будет равновесием (с математической точки зрения решением квазипериодической модели).

Практическое значение имеет достижение устойчивого равновесия экономической системы. Здесь применен новый подход к устойчивому равновесию как экономической категории. Устойчивое равновесие в динамической модели Леонтьева достигается, когда решение автономной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),$$

полученной из ограничений (2) – (3), будет асимптотически структурно устойчивым положением равновесия.

Таким образом, модель регионального рынка на бесконечном горизонте оптимизации описывает устойчивое равновесие, если Σ – равновесное множество, что является неременным условием эффективного развития экономики.

- 1 *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны / Д.В. Аносов. М.: Наука, 1967.
- 2 *О неэффективности* статических режимов процессов управления / И.Н. Астафьева, А.Е. Гаврилов, С.Ю. Логачев и др. // *АиТ.* 1993. № 2. С. 29 – 33.
- 3 *Атанс М.* Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. М.: Машиностроение, 1968.
- 4 *Афанасьев А.П.* Линейные по управляющим воздействиям задачи оптимального управления / А.П. Афанасьев. М.: ВНИИСИ, 1980.
- 5 *Афанасьев А.П.* К вопросам управления в периодических процессах / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 1998. № 4. С. 15 – 20.
- 6 *Афанасьев А.П.* Квазипериодические процессы в задачах управления / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2001. № 2. С. 22 – 28.
- 7 *Афанасьев А.П.* Периодический оператор сдвига и квазипериодические кривые / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // *Дифференциальные уравнения,* Т. 40. № 8.
- 8 *А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба, Т.Б. Заусоница, С.М. Лобанов.* Существование, устойчивость и структурная устойчивость единственного периодического режима / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба, Т.Б. Заусоница, С.М. Лобанов // *Вестник ТГТУ.* 2004. № 1.
- 9 *Необходимое условие* в оптимальном управлении / А.П. Афанасьев, В.В. Дикусар, А.А. Милютин и др. М.: Наука, 1990.
- 10 *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику / С.А. Ашманов. М., 1984.
- 11 *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости / Е.А. Барбашин. М.: Наука, 1967.
- 12 *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией / Р. Беллман. М.: Наука, 1964.
- 13 *Березнева Т.Д.* Некоторые асимптотические свойства оптимальных траекторий динамической межотраслевой модели / Т.Д. Березнева // *Экономика и математический методы.* 1972. Т. 12. № 4.
- 14 *Волконский В.А.* Принципы оптимального планирования / В.А. Волконский. М., 1973.
- 15 *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей / Д. Гейл. М.: ИЛ, 1963.
- 16 *Гильденбранд В.* Ядро и равновесие в большой экономике / В. Гильденбранд. М.: Наука, 1986.
- 17 *Дзюба С.М.* Об условно-периодических решениях дифференциальных уравнений / С.М. Дзюба // *Дифференц. уравнения.* 1999. Т. 35. № 8. С. 1020 – 1023.
- 18 *Дзюба С.М.* О существовании и устойчивости единственного периодического режима / С.М. Дзюба // *Автоматика и телемеханика.* 1998. № 8.
- 19 *Демидович Б.П.* О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений / Б.П. Демидович // *Вестник МГУ.* 1961. № 6. С. 19 – 27.
- 20 *Демидович Б.П.* О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений / Б.П. Демидович // *Вестник МГУ.* 1962. № 1. С. 3 – 8.
- 21 *О построении* оптимального экономического плана / С.В. Дубовский, Л.Н. Дюкалов, Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев, Л.П. Уздемир, Ю.М. Фаткин. *Автоматика и телемеханика.* 1972. Вып. 8. С. 100 – 115.
- 22 *Занг В.Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В.Б. Занг. М., 1999.
- 23 *Иванилов Ю.П.* Математические модели в экономике / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов. М.: Наука, 1979.
- 24 *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. М.: Прогресс, 1975.
- 25 *Колемаев В.А.* Математическая экономика / В.А. Колемаев. М.: ЮНИТИ, 1998.
- 26 *Колемаев В.А.* Математические модели макроэкономической динамики / В.А. Колемаев. М.: ГАУ им. С. Орджоникидзе, 1996.
- 27 *Колмогоров А.Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона / А.Н. Колмогоров // *ДАН СССР.* 1954. Т. 35. № 4. С. 527 – 530

