

**В.И. Коростелев, В.И. Кочетов, С.И. Лазарев**

**ПЕРЕСЕЧЕНИЕ  
ПОВЕРХНОСТЕЙ  
В АКСОНОМЕТРИИ**

**◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆**

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Тамбовский государственный технический университет"

**В.И. Коростелев, В.И. Кочетов, С.И. Лазарев**

**ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
В АКСОНОМЕТРИИ**

Методические разработки



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2005

УДК 744.425(07)  
ББК Ж11я73-5  
К68

Р е ц е н з е н т

Доктор технических наук, профессор  
*А.А. Арзамасцев*

К68 Пересечение поверхностей в аксонометрии: Метод. разработки / Авт.-сост.: В.И. Коростелев, В.И. Кочетов, С.И. Лазарев. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. 16 с.

Рассмотрены примеры построений в аксонометрических проекциях линий пересечения различных гранных и кривых поверхностей. Приведен способ построения в аксонометрии пересекающихся поверхностей в проекционной связи с ортогональным чертежом.

Предназначены для студентов всех специальностей при изучении ими дисциплин "Начертательная геометрия и инженерная графика" при выполнении графических работ.

УДК 744.425(07)  
ББК Ж11я73-5

- © Коростелев В.И., Кочетов В.И., Лазарев С.И., 2005
- © Тамбовский государственный технический университет (ТГТУ), 2005

Учебное издание

## ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ В АКСОНОМЕТРИИ

Методические разработки

Авторы-составители:

КОРОСТЕЛЕВ Владимир Иванович  
КОЧЕТОВ Виктор Иванович  
ЛАЗАРЕВ Сергей Иванович

Редактор З.Г. Чернова

Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано к печати 07.02.2005

Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Гарнитура Times New Roman. Объем: 0,93 усл. печ. л.; 0,75 уч.-изд. л.

Тираж 50 экз. С. 82<sup>М</sup>

Издательско-полиграфический центр  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

На чертежах изделий очень часто встречаются линии пересечения различных поверхностей. Эти линии могут быть ломаными, если пересекаются гранные поверхности, или кривыми (плоскими или пространственными) при пересечении кривых поверхностей. В некоторых частных случаях линия пересечения может быть даже прямой, а также состоять из нескольких отдельных частей.

Построение линии пересечения поверхностей на аксонометрическом чертеже не отличается от решения таких же позиционных задач в ортогональных проекциях, т.е.:

- вводят вспомогательную поверхность (посредник);
- определяют линию пересечения посредника с каждой из заданных поверхностей;
- находят точки пересечения полученных линий.

Повторяя указанную операцию, находят ряд точек искомой линии пересечения, которые и соединяют между собой.

Построение на аксонометрическом чертеже названных точек может быть осуществлено или по их координатам, взятым с ортогональных проекций, или способом вспомогательных секущих плоскостей непосредственно в аксонометрических проекциях. Последний способ оказывается, как правило, графически более точным и простым. Еще одним эффективным способом решения этой задачи является выполнение аксонометрического изображения пересекающихся поверхностей в проекционной связи с ортогональным чертежом.

Следует отметить, что перед тем как строить линию пересечения поверхностей, необходимо представить себе эту линию в пространстве.

### 1 ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Задачи на построение линии пересечения поверхностей в аксонометрических проекциях относятся к группе позиционных стереометрических задач.

Ознакомимся на характерных примерах с непосредственным построением в аксонометрических проекциях этих линий при пересечении между собой гранных поверхностей, кривых поверхностей, а также при взаимном пересечении этих поверхностей.

#### 1.1 Пересечение гранных поверхностей [1]

Построение линии пересечения гранных поверхностей требует нахождения отдельных точек, получающихся от пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и ребер второго с гранями первого. Построение искомых точек выполняют с помощью вспомогательных секущих плоскостей, через ребра или грани многогранников.

