МАТЕМАТИКА СЛУЧАЙНОГО

• ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ •

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА СЛУЧАЙНОГО

Методические рекомендации
для изучения теоретической части курса «Математика»
студентами гуманитарных специальностей

Тамбов
Издательство ТГТУ
2005

УДК 51
ББК В11я73
П909

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор
А.И. Булгаков

Авторы-составители:

Н.П. Пучков, *Л.И. Ткач*

Пучков, Н.П.
П909 Математика случайного : метод. рекомендации / Авт.-сост. : Н.П. Пучков, Л.И. Ткач. Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. 44 с.

Рассмотрены два раздела математики: «Математика случайного» и «Элементы математической статистики». Приводятся примеры математических задач с производственным содержанием.

Предназначены для студентов специальностей «Связи с общественностью» и «Юриспруденция».

УДК 51
ББК В11я73

Учебное издание

МАТЕМАТИКА
СЛУЧАЙНОГО

Методические рекомендации

Авторы-составители:
ПУЧКОВ Николай Петрович,
ТКАЧ Леонид Иванович

Редактор Т.М. Глинкина
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынкова

Подписано к печати 24.06.2005.
Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times. Бумага газетная. Печать офсетная.
Объем: 2,56 усл. печ. л.; 2,50 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. С. 462

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, ул. Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

МАТЕМАТИКА ВОСПИТЫВАЕТ КУЛЬТУРУ МЫСЛИ И ОНА НУЖНА ВСЕМ. ДАЙТЕ КАКОЕ-НИБУДЬ АБСОЛЮТНО НОВОЕ ЗАДАНИЕ МАТЕМАТИКУ И НЕМАТЕМАТИКУ. ПОЧТИ ВСЕГДА ПЕРВЫЙ СДЕЛАЕТ ЭТО ЛУЧШЕ.

Г.Х. Харди[1]

Когда нематематик спрашивает у математика: «Что такое математика?» или «Для чего нужно (например, гуманитарию) изучать математику?», то математик оказывается в сложном положении. Как правило, спрашивающий ждет ответа что-то вроде: «Это молоток, который нужен для того, чтобы забивать гвозди». Но такого прямого ответа, причем словами, понятными для нематематика, математик дать не может. Математик может с полным основанием сказать, что в области человеческих познаний есть две большие вершины, среди многих других естественно-научная и гуманитарная. В процессе своего интеллектуального и профессионального развития человек может выбрать путь ближе к той или другой вершине − кому-то нравится Шопенгауэр[2], а кому-то − Максвелл[3]. Несмотря на некоторую отдаленность этих вершин, они связаны мостиком под названием «*Математика*». Почему? Потому что, с одной стороны, вся естественно-научная область знаний излагается именно на языке под названием «Математика», т.е. математика − это основа естественно-научной вершины.

С другой стороны, математика − это стремление к эстетическому совершенству, что всегда было чертой гуманитарного склада ума. Творчество математика в такой же степени есть создание *прекрасного*, как творчество живописца или поэта − совокупность математических идей, подобно совокупности красок на красивом пейзаже или слов в стихотворении, тоже может обладать и, более того, обладает внутренней гармонией. «Красота есть первый пробный камень для математической идеи, в мире нет уродливой математики» (это высказывание известного английского математика Г.Х. Харди). В этом смысле, математика − гуманитарное знание, и образованным человеком будет только тот, кто побывал на обеих этих вершинах, переходя с одной вершины на другую, может быть, по этому мостику!

Кроме значения математики как связующего мостика между различными вершинами человеческих познаний, нельзя не отметить еще и *практическую пользу* для изучающего математику. Изучая математику, человек получает образец точного рационалистического мышления[4], учится аргументировать свою позицию и критически относиться к чужим словам (ведь в математике верно только то, что доказано). Изучение математики воспитывает интеллектуальную честность: если что-то утверждаешь, то будь добр доказать это. Разве не полезно обладать такими качествами юристу или представителю любой гуманитарной профессии, или любому человеку?

Скорее всего, такой ответ не удовлетворит спрашивающего. Но по-другому, наверно, и быть не может! Попробуйте объяснить мало читающему человеку, *что есть литература и для чего она нужна*? Лучший способ пояснить математику свою позицию в этом вопросе − это предоставить возможность нематематику познакомиться (а еще лучше изучить и научиться применять) с одним из плодотворных применений математики.

В качестве такого применения математики, по мнению разработчиков Государственных образовательных стандартов для студентов гуманитарных специальностей, можно считать *основы теории вероятностей и математической статистики*. При изложении этих разделов авторы стремились уйти от традиционного «формально-математического» изложения, разнообразив его практически и профессионально значимыми примерами и задачами, что должно сделать данные методические рекомендации для студентов, обучающихся по специальностям «Связи с общественностью» и «Юриспруденция» (а также других гуманитарных специальностей), действительно полезными.