- 28 *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. М.: Наука, 1966.
- 29 *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование / А.А. Красовский. М.: Наука, 1973.
- 30 *Кротов Н.В.* Основы теории оптимального управления / Н.В. Кротов и др. М.: Высшая школа, 1990.
- 31 *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука, 1972.
- 32 *Ли Э.Б.* Введение в теорию оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. М.: Наука, 1972.
- 33 *Лившиц В.Н.* Оптимизация при перспективном планировании и проектировании / В.Н. Лившиц. М.: Экономика, 1984.
- 34 *Равновесие, рационализация и устойчивость* / В.Л. Макаров, В.А. Васильев, А.Н. Козырев, В.М. Маракулин // Оптимизация. № 38 (55). Математическое программирование и модели равновесия. Новосибирск, 1986.
- 35 *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост / М. Моришима. М.: Наука, 1972.
- 36 *Немыцкий В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. М.-Л.: ГТТИ, 1949.
- 37 *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. М.: Мир, 1972.
- 38 *Петров А.А.* Опыт математического моделирования экономики / А.А. Петров, И.Г. Посперов, А.А. Шанин. М.: Энергоиздат, 1996.
- 39 *Полтерович В.М.* Экономическое равновесие и хозяйственный механизм / В.М. Полтерович. М.: Наука, 1990.
- 40 *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимального управления / Л.С. Понтрягин. М.: Наука, 1976.
- 41 *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М.: Наука, 1970.
- 42 *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко. М.: Наука, 1970.
- 43 *Хейл Дж.* Теория функционально дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. М., 1984.
- 44 *Шварц Л.* Анализ / Л. Шварц. М.: Наука, 1966.

Приложение 1

СВОЙСТВА МАТРИЦЫ ПРЯМЫХ ЗАТРАТ

Балансовая модель Леонтьева

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.П1)$$

называется работоспособной или продуктивной, если она разрешима в неотрицательных $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$.

Двойственной к системе (1.П1) называется следующая система линейных уравнений для цен продуктов j :

$$p_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i = v_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.П1)$$

где v_j добавленная стоимость на единицу выпуска j -й отрасли.

Поскольку $\sum_{i=1}^n a_{ij} p_i$ сумма издержек на единицу выпуска j -й отрасли, то в левой части каждого уравнения (2.П1) стоит чистый доход от единичного выпуска j -ой отрасли, который и приравнивается к добавленной стоимости v_j .

Система (2.П1) называется прибыльной, если она разрешима в неотрицательных $p_j \geq 0, j = 1, \dots, n$. Можно доказать, продуктивность (1.П1) и прибыльность (2.П1) эквивалентны: из продуктивности (1.П1) следует прибыльность (2.П1) и наоборот.

НАПОМНИМ, ЧТО КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА D НАЗЫВАЕТСЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНО ОБРАТИМОЙ, ЕСЛИ НЕВЫРОЖДЕНА D И ЕЕ ОБРАТНАЯ МАТРИЦА НЕОТРИЦАТЕЛЬНА. СИСТЕМА (1.П1) МОЖЕТ БЫТЬ ЗАПИСАНА В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

$$(E - A)X = Y, \quad (3.П1)$$

ГДЕ $E = E_N$ – ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА С РАЗМЕРАМИ $N \times N$, $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$,
 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$.

ИЗ (3.П1) ВИДНО, ЧТО УСЛОВИЕ ПРОДУКТИВНОСТИ (1.П1) ЭКВИВАЛЕНТНО НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ МАТРИЦЫ $(E - A)$. ЕСЛИ ОДНО ИЗ ЭТИХ УСЛОВИЙ ВЫПОЛНЕНО, ТО

$$X = (E - A)^{-1}Y, \quad (4.П1)$$

ПРИЧЕМ $X \geq 0$, Т.Е. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО КОНЕЧНОГО СПРОСА Y РЕШЕНА.

ОБОЗНАЧИМ ЧЕРЕЗ N МНОЖЕСТВО НОМЕРОВ ОТРАСЛЕЙ $N = \{1, 2, \dots, N\}$. ПОДМНОЖЕСТВО ОТРАСЛЕЙ S ИЗОЛИРОВАНО, ЕСЛИ A_{ij} ДЛЯ $i \in \bar{S} = N \setminus S$, $j \in S$. ЭТО ОЗНАЧАЕТ, ЧТО ОТРАСЛИ S НЕ НУЖДАЮТСЯ В ТОВАРАХ, ПРОИЗВОДИМЫХ ДРУГИМИ ОТРАСЛЯМИ \bar{S} , ХОТЯ БЫТЬ МОЖЕТ ПРОДАЮТ ИМ СВОИ ТОВАРЫ. ЕСЛИ ПРОНУМЕРОВАТЬ ОТРАСЛИ ТАК, ЧТО БЫ ПЕРВЫМИ РАСПОЛАГАЛИСЬ К ОТРАСЛЕЙ S , ТО МАТРИЦА A ПРИМЕТ СЛЕДУЮЩИЙ ВИД:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad (5.П1)$$

ГДЕ A_1 – КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА С РАЗМЕРАМИ $K \times K$, ОТВЕЧАЮЩАЯ ОТРАСЛЯМ S ; A_3 – КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА С РАЗМЕРАМИ $(N - K) \times (N - K)$, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ОТРАСЛЯМ \bar{S} .

