

**А.А. Коптев**

**ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
В ЦЕНТРОБЕЖНЫХ  
ПОЛЯХ**

**Часть I**

**ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
БЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА**

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2005

**А.А. Коптев**

**ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
В ЦЕНТРОБЕЖНЫХ  
ПОЛЯХ**

**Часть I**

**ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА**

---

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2005

УДК 532  
ББК В253.31  
К658

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
*М.Б. Генералов*

Кандидат технических наук, профессор  
*А.С. Клинков*

**Коптев А.А.**

К658 Движение жидкости в центробежных полях. Ч. I. Течение жидкости вблизи вращающегося диска. М.: "Издательство Машиностроение-1", 2005. 240 с.

Представлено фундаментальное исследование гидродинамики: движение жидкости вблизи вращающихся поверхностей дисков. Разработан ряд программ численного интегрирования уравнений Навье-Стокса в цилиндрической системе координат. Рассмотрены решения течений в пограничных слоях при различных граничных условиях.

Для инженерно-технических работников, занимающихся проектированием центробежных аппаратов, а также научных сотрудников, аспирантов. Может быть полезна студентам технических вузов.

УДК 532  
ББК В253.31

ISBN 5-94275-180-3

© Коптев А.А., 2005  
© "Издательство Машиностроение-1",  
2005

Научное издание

КОПТЕВ Андрей Алексеевич

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
В ЦЕНТРОБЕЖНЫХ ПОЛЯХ

Часть I

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

Монография

Редактор З. Г. Чернова  
Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Рыжкова

Подписано к печати 18.04.2005.  
Формат 60×84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Объем: 13,95 усл. печ. л.; 14,05 уч.-изд. л.  
Тираж 100 экз. С. 227<sup>М</sup>

"Издательство Машиностроение-1",  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Подготовлено к печати и отпечатано в издательско-полиграфическом центре  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

В разных отраслях промышленности в технологических процессах и аппаратах для интенсификации гидромеханики, тепло- и массообмена используются центробежные силы. Это – центрифугирование, сепараторы, центробежные распылители и разбрызгиватели, центробежные насосы, ротационные абсорберы и теплообменники и др. В природе преобладает явление вращательного движения сплошной среды. Поступательное, прямолинейное движение – это частный случай на ограниченном участке линии движения, либо искусственно организованный человеком. Природа не "любит" прямолинейности. Конкурентом является колебательное движение, которое также циклическое, как и круговое движение.

В природе центробежные движения вечны кроме нами упомянутых случаев в технике. Мы наблюдаем смерчи, торнадо, тайфуны, циклоны в атмосфере, водовороты в реках и океанах и знаем, что вращение макрокосмических объектов – это устойчивое состояние материи, микромире – это то же самое (Spin).

В предлагаемой работе мы рассмотрим узкий круг задач, связанных с движением сплошной вязкой среды в различных технически и конструктивно организованных устройствах вблизи гладких вращающихся дисков (конусов) с различными граничными условиями.

Мы не ставим целью обзор многочисленных работ в этом направлении, а будем ссылаться только на классические. Представим только наши изыскания, которые являются скромным дополнением к тем знаниям, которые были получены достойными исследователями в рассматриваемой области.

За основу теоретических исследований положим уравнения Навье-Стокса [1], [2] в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  в общем виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ &+ v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где  $u, v, w$  – соответственно радиальная, окружная и осевая составляющие скорости;  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости;  $\rho$  – плотность жидкости;  $F_r, F_\varphi, F_z$  – проекции массовых сил на оси координат;  $t$  – время;  $p$  – давление.

В дальнейшем будем рассматривать установившееся движение. Тогда производные по времени равны нулю,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .

При осесимметричном движении производные по координате  $\varphi$  также будут равны нулю,  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ . Кроме того, логично положить для рассматриваемых задач, что массовые силы  $F_r = F_\varphi = F_z = 0$ .

При таких условиях уравнения (1), (2) принимают вид:

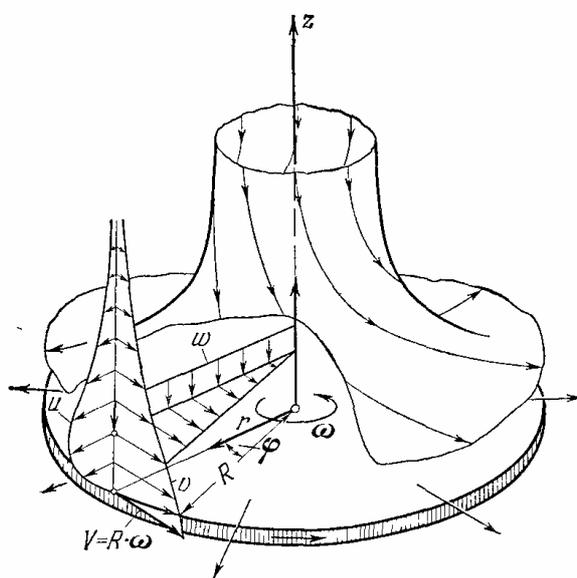
$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Известны несколько аналитических решений дифференциальных уравнений (3), например, движение жидкости в трубе, течение в зазоре между вращающимися цилиндрами. В большинстве случаев необходимо численное интегрирование, которое мы использовали в своих исследованиях.

## 1. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

Примером точного решения уравнений Навье-Стокса является течение вблизи плоского диска, равномерно вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска. Жидкость вдали от диска принимаем покоящейся. Вследствие трения слой жидкости, непосредственно прилегающий к диску, увлекается последним и под действием центробежной силы отбрасывается наружу от диска. Взамен отброшенной жидкости к диску притекает в осевом направлении новая жидкость, которая также увлекается диском и опять отбрасывается наружу. Следовательно, в данном случае мы имеем полностью трехмерное течение. Перспективное изображение этого течения показано на рис. 1.1.

Вычисления выполним сначала для неограниченной вращающейся плоскости, после чего, пренебрегая концевым эффектом, перенесем полученный результат на случай круглого диска, имеющего конечный диаметр  $D = 2R$ .



**Рис. 1.1. Течение в окрестности диска, вращающегося в покоящейся жидкости**

Для рассматриваемой задачи справедливы уравнения (3).

Граничные условия, с одной стороны, определяются условиями прилипания к вращающейся поверхности и непроницаемостью диска

$$u = 0, \quad v = \omega r, \quad w = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (1.1)$$

с другой стороны, при  $z$ , равном некоторой конечной величине  $z_0$  (или бесконечности), в зависимости от рассматриваемой задачи могут принимать различные выражения. Для интегрирования системы уравнений (3) удобно ее привести к безразмерному виду. Примем вместо  $z$  безразмерное расстояние от поверхности диска

$$\varepsilon = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \quad (1.2)$$

Также примем, что составляющие скорости и давления определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega r H'(\varepsilon); \\ v &= \omega r G(\varepsilon); \\ w &= -2\sqrt{\omega v} H(\varepsilon); \\ p &= -C \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - 2\rho \omega v P(\varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

где  $C$  – постоянная, подлежащая численному определению в результате интегрирования уравнений (1.4) при конкретных граничных условиях.

В результате подстановки выражений  $\varepsilon$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$  по уравнениям (1.2) и (1.3) в систему уравнений (3) получим три дифференциальных уравнения для определения неизвестных функций  $H$ ,  $G$ ,  $P$ :

$$\left. \begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'); \\ P' &= H'' + 2HH', \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где  $'$ ,  $''$ ,  $'''$  – соответствующие производные по  $\varepsilon$ .

Уравнение неразрывности системы (3) при этом удовлетворяется тождественно.

Граничными условиями системы уравнений (1.4), вместо условий (1.1), будут

$$H = 0, \quad H' = 0, \quad G = 1, \quad P = P(0) \quad \text{при } \varepsilon = 0. \quad (1.5)$$

Примем на внешней границе

$$H' = 0, \quad G = s \quad \text{при } \varepsilon = \varepsilon_0. \quad (1.6)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1.4) при  $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$ ,  $C = 0$ ,  $s = 0$  впервые приближенным способом было получено Т. Карманом [3], уточнено впоследствии В. Кохреном [4] посредством разложения функций  $H$  и  $G$  в степенные ряды при  $\varepsilon = 0$  и асимптотического разложения при больших значениях  $\varepsilon$  и их смыкании при некотором среднем значении  $\varepsilon^*$ . Представим вышеуказанные разложения функций системы (1.4).

Для разложения функций  $H$  и  $G$  в степенные ряды Тейлора продифференцируем первые два уравнения системы (1.4)  $n$  раз:

$$\begin{aligned} H^{IV} &= -2(HH''' + GG^I); \\ H^V &= -2(HH^{IV} + H^I H''' + GG^{II} + G^I G^I); \\ H^{VI} &= -2(HH^V + 2H^I H^{IV} + H^{II} H''' + GG^{III} + 3G^I G^{II}); \\ H^{VII} &= -2(HH^{VI} + 3H^I H^V + 3H^{II} H^{IV} + H^{III} H''' + GG^{IV} + \\ &\quad + 4G^I G^{III} + 3G^{II} G^{II}); \\ &\dots \dots \dots (1.7). \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{III} &= 2(H^{II} G - HG^{II}); \\ G^{IV} &= 2(H^{III} G + H^{II} G^I - H^I G^{II} - HG^{III}); \\ G^V &= 2(H^{IV} G + 2H^{III} G^I - 2H^I G^{III} - HG^{IV}); \\ G^{VI} &= 2(H^V G + 3H^{IV} G^I + 2H^{III} G^{II} - 2H^{II} G^{III} - 3H^I G^{IV} - HG^V); \\ G^{VII} &= 2(H^{VI} G + 4H^V G^I + 5H^{IV} G^{II} - 5H^{II} G^{IV} - 4H^I G^V - HG^{VI}); \\ &\dots \dots \dots (1.8) \end{aligned}$$

Имея в виду граничные условия в начале координат (1.5) и обозначив  $H''(0) = A$ ,  $G^I(0) = B$ , после поочередной подстановки их в уравнения (1.4), (1.7) и (1.8) получим:

$$\left. \begin{aligned}
H(0) &= 0; \\
H^I(0) &= 0; \\
H^{II}(0) &= A; \\
H^{III}(0) &= (C-1); \\
H^{IV}(0) &= -2B; \\
H^V(0) &= -2B^2; \\
H^{VI}(0) &= -2A-2AC; \\
H^{VII}(0) &= -8AB-2(C^2-1); \\
H^{VIII}(0) &= 16B-8BC+4AB^2; \\
H^{IX}(0) &= -24A^2+44B^2-4B^2C+40A^2C; \\
H^X(0) &= 88B^3+104A-232AC+112A^2B+144AC^2; \\
&\dots \dots \dots (1.9) \dots \dots \dots \\
G(0) &= 0; \\
G^I(0) &= B; \\
G^{II}(0) &= 0; \\
G^{III}(0) &= 2A; \\
G^{IV}(0) &= 2AB+2(C-1); \\
G^V(0) &= -8B+4BC; \\
G^{VI}(0) &= -16B^2-8A^2; \\
G^{VII}(0) &= 16A-24AC-16B^3-20A^2B; \\
G^{VIII}(0) &= 88AB-112BAC+24C^2+40C-16; \\
G^{IX}(0) &= -168B-136BC^2+224A^3+248AB^2+320BC; \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned} \right\}$$

Разложения функции  $H(\varepsilon)$  и  $G(\varepsilon)$  около  $\varepsilon = 0$  в степенные ряды Тейлора

$$\left. \begin{aligned}
H(\varepsilon) &= H(0) + \frac{H^I(0)}{1!} \varepsilon + \frac{H^{II}(0)}{2!} \varepsilon^2 + \frac{H^{III}(0)}{3!} \varepsilon^3 + \frac{H^{IV}(0)}{4!} \varepsilon^4 + \\
&\quad + \frac{H^V(0)}{5!} \varepsilon^5 + \frac{H^{VI}(0)}{6!} \varepsilon^6 + \dots; \\
H^I(\varepsilon) &= H^I(0) + \frac{H^{II}(0)}{1!} \varepsilon + \frac{H^{III}(0)}{2!} \varepsilon^2 + \frac{H^{IV}(0)}{3!} \varepsilon^3 + \frac{H^V(0)}{4!} \varepsilon^4 + \\
&\quad + \frac{H^{VI}(0)}{5!} \varepsilon^5 + \dots; \\
G(\varepsilon) &= G(0) + \frac{G^I(0)}{1!} \varepsilon + \frac{G^{II}(0)}{2!} \varepsilon^2 + \frac{G^{III}(0)}{3!} \varepsilon^3 + \frac{G^{IV}(0)}{4!} \varepsilon^4 + \\
&\quad + \frac{G^V(0)}{5!} \varepsilon^5 + \dots
\end{aligned} \right\} (1.10)$$

Подстановка выражений (1.9) в (1.10) при  $C = 0$  приводит к следующим выражениям рядов разложения:

$$\left. \begin{aligned}
H(\varepsilon) &= \frac{A}{2!}\varepsilon^2 - \frac{1}{3!}\varepsilon^3 - \frac{2B}{4!}\varepsilon^4 - \frac{2B^2}{5!}\varepsilon^5 - \frac{2A}{6!}\varepsilon^6 + \frac{2-8AB}{7!}\varepsilon^7 + \\
&+ \frac{16B+4AB^2}{8!}\varepsilon^8 + \frac{44B^2-24A^2}{9!}\varepsilon^9 + \\
&+ \frac{88B^3+104A+112A^2B}{10!}\varepsilon^{10} + \dots; \\
H^1(\varepsilon) &= A\varepsilon - \frac{1}{2!}\varepsilon^2 - \frac{2B}{3!}\varepsilon^3 - \frac{2B^2}{4!}\varepsilon^4 - \frac{2A}{5!}\varepsilon^5 + \frac{2-8AB}{6!}\varepsilon^6 + \\
&+ \frac{16B+4AB^2}{7!}\varepsilon^7 + \frac{44B^2-24A^2}{8!}\varepsilon^8 + \\
&+ \frac{88B^3+104A+112A^2B}{9!}\varepsilon^9 + \dots; \\
G(\varepsilon) &= 1 + B\varepsilon + \frac{2A}{3!}\varepsilon^3 + \frac{2AB-2}{4!}\varepsilon^4 - \frac{8B}{5!}\varepsilon^5 - \frac{16B^2+8A^2}{6!}\varepsilon^6 + \\
&+ \frac{16A-16B^3-20A^2B}{7!}\varepsilon^7 + \frac{88AB-16}{8!}\varepsilon^8 + \\
&+ \frac{224A^3+248AB^2-168B}{9!}\varepsilon^9 + \dots
\end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

### 1.1. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ ВДОЛЬ РАДИУСА

Рассмотрим разложение функций  $H$  и  $G$  в асимптотические ряды при  $C = 0$  и значительных величинах  $\varepsilon$ . Проанализируем первые два уравнения системы (1.4):

$$\left. \begin{aligned}
H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH'', \\
G'' &= 2(H'G - HG').
\end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ,  $H' \rightarrow 0$ ,  $G \rightarrow 0$ ,  $H \rightarrow H_\infty \rightarrow W$ , где  $W$  – значение безразмерной аксиальной скорости  $H$  в бесконечности, т.е. на достаточно большом удалении от поверхности диска. Значения функций малы, за исключением  $H$ . Значит члены уравнений (1.1.1)  $H'H'$ ,  $G^2$ ,  $H'G$  второго порядка малости в сравнении с остальными слагаемыми. Можем записать

$$H''' = -2HH'', \quad G'' = -2HG$$

или

$$H''' = -2WH'', \quad G'' = -2WG. \quad (1.1.2)$$

После интегрирования (1.1.2) получим

$$H'' = a_0 e^{-2W\varepsilon}, \quad G' = b_0 e^{-2W\varepsilon}, \quad (1.1.3)$$

где  $a_0, b_0$  – постоянные интегрирования.

Последующее интегрирование (1.1.3) приводит к выражениям

$$H' = \frac{-a_0}{2W} e^{-2W\varepsilon}, \quad H = W + \frac{a_0}{4W^2} e^{-2W\varepsilon}, \quad G = \frac{-b_0}{2W} e^{-2W\varepsilon}.$$

Обозначив  $a = -\frac{a_0}{2W}$ ,  $b = -\frac{b_0}{2W}$ , окончательно в первом приближении имеем

$$H = W - \frac{a}{2W} e^{-2W\varepsilon};$$

$$H' = ae^{-2W\varepsilon}, \quad G = be^{-2W\varepsilon}; \quad (1.1.4)$$

$$H'' = -2aWe^{-2W\varepsilon}, \quad G' = -2bWe^{-2W\varepsilon}.$$

Вторые члены разложения находим из соотношений, вытекающих из (1.4):

$$H_1''' + 2WH_1'' = H'H' - G^2 - 2HH'';$$

$$G_1'' + 2WG_1' = 2H'G - 2HG'.$$

Значения членов правой стороны

$$\left. \begin{aligned} H_1''' + 2WH_1'' &= \left[ a^2 - b^2 - 2\frac{a}{2W}(-2aW) \right] e^{-4W\varepsilon} = (-a^2 - b^2)e^{-4W\varepsilon}; \\ G_1'' + 2WG_1' &= \left[ 2ab - 2\left(-\frac{a}{2W}\right)(-2Wb) \right] e^{-4W\varepsilon} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

Следует найти частные решения дифференциальных уравнений (1.1.5). Обозначим

$$H_1''' = De^{-4W\varepsilon},$$

тогда

$$H_1'' = -\frac{D}{4W}e^{-4W\varepsilon}.$$

Подставим это в первое уравнение (1.1.5)

$$\left[ D + 2W\left(-\frac{D}{4W}\right) \right] e^{-4W\varepsilon} = -(a^2 + b^2)e^{-4W\varepsilon},$$

откуда

$$D = -2(a^2 + b^2)$$

и

$$H_1''' = -2(a^2 + b^2)e^{-4W\varepsilon}.$$

После интегрирования последнего уравнения получим:

$$H_1'' = \frac{a^2 + b^2}{2W}e^{-4W\varepsilon}, \quad H_1' = -\frac{a^2 + b^2}{8W^2}e^{-4W\varepsilon}, \quad H_1 = \frac{a^2 + b^2}{32W^3}e^{-4W\varepsilon}. \quad (1.1.6)$$

Из второго уравнения (1.1.5) видим, что

$$G_1 = 0. \quad (1.1.7)$$

По аналогии третьи члены разложения найдем из выражений

$$\left. \begin{aligned} H_2''' + 2WH_2'' &= H'H_1'' + H_1'H'' - GG_1 - G_1G' - 2HH_1'' - 2H_1H''; \\ G_2'' + 2WG_2' &= 2H'G_1 + 2H_1G' - 2HG_1' - 2H_1G'. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.8)$$

Подстановка в правую часть уравнений (1.1.8) значений функций по (1.1.4), (1.1.6) и (1.1.7) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} H_2''' + 2WH_2'' &= \frac{3a(a^2 + b^2)}{8W^2}e^{-6W\varepsilon}; \\ G_2'' + 2WG_2' &= -\frac{b(a^2 + b^2)}{8W^2}e^{-6W\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Частными решениями дифференциальных уравнений (1.1.9) являются

$$\begin{aligned} H_2 &= -\frac{a(a^2 + b^2)}{384W^5}e^{-6W\varepsilon}; \quad H_2' = \frac{a(a^2 + b^2)}{64W^4}e^{-6W\varepsilon}; \\ H_2'' &= -\frac{3a(a^2 + b^2)}{32W^4}e^{-6W\varepsilon}; \\ G_2 &= -\frac{b(a^2 + b^2)}{192W^4}e^{-6W\varepsilon}; \quad G_2' = \frac{b(a^2 + b^2)}{32W^3}e^{-6W\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Следующие члены асимптотического разложения функций  $H$ ,  $G$  найдем из решения уравнений

$$\left. \begin{aligned} H_3''' + 2WH_3'' &= H'H_2'' + H_2'H'' + H_1'H_1'' - GG_2 - \\ &\quad - G_2G' - G_1G_1' - 2HH_2'' - 2H_2H'' - 2H_1H_1''; \\ G_3'' + 2WG_3' &= 2[H'G_2 + H_2G' + H_1G_1' - HG_2' - H_2G' - H_1G_1']. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

Используя значения функций (1.1.4), (1.1.6), (1.1.7) и (1.1.10), приводим уравнения (1.1.11) к виду

$$\begin{aligned} H_3''' + 2WH_3'' &= \frac{-(a^2 + b^2)(17a^2 + b^2)}{192W^4}e^{-8W\varepsilon}; \\ G_3'' + 2WG_3' &= \frac{ab(a^2 + b^2)}{24W^4}e^{-8W\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Частные решения дифференциальных уравнений (1.1.12) имеют вид

$$H_3 = \frac{(a^2 + b^2)(17a^2 + b^2)}{73728 W^7} e^{-8W\varepsilon}; \quad H_3' = -\frac{(a^2 + b^2)(17a^2 + b^2)}{9216 W^6} e^{-8W\varepsilon};$$

$$H_3'' = \frac{(a^2 + b^2)(17a^2 + b^2)}{1152 W^5} e^{-8W\varepsilon}; \quad G_3 = \frac{ab(a^2 + b^2)}{1152 W^6} e^{-8W\varepsilon};$$

$$G_3' = -\frac{ab(a^2 + b^2)}{144 W^5} e^{-8W\varepsilon}. \quad (1.1.13)$$

Последующие члены разложения определяются из решения следующих выражений

$$\left. \begin{aligned} H_4''' + 2WH_4'' &= 2(H'H_3' - GG_3 - HH_3'' - H_3H'' - HH_3'' - H_3H'''); \\ G_4'' + 2WG_4' &= 2(H'G_3 + H_3'G + H_1'G_2 + H_2'G_1 - HG_3' - H_3G' - H_1G_2' - H_2G_1'). \end{aligned} \right| \quad (1.1.14)$$

Подстановка в правую часть уравнений (1.1.14) значений функций из формул (1.1.4), (1.1.6), (1.1.7), (1.1.10) и (1.1.13) приводит к выражениям

$$H_4''' + 2WH_4'' = \frac{5a(a^2 + b^2)(61a^2 + 13b^2)}{18\,432 W^6} e^{-10W\varepsilon};$$

$$G_4'' + 2WG_4' = -\frac{b(a^2 + b^2)(53a^2 + 5b^2)}{12\,288 W^6} e^{-10W\varepsilon}. \quad (1.1.15)$$

Частными решениями дифференциальных уравнений (1.1.15) являются

$$H_4 = -\frac{a(a^2 + b^2)(61a^2 + 13b^2)}{2\,951\,520 W^9} e^{-10W\varepsilon};$$

$$H_4' = \frac{a(a^2 + b^2)(61a^2 + 13b^2)}{295\,152 W^8} e^{-10W\varepsilon};$$

$$H_4'' = \frac{5a(a^2 + b^2)(61a^2 + 13b^2)}{147\,576 W^7} e^{-10W\varepsilon};$$

$$G_4 = -\frac{b(a^2 + b^2)(53a^2 + 5b^2)}{983\,240 W^8} e^{-10W\varepsilon};$$

$$G_4' = \frac{b(a^2 + b^2)(53a^2 + 5b^2)}{98\,324 W^7} e^{-10W\varepsilon}. \quad (1.1.16)$$

Суммируя члены разложения (1.1.4), (1.1.6), (1.1.7), (1.1.10), (1.1.13) и (1.1.16), окончательно получим асимптотические выражения для безразмерных аксиальной  $H$ , радиальной  $H'$  и окружной  $G$  скоростей:

$$H = W - \frac{a}{2W} e^{-2W\varepsilon} + \frac{a^2 + b^2}{32 W^3} e^{-4W\varepsilon} - \frac{a(a^2 + b^2)}{384 W^5} e^{-6W\varepsilon} +$$

$$+ \frac{(a^2 + b^2)(17a^2 + b^2)}{73\,728 W^7} e^{-8W\varepsilon} - \frac{a(a^2 + b^2)(61a^2 + 13b^2)}{2\,951\,520 W^9} e^{-10W\varepsilon} + \dots;$$

$$H' = ae^{-2W\varepsilon} - \frac{a^2 + b^2}{8 W^2} e^{-4W\varepsilon} + \frac{a(a^2 + b^2)}{64 W^4} e^{-6W\varepsilon} -$$

$$- \frac{(a^2 + b^2)(17a^2 + b^2)}{9216 W^6} e^{-8W\varepsilon} + \frac{a(a^2 + b^2)(61a^2 + 13b^2)}{295\,152 W^8} e^{-10W\varepsilon} - \dots;$$

$$G = be^{-2W\varepsilon} - \frac{b(a^2 + b^2)}{192 W^4} e^{-6W\varepsilon} + \frac{ab(a^2 + b^2)}{1152 W^6} e^{-8W\varepsilon} - \frac{b(a^2 + b^2)(53a^2 + 5b^2)}{983\,240 W^8} e^{-10W\varepsilon} + \dots, \quad (1.1.17)$$

где  $W$  – значение функции  $H$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Высшие производные легко вычисляются из (1.1.17).

В результате проведенного анализа мы получили полное решение рассматриваемой задачи, интегрирование нелинейной системы дифференциальных уравнений (1.4), путем разложения входящих в нее функций в степенные ряды Тейлора вблизи  $\varepsilon = 0$  (1.1.1) и экспоненциальные ряды при значительно больших  $\varepsilon$  (1.1.17). Необходимо теперь значения функций, рассчитанных по (1.4) и (1.1.17), приравнять при некотором промежуточном значении  $\varepsilon = \varepsilon^*$ . Подлежат определению численно пять постоянных величин  $A, B, a, b, W$ . Они определяются из условий равенства функций  $H(\varepsilon^*), H'(\varepsilon^*), G(\varepsilon^*)$  и их производных  $H''(\varepsilon^*), G'(\varepsilon^*)$ , исходя из уравнений (1.1.1) и (1.1.17), т.е. условий гладкого смыкания. Это и есть как бы пять "граничных условий". Точность решения может быть оценена сравнением численных значений  $H''(\varepsilon^*), G''(\varepsilon^*)$ , рассчитанных по (1.4) и (1.1.1) или (1.1.17).

Определив таким образом поле скоростей из совместного решения первых двух дифференциальных уравнений системы (1.4), из третьего уравнения этой системы найдем производную безразмерной скорости давления

$$P' = H'' - 2HH'$$

и после ее интегрирования

$$P(0) - P = H' + HH,$$

где  $P(0)$  – безразмерное давление в начале координат при  $r = 0, z = 0$  или  $\varepsilon = 0$ , т.е. в критической точке.

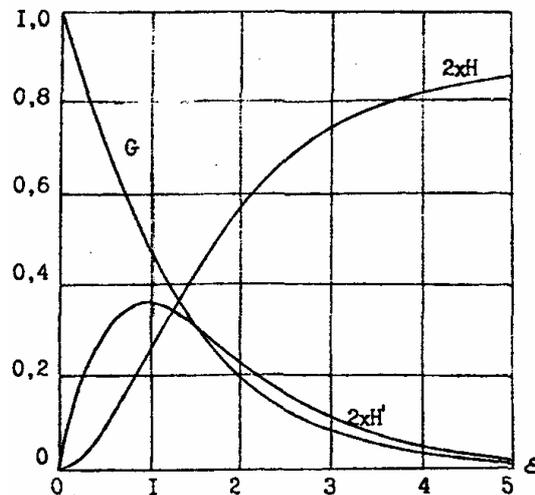


Рис. 1.1.1. Графики безразмерных скоростей  $H(\varepsilon), H'(\varepsilon), G(\varepsilon)$  решения уравнений (1.4) Т. Кармана–В. Кохрена

По вышеописанному алгоритму нами была составлена программа численного решения задачи и получены достаточно точные результаты расчетов при  $\varepsilon^* = 10$ , которые представлены в табл. 1.1.1 и графически изображены на рис. 1.1.1. В частности имеем с высокой точностью  $H''(0) = A = 0,51023262$ ,  $G(0) = B = -0,61592201$ ,  $a = 0,00013331$ ,  $b = 0,00017328$  при  $\varepsilon^* = 10$ ,  $H(\infty) = W = 0,44223706$  [5].

Для сравнения приведем значения начальных параметров, вычисленных В. Кохреном:  $A = 0,510$ ,  $B = -0,615$ ,  $W = 0,443$ .

Полученные данные (табл. 1.1.1) и их сравнения с результатами В. Кохрена, во-первых, позволили сделать заключение о хорошей работоспособности составленной нами программы для решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (1.4), во-вторых, значительно повысить точность численного решения, в-третьих, анализировать и решать аналогичные задачи (1.4) с другими граничными условиями.

Итак, наши результаты решения задачи Т. Кармана представлены с точки зрения системности, сравнения и уточнения. Но мы здесь преследуем другую основную цель: попытаться найти иное отличное от ставшего классическим поле скоростей, удовлетворяющее нелинейную систему дифференциальных уравнений (1.4) и граничные условия (1.5), (1.6). Эту мысль подтверждает и то, что при смыкании степенного и асимптотического разложения из пяти уравнений (1.1.1) и (1.1.17) нужно найти корни алгебраической нелинейной системы из пяти уравнений (1.1.18).





$$\begin{aligned}
H: & \frac{A}{2!}\varepsilon^{*2} - \frac{1}{3!}\varepsilon^{*3} - \frac{2B}{4!}\varepsilon^{*4} - \frac{2B^2}{5!}\varepsilon^{*5} - \frac{2A}{6!}\varepsilon^{*6} + \frac{2-8AB}{7!}\varepsilon^{*7} + \\
& + \frac{16B+4AB^2}{8!}\varepsilon^{*8} + \frac{44B^2-24A^2}{9!}\varepsilon^{*9} + \dots = W - \frac{a}{2W}e^{-2W\varepsilon^*} + \\
& + \frac{a^2+b^2}{32W^3}e^{-4W\varepsilon^*} - \frac{a(a^2+b^2)}{384W^5}e^{-6W\varepsilon^*} + \dots; \\
H': & A\varepsilon^* - \frac{1}{2!}\varepsilon^{*2} - \frac{2B}{3!}\varepsilon^{*3} - \frac{2B^2}{4!}\varepsilon^{*4} - \frac{2A}{5!}\varepsilon^{*5} + \frac{2-8AB}{6!}\varepsilon^{*6} + \\
& + \frac{16B+4AB^2}{7!}\varepsilon^{*7} + \frac{44B^2-24A^2}{8!}\varepsilon^{*8} + \dots = ae^{-2W\varepsilon^*} - \\
& - \frac{a^2+b^2}{8W^2}e^{-4W\varepsilon^*} + \frac{a(a^2+b^2)}{64W^4}e^{-6W\varepsilon^*} + \dots; \\
H'': & A - \varepsilon^* - \frac{2B}{2!}\varepsilon^{*2} - \frac{2B^2}{3!}\varepsilon^{*3} - \frac{2A}{4!}\varepsilon^{*4} + \frac{2-8AB}{5!}\varepsilon^{*5} + \\
& + \frac{16B+4AB^2}{6!}\varepsilon^{*6} + \frac{44B^2-24A^2}{7!}\varepsilon^{*7} + \dots = -2aWe^{-2W\varepsilon^*} + \\
& + \frac{a^2+b^2}{2W}e^{-4W\varepsilon^*} - \frac{3a(a^2+b^2)}{32W^3}e^{-6W\varepsilon^*} + \dots; \\
G: & 1 + B\varepsilon^* + \frac{2A}{3!}\varepsilon^{*3} + \frac{2AB-2}{4!}\varepsilon^{*4} - \frac{8B}{5!}\varepsilon^{*5} - \frac{16B^2+8A^2}{6!}\varepsilon^{*6} + \dots = \\
& = be^{-2W\varepsilon^*} - \frac{b(a^2+b^2)}{192W^4}e^{-6W\varepsilon^*} + \frac{ab(a^2+b^2)}{1152W^6}e^{-8W\varepsilon^*} - \dots; \\
G': & B + \frac{2A}{2!}\varepsilon^{*2} + \frac{2AB-2}{3!}\varepsilon^{*3} - \frac{8B}{4!}\varepsilon^{*4} - \frac{16B^2-8A^2}{5!}\varepsilon^{*5} + \dots = \\
& = -2bWe^{-2W\varepsilon^*} + \frac{b(a^2+b^2)}{32W^3}e^{-6W\varepsilon^*} - \frac{ab(a^2+b^2)}{144W^5}e^{-8W\varepsilon^*} + \dots
\end{aligned}$$

(1.1.18)

Как видим, эта система алгебраических уравнений нелинейна относительно  $A, B, a, b, W$ , решение которой в действительной области может быть не единственным. После продолжительных поисков нам удалось найти второе решение задачи Т. Кармана. Оно представлено в табл. 1.1.2 и графически на рис. 1.1.2, причем положено  $\varepsilon^* = 30$ .













Для сравнения с результатами первого решения имеем  $H''(0) = A = 0,49904292$ ,  $G'(0) = B = -0,56374645$ ,  $W = H(\infty) = 0,22386175$ ,  $a = 0,000872544$ ,  $b = -0,000351585$  при  $\varepsilon^* = 30$ .

Анализируя полученное решение, видим, что функции безразмерных скоростей  $H$ ,  $H'$ ,  $G$  имеют ряд экстремумов, в отличие от первого решения. Так, функция  $H$  имеет два экстремума:  $H_{\max} \approx 0,228424$  при  $\varepsilon \approx 2,2$ ;  $H_{\min} \approx -1,248455$  при  $\varepsilon \approx 10,4$ ; функция  $H'$  имеет три экстремума:  $H'_{\max} \approx 0,163109$  при  $\varepsilon \approx 0,8$ ;  $H'_{\min} \approx -0,287129$  при  $\varepsilon \approx 5,7$ ;  $H'_{\max} \approx 0,198018$  при  $\varepsilon \approx 14,6$ ; функция  $G$  имеет один экстремум:  $G_{\min} \approx -0,468596$  при  $\varepsilon \approx 10,0$ . Отметим, что в первом решении мы имели только один экстремум функции  $H'_{\max} \approx 0,180700$  при  $\varepsilon \approx 0,9$ , остальные функции скоростей монотонны, т.е. второе решение имеет более сложную картину скоростей вблизи вращающегося диска.

## 1.2. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ ВДОЛЬ РАДИУСА

Первые два решения о движении жидкости вблизи вращающегося диска, Кармана-Кохрена и наше, выполнены в предположении отсутствия градиента давления вдоль радиуса, т.е.  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ . Результатом стало наличие аксиальной составляющей скорости жидкости в бесконечности по (1.3)

$$w_{z \rightarrow \infty} = -2\sqrt{\omega\nu}H_{\infty} = -2\sqrt{\omega\nu}W.$$

В первом случае (решение Кармана)  $W = 0,44223706$ , во втором, (полученном нами решении)  $W = 0,22386175$ , т.е. аксиальная скорость  $w_{\infty}$  направлена к поверхности диска. Вращательное же движение жидкости в бесконечности отсутствует. Но возможно предположить обратное: вследствие вязкого трения поверхности вращающегося диска в тангенциальном направлении возникает окружная составляющая скорости (1.3)  $v = \omega r G(\varepsilon)$ .

При достаточно продолжительном времени вращательное движение жидкости может распространиться на большое расстояние от поверхности диска, т.е.  $G(\infty)$  имеет некоторую подлежащую определению величину. Осевая же составляющая скорости в бесконечности стремиться к нулю.

Для решения поставленной задачи воспользуемся дифференциальными уравнениями (1.4).

$$\begin{aligned} H''' &= C + H'^2 - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'); \\ P' &= H'' + 2HH'' \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Граничными условиями для решения системы уравнений (1.2.1) будут

$$\begin{aligned} H = 0, \quad H' = 0, \quad G = 1, \quad P = P(0) \quad \text{при } \varepsilon = 0, \\ H \rightarrow 0, \quad H' \rightarrow 0, \quad G \rightarrow s \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Отметим, что коэффициент давления  $C \neq 0$ .

Алгоритм совместного решения первых двух дифференциальных уравнений (1.2.1) разработаем из следующих соображений.

1. Разделим второе уравнение (1.2.1) на  $G^2$ , получим

$$\frac{G''}{G^2} = 2 \left( \frac{H'G - HG'}{G^2} \right).$$

Проинтегрировав его, имеем

$$\int \frac{G''}{G^2} d\varepsilon = 2 \frac{H}{G} \quad \text{или} \quad H = \frac{1}{2} G \int \frac{G''}{G^2} d\varepsilon.$$

Продифференцируем последнее уравнение три раза и подставим в первое уравнение (1.2.1):

$$H' = \frac{1}{2} \left[ G' \int \frac{G''}{G^2} d\varepsilon + \frac{G''}{G} \right];$$

$$H'' = \frac{1}{2} \left[ G'' \int \frac{G''}{G^2} d\varepsilon + \frac{G'''}{G} \right];$$

$$H''' = \frac{1}{2} \left[ G''' \int \frac{G''}{G^2} d\varepsilon + \frac{GG^{IV} - G'G''' + G''G''}{G^2} \right],$$

и после подстановки получим

$$\begin{aligned} & (G'G' - 2GG'') \left( \int \frac{G''}{G^2} \right)^2 - \left( 4G'' - 2 \frac{G'G''}{G} \right) \int \frac{G''}{G^2} d\varepsilon - \\ & - \left( 4G^2 + \frac{2GG^{IV} - 2G'G''' + G''G''}{G^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Разрешив уравнение (1.2.3) относительно  $\int \frac{G''}{G^2} d\varepsilon$  как квадратное и продифференцировав полученное выражение, будем иметь достаточно громоздкое дифференциальное уравнение относительно  $G$ . Оставим эти преобразования за рамками исследования.

2. Очевидным является следующий порядок разделения переменных  $H, G$ . Выразим из первого уравнения (1.2.1)

$$G = \sqrt{C + H'H' - 2HH'' - H'''}.$$

Дважды продифференцируем его:

$$\begin{aligned} G' &= 0,5(C + H'H' - 2HH'' - H''')^{-0,5} (-2HH''' - H^{IV}); \\ G'' &= 0,5 \left[ -0,5(C + H'H' - 2HH'' - H''')^{-1,5} (2HH''' + H^{IV})^2 + \right. \\ & \left. + (C + H'H' - 2HH'' - H''')^{-0,5} (-2HH^{IV} - 2H'H'''' - H^V) \right]. \end{aligned}$$

После подстановки записанных выражений во второе уравнение (1.2.1) и некоторых преобразований получим дифференциальное уравнение относительно функции  $H$

$$\begin{aligned} & -0,5(2HH''' + H^{IV})^2 - (C + H'H' - 2HH'' - H''') \times \\ & \times (-2HH^{IV} - 2H'H'''' - H^V) = 2 \left[ 2H'(C + H'H' - 2HH'' - H''')^2 + \right. \\ & \left. + H(C + H'H' - 2HH'' - H''') (2H''H'''' + H^{IV}) \right]. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Уравнение (1.2.4) тоже громоздкое и неудобное для численного интегрирования.

3. На наш взгляд более продуктивным является следующий подход.

Продифференцируем уравнение из (1.2.1):

$$G'' = 2H'G' - 2HG'; \quad (1.2.5)$$

$$G''' = 2H''G' - 2HG'' . \quad (1.2.6)$$

Умножим (1.2.5) на  $G$  и на  $G'$ , а (1.2.6) на  $G$ :

$$G''G = 2H'GG' - 2HGG'; \quad (1.2.7)$$

$$G''G' = 2H'GG' - 2HG'G'; \quad (1.2.8)$$

$$G'''G = 2H''GG' - 2HG''G . \quad (1.2.9)$$

Продифференцируем несколько раз уравнение также из (1.2.1):

$$H''' = C + H'H' - GG' - 2HH''; \quad (1.2.10)$$

$$H^{IV} = -2HH''' - 2GG'; \quad (1.2.11)$$

$$H^V = -2HH^{IV} - 2H'H'''' - 2GG'' - 2GG'; \quad (1.2.12)$$

$$H^{VI} = -2HH^V - 4H'H^{IV} - 2H''H'''' - 2GG''' - 6G'G'' . \quad (1.2.13)$$

В семь уравнений (1.2.8) – (1.2.13) входят шесть функциональных комплексов  $GG, GG', G'G', GG'', GG''', G'G''$ , которые из этих уравнений можно исключить алгебраическим путем. Выполнив это, получим дифференциальное уравнение

$$H^{VI} = -4CH'' - 8HH^V + 2H'H^{IV} + 2H''H''' - 16CHH' - \\ - 4H'H'H'' + 8HH''H'' + 16HH'H''' - 20HHH^{IV} - \\ - 16HH'H'H' + 32HHH'. \quad (1.2.14) \quad CHHHH''''''.$$

Уравнение (1.2.14) значительно компактнее, проще, чем выше полученные (1.2.3) и (1.2.4).

Займемся исследованием уравнения (1.2.14). Ввиду того, что при  $\varepsilon \rightarrow \infty H = W \rightarrow 0, C \neq 0$ , первое приближение решения найдем из равенства

$$H^{VI} = -4CH''. \quad (1.2.15)$$

Остальные слагаемые второго порядка малости, как произведения двух, трех функций, стремящихся к нулю.

Запишем уравнение (1.2.15) в форме

$$H^{VI} + 4K^4 H'' = 0, \quad (1.2.16)$$

где обозначили

$$K = \sqrt[4]{C}. \quad (1.2.17)$$

Решением для (1.2.16) будет

$$H = a_1 \sin K\varepsilon \cdot \text{sh}K\varepsilon + a_2 \sin K\varepsilon \cdot \text{ch}K\varepsilon + a_3 \cos K\varepsilon \cdot \text{sh}K\varepsilon + a_4 \cos K\varepsilon \cdot \text{ch}K\varepsilon,$$

или

$$H = b_1 e^{-K\varepsilon} \cdot \sin K\varepsilon + b_2 e^{-K\varepsilon} \cdot \cos K\varepsilon + b_3 e^{K\varepsilon} \cdot \sin K\varepsilon + b_4 e^{K\varepsilon} \cdot \cos K\varepsilon.$$

В случае  $K > 0$  по логике удерживаем первые два слагаемых, так как последние два быстро увеличиваются с ростом  $\varepsilon$ , т.е. следует положить  $b_2 = b_3 = 0$ . Если же  $K < 0$ , то удерживаем последние два слагаемых, полагая тогда  $b_1 = b_2 = 0$ . Будем проводить разложение уравнения (1.2.4) в экспоненциальные ряды, преобразовав последнее уравнение к виду

$$H = A_1 e^{-K\varepsilon} \sin(K\varepsilon + \varphi),$$

где  $b_1 = A_1 \cos \varphi, b_2 = A_1 \sin \varphi, \varphi = \text{const}$ .