**Пример 1.** В прямоугольной диметрической проекции построить линию пересечения призмы с пирамидой (рис. 1).

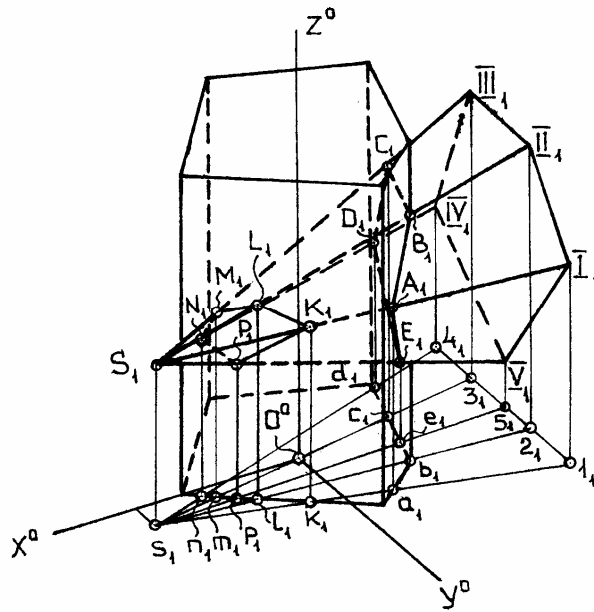


Рис. 1

Заданы призма, стоящая основанием на плоскости  $x_0y_0$ , и пирамида  $S, I, II, III, IV, V$ , врезающаяся с боку в эту призму. Вторичная проекция  $S_1 1_1 2_1 3_1 5_1$  пирамиды на плоскость аксонометрических проекций показывает, что плоскость основания пирамиды перпендикулярна плоскости  $x_0y_0$ .

Для построения точек пересечения ребер пирамиды с гранями призмы проводим через ребра пирамиды вспомогательные секущие плоскости, следы которых пересекут основание призмы в точках  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1$  и  $k_1, l_1, m_1, n_1, p_1$ . Прямые, проведенные через эти точки параллельно оси  $0^0z^0$  до пересечения с соответствующими ребрами пирамиды, дадут точки, принадлежащие линии пересечения.

Соединяя найденные точки прямыми линиями и проводя невидимые прямые штриховыми линиями, получим искомые линии пересечения заданных поверхностей  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, A_1$  и  $K_1, L_1, M_1, N_1, P_1, K_1$ .

Пример 2. Построить в прямоугольной изометрии линию пересечения двух прямых призм, одна из которых – четырехугольная, а другая – пятиугольная (рис. 2). Боковые грани и ребра пятиугольной призмы перпендикулярны плоскости  $x_0y_0$ .

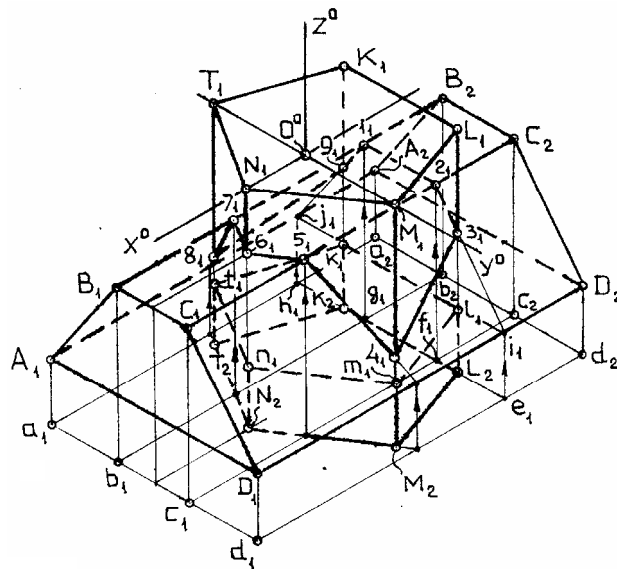


Рис. 2

Проводим секущую плоскость через грань  $K_1L_1L_2K_2$ . След этой плоскости пересечет вторичную проекцию  $a_1a_2d_2d_1$  четырехугольной призмы в точках  $e_1, f_1, g_1, h_1$ , что позволяет построить трапецию  $1_1 2_1 i_1 j_1$  и найти четыре искомые точки  $1_1, 2_2, 3_1$  и  $9_1$ , принадлежащие линии пересечения призм. Поступая аналогичным образом, проводим следующую вспомогательную плоскость через грань  $M_1N_1N_2M_2$  и получаем еще три искомые точки  $4_1, 5_1$  и  $6_1$ . Секущая плоскость, проходящая через грань  $N_1T_1T_2N_2$ , позволяет получить точки  $7_1$  и  $8_1$  искомой линии.

Соединяя найденные точки ломаной линией  $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1 7_1 8_1 9_1 1_1$ , получим одну из линий пересечения заданных призм. Другая линия пересечения  $k_1 l_1 m_1 t_1 k_1$  является результатом рассечения боковых граней пятиугольной призмы гранью  $A_1 A_2 D_2 D_1$  четырехугольной призмы. Эта линия повторяет контур основания пятиугольной призмы и поэтому не вызывает трудностей при построении.