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ МАТРИЦА A НАЗЫВАЕТСЯ НЕРАЗЛОЖИМОЙ, ЕСЛИ ЕЕ НЕЛЬЗЯ ПУТЕМ ПЕРЕСТАНОВОК СТРОК И СТОЛБЦОВ ПРИВЕСТИ К ВИДУ (5.П1). НЕРАЗЛОЖИМОСТЬ A ОЗНАЧАЕТ, ЧТО КАЖДАЯ ОТРАСЛЬ ХОТЯ БЫ КОСВЕННО ИСПОЛЬЗУЕТ ПРОДУКЦИЮ ВСЕХ ОТРАСЛЕЙ (СВОЙСТВА ТАКИХ МАТРИЦ СМОТРИ В ПРИЛ. 2).

ДЛЯ НЕРАЗЛОЖИМОЙ МАТРИЦЫ ИМЕЕТ МЕСТО ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА-ПЕРРОНА:

1 НЕРАЗЛОЖИМАЯ МАТРИЦА ИМЕЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ СОБСТВЕННОЕ ЧИСЛО $\lambda_A > 0$, КОТОРОЕ ПРЕВОСХОДИТ МОДУЛИ ВСЕХ ОСТАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ.

2 СОБСТВЕННОМУ ЧИСЛУ λ_A ОТВЕЧАЕТ ЕДИНСТВЕННЫЙ СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР X_A С (ТОЧНОСТЬ ДО СКАЛЯРНОГО МНОЖИТЕЛЯ), ВСЕ КООРДИНАТЫ КОТОРОГО НЕНУЛЕВЫЕ И ИМЕЮТ ОДИН И ТОТ ЖЕ ЗНАК (Т.Е. ЕГО ВСЕГДА МОЖНО ВЫБРАТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ЗА СЧЕТ СКАЛЯРНОГО МНОЖИТЕЛЯ).

ОПИРАЯСЬ НА ТЕОРЕМУ ФРОБЕНИУСА-ПЕРРОНА МОЖНО ДОКАЗАТЬ СЛЕДУЮЩЕЕ ВЕСЬМА ВАЖНУЮ ДЛЯ ПРИЛОЖЕНИЙ ТЕОРЕМУ: МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА ПРОДУКТИВНА ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА $\lambda_A < 0$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
ДОСТАТОЧНОСТЬ. ПОСКОЛЬКУ**

$$AX_A = \lambda_A X_A, \quad X_A > 0, \quad 0 < \lambda_A < 1,$$

ТО

$$A^k X_A = A^{k-1} (AX_A) = \lambda_A (A^{k-1} X_A) = \lambda_A^2 (A^{k-2} X_A) = \dots = \lambda_A^k X_A,$$

ПОЭТОМУ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k X_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_A^k X_A = 0.$$

НО $X_A > 0$, $A^k \geq 0$, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.

РАССМОТРИМ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО, КОТОРОЕ ЛЕГКО ПРОВЕРИТЬ, ЕСЛИ РАСКРЫТЬ СКОБКИ В ЛЕВОЙ ЧАСТИ:

$$(E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = E - A^k.$$

ПОСКОЛЬКУ ПРЕДЕЛ ПРАВОЙ ЧАСТИ ПРИ $k \rightarrow \infty$ РАВЕН E , ТО СУЩЕСТВУЕТ И ПРЕДЕЛ ЛЕВОЙ ЧАСТИ. ТАКИМ ОБРАЗОМ, $(E - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I$, Т.Е. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА $(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ СУЩЕСТВУЕТ И ДЛЯ НЕЕ ИМЕЕТ МЕСТО РАЗЛОЖЕНИЕ, АНАЛОГИЧНОЕ СУММЕ

БЕСКОНЕЧНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ. КРОМЕ ТОГО, ТАК КАК ВСЕ $A^k \geq 0$, ТО $(E - A)^{-1} \geq 0$, ПОЭТОМУ ДЛЯ ЛЮБОГО ВЕКТОРА КОНЕЧНОГО СПРОСА $Y \geq 0$ СУЩЕСТВУЕТ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

$$X = (E - A)^{-1}Y,$$

Т.Е. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА ПРОДУКТИВНА.