Отметим, что  $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, A_1, \varphi$  – постоянные интегрирования, связанные между собой определенными равенствами:

$$H' = A_1 K e^{-K\varepsilon} [-\sin(K\varepsilon + \varphi) + \cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H'' = 2A_1 K^2 e^{-K\varepsilon} [-\cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H''' = 2A_1 K^3 e^{-K\varepsilon} [\sin(K\varepsilon + \varphi) + \cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H^{IV} = 4A_1 K^4 e^{-K\varepsilon} [-\sin(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H^V = 4A_1 K^5 e^{-K\varepsilon} [\sin(K\varepsilon + \varphi) - \cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H^{VI} = 8A_1 K^6 e^{-K\varepsilon} [\cos(K\varepsilon + \varphi)]. \quad (1.2.18)$$

Второй член разложения найдем из частного решения дифференциального уравнения по (1.2.14)

$$H_1^{VI} + 4K^4 H_1'' = -8HH^V + 2H'H^{IV} + 2H''H''' - 16K^4 HH'. \quad (1.2.19)$$

Правая сторона, используя равенства (1.2.18), будет

$$-8HH^V + 2HH^V + 2H'H^{IV} + 2H''H''' - 16K^4 HH' = -8A^2 K^5 e^{-2K\varepsilon}.$$

Таким образом, надо найти частное решение дифференциального уравнения

$$H_1^{VI} + 4K^4 H_1'' = -8A^2 K^5 e^{-2K\varepsilon}.$$

Его решением является

$$H_1 = -\frac{1}{10} \frac{A_1^2}{K} e^{-2K\varepsilon}; \quad H_1' = \frac{2}{10} A_1^2 e^{-2K\varepsilon}; \quad H_1'' = -\frac{4}{10} A_1^2 K e^{-2K\varepsilon};$$

$$H_1''' = \frac{8}{10} A_1^2 K^2 e^{-2K\varepsilon}; \quad H_1^{IV} = -\frac{16}{10} A_1^2 K^3 e^{-2K\varepsilon};$$

$$H_1^V = \frac{32}{10} A_1^2 K^4 e^{-2K\varepsilon}; \quad H_1^{VI} = -\frac{64}{10} A_1^2 K^5 e^{-2K\varepsilon}. \quad (1.2.20)$$

Последующие члены разложения найдем как частные решения дифференциальных уравнений, решая их поочередно:

$$H_2^{VI} + 4K^4 H_2'' = -8(HH_1^V + H_1 H^V) + 2(H'H_1^{IV} + H_1' H^{IV}) + \\ + 2(H''H_1''' + H_1'' H''') - 16K^4(HH_1' + H_1 H') + \\ + (-4H'H'H'' + 8HH''H'' + 16HH'H''' - 20HHH^{IV}),$$

откуда

$$H_2^{VI} + 4K^4 H_2'' = \frac{16}{10} A_1^3 K^4 e^{-3K\varepsilon} [13 \sin(K\varepsilon + \varphi) - \cos(K\varepsilon + \varphi)].$$

Частное решение этого уравнения:

$$H_2 = \frac{1}{200K^2} A_1^3 e^{-3K\varepsilon} [-\sin(K\varepsilon + \varphi) + 4 \cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H_2' = \frac{1}{200K} A_1^3 e^{-3K\varepsilon} [-\sin(K\varepsilon + \varphi) - 13 \cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H_2'' = \frac{1}{200} A_1^3 e^{-3K\varepsilon} [16 \sin(K\varepsilon + \varphi) + 38 \cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H_2''' = \frac{K}{200} A_1^3 e^{-3K\varepsilon} [-86 \sin(K\varepsilon + \varphi) - 98 \cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H_2^{IV} = \frac{K^2}{200} A_1^3 e^{-3K\varepsilon} [356 \sin(K\varepsilon + \varphi) + 208 \cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H_2^V = \frac{K^3}{200} A_1^3 e^{-3K\varepsilon} [-1276 \sin(K\varepsilon + \varphi) - 268 \cos(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H_2^{VI} = \frac{K^4}{200} A_1^3 e^{-3K\varepsilon} [4096 \sin(K\varepsilon + \varphi) - 472 \cos(K\varepsilon + \varphi)]. \quad (1.2.21)$$

Далее имеем

$$H_3^{VI} + 4K^4 H_3'' = -8(HH_2^V + H_2 H^V + H_1 H_1^V) + 2(H'H_2^{IV} + H_2' H^{IV} + H_1' H_1^{IV}) + \\ + 2(H''H_2''' + H_2'' H''') - 16K^4(HH_2' + H_2 H' + H_1 H_1') - \\ - 4(H'H'H_2'' + H_2' H''H'' + H_1' H'H'') + 8(HH''H_2'' + HH_2''H'' + H_1 H''H'') + \\ + 16(HH'H_2''' + HH_2'''H'' + H_1 H'H''') - 20(HHH_2^{IV} + HH_2^{IV}H'' + H_1 HHH^{IV}) - \\ - 16HH'H_2''H'' + 32HHH''H'' - 16HHHH''',$$

откуда находим

$$H_3^{VI} + 4K^4 H_3'' = \frac{A_1^3 K^3}{50} e^{-4K\varepsilon} [1328 + 644 \sin 2(K\varepsilon + \varphi) - 1072 \cos 2(K\varepsilon + \varphi)].$$

Частное решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$H_3 = \frac{A_1^4}{663\,000K^3} e^{-4K\varepsilon} [4233 - 355 \sin 2(K\varepsilon + \varphi) + 2048 \cos 2(K\varepsilon + \varphi)];$$

$$H_3' = \frac{A_1^4}{663\,000K^2} e^{-4K\varepsilon} [-16\,932 - 2676 \sin 2(K\varepsilon + \varphi) - 8902 \cos 2(K\varepsilon + \varphi)].$$

(1.2.22)

Аналогичным методом получили еще один член разложения. Из-за громоздкости вывода запишем конечный его результат:

$$\begin{aligned}
H_4 &= \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 2600K^4} e^{-5K\varepsilon} [-24\,863 \sin(K\varepsilon + \varphi) + 64\,2651 \cos(K\varepsilon + \varphi)] + \\
&+ \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 4000 \cdot 221K^4} e^{-5K\varepsilon} [962\,009 \sin 3(K\varepsilon + \varphi) + \\
&+ 328\,6237 \cos 3(K\varepsilon + \varphi)]; \\
H_4' &= \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 2600K^3} e^{-5K\varepsilon} [-518\,336 \sin(K\varepsilon + \varphi) - 3\,238\,118 \cos(K\varepsilon + \varphi)] + \\
&+ \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 4000 \cdot 221K^3} e^{-5K\varepsilon} [-14\,668\,756 \sin 3(K\varepsilon + \varphi) - \\
&- 13\,545\,158 \cos 3(K\varepsilon + \varphi)].
\end{aligned}
\tag{1.2.23}$$

На основании (1.2.18), (1.2.20) – (1.2.23) асимптотическое разложение безразмерной аксиальной функции  $H$  и безразмерной радиальной функции  $H'$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
H &= A_1 e^{-K\varepsilon} \sin(K\varepsilon + \varphi) - \frac{1}{10} \frac{A_1^2}{K} e^{-2K\varepsilon} + \frac{A_1^3}{200K^2} e^{-3K\varepsilon} \times \\
&\times [-\sin(K\varepsilon + \varphi) + 4 \cos(K\varepsilon + \varphi)] + \frac{A_1^4}{663\,000K^3} e^{-4K\varepsilon} \times \\
&\times [4233 - 355 \sin 2(K\varepsilon + \varphi) + 2048 \cos 2(K\varepsilon + \varphi)] + \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 2600K^4} e^{-5K\varepsilon} \times \\
&\times [-24\,863 \sin(K\varepsilon + \varphi) + 642\,651 \cos(K\varepsilon + \varphi)] + \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 4000 \cdot 221K^4} e^{-5K\varepsilon} \times \\
&\times [962\,009 \sin 3(K\varepsilon + \varphi) + 328\,6237 \cos 3(K\varepsilon + \varphi)] + \dots ; \\
H' &= A_1 e^{-K\varepsilon} [-\sin(K\varepsilon + \varphi) + \cos(K\varepsilon + \varphi)] + \frac{2}{10} A_1^2 e^{-2K\varepsilon} + \frac{A_1^3}{200K} e^{-3K\varepsilon} \times \\
&\times [-\sin(K\varepsilon + \varphi) - 13 \cos(K\varepsilon + \varphi)] + \frac{A_1^4}{663\,000K^2} e^{-4K\varepsilon} \times \\
&\times [-16932 - 2676 \sin 2(K\varepsilon + \varphi) - 8902 \cos 2(K\varepsilon + \varphi)] + \\
&+ \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 2600K^3} e^{-5K\varepsilon} [-518\,336 \sin(K\varepsilon + \varphi) - \\
&- 3\,238\,118 \cos(K\varepsilon + \varphi)] + \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 4000 \cdot 221K^3} e^{-5K\varepsilon} \times \\
&\times [-14\,668\,756 \sin 3(K\varepsilon + \varphi) - 13\,545\,158 \cos 3(K\varepsilon + \varphi)] + \dots ; \\
H'' &= 2A_1 K^2 e^{-K\varepsilon} [-\cos(K\varepsilon + \varphi)] - \frac{4K}{10} A_1^2 e^{-2K\varepsilon} + \frac{A_1^3}{100} e^{-3K\varepsilon} \times \\
&\times [8 \sin(K\varepsilon + \varphi) + 19 \cos(K\varepsilon + \varphi)] + \frac{A_1^4}{663\,000K} e^{-4K\varepsilon} \times \\
&\times [67\,722 + 22\,508 \sin 2(K\varepsilon + \varphi) + 30\,256 \cos 2(K\varepsilon + \varphi)] + \\
&+ \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 2600K^2} e^{-5K\varepsilon} [12\,306\,034 \sin(K\varepsilon + \varphi) + \\
&+ 14\,635\,582 \cos(K\varepsilon + \varphi)] + \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 4000 \cdot 221K^2} e^{-5K\varepsilon} \times \\
&\times [113\,979\,254 \sin 3(K\varepsilon + \varphi) + 23\,719\,522 \cos 3(K\varepsilon + \varphi)] + \dots
\end{aligned}$$

(1.2.24)

Подобным образом было получено разложение в асимптотический ряд безразмерной окружной функции  $G$ :

$$\begin{aligned}
G = & s + A_1 K e^{-K\varepsilon} [-\sin(K\varepsilon + \varphi) - \cos(K\varepsilon + \varphi)] - \frac{2}{5} A_1^2 e^{-2K\varepsilon} + \\
& + \frac{A_1^3}{200K} e^{-3K\varepsilon} [3\sin(K\varepsilon + \varphi) - 31\cos(K\varepsilon + \varphi)] + \\
& + \frac{A_1^4}{663\,000K^2} e^{-4K\varepsilon} [-10\,404 - 5548\sin 2(K\varepsilon + \varphi) - 7776\cos 2(K\varepsilon + \varphi)] + \\
& + \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 2600K^3} e^{-5K\varepsilon} [-370\,058\sin(K\varepsilon + \varphi) + 34\,736\cos(K\varepsilon + \varphi)] + \\
& + \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 4000 \cdot 221K^3} e^{-5K\varepsilon} [-15\,958\,342\sin 3(K\varepsilon + \varphi) + \\
& + 1\,464\,244\cos 3(K\varepsilon + \varphi)] + \dots ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G' = & 2A_1 K^2 e^{-K\varepsilon} \sin(K\varepsilon + \varphi) + \frac{4}{5} A_1^2 K e^{-2K\varepsilon} + \frac{A_1^3}{100} e^{-3K\varepsilon} \times \\
& \times [11\sin(K\varepsilon + \varphi) + 48\cos(K\varepsilon + \varphi)] + \frac{A_1^4}{663\,000K} e^{-4K\varepsilon} \times \\
& \times [41\,616 + 37\,744\sin 2(K\varepsilon + \varphi) + 20\,008\cos 2(K\varepsilon + \varphi)] + \\
& + \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 2600K^2} e^{-5K\varepsilon} [1\,815\,544\sin(K\varepsilon + \varphi) - 543\,738\cos(K\varepsilon + \varphi)] + \\
& + \frac{A_1^5}{13\,260 \cdot 4000 \cdot 221K^2} e^{-5K\varepsilon} [75\,398\,988\sin 3(K\varepsilon + \varphi) - \\
& - 55\,196\,246\cos 3(K\varepsilon + \varphi)] + \dots ,
\end{aligned}$$

(1.2.25)

где  $s = \pm\sqrt{C} = G(\infty) = V$ .

Разложения функций в степенные ряды Тэйлора при  $\varepsilon = 0$  запишем с использованием (1.9), (1.10):

$$\begin{aligned}
H = & \frac{A}{2!} \varepsilon^2 + \frac{C-1}{3!} \varepsilon^3 - \frac{2B}{4!} \varepsilon^4 - \frac{2B^2}{5!} \varepsilon^5 - \frac{2A-2AC}{6!} \varepsilon^6 - \frac{8AB-2(C-1)}{7!} \varepsilon^7 + \\
& + \frac{16B-8BC+4AB^2}{8!} \varepsilon^8 + \frac{-24A^2+44B^2-4B^2C+40A^2C}{9!} \varepsilon^9 + \\
& + \frac{88B^3+104A-232AC+112A^2B+144AC^2}{10!} \varepsilon^{10} + \dots ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H' = & A\varepsilon + \frac{C-1}{2!} \varepsilon^2 - \frac{2B}{3!} \varepsilon^3 - \frac{2B^2}{4!} \varepsilon^4 - \frac{2A-2AC}{5!} \varepsilon^5 - \frac{8AB-2(C-1)}{6!} \varepsilon^6 + \\
& + \frac{16B-8BC+4AB^2}{7!} \varepsilon^7 + \frac{-24A^2+44B^2-4B^2C+40A^2C}{8!} \varepsilon^8 + \\
& + \frac{88B^3+104A-232AC+112A^2B+144AC^2}{9!} \varepsilon^9 + \dots ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H'' = & A + (C-1)\varepsilon - \frac{2B}{2!} \varepsilon^2 - \frac{2B^2}{3!} \varepsilon^3 - \frac{2A+2AC}{4!} \varepsilon^4 - \frac{8AB-2(C-1)}{5!} \varepsilon^5 + \\
& + \frac{16B-8BC+4AB^2}{6!} \varepsilon^6 + \frac{-24A^2+44B^2-4B^2C+40A^2C}{7!} \varepsilon^7 + \\
& + \frac{88B^3+104A-232AC+112A^2B+144AC^2}{8!} \varepsilon^8 + \dots ;
\end{aligned}$$

$$G = 1 + B\varepsilon + \frac{2A}{3!}\varepsilon^3 + \frac{2AB+2(C-1)}{4!}\varepsilon^4 + \frac{-8B+4BC}{5!}\varepsilon^5 - \frac{16B^2+8A^2}{6!}\varepsilon^6 +$$

$$+ \frac{16A-24AC-16B^3-20A^2B}{7!}\varepsilon^7 + \frac{88AB-112ABC+24C^2+40C-16}{8!}\varepsilon^8 +$$

$$+ \frac{-168B-136DC^2+224A^3+248AB^2+320BC}{9!}\varepsilon^9 + \dots;$$

$$G' = B + A\varepsilon^2 + \frac{2AB+2(C-1)}{3!}\varepsilon^3 + \frac{-8B+4BC}{4!}\varepsilon^4 - \frac{16B^2+8A^2}{5!}\varepsilon^5 +$$

$$+ \frac{16A-24AC-16B^3-20A^2B}{6!}\varepsilon^6 + \frac{88AB-112ABC+24C^2+40C-16}{7!}\varepsilon^7 + (1.2.26)$$

$$+ \frac{-168B-136DC^2+224A^3+248AB^2+320BC}{8!}\varepsilon^8 + \dots$$

Совместное решение уравнений (1.2.25) и (1.2.26) при  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , когда функции  $H$ ,  $H'$ ,  $G$ , вычисленные по уравнениям (1.2.25), (1.2.26), равны, а также соблюдаются при этом равенства  $H''$  и  $G'$  (гладкость смыкания), дает возможность определить  $A_1$ ,  $\varphi$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

В дальнейшем для удобства численного интегрирования обозначим для (1.2.24), (1.2.25)  $H' = e^{-K\varepsilon}(a \sin K\varepsilon + b \cos K\varepsilon) + \dots$ , откуда

$$a = -A_1 K (\sin K\varphi + \cos K\varphi);$$

$$b = -A_1 K (\sin I (1.2.27) \zeta \varphi).$$

На основании этого все члены разложения (1.2.24), (1.2.25) могут быть пересмотрены, вместо констант  $A_1$ ,  $\varphi$  вводим константы  $a$ ,  $b$ .

В итоге получим:

$$H = \frac{1}{2K} e^{-K\varepsilon} [(b-a) \sin K\varepsilon - (a+b) \cos K\varepsilon] - \frac{a^2+b^2}{20K^3} e^{-2K\varepsilon} + \dots;$$

$$H' = e^{-K\varepsilon} (a \sin K\varepsilon + b \cos K\varepsilon) + \frac{a^2+b^2}{10K^2} e^{-2K\varepsilon} + \dots;$$

$$G = s + e^{-K\varepsilon} (-b \sin K\varepsilon + a \cos K\varepsilon) (1.2.28) - e^{-2K\varepsilon} + \dots$$

Нами было получено четыре варианта решения системы дифференциальных уравнений (1.2.1) при одинаковых граничных условиях (1.2.2) [6]. Множественность решений обусловлена нелинейностью уравнений (1.2.1). При составлении программ численного интегрирования систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при различных граничных условиях мы использовали идеи [7]. Практические численные решения предыдущих, текущих и последующих задач показывает, что их число в общем случае нечетное (одно, три, пять, ...) и только в отдельных соотношениях, точках при ( $\varepsilon^{**}$ ), число решений четное. Это в последующем мы отметим. В рассматриваемом случае мы получили четыре решения. Пятым решением является тривиальное, когда  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $G = 1 = \text{const}$ , т.е. когда вся масса жидкости вращается как твердое тело с угловой скоростью  $\omega$ , равной скорости вращения диска. При этом коэффициент давления  $C = 1$ . Значит имеем упомянутые пять вариантов решения.

Конкретные численные решения задачи представлены графически на рис. 1.2.1 – 1.2.16 в разных интервалах изменения  $\varepsilon$  и разных масштабах функций  $H$ ,  $H'$ ,  $G$  для наглядности их поведения, анализа и выводов.

Если обратить внимание на выражения (1.2.24) и (1.2.25), то отметим, что они есть ряды сумм экспоненциально затухающих гармонических функций. Значит, эти функции должны иметь  $n$  экстремумов, что видно из графического представления и табл. 1.12.1 – 1.2.4. Приведем их несколько значений, последующие экстремумы исчезающе малы.

*Первое решение:*

$$H_{\max} = 0,242988 \text{ при } \varepsilon \approx 2,7; \quad H'_{\max} = 0,154262 \text{ при } \varepsilon \approx 0,8;$$

$$H_{\min} = -0,011847 \text{ при } \varepsilon \approx 10,4; \quad H'_{\min} = 0,063364 \text{ при } \varepsilon \approx 4,6;$$

$$H_{\max} = 0,000509 \text{ при } \varepsilon \approx 18,5; \quad H'_{\max} = 0,002991 \text{ при } \varepsilon \approx 12,5;$$

$$G_{\max} = -0,168036 \text{ при } \varepsilon \approx 8,6;$$

$$G_{\min} = -0,153600 \text{ при } \varepsilon \approx 16,0;$$

$$\text{при } \varepsilon \rightarrow \infty \quad G_{\infty} \rightarrow -0,154200 = s.$$

*Второе решение:*

$$\begin{aligned}
H_{\max} &= 0,221815 \text{ при } \varepsilon \approx 2,3; & H'_{\max} &= 0,158869 \text{ при } \varepsilon \approx 0,8; \\
H_{\min} &= -0,93967 \text{ при } \varepsilon \approx 9,9; & H'_{\min} &= -0,240301 \text{ при } \varepsilon \approx 5,4; \\
H_{\max} &= 0,022930 \text{ при } \varepsilon \approx 22,5; & H'_{\max} &= 0,143290 \text{ при } \varepsilon \approx 13,8; \\
& & H'_{\min} &= -0,004660 \text{ при } \varepsilon \approx 25,0; \\
G_{\min} &= -0,385974 \text{ при } \varepsilon \approx 9,4; \\
G_{\max} &= -0,073030 \text{ при } \varepsilon \approx 19,6; \\
G_{\min} &= -0,099199 \text{ при } \varepsilon \approx 30,5; \\
&\text{при } \varepsilon \rightarrow \infty \quad G_{\infty} \rightarrow -0,0982774 = s.
\end{aligned}$$

*Третье решение:*

$$\begin{aligned}
H_{\max} &= 0,226062 \text{ при } \varepsilon \approx 2,2; & H'_{\max} &= 0,161682 \text{ при } \varepsilon \approx 0,8; \\
H_{\min} &= -1,143782 \text{ при } \varepsilon \approx 10,1; & H'_{\min} &= -0,27188 \text{ при } \varepsilon \approx 5,6; \\
H_{\max} &= 0,077067 \text{ при } \varepsilon \approx 22,6; & H'_{\max} &= 0,179940 \text{ при } \varepsilon \approx 14,4; \\
H_{\min} &= -0,003551 \text{ при } \varepsilon \approx 35,5; & H'_{\min} &= -0,012076 \text{ при } \varepsilon \approx 26,0; \\
& & H'_{\max} &= 0,000545 \text{ при } \varepsilon \approx 39,0; \\
G_{\min} &= -0,440938 \text{ при } \varepsilon \approx 9,7; \\
G_{\max} &= 0,059631 \text{ при } \varepsilon \approx 32,5; \\
&\text{при } \varepsilon \rightarrow \infty \quad G_{\infty} \rightarrow 0,0570578 = s.
\end{aligned}$$

*Четвертое решение:*

$$\begin{aligned}
H_{\min} &= -11,662031 \text{ при } \varepsilon \approx 3,375; & H'_{\min} &= -5,385601 \text{ при } \varepsilon \approx 1,625; \\
H_{\max} &= 0,145467 \text{ при } \varepsilon \approx 7,80; & H'_{\max} &= 4,860681 \text{ при } \varepsilon \approx 5,125; \\
H_{\min} &= -0,006433 \text{ при } \varepsilon \approx 10,2; & H'_{\min} &= -0,121697 \text{ при } \varepsilon \approx 8,4; \\
H_{\max} &= 0,000276 \text{ при } \varepsilon \approx 12,6; & H'_{\max} &= 0,005385 \text{ при } \varepsilon \approx 10,8; \\
G_{\min} &= -10,482257 \text{ при } \varepsilon \approx 3,35; \\
G_{\max} &= -0,940109 \text{ при } \varepsilon \approx 7,00; \\
&\text{при } \varepsilon \rightarrow \infty \quad G_{\infty} \rightarrow -1,657492 = s.
\end{aligned}$$

Из приведенных таблиц и графиков первых трех решений мы видим, что при удалении по оси от поверхности диска чередуются нисходящие и восходящие слои жидкости. Напомним выражение осевой скорости:  $w = -2 \sqrt{\omega \nu} H$ .

В четвертом решении картина изменения скорости  $w$  – это чередование восходящих и нисходящих слоев.

Приведем для сравнения начальные параметры при  $\varepsilon = 0$ :

*первое решение*

$$A = H''(0) = 0,475080, \quad B = G'(0) = -0,583970, \quad C = 0,023678;$$

*второе решение*

$$A = H''(0) = 0,490259, \quad B = G'(0) = -0,561329, \quad C = 0,009659;$$

*третье решение*

$$A = H''(0) = 0,496117, \quad B = G'(0) = -0,562759, \quad C = 0,003256;$$

*четвертое решение*

$$A = H''(0) = -5,972042, \quad B = G'(0) = -2,351111, \quad C = 2,747283.$$

Четвертое решение резко отличается от остальных и по начальным параметрам. Поэтому с уверенностью можно констатировать, что в реальности оно не осуществляется. Какая картина течения с большей вероятностью в действительном процессе реализуется, требуются дополнительные исследования по устойчивости течения?

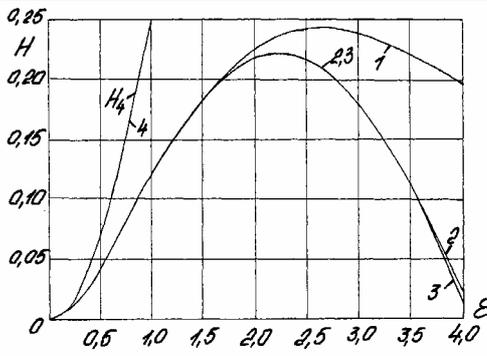


Рис. 1.2.1. Графики безразмерных аксиальных скоростей  $H(\varepsilon)$  первого, второго, третьего и четвертого решений на начальном участке  $\varepsilon$  при  $H_\infty = W \rightarrow 0$

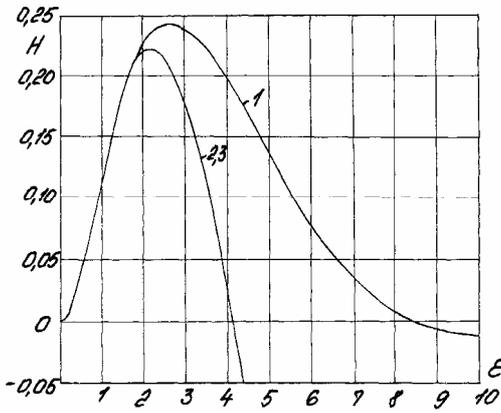


Рис. 1.2.2. Графики безразмерной скорости  $H$  первого, второго и третьего решений

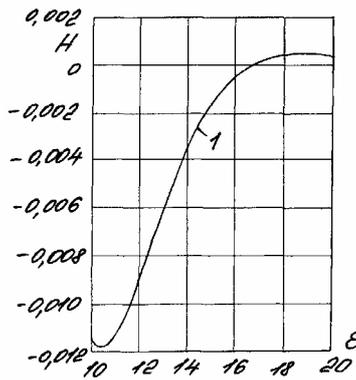


Рис. 1.2.3. График первого решения  $H(\varepsilon)$  при  $H_\infty = W \rightarrow 0$

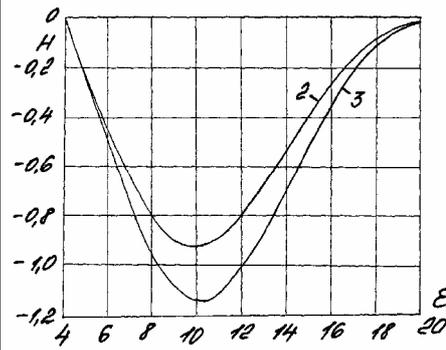


Рис. 1.2.4. Графики безразмерных аксиальных скоростей  $H(\varepsilon)$  второго и третьего решений при  $H_\infty = W \rightarrow 0$

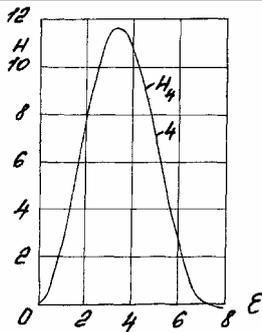


Рис. 1.2.5. График безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon)$  четвертого решения при  $H_\infty = W \rightarrow 0$

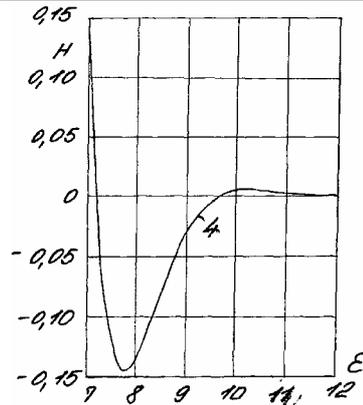


Рис. 1.2.6. График безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon)$  четвертого решения при  $H_\infty = W \rightarrow 0$

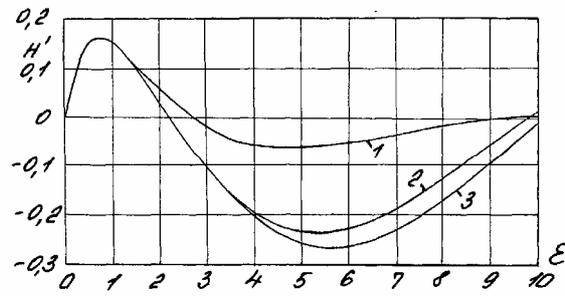


Рис. 1.2.7. Графики безразмерных радиальных скоростей  $H'(\varepsilon)$  первого, второго и третьего решений

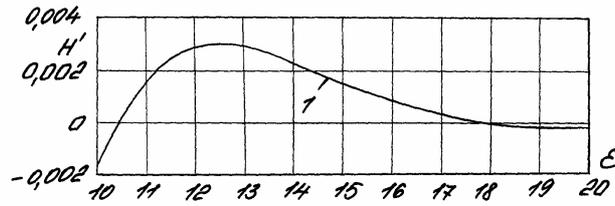


Рис. 1.2.8. График безразмерной радиальной скорости  $H'(\varepsilon)$  первого решения

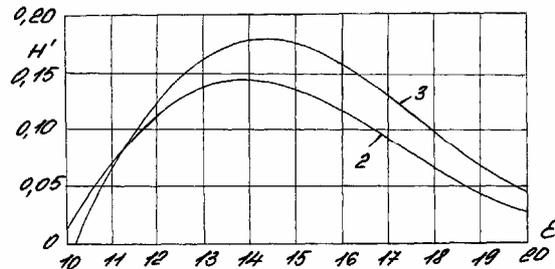


Рис. 1.2.9. Графики безразмерных радиальных скоростей  $H'(\varepsilon)$  второго и третьего решений

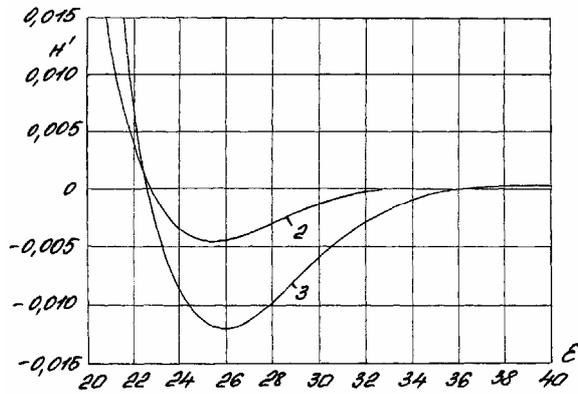


Рис. 1.2.10. Графики безразмерных радиальных скоростей  $H'(\varepsilon)$  второго и третьего решений

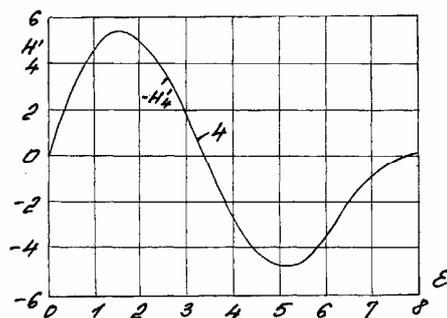


Рис. 1.2.11. График безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  четвертого решения

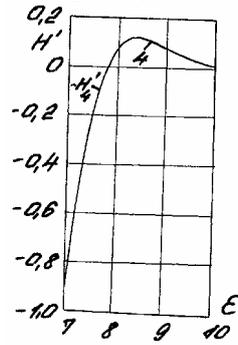


Рис. 1.2.12. График безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  четвертого решения

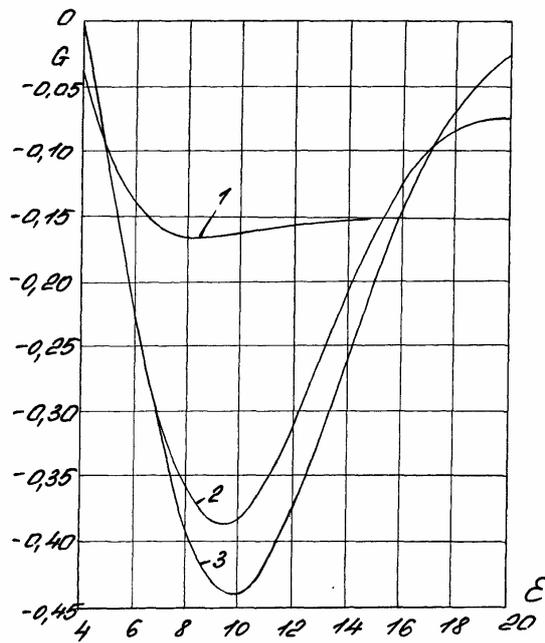


Рис. 1.2.13. Графики безразмерных окружных скоростей  $G(\epsilon)$  первого, второго и третьего решений  
( $G_\infty = s_1 \rightarrow -0,154200$ )

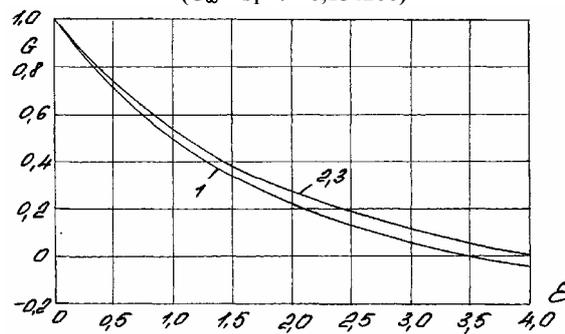


Рис. 1.2.14. Графики безразмерных окружных скоростей  $G(\epsilon)$  первого, второго и третьего решений

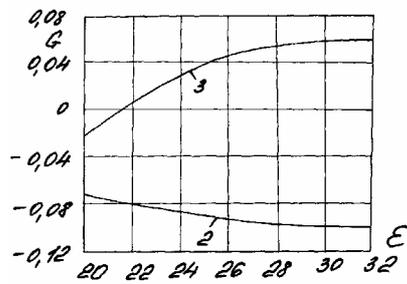


Рис. 1.2.15. Графики безразмерных окружных скоростей  $G(\varepsilon)$  второго и третьего решений ( $G_{2\infty} = s_2 \rightarrow 0,0982774$ ), ( $G_{3\infty} = s_3 \rightarrow 0,0570578$ )

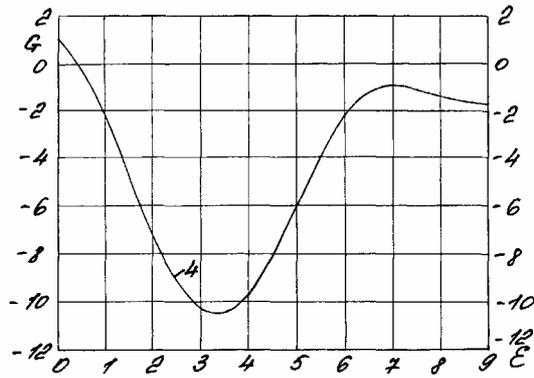


Рис. 1.2.16. График безразмерной окружной скорости  $G(\varepsilon)$  четвертого решения ( $G_{4\infty} = s_4 \rightarrow -01,657493$ )





















































### 1.3. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПРИ ПОЛНОМ ПОКОЕ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

На основе практических расчетов нами было высказано предположение о нечетном числе вариантов решений нелинейной системы дифференциальных уравнений (1.4) при одних и тех же граничных условиях, т.е. неединственность решений. Ранее мы получили два решения при  $C = 0$ , Кармана-Кохрана (табл. 1.1.1) и второе решение (табл. 1.1.2). Значит можно искать третий вариант решения (1.4).

Положим следующую методику поиска решения. Разместим на некотором расстоянии  $z_0$  от вращающегося диска гипотетическую неподвижную поверхность, которую будем удалять в бесконечность  $z_0 \rightarrow \infty$ . Для исследования используем систему дифференциальных уравнений (1.4), положив  $C = 0$ ,

$$\begin{aligned} H''' &= H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - H) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} H = 0, H' = 0, G = 1 & \text{ при } \varepsilon = 0; \\ H = 0, H' = 0, G = 0 & \text{ при } \varepsilon = \varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

Это означает, что в бесконечности, или реально, при достаточно больших величинах  $z_0, \varepsilon_0$  значения всех составляющих скоростей стремятся к нулю  $u \rightarrow 0, v \rightarrow 0, w \rightarrow 0$ , а в безразмерном виде  $H' \rightarrow 0, G \rightarrow 0, H \rightarrow 0$ , т.е. движение в целом вырождается. Отсюда следует, что алгоритм решения задачи посредством разложения функции безразмерных скоростей  $H, H', G$  в степенные ряды вблизи  $\varepsilon = 0$  по уравнениям (1.1.1) и в экспоненциальные ряды при больших значениях  $\varepsilon, \varepsilon \rightarrow \infty$  по уравнениям (1.1.17) и их сравнении, а также их производных, при некотором промежуточном значении  $\varepsilon = \varepsilon^*$  не работает, так как уравнение (1.1.1) имеет смысл, а уравнения (1.1.17) вырождаются в нули при  $W = H_\infty = 0$ . На основании этого предполагаем, что приближение к нулям функций и их производных при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  не носит асимптотический характер типа  $f(e^{-K\varepsilon})$  или  $f(e^{-K\varepsilon} \sin(K\varepsilon))$ .

Нам удалось проинтегрировать уравнения (1.3.1) при граничных условиях (1.3.2) вплоть до  $\varepsilon_0 = 500$  и более. Мы установили, что функция  $G$  и ее производные быстро затухают до нуля всегда (рис. 1.3.1).

После некоторого интервала изменения  $\varepsilon$  отличными от нуля остаются только функция  $H$  и ее первые две производные. Старшие производные  $H''(\varepsilon)$ , включая  $H'''(\varepsilon)$  (рис. 1.3.2), также становятся исчезающе малы. Итак, система дифференциальных уравнений (1.3.1) при значительном удалении от вращающегося диска  $z_0$  превращается в одно уравнение:

$$H'H' - 2HH'' = 0. \quad (1.3.3)$$

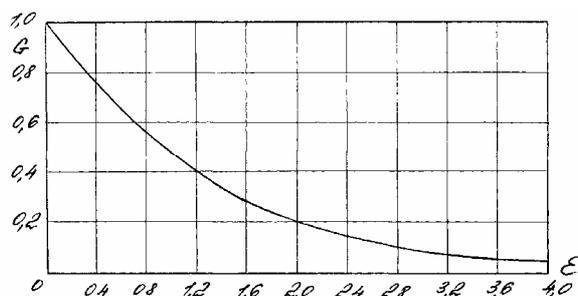


Рис. 1.3.1. График безразмерной окружной скорости  $G$  от аксиальной координаты  $\varepsilon$  при  $\varepsilon_0 = 100, C = 0$

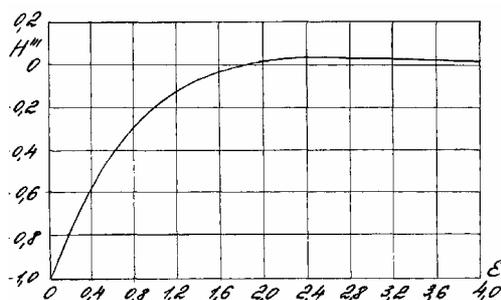


Рис. 1.3.2. График третьей производной  $H'''$  от безразмерной аксиальной координаты  $\varepsilon$  при  $\varepsilon_0 = 200, C = 0$

Представим уравнение (1.3.3) в виде  $\frac{H'}{H} = 2 \frac{H''}{H'}$  и проинтегрируем  $\ln H = 2 \ln H' + \ln a$ , где  $a$  – постоянная интегрирования. После потенцирования имеем

$$H = a H' H'. \quad (1.3.4)$$

Подставив выражение (1.3.4) в (1.3.2), получим

$$H'H' - 2aH''H'H' = 0,$$

или после упрощения

$$H'' = \text{const}. \quad (1.3.5)$$

Тогда решением дифференциального уравнения (1.3.3) будет

$$H = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2, \quad (1.3.6)$$

где  $a_0, a_1, a_2$  – постоянные интегрирования.

На рис. 1.3.3 и в табл. 1.3.1 – 1.3.3 представлены результаты расчетов при  $\varepsilon_0 = 66,6; 100; 200$  для функции  $H(\varepsilon)$ . Анализ показывает, что с некоторого значения  $\varepsilon = \varepsilon^*$  это действительно параболы в соответствии с уравнением (1.3.6), вершины которых лежат в точках с координатами  $(H = 0, \varepsilon = \varepsilon_0)$ , где  $a_0, a_1, a_2$  есть функции от  $\varepsilon_0$ .

Расчеты при различных значительно больших величинах  $\varepsilon_0$  дали результаты:

$\varepsilon_0$	$H''_\infty$
60	0,000281888
80	0,000153151
100	0,000095421
200	0,000022967

300	0,000010083
400	0,000005635
500	0,000003593

Статистическая обработка этих результатов дает с высокой точностью формулу аппроксимации

$$H''_{\infty} = \frac{0,885165}{(\varepsilon_0 - 3,686)^2}. \quad (1.3.7)$$

Точность этой формулы достигает долей процента.

Как пример приведем численное значение для воды  $\varepsilon_0 = 1000$ ,  $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ ,  $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ :

$$z_0 = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} = 1000 \sqrt{\frac{10^{-6}}{100}} = 0,1 \text{ м} = 100 \text{ мм}.$$

Значит за пределами 100 мм жидкость находится в "покое" в отличие от решения Кармана-Кохрана, когда из бесконечности подсасывается жидкость со скоростью  $W = -2\sqrt{\omega\nu} H''_{\infty} \approx -0,0088 \text{ м/с}$ .

С нашей точки зрения логичным является найденное нами решение в этом разделе при реализации в реальности.

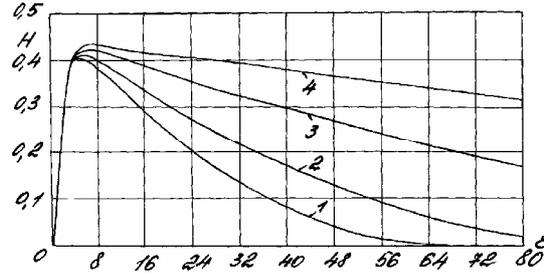


Рис. 1.3.3. График зависимости безразмерной осевой скорости  $H(\varepsilon)$  при различных  $\varepsilon_0$ :

1 – при  $\varepsilon_0 = 66,6$ ; 2 – при  $\varepsilon_0 = 100$ ; 3 – при  $\varepsilon_0 = 200$ ; 4 – при  $\varepsilon_0 = 500$











#### 1.4. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

Положим, что при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  безразмерные скорости  $H(\infty) \rightarrow W$ ,  $G(\infty) \rightarrow s$ , где  $W$  и  $s$  некоторые константы. Обозначим для подстановки в дифференциальные уравнения (1.4)

$$H = W + h, \quad G = s + g, \quad (1.4.1)$$

где положено  $s^2 = C$ , или  $s = \pm\sqrt{C}$ .

При этом уравнения (1.4) принимают вид:

$$\begin{aligned} h''' &= h'h' - 2sg - gg - 2Wh'' - 2hh''; \\ g'' &= 2(sh' + h'g - W). \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Считаем, что для разложения быстро убывающих функций в ряды можно в первом приближении оценить их произведения величинами второго порядка малости, т.е. слагаемыми в (1.4.2)  $h'h'$ ,  $gg$ ,  $hh''$ ,  $h'g$ ,  $hg'$  пренебречь. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} h''' &= -2sg - 2Wh''; \\ g'' &= 2sh'. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Исключая из этой системы уравнений функцию  $g$ , получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно  $h$ :

$$h^V + 4Wh^{IV} + 4W^2h''' + 4s^2h' = 0. \quad (1.4.4)$$

С целью более простого интегрирования уравнения (1.4.4) введем новую функцию  $t(\varepsilon)$

$$h' = e^{-W\varepsilon} t. \quad (1.4.5)$$

Продифференцируем ее четыре раза

$$\begin{aligned} h'' &= e^{-W\varepsilon}(-Wt + t'); \\ h''' &= e^{-W\varepsilon}(W^2t - 2Wt' + t''); \\ h^{IV} &= e^{-W\varepsilon}(-W^3t + 3W^2t' - 3Wt'' + t'''); \\ h^V &= e^{-W\varepsilon}(W^4t - 4W^3t' + (1.4.6) - 4Wt''' + t^{IV}). \end{aligned}$$

Подставим (1.4.6) в (1.4.4), получим дифференциальное уравнение относительно  $t(\varepsilon)$ :

$$t^{IV} - 2W^2t'' + (W^4 + 4s^2)t = 0. \quad (1.4.7)$$

Характеристическое уравнение для (1.4.7) будет

$$r^4 - 2Wr^2 + (W^4 + 4s^2) = 0. \quad (1.4.8)$$

Это биквадратное уравнение относительно  $r$ . Корнями его будут

$$r_{1,2,3,4} = \pm\alpha \pm i\beta, \quad (1.4.9)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} + W^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} - W^2}{2}}. \quad (1.4.10)$$

Уместно отметить некоторые свойства формул (1.4.10):

$$\alpha\beta = s; \quad \alpha^2 - \beta^2 = W^2, \quad (1.4.11)$$

которые при последующих преобразованиях мы будем использовать.