1 МАТЕМАТИКА И ПОЗНАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РЕАЛЬНОГО МИРА

[1] Харди Г.Х. (1877 – 1947) – английский математик. Уже в возрасте тридцати трех лет был избран членом Королевского общества. Харди Г.Х. был очень разносторонней личностью. Следует отметить, что он опубликовал ряд работ по генетике и обладал энциклопедическими познаниями по крикету – английской национальной игре.

[2] Шопенгауэр А. (1788 – 1860) − немецкий философ.

[3] Максвелл Д.К. (1831 – 1879) − английский физик.

[4] Можно высказать очень емкую фразу о соответствии математики и мышления: Математика – это *точная часть* абстрактного мышления.

МЕЖДУ ДУХОМ И МАТЕРИЕЙ ПОСРЕДНИЧАЕТ МАТЕМАТИКА.
Х.Д. Штейнгаус[5]

Все, кто пожелал изучать математику, должны ясно представлять ее место при исследовании явлений реального мира. На наш взгляд, это можно представить схематически следующим образом:

Рис. 1

Таким образом, применение математики «начинается» с построения математической модели[6] рассматриваемого явления, а «заканчивается» − выводами в рамках построенной математической модели, с последующим сравнением с реальными фактами и практическим использованием этих выводов.

При рассмотрении схемы необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства:

1 Математика имеет дело не с самими реальными явлениями, а лишь с их математическими моделями.

2 Связь математики с явлениями окружающего нас мира осуществляется в двух направлениях. Сначала, абстрагируясь от многих второстепенных фактов, мы строим математическую модель, отражающую основные закономерности изучаемого явления. В этой модели используются математические понятия, формулируются аксиомы, которым удовлетворяют эти понятия. Далее, в рамках построенной математической модели, из аксиом выводится ряд следствий, сформулированных в виде теорем и лемм. И, наконец, полученные в модели новые математические факты интерпретируются в первоначальных понятиях реального мира. Это позволяет проверить пригодность математической модели и использовать в практике математические расчеты, произведенные в модели.

3 Практические выводы будут достаточно надежными, если построенная модель (которая может быть не в единственном числе) отражает существенные стороны изучаемого явления.

[5] Штейнгаус Х.Д. (1877 – 1972) – польский математик. Помимо исследований в различных областях современной математики, Х.Д. Штейнгаус обладал ярким талантом организатора и популяризатора математики. Большая часть его трудов посвящена вопросам применения математики к биологии, медицине, электротехнике, праву, статистике.

[6] Математическая модель – приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Математические модели могут быть очень разные и используются очень давно. Когда-то человеку понадобилось сравнить разные количества каких-то предметов – появилось число, наверное, самая первая математическая модель. Эту математическую модель и по сей день люди используют часто, порой даже не задумываясь об этом – они измеряют температуру, следят за временем, подсчитывают сдачу после очередной покупки… Еще одним примером математической модели является понятие функции – как выражение ситуации, в которой одна величина зависит от другой.

Математика может применяться в самых неожиданных ситуациях, например, в азартных играх. Принято считать, что примерно с середины XVII в. известные французские математики того времени: Паскаль (1623 – 1695), Ферма (1601 – 1665), попытались количественно описать ситуации, возникающие при игре в кости и, тем самым, положили начало *теории вероятностей*[7] – математической модели для изучения закономерностей массовых случайных событий. Попытаемся и мы разобраться в том, как можно применять математику для изучения столь необычного и непостоянного – как случайные события.

2 МАТЕМАТИКА СЛУЧАЙНОГО

Можно сказать, что мир – есть закономерное движение материи и времени. Но все же это закономерное движение не происходит без значительного или слабого вмешательства случайности (монета падает той или иной стороной, рождается мальчик или девочка и т.д.), возникающей под воздействием непостоянных причинных связей, корректирующей это закономерное движение (представьте, что было бы с человеческой историей, если бы не родился Наполеон).

Более того, мы на многочисленных примерах убеждаемся, что случай – повсюду: в явлениях живой и неживой природы, в исследовательской, профессиональной, игровой и обыденной деятельности человека. Случай − властелин успехов, неудач, событий! Можно ли среди этого хаоса случайности увидеть что-то постоянное, объективно существующее? Открыть закономерности в хаосе случайности, найти гармонию в стихии неопределенности и использовать случайность во благо − вот смысл изучения случайных событий. Итак, приступим к построению математической модели для изучения закономерностей среди случайных событий − *теории вероятностей*.

Существует достаточно много классических учебников по теории вероятностей (см., например, [1 – 6]), где имеет место строгое изложение теории вероятностей. В данном пособии мы ставим своей целью изложить основы теории вероятностей в виде, наиболее приемлемом для студентов-гуманитариев.