НЕОБХОДИМОСТЬ. ПУСТЬ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА ПРОДУКТИВНА, ТОГДА ДЛЯ ВЕКТОРА КОНЕЧНОГО СПРОСА $Y > 0$ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ ВЕКТОР ВАЛОВОГО ВЫПУСКА $X \geq 0$, ЧТО $X - AX = Y$, Т.Е. $X > AX \geq 0$ И, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, $X > 0$. УМНОЖИМ ПОСЛЕДНЕЕ НЕРАВЕНСТВО НЕ ВЕКТОР-СТОКУ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЦЕН $P_A > 0$, ТОГДА $P_A X > P_A AX = \lambda_A P_A X$, НО $P_A X > 0$, ПОЭТОМУ $\lambda_A < 1$.

ПОСЛЕДНЯЯ ТЕОРЕМА ДАЕТ ВОЗМОЖНОСТЬ ПРОВЕРЯТЬ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА НА ПРОДУКТИВНОСТЬ, ОДНАКО ЕЕ ФОРМУЛИРОВКА НЕ ПОДДАЕТСЯ ПРЯМОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ.

ТЕОРЕМА. ЕСЛИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ МАТРИЦА A НЕРАЗЛОЖИМА, СУММА R_i ЭЛЕМЕНТОВ КАЖДОЙ СТРОКИ НЕ ПРЕВОСХОДИТ ЕДИНИЦЫ, $R_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \leq 1$ И ХОТЯ БЫ

ДЛЯ ОДНОЙ СТОКИ $R_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} < 1$, ТО МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА ПРОДУКТИВНА.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ПУСТЬ P_A – СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР (СТРОКА) МАТРИЦЫ A , ОТВЕЧАЮЩИЙ СОБСТВЕННОМУ ЧИСЛУ λ_A , Т.Е.

$$P_A A = \lambda_A P_A, \quad P_A > 0, \quad 0 < \lambda_A < 1,$$

ТОГДА, УМНОЖИВ ПОСЛЕДНЕЕ РАВЕНСТВО СПРАВА НА ВЕКТОР СТОЛБЕЦ

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ПОЛУЧИМ } P_A A E = \lambda_A P_A E.$$

ПОСКОЛЬКУ $A E = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, ТО ЛЕВАЯ ЧАСТЬ ПОСЛЕДНЕГО РАВЕНСТВА ПО УСЛОВИЮ

ТЕОРЕМЫ $P_A A = \sum_{i=1}^n (P_A)_i R_i < \sum_{i=1}^n (P_A)_i$, НО ПРАВАЯ ЧАСТЬ РАВНА $\lambda_A \sum_{i=1}^n (P_A)_i$, ПОЭТОМУ $\lambda_A < 1$,

Т.Е. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА ПРОДУКТИВНА.

ИТАК, ЕСЛИ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА ПРОДУКТИВНА, ТО ДЛЯ ЛЮБОГО ВЕКТОРА КОНЕЧНОГО СПРОСА $Y \geq 0$ ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ВЕКТОР ВАЛОВОГО ВЫПУСКА X ПО ФОРМУЛЕ

$$X = Y + AY + A^2Y + \dots$$

ЭТО РАЗЛОЖЕНИЕ МОЖНО ИНТЕРПРЕТИРОВАТЬ СЛЕДУЮЩИМ ОБРАЗОМ. ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА ДАННОГО ОБЪЕМА КОНЕЧНОГО СПРОСА Y НЕОБХОДИМО ЗАТРАТИТЬ AY ПРОДУКТОВ, НО СНАЧАЛА ИХ НАДО ПРОИЗВЕСТИ, ДЛЯ ЧЕГО ПОНАДОБИТСЯ $A(AY) = A^2Y$

ПРОДУКТОВ, ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА КОТОРЫХ В СВОЮ ОЧЕРЕДЬ ПОНАДОБИТСЯ A^3Y ПРОДУКТОВ, И Т.Д.

МАТРИЦА $A^* = (E - A)^{-1} > 0$ НАЗЫВАЕТСЯ МАТРИЦЕЙ ПОЛНЫХ ЗАТРАТ, ПОСКОЛЬКУ $X = (E - A)^{-1}Y = A^*Y$.

КАЖДЫЙ ЕЕ КОЭФФИЦИЕНТ ПОКАЗЫВАЕТ A_{ij}^* , СКОЛЬКО НАДО ПРОИЗВЕСТИ ЕДИНИЦ I-ГО ПРОДУКТА НА ЕДИНИЦУ j-ГО КОНЕЧНОГО ПРОДУКТА.