На основании (1.4.9) решение дифференциального уравнения следует искать в виде

$$t(\varepsilon) = e^{-\alpha\varepsilon} (a \sin \beta\varepsilon + b \cos \beta\varepsilon) + e^{\alpha\varepsilon} (a_1 \sin \beta\varepsilon + b_1 \cos \beta\varepsilon). \quad (1.4.12)$$

Поскольку из реальности мы полагали, что функции  $H(\varepsilon)$  и  $G(\varepsilon)$  в бесконечности,  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , стремятся к ограниченным величинам  $W$  и  $s$ , то логично положить  $a_1 = b_1 = 0$ . Тогда выражение (1.4.12) принимает вид

$$t(\varepsilon) = e^{-\alpha\varepsilon} (a \sin \beta\varepsilon + b \cos \beta\varepsilon). \quad (1.4.13)$$

В итоге для функции безразмерной радиальной скорости  $h'$  с учетом (1.4.5) получаем

$$h' = e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (a \sin \beta\varepsilon + b \cos \beta\varepsilon). \quad (1.4.14)$$

Проинтегрируем (1.4.14) и продифференцируем его:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2\alpha} e^{-(W+\alpha)\varepsilon} \left\{ -a \left[ \sin \beta\varepsilon + \frac{\beta}{W+\alpha} \cos \beta\varepsilon \right] + b \left[ \frac{\beta}{W+\alpha} \sin \beta\varepsilon - \cos \beta\varepsilon \right] \right\}; \\ h'' &= e^{-(W+\alpha)\varepsilon} \{ [-a(W+\alpha) - b\beta] \sin \beta\varepsilon + [-b(W+\alpha) + a\beta] \cos \beta\varepsilon \}; \\ h''' &= 2(W+\alpha) e^{-(W+\alpha)\varepsilon} \{ [aW + b\beta] \sin \beta\varepsilon + [bW - a\beta] \cos \beta\varepsilon \}. \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Из (1.4.3) найдем функцию  $g$  и ее производные:

$$\begin{aligned} g &= e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (-b \sin \beta\varepsilon + a \cos \beta\varepsilon); \\ g' &= e^{-(W+\alpha)\varepsilon} \{ [b(W+\alpha) - a\beta] \sin \beta\varepsilon + [-a(W+\alpha) - b\beta] \cos \beta\varepsilon \}; \\ g'' &= 2(W+\alpha) [(-bW + a\beta) \sin \beta\varepsilon + (aW + b\beta) \cos \beta\varepsilon]. \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Последующие члены разложения в ряды уравнений (1.4.2) находим из условий частного решения системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} h_1''' + 2sg_1 + 2Wh_1'' &= h'h' - gg - 2hh''; \\ g_1'' + 2Wg' - 2sh' &= (1.4.17)'; \end{aligned}$$

Воспользовавшись (1.4.7) – (1.4.9), найдем значения правых сумм для (1.4.17):

$$\begin{aligned} h_1''' + 2sg_1 + 2Wh_1'' &= -(a^2 + b^2) \frac{W}{\alpha} e^{-2(W+\alpha)\varepsilon}; \\ g_1'' + 2Wg' - 2sh' &= -\left( a^2 (1.4.18) \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-2(W+\alpha)\varepsilon}. \end{aligned}$$

Частное решение системы уравнений (1.4.18):

$$\begin{aligned} h_1 &= -(a^2 + b^2) \frac{\alpha - 3W}{4\alpha^2(\alpha + W)(5\alpha + 3W)} e^{-2(\alpha+W)\varepsilon}; \\ h_1' &= (a^2 + b^2) \frac{\alpha - 3W}{2\alpha^2(5\alpha + 3W)} e^{-2(\alpha+W)\varepsilon}; \\ h_1'' &= -(a^2 + b^2) \frac{(\alpha + W)(\alpha - 3W)}{\alpha^2(5\alpha + 3W)} e^{-2(\alpha+W)\varepsilon}; \\ g_1 &= -(a^2 + b^2) \frac{\beta(2\alpha + 3W)}{2\alpha^2(\alpha + W)(5\alpha + 3W)} e^{-2(\alpha+W)\varepsilon}; \\ g_1' &= (a^2 + b^2) \frac{\beta(2\alpha + 3W)}{\alpha^2(5\alpha + 3W)} e^{-2(\alpha+W)\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

Окончательно, на основании выражений (1.4.1), (1.4.14) – (1.4.16), (1.4.19), находим зависимости для безразмерных скоростей  $H$ ,  $H'$ ,  $G$  вдали от диска:

$$H = W + \frac{1}{2\alpha} e^{-(W+\alpha)\varepsilon} \left\{ -a \left( \sin\beta\varepsilon + \frac{\beta}{W+\alpha} \cos\beta\varepsilon \right) + b \left( \frac{\beta}{W+\alpha} \sin\beta\varepsilon - \cos\beta\varepsilon \right) \right\} -$$

$$- (a^2 + b^2) \frac{\alpha - 3W}{4\alpha^4(\alpha + W)(5\alpha + 3W)} e^{-2(\alpha+W)\varepsilon} + \dots;$$

$$H' = e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (a \sin\beta\varepsilon + b \cos\beta\varepsilon) + (a^2 + b^2) \frac{\alpha - 3W}{2\alpha^2(5\alpha + 3W)} e^{-2(\alpha+W)\varepsilon} + \dots;$$

$$G = s + e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (-b \sin\beta\varepsilon + a \cos\beta\varepsilon) -$$

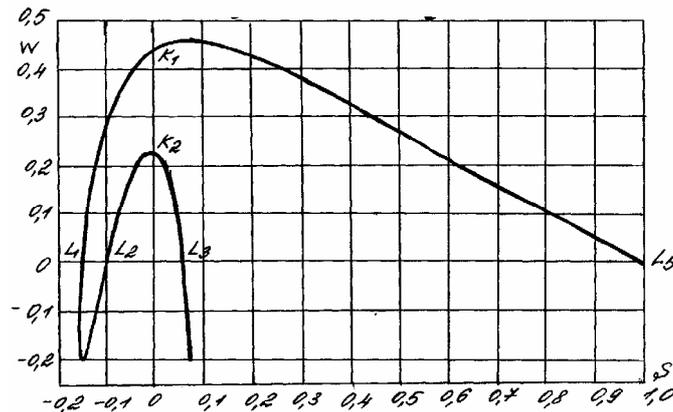
$$- (a^2 + b^2) \frac{\beta(2\alpha + 3W)}{2\alpha^2(\alpha + W)(5\alpha + 3W)} e^{-2(\alpha+W)\varepsilon} + \dots \quad (1.4.20)$$

Разложение этих функций в степенные ряды Тейлора при  $\varepsilon = 0$  выполнено ранее (1.2.26).

Сращивание решений (1.4.20) и (1.2.26), а также их производных  $G'$  и  $H'$  при некотором промежуточном  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , позволяет определить постоянные  $A, B, C, a, b$ . При этом одновременно находим зависимость  $W = f(s)$  на значительном интервале изменения  $s = \pm\sqrt{C}$  (рис. 1.4.1). На рис. 1.4.1 и табл. 1.4.1 мы находим два случая решения задачи Кармана при  $C = 0$  (точки  $K_1, K_2$ ) и три решения, когда  $W = H_\infty = 0$  (точки  $L_1, L_2, L_3$ ) ранее нами рассмотренные в разделах 1.1 и 1.2.

На рис. 1.4.2 графически, для зрительного восприятия, изображены зависимости начальных параметров  $A = H''(0)$ ,  $B = G'(0)$  и безразмерной аксиальной скорости  $W$  от окружной безразмерной скорости в бесконечности  $G_\infty = s$  вблизи минимума  $s$  в увеличенном масштабе. Отметим, что начальный параметр  $A = H''(0)$  в своем изменении, как функция от  $s$ , делает «петлю» в соответствии с табл. 1.4.1. При численном интегрировании координату  $\varepsilon^*$  мы изменяли для обеспечения необходимой точности расчетов (табл. 1.4.1).

На рис. 1.4.3 показана графически связь  $G(0) = f(G_\infty) = s$  при  $W$  как параметре. При этом видны эти функции при восходящих аксиальных потоках ( $W < 0$ ) и нисходящих ( $W > 0$ ). При  $W = 0$  еще раз отмечены точки  $L_1, L_2, L_3$ . Здесь функции  $G(0) = f(s)$  суть линейные, что логично. Табличные данные решений не приводим из-за их громоздкости.



**Рис. 1.4.1. Взаимосвязь безразмерных аксиальной  $W$  и окружной  $s$  скоростей при большом значении безразмерной осевой координаты  $\varepsilon^*$  от поверхности вращающегося диска и  $G(0) = 1$**

Отметим некоторые экстремальные величины на основе анализа табл. 1.4.1:

$$s_{\min} \approx -0,160538 \quad \text{при} \quad W \approx -0,135;$$

$$W_{\max} \approx 0,460380 \quad \text{при} \quad s \approx 0,008;$$

$$W_{\min} \approx -0,204188 \quad \text{при} \quad s \approx -0,153;$$

$$W_{\max} \approx 0,244930 \quad \text{при} \quad s \approx -0,006.$$

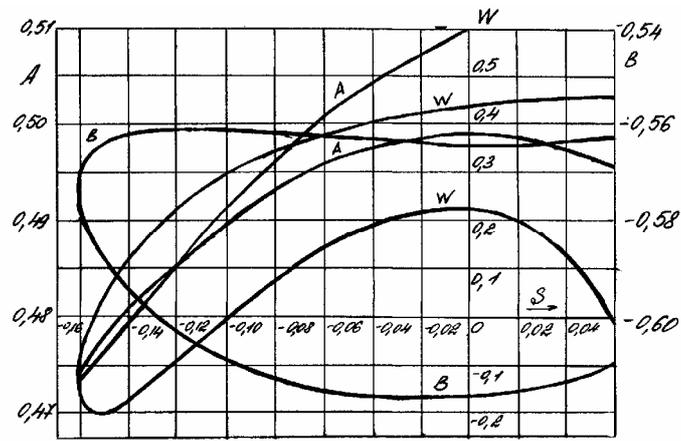


Рис. 1.4.2. Зависимость начальных параметров  $H''(0) = A$ ,  $G'(0) = B$  и  $H_\infty = W$  на ограниченном интервале изменения  $G(\infty) = s$  от  $s_{\min} = -0,160538$  до  $s = 0,06$

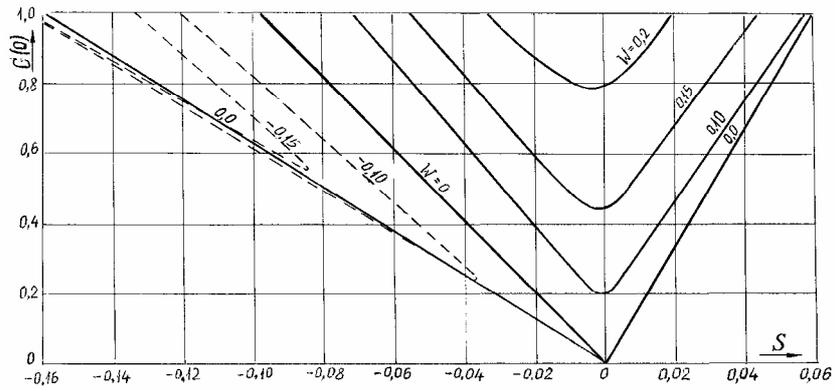


Рис. 1.4.3. Взаимозависимость безразмерных окружных скоростей  $G(0) = f(G_\infty) = s$  при аксиальной безразмерной скорости  $W$ , как параметре





















Экстремальные значения  $W$  и  $s$  не совпадают с отмеченными нами точками  $K_1, K_2, L_1, L_2, L_3$ . При  $W < -0,2$  мы прекратили анализ, так как дополнительной информации он не дает, а численное интегрирование уравнений (1.4) становится проблематичным из-за значительного увеличения  $\varepsilon^*$ .

Для иллюстрации приводим решение при  $W = -0,2$  и  $\varepsilon^*$ , графики рис. 1.4.4 – 1.4.9 и табл. 1.4.2 в дополнение к представленным ранее картинам, изменения безразмерных скоростей в точках (рис. 1.1.1, 1.1.2, 1.2.1 – 1.2.16, табл. 1.1.1, 1.1.2, 1.2.1 – 1.2.4).

На рис. 1.4.4 и 1.4.5 представлена картина изменения безразмерной аксиальной скорости при  $H_\infty = W = -0,2$  в различных интервалах и масштабах при  $\varepsilon^* = 100$ . Из графиков и табл. 1.4.2 видим, что в толще жидкости есть слои с несколькими нисходящими и восходящими осевыми скоростями. Это соответствует и выражению  $H$  в системе формул (1.4.20).

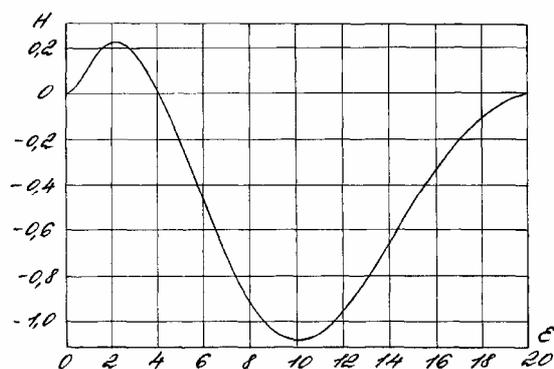


Рис. 1.4.4. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon)$  при  $H_\infty = W = -0,2$  и  $\varepsilon^* = 100$  на начальном интервале изменения  $\varepsilon$

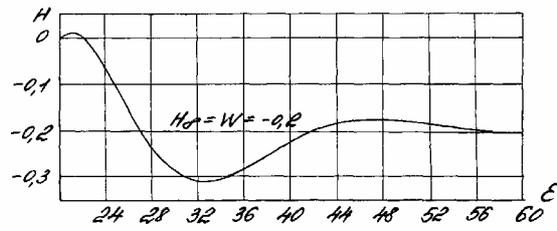


Рис. 1.4.5. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\epsilon)$  при  $H_\infty = W = -0,2$  и  $\epsilon^* = 100$  на достаточно большом удалении  $\epsilon$  от диска

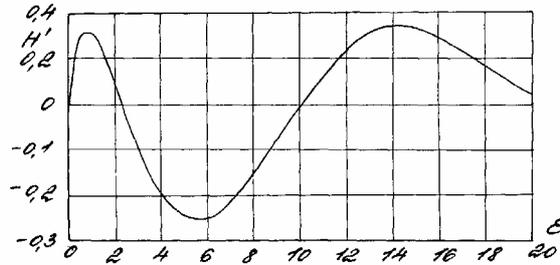


Рис. 1.4.6. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  при  $H_\infty = W = -0,2$  и  $\epsilon^* = 100$  на начальном интервале изменения  $\epsilon$

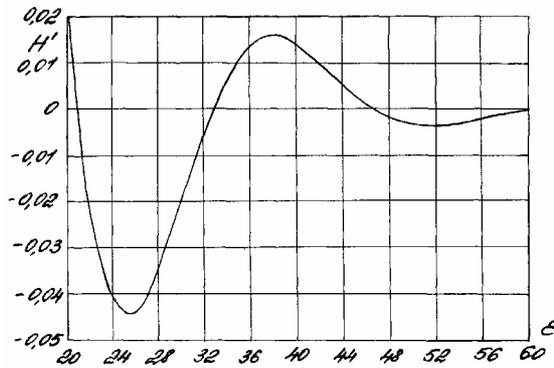


Рис. 1.4.7. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  при  $H_\infty = W = -0,2$  и  $\epsilon^* = 100$  на достаточно большом удалении  $\epsilon$  от диска

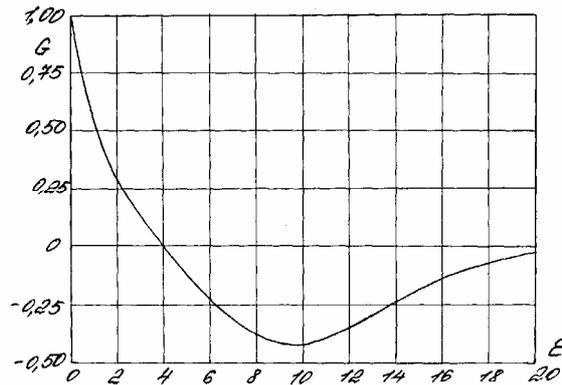


Рис. 1.4.8. Зависимость безразмерной окружной скорости  $G(\epsilon)$  при  $H_\infty = W = -0,2$  и  $\epsilon^* = 100$  на начальном интервале изменения  $\epsilon$

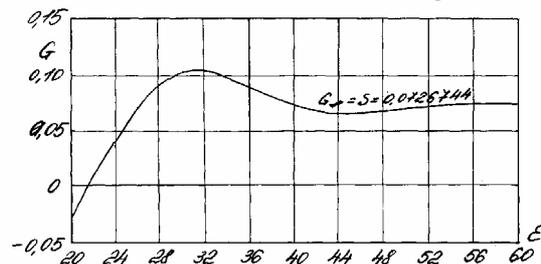


Рис. 1.4.9. Зависимость безразмерной окружной скорости  $G'(\epsilon)$

при  $H_\infty = W = -0,2$  и  $\varepsilon^* = 100$  на достаточно большом удалении  $\varepsilon$  от диска

Аналогичное явление имеем и для радиальной безразмерной скорости  $H'$ , отдельные слои движутся к периферии диска, другие – к оси вращения (рис. 1.4.6, 1.4.7, табл. 1.4.2, формула в системе (1.4.20)).

Функция изменения безразмерной окружной скорости  $G(\varepsilon)$  показана на рис. 1.4.8, 1.4.9 и в табл. 1.4.2. Здесь также видим, что отдельные слои вращаются по часовой стрелке, другие – против часовой стрелки.

При  $\varepsilon \rightarrow \infty$  все скорости, колеблясь, приближаются к величинам:  $H_\infty = W \rightarrow -0,2$ ;  $H' \rightarrow 0$ ;  $G_\infty = s \rightarrow 0,0726744$ .

Отметим еще раз, при зрительном восприятии названных графиков необходимо обращать внимание на масштаб изображения  $H, H', G$ .

Следующим шагом исследования поставленной задачи является поиск функции  $H_\infty = W = f(G(0))$  при  $G_\infty = s = 1 = \text{const}$ .

На рис. 1.4.10 изображены зависимости  $W = f_1(G(0))$ ,  $A = H''(0) = f_2(G(0))$ ,  $B = G'(0) = f_3(G(0))$  и представлены в табл. 1.4.3. Отметим две точки:  $L_4$  – уже рассмотренное выше решение при  $W = 0$ , и  $B$  – решение Бедевадта [8], представленное на рис. 1.4.11 и в табл. 1.4.4.

Приведем для решения задачи Бедевадта некоторые экстремумы безразмерных скоростей в пределах от  $\varepsilon = 0$  до  $\varepsilon = \varepsilon^* = 16$ .

Аксиальная скорость:

$H_{\max} = 0$  при  $\varepsilon = 0$ ;  
 $H_{\min} \approx -0,927297$  при  $\varepsilon \approx 3,2$ ;  
 $H_{\max} \approx -0,628613$  при  $\varepsilon \approx 6,8$ .

Радиальная скорость:

$H'_{\min} \approx -0,483666$  при  $\varepsilon \approx 1,15$ ;  
 $H'_{\max} \approx 0,137089$  при  $\varepsilon \approx 4,4$ ;  
 $H'_{\min} \approx -0,026436$  при  $\varepsilon \approx 8,4$ ;  
 $H'_{\max} \approx 0,005682$  при  $\varepsilon \approx 12,5$ .

Окружная скорость:

$G_{\max} \approx 1,280039$  при  $\varepsilon \approx 2,7$ ;  
 $G_{\min} \approx 0,941062$  при  $\varepsilon \approx 6,4$ ;  
 $G_{\max} \approx 1,011849$  при  $\varepsilon \approx 9,5$ ;  
 $G_{\min} \approx 0,997454$  при  $\varepsilon \approx 14,0$ .

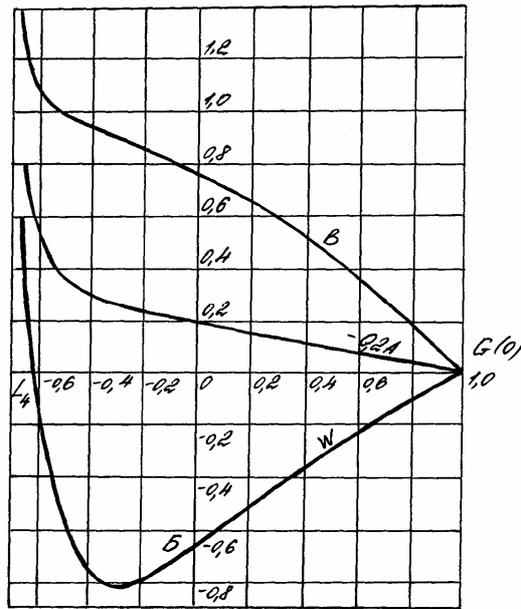


Рис. 1.4.10. Зависимости начальных параметров  $H''(0) = A$ ,  $G'(0) = B$ ,  $H(\infty) = W$  при  $G(\infty) = s = 1$  от изменения начального параметра  $G(0)$ . В точке  $L_4$   $W = 0$

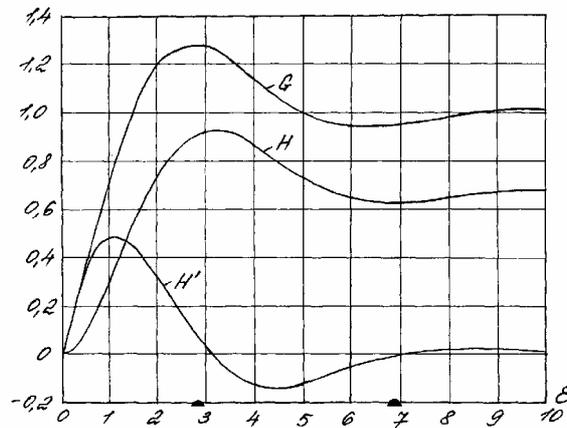


Рис. 1.4.11. Зависимость аксиальной  $H$  и окружной  $G$  безразмерных скоростей от  $\varepsilon$  при  $C = s = 1$  (задача Бедевадта)

Начальные параметры при  $\varepsilon = 0$ :  $A = H'(0) = -0,941971$ ,  $B = G'(0) = 0,772885$ ,  $C = 1$ .

При  $\varepsilon \rightarrow \infty$  функции скоростей, колеблясь, приближаются к величинам:  $H(\infty) = W \rightarrow -0,674713$ ,  $H'(\infty) \rightarrow 0$ ,  $G(\infty) \rightarrow 1$ .

Как следует из рис. 1.4.11 и табл. 1.4.4 аксиальная скорость " $w$ " на всем интервале  $\varepsilon$  положительна, значит восходящей от поверхности диска (отметим, что  $w = -2\sqrt{\omega\nu}H(\varepsilon)$ ).

Что касается радиальной скорости, то закономерность ее изменения знакопеременная, течение к центру, течение к периферии и т.д. Вблизи диска жидкость течет к оси вращения.

Окружная скорость везде однонаправлена.

На рис. 1.4.12 показаны "разрезы" поверхности  $f(s, G(0), W) = 0$  при  $W$  как параметр. Табличные сведения не представляем в связи с громоздкостью. Заметим лишь, что варианты значений  $\varepsilon^*$  до  $\varepsilon^* = 200$ . Решения при  $W = 0$  есть прямые линии: одна с координатами  $s = 0$ ,  $G(0) = 0 \div s = 1$ ,  $G(0) = 1$  – это точка  $L_5$ , вторая с координатами  $s = 0$ ,  $G(0) \div s = 1$ ,  $G(0) = L_4$ . В точке  $L_4$   $G(0) = -0,603321$ . В точке  $L_4$  окружные скорости диска и жидкости в бесконечности равны  $G(0) = G(\infty) = s = 1$ , т.е. среда вращается как твердое тело, при этом  $A = H'(0) = 0$ ,  $B = G'(0) = 0$ ,  $C = 1$ , согласно уравнениям (1.4). Значит теоретически мы получили пять решений данной задачи при  $W = 0$ .

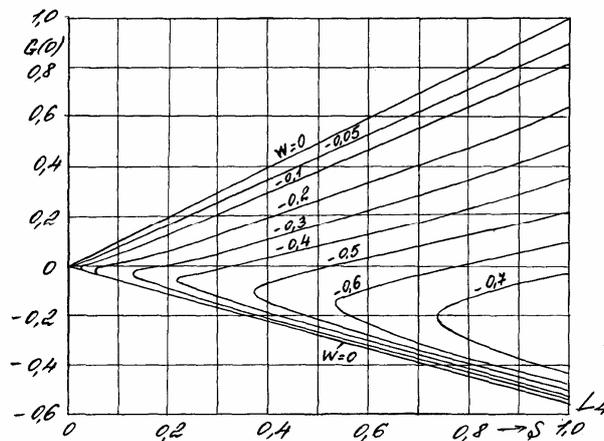


Рис. 1.4.12. Взаимосвязь начальной окружной безразмерной скорости (диска)  $G(0)$  и окружной безразмерной скорости при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  и при  $H_\infty = W$  как параметре

Из анализа решения (рис. 1.4.17) и, соответственно, численного интегрирования приведем некоторые соображения. Например, разрез рис. 1.4.12 при  $G(0) = 0$  дает соотношения:

$H(\infty) = W$	$s = G(\infty)$
-0,1	0,0219665
-0,2	0,0878661
-0,3	0,197699
-0,4	0,351465
-0,5	0,549164
-0,6	0,790796
-0,674713	1,000000

– решение задачи Бедевадта

Статистическая обработка результатов приводит к точной формуле:

$$s = 2,196658 W^2. \quad (1.4.21)$$

К обсуждению этого выражения мы позже вернемся. Выражение (1.4.21) графически показано на рис. 1.4.13. Координаты минимальных значений  $s_{\min}$  представлены в таблице ниже и на рис. 1.4.13 и 1.4.14  $s_{\min} = f(W)$ .

$W$	$s_{\min}$	$G(0)$
-0,1	0,015025	-0,004
-0,2	0,060100	-0,016
-0,3	0,135430	-0,035
-0,4	0,240751	-0,070
-0,5	0,375465	-0,105
-0,6	0,540601	-0,150
-0,7	0,735841	-0,200

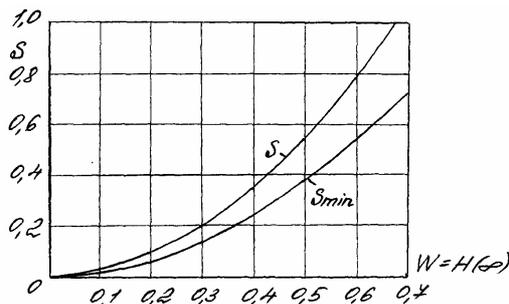


Рис. 1.4.13. Связь безразмерных скоростей  $G(\infty) = s$  и  $H(\infty) = W$  при  $\epsilon \rightarrow \infty$

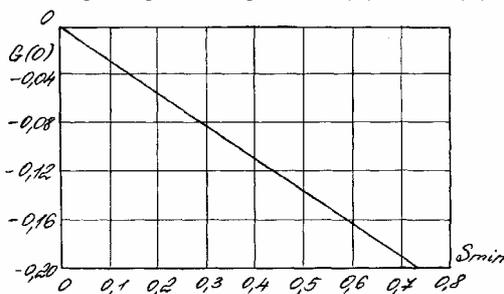


Рис. 1.4.14. Связь безразмерных окружных скоростей на поверхности диска и ее минимальным значением  $s_{\min} = G(\infty)_{\min}$  в бесконечности при  $\epsilon \rightarrow \infty$

Зависимость  $s_{\min}$  от  $W$  можно удовлетворительно отобразить формулой

$$s = 1,501716 W^2. \quad (1.4.22)$$

Графически эта зависимость показана на рис. 1.4.13.

Связь между  $G(0)$  и  $G(\infty)_{\min} = s_{\min}$  выражается линейным уравнением и изображена на рис. 1.4.14:

$$G(0) = -0,271798 s_{\min}. \quad (1.4.23)$$

Нам не удалось найти решение при  $G(\infty) = 1$  и  $G(0) = -1$ , так как в задаче присутствует "некоторый резонанс". В решениях имеются гармонические члены, значит, возможна такая "катастрофическая" ситуация, когда функции идут в "разнос", уходят в бесконечность. В этом месте скорости изменяют свой профиль через турбулизацию, либо другие процессы, проходя этот кризис, а, преодолев его, возвращаются в спокойное русло.

Приводим численные исследования, когда  $W = H(\infty) \rightarrow \infty$  при некотором искомом  $G(0)$ , т.е. где лежит разрыв связи  $G(0) = f(W(\infty))$  (рис. 1.4.10).

Для этого мы проинтегрировали уравнения (1.4) при граничных условиях:

при  $\epsilon = 0$

$$H = 0; \quad H' = 0;$$

при  $\epsilon \rightarrow \infty$

$$H(\infty) = W; \quad H' \rightarrow 0; \quad G \rightarrow 1; \quad \epsilon^* = 16.$$

Приводим небольшую табл. а, нужную для анализа поставленного вопроса:

Таблица а

$W$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$G(0)$
0,5	-4,545784	1,262056	-0,653244
0,6	-5,111509	1,306937	-0,660191
0,7	-5,791587	1,357386	-0,666276

Поиск точки разрыва решения, используя таблицу, ищем в форме

$$G(0) = \alpha + \beta e^{\gamma W}.$$

Используя вышеприведенную таблицу, находим константы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , и зависимость принимает вид

$$G(0) = -0,709254 + 0,108593 e^{-1,324138 W}. \quad (1.4.24)$$

Значит, при  $W = H(\infty) \rightarrow \infty$  и  $G(\infty) = 1$   $G(0)_{\min} = -0,709254$ , т.е. таким образом мы не смогли пока найти решение ситуации для соотношения  $G(\infty)=1$ ,  $G(0) = -1$ , которую можно было бы назвать "идеальным антициклоном".

Относительная точность уравнений (1.4.24) в сопоставлении с численным интегрированием дают данные табл. б:

Таблица б

$W$	$G(0)_{\text{интегр.}}$	$G(0)_{\text{по (1.4.24)}}$
0,46	-0,650213	-0,650188
0,56	-0,657518	-0,657522
0,66	-0,663942	-0,663938

Различие в значениях из приведенных величин  $G(0)$  в пятом и менее знаках после запятой. Значит выражение (1.4.24) довольно точное.

В заключение данного раздела отметим одно из важных свойств уравнений (1.4):

$$\begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'). \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

где  $'$ ,  $''$  – производные по  $\varepsilon = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ .

Введем новую переменную  $\zeta = \sqrt[4]{C} \varepsilon$ , а также

$$\begin{aligned} H(\varepsilon) &= \sqrt[4]{C} H(\zeta); \\ G(\varepsilon) &= \sqrt{C} G(\zeta). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} H' &= \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial H}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} = \sqrt[4]{C} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \sqrt[4]{C} = \sqrt{C} H^{\bullet}; \\ H'' &= \sqrt[4]{C^3} H^{\bullet\bullet}; \\ H''' &= C H^{\bullet\bullet\bullet}; \\ G' &= \sqrt[4]{C^3} G^{\bullet}; \\ G'' &= C G^{\bullet\bullet}. \end{aligned}$$

Подставляя это в систему дифференциальных уравнений (1.4.25), получим:

$$\begin{aligned} C H^{\bullet\bullet\bullet} &= C + \sqrt{C} H^{\bullet} \sqrt{C} H^{\bullet} - C G^2 - 2 \sqrt[4]{C} H^{\bullet} \sqrt[4]{C^3} H^{\bullet\bullet}; \\ C G^{\bullet\bullet} &= 2 \left( \sqrt{C} H^{\bullet} \sqrt{C} G - \sqrt[4]{C} H^{\bullet} \sqrt[4]{C^3} G^{\bullet} \right), \end{aligned}$$

или окончательно:

$$\begin{aligned} H^{\bullet\bullet\bullet} &= 1 + H^{\bullet} H^{\bullet} - G^2 - 2 H H^{\bullet\bullet}; \\ G^{\bullet\bullet} &= 2 (H^{\bullet} G - H G^{\bullet}), \end{aligned}$$

где  $\cdot$ ,  $\ddot{\phantom{x}}$ ,  $\dddot{\phantom{x}}$  – производные по  $\zeta$ .

Запишем эти уравнения в привычной для нас форме:

$$\begin{aligned} H''' &= 1 + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= (H'G - HG) \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

при этом штрихи означают производные по  $\zeta$ .

Относительно граничных условий заметим, что при  $\zeta = 0$   $G(0) \neq 1$ , т.е.  $G(0) = \frac{1}{\sqrt{C}}$  для рассматриваемой задачи. Этим свойством преобразования уравнений (1.4) в уравнения (1.4.26) и обратно мы пользовались, и будем пользоваться в дальнейшем при численном интегрировании.

### 1.5. РЕШЕНИЕ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА В КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Найдем аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (1.4):

$$\begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG) \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Введем обозначения:

$$C = s^2, \quad H(\infty) = W, \quad G(\infty) = s. \quad (1.5.2)$$

Тогда безразмерные функции можем записать

$$H = W + h(\varepsilon); \quad G = s + g(\varepsilon), \quad (1.5.3)$$

где  $W, s$  – постоянные величины.

С учетом (1.5.2) и (1.5.3) преобразуем уравнения (1.5.1):

$$\begin{aligned} h''' &= s^2 + h'h' - s^2 - 2sg - g^2 - 2Wh'' - 2hh''; \\ g'' &= 2(h's + h'g - Wg') \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Решение системы дифференциальных уравнений запишем в виде комплексных функций:

$$\begin{aligned} h' &= a e^{-((W+\alpha)+\beta i)\varepsilon}; \\ g &= ai e^{-((W+\alpha)+\beta i)\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

причем оставляем в силе выражения (1.4.10), (1.4.11):

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} + W^2}{2}};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} - W^2}{2}};$$

$$\alpha\beta = s, \quad \alpha^2 - \beta^2 = W^2. \quad (1.5.6)$$

Из уравнений (1.5.5) находим:

$$h = \frac{1}{(-(W+\alpha)+\beta i)} e^{(-(W+\alpha)+\beta i)\varepsilon}, \quad g' = i(-(W+\alpha)+\beta i) e^{(-(W+\alpha)+\beta i)\varepsilon};$$

$$h'' = (-(W+\alpha)+\beta i) e^{(-(W+\alpha)+\beta i)\varepsilon}, \quad g'' = i(-(W+\alpha)+\beta i)^2 e^{(-(W+\alpha)+\beta i)\varepsilon};$$

$$h''' = (-(W+\alpha)+\beta i)^2 e^{(-(W+\alpha)+\beta i)\varepsilon}. \quad (1.5.7)$$

Выделим из первого уравнения (1.5.4) члены, содержащие экспоненту в первой степени,

$$h''' = -2sg - 2Wh''. \quad (1.5.8)$$

Подставим в него значения функций по (1.5.5), (1.5.7) с учетом последних двух равенств (1.5.6). Экспоненциальная функция и коэффициент  $a$  сократятся, а коэффициенты при этом составляют выражение

$$[-(W + \alpha) + \beta i]^2 = -2i\alpha\beta - 2W[-(W + \alpha) + \beta i]. \quad (1.5.9)$$

Раскроем скобки:

$$(W + \alpha)^2 - 2(W + \alpha)\beta i - \beta^2 = -2i\alpha\beta + 2W^2 + 2W\alpha - 2W\beta i$$

или

$$W^2 + 2W\alpha + \alpha^2 - 2W\beta i - 2\alpha\beta i - \beta^2 = -2i\alpha\beta + 2W^2 + 2W\alpha - 2W\beta i,$$

т.е. равенство соблюдается тождественно.

Таким образом, мы показали, что дифференциальное уравнение (1.5.8) удовлетворяется функциями (1.5.5).

Подобным образом поступаем со вторым уравнением (1.5.4):

$$g'' = 2h's - 2Wg'. \quad (1.5.10)$$

Коэффициенты при экспоненте после подстановки (1.5.5), (1.5.7) образуют равенства

$$i(-(W + \alpha) + \beta i)^2 = 2\alpha\beta - i \cdot 2W(-(W + \alpha) + \beta i). \quad (1.5.11)$$

Умножая на  $-i$  все члены и раскрывая скобки, получим тождество

$$W^2 + 2W\alpha + \alpha^2 - 2W\beta i - 2\alpha\beta i - \alpha^2 + W^2 = -2\alpha\beta i + 2W^2 + 2W\alpha - 2W\beta i.$$

Значит и уравнение (1.5.10) удовлетворяется функциями (1.5.5).

Исследуем слагаемые уравнений (1.5.4), которые содержат экспоненциальную функцию в квадрате,  $e^{2(-(W+\alpha)+\beta i)}$ . Они представляют свою систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} h'h' - g^2 - 2hh'' &= 0, \\ h'g - hg' &= (1.5.12) \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения функций по (1.5.5), (1.5.7) и сокращая на экспоненту и коэффициент  $a^2$ , получаем тождества: из первого уравнения (1.5.12)  $1 - i^2 - 2 = 0$ ; из второго уравнения  $i - i = 0$ .

В итоге мы показали, что функции (1.5.5) представляют собой полное, замкнутое аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (1.5.4) в комплексных переменных. Полное решение системы (1.5.1) принимает вид с учетом (1.5.3) и (1.5.5):

$$\begin{aligned} H &= W + \frac{a}{(-(W + \alpha) + \beta i)} e^{(-(W + \alpha) + \beta i)\varepsilon}; \\ H' &= a e^{(-(W + \alpha) + \beta i)\varepsilon}; \\ G &= s + ia e^{(-(W + \alpha) + \beta i)\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

В тригонометрической форме уравнения (1.5.13) можно записать:

$$\begin{aligned} H &= W + \frac{a}{2\alpha} e^{-(W+\alpha)\varepsilon} \left[ -i \left( \sin \beta\varepsilon + \frac{\beta}{W+\alpha} \cos \beta\varepsilon \right) + \left( \frac{\beta}{W+\alpha} \sin \beta\varepsilon - \cos \beta\varepsilon \right) \right]; \\ H' &= a e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (\cos \beta\varepsilon + i \sin \beta\varepsilon); \\ G &= s + a e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (-\sin \beta\varepsilon + i \cos \beta\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

## 1.6. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Исследуем еще раз уравнения (1.4):

$$\begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG) \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

В разделе 1.4 мы показали, что при граничных условиях при  $\varepsilon = 0$

$$H(0) = 0, H'(0) = 0, G(0) = -1 \text{ (условия прилипания);}$$

при  $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$H(\infty) = W, H'(\infty) = 0, G(\infty) = s = 1$$

решение системы дифференциальных уравнений (1.6.1) нами не найдено. При этом отмечалось, что при  $G(0) < -0,6$  производные скоростей  $H''(0) = A$  и  $G'(0) = B$  быстро растут при уменьшении  $G(0)$  (рис. 1.4.10 и табл. 1.4.3).

Известно также, что касательные напряжения по закону Ньютона выражаются

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn},$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $\frac{dv}{dn}$  – градиент скорости по направлению нормали к поверхности.

В нашем случае будет трение в радиальном направлении

$$\tau_r = \mu \left( \frac{du}{dz} \right)_{z=0} = \left[ \mu \frac{d(\omega r H'(\varepsilon))}{\partial \left( \varepsilon \sqrt{\frac{v}{\omega}} \right)} \right]_{\varepsilon=0}.$$

После упрощения имеем

$$\tau_r = A \rho \sqrt{\omega v} \omega r. \quad (1.6.2)$$

По аналогии напряжение трения в окружном направлении

$$\tau_{\theta} = B \rho \sqrt{\omega v} \omega r. \quad (1.6.3)$$

Тогда отношение составляющих трения

$$\frac{\tau_r}{\tau_{\theta}} = \frac{A}{B}, \quad (1.6.4)$$

и вязкое трение жидкости о поверхность диска принимает вид

$$\tau = \sqrt{\tau_r^2 + \tau_{\theta}^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \rho \sqrt{\omega v} \omega r. \quad (1.6.5)$$

Решим уравнение (1.6.1), используя граничные условия при  $\varepsilon = 0$

$$H(0) = 0, H'(0) = 0, G(0) = G_0;$$

при  $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$H(\infty) = W, H'(\infty) = 0, G(\infty) = s = 1. \quad (1.6.6)$$

Мы оставили радиальную безразмерную скорость  $H'(0)$  свободной, искомой и не обязательно равной нулю, т.е. допускаем возможность проскальзывания жидкости относительно поверхности диска в радиальном направлении. Величину безразмерной окружной скорости изменяем до  $G(0) = -1$ .