## 1.2 Пересечение кривых поверхностей [2]

Для построения точек линии пересечения кривых поверхностей пользуются вспомогательными секущими плоскостями, кривыми поверхностями, а также прямоугольными образующими кривых поверхностей.

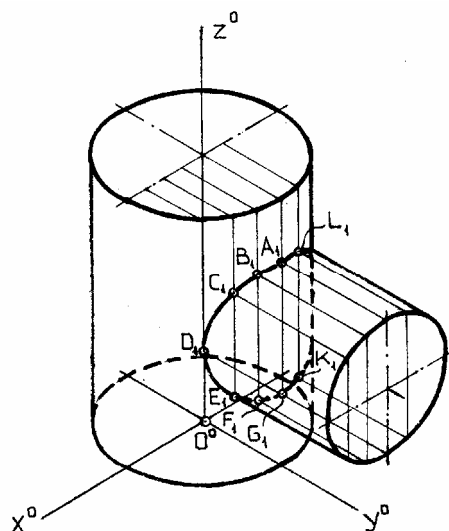


Рис. 3

**Пример 3.** Построить в прямоугольной изометрической проекции кривую пересечения двух цилиндров, оси которых пересекаются под прямым углом (рис. 3).

Проводим первую вспомогательную секущую плоскость через оси обоих цилиндров. Эта плоскость рассекает поверхности цилиндров по образующим, имеющим общие точки  $A_1$  и  $G_1$ . Проводя необходимое число плоскостей, параллельных принятой, найдем и другие точки, общие для обеих поверхностей. Соединив точки  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, K_1$  и  $L_1$  плавной кривой, получим линию пересечения заданных цилиндров в изометрии.

**Пример 4.** Построить линию пересечения конической и цилиндрической поверхностей (рис. 4).

Для определения точек искомой линии используем плоскости, принадлежащие пучку плоскостей, проходящих через прямую  $SA$ . Любая плоскость этого пучка рассекает поверхности конуса и цилиндра по образующей  $m_i$  и  $n_i$ , пересечение которых и дает точки  $1_i \dots 9_i$ , линии пересечения заданных поверхностей.

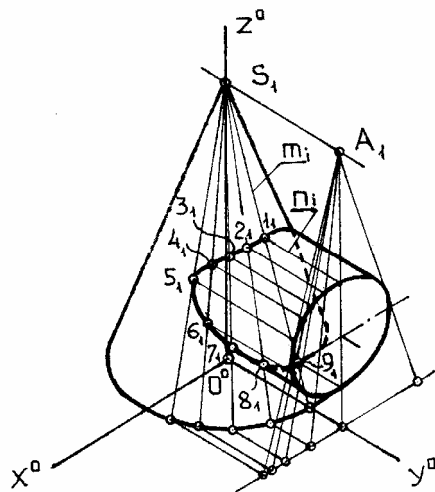


Рис. 4

### 1.3 Взаимное пересечение гранных и кривых поверхностей [3]

Пример 5. Построить в прямоугольной изометрии линию пересечения прямой треугольной призмы с конусом вращения (рис. 5).

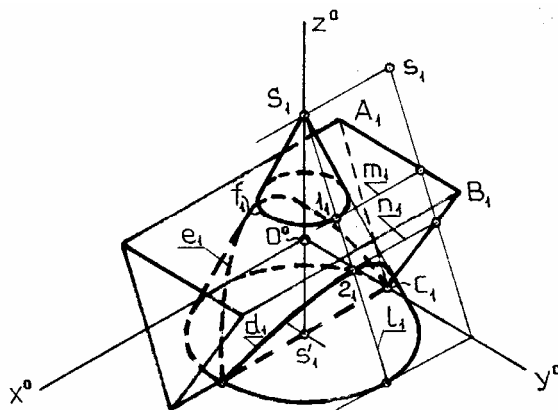


Рис. 5

Линию пересечения призмы с конусом можно определить с помощью вспомогательных секущих плоскостей, вращающихся вокруг прямой, проходящей через вершину  $S$  конуса параллельно ребрам призмы.

Покажем нахождение некоторых точек линии пересечения. Проведем одну из вспомогательных плоскостей так, чтобы она коснулась конуса по образующей  $L_1$  и разрекла призму по образующим  $m_1$  и  $n_1$ . Пересечение этих образующих дает точки  $1_1$  и  $2_1$ , общие для заданных поверхностей.