3 ВИДЫ СОБЫТИЙ. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ ВЕРОЯТНОСТИ

Человека окружает как мир реальных предметов, так и мир происходящих событий (явлений). Попытаемся сначала классифицировать события.

Происходящие события всегда связаны с некоторыми условиями, при выполнении которых возможна одна из трех ситуаций:

1 Событие обязательно наступит.
2 Событие обязательно не наступит.
3 Заранее неизвестно, наступит событие или не наступит.

Выполнение совокупности условий (при участии или без участия человека), при которых для события осуществляется один из случаев 1, 2 или 3, естественно выражать словами «произведено испытание».

П р и м е р . Рассмотрим испытание – над ровной площадкой с твердым покрытием подброшена монета. Обозначим события:

A – монета упала на площадку «орлом» кверху;

B – монета упала на ребро;

C – монета упала на плоскую сторону.

При заданном условии (монета плоская и круглая, площадка твердая) событие *C* обязательно наступит и его считают достоверным, событие *B* просто невозможно и, наконец, событие *A* называют случай-

[7] Создание теории вероятностей в «современном» виде следует отнести к 1933 г., когда А.Н. Колмогоров (1903 – 1987) (кстати, родившийся в г. Тамбов) опубликовал в издательстве Шпрингера на немецком языке монографию «Основные понятия теории вероятностей», в которой дал аксиоматическое построение этой теории.

ным − оно может произойти, а может и не произойти. В соответствии с этим события подразделяют на достоверные, невозможные, случайные.

Если с достоверными и невозможными событиями все более или менее просто, то со случайными событиями все неопределенно. Из повседневного опыта известно, что одни случайные события наступают довольно часто, другие менее часто или совсем редко. Слова «часто», «редко» как характеристики наступления событий очень неопределенны. Например, где проходит граница между «часто» и «редко»? Чтобы придать подобным сравнениям точный смысл, необходимо с каждым случайным событием связать число, выражающее степень возможности данного события. Это можно сделать экспериментально.

Экспериментальной характеристикой наступления случайного события (например, A) является *частота* $h_n(A)$ (некоторые авторы употребляют термин *относительная частота* $h_n(A)$ события A), равная отношению числа испытаний n_A, в которых событие A наступило, к общему числу испытаний n:

$$h_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Экспериментально установлено[8], что для случайных событий частота при увеличении n становится почти постоянной. Это свойство (оно называется *статистической устойчивостью частот* случайного события) и позволяет с каждым событием A связать некоторое число $P(A)$, с которым сближается частота, и считать это число *степенью возможности события A*, или *вероятностью события A*.

Определение (*статистическое определение вероятности события*).

Вероятность события A – это число, с которым сближается частота $h_n(A)$ при увеличении числа испытаний n, в которых может наступить событие A.

Такое определение вероятности события A, как меры наступления события A, тоже не совсем приемлемо. Например, сколько надо провести испытаний n, чтобы $h_n(A)$ сблизилось с $P(A)$? И вообще, что понимать под словами «$h_n(A)$ сближается с $P(A)$»?

Есть ответы на эти вопросы, но мы пойдем другим путем, типичным для многих разделов математики, – *аксиоматическим методом* для построения математической модели. Он состоит в том, что с самого начала в математической модели фиксируются *аксиомы* – первичные, не подлежащие определению понятия, отражающие самые существенные стороны рассматриваемого явления. После этого из аксиом логическим путем выводятся предполагаемые свойства изучаемого явления. Это и есть тот момент, когда математика подключается к изучению реального мира.

Первоначально определим основу (или пространство) для построения теории вероятностей, включив туда наиболее значимые стороны понятия испытания.

4 ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение. *Вероятностным пространством* (или математической моделью испытания) называется конечное множество $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$[9], каждому элементу ω_k, $k = 1, \dots, n$ которого поставлено в соответствие неотрицательное число p_k таким образом, что сумма всех этих чисел равна 1.

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

[8] Например, в демографии – науке, изучающей динамику населения – известно, что относительная частота рождения мальчиков близка к числу 0,516 и тем самым немного выше, чем относительная частота рождения девочек. Причем, этот факт подтверждается статистикой (т.е. экспериментально) независимо от условий в различные периоды времени [4].

[9] Ω, ω – буква греческого алфавита, читается «омега».

Конечное множество Ω состоит из элементов $\omega_1, ..., \omega_n$, которые являются «обозначениями» возможных результатов (исходов) испытания. Элементы $\omega_1, ..., \omega_n$ множества Ω называют элементарными исходами (элементарными событиями) испытания. При этом выполняется условие, что в результате испытания обязательно появится один и только один из элементарных исходов.