При условии, что  $C = S^2$ , дифференциальные уравнения (1.6.1) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} H''' &= 1 + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG) \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

Граничные условия записаны выше. Алгоритм численного решения используем ранее описанный. Вблизи поверхности диска функции скоростей разлагаем в степенные ряды Тейлора:

$$\begin{aligned}
H(\varepsilon) &= H(0) + \frac{H'(0)}{1} \varepsilon + \frac{H''(0)}{2!} \varepsilon^2 + \frac{H'''(0)}{3!} \varepsilon^3 + \dots; \\
H'(\varepsilon) &= H'(0) + \frac{H''(0)}{1} \varepsilon + \frac{H'''(0)}{2!} \varepsilon^2 + \frac{H^{IV}(0)}{3!} \varepsilon^3 + \dots; \\
G(\varepsilon) &= G(0) + \frac{G'(0)}{1} \varepsilon + \frac{G''(0)}{2!} \varepsilon^2 + \frac{G'''(0)}{3!} \varepsilon^3 + \dots \quad (1.6.8)
\end{aligned}$$

Положим, что  $H'(0) = D$  – безразмерное радиальное проскальзывание относительно поверхности диска и  $G(0) = E$  – возможное тангенциальное проскальзывание относительно поверхности диска, тогда для разложения в ряды Тейлора получим:

$$\begin{aligned}
H(0) &= 0; \\
H'(0) &= D; \\
H''(0) &= A; \\
H'''(0) &= 1 + D^2 - E^2; \\
H^{IV}(0) &= -2BE; \\
H^V(0) &= -2D - 2D^3 - 2DE^2 - 2B^2; \\
H^{VI}(0) &= -2A^2 - 2AD - 2AE^2 - 4BDE; \quad (1.6.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dots\dots\dots \\
G(0) &= E; \\
G'(0) &= B; \\
G''(0) &= 2DE; \\
G'''(0) &= 2AE; \\
G^{IV}(0) &= 2E - 2E^3 + 2AB - 2D^2E; \\
G^V(0) &= -8BE^2 + 4B + 4BD^2 - 8ADE; \quad (1.6.10)
\end{aligned}$$

В результате степенные ряды Тейлора разложения безразмерных скоростей вблизи поверхности диска  $\varepsilon = 0$  будут:

- аксиальная скорость

$$\begin{aligned}
H(\varepsilon) &= \frac{D}{1!} \varepsilon + \frac{A}{2!} \varepsilon^2 + \frac{1+D^2-E^2}{3!} \varepsilon^3 - \frac{2BE}{4!} \varepsilon^4 - \frac{2(D+D^3+DE^2+B^2)}{5!} \varepsilon^5 - \\
&\quad - \frac{2(A^2+AD+AE^2+2BDE)}{6!} \varepsilon^6 + \dots;
\end{aligned}$$

- радиальная скорость

$$\begin{aligned}
H'(\varepsilon) &= D + \frac{A}{1!} \varepsilon + \frac{1+D^2-E^2}{2!} \varepsilon^2 - \frac{2BE}{3!} \varepsilon^3 - \frac{2(D+D^3+DE^2+B^2)}{4!} \varepsilon^4 - \\
&\quad - \frac{2(A^2+AD+AE^2+2BDE)}{5!} \varepsilon^5 + \dots;
\end{aligned}$$

- тангенциальная скорость

$$\begin{aligned}
G(\varepsilon) &= E + \frac{B}{1!} \varepsilon + \frac{2DE}{2!} \varepsilon^2 + \frac{2AE}{3!} \varepsilon^3 + \frac{2(E-E^3+AB-D^2E)}{4!} \varepsilon^4 + \\
&\quad + \frac{4(-BE^2+B+BD^2-2ADE)}{5!} (1.6.11) \dots
\end{aligned}$$

Вдали от диска остаются в силе асимптотические гармонические ряды (1.4.20):

$$\begin{aligned}
H(E) &= W \frac{1}{2\alpha} e^{-(W+\alpha)\varepsilon} \left\{ -a \left( \sin \beta \varepsilon + \frac{\beta}{W+\alpha} \cos \beta \varepsilon \right) + \right. \\
&\quad \left. + b \left( \frac{\beta}{W+\alpha} \sin \beta \varepsilon - \cos \beta \varepsilon \right) \right\} + \dots; \\
H'(\varepsilon) &= e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (a \sin \beta \varepsilon + b \cos \beta \varepsilon) + \dots; \\
G(\varepsilon) &= s + e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (-b \sin \beta \varepsilon + a \cos \beta \varepsilon) + \dots, \quad (1.6.12)
\end{aligned}$$

где

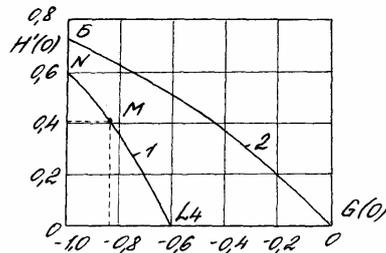
$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} + W^2}{2}};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} - W^2}{2}}.$$

Мы численно проинтегрировали систему дифференциальных уравнений (1.6.7) по ранее описанному алгоритму и при приведенных в данном разделе допущениях. Ввиду больших касательных напряжений трения жидкости о поверхность диска возможно ее проскальзывание. По этой причине гипотеза о прилипанию жидкости к поверхности не выполняется.

Сначала мы исследовали случаи проскальзывания жидкости относительно поверхности диска только в радиальном направлении и прилипания ее в тангенциальном направлении. Первые расчеты провели вблизи точки  $L_4$  (рис. 1.4.10). При этом изменяли безразмерную скорость диска до  $G(0) = -1$ , сохраняя в бесконечности  $G(\infty) = s = 1$ , т.е. до случая, когда угловая скорость жидкости в бесконечности и угловая скорость диска равны по модулю и имеют противоположные направления вращения.

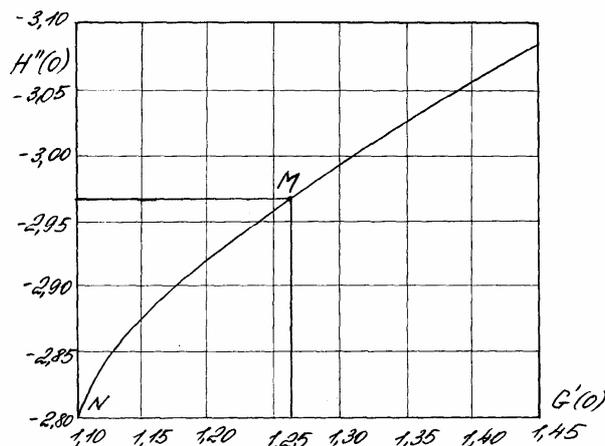
В табл. 1.6.1 представлены начальные параметры, в том числе величина безразмерного радиального проскальзывания жидкости относительно поверхности диска  $H'(0)$ , в функции от  $G(0)$  при  $H(\infty) = W = 0$ ,  $G(\infty) = s = 1$ . На рис. 1.6.1 изображена зависимость  $H'(0) = f(G(0))$  при  $W = 0$ , и для сравнения при  $H(\infty) = W = -0,674713$  (решение задачи Бедвадта). Точкой  $M$  отмечено положение, когда вектор безразмерной относительной скорости жидкости на поверхности диска и вектор трения жидкости о поверхность диска лежат на одной прямой.



**Рис. 1.6.1. Зависимость проскальзывания безразмерной радиальной скорости  $H'(0)$  от безразмерной окружной скорости диска  $G(0)$  при  $G(\infty) = s = 1$ :**  
 1 – осевая безразмерная скорость  $H(\infty) = W = 0$ ;  
 2 – осевая безразмерная скорость  $H(\infty) = W_0 = -0,674713$

Координаты точки  $M$ :  $G(0) = -0,82895$ ;  $H'(0) = 0,402273$ ;  $G_d = -1$ , где  $G_d$  – безразмерная окружная скорость диска;  $G(0) - G_d$  – безразмерная окружная скорость жидкости на поверхности диска;  $G(0) - G_d$  – относительная безразмерная окружная скорость, проскальзывание жидкости в тангенциальном направлении на поверхности диска, отставание.

По значениям начальных параметров (табл. 1.6.1) показана графически зависимость  $H''(0) = f(G'(0))$  на рис. 1.6.2, куда отображена т.  $M$ , имеющая координаты:  $G'(0) = -2,965335$ ;  $H''(0) = 1,260871$ .



**Рис. 1.6.2. График взаимосвязи производных скоростей  $H''(0) = A$  и  $G'(0) = B$  при  $G(\infty) = s = 1$  и  $H(\infty) = W = 0$**







При расчетах требовалось определить семь коэффициентов  $A, B, D, E, a, b, W$  в соответствии с уравнениями (1.6.11) и (1.6.12). Поэтому мы выбирали, например,  $W = \text{const}$ , затем задавались величиной  $G(0) = E$ . Остальные пять констант определяли из условия гладкой стыковки функций при некотором  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , где вычисленные по (1.6.11) и (1.6.12) между собой равны величины:  $H(\varepsilon^*), H'(\varepsilon^*), H''(\varepsilon^*), G(\varepsilon^*), G'(\varepsilon^*)$ . Таким образом мы находим оставшиеся пять констант:  $A, B, D, \varepsilon, a, b$ .

В табл. 1.6.2 и графически на рис. 1.6.3 – 1.6.5 представлены для примера функции от  $\varepsilon$  безразмерные аксиальная  $H(\varepsilon)$ , радиальная  $H'(\varepsilon)$ , окружная  $G(\varepsilon)$  скорости с начальными параметрами, соответствующими их величинам в т.  $M$ .

Отметим, что все эти функции имеют колебательный затухающий характер в соответствии с уравнением (1.6.12), и при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  выполняются условия:  $H(\infty) = W \rightarrow 0, H'(\infty) \rightarrow 0, G(\infty) \rightarrow 1$ .

Запишем экстремальные значения безразмерных скоростей, в соответствии с табл. 1.6.2:

$$H_{\max} \approx 0,02729 \quad \text{при} \quad \varepsilon \approx 0,15;$$

$H_{\min} \approx -8,261287$	при	$\varepsilon \approx 4,20;$
$H_{\max} \approx 0,109952$	при	$\varepsilon \approx 9,80;$
$H'_{\min} \approx -0,004806$	при	$\varepsilon \approx 13,00;$
$H'_{\min} \approx -3,126136$	при	$\varepsilon \approx 2,00;$
$H'_{\max} \approx 2,784142$	при	$\varepsilon \approx 6,40;$
$H'_{\min} \approx 0,066811$	при	$\varepsilon \approx 10,60;$
$H'_{\max} \approx 0,003039$	при	$\varepsilon \approx 13,50;$
$G_{\max} \approx 6,061607$	при	$\varepsilon \approx 4,20;$
$G_{\min} \approx 0,582532$	при	$\varepsilon \approx 8,80;$
$G_{\max} \approx 1,01481$	при	$\varepsilon \approx 12,00.$

Остальные экстремумы – в соответствии с (1.6.12). Из приведенных величин экстремумов видим, что первые или вторые экстремумы по модулю значительно больше единицы. Затем идет быстрое затухание функций безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$ .

Рассмотрим составляющие вязкого трения жидкости на поверхности диска. Касательное напряжение трения в радиальном направлении по закону Ньютона будет

$$\tau_r = \mu \left( \frac{du}{dz} \right)_{z=0}, \quad (1.6.13)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости.

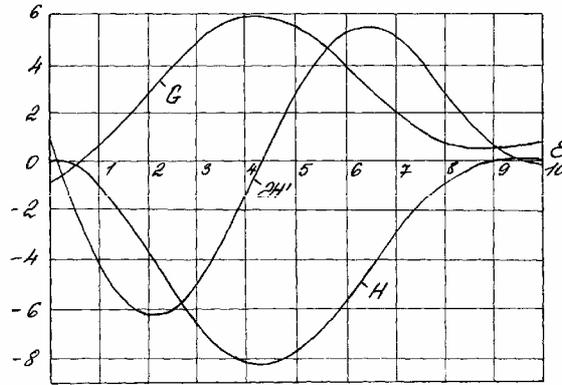


Рис. 1.6.3. Безразмерные скорости  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$  и  $G(\varepsilon)$  близи поверхности вращающегося диска при  $G(\infty) = s = 1$ ,  $H(\infty) = W = 0$  с проскальзыванием относительно диска безразмерных радиальной  $H'(0)$  и окружной  $G(0)$  скоростей при безразмерной скорости диска  $G_d = -1$

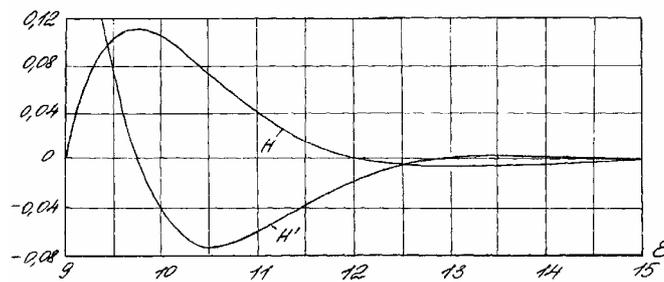


Рис. 1.6.4. Графики безразмерных радиальной  $H'(\varepsilon)$  и осевой  $H(\varepsilon)$  скоростей вдали от диска при проскальзывании относительно поверхности вращающегося диска радиальной  $H'(0)$  и окружной  $G(0)$  скоростей при скорости диска  $G_d = -1$ ,  $G(\infty) = s = 1$ ,  $H(\infty) = W = 0$

Преобразуем (1.6.13) к виду

$$\tau_r = \nu \rho \left[ \frac{d(\omega r H'(\varepsilon))}{d\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \varepsilon\right)} \right]_{\varepsilon=0} = \omega \rho \sqrt{\omega \nu} H''(0). \quad (1.6.14)$$

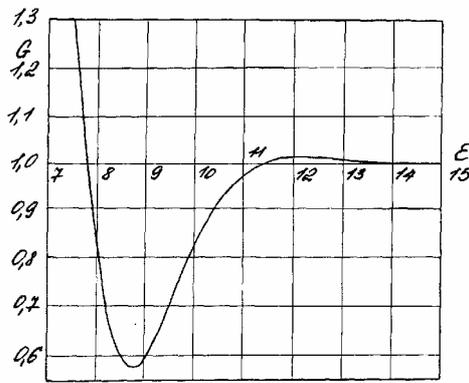


Рис. 1.6.5. График безразмерной окружной скорости  $G(\epsilon)$  вдали от поверхности диска при проскальзывании относительно поверхности вращающегося диска радиальной  $H'(0)$  и окружной  $G(0)$  скоростей при скорости диска  $G_d = -1$

По аналогии, в тангенциальном направлении касательное напряжение трения будет иметь выражение

$$\tau_{\text{ц}} = \omega r \rho \sqrt{\omega v} G'(0). \quad (1.6.15)$$

Найдем их отношение, используя численные значения из табл. 1.6.2,

$$\frac{\tau_r}{\tau_{\text{ц}}} = \frac{H''(0)}{G'(0)} = \frac{-2,965335}{1,260871} = -2,3518. \quad (1.6.16)$$

Это по сути есть тангенс угла  $\gamma$  между результирующей величиной вязкого трения  $\tau = \sqrt{\tau_r^2 + \tau_{\text{ц}}^2}$  и  $\tau_{\text{ц}}$  (рис. 1.6.6).

С другой стороны, из рассмотрения относительных скоростей жидкости на поверхности диска запишем, используя табл. 1.6.2,

$$\frac{H'(0)}{G(0) - G_d} = \frac{0,402273}{-0,828952 + 1} = 2,3518. \quad (1.6.17)$$

Это есть значение тангенса угла  $\gamma$  между вектором результирующей относительной скорости  $V = \sqrt{u^2 + V_{\text{отн}}^2}$  и вектором относительной окружной скорости  $V_{\text{отн}}$ . Сравнение 1.6.16 и 1.6.17 показывает, что вектор относительной скорости жидкости на поверхности диска и вектор вязкого трения жидкости о поверхность диска лежат на одной прямой, но они направлены в противоположные стороны, что логично.

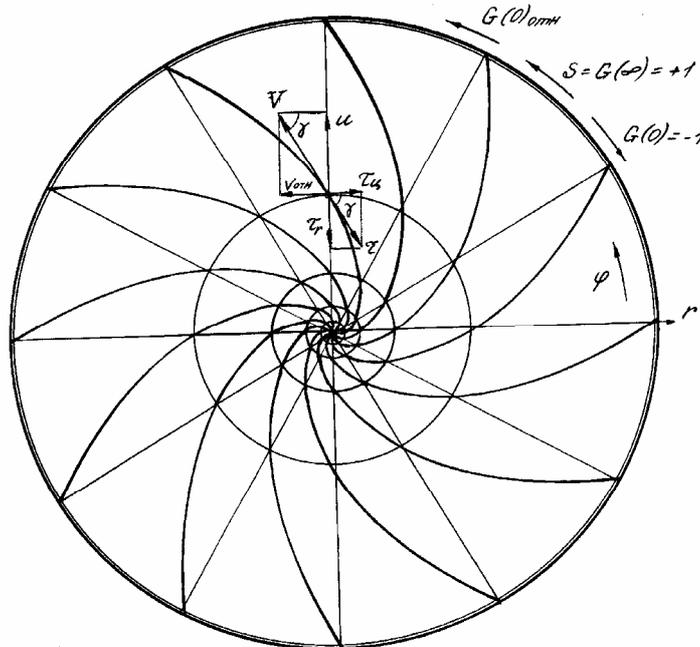


Рис. 1.6.6. Линии тока на поверхности диска при проскальзывании относительно поверхности вращающегося диска

На рис. 1.6.6 изображены линии тока относительных скоростей жидкости, которые совпадают с линиями касательных напряжений вследствие трения жидкости о поверхность диска.

Итак, в каждой точке поверхности диска для нами рассматриваемой задачи равенства (1.6.16) и (1.6.7) соблюдаются (напомним, что нами исследовались условия течения жидкости в т.  $L_4$  при  $W = 0$ ). Значит, в каждой точке на поверхности диска угол  $\gamma = \arctg \frac{2,3518}{1,168753} = \text{const}$ . Линии тока относительного движения жидкости при  $z = 0$  описываются для рассматриваемого случая уравнением спирали Архимеда

$$r = 2,3518\varphi, \quad (1.6.18)$$

где  $\varphi$  – угловая координата в радианах.

На рис. 1.6.7 и 1.6.8 графически изображены зависимости радиального проскальзывания жидкости относительно поверхности вращающегося диска при  $W$  как параметр, и безразмерной тангенциальной скорости в бесконечности  $G(\infty) = s = 1 = \text{const}$ . Табличные данные семейства зависимостей не приводим из-за громоздкости таблиц. Предел исследований – от  $H'(0) = 0$  (рис. 1.6.7) до  $G(0) = -1$  (рис. 1.6.8). Пунктирной линией (рис. 1.6.8) показано положение точек  $M$ , когда векторы относительной скорости жидкости и векторы вязкого трения жидкости о диск лежат на одной прямой линии. Будем считать такое проскальзывание сбалансированным. Кроме того, мы наблюдаем, что при некоторых значениях  $W$ , например при  $W = -0,75$  и  $W = -0,8$ , кривые  $H'(0) = f(G(0))$  не достигают значения  $G(0) = -1$ , делая поворот. Нам удалось определить предельное значение  $W = -0,736909$ , когда функция касается ординаты  $G(0) = -1$  в точке  $H'(0) = 0,667656$ . Это изображено графически на рис. 1.6.8 и в табл. 1.6.3. Значит зависимости  $H'(0) = f(G(0))$  при  $W < -0,736909$  не достигают значений  $G(0) = -1$ , а при  $W > -0,736909$  пересекают ординату  $G(0) = -1$  дважды.

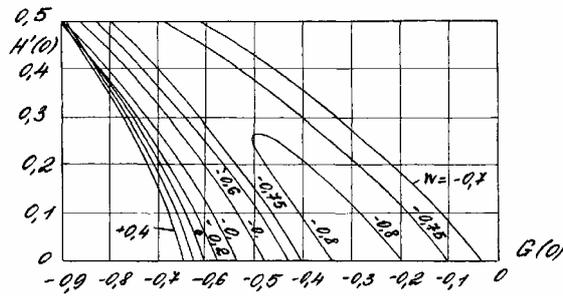


Рис. 1.6.7. Радиальное проскальзывание жидкости  $H'(0)$  в зависимости от безразмерной окружной  $G(0)$  скорости диска и  $G(\infty) = s = 1$  при  $H(\infty) = W$  как параметр

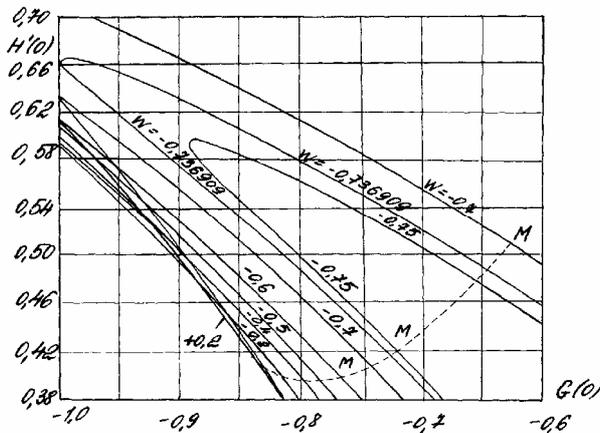


Рис. 1.6.8. Радиальное проскальзывание  $H'(0)$  как функция безразмерной скорости вращающегося диска  $G(0)$  при  $G(\infty) = s = 1$  и  $H(\infty) = W$  как параметр (фрагмент)



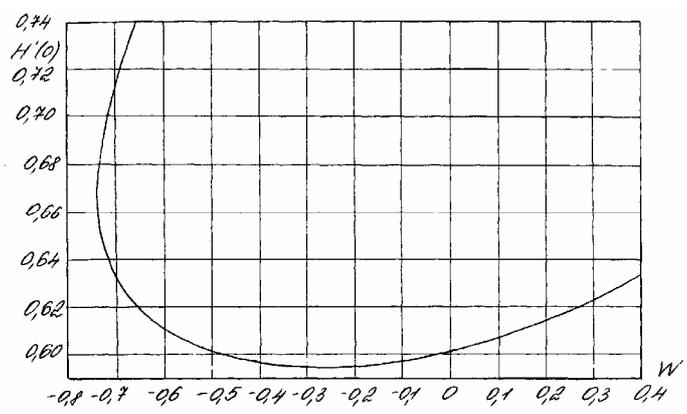


Рис. 1.6.9. Зависимость безразмерной радиальной скорости жидкости  $H'(0)$  от безразмерной аксиальной скорости в бесконечности  $H(\infty) = W$  при безразмерной окружной скорости диска  $G(0) = -1$  и

в бесконечности  $G(\infty) = s = 1$

Сечение поверхности  $F(G(0), H'(0), W) = 0$  (рис. 1.6.8) по ординате  $G(0) = -1$  показано на рис. 1.6.9 и в табл. 1.6.4 при проскальзывании только в радиальном направлении. Отметим экстремальные значения:

$$W_{\min} = -0,736909 \quad \text{при} \quad H'(0) \approx 0,667000;$$

$$H'(0)_{\min} = 0,594970 \quad \text{при} \quad W \approx -0,250000.$$

Разрез этой поверхности при  $H'(0) = 0$  представлен графически, на рис. 1.6.10 и в табл. 1.6.5. Это фактически случай прилипания жидкости к поверхностям диска. Минимальное значение безразмерной аксиальной скорости в этом случае  $H'(0) = W = -0,815980$  при  $G(0) \approx -0,28$ . Если окружную безразмерную скорость диска устремить  $G(0) \rightarrow -1$ , то все параметры течения жидкости в таких условиях стремятся к бесконечности. Еще раз упоминаем, что решение задачи без проскальзывания при  $G(0) = -1$  и  $G(\infty) = s = 1$  невозможно. На рис. 1.6.10 показаны вышеобозначенные точки  $L_4$  и  $B$ . Если двигаться по поверхности  $F(G(0), H'(0), W) = 0$  рис. 1.6.8 по линии точек  $M, M, \dots, M$ , то получаем картину изображенную на рис. 1.6.11 и в табл. 1.6.6. Экстремальные значения переменных при этом:

$$W_{\min} = -0,775840 \quad \text{при} \quad H'(0) = 0,445420; \quad G(0) = -0,6907;$$

$$H'(0)_{\min} = 0,390126 \quad \text{при} \quad W \approx -0,350000; \quad G(0) = -0,798972.$$

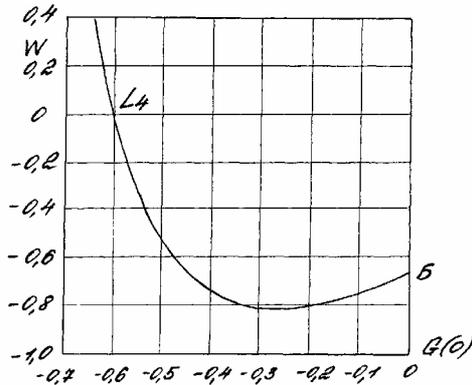


Рис. 1.6.10. Связь осевой безразмерной скорости жидкости в бесконечности  $H(\infty) = W$  с безразмерной окружной скоростью диска  $G(0)$ , в бесконечности  $G(\infty) = 1$  в случае отсутствия проскальзывания жидкости относительно поверхности диска

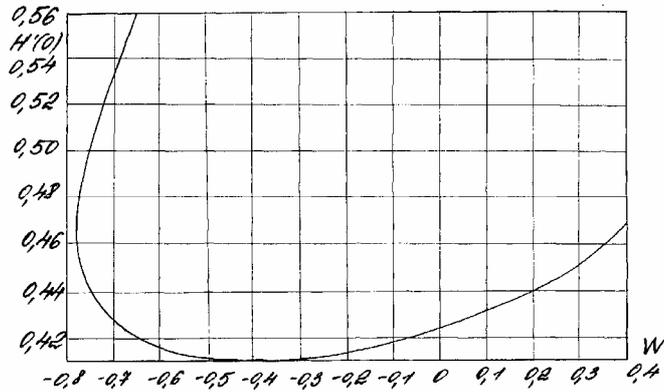


Рис. 1.6.11. Сечение поверхности рис. 1.6.8 по линии  $M, M, \dots, M$

На рис. 1.6.12 изображено соотношение сбалансированного движения жидкости по поверхности вращающегося диска, вращающегося с безразмерной скоростью  $G_d = -1$ , в бесконечности среда имеет скорость  $G(\infty) = 1$  (кривая 1). Там же приведено предельное значение  $H(\infty) = W = -0,775840$ , при котором сбалансированность (кривая 2) существует в одной точке  $N$ . Точка  $N$  соприкосновения кривых 1 и 2 имеет координаты  $H'(0) = 0,445420$ ,  $G(0) = -0,6907$ ,  $W = -0,775840$ .

Данные для построения кривой 2 содержатся в табл. 1.6.7.

















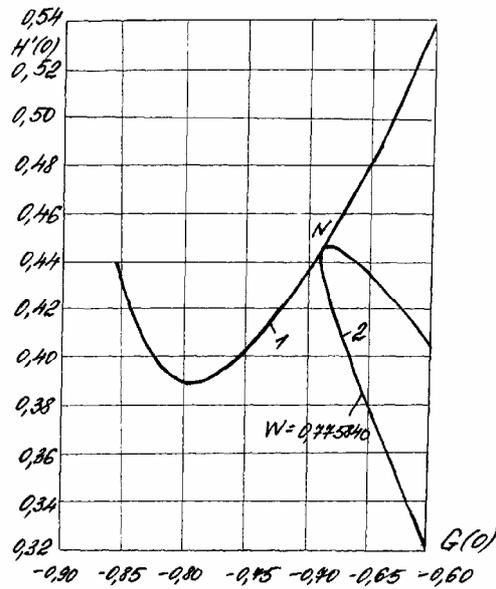


Рис. 1.6.12. Соотношение сбалансированного движения жидкости на поверхности вращающегося диска при  $G_d = -1$ ,  $G(\infty) = s = 1$

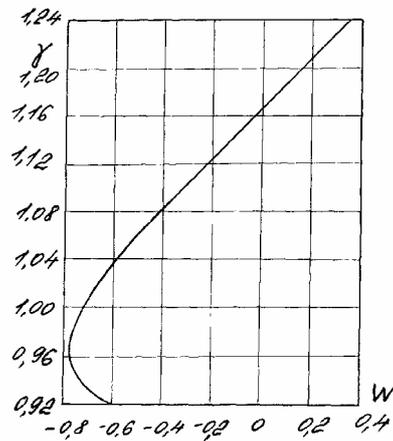


Рис. 1.6.13. Угол между вектором скорости и касательной к окружной при сбалансированном проскальзывании жидкости относительно поверхности вращающегося диска

В табл. 1.6.6, наряду с другими параметрами, для анализа представлены численные значения:

- модуль относительной безразмерной скорости на поверхности диска

$$U = \sqrt{H'(0)H''(0) + (s + G(0))(s + G'(0))}; \quad (1.6.19)$$

- модуль безразмерного трения жидкости о поверхность вращающегося диска в результате относительного проскальзывания

$$T = \sqrt{H''(0)H''(0) + G'(0)G'(0)}; \quad (1.6.20)$$

- угол направления векторов  $U$  и  $T$  относительно касательной к окружностям в любой точке диска при  $H(\infty) = W$ , как параметр

$$\gamma = \arctg\left(\frac{H'(0)}{s + G(0)}\right); \quad \gamma = \arctg\left(\frac{H''(0)}{G'(0)}\right). \quad (1.6.21)$$

Графически функция угла  $\gamma$  в зависимости от  $H(\infty) = W$  показана на рис. 1.6.13 и табл. 1.6.6. По этой же таблице можно проследить связь угла  $\gamma$  с безразмерной радиальной скоростью жидкости  $H'(0)$  на поверхности диска.

По константам  $a$  и  $b$  возможно продолжение вычисления всех функций безразмерных скоростей и их производных при  $\epsilon \geq \epsilon^*$ , которые описываются известными нам уравнениями (1.4.20), они справедливы и в рассматриваемом нами случае:

$$\begin{aligned}
H(\varepsilon) &= W + \frac{1}{2\alpha} e^{-(W+\alpha)(\varepsilon-\varepsilon^*)} \left\{ -a \left[ \sin(\beta(\varepsilon-\varepsilon^*)) + \frac{\beta}{W+\alpha} \cos(\beta(\varepsilon-\varepsilon^*)) \right] + \right. \\
&\quad \left. + b \left[ \frac{\beta}{W+\alpha} \sin(\beta(\varepsilon-\varepsilon^*)) - \cos(\beta(\varepsilon-\varepsilon^*)) \right] \right\} + \dots; \\
H'(\varepsilon) &= e^{-(W+\alpha)(\varepsilon-\varepsilon^*)} [a \sin \beta(\varepsilon-\varepsilon^*) + b \cos \beta(\varepsilon-\varepsilon^*)] + \dots; \\
G(\varepsilon) &= s + e^{-(W+\alpha)(\varepsilon-\varepsilon^*)} [-b \sin \beta(\varepsilon-\varepsilon^*) + a \cos \beta(\varepsilon-\varepsilon^*)] + \dots,
\end{aligned} \tag{1.6.22}$$

где коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются как и прежде (1.4.10)

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} + W^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} - W^2}{2}}. \tag{1.6.23}$$

Отметим, что при безразмерной аксиальной скорости  $H(\infty) = W < -0,775840$  сбалансированного проскальзывания жидкости относительно поверхности вращающегося диска не существует.

Итак, нами достаточно подробно рассмотрено течение жидкости с проскальзыванием относительно поверхности вращающегося диска в интервале изменения переменных, включающем точку  $L_4$  (рис. 1.4.10) с параметрами  $H(\infty) = W = 0$ ;  $G(\infty) = s = 1$ ;  $H'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $H''(\infty) \rightarrow 0$ ;  $G'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = -0,603321$ ;  $H(0) = 0$ ;  $H''(0) = -2,798630$ ;  $G'(0) = 0,101782$ .

Теперь посмотрим на поведение жидкости при аналогичных допущениях, исходя из точки  $L_1$  (рис. 1.4.1) с параметрами  $H(\infty) = W = 0$ ;  $G(\infty) = S = -0,154200$ ;  $H'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $H''(\infty) \rightarrow 0$ ;  $G'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = 1$ ;  $H(0) = 0$ ;  $H''(0) = 0,475080$ ;  $G'(0) = -0,583970$ .

За основу берем для численного интегрирования уравнение (1.4):

$$\begin{aligned}
H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\
G'' &= 2(H'G - I) \tag{1.6.24}
\end{aligned}$$

где  $C = s^2 = G^2(\infty)$ .

Первоначально сохраняем  $H(\infty) = W = 0$ ,  $G(0) = 1$  и изменяем  $s$  от значения его в точке  $L_1$ , равного  $s = -0,154200$  до  $s = -1$ . Допускаем проскальзывание жидкости на поверхности диска только в радиальном направлении. Результаты расчетов показаны на рис. 1.6.14 и в табл. 1.6.8. При состоянии противоположного направленного вращения жидкости в бесконечности и диска, т.е. при  $G(\infty) = s = -1$  и  $G(0) = 1$  получены величины переменных:  $H'(0) = 1,124921$ ;  $H''(0) = A = -2,118025$ ;  $G'(0) = B = -2,042904$ .

Следующим этапом исследования положили условия:  $G(\infty) = s = -1 = \text{const}$ ,  $H(\infty) = W = 0 = \text{const}$ , изменяем  $G(0)$  от единицы до нуля, только радиальное проскальзывание жидкости на поверхности диска  $H'(0) \neq 0$ ;  $H(0) = 0$ ;  $H'(\infty) = 0$ ;  $H''(\infty) = 0$ ;  $G'(\infty) = 0$ . Графически решение показано на рис. 1.6.15 и в табл. 1.6.9. Расчеты показали, что при  $W = 0$  мы нашли точку  $M$  сбалансированного проскальзывания с координатами  $G(0) = 0,411251$ ;  $H'(0) = 0,920043$ . Эта точка  $M$  на рис. 1.6.15 отмечена.

Одновременно найдена точка с координатами  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0,726634$ ;  $H''(0) = -1,487075$ ;  $G(0) = 0$ ;  $G'(0) = -0,664467$ ;  $H(\infty) = W = 0$ ;  $H'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $H''(\infty) \rightarrow 0$ ;  $G(\infty) = s = -1$ ;  $G'(\infty) = 0$ , которая на рис. 1.6.15 и 1.6.1 обозначена т.  $B$  и означает видоизменение начальных параметров движения среды в задаче Бедевадта при допущении радиального проскальзывания жидкости неподвижного диска.

**Примечание:** В рассматриваемых задачах понятие "правого" или "левого" вращения не влияет на закономерности движения жидкости в осевом и радиальном направлениях. Если рассмотреть уравнения (1.4), (1.6.24), опять полагая  $C = s^2$ , т.е. коэффициент давления  $C$  всегда положительный, то изменение знака на противоположный функции  $G(\varepsilon)$ , и как следствие ее производных, вид уравнения (1.6.24) не изменяет.

Проанализируем при такой ситуации, какие изменения мы должны внести в уравнения асимптотического разложения (1.6.22) функций  $H(\varepsilon)$ ;  $H'(\varepsilon)$ ;  $G(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \geq \varepsilon^*$ .

$$\begin{aligned}
H'(\varepsilon) &= e^{-(W+\alpha)(\varepsilon-\varepsilon^*)} [a \sin \beta(\varepsilon-\varepsilon^*) + b \cos \beta(\varepsilon-\varepsilon^*)] + \dots; \\
G(\varepsilon) &= s + e^{-(W+\alpha)(\varepsilon-\varepsilon^*)} [-b \sin \beta(\varepsilon-\varepsilon^*) + a \cos \beta(\varepsilon-\varepsilon^*)] + \dots.
\end{aligned}$$

При смене знака  $G(\varepsilon)$  должны измениться знаки всех слагаемых правой части второго уравнения (1.6.22). Отметим, что более полная запись уравнений (1.6.23) имеет вид ( $\pm$ ):

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} + W^2}{2}}; \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4s^2} - W^2}{2}}.$$

В выражениях (1.6.22) величина  $(W + \alpha)$  должна быть всегда положительной,  $(W + \alpha) > 0$ . Значит коэффициент  $\alpha$  всегда положителен,  $\alpha > 0$ .

Поскольку  $G(\infty) = s$  должен сменить знак, тогда на основании соотношения  $+s = \alpha \cdot \beta$  должен сменить знак и параметр  $\beta$ . Чтобы правая часть второго уравнения (1.6.22) изменила знак, то должен поменять знак на противоположный коэффициент  $\alpha$ . Смена знаков одновременно  $\alpha$  и  $\beta$  не вносит в функции  $H(\epsilon)$ ,  $H'(\epsilon)$  никаких изменений.

Это свойство дифференциальных уравнений (1.4) мы использовали не только в рассматриваемом разделе, но и в целом во всей предлагаемой работе.

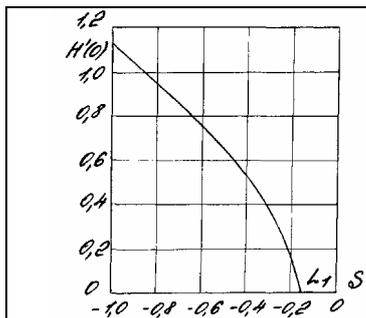


Рис. 1.6.14. График радиального проскальзывания с ростом угловой скорости в бесконечности  $G(\infty) = s$  при безразмерной скорости диска  $G(0) = 1$

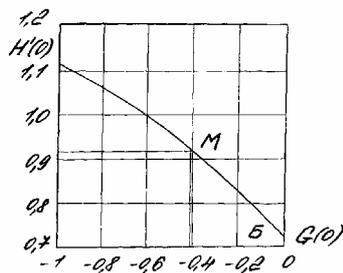


Рис. 1.6.15. График радиального проскальзывания жидкости при безразмерной окружной скорости жидкости в бесконечности  $G(\infty) = s = 1$  в зависимости от безразмерной скорости вращающегося диска

Случай, когда  $W = \alpha = \beta = s = 0$ , нами рассмотрен в разделе 1.3.

На рис. 1.6.16 и в табл. 1.6.10 представлены значения начальных параметров  $H(0)$ ,  $G(0)$ ,  $H(\epsilon) = W$  на некотором интервале изменения их величин. В других плоскостях зависимости параметров показаны на рис. 1.6.17 и 1.6.18 на основании той же табл. 1.6.10.

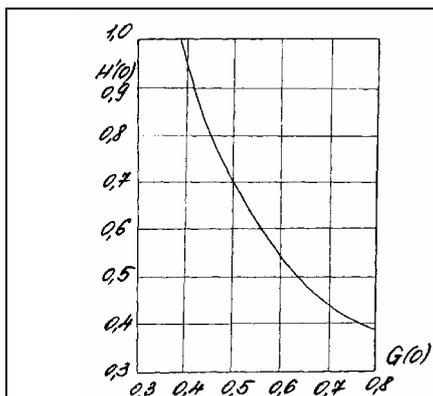


Рис. 1.6.16. График сбалансированного радиально-тангенциального проскальзывания жидкости относительно поверхности вращающегося диска в координатах  $G(0)$ ,  $H(0)$  и при  $H(\infty) = W$  как параметре

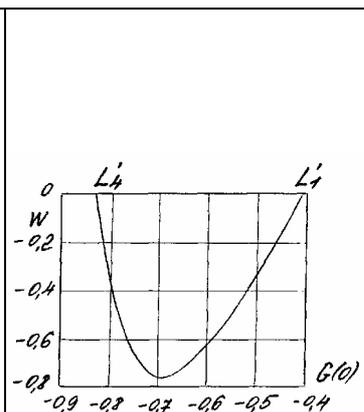


Рис. 1.6.17. Зависимость сбалансированного радиально-тангенциального проскальзывания жидкости при  $H(0)$  как параметре

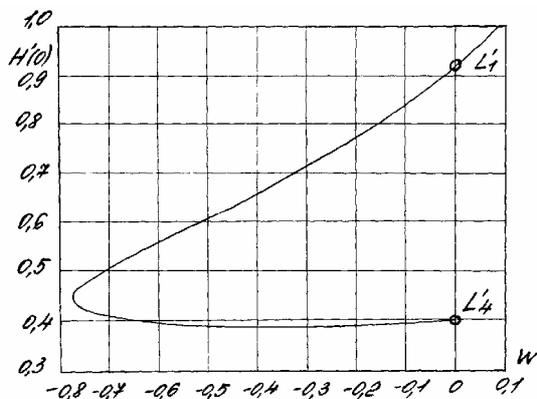


Рис. 1.6.18. Зависимость сбалансированного радиально-тангенциального проскальзывания жидкости как функция от безразмерной осевой скорости в бесконечности  $H(\infty) = W$  и  $G(0)$  как параметре











Анализ графиков (рис. 1.6.16 – 1.6.18) показывает, что при сбалансированном радиально-тангенциальном проскальзывании жидкости на поверхности вращающегося диска  $H(0)$ ,  $G(0)$  и  $W$  взаимозависимы. В декартовых координатах  $H(0)$ ,  $G(0)$ ,  $H(\infty) = W$  эта зависимость представляет собой пространственную кривую линию, проекции которой на координатные плоскости и показаны на рис. 1.6.16 – 1.6.18.

Замечательным является то, что эта линия точно совпадает с полученной ранее, когда мы исследование начинали исходя из точки  $L_4$ . Точки  $L_1$  и  $L_4$  (рис. 1.4.1 и 1.4.10) соответствуют движению жидкости над вращающимся диском без проскальзывания при отсутствии аксиальной скорости в бесконечности,  $H(\infty) = W = 0$ . Допуская проскальзывание и вращение диска и жидкости с одинаковыми скоростями, но противоположно направленными,  $G_d = -1$ ,  $G(\infty) = s = 1$ ,  $H(\infty) = W = 0$ , мы получили соответственные точки  $L_1$  и  $L_4$ , которые отмечены на рис. 1.6.17 и 1.6.18.

Проведем исследование проскальзывания, аналогичное ранее выполненному, взяв за исходную точку  $L_2$  (рис. 1.4.1). Она имеет параметры:  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $H''(0) = A = 0,490259$ ;  $G(0) = 1$ ;  $G'(0) = B = -0,561329$ ;  $H(\infty) = W = 0$ ;  $H'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $H''(\infty) \rightarrow 0$ ;  $G(\infty) = s = -0,098278$ ;  $G'(\infty) \rightarrow 0$ .

Будем поддерживать  $W = 0 = \text{const}$ ,  $G(0) = 1 = \text{const}$  и, изменяя  $G(\infty) = s$  до  $s = -1$ , интегрировать систему дифференциальных уравнений (1.4):

$$\begin{aligned} H''' &= s^2 + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'), \end{aligned}$$

допуская только радиальное проскальзывание жидкости  $H'(0)$  по поверхности вращающегося диска. Результаты расчетов представлены в табл. 1.6.11 и графически изображены на рис. 1.6.19. Отметим, что функция  $H'(0) = f(s)$  проходит через максимум  $H'(0)_{\text{max}} \approx 0,673302$  при  $s \approx -0,680$ . По достижении  $G(\infty) = s = -1$  начальные параметры становятся  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0,601657$ ;  $H''(0) = -3,098952$ ;  $G(0) = 1$ ;  $G'(0) = -1,470749$ . Эти параметры точно совпадают с полученными нами ранее (табл. 1.6.1), когда мы исходной точкой брали точку  $L_4$  (с учетом выше сделанного примечания).

Дальнейшее изучение повторит уже сделанное, и мы его не проводим. Отсюда заключаем, что и в рассматриваемом случае при сбалансированном радиально-тангенциальном проскальзывании жидкости относительно поверхности вращающегося диска начальные параметры взаимосвязаны функцией точно той же пространственной линии  $(G(0), H'(0), W) = 0$ .



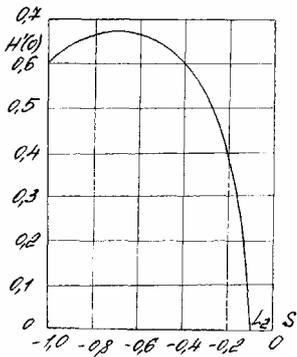


Рис. 1.6.19. Радиальное проскальзывание жидкости относительно поверхности диска при  $G(0) = 1$

при  $\varepsilon \rightarrow \infty$

Теперь изучим движение жидкости с проскальзыванием, исходя из точки  $L_3$  (рис. 1.4.1) с параметрами:  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $H''(0) = A = 0,496117$ ;  $G(0) = 1$ ;  $G'(0) = B = -0,562759$ ;  $H(\infty) = W = 0$ ;  $H'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $H''(\infty) \rightarrow 0$ ;  $G(\infty) = s = -0,0570584$ ;  $G'(\infty) \rightarrow 0$ .

Начиная исследования изменения начальных параметров, оставляем  $G(0) = 1 = \text{const}$ ,  $H(\infty) = W = 0 = \text{const}$  и допускаем увеличение проскальзывания жидкости только в радиальном направлении от  $H'(0) = 0$  до  $H'(0) = 0,08$ . При этом наблюдаем, что  $G(\infty) = s$  растет. Мы же ставили задачу, достичь для анализа состояния, когда будут достигнуты соотношения:  $G(0) = 1$ , а  $G(\infty) = s = -1$ . Значит, мы при достижении поставленной цели как бы движемся в противоположном направлении.