СВОЙСТВА НЕРАЗЛОЖИМОЙ МАТРИЦЫ

ЛЕММА 1. ПУСТЬ МАТРИЦА $A \geq 0$ РАЗМЕРА $N \times N$ НЕРАЗЛОЖИМА, $Y \geq 0$, N -МЕРНЫЙ СТОЛБЕЦ, $Z = AY$, $S = \{I: Y_I > 0\}$, $T = \{I: Z_I > 0\}$, ТОГДА ИЗ $S \neq \emptyset$, N СЛЕДУЕТ $\bar{S} \cap T \neq \emptyset$, ГДЕ $N = \{1, \dots, N\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРОВЕДЕМ ОТ ПРОТИВНОГО. СОГЛАСНО ОБОЗНАЧЕНИЯМ ЛЕММЫ $\bar{S} = \{I: Y_I = 0\}$, $\bar{T} = \{I: Z_I = 0\} = N \setminus T$. ПРЕДПОЛОЖИМ, ЧТО УТВЕРЖДЕНИЕ ЛЕММЫ НЕВЕРНО, Т.Е. $\bar{S} \cap T = \emptyset$, ТОГДА $\bar{S} \subset \bar{T}$, $T \subset S$, А ИЗ ЭТОГО СЛЕДУЕТ, ЧТО S – ИЗОЛИРОВАННОЕ МНОЖЕСТВО. В САМОМ ДЕЛЕ, РАССМОТРИМ $I \in \bar{S}$, ТОГДА ИЗ $\bar{S} \subset \bar{T}$ ВЫТЕКАЕТ, ЧТО, $I \in \bar{T}$ ПО ЭТОМУ $\sum_{j=1}^n A_{Ij} Y_j = \sum_{j \in S} A_{Ij} Y_j = 0$, А ПОСКОЛЬКУ $Y_j > 0$ ДЛЯ $J \in S$, ТО ДЛЯ $I \in \bar{S}$, $J \in S$, И, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, S – ИЗОЛИРОВАННОЕ МНОЖЕСТВО. ОДНАКО ЭТО ПРОТИВОРЕЧИТ ТОМУ, ЧТО МАТРИЦА A НЕРАЗЛОЖИМА.

СВОЙСТВО 1. НЕРАЗЛОЖИМАЯ МАТРИЦА A НЕ ИМЕЕТ НУЛЕВЫХ СТРОК И СТОЛБЦОВ. В САМОМ ДЕЛЕ, ЕСЛИ БЫ I -Я СТРОКА БЫЛА НУЛЕВОЙ, ТО МНОЖЕСТВО $N \setminus \{I\}$ БЫЛО БЫ ИЗОЛИРОВАННЫМ.

СВОЙСТВО 2. ЕСЛИ $A \geq 0$ НЕРАЗЛОЖИМА И $Y > 0$, ТО $AY > 0$. ЭТО ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ТАК, ПОСКОЛЬКУ НЕРАЗЛОЖИМАЯ МАТРИЦА НЕ ИМЕЕТ НУЛЕВЫХ СТРОК.

СВОЙСТВО 3. ЕСЛИ $Y \geq 0$, $Y \neq 0$ ТО $Z = (E + A)Y$ ИМЕЕТ МЕНЬШЕ НУЛЕВЫХ КООРДИНАТ, ЧЕМ Y .

ЭТО СВОЙСТВО НЕМЕДЛЕННО СЛЕДУЕТ ИЗ ЛЕММЫ.

СВОЙСТВО 4. ЕСЛИ $A \geq 0$ НЕРАЗЛОЖИМА, $X \geq 0$, $X \neq 0$, ТО ИЗ НЕРАВЕНСТВА $AX \leq \alpha X$ ВЫТЕКАЕТ $\alpha > 0$, $X > 0$.

ПРЕДПОЛОЖИМ, ЧТО $\alpha = 0$, ТОГДА ИЗ НЕРАВЕНСТВА $AX \leq \alpha X$ СЛЕДУЕТ $AX = 0$, ЧТО ОЗНАЧАЕТ ДЛЯ ЛЮБОЙ I -Й СТРОКИ $\sum_{j=1}^n A_{Ij} X_j = 0$, НО $A_{Ij} \geq 0$, $X \geq 0$, $X \neq 0$, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, $A_{Ij} = 0$, $I = 1, \dots, N$, $J \in S$, $S = \{J: X_J > 0\}$, Т.Е. A СОДЕРЖИТ НУЛЕВЫЕ СТОЛБЦЫ, ЧТО СОГЛАСНО СВОЙСТВУ 1 НЕВОЗМОЖНО, ПОЭТОМУ $\alpha > 0$.

ТЕПЕРЬ ОСТАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ, ЧТО $X > 0$, Т.Е. $\bar{S} = \{I: X_I = 0\} = \emptyset$. ПРЕДПОЛОЖИМ ПРОТИВНОЕ, Т.Е. $\bar{S} \neq \emptyset$, ТОГДА СОГЛАСНО ЛЕММЕ 1 $\bar{S} \cap T$, НАЙДЕТСЯ ТАКОЕ $I \in \bar{S}$, ДЛЯ КОТОРОГО $Z_I = (AX)_I > 0$. ПО УСЛОВИЮ ДАННОГО СВОЙСТВА $AX \leq \alpha X$, ОТКУДА $Z_I = (AX)_I \leq \alpha X_I = 0$ Т.Е. ПРИШЛИ К ПРОТИВОРЕЧИЮ, ПОЭТОМУ $\bar{S} = \emptyset$, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, $X > 0$.