Число p_k называется вероятностью элементарного исхода ω_k, $k = 1 ,\ldots, n$. Соответствие между ω_k и p_k определяется аксиоматически[10], но с сохранением смысловой нагрузки, определяемой конкретным испытанием, для которого строится вероятностное пространство. Например:

а) по каким-либо соображениям симметрии мы считаем все элементарные исходы равновозможными (и это становится аксиомой), т.е. $p_1 = p_2 = ... = p_n$, а так как $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$, то $p_k = \dfrac{1}{n},\ k = 1, 2, ..., n.$

б) вероятности p_k элементарных исходов ω_k, $k = 1,\ldots, n$ определяются предварительным проведением серии опытов, в этом случае за p_k принимают относительную частоту события ω_k (и это тоже становится аксиомой в соответствующем вероятностном пространстве).

Подход а) называется классической схемой теории вероятностей, а подход б) – статистическим подходом. Рассмотрим примеры построения вероятностных пространств.

Пример 1. При изучении особенностей образования слов в русском языке возникают вопросы, связанные с употреблением букв в русских словах. Например, какая буква чаще всего используется в словах русского языка? Как часто в русских словах встречаются гласные буквы по сравнению с согласными?

Рассмотрение этих вопросов надо, по-видимому, начинать с того, чтобы сопоставить каждой букве число, характеризующее встречаемость этой буквы в словах (т.е. мы начинаем строить *вероятностное пространство* на основании статистического подхода, которое было бы моделью для рассматриваемой ситуации).

Если считать все буквы равноправными в рассматриваемых вопросах, то все эти числа должны быть равны $\dfrac{1}{33}$ (так как всего 33 буквы, нас интересует только 1). Но вряд ли бы мы достигли объективного отражения действительности, так как слова, составляющие осмысленный текст, нельзя считать чисто случайной последовательностью букв. Более точно отражали бы действительность числа, полученные из предварительных подсчетов относительных частот появлений букв в больших кусках литературного текста. Таким образом мы получим следующую таблицу[11] (не различая букв е, е и ь, ъ):

Буква	о	е, е	а	и	т	н	с	р
Относительная частота	0,110	0,087	0,075	0,075	0,065	0,065	0,055	0,048
Буква	в	л	к	м	д	п	у	я
Относительная частота	0,046	0,042	0,034	0,031	0,030	0,028	0,025	0,022
Буква	ы	з	ь, ъ	б	г	ч	й	х
Относительная частота	0,019	0,018	0,017	0,017	0,016	0,015	0,012	0,011
Буква	ж	ю	ш	ц	щ	э	ф	
Относительная частота	0,009	0,007	0,007	0,005	0,004	0,003	0,002	

Подведем итог. Нами построено вероятностное пространство, в котором элементам ω_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, 31$ (или буквам русского алфавита) из множества Ω поставлены в соответствие вероятности p_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, 31$ (или относительные частоты появлений данных букв в словах), причем при сопоставлении элементарным исходам ω_k вероятностей p_k применен статистический подход.

[10] Слово «аксиоматически», как понятно из предыдущего, математики употребляют тогда, когда объяснение выходит за рамки математики. Например, и без математики смысл слова «вероятность» все люди понимают вообще-то одинаково и очень давно. Еще первобытный вождь понимал, что у десятка охотников вероятность поразить копьем зубра гораздо больше, чем у одного. Поэтому и охотились тогда коллективно. Математики же пытаются приспособить интуитивное понимание для применения математических способов.

[11] См. [6], с. 56.

П р и м е р 2. Рассмотрим еще один пример построения вероятностного пространства в ситуации, ставшей классической для теории вероятностей. В нашем распоряжении есть две разные (отличающиеся, например, размером) игральные кости. Эти две игральные кости подбрасываются и фиксируются количества очков на выпавших верхних гранях. Построим вероятностное пространство для описания этой ситуации.

Так как в результате каждого подбрасывания костей мы фиксируем два числа, то будем считать, что элементарный исход – это два числа, из которых первое число – это число выпавших очков на меньшей по размеру кости, второе число – число выпавших очков на большей по размеру кости. Например, (1, 2) или (6, 6) (обратим внимание, что так как кости разные, то элементарные исходы (1, 2) и (2, 1), конечно же, различны). Всего элементарных исходов будет $6^2 = 36$ (вспомните правило произведения!). Далее, кости между собой никак не связаны, поэтому здравый смысл подсказывает, что все элементарные исходы равноправны, а следовательно, равновозможны. Таким образом, применима классическая схема теории вероятностей. Вследствие этого, $p_k = \frac{1}{36}$, $k = 1, 2, \ldots, 36$. Итак, мы построили вероятностное пространство по классической схеме теории вероятностей, в котором Ω – множество, состоящее из 36 элементарных
исходов; элементарные исходы ω_k, $k = 1, 2, \ldots, 36$, – это упорядоченные наборы двух чисел (от 1 до 6); вероятности элементарных исходов $p_k = \frac{1}{36}$, $k = 1, 2, \ldots, 36$.

Попробуйте ответить самостоятельно на такой вопрос: что нужно изменить в этом вероятностном пространстве, если кости будут не различимы?