При исследовании мы оставляли в силе для описания поведения сплошной среды систему дифференциальных уравнений (1.4):

$$\begin{aligned} H''' &= s^2 + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'), \end{aligned}$$

с граничными условиями при  $\varepsilon = 0$

$$H = 0, \quad G = 0;$$

$$H = W = 0, \quad H' \rightarrow 0, \quad H'' \rightarrow 0, \quad G \rightarrow s, \quad G'(\infty) \rightarrow 0.$$

На следующем интервале интегрирования мы, сохраняя  $G(0) = 1$  и  $H(\infty) = W = 0$  постоянными, изменяли  $G(\infty) = s$  от  $s = 0,065$  до  $s = 1$ .

Графически результаты расчетов показаны на рис. 1.6.20 и приведены в табл. 1.6.12. Отметим, что максимальная величина радиального проскальзывания жидкости относительно поверхности вращающегося диска  $H'(0)_{\text{max}} \approx 0,746714$  при  $G(\infty) = s \approx -0,602$ .

Неожиданностью оказалось возможность движения жидкости при однонаправленном вращении диска и жидкости в бесконечности не как вращение твердого тела, а как движение жидкости с проскальзыванием в радиальном направлении по поверхности диска. Начальные параметры такого движения:  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0,632900$ ;  $H''(0) = -4,383825$ ;  $G(0) = 1$ ;  $G'(0) = -1,594747$ ;  $H(\infty) = W = 0$ ;  $H'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $H''(\infty) \rightarrow 0$ ;  $G(\infty) = s = 1$ ;  $G'(\infty) \rightarrow 0$ . Это есть точка  $N$  на рис. 1.6.20.



Рис. 1.6.20. Радиальное проскальзывание жидкости относительно поверхности диска при  $G(0) = 1$  и росте  $H'(0)$

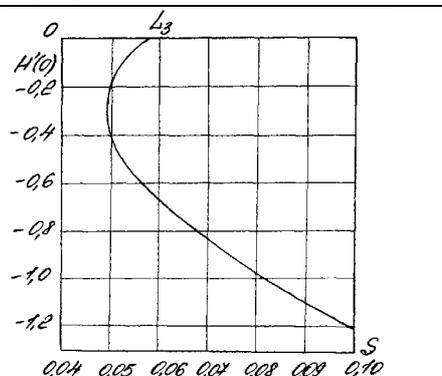


Рис. 1.6.21. Радиальное проскальзывание жидкости в направлении оси вращения диска  $H'(0) < 0$  при  $G(0) = 1, W = 0$

Закономерности изменения безразмерных скоростей при  $\varepsilon \geq \varepsilon^* = 18$  соответствуют ранее найденным уравнениям (1.4.20):

$$H'(\varepsilon) = e^{-(W+\alpha)(\varepsilon-\varepsilon^*)} [a \sin \beta(\varepsilon-\varepsilon^*) + b \cos \beta(\varepsilon-\varepsilon^*)] + \dots;$$

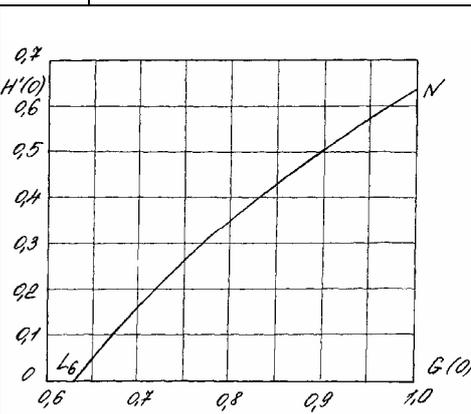
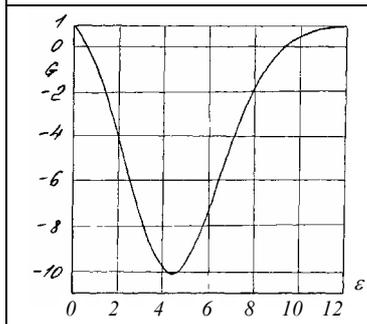
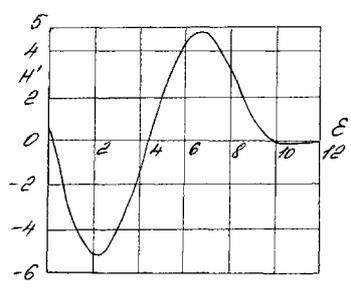
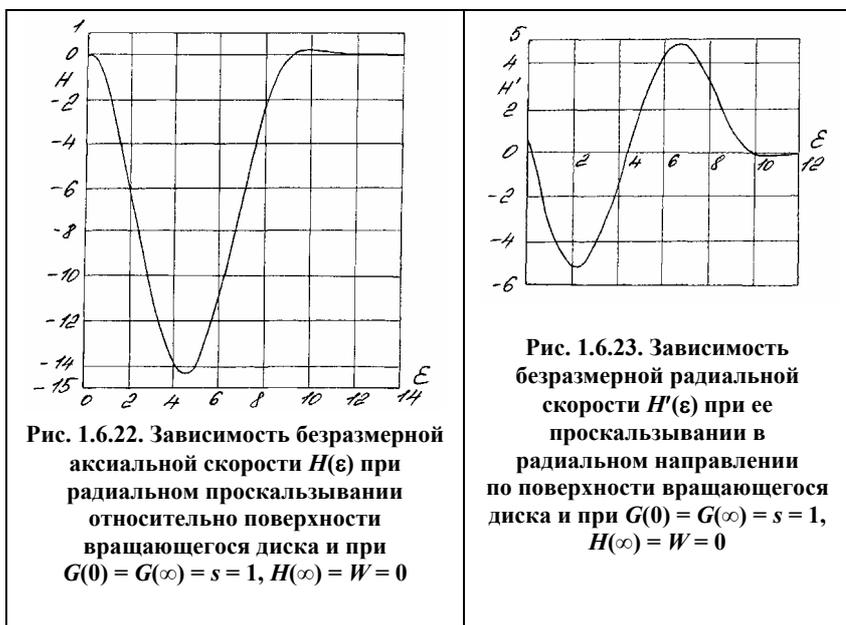
$$G(\varepsilon) = S + e^{-(W+\alpha)(\varepsilon-\varepsilon^*)} [-b \sin \beta(\varepsilon-\varepsilon^*) + a \cos \beta(\varepsilon-\varepsilon^*)] + \dots,$$

где  $a = 0,0000542757$ ;  $b = -0,001335136$ ;  $\alpha = \beta = 1$ .

Эпюры безразмерных скоростей при условиях (1.6.25) изображены на рис. 1.6.22 – 1.6.24 и в табл. 1.6.13. Экстремальные значения безразмерных скоростей:  $H(\varepsilon)_{\min} \approx -14,370584$  при  $\varepsilon \approx 4,4$ ;  $H'(\varepsilon)_{\min} \approx -5,183790$  при  $\varepsilon \approx 2,2$ ;  $H(\varepsilon)_{\max} \approx 4,849103$  при  $\varepsilon \approx 6,8$ ;  $G(\varepsilon)_{\min} \approx -10,128662$  при  $\varepsilon \approx 4,4$ . Они являются относительно большими. Остальные экстремумы, когда  $\varepsilon > \varepsilon^*$ , по модулям незначительны.

Попытка достижения состояния  $G(0) = 1$ ,  $G(\infty) = s = -1$  взяв за начало исследования движения жидкости ту же точку  $L_3$ , не увенчалась успехом и при допущении радиального проскальзывания к центру диска, когда  $H'(\infty) < 0$ ,  $H(\infty) = W = 0$ . Расчеты на некотором изменении  $s$  показаны на рис. 1.6.21 и в табл. 1.6.12. С увеличением проскальзывания жидкости в направлении оси вращения диска величина  $s = G(\infty)$  несколько падает, а затем опять растет,  $s_{\min} \approx 0,0491359$  при  $H'(0) \approx -0,276$ .

Проанализируем радиальное проскальзывание жидкости  $H'(0)$ , поддерживая  $H(\infty) = W = 0$ ,  $G(\infty) = s = 1$  и уменьшая  $G(0)$ . При этом начинаем интегрирование с точки  $N$  (рис. 1.6.20). Итоги расчетов графически показаны на рис. 1.6.25 и в табл. 1.6.14. Значительным является то, что найдена еще одна точка  $L_6$  движения жидкости без проскальзывания. Начальные параметры в этой точке:  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $H''(0) = -3,947499$ ;  $G(0) = 0,642866$ ;  $G'(0) = -1,211236$ ;  $H(\infty) = W = 0$ ;  $H'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $H''(\infty) \rightarrow 0$ ;  $G(\infty) = s = 1$ ;  $G'(\infty) \rightarrow 0$ ;  $a = -0,000184612$ ;  $b = -0,000304175$  при  $\varepsilon^* = 18$ .



















Картины распределения безразмерных скоростей жидкости  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$  с начальными параметрами, соответствующими точке  $L_6$  (рис. 1.6.25), показаны графически на рис. 1.6.26 – 1.6.28 и в табл. 1.6.15. Они подобны эпюрам скоростей, найденным по начальным параметрам в точке  $N$  (рис. 1.6.20, 1.6.25). Текущие значения функций скоростей, естественно, отличаются друг от друга.

Экстремальные значения безразмерных скоростей:  $H_{\min} \approx -17,172$  при  $\varepsilon \approx 4,8$ ;  $H'_{\min} \approx -5,485$  при  $\varepsilon \approx 2,4$ ;  $H'_{\max} \approx 5,224$  при  $\varepsilon \approx 7,4$ ;  $G_{\min} \approx -10,791$  при  $\varepsilon \approx 4,8$ . Они являются относительно большими. Последующие экстремумы по модулям быстро затухают.

На рис. 1.6.29 и в табл. 1.6.16 представлено на некотором интервале вблизи точки  $L_6$  взаимосвязь безразмерных скоростей, аксиальной  $H(\infty) = W$  и окружной скоростью диска  $G(0)$  в отсутствие проскальзывания жидкости. Величину  $W$  изменяли на достаточно большую величину, тогда как скорость диска  $G(0)$  при этом изменилась незначительно, около 4 %. Отметим значительные величины  $H''(0)$ , которая непосредственно связана с вязким трением жидкости на поверхности диска в радиальном направлении. Большая величина напряжения трения и является, по нашему мнению, причиной проскальзывания жидкости.

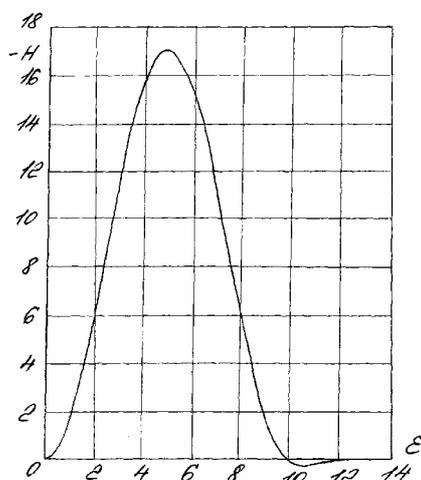


Рис. 1.6.26. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon)$  при  $H(0) = 0$ ;  $H(\infty) = W = 0$ ;  $G(0) = 0,642866$ ;  $G(\infty) = s = 1$  без проскальзывания жидкости

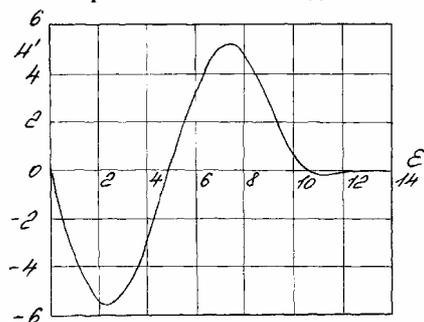


Рис. 1.6.27. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\varepsilon)$  при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $H(\infty) = W = 0$ ;  $G(0) = 0,642866$ ;  $G(\infty) = s = 1$

без проскальзывания жидкости

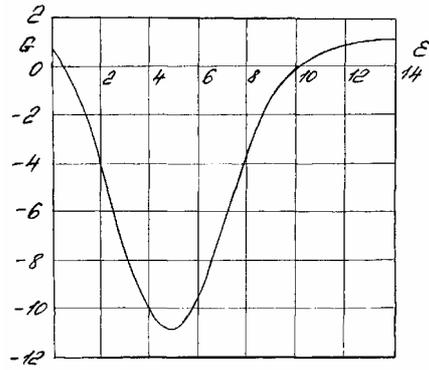


Рис. 1.6.28. Зависимость безразмерной окружной скорости  $G(\epsilon)$  при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $H(\infty) = W = 0$ ;  $G(0) = 0,642866$ ;  $G(\infty) = s = 1$  без проскальзывания жидкости

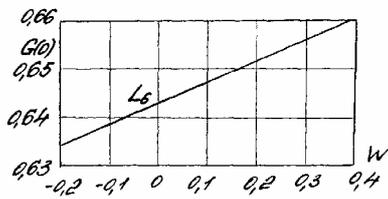


Рис. 1.6.29. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\infty) = W$  и скорости диска  $G(0)$  при  $G(\infty) = s = 1$





### 1.7. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

Приведем вначале известное точное решение уравнений Навье-Стокса для пространственного осесимметричного течения в окрестности критической точки для случая неподвижного диска.

При таком течении жидкость набегаёт на стенку, перпендикулярную к направлению течения, и оттекает от критической точки "O" вдоль этой стенки во все стороны по радиусам.

Воспользуемся цилиндрической системой координат  $r, \varphi, z$ . Плоскость  $z = 0$  совместим со стенкой, начало координат расположим в критической точке, а ось  $z$  направим противоположно направлению набегающего течения. Обозначим  $U$  и  $W$  составляющие скорости в радиальном и осевом направлениях для течения без трения, а через  $u = u(r, z)$  и  $w = w(r, z)$  – соответствующие составляющие для вязкого течения. Вследствие осевой симметрии течения  $v_\varphi \equiv 0$  и  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ , поэтому из трех уравнений Навье-Стокса [9] остаются только два, которые вместе с уравнением неразрывности принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.1)$$

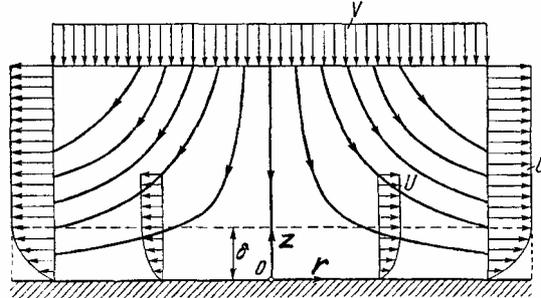


Рис. 1.7.1. Осесимметричное течение в окрестности критической точки

Граничными условиями будут

$$u = 0, w = 0 \text{ при } z = 0; \quad u = U \text{ при } z \rightarrow \infty. \quad (1.7.2)$$

Для невязкого осесимметричного течения с критической точкой имеем решение

$$U = ar; \quad W = -2az, \quad (1.7.3)$$

где  $a$  – постоянная.

Легко видеть, что это решение удовлетворяет уравнению неразрывности. Давление в невязком течении равно

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} (U^2 + W^2) = \frac{\rho}{2} a^2 (r^2 + 4z^2),$$

где  $p_0$  – давление в критической точке.

Примем, что в вязком осесимметричном течении с критической точкой распределение скоростей и распределение давления определяются формулами

$$u = r \cdot f'(z), \quad w = -2f(z); \quad (1.7.4)$$

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} a^2 (r^2 + F(z)). \quad (1.7.5)$$

Уравнение неразрывности и теперь тождественно удовлетворяется подстановкой выражений (1.7.4). Уравнение же движения (1.7.1) после подстановки в них выражений (1.7.4) и (1.7.5) дают два уравнения для определения функций  $f(z)$  и  $F(z)$ :

$$ff' - 2ff'' = a^2 + \nu f'''; \quad (1.7.6)$$

$$2ff' = \frac{1}{4} a^2 F' - \nu f''. \quad (1.7.7)$$

Граничные условия для функций  $f(z)$  и  $F(z)$  легко получаются из условий (1.7.1):

$$f = f' = 0, \quad F = 0 \quad \text{при } z = 0;$$

$$f' = a \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Уравнение (1.7.6) можно освободить от постоянных  $a^2$  и  $\nu$ , применив для этой цели аффинное преобразование:

$$\zeta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} z; \quad f(z) = \sqrt{a\nu} \varphi(\zeta).$$

Выполнив это преобразование, мы получим для функции  $\varphi(\zeta)$  более простое дифференциальное уравнение

$$\varphi''' + 2\varphi\varphi'' - \varphi'\varphi' + 1 = 0, \quad (1.7.8)$$

причем граничными условиями будут

$$\varphi = \varphi' = 0 \text{ при } \zeta = 0; \quad \varphi' = 1 \text{ при } \zeta \rightarrow \infty. \quad (1.7.9)$$

Уравнение (1.7.8) впервые было решено Ф. Хоманом [11] путем разложения в ряд. Изменение безразмерной скорости  $\varphi' = u/U$  вычислены Н. Фресслингом [10].

Приведем дифференциальную систему уравнений (1.4);

$$H''' = C + H'H' - G - 2HH''; \quad (1.7.10)$$

$$G'' = 2(H'G - HG'), \quad (1.7.11)$$

где  $G$  – безразмерная окружная скорость.

Если положить  $G = 0$ , значит вращение стенки отсутствует, тогда уравнения (1.7.10) и (1.7.11) принимают вид

$$\begin{aligned} H''' &= C + H'H' - 2HH''; \\ 0 &\equiv 0. \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

Сравним (1.7.12) с (1.7.8). При условии, что, замечая аналогии  $\omega$ ,  $H$  (в уравнениях (1.4)) с  $a$ ,  $\varphi$  (в уравнениях (1.7.8)), они идентичны, если положить  $C = -1$ . Отметим, что коэффициенты  $\omega$  и  $a$  имеют одинаковую размерность,  $1/\text{с}$ .

Разложение в ряды вблизи  $\zeta = 0$  уравнения (1.7.12) при граничных условиях  $H(0) = 0$ ,  $H'(0) = 0$ ,  $H'(\infty) = 1$ , аналогичных условиям (1.7.9), имеет вид:

$$\begin{aligned} H(0) &= 0; & H^{\text{VII}}(0) &= -2C^2; \\ H'(0) &= 0; & H^{\text{VIII}}(0) &= 0; \\ H''(0) &= A; & H^{\text{IX}}(0) &= 40A^2C; \\ H'''(0) &= C; & H^{\text{X}}(0) &= 144AC^2; \\ H^{\text{IV}}(0) &= 0; & H^{\text{XI}}(0) &= 144C^3; \\ H^{\text{V}}(0) &= 0; & H^{\text{XII}}(0) &= -2240A^3C; \\ H^{\text{VI}}(0) &= -2AC; \dots \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

Запишем разложение уравнения (1.7.12) в ряд Тейлора, приняв  $C = -1$ :

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= A\zeta - \frac{1}{2!}\zeta^2 + \frac{2A}{5!}\zeta^5 - \frac{2}{6!}\zeta^6 - \frac{40A^2}{8!}\zeta^8 + \frac{144A}{9!}\zeta^9 - \frac{144}{10!}\zeta^{10} + \frac{2240A^3}{11!}\zeta^{11} + \dots; \\ H''(\zeta) &= A - \zeta + \frac{2A}{4!}\zeta^4 - \frac{2}{5!}\zeta^5 - \frac{40A^2}{7!}\zeta^7 + \frac{144A}{8!}\zeta^8 - \frac{144}{9!}\zeta^9 + \frac{2240A^3}{10!}\zeta^{10} + \dots \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

За пределами пограничного слоя при  $\zeta \geq \zeta^*$   $H'(\zeta^*) = 1$ ,  $H''(\zeta^*) = 0$ . Это дает возможность по уравнениям (1.7.14) определить  $A$  и  $\zeta^*$ . Численное решение уравнения (1.7.12) представлено в табл. 1.7.1, откуда видим, что

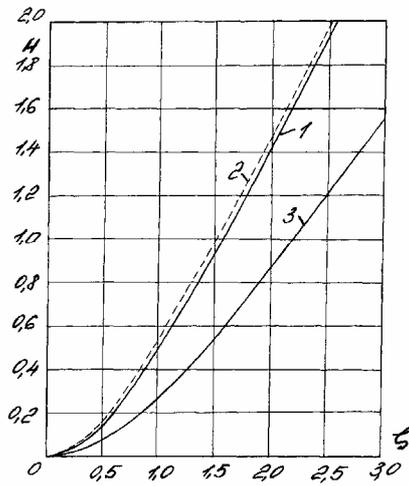
$$A = H''(0) = 1,311938; \quad \zeta^* = \delta \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = 4,$$

где  $\delta$  – толщина пограничного слоя.

Подобное решение при вращающемся диске следует решать систему дифференциальных уравнений (1.7.10), положив  $C = -1$ . Граничными условиями будут

$$\text{при } \zeta = 0 \quad H = 0, \quad H' = 0, \quad G = 1;$$

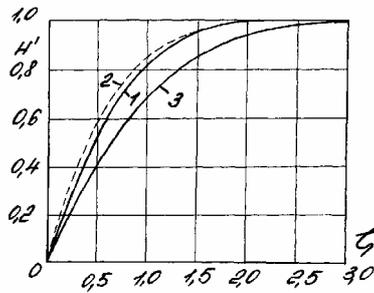
$$\text{при } \zeta = \infty \quad H' = 1, \quad H'' = 0, \quad G = 0, \quad G' = 0.$$



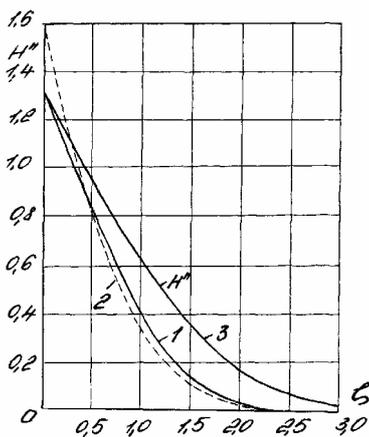
**Рис. 1.7.2. Функция безразмерной осевой скорости  $H(\zeta)$ :**  
 1 – при неподвижной плоскости; 2 – при вращающейся плоскости;  
 3 – по Фресслингу

Решение задачи представлено в табл. 1.7.3. Изменение функций изображено на рис. 1.7.2 – 1.7.5. Для сравнения показано и решение Фресслинга.

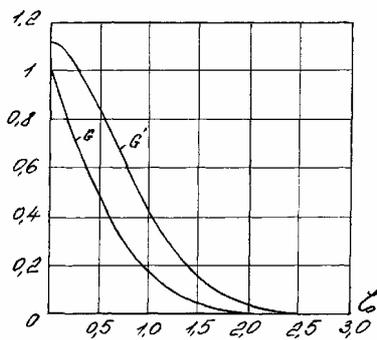
Из рисунков и таблиц замечаем, что решения при неподвижном и вращающемся диске (плоскости) мало отличаются друг от друга. Толщина пограничного слоя может быть принята одинаковой в обоих случаях. Решение Фресслинга несколько отличается от нами найденного.



**Рис. 1.7.3. Функции безразмерной радиальной скорости  $H'(\zeta)$ :**  
 1 – при неподвижной плоскости; 2 – при вращающейся плоскости;  
 3 – по Фресслингу



**Рис. 1.7.4. Функции  $H''(\zeta)$ :**  
 1 – при неподвижной плоскости;  
 2 – при вращающейся плоскости;  
 3 – по Фресслингу



**Рис. 1.7.5. Функции безразмерной окружной скорости  $G(\zeta)$  и ее производной  $G'(\zeta)$  при вращающейся плоскости**

**1.7.1. Решение при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = 0$ ;  $G'(0) = 0$ ;  $H'(\infty) = 1$ ;  $G(\infty) = 0$ ;  $G'(\infty) = 0$ ;  $\zeta^* = 10$**

$\zeta$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$
0,0	0,000000	0,000000	1,311938	-1,000000
0,1	0,006393	0,126194	1,211949	-0,999571

0,2	0,024906	0,242394	1,112211	-0,996640
0,3	0,054540	0,348632	1,012780	-0,988929
0,4	0,094303	0,444987	0,914546	-0,974475
0,5	0,143212	0,531603	0,818162	-0,951740
0,6	0,200306	0,608710	0,724509	-0,919719
0,7	0,264648	0,676628	0,634541	-0,878035
0,8	0,335339	0,735773	0,549215	-0,826985
0,9	0,411527	0,786655	0,469424	-0,767535
1,0	0,492414	0,829868	0,395936	-0,701248
1,2	0,665419	0,895977	0,269990	-0,556538
1,4	0,849321	0,939827	0,173358	-0,411200
1,6	1,040251	0,967174	0,104430	-0,281842
1,8	1,235436	0,983158	0,058849	-0,178808
2,0	1,433033	0,991892	0,030954	-0,104866
2,5	1,931293	0,999025	0,004546	-0,019507
3,0	2,431111	0,999924	0,000422	-0,002203
3,5	2,931099	0,999996	0,000024	-0,000151
4,0	3,431098	1,000000	0,000001	-0,000006

**1.7.2. Решение (по Фресслингу) при  $H(0) = 0; H'(0) = 0; G(0) = 0;$   
 $G'(0) = 0; H'(\infty) = 1; G(\infty) = 0; G'(\infty) = 0; \zeta^* = 4,6$**

$\zeta$	$H$	$H'$	$H''$	$\zeta$	$H$	$H'$	$H''$
0,0	0,0000	0,0000	1,3120	2,4	1,1346	0,9760	0,0798
0,2	0,0127	0,1755	1,1705	2,6	1,2733	0,9853	0,0523
0,4	0,0487	0,3311	1,0298	3,8	1,4131	0,9912	0,0331
0,6	0,1054	0,4669	0,8910	3,0	1,5536	0,9949	0,0202
0,8	0,1799	0,5833	0,7563	3,2	1,6944	0,9972	0,0120
1,0	0,2695	0,6811	0,6283	3,4	1,8356	0,9985	0,0068
1,2	0,3717	0,7614	0,5098	3,6	1,9769	0,9992	0,0037
1,4	0,4841	0,8258	0,4031	3,8	2,1182	0,9996	0,0020
1,6	0,6046	0,8761	0,3100	4,0	2,5696	0,9998	0,0010
1,8	0,7313	0,9142	0,2315	4,2	2,4010	0,9999	0,0006
2,0	0,8627	0,9422	0,1676	4,4	2,5423	0,9999	0,0003
2,2	0,9974	0,9622	0,1175	4,6	2,6837	1,0000	0,0001

**1.7.3. Решение при  $H(0) = 0; H'(0) = 0; G(0) = 1;$   
 $H'(\infty) = 1; G(\infty) = 0; \zeta^* = 4,6$**

$\zeta$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$
0,0	0,000000	0,000000	1,573920	-2,000000	1,000000	-1,110000	0,000000
0,1	0,007545	0,147752	1,384611	-1,790265	0,889495	-1,095457	0,279380
0,2	0,028953	0,277581	1,215070	-1,604411	0,781730	-1,056241	0,495150
0,3	0,062526	0,391348	1,062992	-1,440643	0,678871	-0,998250	0,656183
0,4	0,106742	0,490692	0,926293	-1,296318	0,582535	-0,926594	0,769503
0,5	0,160233	0,577059	0,803185	-1,168291	0,493858	-0,845742	0,841001
0,6	0,221764	0,651732	0,692201	-1,053289	0,413562	-0,759611	0,875972
0,7	0,290228	0,715864	0,592195	-0,948244	0,341998	-0,671597	0,879481
0,8	0,364621	0,770508	0,502307	-0,850577	0,279208	-0,584595	0,856576
0,9	0,444046	0,816642	0,421898	-0,758390	0,224966	-0,500992	0,812359
1,0	0,527697	0,855188	0,350485	-0,670535	0,178833	-0,422663	0,751948
1,2	0,704906	0,912993	0,233032	-0,506722	0,108387	-0,286810	0,602261
1,4	0,891541	0,950468	0,146547	-0,361760	0,062001	-0,182732	0,443043
1,6	1,084126	0,973389	0,086672	-0,241556	0,033394	-0,108473	0,300205
1,8	1,280248	0,986551	0,048009	-0,149928	0,016897	-0,060249	0,187605

2,0	1,478342	0,993623	0,024832	-0,086198	0,008016	-0,031202	0,108185
2,2	1,677464	0,997169	0,011969	-0,045821	0,003560	-0,015047	0,057581
2,4	1,877085	0,998825	0,005367	-0,025001	0,001477	-0,006749	0,028289
2,6	2,076933	0,999545	0,002237	-0,010202	0,000572	-0,002813	0,012830
2,8	2,276875	0,999836	0,000866	-0,004271	0,000206	-0,001089	0,005371
3,0	2,476855	0,999945	0,000311	-0,001650	0,000069	-0,000391	0,002076
3,5	2,976846	0,999997	0,000017	-0,000108	0,000003	-0,000022	0,000136
4,0	3,476846	1,000000	0,000001	-0,000004	0,000000	-0,000001	0,000005

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численно решены ряд задач о течении жидкости вблизи вращающихся дисков со свободной внешней границей.

Разработана программа численного интегрирования системы дифференциальных уравнений при различных граничных условиях.

Показано, что в ряде случаев, на определенных интервалах изменений параметров, существует несколько решений при одних и тех же граничных условиях. Это следует из того, что решаемая система дифференциальных уравнений нелинейна.

Предложена гипотеза о возможном проскальзывании жидкости относительно поверхности вращающегося диска.

Найдено аналитическое решение системы базовых дифференциальных уравнений в комплексной области.

В дальнейших исследованиях мы намерены изучить движение жидкости в стесненных условиях. При этом полагаем, что вращающийся диск располагается вблизи другого диска с различными граничными условиями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 *Navier M.* Memoire sur les Loies du Mouvements des Fluides // Mem. de l'Acad. d. 1827. Sci. 6. P. 389–416.
- 2 *Stokes G.G.* On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids // Trans. Cambr. Phil. 1845. Soc. 8. P. 287–305.
- 3 *V. Karman Th.* Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921. 1. S. 233–252.
- 4 *Cochran W.G.* The flow due to a rotating disk // Proc. Cambr. Phil. 1934. Soc. 30. P. 365–375.
- 5 *Koptev A.A.* Die Flüssigkeitsströmung in den Zentrifugalfeldern unter der Wirkung der sich drehenden Scheiben // Trans. of the Tambov State Technical University. 1995. 1. S. 65–75.
- 6 *Koptev A.A.* Die Flüssigkeitsströmung in den Zentrifugalfeldern unter der Wirkung der sich drehenden Scheiben. Blick auf das Karmanproblem aus der Unendlichkeit // Trans. of the Tambov State Technical University. 1996. 2. № 3. S. 271–280.
- 7 *Ha Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. С. 294.
- 8 *Bödewadt U.N.* Die Drehströmung über festem Grund // ZAMM. 1940. 20. S. 241–253.

- 9 Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. С. 96.
- 10 Frössling N. Verdunstung, Wärmeübertragung und Geschwindigkeitsverteilung // Lunds. Univ. Arsskr. N. F. Avd. 1940. 2. S. 35–40.
- 11 Homann F. Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel // ZAMM. 1936. 16. S. 153–164.
- 12 Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. М.: Наука, 1964. С. 814.
- 13 Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика: в 2 т. М.: Мир, 1984.
- 14 Бэтхелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. С. 758.
- 15 Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. М.: Наука, 1973.
- 16 Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. М.: "ФМ", 1963. Ч. 1, 2.
- 17 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. С. 576.

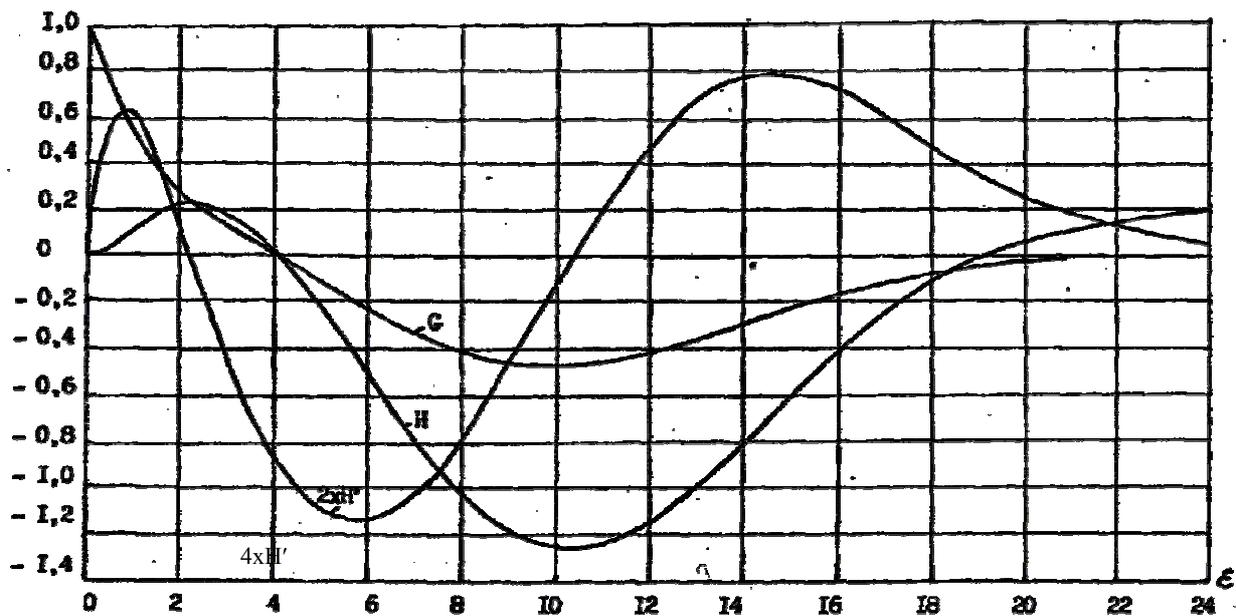


Рис. 1.1.2. Графики безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$  и  $G(\varepsilon)$  нового решения уравнений (1.1.1)

### 1.1.2. Второе решение уравнений Т. Кармана

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
0,0	0,000000	0,000000	0,499043	-1,000000	1,000000	-0,563746	0,000000	0,000000	0,499043
0,1	0,002333	0,045089	0,404571	-0,890578	0,943781	-0,559165	0,087719	0,045095	0,404781
0,2	0,008721	0,081267	0,320689	-0,788283	0,888422	-0,546919	0,153938	0,081343	0,322107
0,3	0,018324	0,109556	0,246661	-0,693573	0,834587	-0,528973	0,202253	0,109892	0,250676
0,4	0,030401	0,130902	0,181716	-0,606631	0,782763	-0,506961	0,235755	0,131826	0,189675
0,5	0,044302	0,146176	0,125077	-0,527422	0,733285	-0,482227	0,257104	0,148138	0,138029
0,6	0,059460	0,156169	0,075980	-0,455752	0,686371	-0,455869	0,268592	0,159704	0,094551
0,7	0,075384	0,161599	0,033686	-0,391303	0,642136	-0,428772	0,272181	0,167281	0,058049
0,8	0,091649	0,163109	-0,002508	-0,333677	0,600618	-0,401640	0,269553	0,171509	0,027389
0,9	0,107894	0,161278	-0,033262	-0,282421	0,561791	-0,375021	0,262134	0,172919	0,001540
1,0	0,123811	0,156618	-0,059189	-0,237051	0,525582	-0,349332	0,251133	0,171947	-0,020407
1,1	0,139139	0,149582	-0,080852	-0,197075	0,491883	-0,324880	0,237561	0,168942	-0,039227
1,2	0,153661	0,140572	-0,098767	-0,162000	0,460558	-0,301877	0,222257	0,164184	-0,055566
1,3	0,167199	0,129938	-0,113400	-0,131349	0,431455	-0,280463	0,205911	0,157894	-0,069949
1,4	0,179605	0,117988	-0,125169	-0,104664	0,404410	-0,260711	0,189081	0,150246	-0,082787
1,5	0,190762	0,104987	-0,134450	-0,081517	0,379256	-0,242648	0,172210	0,141377	-0,094395
1,6	0,200575	0,091169	-0,141577	-0,061506	0,355825	-0,226259	0,155645	0,131400	-0,105004
1,7	0,208975	0,076734	-0,146844	-0,044261	0,333950	-0,211500	0,139647	0,120404	-0,114773
1,8	0,215907	0,061854	-0,150510	-0,029447	0,313473	-0,198304	0,124410	0,108470	-0,123801

Продолжение табл. 1.1.2

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
1,9	0,221336	0,046678	-0,152804	-0,016756	0,294240	-0,186588	0,110066	0,095667	-0,132141
2,0	0,225237	0,031332	-0,153923	-0,005916	0,276109	-0,176258	0,096702	0,082064	-0,139809
2,1	0,227600	0,015926	-0,154040	0,003320	0,258945	-0,167214	0,084364	0,067728	-0,146791
2,2	0,228424	0,000553	-0,153305	0,011170	0,242627	-0,159351	0,073067	0,052730	-0,153053
2,3	0,227715	-0,014710	-0,151846	0,017825	0,227039	-0,152566	0,062803	0,037143	-0,158546
2,4	0,225487	-0,029796	-0,149774	0,023454	0,212081	-0,146756	0,053545	0,021048	-0,163212
2,5	0,221763	-0,044648	-0,147185	0,028205	0,197659	-0,141824	0,045253	0,004531	-0,166987
2,6	0,216567	-0,059219	-0,144158	0,032205	0,183690	-0,137675	0,037876	-0,012317	-0,169808
2,7	0,209930	-0,073468	-0,140765	0,035565	0,170101	-0,134221	0,031360	-0,029397	-0,171611
2,8	0,201886	-0,087361	-0,137064	0,038380	0,156826	-0,131377	0,025645	-0,046604	-0,172338
2,9	0,192471	-0,100872	-0,133104	0,040732	0,143807	-0,129067	0,020671	-0,063827	-0,171934
3,0	0,181725	-0,113975	-0,128930	0,042690	0,130997	-0,127220	0,016377	-0,080951	-0,170354
3,1	0,169690	-0,126652	-0,124578	0,044313	0,118350	-0,125771	0,012705	-0,097857	-0,167561
3,2	0,156409	-0,138886	-0,120077	0,045651	0,105831	-0,124660	0,009599	-0,114422	-0,163523
3,3	0,141928	-0,150663	-0,115455	0,046747	0,093409	-0,123834	0,007004	-0,130520	-0,158222
3,4	0,126292	-0,161974	-0,110735	0,047635	0,081057	-0,123244	0,004871	-0,146024	-0,151647
3,5	0,109549	-0,172808	-0,105934	0,048345	0,068754	-0,122846	0,003153	-0,160807	-0,143796
3,6	0,091747	-0,183158	-0,101071	0,048903	0,056482	-0,122601	0,001806	-0,174741	-0,134679
3,7	0,072934	-0,193020	-0,096158	0,049327	0,044230	-0,122473	0,000790	-0,187701	-0,124314

Продолжение табл. 1.1.2

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
3,8	0,053159	-0,202389	-0,091209	0,049635	0,031985	-0,122433	0,000070	-0,199563	-0,112727
3,9	0,032472	-0,211261	-0,086235	0,049842	0,019741	-0,122451	-0,000389	-0,210207	-0,099955

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
4,0	0,010923	-0,219635	-0,081244	0,049958	0,007494	-0,122503	-0,000615	-0,219516	-0,086042
4,1	-0,011438	-0,227510	-0,076246	0,049994	-0,004760	-0,122567	-0,000638	-0,227379	-0,071041
4,2	-0,034562	-0,234884	-0,071248	0,049956	-0,017020	-0,122624	-0,000481	-0,233690	-0,055012
4,3	-0,058398	-0,241759	-0,066257	0,049852	-0,029284	-0,122658	-0,000167	-0,238349	-0,038020
4,4	-0,082897	-0,248136	-0,061279	0,049685	-0,041550	-0,122653	0,000285	-0,241264	-0,020140
4,5	-0,108009	-0,254016	-0,056321	0,049462	-0,053813	-0,122597	0,000856	-0,242350	-0,001450
4,6	-0,133684	-0,259401	-0,051389	0,049184	-0,066067	-0,122479	0,001529	-0,241530	0,017967
4,7	-0,159873	-0,264295	-0,046486	0,048856	-0,078306	-0,122288	0,002291	-0,238735	0,038021
4,8	-0,186526	-0,268700	-0,041619	0,048479	-0,090522	-0,122018	0,003127	-0,233907	0,058620
4,9	-0,213596	-0,272620	-0,036792	0,048056	-0,102707	-0,121661	0,004027	-0,226996	0,079669
5,0	-0,241034	-0,276060	-0,032010	0,047587	-0,114851	-0,121211	0,004980	-0,217962	0,101070
5,1	-0,268792	-0,279023	-0,027276	0,047076	-0,126946	-0,120663	0,005975	-0,206774	0,122723
5,2	-0,296823	-0,281517	-0,022596	0,046522	-0,138980	-0,120015	0,007004	-0,193412	0,144526
5,3	-0,325080	-0,283544	-0,017973	0,045928	-0,150945	-0,119262	0,008060	-0,177867	0,166376
5,4	-0,353517	-0,285113	-0,013412	0,045294	-0,162829	-0,118402	0,009135	-0,160139	0,188173
5,5	-0,382088	-0,286229	-0,008916	0,044621	-0,174622	-0,117434	0,010223	-0,140238	0,209814
5,6	-0,410748	-0,286899	-0,004489	0,043911	-0,186312	-0,116357	0,011319	-0,118185	0,231197

Продолжение табл. 1.1.2

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
5,7	-0,439453	-0,287129	-0,000135	0,043165	-0,197890	-0,115170	0,012416	-0,094010	0,252225
5,8	-0,468159	-0,286928	0,004143	0,042383	-0,209343	-0,113874	0,013510	-0,067755	0,272799
5,9	-0,496824	-0,286303	0,008341	0,041566	-0,220661	-0,112468	0,014598	-0,039469	0,292826
6,0	-0,525406	-0,285263	0,012455	0,040716	-0,231833	-0,110955	0,015674	-0,009211	0,312213
6,1	-0,553863	-0,283815	0,016483	0,039834	-0,242848	-0,109334	0,016736	0,022950	0,330872
6,2	-0,582156	-0,281969	0,020421	0,038921	-0,253696	-0,107608	0,017779	0,056936	0,348721
6,3	-0,610244	-0,279734	0,024266	0,037978	-0,264366	-0,105779	0,018803	0,092664	0,365678
6,4	-0,638090	-0,277119	0,028016	0,037006	-0,274849	-0,103848	0,019802	0,130040	0,381669
6,5	-0,665656	-0,274134	0,031667	0,036007	-0,285133	-0,101819	0,020776	0,168963	0,396624
6,6	-0,692905	-0,270789	0,035216	0,034981	-0,295209	-0,099694	0,021722	0,209328	0,410478
6,7	-0,719802	-0,267094	0,038662	0,033930	-0,305069	-0,097476	0,022637	0,251020	0,423172
6,8	-0,746312	-0,263060	0,042002	0,032856	-0,314702	-0,095168	0,023521	0,293922	0,434652
6,9	-0,772403	-0,258698	0,045233	0,031760	-0,324099	-0,092773	0,024371	0,337909	0,444870
7,0	-0,798041	-0,254017	0,048353	0,030642	-0,333253	-0,090295	0,025186	0,382852	0,453785
7,1	-0,823196	-0,249031	0,051360	0,029505	-0,342156	-0,087737	0,025965	0,428621	0,461362
7,2	-0,847837	-0,243749	0,054253	0,028350	-0,350798	-0,085103	0,026706	0,475079	0,467572
7,3	-0,871936	-0,238184	0,057030	0,027178	-0,359174	-0,082397	0,027409	0,522089	0,472392
7,4	-0,895465	-0,232347	0,059688	0,025992	-0,367275	-0,079622	0,028072	0,569511	0,475806
7,5	-0,918397	-0,226250	0,062228	0,024791	-0,375096	-0,076784	0,028695	0,617203	0,477803