Другие точки линии пересечения определяются аналогичным образом введением других вращающихся плоскостей, рассекающих поверхности по образующим. В нашем примере пересечение призмы с конусом дает три плоские кривые  $d_1$ ,  $e_1$  и  $f_1$ .

Пример 6. Построить в прямоугольной диметрии линию пересечения конуса вращения и четырехугольной пирамиды (рис. 6).

Линию пересечения строим при помощи пучка вспомогательных секущих плоскостей, проводимых через вершины  $T$  и  $S$  пирамиды и конуса. Эти плоскости будут рассекают конус по образующим, а пирамиду – по прямым, лежащим на гранях пирамиды и проходящим через ее вершину.

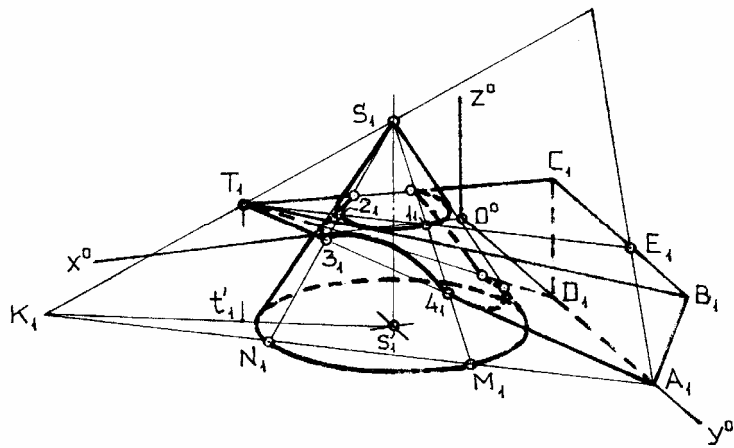


Рис. 6

Проследим нахождение промежуточных точек линии пересечения заданных поверхностей. Через прямую  $S_1T_1$  проведем секущую плоскость так, чтобы ее след  $A_1K_1$  пересекал основание конуса. В результате получим образующие  $S_1M_1$  и  $S_1N_1$ . Та же плоскость рассекает поверхность пирамиды по прямой  $E_1T_1$ . Пересечение этой прямой с образующими конуса позволяет получить точки  $1_1, 2_1, 3_1$  и  $4_1$ , принадлежащие искомой линии.

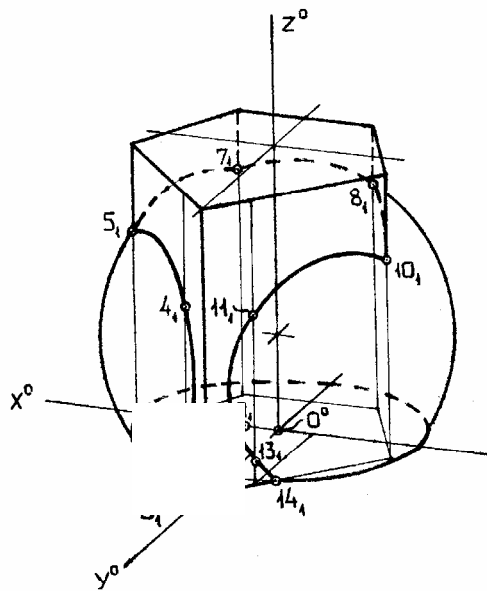
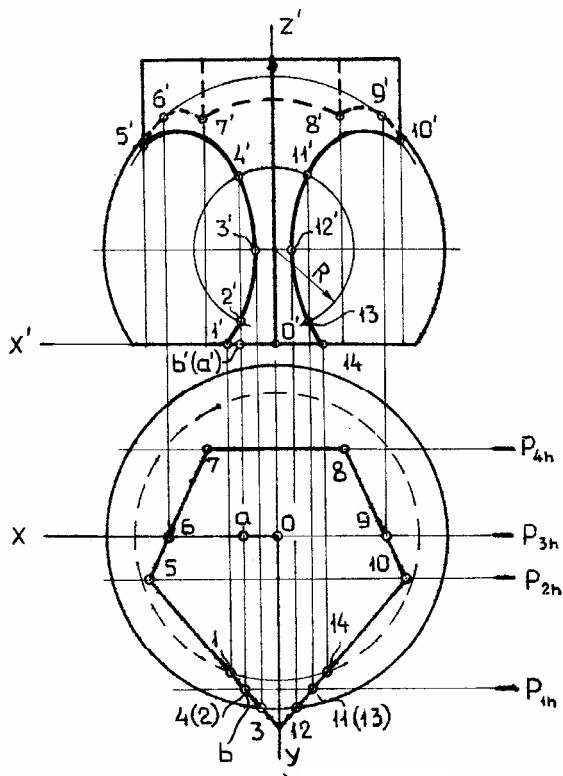
Используя другие секущие плоскости пучка, находим остальные точки линии пересечения, которые и соединяем затем плавными кривыми с учетом их видимости. В рассматриваемом примере линия пересечения заданных поверхностей представляет собой обвод, состоящий из плоской и пространственных кривых.