СВОЙСТВО 5. ЕСЛИ $A \geq 0$ – НЕРАЗЛОЖИМАЯ МАТРИЦА, ТО $(E + A)^{N-1} (E - A)$ – ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА РАЗМЕРА $N \times N$.

ИЗ СВОЙСТВА 3 ВЫТЕКАЕТ, ЧТО ПРИ $Y \geq 0$, $Y \neq 0$, $(E - A)Y$ ИМЕЕТ МЕНЬШЕ НУЛЕВЫХ КООРДИНАТ, ЧЕМ Y . РАССМОТРИМ САМЫЙ ХУДШИЙ СЛУЧАЙ: Y ИМЕЕТ ОДНУ ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ КООРДИНАТУ (ОСТАЛЬНЫЕ РАВНЫ НУЛЮ), ТОГДА $(E - A)Y$ ИМЕЕТ, ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ, ДВЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ $(E - A)[(E - A)Y] = (E - A)^2 Y$ – ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ, ТРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ, И, НАКОНЕЦ, $(E - A)^{N-1} Y$ ВСЕ N ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТ, Т.Е. $(E - A)^{N-1} Y > 0$.

ОБОЗНАЧИМ ЧЕРЕЗ $\tilde{A} = (E - A)^{N-1}$, ТОГДА $\tilde{A}Y > 0$, Т.Е. ДЛЯ ЛЮБЫХ I , $Y > 0$, $Y \neq 0$, $\sum_{i=1}^n \tilde{A}_{iJ} Y_{iJ} > 0$. ПРЕДПОЛОЖИМ ТЕПЕРЬ, ЧТО $\tilde{A}_{i_0 j_0} = 0$, ТОГДА ДЛЯ i_0 -Й СТРОКИ И ВЕКТОРА Y^{j_0} , ВСЕ КООРДИНАТЫ КОТОРОГО НУЛЕВЫЕ, КРОМЕ КООРДИНАТЫ С НОМЕРОМ J_0 , РАВНОЙ 1, ИМЕЕМ $\sum_{i=1}^n \tilde{A}_{i_0 j} Y^{j_0} =$
 $= \tilde{A}_{i_0 j_0} = 0$, ЧТО ПРОТИВОРЕЧИТ НЕРАВЕНСТВУ $\tilde{A}Y^{j_0} > 0$, ПОЭТОМУ
 $\tilde{A} = (E - A)^{N-1} > 0$.

СВОЙСТВО 6. ЕСЛИ $A \geq 0$ НЕРАЗЛОЖИМА, $A^M = \|a_{ij}^{(m)}\|$ ТО ДЛЯ ЛЮБЫХ $I \neq J$ НАЙДЕТСЯ ХОТЯ БЫ ОДИН НОМЕР M . $1 \leq M \leq N - 1$, ДЛЯ КОТОРОГО $a_{ij}^{(m)} > 0$.

В САМОМ ДЕЛЕ, РАССМОТРИМ РАЗЛОЖЕНИЕ

$$0 < (E + A)^{N-1} = E + C_{n-1}^1 A + \dots + C_{n-k}^k A^k + \dots + A^{N-1}$$

И ЭЛЕМЕНТ (I, J) ЭТОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

$$0 < [(E + A)^{N-1}]_{iJ} = E + C_{n-1}^1 A_{iJ} + \dots + C_{n-k}^k A_{iJ}^{(k)} \dots A^{N-1} A_{iJ}^{(N-1)}.$$

ПОСКОЛЬКУ СУММА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЛАГАЕМЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНА, ТО ДОЛЖНО НАЙТИСЬ ХОТЯ БЫ ОДНО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ СЛАГАЕМОЕ $C_{n-m}^m A_{iJ}^{(M)} > 0$, $1 \leq M \leq N$ ПОЭТОМУ $A_{iJ}^{(M)} > 0$.

СВОЙСТВО 7. ЕСЛИ $A \geq 0$ НЕРАЗЛОЖИМА, ТО ДЛЯ ЛЮБОГО I НАЙДЕТСЯ $1 \leq M \leq N$, ДЛЯ КОТОРОГО $a_{ii}^{(m)} > 0$.