Продолжение табл. 1.1.2

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
7,6	-0,940707	-0,219906	0,064646	0,023579	-0,382630	-0,073885	0,029277	0,665024	0,478380
7,7	-0,962370	-0,213325	0,066943	0,022356	-0,389871	-0,070930	0,029817	0,712831	0,477539
7,8	-0,983365	-0,206521	0,069117	0,021124	-0,396814	-0,067923	0,030315	0,760485	0,475288
7,9	-1,003668	-0,199506	0,071168	0,019885	-0,403454	-0,064868	0,030771	-0,807843	0,471643
8,0	-1,023259	-0,192292	0,073094	0,018639	-0,409786	-0,061770	0,031184	0,854767	0,466622

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
8,1	-1,042120	-0,184891	0,074895	0,017389	-0,415807	-0,058633	0,031553	0,901122	0,460253
8,2	-1,060231	-0,177317	0,076572	0,016136	-0,421512	-0,055461	0,031880	0,946774	0,452565
8,3	-1,077578	-0,169581	0,078123	0,014882	-0,426898	-0,052258	0,032163	0,991593	0,443596
8,4	-1,094143	-0,161696	0,079548	0,013628	-0,431962	-0,049029	0,032403	1,035452	0,433386
8,5	-1,109912	-0,153676	0,080848	0,012375	-0,436703	-0,045779	0,032600	1,078230	0,421981
8,6	-1,124874	-0,145531	0,082023	0,011126	-0,441118	-0,042511	0,032754	1,119810	0,409431
8,7	-1,139015	-0,137275	0,083074	0,009881	-0,445205	-0,039230	0,032865	1,160080	0,395790
8,8	-1,152325	-0,128920	0,084000	0,008642	-0,448963	-0,035939	0,032933	1,198933	0,381116
8,9	-1,164796	-0,120479	0,084802	0,007411	-0,452393	-0,032644	0,032960	1,236271	0,365470
9,0	-1,176419	-0,111964	0,085482	0,006188	-0,455492	-0,029349	0,032945	1,271997	0,348915
9,1	-1,187187	-0,103387	0,086040	0,004976	-0,458262	-0,026057	0,032888	1,306026	0,331519
9,2	-1,197095	-0,094760	0,086478	0,003776	-0,460704	-0,022773	0,032791	1,338275	0,313351
9,3	-1,206138	-0,086095	0,086796	0,002588	-0,462817	-0,019500	0,032654	1,368672	0,294481
9,4	-1,214313	-0,077405	0,086996	0,001415	-0,464604	-0,016243	0,032477	1,397151	0,274983

Продолжение табл. 1.1.2

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
9,5	-1,221618	-0,068700	0,087079	0,000257	-0,466067	-0,013006	0,032261	1,423651	0,254930
9,6	-1,228053	-0,059993	0,087048	-0,000884	-0,467206	-0,009792	0,032007	1,448121	0,234396
9,7	-1,233617	-0,051294	0,086903	-0,002007	-0,468026	-0,006606	0,031716	1,470516	0,213458
9,8	-1,238312	-0,042616	0,086647	-0,003111	-0,468528	-0,003450	0,031389	1,490801	0,192190
9,9	-1,242141	-0,033969	0,086281	-0,004194	-0,468717	-0,000329	0,031026	1,508946	0,170669
10,0	-1,245107	-0,025363	0,085809	-0,005256	-0,468596	0,002754	0,030628	1,524929	0,148969
10,2	-1,248471	-0,008320	0,084550	-0,007312	-0,467438	0,008792	0,029732	1,550361	0,105326
10,4	-1,248455	0,008430	0,082891	-0,009269	-0,465092	0,014638	0,028708	1,567070	0,061841
10,6	-1,245124	0,024810	0,080850	-0,011120	-0,461597	0,020267	0,027566	1,575144	0,019066
10,8	-1,238560	0,040746	0,078450	-0,012859	-0,457001	0,025657	0,026313	1,574778	-0,022483
11,0	-1,228860	0,056168	0,075714	-0,014479	-0,451352	0,030786	0,024959	1,566265	-0,062331
11,2	-1,216132	0,071011	0,072667	-0,015975	-0,444705	0,035634	0,023514	1,549988	-0,100051
11,4	-1,200498	0,085216	0,069333	-0,017342	-0,437118	0,040186	0,021987	1,526411	-0,135270
11,6	-1,182092	0,098727	0,065739	-0,018576	-0,428652	0,044425	0,020389	1,496068	-0,167670
11,8	-1,161057	0,111496	0,061912	-0,019674	-0,419370	0,048337	0,018729	1,459548	-0,196994
12,0	-1,137546	0,123478	0,057879	-0,020632	-0,409339	0,051913	0,017017	1,417489	-0,223045
12,2	-1,111720	0,134635	0,053668	-0,021449	-0,398628	0,055142	0,015265	1,370558	-0,245686
12,4	-1,083749	0,144935	0,049308	-0,022124	-0,387306	0,058017	0,013483	1,319447	-0,264839
12,6	-1,053805	0,154351	0,044828	-0,022654	-0,375445	0,060533	0,011680	1,264856	-0,280483

Продолжение табл. 1.1.2

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
12,8	-1,022069	0,162861	0,040256	-0,023041	-0,363117	0,062688	0,009869	1,207485	-0,292653
13,0	-0,988722	0,170449	0,035622	-0,023283	-0,350394	0,064481	0,008059	1,148021	-0,301432
13,2	-0,953951	0,177107	0,030953	-0,023382	-0,337348	0,065913	0,006262	1,087130	-0,306950
13,4	-0,917942	0,182830	0,026278	-0,023340	-0,324053	0,066987	0,004488	1,025447	-0,309376
13,6	-0,880882	0,187620	0,021626	-0,023157	-0,310577	0,067710	0,002749	0,963572	-0,308915
13,8	-0,842956	0,191484	0,017024	-0,022836	-0,296991	0,068090	0,001055	0,902058	-0,305800
14,0	-0,804349	0,194435	0,012501	-0,022380	-0,283363	0,068136	-0,000581	0,841412	-0,300286
14,2	-0,765242	0,196491	0,008081	-0,021793	-0,269758	0,067862	-0,002149	0,782086	-0,292645

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
14,4	-0,725811	0,197676	0,003792	-0,021078	-0,256239	0,067282	-0,003636	0,724477	-0,283158
14,6	-0,686228	0,198018	-0,000342	-0,020241	-0,242865	0,066413	-0,005034	0,668926	-0,272113
14,8	-0,646657	0,197551	-0,004297	-0,019289	-0,229692	0,065275	-0,006330	0,615717	-0,259792
15,0	-0,607259	0,196313	-0,008050	-0,018228	-0,216771	0,063889	-0,007516	0,565076	-0,246475
15,2	-0,568181	0,194346	-0,011582	-0,017068	-0,204151	0,062277	-0,008583	0,517175	-0,232429
15,4	-0,529566	0,191696	-0,014872	-0,015819	-0,191874	0,060464	-0,009524	0,472136	-0,217903
15,6	-0,491545	0,188414	-0,017904	-0,014493	-0,179977	0,058476	-0,010333	0,430030	-0,203132
15,8	-0,454239	0,184553	-0,020665	-0,013104	-0,168493	0,056340	-0,011009	0,390886	-0,188327
16,0	-0,417759	0,180167	-0,023142	-0,011666	-0,157449	0,054082	-0,011548	0,354689	-0,173675
16,2	-0,382203	0,175315	-0,025329	-0,010196	-0,146867	0,051729	-0,011954	0,321394	-0,159341
16,4	-0,347660	0,170055	-0,027220	-0,008712	-0,136762	0,049309	-0,012229	0,290923	-0,145463

Продолжение табл. 1.1.2

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
16,6	-0,314204	0,164447	-0,028814	-0,007230	-0,127146	0,046846	-0,012379	0,263171	-0,132154
16,8	-0,281900	0,158549	-0,030113	-0,005770	-0,118025	0,044365	-0,012413	0,238017	-0,119504
17,0	-0,250800	0,152421	-0,031124	-0,004348	-0,109400	0,041888	-0,012339	0,215321	-0,107579
17,2	-0,220943	0,146118	-0,031856	-0,002982	-0,101268	0,039436	-0,012168	0,194934	-0,096424
17,4	-0,192360	0,139696	-0,032322	-0,001685	-0,093623	0,037027	-0,011913	0,176699	-0,086066
17,6	-0,165069	0,133206	-0,032536	-0,000472	-0,086454	0,034676	-0,011584	0,160454	-0,076513
17,8	-0,139079	0,126697	-0,032517	0,000648	-0,079748	0,032397	-0,011196	0,146040	-0,067759
18,0	-0,114389	0,120214	-0,032284	0,001665	-0,073489	0,030201	-0,010760	0,133299	-0,059786
18,2	-0,090989	0,113797	-0,031858	0,002574	-0,067661	0,028096	-0,010286	0,122076	-0,052566
18,4	-0,068863	0,107482	-0,031261	0,003372	-0,062245	0,026088	-0,009787	0,112224	-0,046065
18,6	-0,047987	0,101302	-0,030516	0,004059	-0,057219	0,024182	-0,009272	0,103605	-0,040239
18,8	-0,028332	0,095284	-0,029645	0,004636	-0,052565	0,022379	-0,008749	0,096087	-0,035044
19,0	-0,009861	0,089451	-0,028669	0,005107	-0,048261	0,020682	-0,008226	0,089548	-0,030433
19,2	0,007262	0,083822	-0,027609	0,005477	-0,044285	0,019089	-0,007709	0,083878	-0,026358
19,4	0,023682	0,078412	-0,026484	0,005753	-0,040618	0,017598	-0,007203	0,078973	-0,022771
19,6	0,038842	0,073231	-0,025314	0,005943	-0,037240	0,016206	-0,006713	0,074740	-0,019625
19,8	0,052990	0,068288	-0,024113	0,006054	-0,034129	0,014911	-0,006242	0,071096	-0,016875
20,0	0,066174	0,063587	-0,022897	0,006096	-0,031269	0,013708	-0,005791	0,067966	-0,014481
20,5	0,095232	0,052898	-0,019871	0,005953	-0,025094	0,011076	-0,004764	0,061967	-0,009796

Окончание табл. 1.1.2

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
21,0	0,119320	0,043692	-0,016985	0,005558	-0,020114	0,008919	-0,003886	0,057930	-0,006559
21,5	0,139156	0,035873	-0,014337	0,005018	-0,016108	0,007166	-0,003150	0,055237	-0,004353
22,0	0,155402	0,029307	-0,011978	0,004415	-0,012892	0,005748	-0,002542	0,053457	-0,002869
22,5	0,168647	0,023844	-0,009923	0,003809	-0,010315	0,004605	-0,002045	0,052286	-0,001880
23,0	0,179405	0,019335	-0,008163	0,003235	-0,008250	0,003687	-0,001642	0,051521	-0,001226
23,5	0,188116	0,015635	-0,006679	0,002714	-0,006597	0,002930	-0,001316	0,051023	-0,000796
24,0	0,195153	0,012615	-0,005439	0,002254	-0,005275	0,002360	-0,001054	0,050700	-0,000516
24,5	0,200826	0,010160	-0,004414	0,001858	-0,004218	0,001887	-0,000844	0,050491	-0,000333
25,0	0,205391	0,008171	-0,003571	0,001522	-0,003372	0,001509	-0,000675	0,050316	-0,000215
25,5	0,209060	0,006563	-0,002882	0,001241	-0,002696	0,001207	-0,000540	0,050200	-0,000138
26,0	0,212006	0,005267	-0,002322	0,001008	-0,002155	0,000965	-0,000432	0,050013	-0,000089
26,5	0,214369	0,004224	-0,001868	0,000816	-0,001723	0,000771	-0,000345	0,050178	-0,000057

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$H'''$	$G$	$G'$	$G''$	$P(0) - P$	$P'$
27,0	0,216264	0,003385	-0,001501	0,000659	-0,001377	0,000617	-0,000276	0,050155	-0,000037
27,5	0,217782	0,002711	-0,001204	0,000531	-0,001101	0,000493	-0,000221	0,050140	-0,000023
28,0	0,218997	0,002171	-0,000966	0,000427	-0,000880	0,000394	-0,000176	0,050131	-0,000015
28,5	0,219971	0,001738	-0,000774	0,000343	-0,000704	0,000315	-0,000141	0,050125	-0,000010
29,0	0,220749	0,001391	-0,000620	0,000275	-0,000563	0,000252	-0,000113	0,050121	-0,000006
29,5	0,221373	0,001113	-0,000497	0,000221	-0,000450	0,000201	-0,000090	0,050118	-0,000004
30,0	0,221871	0,000890	-0,000397	0,000177	-0,000360	0,000161	-0,000072	0,050117	-0,000003

### 1.2.1. Первое решение при $H_\infty = 0$

( $s = -0,154200096$ ;  $K = 0,392683201$ ;  $a = 1,773640 \cdot 10^{-4}$ ;  $b = -1,245346 \cdot 10^{-4}$  при  $\varepsilon^* = 20$ )

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
0,00	0,000000	0,000000	0,475080	-0,976222	1,000000	-0,583970	0,000000	0,000000	0,475080
0,05	0,000574	0,022558	0,427715	-0,918697	0,970821	-0,582833	0,044468	0,022558	0,427741
0,10	0,002218	0,042819	0,383180	-0,862984	0,941751	-0,579618	0,083220	0,042824	0,383370
0,15	0,004820	0,060922	0,341385	-0,809168	0,912889	-0,574598	0,116768	0,060945	0,341972
0,20	0,008276	0,077001	0,302231	-0,757313	0,884317	-0,56802	0,145589	0,077070	0,303505
0,25	0,012488	0,091187	0,265620	-0,707464	0,856109	-0,56011	0,170122	0,091343	0,267898
0,30	0,017365	0,103604	0,231451	-0,659650	0,828325	-0,551073	0,190774	0,103905	0,235049
0,35	0,022821	0,114371	0,199621	-0,613882	0,801018	-0,541091	0,207923	0,114892	0,204841
0,40	0,028777	0,123603	0,170028	-0,570161	0,774229	-0,530333	0,221917	0,124431	0,177142
0,45	0,035158	0,131410	0,142571	-0,528475	0,747995	-0,518947	0,233077	0,132646	0,151811
0,50	0,041896	0,137894	0,117147	-0,488802	0,722343	-0,507067	0,241702	0,139649	0,128702
0,55	0,048927	0,143156	0,093658	-0,451112	0,697294	-0,494814	0,248064	0,145550	0,107666

0,60	0,056192	0,147291	0,072004	-0,415368	0,672866	-0,482295	0,252416	0,150448	0,088557
0,65	0,063639	0,150386	0,052089	-0,381525	0,649068	-0,469602	0,254991	0,154436	0,071230
0,70	0,071215	0,152527	0,033820	-0,349534	0,625907	-0,456822	0,256000	0,157599	0,055545
0,75	0,078877	0,153794	0,017106	-0,319343	0,603386	-0,444025	0,255640	0,160015	0,041367
0,80	0,086581	0,154262	0,001857	-0,290893	0,581503	-0,431277	0,254089	0,161758	0,028569
0,85	0,094291	0,154002	-0,012012	-0,264127	0,560256	-0,418633	0,251508	0,162893	0,017030
0,90	0,101970	0,153082	-0,024583	-0,238983	0,539638	-0,406141	0,248047	0,163480	0,006637

Продолжение табл. 1.2.1

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
0,95	0,109589	0,151564	-0,035936	-0,215399	0,519638	-0,393841	0,243839	0,163574	-0,002716
1,0	0,117118	0,149508	-0,046148	-0,193310	0,500250	-0,381768	0,239006	0,163224	-0,011128
1,1	0,131807	0,143995	-0,063436	-0,153366	0,463250	-0,358409	0,227894	0,161369	-0,025476
1,2	0,145866	0,136945	-0,076995	-0,118643	0,428528	-0,336233	0,215459	0,158222	-0,037044
1,3	0,159157	0,128704	-0,087322	-0,088647	0,395961	-0,315341	0,202301	0,154035	-0,046354
1,4	0,171577	0,119573	-0,094866	-0,062900	0,365416	-0,295781	0,188886	0,149012	-0,053834
1,5	0,183050	0,109810	-0,100028	-0,040951	0,336760	-0,277560	0,175574	0,143318	-0,059827
1,6	0,193525	0,099635	-0,103168	-0,022377	0,309860	-0,260654	0,162632	0,137087	-0,064605
1,7	0,202970	0,089233	-0,104603	-0,006787	0,284587	-0,245015	0,150251	0,130430	-0,06838
1,8	0,211370	0,078762	-0,104613	0,006180	0,260817	-0,230581	0,138560	0,123439	-0,071317
1,9	0,218724	0,068350	-0,103444	0,016850	0,238433	-0,217277	0,127641	0,116190	-0,073544
2,0	0,225045	0,058105	-0,101310	0,025522	0,217326	-0,205025	0,117535	0,108750	-0,075157
2,1	0,230354	0,048114	-0,098397	0,032460	0,197396	-0,193743	0,108254	0,101177	-0,076231
2,2	0,234679	0,038446	-0,094867	0,037903	0,178548	-0,183347	0,099784	0,093520	-0,076822
2,3	0,238056	0,029156	-0,090859	0,042063	0,160699	-0,173760	0,092100	0,085827	-0,076978
2,4	0,240524	0,020286	-0,086491	0,045125	0,143772	-0,164903	0,085159	0,078138	-0,076733
2,5	0,242128	0,011867	-0,081865	0,047256	0,127697	-0,156705	0,078916	0,070493	-0,076119
2,6	0,242913	0,003919	-0,077067	0,048598	0,112411	-0,149098	0,073317	0,062926	-0,075163
2,7	0,242928	-0,003543	-0,072168	0,049277	0,097859	-0,142021	0,068308	0,055471	-0,073889
2,8	0,242221	-0,010513	-0,067230	0,049403	0,083991	-0,135418	0,063836	0,048158	-0,072323

Продолжение табл. 1.2.1

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
2,9	0,240842	-0,016990	-0,062303	0,049069	0,070762	-0,129238	0,059847	0,041015	-0,070486
3,0	0,238839	-0,022976	-0,057428	0,048359	0,058131	-0,123435	0,056291	0,034069	-0,068403
3,1	0,236263	-0,028478	-0,052641	0,047341	0,046064	-0,117967	0,053119	0,027342	-0,066098
3,2	0,233159	-0,033508	-0,047968	0,046077	0,034528	-0,112799	0,050287	0,020856	-0,063594
3,3	0,229576	-0,038076	-0,043432	0,044618	0,023495	-0,107900	0,047753	0,014629	-0,060915
3,4	0,225559	-0,042199	-0,03905	0,043007	0,012940	-0,103240	0,045481	0,008678	-0,058087
3,5	0,221151	-0,045892	-0,034835	0,041283	0,002839	-0,098796	0,043437	0,003016	-0,055133
3,6	0,216394	-0,049172	-0,030796	0,039477	-0,006826	-0,094546	0,041590	-0,002345	-0,052077
3,7	0,211330	-0,052057	-0,026941	0,037616	-0,016076	-0,090472	0,039913	-0,007397	-0,048943
3,8	0,205995	-0,054566	-0,023274	0,035722	-0,024926	-0,086559	0,038382	-0,012132	-0,045755
3,9	0,200428	-0,056718	-0,019797	0,033815	-0,033392	-0,082792	0,036976	-0,016547	-0,042533
4,0	0,194663	-0,058532	-0,016511	0,031910	-0,041489	-0,079160	0,035676	-0,020638	-0,039299
4,1	0,188733	-0,060027	-0,013414	0,030021	-0,049228	-0,075654	0,034467	-0,024407	-0,036072
4,2	0,182668	-0,061221	-0,010506	0,028158	-0,056623	-0,072264	0,033334	-0,027854	-0,032872
4,3	0,176498	-0,062134	-0,007782	0,026329	-0,063685	-0,068985	0,032265	-0,030983	-0,029715
4,4	0,170250	-0,062784	-0,005238	0,024544	-0,070424	-0,065809	0,031251	-0,033799	-0,026616
4,5	0,163949	-0,063188	-0,002871	0,022806	-0,076850	-0,062733	0,030282	-0,036308	-0,023590
4,6	0,157620	-0,063364	-0,000675	0,021121	-0,082974	-0,059752	0,029351	-0,038520	-0,020650

4,7	0,151283	-0,063328	0,001355	0,019492	-0,088804	-0,056862	0,028452	-0,040442	-0,017806
4,8	0,144961	-0,063098	0,003225	0,017922	-0,094349	-0,054060	0,027580	-0,042084	-0,015068

Продолжение табл. 1.2.1

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
4,9	0,138670	-0,062688	0,004941	0,016413	-0,099618	-0,051345	0,026730	-0,043459	-0,012445
5,0	0,132428	-0,062115	0,006510	0,014966	-0,104621	-0,048714	0,025899	-0,044577	-0,009942
5,1	0,126252	-0,061391	0,007937	0,013582	-0,109364	-0,046165	0,025085	-0,045452	-0,007565
5,2	0,120155	-0,060532	0,009228	0,012261	-0,113856	-0,043696	0,024285	-0,046095	-0,005318
5,3	0,114150	-0,059550	0,010391	0,011003	-0,118106	-0,041307	0,023497	-0,046520	-0,003204
5,4	0,108248	-0,058458	0,011431	0,009807	-0,122120	-0,038997	0,022720	-0,046740	-0,001225
5,5	0,102461	-0,057268	0,012354	0,008673	-0,125908	-0,036763	0,021954	-0,046769	0,000619
5,6	0,096798	-0,055991	0,013167	0,007600	-0,129476	-0,034605	0,021198	-0,046621	0,002328
5,7	0,091266	-0,054638	0,013876	0,006586	-0,132831	-0,032523	0,020452	-0,046308	0,003903
5,8	0,085872	-0,053219	0,014487	0,005631	-0,135983	-0,030515	0,019714	-0,045845	0,005347
5,9	0,080624	-0,051743	0,015004	0,004732	-0,138937	-0,028580	0,018987	-0,045243	0,006661
6,0	0,075525	-0,050221	0,015435	0,003889	-0,141701	-0,026717	0,018268	-0,044517	0,007849
6,2	0,065794	-0,047067	0,016057	0,002363	-0,146688	-0,023205	0,016862	-0,042738	0,009863
6,4	0,056705	-0,043817	0,016393	0,001037	-0,151001	-0,019970	0,015498	-0,040602	0,011424
6,6	0,048270	-0,040526	0,016484	-0,000102	-0,154694	-0,017003	0,014180	-0,038196	0,012571
6,8	0,040494	-0,037238	0,016364	-0,001068	-0,157820	-0,014294	0,012911	-0,035598	0,013348
7,0	0,033373	-0,033992	0,016067	-0,001877	-0,160429	-0,011835	0,011696	-0,032878	0,013798
7,2	0,026893	-0,030821	0,015623	-0,002542	-0,162569	-0,009612	0,010538	-0,030097	0,013965
7,4	0,021038	-0,027751	0,015059	-0,003077	-0,164288	-0,007615	0,009439	-0,027308	0,013892
7,6	0,015784	-0,024803	0,014400	-0,003495	-0,165630	-0,005833	0,008400	-0,024554	0,013617

Продолжение табл. 1.2.1

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
7,8	0,011107	-0,021995	0,013668	-0,003809	-0,166635	-0,004251	0,007425	-0,021872	0,013180
8,0	0,006976	-0,019340	0,012883	-0,004032	-0,167343	-0,002858	0,006513	-0,019291	0,012613
8,2	0,003360	-0,016845	0,012061	-0,004173	-0,167790	-0,001642	0,005664	-0,016833	0,011948
8,4	0,000227	-0,014517	0,011218	-0,004244	-0,168010	-0,000589	0,004878	-0,014517	0,011211
8,6	-0,002458	-0,012358	0,010367	-0,004255	-0,168036	0,000314	0,004155	-0,012352	0,010428
8,8	-0,004727	-0,010369	0,009520	-0,004213	-0,167894	0,001077	0,003492	-0,010347	0,009618
9,0	-0,006617	-0,008549	0,008685	-0,004128	-0,167613	0,001714	0,002889	-0,008506	0,008798
9,2	-0,008158	-0,006894	0,007871	-0,004008	-0,167216	0,002236	0,002342	-0,006828	0,007983
9,4	-0,009385	-0,005399	0,007084	-0,003857	-0,166725	0,002655	0,001850	-0,005311	0,007185
9,6	-0,010328	-0,004059	0,006329	-0,003684	-0,166160	0,002980	0,001410	-0,003952	0,006413
9,8	-0,011018	-0,002865	0,005611	-0,003494	-0,165539	0,003222	0,001020	-0,002744	0,005674
10,0	-0,011483	-0,001811	0,004933	-0,003290	-0,164876	0,003391	0,000675	-0,001680	0,004974
10,2	-0,011751	-0,000889	0,004296	-0,003078	-0,164187	0,003495	0,000374	-0,000751	0,004317
10,4	-0,011847	-0,000090	0,003702	-0,002861	-0,163482	0,003543	0,000113	-0,000050	0,003704
10,6	-0,011795	0,000594	0,003151	-0,002643	-0,162773	0,003543	-0,000110	0,000733	0,003137
10,8	-0,011617	0,001173	0,002645	-0,002425	-0,162068	0,003502	-0,000299	0,001308	0,002617
11,0	-0,011332	0,001655	0,002181	-0,002212	-0,161374	0,003426	-0,000457	0,001783	0,002143
11,2	-0,010961	0,002048	0,001759	-0,002004	-0,160699	0,003321	-0,000586	0,002168	0,001715
11,4	-0,010518	0,002361	0,001379	-0,001803	-0,160048	0,003193	-0,000689	0,002472	0,001329

Окончание табл. 1.2.1

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
---------------	------------------	-------------------	--------------------	---------------------	------------------	-------------------	--------------------	-------------------------	-------------------

11,6	-0,010021	0,002603	0,001038	-0,001611	-0,159423	0,003047	-0,000769	0,002703	0,000986
11,8	-0,009482	0,002779	0,000734	-0,001428	-0,158830	0,002887	-0,000828	0,002869	0,000681
12,0	-0,008913	0,002899	0,000466	-0,001255	-0,158269	0,002717	-0,000869	0,002978	0,000414
12,5	-0,007430	0,002991	-0,000062	-0,000870	-0,157022	0,002270	-0,000906	0,003047	-0,000107
13,0	-0,005958	0,002865	-0,000416	-0,000555	-0,155999	0,001823	-0,000872	0,002901	-0,000450
13,5	-0,004588	0,002599	-0,000628	-0,000307	-0,155194	0,001405	-0,000794	0,002620	-0,000652
14,0	-0,003372	0,002255	-0,000732	-0,000119	-0,154587	0,001033	-0,000690	0,002266	-0,000748
14,5	-0,002338	0,001880	-0,000756	0,000015	-0,154151	0,000716	-0,000576	0,001885	-0,000765
15,0	-0,001491	0,001508	-0,000725	0,000105	-0,153861	0,000457	-0,000463	0,001510	-0,000729
15,5	-0,000825	0,001161	-0,000658	0,000159	-0,153685	0,000253	-0,000356	0,001162	-0,000660
16,0	-0,000324	0,000853	-0,000571	0,000185	-0,153600	0,000098	-0,000262	0,000854	-0,000571
16,5	0,000036	0,000592	-0,000476	0,000191	-0,153580	-0,000012	-0,000182	0,000592	-0,000476
17,0	0,000276	0,000377	-0,000382	0,000183	-0,153605	-0,000086	-0,000116	0,000378	-0,000381
17,5	0,000421	0,000209	-0,000294	0,000166	-0,153660	-0,000130	-0,000064	0,000209	-0,000294
18,0	0,000492	0,000082	-0,000216	0,000144	-0,153732	-0,000152	-0,000025	0,000082	-0,000216
18,5	0,000509	-0,000009	-0,000150	0,000120	-0,153810	-0,000157	0,000003	-0,000009	-0,000150
19,0	0,000488	-0,000070	-0,000096	0,000097	-0,153887	-0,000151	0,000022	-0,000070	-0,000096
19,5	0,000443	-0,000107	-0,000053	0,000074	-0,153959	-0,000137	0,000033	-0,000106	-0,000053
20,0	0,000384	-0,000125	-0,000021	0,000055	-0,154023	-0,000119	0,000038	-0,000125	-0,000021

### 1.2.2. Второе решение при $H_\infty = 0$

( $s = -0,098277422$ ;  $K = 0,3134923$ ;  $a = -7,584985 \cdot 10^{-4}$ ;  $b = -1,579232 \cdot 10^{-4}$  при  $\varepsilon^* = 32$ )

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
0,00	0,000000	0,000000	0,490259	-0,990341	1,000000	-0,561329	0,000000	0,000000	0,490259
0,05	0,000592	0,023298	0,442132	-0,935010	0,971950	-0,560219	0,045953	0,023299	0,442159
0,10	0,002291	0,044259	0,396730	-0,881363	0,944014	-0,556894	0,086113	0,044264	0,396932
0,15	0,004982	0,063015	0,353965	-0,829488	0,916292	-0,551696	0,120977	0,063040	0,354594
0,20	0,008558	0,079698	0,313750	-0,779452	0,888871	-0,544877	0,151008	0,079771	0,315114
0,25	0,012919	0,094431	0,275989	-0,731302	0,861827	-0,536668	0,176633	0,094598	0,278429
0,30	0,017970	0,107336	0,240588	-0,685067	0,835224	-0,527280	0,198250	0,107659	0,244446
0,35	0,023624	0,118528	0,207450	-0,640763	0,809116	-0,516904	0,216228	0,119086	0,213051
0,40	0,029797	0,128117	0,176480	-0,598391	0,783547	-0,505713	0,230908	0,129005	0,184114
0,45	0,036411	0,136210	0,147580	-0,557942	0,758556	-0,493863	0,242610	0,137536	0,157498
0,50	0,043394	0,142908	0,120654	-0,519395	0,734170	-0,481496	0,251626	0,144791	0,133056
0,55	0,050680	0,148307	0,095608	-0,482723	0,710412	-0,468740	0,258229	0,150875	0,110641
0,60	0,058205	0,152498	0,072351	-0,447889	0,687300	-0,455709	0,262673	0,155886	0,090103
0,65	0,065911	0,155570	0,050790	-0,414852	0,664844	-0,442505	0,265192	0,159914	0,071297
0,70	0,073745	0,157604	0,030836	-0,383565	0,643051	-0,429219	0,266000	0,163043	0,054081
0,75	0,081655	0,158679	0,012405	-0,353976	0,621922	-0,415930	0,265298	0,165347	0,038319
0,80	0,089598	0,158869	-0,004589	-0,326030	0,601457	-0,402711	0,263269	0,166896	0,023880
0,85	0,097529	0,158243	-0,020225	-0,299671	0,581649	-0,389623	0,260082	0,167755	0,010642
0,90	0,105409	0,156868	-0,034581	-0,274840	0,562491	-0,376719	0,255893	0,167979	-0,001511
0,95	0,113204	0,154805	-0,047733	-0,251477	0,543973	-0,364048	0,250843	0,167620	-0,012684

Продолжение табл. 1.2.2

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
1,0	0,120879	0,152113	-0,059752	-0,229520	0,526082	-0,351647	0,245062	0,166725	-0,022978
1,1	0,135756	0,145059	-0,080665	-0,189581	0,492121	-0,327789	0,231772	0,163489	-0,041279
1,2	0,149828	0,136105	-0,097832	-0,154540	0,460477	-0,305347	0,216846	0,158553	-0,057047
1,3	0,162925	0,125602	-0,111720	-0,123923	0,431000	-0,284452	0,200957	0,152146	-0,070793
1,4	0,174907	0,113856	-0,122749	-0,097278	0,403533	-0,265170	0,184650	0,144449	-0,082920

1,5	0,185664	0,101135	-0,131294	-0,074178	0,377912	-0,247521	0,168351	0,135606	-0,093740
1,6	0,195109	0,087669	-0,137689	-0,054225	0,353975	-0,231488	0,152396	0,125736	-0,103479
1,7	0,203179	0,073659	-0,142231	-0,037052	0,331562	-0,217022	0,137034	0,114941	-0,112299
1,8	0,209829	0,059276	-0,145181	-0,022324	0,310520	-0,204055	0,122446	0,103304	-0,120306
1,9	0,215027	0,044668	-0,146767	-0,009737	0,290704	-0,192503	0,108757	0,090905	-0,127558
2,0	0,218759	0,029961	-0,147191	0,000984	0,271976	-0,182271	0,096044	0,077817	-0,134082
2,1	0,221020	0,015263	-0,146625	0,010083	0,254209	-0,173260	0,084348	0,064112	-0,139878
2,2	0,221815	0,000664	-0,145221	0,017778	0,237286	-0,165368	0,073677	0,049866	-0,144926
2,3	0,221158	-0,013758	-0,143109	0,024262	0,221102	-0,158491	0,064019	0,035153	-0,149195
2,4	0,219071	-0,027938	-0,140403	0,029702	0,205558	-0,152531	0,055345	0,020054	-0,152644
2,5	0,215581	-0,041822	-0,137199	0,034246	0,190568	-0,147391	0,047609	0,004653	-0,155231
2,6	0,210718	-0,055364	-0,133579	0,038024	0,176055	-0,142979	0,040763	-0,010962	-0,156912
2,7	0,204520	-0,068526	-0,129616	0,041145	0,161951	-0,139211	0,034747	-0,026698	-0,157646
2,8	0,197027	-0,081278	-0,125369	0,043705	0,148194	-0,136004	0,029503	-0,042458	-0,157397
2,9	0,188280	-0,093592	-0,120891	0,045788	0,134734	-0,133286	0,024970	-0,058143	-0,156134
3,0	0,178324	-0,105450	-0,116225	0,047462	0,121523	-0,130989	0,021088	-0,073650	-0,153834

Продолжение табл. 1.2.2

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
3,1	0,167205	-0,116832	-0,111410	0,048788	0,108524	-0,129049	0,017797	-0,088875	-0,150480
3,2	0,154973	-0,127728	-0,106478	0,049816	0,095703	-0,127411	0,015043	-0,103711	-0,146066
3,3	0,141676	-0,138125	-0,101455	0,050590	0,083033	-0,126024	0,012771	-0,118053	-0,140593
3,4	0,127365	-0,148017	-0,096367	0,051146	0,070492	-0,124843	0,010933	-0,131795	-0,134071
3,5	0,112090	-0,157397	-0,091232	0,051514	0,058059	-0,123825	0,009482	-0,144833	-0,126518
3,6	0,095903	-0,166262	-0,086069	0,051720	0,045722	-0,122935	0,008376	-0,157065	-0,117959
3,7	0,078855	-0,174610	-0,080893	0,051785	0,033469	-0,122139	0,007574	-0,168392	-0,108431
3,8	0,060998	-0,182441	-0,075717	0,051727	0,021292	-0,121411	0,007043	-0,178720	-0,097974
3,9	0,042384	-0,189754	-0,070551	0,051561	0,009186	-0,120723	0,006747	-0,187958	-0,086836
4,0	0,023065	-0,196552	-0,065407	0,051300	-0,002853	-0,120054	0,006660	-0,196020	-0,074474
4,1	0,003091	-0,202836	-0,060294	0,050954	-0,014825	-0,119385	0,006752	-0,202827	-0,061548
4,2	-0,017486	-0,208612	-0,055219	0,050532	-0,026730	-0,118699	0,007001	-0,208306	-0,047924
4,3	-0,038615	-0,213882	-0,050190	0,050041	-0,038564	-0,117980	0,007385	-0,212391	-0,033672
4,4	-0,060245	-0,218652	-0,045213	0,049487	-0,050324	-0,117218	0,007883	-0,215022	-0,018868
4,5	-0,082328	-0,222926	-0,040294	0,048875	-0,062006	-0,116401	0,008479	-0,216148	-0,003588
4,6	-0,104814	-0,226713	-0,035440	0,048211	-0,073602	-0,115519	0,009157	-0,215726	0,012086
4,7	-0,127655	-0,230017	-0,030654	0,047497	-0,085107	-0,114567	0,009902	-0,213721	0,028072
4,8	-0,150802	-0,232846	-0,025942	0,046737	-0,096513	-0,113537	0,010702	-0,210105	0,044285
4,9	-0,174208	-0,235208	-0,021308	0,045934	-0,107812	-0,112425	0,011545	-0,204859	0,060642
5,0	-0,197828	-0,237110	-0,016756	0,045090	-0,118995	-0,111227	0,012422	-0,197974	0,077058
5,1	-0,221615	-0,238562	-0,012291	0,044208	-0,130054	-0,109940	0,013323	-0,189448	0,093447

Продолжение табл. 1.2.2

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
5,2	-0,245526	-0,239571	-0,007916	0,043291	-0,140980	-0,108562	0,014240	-0,179288	0,109726
5,3	-0,269515	-0,240148	-0,003634	0,042339	-0,151763	-0,107092	0,015166	-0,167510	0,125813
5,4	-0,293541	-0,240301	0,000551	0,041355	-0,162395	-0,105529	0,016094	-0,154135	0,141627
5,5	-0,317562	-0,240041	0,004636	0,040340	-0,172866	-0,103873	0,017018	-0,139196	0,157092
5,6	-0,341536	-0,239378	0,008618	0,039297	-0,183167	-0,102125	0,017933	-0,122731	0,172130
5,7	-0,365424	-0,238321	0,012494	0,038227	-0,193288	-0,100287	0,018835	-0,104786	0,186671
5,8	-0,389188	-0,236883	0,016262	0,037131	-0,203221	-0,098359	0,019719	-0,085416	0,200646
5,9	-0,412788	-0,235073	0,019920	0,036012	-0,212957	-0,096344	0,020582	-0,064678	0,213990
6,0	-0,436190	-0,232902	0,023464	0,034871	-0,222487	-0,094243	0,021419	-0,042641	0,226643

---

6,1	-0,459357	-0,230384	0,026893	0,033710	-0,231803	-0,092061	0,022230	-0,019374	0,238550
6,2	-0,482256	-0,227528	0,030205	0,032530	-0,240896	-0,089799	0,023010	0,005043	0,249658
6,3	-0,504852	-0,224347	0,033398	0,031332	-0,249760	-0,087460	0,023757	0,030529	0,259922
6,4	-0,527114	-0,220852	0,036471	0,030120	-0,258386	-0,085048	0,024470	0,056998	0,269300
6,5	-0,549012	-0,217056	0,039422	0,028894	-0,266767	-0,082567	0,025146	0,084358	0,277755
6,6	-0,570516	-0,212972	0,042250	0,027655	-0,274897	-0,080020	0,025785	0,112517	0,285257
6,7	-0,591597	-0,208611	0,044953	0,026406	-0,282769	-0,077411	0,026385	0,141377	0,291780
6,8	-0,612229	-0,203985	0,047530	0,025149	-0,290378	-0,074745	0,026944	0,170839	0,297302
6,9	-0,632386	-0,199109	0,049982	0,023884	-0,297717	-0,072024	0,027462	0,200804	0,301809
7,0	-0,652043	-0,193993	0,052307	0,022614	-0,304781	-0,069254	0,027938	0,231167	0,305291
7,1	-0,671177	-0,188652	0,054505	0,021339	-0,311566	-0,066438	0,028372	0,261827	0,307742
7,2	-0,689766	-0,183096	0,056575	0,020063	-0,318067	-0,063581	0,028762	0,292681	0,309162

Продолжение табл. 1.2.2

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
7,3	-0,707790	-0,177341	0,058517	0,018786	-0,324281	-0,060687	0,029109	0,323626	0,309557
7,4	-0,725228	-0,171397	0,060332	0,017511	-0,330203	-0,057760	0,029413	0,354559	0,308937
7,5	-0,742064	-0,165279	0,062020	0,016238	-0,335832	-0,054806	0,029673	0,385380	0,307314
7,6	-0,758279	-0,158998	0,063580	0,014969	-0,341164	-0,051827	0,029889	0,415989	0,304709
7,7	-0,773858	-0,152567	0,065014	0,013706	-0,345197	-0,048829	0,030062	0,446289	0,301144
7,8	-0,788787	-0,145999	0,066321	0,012450	-0,350929	-0,045816	0,030192	0,476187	0,296646
7,9	-0,803054	-0,139307	0,067504	0,011203	-0,355360	-0,042792	0,030279	0,505589	0,291245
8,0	-0,816645	-0,132502	0,068562	0,009966	-0,359487	-0,039762	0,030323	0,534407	0,284977
8,1	-0,829551	-0,125598	0,069497	0,008741	-0,363312	-0,036729	0,030325	0,562556	0,277878
8,2	-0,841762	-0,118607	0,070311	0,007530	-0,366833	-0,033698	0,030286	0,589956	0,269989
8,3	-0,853270	-0,111540	0,071004	0,006333	-0,370052	-0,030673	0,030206	0,616529	0,261352
8,4	-0,864068	-0,104410	0,071578	0,005151	-0,372968	-0,027658	0,030086	0,642203	0,252013
8,5	-0,874150	-0,097229	0,072035	0,003987	-0,375584	-0,024657	0,029927	0,666910	0,242020
8,6	-0,883512	-0,090007	0,072376	0,002841	-0,377900	-0,021674	0,029728	0,690587	0,231421
8,7	-0,892151	-0,082757	0,072604	0,001715	-0,379920	-0,018713	0,029493	0,713175	0,220267
8,8	-0,900063	-0,075490	0,072720	0,000610	-0,381644	-0,015777	0,029220	0,734623	0,208612
8,9	-0,907248	-0,068217	0,072726	-0,000473	-0,383076	-0,012870	0,028912	0,754883	0,196506
9,0	-0,913707	-0,060948	0,072626	-0,001533	-0,384219	-0,009996	0,028569	0,773911	0,184004
9,1	-0,919439	-0,053695	0,072421	-0,002569	-0,385076	-0,007157	0,028192	0,791672	0,171160
9,2	-0,924447	-0,046468	0,072113	-0,003580	-0,385652	-0,004358	0,027782	0,808134	0,158027
9,3	-0,928733	-0,039276	0,071705	-0,004565	-0,385949	-0,001602	0,027341	0,823270	0,144659