Как, наверно, уже заметил читатель, при построении вероятностного пространства используется теория множеств[12]. Все дальнейшее развитие теории вероятностей тоже неотделимо от теории множеств. Таким образом, вся теория вероятностей оказывается просто «надстройкой» над теорией множеств. Особенно четко выделяется влияние теории множеств при определении таких понятий как «событие», «вероятность события», «операции над событиями».

Итак, продолжим дальнейшее построение теории вероятностей.

5 Вероятность события

Пусть Ω – множество всех элементарных исходов данного испытания. С каждым событием A связывается некоторое подмножество Ω_A множеством Ω. Поэтому можно дать следующие определения.

Определение 1. *Событием A* при данном испытании называется любое подмножество Ω_A множества Ω всех элементарных исходов.

Определение 2. *Благоприятствующими событию A исходами* (или просто благоприятными исходами) называется те элементарные исходы, в которых событие A наступит.

Определение 3. Пусть $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$[13] – благоприятные исходы для события A, вероятности которых равны числам $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$. *Вероятностью P(A) события A* называется сумма вероятностей $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ элементарных исходов $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$, благоприятствующих этому событию: $P(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k}$.

Если рассматривать классическую схему теории вероятностей, т.е. $p_k = \frac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, то $P(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} = \frac{1}{n}k$. Определение вероятности события в этом случае можно переформулировать.

Определение 4 (*классическое определение вероятности события*). *Вероятностью события A* называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех элементарных исходов данного испытания.

Рассмотрим примеры подсчета вероятности события на основе ее классического определения.

П р и м е р 1. Руководство рыбхоза, желая скрыть прибыль, сознательно занижает количество рыбы в своих искусственных водоемах. Как налоговому инспектору оценить приближенно количество рыбы, например в одном из водоемов?

---

[12] С основными положениями теории множеств можно познакомиться, например, в [7].

[13] Двойные индексы использованы для того, чтобы показать что благоприятными исходами для события A являются *какие-то* элементарные исходы из Ω и всего их k ($k \leq n$) штук.

Пусть в водоеме N рыб. Забрасываем сеть и, допустим, находим в ней n рыб. Каждую из них метим и выпускаем обратно. Через несколько дней в том же месте забрасываем ту же самую сеть. Допустим, что находим в ней m рыб, среди которых k меченых. Пусть событие A – «пойманная рыба мечена». Тогда относительная частота события A будет равна: $h_m(A) = \frac{k}{m}$.

Но если в водоеме N рыб и мы выпустим n меченых, то согласно классическому определению вероятности событие A имеет вероятность $P(A) = \frac{n}{N}$. Так как при больших m верно приближенное равенство $h_m(A) \approx P(A)$, то количество рыб в этом водоеме приближенно равно $N \approx \frac{nm}{k}$.

Заметим, что данный способ можно применить и в других ситуациях.

Пример 2. В популярной телевизионной игре «Что? Где? Когда?» стол рулетки разделен на 12 одинаковых секторов, на каждом из которых лежит конверт с вопросом. Для ответа выбирается конверт из того сектора, на который укажет стрелка рулетки. Далее по правилам игры, после того как конверт выбран, его сектор не заполняется новым, а остается пустым. Если стрелка в новом раунде укажет на пустой сектор, то для ответа выбирается конверт из ближайшего сектора по часовой стрелке. По мнению организаторов игры, выбор вопросов равновероятен, так как в любой момент игры вероятность выбора какого-то конверта с вопросом одинакова. Насколько обоснованно такое мнение?

Построим вероятностную модель этой игры. Рассмотрим первый раунд (первое испытание). Элементарные исходы: ω_i – «стрелка показывает на i-й сектор», $i = 1, \ldots, 12$, все ω_i равновозможны, согласно классической схеме теории вероятности $p_i = \frac{1}{12}$, $i = 1, \ldots, 12$. В начале игры вероятность выбора любого конверта одна и та же и равна вероятности элементарного исхода, т.е. $\frac{1}{12}$.

Рассмотрим второй раунд. Допустим, что в первом раунде выбор пал на 1-й сектор (рис. 2). Тогда перед началом 2-го раунда (второе испытание) имеем элементарные исходы ω_i', $i = 2, \ldots, 12$. Сектор № 2 будет выбран, если стрелка остановится либо в секторе № 1, либо в секторе № 2, поэтому $p_2' = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, в то же время вероятность выбора любого из секторов с номерами от 3 до 12 равна $p_i' = \frac{1}{12}$, $i = 3, \ldots, 12$. Таким образом, уже во втором раунде будет нарушена равновероятность выбора вопросов и, следовательно, мнение организаторов игры ошибочно.