РАССМОТРИМ РАЗЛОЖЕНИЕ

$$0 < (E + A)^{N-1} = E + C_{n-1}^1 A + \dots + C_{n-k}^k A^k + \dots + A^{N-1}.$$

И ЭЛЕМЕНТ (I, I) ЭТОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

$$0 < [(E + A)^{N-1}]_{iI} = E + C_{n-1}^1 A_{iI} + \dots + C_{n-k}^k A_{iI}^{(k)} \dots A^{N-1} A_{iI}^{(N-1)}.$$

ПОСКОЛЬКУ СУММА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЛАГАЕМЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНА, ТО ДОЛЖНО НАЙТИСЬ ХОТЯ БЫ ОДНО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ СЛАГАЕМОЕ $C_{n-m}^m A_{iI}^{(M)} > 0$, ПОЭТОМУ

$$a_{ii}^{(m)} > 0.$$

СВОЙСТВО 8. ЕСЛИ $A \geq 0$ НЕРАЗЛОЖИМА, ТО ДЛЯ ЛЮБЫХ I, J НАЙДЕТСЯ ТАКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ $I_1 = I, I_2, \dots, I_M = J$, ЧТО $A_{i_l, i_{l+1}} > 0$, $l = 1, \dots, M - 1$.

ЭТО СВОЙСТВО ОЗНАЧАЕТ, ЧТО ЛЮБАЯ ОТРАСЛЬ ХОТЯ БЫ КОСВЕННО ИСПОЛЬЗУЕТ ПРОДУКЦИЮ ЛЮБОЙ ДРУГОЙ ОТРАСЛИ.

И В САМОМ ДЕЛЕ, СОГЛАСНО СВОЙСТВАМ 6, 7 НАЙДЕТСЯ ТАКОЕ M , $1 \leq M \leq N$, ДЛЯ КОТОРОГО $A_{iJ}^{(M)} > 0$, НО

$$0 < A_{iJ}^{(M)} = \sum_{i_2, \dots, i_{m-1}} A_{i_1, i_2} A_{i_2, i_3} \dots A_{i_l, i_{l+1}} \dots A_{i_{m-1}, i}.$$

ПОСКОЛЬКУ СУММА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНА, ТО НАЙДЕТСЯ ХОТЯ БЫ ОДНО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ СЛАГАЕМОЕ

$$A_{i_1, i_2} A_{i_2, i_3} \dots A_{i_l, i_{l+1}} \dots A_{i_{m-1}, i} > 0,$$

ПОЭТОМУ $A_{i_1, i_2} > 0$, $A_{i_2, i_3} > 0 \dots A_{i_l, i_{l+1}} > 0 \dots A_{i_{m-1}, i} > 0$, ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ.

СВОЙСТВО 9. ЕСЛИ $A \geq 0$ НЕРАЗЛОЖИМА, ТО В МАТРИЦЕ A^M , $M = 1, 2, \dots$ НЕТ НУЛЕВЫХ СТРОК И СТОЛБЦОВ.

ПРЕДПОЛОЖИМ ПРОТИВНОЕ: ПУСТЬ ИМЕЕТСЯ НУЛЕВАЯ СТРОКА I_0 , Т.Е. $A_{i_0j}^{(M)} = 0$, $J =$

$$1, \dots, N, \text{ НО } 0 = A_{i_0j}^{(M)} = \sum_{i=1}^n A_{i_0i}^{(M-1)} A_{ij}, A_{ij} > 0,$$

$L = 1, \dots, N$, ПОЭТОМУ МАТРИЦА $A^{(M-1)}$ ИМЕЕТ НУЛЕВУЮ СТРОКУ. ПО ЭТИМ ЖЕ СООБРАЖЕНИЯМ ИМЕЮТ НУЛЕВУЮ СТРОКУ МАТРИЦЫ $A^{(M-2)}, \dots, A$. ПОСЛЕДНЕЕ ПРОТИВОРЕЧИТ ТОМУ, ЧТО A – НЕРАЗЛОЖИМАЯ МАТРИЦА, Т.Е. СВОЙСТВО ДОКАЗАНО.

$$[(3n+1) \times (3n+1)] \bar{A} = \begin{pmatrix} A-E_n & 0 & B & c \\ E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & -E_n & 0 \\ l & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ n \\ n \\ 1 \end{matrix}$$

$$[(3n+1) \times (3n+1)] \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ n \\ n \\ 1 \end{matrix}, [(3n+1) \times 1] \bar{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \frac{x_t}{c} \\ v_t \\ L_t \end{pmatrix}.$$

Тогда модель динамического межотраслевого баланса (1.ПЗ) – (4.ПЗ) приобретает следующую форму модели Неймана [(см. далее)]:

$$\bar{A} \bar{x}_t \leq \bar{B} \bar{x}_t, \bar{x}_t \geq 0, t = 1, 2, \dots, T, \quad (5.ПЗ)$$

$$\bar{x}_0 = (0, \bar{x}_t', 0, 0)'$$

Тем самым изучение поведения траекторий в модели межотраслевого динамического баланса может быть сведено к изучению траекторий соответствующей модели Неймана.