Продолжение табл. 1.2.2

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
9,4	-0,932303	-0,032130	0,071201	-0,005523	-0,385974	0,001109	0,026870	0,837059	0,131110
9,5	-0,935161	-0,025039	0,070602	-0,006453	-0,385729	0,003771	0,026370	0,849487	0,117433
9,6	-0,937313	-0,018013	0,069911	-0,007355	-0,385221	0,006382	0,025841	0,860543	0,103678
9,7	-0,938766	-0,011060	0,069132	-0,008227	-0,384454	0,008938	0,025286	0,870222	0,089897
9,8	-0,939527	-0,004891	0,068266	-0,009070	-0,383435	0,011438	0,024705	0,878523	0,076138
9,9	-0,939607	0,002591	0,067319	-0,009882	-0,382169	0,013879	0,024007	0,885452	0,062450
10,0	-0,939013	0,009272	0,066291	-0,010662	-0,380662	0,016257	0,023473	0,891017	0,048878
10,2	-0,935848	0,022307	0,064010	-0,012127	-0,376949	0,020822	0,022155	0,898118	0,022258
10,4	-0,930123	0,034857	0,061449	-0,013461	-0,372351	0,025114	0,020760	0,899985	-0,003394
10,6	-0,921941	0,046870	0,058635	-0,014661	-0,366923	0,029121	0,019301	0,896844	-0,027787
10,8	-0,911414	0,058296	0,055594	-0,015726	-0,360722	0,032831	0,017788	0,888971	-0,050670
11,0	-0,898664	0,069094	0,052354	-0,016653	-0,353811	0,036234	0,016232	0,876691	-0,071831
11,2	-0,883821	0,079226	0,048942	-0,017442	-0,346250	0,039322	0,014643	0,860365	-0,091102
11,4	-0,867020	0,088661	0,045386	-0,018094	-0,338103	0,042089	0,013031	0,840385	-0,108356

11,6	-0,848404	0,097373	0,041713	-0,018608	-0,329436	0,044533	0,011409	0,817163	-0,123509
11,8	-0,828121	0,105340	0,037952	-0,018987	-0,320312	0,046653	0,009785	0,791124	-0,136517
12,0	-0,806319	0,112549	0,034127	-0,019233	-0,310796	0,048448	0,008169	0,762699	-0,147374
12,2	-0,783152	0,118989	0,030267	-0,019349	-0,300954	0,049922	0,006572	0,732316	-0,156106
12,4	-0,758775	0,124655	0,026396	-0,019338	-0,290849	0,051079	0,005003	0,700395	-0,162774
12,6	-0,733342	0,129548	0,022540	-0,019204	-0,280543	0,051925	0,003470	0,667339	-0,167466
12,8	-0,707007	0,133674	0,018723	-0,018952	-0,270099	0,052470	0,001982	0,633532	-0,170294

Продолжение табл. 1.2.2

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
13,0	-0,679923	0,137042	0,014967	-0,018587	-0,259575	0,052722	0,000548	0,599337	-0,171388
13,2	-0,652240	0,139666	0,011295	-0,018116	-0,249029	0,052693	-0,000825	0,565083	-0,170897
13,4	-0,624104	0,141567	0,007728	-0,017544	-0,238515	0,052396	-0,002130	0,531073	-0,168977
13,6	-0,595660	0,142766	0,004284	-0,016880	-0,228087	0,051846	-0,003361	0,497576	-0,165796
13,8	-0,567043	0,143290	0,000981	-0,016130	-0,217793	0,051057	-0,004512	0,464828	-0,161522
14,0	-0,538387	0,143169	-0,002163	-0,015304	-0,207679	0,050047	-0,005577	0,433029	-0,156324
14,2	-0,509816	0,142436	-0,005136	-0,014410	-0,197788	0,048832	-0,006553	0,402349	-0,150368
14,4	-0,481451	0,141127	-0,007924	-0,013458	-0,188159	0,047432	-0,007436	0,372922	-0,143815
14,6	-0,453402	0,139279	-0,010516	-0,012457	-0,178827	0,045864	-0,008224	0,344852	-0,136815
14,8	-0,425772	0,136934	-0,012904	-0,011419	-0,169823	0,044148	-0,008915	0,318216	-0,129509
15,0	-0,398659	0,134132	-0,015082	-0,010352	-0,161176	0,042305	-0,009507	0,293060	-0,122027
15,2	-0,372147	0,130916	-0,017044	-0,009269	-0,152908	0,040352	-0,010002	0,269409	-0,114484
15,4	-0,346317	0,127329	-0,018789	-0,008179	-0,145041	0,038310	-0,010401	0,247264	-0,106981
15,6	-0,321238	0,123415	-0,020316	-0,007093	-0,137589	0,036198	-0,010705	0,226608	-0,099607
15,8	-0,296790	0,119217	-0,021627	-0,006021	-0,130565	0,034034	-0,010917	0,207408	-0,092435
16,0	-0,273567	0,114778	-0,022726	-0,004972	-0,123978	0,031837	-0,011041	0,189617	-0,085525
16,2	-0,251072	0,110140	-0,023618	-0,003954	-0,117831	0,029624	-0,011081	0,173177	-0,078924
16,4	-0,229522	0,105344	-0,024310	-0,002976	-0,112128	0,027410	-0,011042	0,158024	-0,072668
16,6	-0,208943	0,100429	-0,024812	-0,002044	-0,106866	0,025212	-0,010929	0,144086	-0,066779
16,8	-0,189356	0,095543	-0,025132	-0,001164	-0,102042	0,023043	-0,010749	0,131287	-0,061272
17,0	-0,170773	0,090387	-0,025281	-0,000341	-0,097646	0,020916	-0,010508	0,119551	-0,056153

Продолжение табл. 1.2.2

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
17,2	-0,153202	0,085330	-0,025272	0,000422	-0,093671	0,018843	-0,010212	0,108800	-0,051417
17,4	-0,136640	0,080288	-0,025116	0,001122	-0,090105	0,016834	-0,009868	0,098959	-0,047058
17,6	-0,121083	0,075292	-0,024827	0,001758	-0,086933	0,014899	-0,009483	0,089953	-0,043061
17,8	-0,106519	0,070366	-0,024418	0,002329	-0,084140	0,013044	-0,009062	0,081712	-0,039408
18,0	-0,092931	0,065532	-0,023900	0,002835	-0,081709	0,011276	-0,008613	0,074168	-0,036080
18,2	-0,080298	0,060812	-0,023288	0,003277	-0,079623	0,009600	-0,008142	0,067260	-0,033054
18,4	-0,068597	0,056222	-0,022594	0,003657	-0,077863	0,008020	-0,007655	0,060928	-0,030307
18,6	-0,057800	0,051779	-0,021829	0,003978	-0,076409	0,006539	-0,007157	0,055120	-0,027815
18,8	-0,047875	0,047495	-0,021006	0,004242	-0,075241	0,005157	-0,006653	0,049787	-0,025554
19,0	-0,038791	0,043380	-0,020136	0,004452	-0,074339	0,003877	-0,006149	0,044884	-0,023501
19,2	-0,030511	0,039443	-0,019229	0,004612	-0,073683	0,002698	-0,005648	0,040374	-0,021636
19,4	-0,023001	0,035690	-0,018294	0,004725	-0,073253	0,001618	-0,005154	0,036219	-0,019936
19,6	-0,016223	0,032126	-0,017342	0,004795	-0,073030	0,000635	-0,004672	0,032389	-0,018384
19,8	-0,010138	0,028754	-0,016379	0,004825	-0,072993	-0,000252	-0,004203	0,028857	-0,016962
20,0	-0,004708	0,025575	-0,015414	0,004820	-0,073124	-0,001047	-0,003750	0,025597	-0,015655
20,5	0,006252	0,018466	-0,013033	0,004676	-0,074072	-0,002655	-0,002702	0,018505	-0,012802
21,0	0,013952	0,012523	-0,010762	0,004386	-0,075697	-0,003772	-0,001791	0,012718	-0,010413

---

21,5	0,018958	0,007675	-0,008663	0,003997	-0,077774	-0,00447	-0,001024	0,008034	-0,008373
22,0	0,021793	0,003825	-0,006775	0,003551	-0,080109	-0,004821	-0,000403	0,004300	-0,006608

Окончание табл. 1.2.2

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
22,5	0,022930	0,000862	-0,005116	0,003080	-0,082548	-0,004895	0,000082	0,001388	-0,005077
23,0	0,022783	-0,001331	-0,003695	0,002609	-0,084970	-0,004759	0,000443	-0,000812	-0,003755
23,5	0,021708	-0,002872	-0,002504	0,002157	-0,087282	-0,004470	0,000695	-0,002400	-0,002629
24,0	0,020002	-0,003872	-0,001532	0,001738	-0,089423	-0,004079	0,000856	-0,003472	-0,001687
24,5	0,017908	-0,004437	-0,000759	0,001361	-0,091351	-0,003627	0,000941	-0,004116	-0,000918
25,0	0,015622	-0,004660	-0,000164	0,001028	-0,093046	-0,003148	0,000966	-0,004416	-0,000309
25,5	0,013291	-0,004626	0,000277	0,000743	-0,094499	-0,002669	0,000945	-0,004449	0,000154
26,0	0,011027	-0,004405	0,000587	0,000503	-0,095718	-0,002209	0,000892	-0,004284	0,000489
26,5	0,008907	-0,004058	0,000787	0,000308	-0,096714	-0,001781	0,000817	-0,003978	0,000715
27,0	0,006982	-0,003632	0,000901	0,000152	-0,097506	-0,001394	0,000728	-0,003584	0,000850
27,5	0,005281	-0,003168	0,000945	0,000032	-0,098116	-0,001054	0,000633	-0,003141	0,000912
28,0	0,003815	-0,002696	0,000938	-0,000057	-0,098567	-0,000762	0,000537	-0,002681	0,000917
28,5	0,002583	-0,002237	0,000893	-0,000119	-0,098885	-0,000516	0,000445	-0,002230	0,000881
29,0	0,001573	-0,001807	0,000822	-0,000160	-0,099091	-0,000315	0,000359	-0,001804	0,000817
29,5	0,000769	-0,001417	0,000736	-0,000183	-0,099207	-0,000156	0,000281	-0,001416	0,000734
30,0	0,000149	-0,001072	0,000642	-0,000192	-0,099253	-0,000033	0,000213	-0,001072	0,000642
30,5	-0,000311	-0,000775	0,000546	-0,000190	-0,099245	0,000059	0,000154	-0,000775	0,000547
31,0	-0,000634	-0,000525	0,000453	-0,000181	-0,099199	0,000123	0,000104	-0,000525	0,000454
31,5	-0,000843	-0,00032	0,000366	-0,000167	-0,099126	0,000165	0,000064	-0,000320	0,000367
32,0	-0,000961	-0,000157	0,000287	-0,000149	-0,099037	0,000188	0,000032	-0,000156	0,000288

1.2.3. Третье решение при  $H_\infty = 0$

( $s = 0,05705781$ ;  $K = 0,238867776$ ;  $a = 2,708881 \cdot 10^{-4}$ ;  $b = 5,077855 \cdot 10^{-4}$ )

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
0,00	0,000000	0,000000	0,496117	-0,996744	1,000000	-0,562759	0,000000	0,000000	0,496117
0,05	0,000600	0,023583	0,447674	-0,941280	0,971882	-0,561570	0,046514	0,023584	0,447702
0,10	0,002319	0,044813	0,401961	-0,887509	0,943879	-0,558205	0,087185	0,044818	0,402169
0,15	0,005044	0,063823	0,358893	-0,835518	0,916093	-0,552941	0,122514	0,063849	0,359537
0,20	0,008667	0,080745	0,318379	-0,785375	0,888613	-0,546035	0,152966	0,080820	0,319778
0,25	0,013086	0,095702	0,280324	-0,737127	0,861513	-0,537718	0,178970	0,095873	0,282829
0,30	0,018206	0,108817	0,244634	-0,690803	0,834861	-0,528205	0,200926	0,109148	0,248596
0,35	0,023939	0,120203	0,211211	-0,646419	0,808710	-0,517687	0,219205	0,120776	0,216966
0,40	0,030200	0,129974	0,179959	-0,603975	0,783106	-0,506340	0,234149	0,130886	0,187810
0,45	0,036911	0,138234	0,150782	-0,563462	0,758087	-0,494322	0,246078	0,139596	0,160986
0,50	0,043999	0,145085	0,123581	-0,524859	0,733682	-0,481777	0,255288	0,147021	0,136349
0,55	0,051397	0,150623	0,098264	-0,488138	0,709916	-0,468834	0,262054	0,153265	0,113748
0,60	0,059415	0,154941	0,074737	-0,453262	0,686804	-0,455609	0,266628	0,158427	0,093033
0,65	0,066873	0,158125	0,052908	-0,420188	0,664358	-0,442204	0,269246	0,162597	0,074057
0,70	0,074836	0,160259	0,032689	-0,388869	0,642585	-0,428713	0,270126	0,165859	0,056675
0,75	0,082882	0,161420	0,013993	-0,359253	0,621486	-0,415217	0,269469	0,168289	0,040750
0,80	0,090963	0,161682	-0,003264	-0,331285	0,601062	-0,401789	0,267458	0,169956	0,026150
0,85	0,099037	0,161116	-0,019162	-0,304906	0,581305	-0,388491	0,264265	0,170924	0,012751
0,90	0,107062	0,159787	-0,03378	-0,280059	0,562210	-0,375379	0,260046	0,171250	0,043429



Продолжение табл. 1.2.3

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
0,95	0,115004	0,157758	-0,047193	-0,256681	0,543764	-0,362501	0,254944	0,170984	0,010907
1,0	0,122827	0,155087	-0,059472	-0,234711	0,525955	-0,349897	0,249091	0,170173	-0,021374
1,1	0,138001	0,148035	-0,080902	-0,194751	0,492189	-0,325645	0,235601	0,167079	-0,040044
1,2	0,152369	0,139031	-0,098585	-0,159688	0,460778	-0,302834	0,220410	0,162248	-0,056217
1,3	0,165754	0,128427	-0,112987	-0,129047	0,431570	-0,281597	0,204202	0,155902	-0,070412
1,4	0,178012	0,116529	-0,124527	-0,102373	0,404403	-0,262008	0,187531	0,148217	-0,083040
1,5	0,189021	0,103605	-0,133579	-0,079237	0,379112	-0,244091	0,170835	0,139336	-0,094411
1,6	0,198706	0,089885	-0,140479	-0,059239	0,355530	-0,227831	0,154457	0,129369	-0,104757
1,7	0,206983	0,075571	-0,145519	-0,042010	0,333492	-0,213181	0,138654	0,118413	-0,114236
1,8	0,213806	0,060835	-0,148962	-0,027216	0,312842	-0,200074	0,123618	0,106548	-0,122948
1,9	0,219141	0,045842	-0,151034	-0,014550	0,293429	-0,188427	0,109477	0,093847	-0,130950
2,0	0,222966	0,030667	-0,151933	-0,003738	0,275111	-0,178146	0,096315	0,080381	-0,138258
2,1	0,225273	0,015471	-0,151835	0,005465	0,257757	-0,169130	0,084176	0,066219	-0,144864
2,2	0,226062	0,000328	-0,150887	0,013276	0,241246	-0,161276	0,073075	0,051432	-0,150739
2,3	0,225343	-0,014682	-0,149220	0,019887	0,225467	-0,154481	0,063002	0,036097	-0,155837
2,4	0,223132	-0,029495	-0,146944	0,025468	0,210318	-0,148643	0,053927	0,020293	-0,160107
2,5	0,219453	-0,044054	-0,144155	0,030165	0,195710	-0,143664	0,045811	0,004105	-0,163491
2,6	0,214332	-0,058312	-0,140936	0,034106	0,181560	-0,139450	0,038603	-0,012374	-0,165932
2,7	0,207802	-0,072230	-0,137356	0,037402	0,167797	-0,135915	0,032247	-0,029048	-0,167375
2,8	0,199898	-0,085773	-0,133474	0,040149	0,154357	-0,132975	0,026683	-0,045814	-0,167766

Продолжение табл. 1.2.3

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
2,9	0,190660	-0,098916	-0,129342	0,042427	0,141185	-0,130554	0,021852	-0,062565	-0,167060
3,0	0,180129	-0,111635	-0,125002	0,044307	0,128232	-0,128582	0,017692	-0,079188	-0,165219
3,1	0,168348	-0,123911	-0,120491	0,045848	0,115456	-0,126995	0,014146	-0,095570	-0,162212
3,2	0,155362	-0,135728	-0,115842	0,047100	0,102822	-0,125734	0,011157	-0,111591	-0,158016
3,3	0,141218	-0,147075	-0,111079	0,048106	0,090300	-0,124747	0,008671	-0,127133	-0,152619
3,4	0,125963	-0,157941	-0,106228	0,048900	0,077865	-0,123985	0,006639	-0,142075	-0,146017
3,5	0,109646	-0,168318	-0,101306	0,049512	0,065497	-0,123405	0,005013	-0,156296	-0,138217
3,6	0,092316	-0,178201	-0,096330	0,049969	0,053179	-0,122970	0,003751	-0,169678	-0,129232
3,7	0,074023	-0,187583	-0,091316	0,050289	0,040899	-0,122644	0,002813	-0,182104	-0,119087
3,8	0,054816	-0,196463	-0,086276	0,050491	0,028648	-0,122398	0,002162	-0,193458	-0,107815
3,9	0,034747	-0,204838	-0,081222	0,050589	0,016418	-0,122203	0,001766	-0,203631	-0,095457
4,0	0,013865	-0,212707	-0,076162	0,050594	0,004206	-0,122037	0,001595	-0,212515	-0,082060
4,1	-0,007778	-0,220070	-0,071105	0,050517	-0,007990	-0,121878	0,001621	-0,220010	-0,067682
4,2	-0,030132	-0,226929	-0,066061	0,050364	-0,020169	-0,121707	0,001819	-0,226021	-0,052385
4,3	-0,053147	-0,233283	-0,061035	0,050144	-0,032330	-0,121509	0,002169	-0,230459	-0,036238
4,4	-0,076772	-0,239136	-0,056034	0,049861	-0,044470	-0,121269	0,002648	-0,233243	-0,019316
4,5	-0,100957	-0,244491	-0,051065	0,049519	-0,056582	-0,120975	0,003241	-0,234299	-0,001698
4,6	-0,125654	-0,249351	-0,046132	0,049123	-0,068662	-0,120618	0,003930	-0,233562	0,016531
4,7	-0,150811	-0,253719	-0,041242	0,048676	-0,080703	-0,120187	0,004701	-0,230975	0,035286
4,8	-0,176381	-0,257601	-0,036398	0,048181	-0,092697	-0,119675	0,005541	-0,226490	0,054473



$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
4,9	-0,202315	-0,261000	-0,031607	0,047639	-0,104635	-0,119077	0,006438	-0,220069	0,074002
5,0	-0,228565	-0,263924	-0,026872	0,047053	-0,116509	-0,118386	0,007381	-0,211682	0,093776
5,1	-0,255084	-0,266377	-0,022198	0,046424	-0,128309	-0,117599	0,008362	-0,201309	0,113699
5,2	-0,281825	-0,268366	-0,017589	0,045755	-0,140026	-0,116713	0,009371	-0,188940	0,133676
5,3	-0,308742	-0,269897	-0,013048	0,045046	-0,151648	-0,115724	0,010401	-0,174575	0,153609
5,4	-0,335790	-0,270978	-0,008581	0,044298	-0,163167	-0,114632	0,011445	-0,158223	0,173402
5,5	-0,362923	-0,271616	-0,004190	0,043514	-0,174571	-0,113435	0,012496	-0,139903	0,192961
5,6	-0,390098	-0,271818	0,000121	0,042695	-0,185851	-0,112133	0,013550	-0,119642	0,212192
5,7	-0,417272	-0,271594	0,004348	0,041841	-0,196994	-0,110725	0,014600	-0,097478	0,231005
5,8	-0,444403	-0,270952	0,008488	0,040954	-0,207992	-0,109213	0,015643	-0,073458	0,249311
5,9	-0,471449	-0,269900	0,012538	0,040035	-0,218833	-0,107597	0,016673	-0,047636	0,267025
6,0	-0,498370	-0,268447	0,016494	0,039086	-0,229508	-0,105879	0,017688	-0,020075	0,284066
6,1	-0,525125	-0,266604	0,020354	0,038107	-0,240006	-0,104060	0,018684	0,009153	0,300355
6,2	-0,551678	-0,264380	0,024114	0,037101	-0,250317	-0,102143	0,019658	0,039968	0,315819
6,3	-0,577989	-0,261785	0,027773	0,036067	-0,260431	-0,100129	0,020607	0,072287	0,330390
6,4	-0,604023	-0,258829	0,031327	0,035009	-0,270339	-0,098022	0,021528	0,106015	0,344004
6,5	-0,629743	-0,255523	0,034774	0,033927	-0,280033	-0,095825	0,022420	0,141054	0,356601
6,6	-0,655116	-0,251878	0,038112	0,032822	-0,289501	-0,093539	0,023280	0,177299	0,368129
6,7	-0,680108	-0,247904	0,041338	0,031696	-0,298738	-0,091170	0,024106	0,214642	0,378541
6,8	-0,704686	-0,243614	0,044450	0,030551	-0,307733	-0,088719	0,024897	0,252969	0,387793

Продолжение табл. 1.2.3

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
6,9	-0,728820	-0,239018	0,047447	0,029387	-0,316479	-0,086191	0,025652	0,292161	0,395849
7,0	-0,752480	-0,234128	0,050327	0,028207	-0,324969	-0,083590	0,026369	0,332098	0,402681
7,1	-0,775636	-0,228957	0,053088	0,027012	-0,333195	-0,080919	0,027047	0,372655	0,408262
7,2	-0,798262	-0,223515	0,055729	0,025804	-0,341150	-0,078182	0,027685	0,413708	0,412576
7,3	-0,820331	-0,217815	0,058248	0,024583	-0,348829	-0,075383	0,028282	0,455128	0,415609
7,4	-0,841817	-0,211869	0,060645	0,023352	-0,356225	-0,072527	0,028837	0,496787	0,417355
7,5	-0,862697	-0,205690	0,062919	0,022113	-0,363332	-0,069617	0,029350	0,538556	0,417815
7,6	-0,882948	-0,199289	0,065068	0,020866	-0,370147	-0,066658	0,029821	0,580307	0,416992
7,7	-0,902548	-0,192680	0,067092	0,019613	-0,376663	-0,063655	0,030248	0,621912	0,414898
7,8	-0,921477	-0,185875	0,068990	0,018357	-0,382876	-0,060610	0,030633	0,663245	0,411550
7,9	-0,939717	-0,178887	0,070763	0,017098	-0,388784	-0,057530	0,030973	0,704181	0,406968
8,0	-0,957249	-0,171727	0,072410	0,015837	-0,394381	-0,054417	0,031271	0,744598	0,401180
8,1	-0,974057	-0,164409	0,073930	0,014578	-0,399666	-0,051277	0,031524	0,784378	0,394218
8,2	-0,990126	-0,156945	0,075325	0,013320	-0,404636	-0,048114	0,031734	0,823404	0,386116
8,3	-1,005441	-0,149348	0,076595	0,012066	-0,409288	-0,044931	0,031901	0,861564	0,376916
8,4	-1,019991	-0,141630	0,077739	0,010818	-0,413621	-0,041735	0,032024	0,898752	0,366662
8,5	-1,033764	-0,133804	0,078758	0,009575	-0,417635	-0,038528	0,032105	0,934863	0,355403
8,6	-1,046749	-0,125883	0,079654	0,008341	-0,421327	-0,035315	0,032143	0,969801	0,343189
8,7	-1,058938	-0,117878	0,080427	0,007117	-0,424698	-0,032101	0,032139	1,003471	0,330077
8,8	-1,070322	-0,109801	0,081078	0,005903	-0,427747	-0,028889	0,032094	1,035788	0,316124

Продолжение табл. 1.2.3

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
8,9	-1,080896	-0,101666	0,081608	0,004702	-0,430476	-0,025683	0,032008	1,066670	0,301389
9,0	-1,090654	-0,093484	0,082019	0,003514	-0,432884	-0,022489	0,031881	1,096042	0,285936

9,1	-1,099592	-0,085266	0,082311	0,002341	-0,434974	-0,019308	0,031715	1,123835	0,269828
9,2	-1,107706	-0,077026	0,082487	0,001184	-0,436746	-0,016147	0,031509	1,149988	0,253131
9,3	-1,114996	-0,068773	0,082549	0,000045	-0,438204	-0,013008	0,031266	1,174444	0,235911
9,4	-1,121461	-0,060520	0,082497	-0,001075	-0,439349	-0,009895	0,030985	1,197155	0,218238
9,5	-1,127101	-0,052277	0,082334	-0,002175	-0,440184	-0,006812	0,030667	1,218078	0,200177
9,6	-1,131917	-0,044056	0,082063	-0,003255	-0,440712	-0,003763	0,030314	1,237180	0,181199
9,7	-1,135913	-0,035868	0,081684	-0,004312	-0,440938	-0,000751	0,029926	1,254430	0,163170
9,8	-1,139092	-0,027723	0,081201	-0,005346	-0,440864	0,002221	0,029505	1,269808	0,144359
9,9	-1,141459	-0,019631	0,080616	-0,006356	-0,440495	0,005149	0,029050	1,283298	0,125432
10,0	-1,143020	-0,011603	0,079931	-0,007341	-0,439836	0,008030	0,028565	1,294892	0,106456
10,1	-1,143782	-0,003649	0,079148	-0,008299	-0,438891	0,010861	0,028048	1,304590	0,087495
10,2	-1,143753	0,004223	0,078272	-0,009231	-0,437665	0,013639	0,027503	1,312394	0,068611
10,3	-1,142941	0,012003	0,077303	-0,010134	-0,436165	0,016361	0,026928	1,318316	0,049866
10,4	-1,141136	0,019681	0,076246	-0,011009	-0,434395	0,019024	0,026327	1,322374	0,031320
10,5	-1,139008	0,027249	0,075102	-0,011854	-0,432362	0,021625	0,025700	1,324589	0,013029
10,6	-1,135910	0,034699	0,073876	-0,012670	-0,430072	0,024163	0,025048	1,324990	-0,004953
10,7	-1,132073	0,042022	0,072569	-0,013454	-0,427532	0,026634	0,024373	1,323610	-0,022573
10,8	-1,127510	0,049210	0,071186	-0,014207	-0,424747	0,029037	0,023675	1,320489	-0,039783

Продолжение табл. 1.2.3

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
10,9	-1,122236	0,056256	0,069729	-0,014928	-0,421727	0,031368	0,022956	1,315669	-0,056537
11,0	-1,116264	0,063153	0,068202	-0,015616	-0,418476	0,033627	0,022218	1,309198	-0,072790
11,1	-1,109610	0,069894	0,066607	-0,016272	-0,415004	0,035811	0,021461	1,301129	-0,088504
11,2	-1,102290	0,076473	0,064948	-0,016894	-0,411316	0,037919	0,020686	1,291517	-0,103642
11,3	-1,094321	0,082882	0,063229	-0,017482	-0,407422	0,039948	0,019896	1,280421	-0,118170
11,4	-1,085720	0,089117	0,061453	-0,018036	-0,403329	0,041898	0,019092	1,267904	-0,132058
11,5	-1,076504	0,095171	0,059623	-0,018555	-0,399046	0,043766	0,018274	1,254031	-0,145280
11,6	-1,066691	0,101040	0,057743	-0,019039	-0,394579	0,045552	0,017444	1,238871	-0,157813
11,7	-1,056302	0,106718	0,055817	-0,019489	-0,389938	0,047254	0,016603	1,222493	-0,169636
11,8	-1,045355	0,112201	0,053847	-0,019903	-0,385131	0,048872	0,015753	1,204968	-0,180734
11,9	-1,033869	0,117486	0,051837	-0,020283	-0,380166	0,050405	0,014895	1,186370	-0,191093
12,0	-1,021864	0,122568	0,049791	-0,020626	-0,375053	0,051851	0,014031	1,166774	-0,200704
12,2	-0,996383	0,132109	0,045605	-0,021208	-0,364414	0,054483	0,012287	1,124888	-0,217657
12,4	-0,969077	0,140803	0,041318	-0,021648	-0,353283	0,056765	0,010533	1,079913	-0,231580
12,6	-0,940119	0,148631	0,036956	-0,021948	-0,341731	0,058696	0,008779	1,032455	-0,242507
12,8	-0,909683	0,155582	0,032548	-0,022109	-0,329828	0,060278	0,007037	0,983106	-0,250513
13,0	-0,877945	0,161649	0,028121	-0,022133	-0,317643	0,061513	0,005316	0,932437	-0,255717
13,2	-0,845082	0,166831	0,023703	-0,022024	-0,305245	0,062406	0,003628	0,880996	-0,258269
13,4	-0,811271	0,171133	0,019321	-0,021784	-0,292703	0,062967	0,001984	0,829294	-0,258350
13,6	-0,776687	0,174564	0,014998	-0,021419	-0,280080	0,063204	0,000396	0,777807	-0,256164

Продолжение табл. 1.2.3

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
13,8	-0,741503	0,177138	0,010761	-0,020933	-0,267442	0,063130	-0,001126	0,726965	-0,251936
14,0	-0,705888	0,178875	0,006633	-0,020332	-0,254848	0,062759	-0,002571	0,677153	-0,245899
14,2	-0,670007	0,179800	0,002635	-0,019622	-0,242357	0,062107	-0,003927	0,628709	-0,238299
14,4	-0,634020	0,179940	-0,001209	-0,018810	-0,230023	0,061194	-0,005183	0,581921	-0,229380
14,6	-0,598081	0,179327	-0,004882	-0,017904	-0,217895	0,060041	-0,006330	0,537029	-0,219387

14,8	-0,562337	0,177999	-0,008365	-0,016914	-0,206021	0,058670	-0,007358	0,494222	-0,208557
15,0	-0,526927	0,175995	-0,011643	-0,015847	-0,194440	0,057106	-0,008259	0,453647	-0,197116
15,2	-0,491981	0,173357	-0,014700	-0,014714	-0,183189	0,055375	-0,009027	0,415403	-0,185277
15,4	-0,457623	0,170131	-0,017525	-0,013526	-0,172299	0,053505	-0,009657	0,379550	-0,173236
15,6	-0,423965	0,166363	-0,020107	-0,012295	-0,161795	0,051522	-0,010146	0,346110	-0,161172
15,8	-0,391111	0,162104	-0,022440	-0,011032	-0,151696	0,049455	-0,010496	0,315072	-0,149242
16,0	-0,359153	0,157404	-0,024519	-0,009749	-0,142017	0,047333	-0,010709	0,286395	-0,137583
16,2	-0,328175	0,152314	-0,026340	-0,008459	-0,132765	0,045181	-0,010790	0,260013	-0,126311
16,4	-0,298250	0,146885	-0,027903	-0,007175	-0,123945	0,043025	-0,010747	0,235838	-0,115520
16,6	-0,269440	0,141170	-0,029211	-0,005909	-0,115554	0,040890	-0,010591	0,213768	-0,105284
16,8	-0,241798	0,135218	-0,030268	-0,004673	-0,107586	0,038796	-0,010334	0,193684	-0,095659
17,0	-0,215365	0,129079	-0,031083	-0,003478	-0,100031	0,036762	-0,009989	0,175461	-0,086681
17,2	-0,190175	0,122800	-0,031663	-0,002333	-0,092876	0,034805	-0,009572	0,158967	-0,078370
17,4	-0,166251	0,116428	-0,032020	-0,001249	-0,086104	0,032937	-0,009098	0,144068	-0,070733
17,6	-0,143607	0,110006	-0,032167	-0,000233	-0,079695	0,031168	-0,008582	0,130629	-0,063763

Продолжение табл. 1.2.3

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
17,8	-0,122250	0,103575	-0,032118	0,000709	-0,073629	0,029506	-0,008038	0,118520	-0,057442
18,0	-0,102176	0,097171	-0,031889	0,001573	-0,067885	0,027954	-0,007481	0,107611	-0,051746
18,2	-0,083377	0,090830	-0,031495	0,002355	-0,062440	0,026514	-0,006922	0,097782	-0,046641
18,4	-0,065837	0,084583	-0,030952	0,003054	-0,057272	0,025184	-0,006372	0,088918	-0,042090
18,6	-0,049536	0,078458	-0,030279	0,003670	-0,052359	0,023963	-0,005842	0,080912	-0,038052
18,8	-0,034445	0,072479	-0,029490	0,004204	-0,047680	0,022846	-0,005338	0,073666	-0,034483
19,0	-0,020533	0,066668	-0,028602	0,004658	-0,043214	0,021826	-0,004866	0,067090	-0,031340
19,2	-0,007765	0,061044	-0,027632	0,005036	-0,038943	0,020897	-0,00443	0,061104	-0,028580
19,4	0,003898	0,055620	-0,026593	0,005342	-0,034850	0,020052	-0,004033	0,055635	-0,026159
19,6	0,014498	0,050410	-0,025499	0,005580	-0,030918	0,019281	-0,003676	0,050620	-0,024038
19,8	0,024077	0,045423	-0,024365	0,005756	-0,027133	0,018578	-0,003360	0,046003	-0,022177
20,0	0,032682	0,040666	-0,023201	0,005874	-0,023482	0,017935	-0,003082	0,041734	-0,020543
20,2	0,040359	0,036144	-0,022018	0,005941	-0,019955	0,017343	-0,002842	0,037773	-0,019101
20,4	0,047156	0,031860	-0,020827	0,005961	-0,016542	0,016796	-0,002638	0,034083	-0,017823
20,6	0,053119	0,027813	-0,019637	0,005940	-0,013235	0,016286	-0,002466	0,030635	-0,016682
20,8	0,058297	0,024004	-0,018454	0,005883	-0,010026	0,015807	-0,002324	0,027403	-0,015655
21,0	0,062736	0,020431	-0,017286	0,005794	-0,006910	0,015354	-0,002209	0,024366	-0,014722
21,2	0,066484	0,017089	-0,016138	0,005678	-0,003883	0,014922	-0,002117	0,021509	-0,013866
21,4	0,069587	0,013974	-0,015016	0,005540	-0,000940	0,014506	-0,002045	0,018816	-0,013071
21,6	0,072089	0,011080	-0,013923	0,005382	0,001920	0,014103	-0,001991	0,016277	-0,012326
21,8	0,074033	0,008402	-0,012864	0,005209	0,004701	0,013709	-0,001951	0,013883	-0,011620

Продолжение табл. 1.2.3

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
22,0	0,075464	0,005932	-0,011841	0,005023	0,007404	0,013322	-0,001923	0,011627	-0,010945
22,2	0,076420	0,003663	-0,010855	0,004828	0,010030	0,012939	-0,001904	0,009503	-0,010296
22,4	0,076942	0,001588	-0,009910	0,004625	0,012580	0,012559	-0,001893	0,007508	-0,009666
22,6	0,077067	-0,000303	-0,009006	0,004417	0,015054	0,012182	-0,001887	0,005636	-0,009053
22,8	0,076832	-0,002018	-0,008143	0,004206	0,017453	0,011805	-0,001884	0,003886	-0,008453
23,0	0,076271	-0,003564	-0,007323	0,003994	0,019776	0,011428	-0,001884	0,002254	-0,007867
23,2	0,075417	-0,004950	-0,006546	0,003782	0,022024	0,011051	-0,001885	0,000738	-0,007292
23,4	0,074301	-0,006185	-0,005810	0,003572	0,024196	0,010674	-0,001885	-0,000664	-0,006729
23,6	0,072953	-0,007277	-0,005117	0,003364	0,026293	0,010297	-0,001885	-0,001955	-0,006179
23,8	0,071400	-0,008234	-0,004465	0,003159	0,028315	0,009920	-0,001883	-0,003136	-0,005640
24,0	0,069668	-0,009065	-0,003853	0,002959	0,030261	0,009544	-0,001878	-0,004212	-0,005116

24,5	0,064713	-0,010642	-0,002494	0,002481	0,034799	0,008610	-0,001855	-0,006454	-0,003872
25,0	0,059129	-0,011598	-0,001366	0,002040	0,038873	0,007692	-0,001811	-0,008102	-0,002737
25,5	0,053200	-0,012043	-0,000447	0,001642	0,042496	0,006802	-0,001747	-0,009213	-0,001728
26,0	0,047155	-0,012076	0,000284	0,001288	0,045681	0,005948	-0,001664	-0,009853	-0,000855
26,5	0,041177	-0,011787	0,000848	0,000977	0,048452	0,005140	-0,001565	-0,010091	-0,000122
27,0	0,035409	-0,011252	0,001268	0,000709	0,050830	0,004385	-0,001454	-0,009998	0,000471
27,5	0,029955	-0,010540	0,001564	0,000480	0,052846	0,003687	-0,001335	-0,009642	0,000932
28,0	0,024890	-0,009706	0,001754	0,000289	0,054527	0,003051	-0,001210	-0,009087	0,001271
28,5	0,020261	-0,008800	0,001858	0,000132	0,055907	0,002477	-0,001084	-0,008389	0,001502
29,0	0,016096	-0,007859	0,001892	0,000006	0,057015	0,001966	-0,000959	-0,007600	0,001639

Окончание табл. 1.2.3

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
29,5	0,012402	-0,006917	0,001869	-0,000093	0,057883	0,001517	-0,000838	-0,006763	0,001697
30,0	0,009175	-0,005998	0,001802	-0,000169	0,058541	0,001127	-0,000723	-0,005914	0,001692
30,5	0,006397	-0,005120	0,001704	-0,000223	0,059019	0,000793	-0,000615	-0,005079	0,001638
31,0	0,004045	-0,004298	0,001582	-0,000260	0,059343	0,000511	-0,000514	-0,004282	0,001547
31,5	0,002088	-0,003541	0,001446	-0,000283	0,059538	0,000277	-0,000423	-0,003536	0,001431
32,0	0,000493	-0,002854	0,001301	-0,000293	0,059627	0,000087	-0,000340	-0,002853	0,001299
32,5	-0,000778	-0,002240	0,001154	-0,000293	0,059631	-0,000065	-0,000267	-0,002239	0,001158
33,0	-0,001759	-0,001699	0,001009	-0,000286	0,059568	-0,000182	-0,000203	-0,001696	0,001015
33,5	-0,002489	-0,001230	0,000869	-0,000273	0,059454	-0,000269	-0,000148	-0,001224	0,000875
34,0	-0,003001	-0,000829	0,000736	-0,000256	0,059303	-0,000331	-0,000100	-0,000820	0,000741
34,5	-0,003328	-0,000492	0,000613	-0,000236	0,059127	-0,000371	-0,000061	-0,000481	0,000617
35,0	-0,003502	-0,000214	0,000501	-0,000214	0,058935	-0,000393	-0,000028	-0,000201	0,000502
35,5	-0,003551	-0,000011	0,000399	-0,000192	0,058736	-0,000400	-0,000002	-0,000023	0,000399
36,0	-0,003499	0,000188	0,000309	-0,000169	0,058537	-0,000395	0,000019	0,000200	0,000308
36,5	-0,003370	0,000322	0,000230	-0,000147	0,058342	-0,000382	0,000035	0,000333	0,000228
37,0	-0,003183	0,000420	0,000163	-0,000125	0,058156	-0,000361	0,000047	0,000430	0,000160
37,5	-0,002956	0,000486	0,000105	-0,000105	0,057982	-0,000336	0,000054	0,000495	0,000102
38,0	-0,002702	0,000526	0,000057	-0,000087	0,057821	-0,000307	0,000059	0,000534	0,000054
38,5	-0,002433	0,000545	0,000017	-0,000070	0,057675	-0,000277	0,000061	0,000550	0,000015
39,0	-0,002160	0,000545	0,000014	-0,000056	0,057544	-0,000246	0,000062	0,000550	-0,000016
39,5	-0,001890	0,000532	-0,000038	-0,000042	0,057429	-0,000216	0,000060	0,000535	-0,000040
40,0	-0,001630	0,000508	-0,000057	-0,000031	0,057329	-0,000186	0,000058	0,000510	-0,000058

#### 1.2.4. Четвертое решение при $H_\infty = 0$

( $s = -1,65749228$ ;  $K = 1,287436533$ ;  $a = 4,154954 \cdot 10^{-4}$ ;  $b = -1,967523 \cdot 10^{-4}$  при  $\varepsilon^* = 13$ )

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
0,000	0,000000	0,000000	-5,972042	1,747283	1,000000	-2,351111	0,000000	0,000000	-5,972042
0,025	-0,001862	-0,148743	-5,926918	1,861498	0,941192	-2,354762	-0,288759	-0,148739	-5,926364
0,050	-0,007427	-0,296323	-5,879019	1,969474	0,882204	-2,365386	-0,557972	-0,296268	-5,874617
0,075	-0,016668	-0,442672	-5,828491	2,071836	0,822868	-2,382500	-0,807942	-0,442394	-5,813735
0,100	-0,029550	-0,587727	-5,775469	2,169159	0,763029	-2,405626	-1,039078	-0,586853	-5,740734
0,125	-0,046043	-0,731426	-5,720071	2,261969	0,702541	-2,434301	-1,251875	-0,729306	-5,652717
0,150	-0,066110	-0,873711	-5,662404	2,350745	0,641271	-2,468072	-1,446899	-0,869341	-5,546882
0,175	-0,089716	-1,014528	-5,602564	2,435917	0,579098	-2,506503	-1,624769	-1,006479	-5,420525
0,200	-0,116823	-1,153822	-5,540635	2,517872	0,515911	-2,549173	-1,786145	-1,140174	-5,271048
0,225	-0,147394	-1,291543	-5,476694	2,596954	0,451608	-2,595679	-1,931715	-1,269818	-5,095963
0,250	-0,181387	-1,427640	-5,410809	2,673467	0,386098	-2,645633	-2,062186	-1,394739	-4,892898
0,275	-0,218762	-1,562067	-5,343040	2,747677	0,319300	-2,698668	-2,178269	-1,514211	-4,659598
0,300	-0,259476	-1,694777	-5,273442	2,819815	0,251142	-2,754432	-2,280678	-1,627449	-4,393934
0,325	-0,303486	-1,825725	-5,202065	2,890081	0,181559	-2,812594	-2,370119	-1,733621	-4,093900
0,350	-0,350747	-1,954866	-5,128952	2,958642	0,110495	-2,872836	-2,447285	-1,831842	-3,757624

0,375	-0,401214	-2,082158	-5,054146	3,025641	0,037902	-2,934861	-2,512851	-1,921186	-3,383363
0,400	-0,454839	-2,207559	-4,977682	3,091194	-0,036261	-2,998388	-2,567475	-2,000680	-2,969512
0,425	-0,511576	-2,331029	-4,899597	3,155396	-0,112028	-3,063149	-2,611787	-2,069319	-2,514601
0,450	-0,571374	-2,452526	-4,819923	3,218322	-0,189426	-3,128896	-2,646396	-2,126057	-2,017301
0,475	-0,634185	-2,572012	-4,738691	3,280030	-0,268479	-3,195393	-2,671883	-2,169821	-1,476426