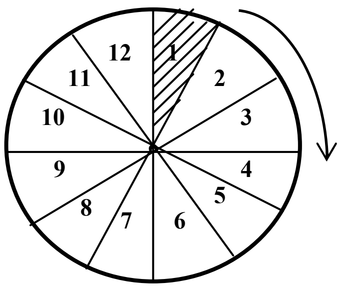

Рис. 2

Пример 3. Во время проверки паспортного режима в микрорайоне города N был обнаружен преступник. Скрываясь от погони, он бежал по улицам города, причем, убегая от милицейского наряда, он продвигался только вперед и поворачивал только направо. Через некоторое время стало известно, что преступник пробежал через весь микрорайон, достиг шоссе, на каком-то перекрестке сел в попутную машину и уехал из города N.

Чтобы вести расследование, необходимо уточнить наиболее вероятное место посадки преступника в автомобиль. Это может быть один из перекрестков C_1, C_2, C_3 или C_4 (рис. 3). Найдем вероятность посадки преступника в автомобиль на каждом из этих перекрестков.

В микрорайоне имеются 18 кварталов: шесть кварталов по горизонтали и три – по вертикали. На схеме микрорайона (рис. 3), имеющейся в УВД города N, буквой X обозначено место, где был обнаружен преступник. Предположим, что преступник с одинаковой вероятностью мог бежать либо вперед, либо направо и обозначим события A_i – «преступник сел в машину, ехавшую по шоссе, на перекрестке

C_i», $i = 1, 2, 3, 4$, то $P(A_i) = \frac{m_i}{n}$, где m_i – число всевозможных маршрутов от места X до перекрестка C_i; n – число маршрутов, проходящих от места X до шоссе (т.е. от X до C_1, или C_2, или C_3, или C_4).

Подсчитаем число маршрутов от X до C_4. Какой бы путь от X до C_4 ни избрал преступник, в любом случае ему придется пройти 9 перекрестков. На каждом перекрестке он решает, бежать ли ему прямо или повернуть направо. Те перекрестки, от которых он бежал прямо, закодируем цифрой 1, а те, от которых он бежал направо, цифрой 0. Тогда любой из маршрутов будет закодирован последовательностью из 6 единиц и 3 нулей. Например, показанному маршруту (рис. 3) соответствует последовательность 101101011.

Тогда число маршрутов от A до C_4 равно числу перестановок с повторениями[14] $P(3, 6)$:

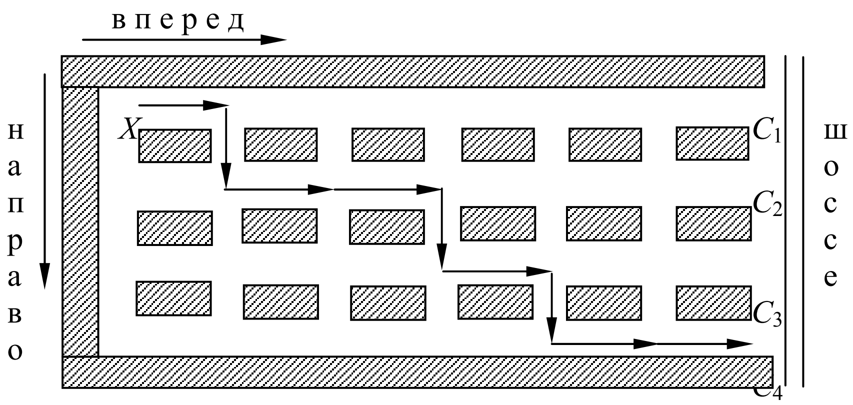

Рис. 3

$$m_4 = P(3, 6) = \frac{(3+6)!}{3!\,6!} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84 .$$

Аналогично подсчитаем число m_3 маршрутов от X до C_3:

$$m_3 = P(2, 6) = \frac{(2+6)!}{2!\,6!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28 ,$$

и число m_2 маршрутов от X до C_2:

$$m_2 = P(1, 6) = \frac{(1+6)!}{1!\,6!} = \frac{7!}{6!} = 7 .$$

Очевидно, что от X до C_1 ровно один маршрут. Он соответствует последовательности 111111.

Всего маршрутов от X до шоссе:

$$n = 1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1 + 7 + 28 + 84 = 120 .$$

Следовательно, искомые вероятности равны :

$$P(A_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{84}{124} = \frac{21}{31};$$

$$P(A_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{28}{120} = \frac{7}{30};$$

[14] См., например, [7].

$$P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{7}{120};$$

$$P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{120}.$$

Таким образом, наиболее вероятное место посадки преступника в автомобиль это перекресток C_4 и целесообразнее искать свидетелей именно на перекрестке C_4.

6 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

При определении вероятностного пространства рассматривались испытания, имеющие конечное число элементарных исходов. Однако такие испытания не охватывают всех возможных типов испытаний. Во многих случаях возможные элементарные исходы образуют бесконечную, а иногда и непрерывную совокупность. Рассмотрим пример такой ситуации.