Следует обратить пристальное внимание на экономический смысл перехода от формы (1.ПЗ) – (4.ПЗ) модели динамического межотраслевого баланса к форме (5.ПЗ). Первую можно рассматривать как разомкнутую форму модели в том смысле: что часть произведенной продукции экономика затрачивает на внутренние нужды (на производственное потребление – Ax_t и на расширение производства – Bv_t), в то время как другая часть выдается во вне в виде непроизводственного потребления $L_t c$.

Если теперь замкнуть экономику, то есть включить потребителя (домашние хозяйства) в состав экономической системы, то приходим к форме (5.ПЗ) модели динамического межотраслевого баланса. При этом домашние хозяйства рассматриваются как $(n+1)$ -я отрасль экономики, которая потребляет продукцию других отраслей с коэффициентами затрат $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ и производит единственный вид продукции труд с интенсивностью L_t . В свою очередь другие отрасли потребляют продукцию $(n+1)$ -й отрасли (труд) с коэффициентами прямых затрат $l_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Другой особенностью перехода к форме (5.ПЗ) является рассмотрение унифицированного вектора переменных

$$\bar{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \frac{x_t}{c} \\ v_t \\ L_t \end{pmatrix},$$

все элементы которого единообразно представлены в модели (5.ПЗ). Поэтому эту форму можно назвать унифицированной.

Модель Неймана

Модель Неймана является в определенной мере обобщенной моделью Леонтьева, поскольку допускает производство одного продукта разными способами (в простейшей модели Леонтьева каждая отрасль производит только один продукт и никакая другая отрасль не может производить этот продукт).

В модели представлено n продуктов и m способов их производства, каждый j -й способ задается вектором столбцом затрат a_j и вектором-столбцом выпусков b_j в расчете на единицу интенсивности процесса

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \quad (6.ПЗ)$$

Из векторов затрат и выпуска образуются матрицы затрат и выпуска

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \quad (7.ПЗ)$$

Коэффициенты затрат a_{ij} и b_{ij} выпуска разумеется, неотрицательны. Естественно предположить, что для реализации любого процесса необходимы затраты хотя бы одного продукта, то есть для каждого найдется хотя бы одно такое, что

И каждый продукт может быть произведен хотя бы одним способом, то есть для каждого j найдется хотя бы одно i такое, что

$$a_{ij} > 0 \quad (8.ПЗ)$$

и каждый продукт может быть произведен хотя бы одним способом, то есть для каждого l существует j такое, что

$$b_{lj} > 0 \quad (9.ПЗ)$$

Из (8.ПЗ), (9.ПЗ) следует, что каждый столбец матрицы A и каждая строка матрицы B должна иметь по крайней мере один положительный элемент. Интенсивность процессов неотрицательна:

$$\bar{x}_j \geq 0. \quad (10.ПЗ)$$

Обозначим, как и ранее, через x_t вектор-столбец интенсивности

$$x_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}.$$

А через p_t вектор стоку неотрицательных цен

$$p_t = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)).$$

Вектор $y_t = Ax_t$ – это вектор затрат при заданном векторе интенсивности процессов x_t , а вектор $z_t = Bx_t$ – вектор выпусков.

Модель Неймана описывает замкнутую экономику в том смысле, что для производства продукции в следующем производственном цикле (год t) расходуется продукция, произведенная в предыдущем производственном цикле, т.е. год $(t - 1)$:

$$Ax_t \leq Bx_{t-1}, x_t \geq 0, t = 1, 2, \dots, T, \quad (11.ПЗ)$$

при этом полагается, что задан первоначальный вектор запасов $Bx_0 \geq 0, Bx_0 \neq 0$.

Система (11.ПЗ) это модель Неймана в натуральной форме. Такова и унифицированная форма (5.пЗ) модели динамического межотраслевого баланса.

Модель Неймана в форме (11.ПЗ) имеет скорее теоретический, чем практический характер: в ней в явном виде не отражены накопление и непроемленное потребление. Вместе с тем ранее было показано, что модель межотраслевого баланса в естественной экономической форме, в которой отражены и накопление и непроемленное потребление, приводятся к форме (5.ПЗ), которая имеет вид (11.ПЗ). Следовательно, обратным ходом из (5.ПЗ) может быть восстановлена естественная форма (1.ПЗ) – (4.ПЗ). Точно также и в общем случае вектор переменных модели может быть, вообще говоря, расщеплен на части, отражающие накопление и непроемленное потребление, а вслед за этим вся модель претерпит такое расщепление.