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
0,500	-0,699958	-2,689448	-4,655931	3,340559	-0,349200	-3,262419	-2,688800	-2,199507	-0,890930
0,525	-0,768640	-2,804796	-4,571673	3,399938	-0,431602	-3,329766	-2,697673	-2,213988	-2,599135
0,550	-0,840180	-2,918019	-4,485944	3,458182	-0,515690	-3,397240	-2,699001	-2,212117	0,417379
0,575	-0,914523	-3,029081	-4,398773	3,515295	-0,601464	-3,464657	-2,693254	-2,192728	1,141558
0,600	-0,991616	-3,137946	-4,310189	3,571274	-0,688921	-3,531847	-2,680879	-2,154644	1,913086
0,625	-1,071402	-3,244579	-4,220219	3,626107	-0,778053	-3,598649	-2,662292	-2,096677	2,732279
0,650	-1,153826	-3,348946	-4,128893	3,679775	-0,868849	-3,664913	-2,637889	-2,017632	3,599308
0,675	-1,238830	-3,451013	-4,036240	3,732255	-0,961293	-3,730498	-2,608040	-1,916312	4,514198
0,700	-1,326357	-3,550747	-3,942290	3,783518	-1,055367	-3,795273	-2,573093	-1,791524	5,476827
0,725	-1,416348	-3,648117	-3,847075	3,833533	-1,151049	-3,859113	-2,533373	-1,642075	6,486930
0,750	-1,508743	-3,743090	-3,750624	3,882265	-1,248314	-3,921904	-2,489188	-1,466785	7,544098
0,775	-1,603482	-3,835638	-3,652972	3,929678	-1,347134	-3,983538	-2,440825	-1,264483	8,647782
0,800	-1,700504	-3,925729	-3,554152	3,975733	-1,447480	-4,043913	-2,388553	-1,034014	9,797288
0,825	-1,799748	-4,013336	-3,454197	4,020391	-1,549319	-4,102935	-2,332624	-0,774243	10,99178
0,850	-1,901150	-4,098430	-3,353144	4,063613	-1,652615	-4,160516	-2,273277	-0,484058	12,23031
0,875	-2,004648	-4,180984	-3,251029	4,105359	-1,757332	-4,216572	-2,210735	-0,162370	13,11777
0,900	-2,110178	-4,260973	-3,147889	4,145588	-1,863430	-4,271027	-2,145206	0,191879	14,83493
0,925	-2,217675	-4,338371	-3,043763	4,184263	-1,970869	-4,323809	-2,076888	0,597713	16,19843
0,950	-2,327075	-4,413153	-2,938689	4,221343	-2,079606	-4,374850	-2,005967	1,002124	17,60078
0,975	-2,438311	-4,485298	-2,832709	4,256792	-2,189597	-4,424087	-1,932617	1,460063	19,04039

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
1,000	-2,551318	-4,554781	-2,725863	4,290573	-2,300795	-4,471462	-1,875003	1,954440	20,51552
1,025	-2,666028	-4,621584	-2,618195	4,322650	-2,413154	-4,51692	-1,779283	2,486120	22,02434
1,050	-2,782374	-4,685685	-2,509745	4,352990	-2,526625	-4,560410	-1,699602	3,055922	23,56491
1,075	-2,900289	-4,747065	-2,400560	4,381560	-2,641157	-4,601885	-1,618103	3,664613	25,13516
1,100	-3,019705	-4,805707	-2,290682	4,408329	-2,756702	-4,641301	-1,534916	4,312909	26,73294
1,125	-3,140552	-4,861594	-2,180159	4,433267	-2,873205	-4,678618	-1,450170	5,001471	28,35601
1,150	-3,262761	-4,914710	-2,069035	4,456347	-2,990615	-4,713798	-1,363985	5,730901	30,00201
1,175	-3,386264	-4,965041	-1,957357	4,477543	-3,108877	-4,746806	-1,276475	6,501743	31,66852
1,200	-3,510990	-5,012573	-1,845173	4,496830	-3,227937	-4,777611	-1,187751	7,314477	33,35301
1,225	-3,636869	-5,057296	-1,732531	4,514186	-3,347739	-4,806184	-1,097917	8,169522	35,05291
1,250	-3,763831	-5,099197	-1,619480	4,529589	-3,468227	-4,832499	-1,007076	9,067229	36,76555
1,275	-3,891805	-5,138267	-1,506069	4,543020	-3,589345	-4,856530	-0,915323	10,00788	38,48820
1,300	-4,020721	-5,174497	-1,392346	4,554462	-3,711034	-4,878258	-0,822752	10,99169	40,21807
1,325	-4,150507	-5,207882	-1,278362	4,563899	-3,833238	-4,897662	-0,729453	12,01882	41,95233
1,350	-4,281091	-5,238414	-1,164168	4,571317	-3,955898	-4,914725	-0,635514	13,08932	43,68808
1,375	-4,412403	-5,266089	-1,049813	4,576703	-4,078955	-4,929433	-0,541017	14,20321	45,42240
1,400	-4,544372	-5,290904	-0,93535	4,580046	-4,202350	-4,941772	-0,446045	15,36041	47,15231
1,425	-4,676925	-5,312856	-0,820828	4,581338	-4,326024	-4,951732	-0,350676	16,56077	48,87482
1,450	-4,809991	-5,331945	-0,706300	4,580570	-4,449917	-4,959303	-0,254987	17,80406	50,58691
1,475	-4,943498	-5,348171	-0,591817	4,577737	-4,573969	-4,964479	-0,159052	19,09000	52,28553

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
1,500	-5,077375	-5,361537	-0,477430	4,572835	-4,698121	-4,967254	-0,062943	20,41820	53,96763
1,525	-5,211551	-5,372044	-0,363192	4,565861	-4,822311	-4,967626	0,033269	21,78822	55,63017
1,550	-5,345954	-5,379698	-0,249154	4,556813	-4,946482	-4,965591	0,129516	23,19952	57,27007
1,575	-5,480512	-5,384504	-0,135369	4,545692	-5,070571	-4,961150	0,225730	24,65151	58,88431
1,600	-5,615155	-5,386469	-0,021887	4,532500	-5,194519	-4,954305	0,321845	26,14350	60,46983
1,625	-5,749812	-5,385601	0,091239	4,517239	-5,318266	-4,945059	0,417799	27,67473	62,02362
1,650	-5,884412	-5,381910	0,203958	4,499915	-5,441752	-4,933417	0,513528	29,24439	63,54271
1,675	-6,018884	-5,375407	0,316218	4,480533	-5,564917	-4,919385	0,608971	30,85156	65,02412
1,700	-6,153159	-5,366104	0,427967	4,459102	-5,687702	-4,902971	0,704069	32,49526	66,46494
1,725	-6,287166	-5,354013	0,539156	4,435629	-5,810046	-4,884185	0,798762	34,17444	67,86229
1,750	-6,420837	-5,339151	0,649732	4,410125	-5,931891	-4,863037	0,892993	35,88799	69,21336
1,775	-6,554101	-5,321532	0,759645	4,382602	-6,053178	-4,839540	0,986706	37,63470	70,51536
1,800	-6,686890	-5,301175	0,868845	4,353072	-6,173849	-4,813706	1,079845	39,41332	71,76559
1,825	-6,819137	-5,278096	0,977282	4,321549	-6,293844	-4,785553	1,172356	41,22253	72,96114
1,850	-6,950773	-5,252317	1,084906	4,288048	-6,413107	-4,755094	1,264187	43,06092	74,10023
1,875	-7,081730	-5,223858	1,191668	4,252586	-6,531580	-4,722349	1,355285	44,92704	75,17957
1,900	-7,211943	-5,192741	1,297519	4,215181	-6,649206	-4,687337	1,445599	46,81938	76,19703
1,925	-7,341345	-5,158990	1,402411	4,175851	-6,765928	-4,650076	1,535079	48,73636	77,15027
1,950	-7,469871	-5,122629	1,506296	4,134616	-6,881691	-4,610590	1,623677	50,67634	78,03705
1,975	-7,597455	-5,083684	1,609126	4,091497	-6,996439	-4,568900	1,711343	52,63764	78,85525

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
2,000	-7,724034	-5,042182	1,710855	4,046517	-7,110118	-4,525031	1,798031	54,61852	79,60282
2,025	-7,849543	-4,998151	1,811437	3,999699	-7,222673	-4,479007	1,883695	56,61718	80,27784
2,050	-7,973921	-4,973620	1,910825	3,951066	-7,334050	-4,430855	1,968289	58,63179	80,87848
2,075	-8,097104	-4,902620	2,008975	3,900645	-7,444198	-4,380602	2,051769	60,66047	81,40302
2,100	-8,219031	-4,851182	2,105843	3,848461	-7,553063	-4,328276	2,134092	62,70129	81,84988
2,125	-8,339643	-4,797339	2,201384	3,794542	-7,660595	-4,273908	2,215216	64,75230	82,21757
2,150	-8,458879	-4,741124	2,295555	3,738915	-7,766742	-4,217526	2,295098	66,81150	82,50474
2,175	-8,576680	-4,682573	2,388316	3,681611	-7,871455	-4,159163	2,373700	68,87686	82,71017
2,200	-8,692988	-4,621721	2,479622	3,622659	-7,974684	-4,098852	2,450980	70,94632	82,83275
2,225	-8,807747	-4,558604	2,569435	3,562090	-8,076381	-4,036626	2,526901	73,01780	82,87150
2,250	-8,920900	-4,493262	2,657714	3,499935	-8,176499	-3,972519	2,601424	75,08919	82,82559
2,275	-9,032392	-4,425732	2,744419	3,436228	-8,274992	-3,906566	2,674513	77,15836	82,69430
2,300	-9,142169	-4,356054	2,829512	3,371002	-8,371813	-3,838805	2,746133	79,22319	82,47707
2,325	-9,250177	-4,284270	2,912957	3,304290	-8,466917	-3,769272	2,816249	81,28150	82,17346
2,350	-9,356365	-4,210421	2,994715	3,236129	-8,560262	-3,698006	2,884826	83,33114	81,78317
2,375	-9,460681	-4,134549	3,074751	3,166553	-8,651803	-3,625044	2,951832	85,36993	81,30604
2,400	-9,563076	-4,056698	3,153031	3,095600	-8,741500	-3,550427	3,017236	87,39572	80,74204
2,425	-9,663500	-3,976912	3,229520	3,023305	-8,829311	-3,474196	3,081006	89,40631	80,09129
2,450	-9,761906	-3,895237	3,304185	2,949707	-8,915197	-3,396391	3,143111	91,39956	79,35405
2,475	-9,858246	-3,8111718	3,376995	2,874845	-8,999118	-3,317054	3,203525	93,37330	78,53070

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
2,500	-9,952477	-3,726403	3,447917	2,798757	-9,081037	-3,236229	3,262218	95,32538	77,62179
2,525	-10,04455	-3,639338	3,516923	2,721483	-9,160917	-3,153958	3,319165	97,25368	76,62796

2,550	-10,13442	-3,550573	3,583982	2,643063	-9,238723	-3,070286	3,374338	99,15608	75,55004
2,575	-10,22206	-3,460156	3,649067	2,563537	-9,314420	-2,985256	3,427714	101,0304	74,38895
2,600	-10,30742	-3,368136	3,712150	2,482948	-9,387975	-2,898915	3,479268	102,8748	73,14576
2,625	-10,39046	-3,274565	3,773206	2,401337	-9,459356	-2,811308	3,528977	104,6871	71,82168
2,650	-10,47113	-3,179493	3,832209	2,318746	-9,528530	-2,722482	3,576821	106,4652	70,41803
2,675	-10,54942	-3,082972	3,889135	2,235217	-9,595470	-2,632483	3,622779	108,2073	68,93628
2,700	-10,62527	-2,985053	3,943962	2,150795	-9,660145	-2,541359	3,666830	109,9114	67,37800
2,725	-10,69866	-2,885791	3,996668	2,065521	-9,722529	-2,449157	3,708956	111,5756	65,74489
2,750	-10,76955	-2,785238	4,047231	1,979441	-9,782595	-2,355927	3,749139	113,1980	64,03878
2,775	-10,83791	-2,683448	4,095633	1,892598	-9,840317	-2,261717	3,787364	114,7769	62,26160
2,800	-10,90371	-2,580475	4,141855	1,805037	-9,895673	-2,166575	3,823615	116,3105	60,41539
2,825	-10,96693	-2,476373	4,185880	1,716803	-9,948639	-2,070553	3,857877	117,7971	58,50231
2,850	-11,02752	-2,371199	4,227690	1,627941	-9,999193	-1,973698	3,890137	119,2351	56,52461
2,875	-11,08548	-2,265008	4,267272	1,538495	-10,04731	-1,876062	3,920383	120,6229	54,48467
2,900	-11,14077	-2,157854	4,304611	1,448513	-10,09299	-1,777696	3,948604	121,9588	52,38492
2,925	-11,19336	-2,049796	4,339693	1,358039	-10,13619	-1,678649	3,974789	123,2416	50,22792
2,950	-11,24325	-1,940889	4,372509	1,267120	-10,17691	-1,578973	3,998931	124,4698	48,01630
2,975	-11,29040	-1,831189	4,403046	1,175801	-10,21514	-1,478720	4,021019	125,6420	45,75278

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
3,000	-11,33480	-1,720755	4,431296	1,084129	-10,25084	-1,377940	4,041049	126,7570	43,44015
3,025	-11,37643	-1,609644	4,457250	0,992150	-10,28403	-1,276685	4,059014	127,8136	41,08127
3,050	-11,41528	-1,497912	4,480901	0,899910	-10,31468	-1,175006	4,074909	128,8107	38,67907
3,075	-11,45132	-1,385618	4,502244	0,807457	-10,34278	-1,072956	4,088731	129,7472	36,23657
3,100	-11,48456	-1,272819	4,521272	0,714837	-10,36832	-0,970587	4,100477	130,6222	33,75680
3,125	-11,51496	-1,159574	4,537984	0,622095	-10,39130	-0,867950	4,110145	131,4348	31,24288
3,150	-11,54253	-1,045939	4,552377	0,529279	-10,41172	-0,765097	4,117735	132,1841	28,69795
3,175	-11,56726	-0,931974	4,564448	0,436435	-10,42956	-0,662080	4,123248	132,8695	26,12521
3,200	-11,58913	-0,817736	4,574199	0,343609	-10,44482	-0,558952	4,126686	133,4902	23,52790
3,225	-11,60814	-0,703283	4,581629	0,250849	-10,45750	-0,455763	4,128050	134,0457	20,90926
3,250	-11,62429	-0,588674	4,586742	0,158199	-10,46761	-0,352567	4,127344	134,5355	18,27258
3,275	-11,63757	-0,473966	4,589540	0,065706	-10,47513	-0,249413	4,124575	134,9592	15,62116
3,300	-11,64799	-0,359216	4,590029	-0,026585	-10,48008	-0,146355	4,119746	135,3165	12,95832
3,325	-11,65553	-0,244483	4,588213	-0,118626	-10,48245	-0,043443	4,112865	135,6070	10,28738
3,350	-11,66021	-0,129825	4,584100	-0,210374	-10,48225	0,059271	4,103940	135,8308	7,611668
3,375	-11,66203	-0,015297	4,577697	-0,301782	-10,47949	0,161737	4,092980	135,9876	4,934496
3,400	-11,66098	0,099041	4,569014	-0,392806	-10,47417	0,263903	4,079994	136,0775	2,259179
3,425	-11,65708	0,213134	4,558061	-0,483401	-10,46630	0,365720	4,064994	136,1006	-0,410988
3,450	-11,65032	0,326925	4,544848	-0,573522	-10,45589	0,467136	4,047991	136,0570	-3,072729
3,475	-11,64073	0,440358	4,529389	-0,663125	-10,44294	0,568103	4,028998	135,9471	-5,722796

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
3,500	-11,62831	0,553376	4,511697	-0,752167	-10,42748	0,668570	4,008028	135,7710	-8,357970
3,525	-11,61307	0,665924	4,491786	-0,840603	-10,40952	0,768488	3,985097	135,5293	-10,97507
3,550	-11,59502	0,777947	4,469672	-0,928392	-10,38907	0,867808	3,960221	135,2225	-13,57095
3,575	-11,57418	0,889390	4,445372	-1,015489	-10,36614	0,966483	3,933415	134,8510	-16,14254
3,600	-11,55055	1,000198	4,418903	-1,101854	-10,34075	1,064463	3,904698	134,4156	-18,68678
3,625	-11,52417	1,110317	4,390286	-1,187443	-10,31292	1,161701	3,874087	133,9169	-21,20069

3,650	-11,49504	1,219694	4,359538	-1,272216	-10,28267	1,258152	3,841603	133,3558	-23,68135
3,675	-11,46319	1,328276	4,326682	-1,356132	-10,25002	1,353767	3,807265	132,7331	-26,12590
3,700	-11,42864	1,436011	4,291739	-1,439150	-10,21499	1,448500	3,771095	132,0498	-28,53157
3,725	-11,39140	1,542846	4,254732	-1,521231	-10,17760	1,542306	3,733115	131,3069	-30,89563
3,750	-11,35150	1,648731	4,215686	-1,602334	-10,13788	1,635141	3,693347	130,5054	-33,21547
3,775	-11,30897	1,753614	4,174624	-1,682422	-10,09585	1,726959	3,651815	129,6465	-35,48852
3,800	-11,26383	1,857445	4,131573	-1,761455	-10,05154	1,817717	3,608544	128,7314	-37,71234
3,825	-11,21611	1,960176	4,086560	-1,839397	-10,00498	1,907372	3,563559	127,7613	-39,88455
3,850	-11,16583	2,061757	4,039613	-1,916210	-9,956187	1,995881	3,516886	126,7376	-42,00287
3,875	-11,11303	2,162141	3,990760	-1,991858	-9,905196	2,083202	3,468553	125,6617	-44,06513
3,900	-11,05774	2,261279	3,940030	-2,066304	-9,852037	2,169295	3,418585	124,5348	-46,06925
3,925	-10,99998	2,359127	3,887455	-2,139515	-9,796741	2,254118	3,367013	123,3587	-48,01325
3,950	-10,93979	2,455637	3,833065	-2,211454	-9,739342	2,337633	3,313865	122,1347	-49,89526
3,975	-10,87721	2,550765	3,776893	-2,282089	-9,679871	2,419799	3,259171	120,8645	-51,71353

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
4,000	-10,81226	2,644467	3,718972	-2,351385	-9,618363	2,500578	3,202961	119,5496	-53,46640
4,025	-10,74500	2,736699	3,659335	-2,419312	-9,554854	2,579934	3,145266	118,1917	-55,52341
4,050	-10,67544	2,827420	3,598018	-2,485836	-9,489379	2,657830	3,086119	116,7925	-56,76991
4,075	-10,60364	2,916587	3,535055	-2,550927	-9,421975	2,734228	3,025552	115,3538	-58,31783
4,100	-10,52963	3,004159	3,470483	-2,614555	-9,352680	2,809096	2,963597	113,8772	-59,79488
4,125	-10,45344	3,090098	3,404340	-2,676689	-9,281533	2,882397	2,900289	112,3646	-61,20001
4,150	-10,37513	3,174363	3,336662	-2,737302	-9,208574	2,954099	2,835661	110,8178	-62,53226
4,175	-10,29474	3,256918	3,267488	-2,796365	-9,133842	3,024169	2,769749	109,2386	-63,79079
4,200	-10,21230	3,337726	3,196857	-2,853851	-9,057379	3,092576	2,702587	107,6289	-64,97490
4,225	-10,12787	3,416749	3,124808	-2,909733	-8,979227	3,159289	2,634212	105,9905	-66,08400
4,250	-10,04148	3,493955	3,051384	-2,963986	-8,899429	3,224277	2,564659	104,3253	-67,11760
4,275	-9,953191	3,569307	2,976623	-3,016586	-8,818028	3,287512	2,493966	102,6353	-68,07537
4,300	-9,863036	3,642775	2,900568	-3,067506	-8,735068	3,348966	2,422169	100,9222	-68,95707
4,325	-9,771068	3,714325	2,823262	-3,116726	-8,650595	3,408612	2,349306	99,18809	-69,76259
4,350	-9,677336	3,783928	2,744746	-3,164222	-8,564653	3,466423	2,275415	97,43475	-70,49193
4,375	-9,581888	3,851553	2,665065	-3,209972	-8,477289	3,522374	2,200535	95,66413	-71,14523
4,400	-9,484775	3,917172	2,584262	-3,253955	-8,388550	3,576442	2,124703	93,87812	-71,72272
4,425	-9,386047	3,980757	2,502382	-3,296153	-8,298483	3,628602	2,047960	92,07862	-72,22476
4,450	-9,285754	4,042282	2,419470	-3,336545	-8,207136	3,678832	1,970343	90,26751	-72,65181
4,475	-9,183950	4,101722	2,335570	-3,375113	-8,114457	3,727112	1,891894	88,44665	-73,00445

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
4,500	-9,080686	4,159053	2,250730	-3,411840	-8,020797	3,773420	1,812650	86,61790	-73,28337
4,525	-8,976015	4,214251	2,164994	-3,446708	-7,925903	3,817738	1,732653	84,78309	-73,48937
4,550	-8,869991	4,267296	2,078410	-3,479702	-7,829927	3,860047	1,651943	82,94403	-73,62333
4,575	-8,762668	4,318165	1,991024	-3,510808	-7,732918	3,900330	1,570559	81,10252	-73,68627
4,600	-8,654101	4,366841	1,902885	-3,540009	-7,634927	3,938570	1,488542	79,26030	-73,67927
4,625	-8,544345	4,413304	1,814040	-3,567294	-7,536006	3,974752	1,405933	77,41913	-73,60353
4,650	-8,433455	4,457537	1,724537	-3,592648	-7,436207	4,008862	1,322772	75,58069	-73,46033
4,675	-8,321487	4,499525	1,634424	-3,616061	-7,335581	4,040886	1,239099	73,74666	-73,25105
4,700	-8,208497	4,539254	1,543750	-3,637520	-7,234180	4,070813	1,154956	71,91867	-72,97715
4,725	-8,094543	4,576709	1,452564	-3,657015	-7,132057	4,098630	1,070382	70,09833	-72,64016

4,750	-7,979681	4,611878	1,360916	-3,674537	-7,029266	4,124329	0,985417	68,28718	-72,24171
4,775	-7,863968	4,644751	1,268854	-3,690075	-6,925859	4,147898	0,900103	66,48674	-71,78349
4,800	-7,747462	4,675318	1,176428	-3,703622	-6,821889	4,169331	0,814478	64,69849	-71,26726
4,825	-7,630222	4,703570	1,083689	-3,715168	-6,717410	4,188620	0,728584	62,92385	-70,69486
4,850	-7,512303	4,729500	0,990687	-3,724707	-6,612476	4,205758	0,642458	61,16420	-70,06818
4,875	-7,393766	4,753102	0,897471	-3,732231	-6,50714	4,220741	0,556142	59,42087	-69,38918
4,900	-7,274668	4,774372	0,804092	-3,737733	-6,401457	4,233564	0,469672	57,69516	-68,65984
4,925	-7,155067	4,793306	0,710601	-3,741207	-6,295480	4,244224	0,383089	55,98828	-67,88224
4,950	-7,035022	4,809902	0,617049	-3,742647	-6,189264	4,252718	0,296431	54,30143	-67,05847
4,975	-6,914591	4,824158	0,523486	-3,742046	-6,082862	4,259045	0,209934	52,63572	-66,19067

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
5,000	-6,793833	4,836076	0,429963	-3,739398	-5,976329	4,263205	0,123036	50,99224	-65,28102
5,025	-6,672807	4,845657	0,336533	-3,734696	-5,869720	4,265197	0,036375	49,37200	-64,33173
5,050	-6,551570	4,852904	0,243246	-3,727935	-5,763088	4,265024	-0,050215	47,77597	-63,34503
5,075	-6,430181	4,857821	0,150153	-3,719105	-5,656487	4,262687	-0,136697	46,20505	-62,32318
5,100	-6,308698	4,860414	0,057308	-3,708201	-5,549971	4,258190	-0,223036	44,66008	-61,26846
5,125	-6,187180	4,860689	-0,035239	-3,695211	-5,443595	4,251537	-0,309198	43,14188	-60,18315
5,150	-6,065683	4,858655	-0,127435	-3,680125	-5,337412	4,242732	-0,395149	41,65116	-59,06955
5,175	-5,944266	4,854321	-0,219228	-3,662933	-5,231476	4,231782	-0,480854	40,18862	-57,92997
5,200	-5,822986	4,847697	-0,310564	-3,643618	-5,125841	4,218692	-0,566282	38,75486	-56,76671
5,225	-5,701900	4,838797	-0,401391	-3,622166	-5,020560	4,203470	-0,651398	37,35046	-55,58206
5,250	-5,581065	4,827632	-0,491655	-3,598557	-4,915685	4,186125	-0,735171	35,97592	-54,37831
5,275	-5,460537	4,814219	-0,581301	-3,572769	-4,811271	4,166665	-0,820567	34,63168	-53,15774
5,300	-5,340373	4,798573	-0,670275	-3,544776	-4,707370	4,145100	-0,904554	33,31815	-51,92261
5,325	-5,220627	4,780711	-0,758521	-3,514549	-4,604033	4,121441	-0,988098	32,35659	-50,67514
5,350	-5,101356	4,760653	-0,845983	-3,482054	-4,501315	4,095699	-1,071166	30,78448	-49,41755
5,375	-4,982613	4,738419	-0,932604	-3,447252	-4,399266	4,067887	-1,153723	29,56484	-48,15201
5,400	-4,864453	4,714031	-1,018326	-3,410100	-4,297938	4,038017	-1,235732	28,37692	-46,88068
5,425	-4,746929	4,687511	-1,103089	-3,370547	-4,197382	4,006105	-1,317156	27,22084	-45,60565
5,450	-4,630095	4,658885	-1,186833	-3,328540	-4,097649	3,972165	-1,397954	26,09666	-44,32898
5,475	-4,514002	4,628178	-1,269495	-3,284017	-3,998790	3,936213	-1,478085	25,00439	-43,05270

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
5,500	-4,398703	4,595419	-1,351012	-3,236914	-3,900086	3,898267	-1,557502	23,94400	-41,77878
5,525	-4,284248	4,560638	-1,431319	-3,187157	-3,803894	3,858344	-1,636156	22,91541	-40,50912
5,550	-4,170687	4,523864	-1,510348	-3,134671	-3,707954	3,816466	-1,713995	21,91849	-39,24559
5,575	-4,058071	4,485132	-1,588029	-3,079375	-3,613086	3,772652	-1,790959	20,95307	-37,98999
5,600	-3,946447	4,444475	-1,664292	-3,021183	-3,519338	3,726925	-1,866988	20,01891	-36,74405
5,625	-3,835863	4,401929	-1,739063	-2,960009	-3,426756	3,679311	-1,942012	19,11577	-35,50945
5,650	-3,726366	4,357534	-1,812267	-2,895762	-3,335388	3,629834	-2,015957	18,24333	-34,28780
5,675	-3,618001	4,311330	-1,883825	-2,828356	-3,245279	3,578522	-2,088742	17,40126	-33,08061
5,700	-3,510814	4,263358	-1,953658	-2,757703	-3,156477	3,525407	-2,160280	16,58917	-31,88936
5,725	-3,404848	4,213662	-2,021683	-2,683721	-3,069024	3,470520	-2,230476	15,80665	-30,71543
5,750	-3,300145	4,162289	-2,087815	-2,606335	-2,982965	3,413895	-2,299229	15,05324	-29,56013
5,775	-3,196747	4,109288	-2,151970	-2,525476	-2,898343	3,355571	-2,366429	14,32847	-28,42467
5,800	-3,094694	4,054708	-2,214060	-2,441089	-2,815200	3,295588	-2,431961	13,63183	-27,31021
5,825	-2,994024	3,998603	-2,273995	-2,353133	-2,733577	3,233988	-2,495702	12,96278	-26,21782
5,850	-2,894776	3,941027	-2,331687	-2,261582	-2,653514	3,170819	-2,557522	12,32075	-25,14846

5,875	-2,796985	3,882038	-2,387044	-2,166431	-2,575049	3,106129	-2,617285	11,70516	-24,10304
5,900	-2,700685	3,821695	-2,439978	-2,067695	-2,498220	3,039973	-2,674849	11,11539	-23,08236
5,925	-2,605911	3,760060	-2,490399	-1,965416	-2,423062	2,972406	-2,730068	10,55083	-22,08715
5,950	-2,512693	3,697197	-2,538220	-1,859659	-2,349611	2,903490	-2,782790	10,01082	-21,11805
5,975	-2,421060	3,633171	-2,583354	-1,750520	-2,277898	2,833289	-2,832863	9,494704	-20,17560

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
6,000	-2,331043	3,568052	-2,625719	-1,638123	-2,207957	2,761870	-2,880129	9,001814	-19,260284
6,050	-2,155956	3,434815	-2,701825	-1,404201	-2,073500	2,615675	-2,965620	8,082959	-17,51244
6,100	-1,98762	3,298069	-2,765959	-1,159497	-1,946455	2,465526	-3,038026	7,248703	-15,87657
6,150	-1,826197	3,158426	-2,817630	-0,906091	-1,827002	2,312110	-3,096166	6,493422	-14,35344
6,200	-1,671815	3,016520	-2,856464	-0,646493	-1,715286	2,156165	-3,138969	5,811486	-12,94259
6,250	-1,524572	2,872998	-2,882224	-0,383571	-1,611414	1,998484	-3,165515	5,197318	-11,64240
6,300	-1,384531	2,728517	-2,894818	-0,120443	-1,515453	1,839897	-3,175088	4,645444	-10,45025
6,350	-1,251725	2,583734	-2,894319	0,139640	-1,427425	1,681266	-3,167210	4,150551	-9,362570
6,400	-1,126152	2,439300	-2,880959	0,393418	-1,347312	1,523470	-3,141678	3,707518	-8,375005
6,450	-1,007779	2,295846	-2,855134	0,637753	-1,275050	1,367391	-3,098581	3,311465	-7,482546
6,500	-0,896541	2,153985	-2,817390	0,869739	-1,210530	1,213899	-3,038307	2,957771	-6,679662
6,550	-0,792344	2,014295	-2,768409	1,086800	-1,153603	1,063836	-2,961544	2,642104	-5,960439
6,600	-0,695066	1,877318	-2,708995	1,286759	-1,104076	0,918003	-2,869257	2,360435	-5,318716
6,650	-0,604559	1,743554	-2,640048	1,467887	-1,061719	0,777148	-2,762667	2,109046	-4,748210
6,700	-0,52065	1,613456	-2,562542	1,628926	-1,026267	0,641951	-2,643209	1,884532	-4,242632
6,750	-0,443145	1,487426	-2,477503	1,769082	-0,997420	0,513015	-2,512495	1,683803	-3,795795
6,800	-0,371834	1,365814	-2,385987	1,888012	-0,974852	0,390860	-2,372263	1,504074	-3,401698
6,850	-0,306485	1,248917	-2,289055	1,985779	-0,958214	0,275917	-2,224330	1,342850	-3,054605
6,900	-0,246859	1,136981	-2,187755	2,062809	-0,947135	0,168525	-2,070544	1,197920	-2,749103
6,950	-0,192701	1,030197	-2,083108	2,119837	-0,941231	0,068930	-1,912742	1,067331	-2,480149

Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
7,000	-0,143751	0,928710	-1,976089	2,157849	-0,940109	-0,022712	-1,752706	0,949374	-2,243095
7,050	-0,099741	0,832613	-1,867620	2,178027	-0,943369	-0,106332	-1,592132	0,842561	-2,033711
7,100	-0,060399	0,741957	-1,758561	2,181695	-0,950609	-0,181943	-1,432601	0,745605	-1,848188
7,150	-0,025454	0,656753	-1,649702	2,170275	-0,961431	-0,249634	-1,275554	0,657401	-1,683136
7,200	0,005367	0,576972	-1,541761	2,145238	-0,975443	-0,309561	-1,122283	0,577001	-1,535568
7,250	0,032332	0,502551	-1,435380	2,108076	-0,992261	-0,361944	-0,973919	0,503596	-1,402883
7,300	0,055710	0,433398	-1,331130	2,060265	-1,011516	-0,407051	-0,831425	0,436502	-1,282842
7,350	0,075758	0,369394	-1,229507	2,003245	-1,032850	-0,445198	-0,695603	0,375133	-1,173538
7,400	0,092732	0,310397	-1,130936	1,938399	-1,055953	-0,476733	-0,567094	0,318996	-1,073369
7,450	0,106879	0,256244	-1,035776	1,867041	-1,080420	-0,502037	-0,446387	0,267667	-0,981002
7,500	0,118435	0,206757	-0,944320	1,790405	-1,106032	-0,521508	-0,333831	0,220784	-0,895346
7,550	0,127629	0,161746	-0,856804	1,709639	-1,132480	-0,535560	-0,229642	0,178035	-0,815517
7,600	0,134680	0,121008	-0,773407	1,625800	-1,159505	-0,544613	-0,133921	0,139147	-0,740813
7,650	0,139797	0,084334	-0,694259	1,539857	-1,186865	-0,549093	-0,046663	0,103878	-0,670680
7,700	0,143180	0,051510	-0,619442	1,452684	-1,214345	-0,549419	0,032228	0,072010	-0,604692
7,750	0,145009	0,022317	-0,548998	1,365069	-1,241745	-0,546007	0,102927	0,043345	-0,542526
7,800	0,145467	-0,003463	-0,482931	1,277714	-1,268890	-0,539259	0,165676	0,017698	-0,483938
7,850	0,144716	-0,026048	-0,421212	1,191237	-1,295622	-0,529567	0,220771	-0,005106	-0,428751
7,900	0,142911	-0,045656	-0,363784	1,106180	-1,321804	-0,517304	0,268553	-0,025238	-0,376833
7,950	0,140196	-0,062497	-0,310563	1,023009	-1,347315	-0,502827	0,309395	-0,042842	-0,328086



Продолжение табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
8,000	0,136704	-0,076780	-0,261444	0,942124	-1,372055	-0,486473	0,343699	-0,058092	-0,282437
8,100	0,127870	-0,098475	-0,175010	0,788488	-1,418890	-0,449380	0,394374	-0,082124	-0,200194
8,200	0,117272	-0,112274	-0,103332	0,647269	-1,461798	-0,408300	0,424009	-0,098521	-0,129665
8,300	0,105631	-0,119590	-0,045102	0,519667	-1,500482	-0,365165	0,436029	-0,108432	-0,070367
8,400	0,093528	-0,121697	0,001074	0,406230	-1,534817	-0,321572	0,433715	-0,112949	-0,021690
8,500	0,081427	-0,119729	0,036617	0,306981	-1,564824	-0,278798	0,420114	-0,113099	0,017119
8,600	0,069685	-0,114681	0,062931	0,221538	-1,590637	-0,237833	0,397977	-0,109825	0,046948
8,700	0,058565	-0,107406	0,081363	0,149213	-1,612475	-0,199406	0,369734	-0,103976	0,068782
8,800	0,048253	-0,098628	0,093181	0,089098	-1,630619	-0,164019	0,337480	-0,096300	0,083662
8,900	0,038869	-0,088951	0,099554	0,040144	-1,645391	-0,131984	0,302978	-0,087440	0,092639
9,000	0,030477	-0,078864	0,101544	0,001222	-1,657133	-0,103450	0,267681	-0,077935	0,096737
9,100	0,023097	-0,068757	0,100094	-0,028831	-1,666198	-0,078436	0,232748	-0,068223	0,969182
9,200	0,016716	-0,058932	0,096035	-0,051167	-1,672935	-0,056858	0,199078	-0,058652	0,094065
9,300	0,011294	-0,049613	0,090081	-0,066898	-1,677679	-0,038555	0,167339	-0,049485	0,088960
9,400	0,006771	-0,040958	0,082840	-0,077076	-1,680748	-0,023310	0,137996	-0,040912	0,082286
9,500	0,003076	-0,033071	0,074819	-0,082670	-1,682435	-0,010866	0,111345	-0,033061	0,074616
9,600	0,000130	-0,026007	0,066429	-0,084565	-1,683005	-0,000946	0,087539	-0,026007	0,066423
9,700	-0,002153	-0,019786	0,058002	-0,083550	-1,682698	0,006738	0,066616	-0,019781	0,058088

Окончание табл. 1.2.4

$\varepsilon$	$H(\varepsilon)$	$H'(\varepsilon)$	$H''(\varepsilon)$	$H'''(\varepsilon)$	$G(\varepsilon)$	$G'(\varepsilon)$	$G''(\varepsilon)$	$P(0) - P(\varepsilon)$	$P'(\varepsilon)$
9,800	-0,003855	-0,014399	0,049793	-0,080318	-1,681723	0,012472	0,048526	-0,014384	0,049904
9,900	-0,005060	-0,009814	0,041993	-0,075469	-1,680260	0,016533	0,033146	-0,009788	0,042092
10,000	-0,005843	-0,005982	0,034736	-0,069514	-1,678463	0,019185	0,020306	-0,005948	0,034806
10,200	-0,006433	-0,000337	0,022171	-0,055914	-1,674360	0,021216	0,001401	-0,000295	0,022176
10,400	-0,006127	0,003073	0,012386	-0,042045	-1,670176	0,020245	-0,010016	0,003110	0,012349
10,600	-0,005317	0,004796	0,005267	-0,029441	-1,666374	0,017585	-0,015797	0,004824	0,005216
10,800	-0,004287	0,005335	0,000472	-0,018888	-1,663191	0,014189	-0,017624	0,005353	0,000426
11,000	-0,003233	0,005110	-0,002442	-0,010644	-1,660704	0,010704	-0,016904	0,005121	-0,002476
11,200	-0,002272	0,004452	-0,003934	-0,004625	-1,658888	0,007524	-0,014738	0,004458	-0,003954
11,400	-0,001465	0,003603	-0,004423	0,000554	-1,657660	0,004851	-0,011932	0,003605	-0,004433
11,600	-0,000832	0,002727	-0,004261	0,001936	-1,656909	0,002757	-0,009031	0,002727	-0,004266
11,800	-0,000369	0,001923	-0,003728	0,003225	-1,656520	0,001222	-0,006371	0,001923	-0,003730
12,000	-0,000055	0,001245	-0,003028	0,003665	-1,656387	0,000180	-0,004128	0,001246	-0,003028
12,200	0,000139	0,000714	-0,002299	0,003553	-1,656421	-0,000461	-0,002365	0,000714	-0,002299
12,400	0,000240	0,000322	-0,001628	0,003122	-1,656551	-0,000797	-0,001069	0,000323	-0,001628
12,600	0,000276	0,000056	-0,001060	0,002544	-1,656725	-0,000916	-0,000185	0,000056	-0,001060
12,800	0,000269	-0,000109	-0,000612	0,001938	-1,656908	-0,000893	0,000363	-0,000109	-0,000612
13,000	0,000238	-0,000197	-0,000282	0,001378	-1,657077	-0,000788	0,000652	-0,000197	-0,000282

1.1.1. Решение Т. Кармана–В. Кохрена

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$G$	$G'$	$P(0) - P$	$P'$
0,0	0,000000	0,000000	0,510233	1,000000	-0,615922	0,000000	0,510233
0,1	0,002390	0,046225	0,416261	0,938567	-0,611238	0,046231	0,416482
0,2	0,008951	0,083636	0,333801	0,878013	-0,598709	0,083716	0,335298
0,3	0,018860	0,113341	0,261990	0,819020	-0,580318	0,113696	0,266265
0,4	0,031397	0,136359	0,199936	0,762091	-0,557688	0,137345	0,208498
0,5	0,045940	0,153623	0,146744	0,707580	-0,532142	0,155734	0,160859
0,6	0,061958	0,165974	0,101537	0,655724	-0,504746	0,169813	0,122104
0,7	0,078996	0,174168	0,063467	0,606664	-0,476351	0,180409	0,090984
0,8	0,096675	0,178879	0,031730	0,560464	-0,447626	0,188225	0,066316
0,9	0,114676	0,180700	0,005572	0,517132	-0,419089	0,193851	0,047017
1,0	0,132736	0,180156	-0,015704	0,476627	-0,391136	0,197775	0,032123
1,1	0,150644	0,177701	-0,032741	0,438876	-0,364057	0,200394	0,020798
1,2	0,168226	0,173729	-0,046122	0,403779	-0,338061	0,202030	0,012329
1,3	0,185350	0,168581	-0,056375	0,371223	-0,313287	0,202935	0,006118
1,4	0,201913	0,162543	-0,063968	0,341078	-0,289823	0,203312	0,001671
1,5	0,217837	0,155862	-0,069322	0,313213	-0,267712	0,203315	-0,001417
1,6	0,233070	0,148741	-0,072805	0,287490	-0,246968	0,203063	-0,003471

Продолжение табл. 1.1.1

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$G$	$G'$	$P(0) - P$	$P'$
1,7	0,247577	0,141352	-0,074740	0,263774	-0,227575	0,202646	-0,004749
1,8	0,261337	0,133835	-0,075410	0,241931	-0,209503	0,202132	-0,005458
1,9	0,274343	0,126304	-0,075056	0,221831	-0,192706	0,201568	-0,005755

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$G$	$G'$	$P(0) - P$	$P'$
2,0	0,286600	0,118851	-0,073889	0,203349	-0,177130	0,200991	-0,005763
2,1	0,298119	0,111548	-0,072085	0,186367	-0,162712	0,200422	-0,005577
2,2	0,308916	0,104450	-0,069797	0,170770	-0,149389	0,199879	-0,005264
2,3	0,319017	0,097600	-0,067150	0,156455	-0,137096	0,199372	-0,004878
2,4	0,328446	0,091028	-0,064251	0,143319	-0,125765	0,198905	-0,004455
2,5	0,337232	0,084756	-0,061186	0,131272	-0,115333	0,198481	-0,004021
2,6	0,345407	0,078794	-0,058028	0,120225	-0,105737	0,198100	-0,003960
2,7	0,353002	0,073151	-0,054835	0,110098	-0,096915	0,197761	-0,003190
2,8	0,360048	0,067827	-0,051653	0,100818	-0,088812	0,197461	-0,002811
2,9	0,366578	0,062819	-0,048520	0,092314	-0,081372	0,197198	-0,002464
3,0	0,372622	0,058120	-0,045462	0,084523	-0,074544	0,196968	-0,002148
3,2	0,383377	0,049616	-0,039657	0,070850	-0,062537	0,196594	-0,001614
3,4	0,392543	0,042224	-0,034346	0,059381	-0,052445	0,196314	-0,001197
3,6	0,400334	0,035841	-0,029575	0,049764	-0,043970	0,196108	-0,000878
3,8	0,406939	0,030358	-0,025347	0,041702	-0,036858	0,195958	-0,000639

Окончание табл. 1.1.1

$\varepsilon$	$H$	$H'$	$H''$	$G$	$G'$	$P(0) - P$	$P'$
4,0	0,412530	0,025668	-0,021640	0,034945	-0,030892	0,195849	-0,000462
4,2	0,417253	0,021670	-0,018416	0,029281	-0,025889	0,195770	-0,000333
4,4	0,421238	0,018272	-0,015632	0,024535	-0,021695	0,195713	-0,000238
4,6	0,424596	0,015391	-0,013240	0,020558	-0,018180	0,195673	-0,000170
4,8	0,427423	0,012953	-0,011194	0,017225	-0,015233	0,195644	-0,000121
5,0	0,429802	0,010893	-0,009450	0,014433	-0,012764	0,195623	-0,000086
5,2	0,431802	0,009155	-0,007968	0,012093	-0,010695	0,195609	-0,000061
5,4	0,433483	0,007691	-0,006711	0,010132	-0,008961	0,195598	-0,000043
5,6	0,434894	0,006458	-0,005648	0,008490	-0,007509	0,195591	-0,000031
5,8	0,436079	0,005421	-0,004750	0,007113	-0,006291	0,195586	-0,000022
6,0	0,437073	0,004549	-0,003992	0,005960	-0,005271	0,195582	-0,000015
6,5	0,438914	0,002931	-0,002580	0,003830	-0,003387	0,195577	-0,000006
7,0	0,440100	0,001887	-0,001664	0,002461	-0,002177	0,195575	-0,000003
7,5	0,440863	0,001214	-0,001072	0,001581	-0,001399	0,195574	-0,000001
8,0	0,441355	0,000781	-0,000690	0,001016	-0,000899	0,195574	-0,000000
8,5	0,441669	0,000502	-0,000444	0,000653	-0,000578	0,195574	-0,000000
9,0	0,441872	0,000323	-0,000285	0,000420	-0,000371	0,195573	-0,000000
9,5	0,442002	0,000207	-0,000183	0,000270	-0,000239	0,195573	-0,000000
10,0	0,442086	0,000133	-0,000118	0,000173	-0,000153	0,195573	-0,000000