Пример 1. На телефон дежурного милиционера в течение часа могут поступить два вызова: один из банка, другой из казино. Если разность между моментами поступления звонков не более 1 минуты, то второй звонок теряется. Найти вероятность потери второго вызова.

Попытаемся ответить на поставленный вопрос (рис. 4). Обозначим x (ч) – момент поступления вызова из банка; y (ч) – момент вызова из казино. Точку (x, y) на координатной плоскости будем считать элементарным исходом в данной ситуации. Таким образом, $\Omega = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, т.е. все возможные элементарные исходы Ω лежат в квадрате $ODBC$ со стороной 1 час. Обозначим событие A – «второй звонок потерян». Тогда элементарный исход (x, y) будет благоприятным для события A, если $|x-y| \le \frac{1}{60}$ (или $x - \frac{1}{60} \le y \le x + \frac{1}{60}$), т.е. $A = \left\{(x, y)\colon |x-y| \le 1/60\right\}$. Такие точки (x, y) лежат в пределах заштрихованной области $OKLBMN$. Площадь этой области можно определить как разность между площадью квадрата $ODBC$ (равной 1) и удвоенной площадью равнобедренного прямоугольного треугольника NMC со стороной $1 - \frac{1}{60}$:

$$1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{60}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{30} + \frac{1}{3600}\right) = \frac{119}{3600} \approx 0{,}03.$$

Все элементарные исходы равновозможны, и их число бесконечно. Поэтому за вероятность события A естественно взять отношение площади заштрихованной области к площади квадрата (равной 1). Получим

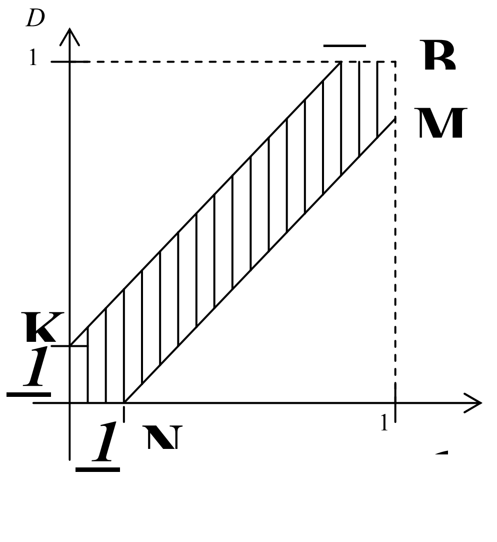

Рис. 4

$$P(A) \approx \frac{0{,}03}{1} = 0{,}03\,.$$

Для такого выбора определения вероятности события в данной ситуации можно привести следующие аргументы. Допустим, что квадрат *ODBC* разбит сеткой линий на составные части, каждая из которых имеет площадь S_0. Причем заштрихованная область покрывается этой сеткой без зазоров (приведите пример такого разбиения квадрата!). Тогда в заштрихованную область *OKLBMN* попадут $\frac{S_{шт}}{S_0}$ штук составных частей, а в квадрате *ODBC* всего таких составных частей будет $\frac{S}{S_0}$, где $S_{шт}$ – площадь заштрихованной области OKLBMN, S – площадь квадрата ODBC. Каждый элементарный исход (x, y) может попасть в любую из составных частей, причем все составные части естественно считать равноправными. Тогда по классическому определению вероятности, можно считать, что событие A имеет вероятность, равную отношению числа составных частей внутри заштрихованной области *OKLBMN* ко всему числу составных частей в квадрате *ODBC* (на самом деле мы перешли к новому вероятностному пространству, опишите его). Итак, $P(A) = \frac{S_{шт}/S_0}{S/S_0} = \frac{S_{шт}}{S}$. Таким образом, в качестве $P(A)$ мы получили отношение площадей, что и приняли за вероятность события A в этом примере.

Данный подход для определения $P(A)$ напоминает классическое определение вероятности, как отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов. Однако в данной ситуации число элементарных исходов (как всех, так и благоприятных) бесконечно. Поэтому здесь надо говорить не об отношении чисел соответствующих исходов, а об отношении площадей.

В предыдущем примере вероятность события связывалась с понятием «площадь». С таким же успехом можно связывать вероятность с «объемом», «длиной» или «величиной угла». Все эти случаи можно объединить воедино, использовав слово «мера»[15], – в результате получим геометрическое определение вероятности.

Определение (*геометрическое определение вероятности*). *Вероятность случайного события* есть отношение меры области, содержащей элементарные исходы, благоприятные событию, к мере всей области.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда число равновозможных элементарных исходов бесконечно.

Обратим внимание на то, что в одной и той же ситуации могут быть выбраны разные представления о «мере». Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 2. Курсант школы милиции на занятиях по огневой подготовке ведет стрельбу по плоской мишени, представляющей круг радиусом 20 см. Выстрел признается успешным, если курсант попадет в «яблочко» – круг радиусом 5 см в центре мишени. Какова вероятность того, что выстрел будет успешным?