**Пример 7.** Построить в прямоугольной диметрии линию пересечения прямой пятиугольной призмы со сферой (рис. 7).

В данном случае построение аксонометрической проекции линии пересечения целесообразно осуществить с помощью ортогонального чертежа.

На ортогональном чертеже (рис. 7, а) горизонтальная проекция линии пересечения заданных поверхностей находится в пределах контура наложения их проекций и почти полностью совпадает со следами призматической поверхности.





А)

Б)

Рис. 7

Нахождение фронтальной проекции линии пересечения начинаем с определения проекций очевидных точек 1 и 14, не требующего графических построений. Для определения характерных и промежуточных точек линии выбирает вспомогательные секущие плоскости  $P$ , параллельные фронтальной плоскости проекций. Эти плоскости будут рассекать сферу по окружностям, а призму – по образующим. Искомые точки будут находиться на пересечении образующих с окружностями.

Для определения фронтальных проекций промежуточных точек 2, 4, 11 и 13 проведена вспомогательная плоскость  $P_1$ , рассекающая сферу по окружности радиуса  $R$ , а призму – по двум прямым – образующим. Пересечение прямых и окружности и дает фронтальные проекции искомых точек. Аналогичным способом находят проекции остальных точек. Соединяя полученные точки локальными кривыми строим фронтальную проекцию линии пересечения призмы со сферой.

По координатам точек линии пересечения, взятым с ортогонального чертежа, строим аксонометрическую проекцию линии пересечения заданных поверхностей (рис. 7, б).

В качестве примера опишем построение точек  $1_1$  и  $4_1$ . По оси  $0^0x^0$  откладываем абсциссу  $0^0a_1 = 0a$  по прямой, параллельной оси  $0^0y^0$  – аппликаты  $b_12_1 = b'2'$  и  $b_12_1 = b'2'$ . Другие точки линии пересечения строятся аналогично.

Заметим, что контуром сферы в прямоугольной диметрии будет окружность диаметра  $1,12d$ , где  $d$  – диаметр сферы.

## 2 ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В АКСОНОМЕТРИИ В ПРОЕКЦИОННОЙ СВЯЗИ С ОРТОГОНАЛЬНЫМ ЧЕРТЕЖОМ [3, 4]

Прямоугольную аксонометрию пересекающихся поверхностей можно построить непосредственно по их ортогональным проекциям, совместив основные плоскости проекций с аксонометрической плоскостью.

Пр и м е р 1. По заданным горизонтальной и фронтальной проекциям двух пересекающихся цилиндров вращения построить в прямоугольной изометрии линию их пересечения. Оси цилиндров взаимно перпендикулярны и не принадлежат одной плоскости (рис. 8).

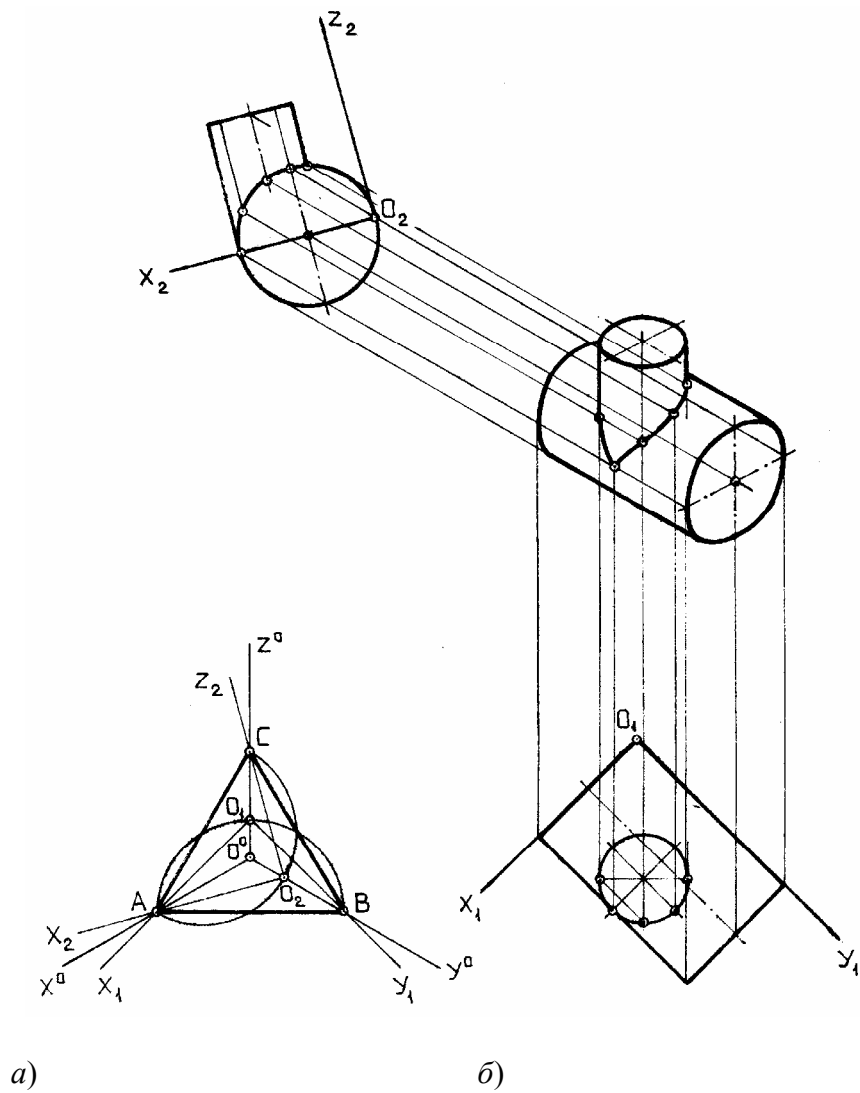


Рис. 8

Для заданных изометрий направлений аксонометрических осей  $x^0, y^0, z^0$  определим направления осей координат в совмещенном с плоскостью аксонометрических проекций положении основных плоскостей проекций  $x^0y^0$  и  $x^0z^0$ . Геометрические построения, которые необходимо осуществить для такого совмещения, можно проследить на рис. 8, а. Построим в изометрии треугольник следов  $ABC$ , стороны которого являются следами аксонометрической плоскости ( $F$ ) на координатных плоскостях. Для совмещения плоскости  $x^0y^0$  с плоскостью  $F$  необходимо повернуть ее вокруг горизонтального следа так, как показано на рисунке. В результате получим треугольник  $AO_1B_1$ , стороны которого  $O_1A$  и  $O_1B_1$  определяют натуральные оси координат  $x_1$  и  $y_1$ . Совмещенное положение плоскости  $x^0y^0$  с плоскостью  $F$  находится аналогично рассмотренному случаю с той лишь разницей, что вращение плоскости  $x^0y^0$  осуществляется вокруг следа  $AC$ . Это позволяет определить натуральные оси координат  $x_2$  и  $z_2$  с началом  $O_2$ . Горизонтальная и фронтальная проекции заданных цилиндров располагаются в соответствии с найденными направлениями координатных осей в совмещенном положении (рис. 8, б).

Точки поверхностей цилиндра вращения в аксонометрии и линия их пересечения определяются на пересечении соответствующих прямых, параллельных аксонометрическим осям  $y^0$  и  $z^0$ .

Отсюда вытекает простой способ построения прямоугольных аксонометрических проекций пересекающихся поверхностей по их ортогональным проекциям:

1) через ортогональные проекции одноименных точек поверхностей провести прямые, параллельные соответствующим аксонометрическим осям до их пересечения;

2) полученные таким образом аксонометрические проекции точек пересекающихся поверхностей следует соединить между собой линиями.

### **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

- 1 *Попов Н.А.* Курс начертательной геометрии / Н.А. Попов. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
- 2 *Фролов С.А.* Начертательная геометрия / С.А. Фролов. М.: Машиностроение, 1983.
- 3 *Бубенников А.В.* Начертательная геометрия: Задачи для упражнений / А.В. Бубенников. М.: Высш. шк., 1981.
- 4 *Виницкий И.Г.* Начертательная геометрия / И.Г. Виницкий. М.: Высш. шк., 1975.