Пусть событие A – «выстрел успешный». Так как в примере рассматриваются только круги (мишень и «яблочко»), то в качестве меры области можно взять радиус круга (т.е. длину). Тогда $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ (объясните почему?). Если же в качестве меры области рассматривать площадь, то $P(A) = \frac{\pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 20^2} = \frac{1}{16}$. Ответы получились разные и в этом нет ничего удивительного – ведь мы находили вероятности в разных вероятностных пространствах (т.е. использовали разные математические модели!).

Рассмотрим пример, в котором мерой является длина.

Пример 3. Молодому человеку, живущему в центре Москвы, нравились две девушки – блондинка, живущая на севере, и брюнетка, живущая на юге. Обе девушки были одинаково привлекательны, и молодой человек никак не мог решить, какой из них сделать предложение. Наконец, в один прекрасный день он решил доверить свою судьбу случаю. Спускаясь в метро в центре, отправлялся на свидание к той девушке, чей поезд приходил первым. Через год он обнаружил, что с северной девушкой он встречался в два раза чаще, чем с южной. Этот факт юноша расценил как

[15] Таким образом, мера области – это или длина, или площадь, или объем, или величина угла, в зависимости от рассматриваемой области (линия, плоская фигура, пространственное тело, угол).

указующий перст судьбы и сделал предложение блондинке. Насколько оправдана в этой ситуации ссылка на перст судьбы?

Построим возможную математическую модель описанной ситуации. Нанесем на временной оси моменты прихода поездов и пометим точки прихода поездов в сторону севера буквой С, а в сторону юга – буквой Ю. Предположим, что интервал между поездами в обоих направлениях один и тот же, например, 3 минуты. Это значит, что расстояние между двумя последовательными буквами Ю, как и расстояние между двумя последовательными буквами С, равно 3. Однако далее предположим, что поезд в южном направлении приходит не через полторы, а через одну минуту после поезда северного направления. Тогда буквы Ю и С будут расположены, как показано на рис. 5.

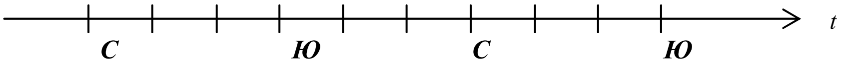

Рис. 5

Видно, что вероятность попасть к «северной» девушке равна вероятности попадания в промежуток ЮС, а к «южной» – в промежуток СЮ. Поскольку первый промежуток в два раза длиннее, чем второй, то и вероятность попасть к «северной» девушке в два раза больше. Таким образом, молодой человек скорее всего не учел всех возможных обстоятельств и сделанный им вывод нельзя считать обоснованным.

Рассмотренные примеры показывают как в некоторых простых ситуациях можно построить вероятностные пространства, в более сложных ситуациях для построения вероятностных пространств используется дополнительный математический аппарат.

7 АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Вычислять вероятность события, строя каждый раз вероятностное пространство и определяя благоприятные исходы, бывает довольно громоздко. Поэтому для решения вероятностных задач существуют «общие правила», позволяющие по известным вероятностям событий вычислять вероятности других более сложных событий. Поскольку событиями мы назвали подмножества в множестве элементарных исходов испытания, то аналогично тому, как это сделано в [7], определим операции над событиями.

Определение 1. Событие N, которому не благоприятен ни один из элементарных исходов, называется *невозможным*.

Определение 2. Событие D, которому благоприятен любой элементарный исход, называется *достоверным*.

На языке теории множеств эти определения означают следующее: $\Omega_N = \varnothing$, $\Omega_D = \Omega$.

Определение 3. *Объединением* (*суммой*) событий A и B называется событие C, которому благоприятны все исходы, благоприятные хотя бы одному из событий A, B.

Обозначим: $C = A \cup B$ или $C = A + B$.

На языке теории множеств это можно записать так: $\Omega_{A \cup B} = \Omega_A \cup \Omega_B$.

Определение 4. *Пересечением* (*произведением*) событий A и B называется событие C, которому благоприятны исходы, одновременно благоприятные и для A, и для B.

Обозначение: $C = A \cap B = A \cdot B$.

На языке теории множеств: $\Omega_{AB} = \Omega_A \cap \Omega_B$.

Определение 5. Два события A и B называются *несовместными*, если их пересечением является невозможное событие $A \cdot B = N$.

Из определения 5, используя язык теории множеств, получим: $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

Определение 6. События A и B называются *противоположными* друг другу, если любой элементарный исход благоприятен одному и только одному из них.

Обозначение: $A = \overline{B}$ (или $\overline{A} = B$).

Аналогично предыдущим замечаниям, из определения 6 получаем соотношения для множеств: $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$, $\Omega_A \cup \Omega_B = \Omega$ (т.е. события A и B несовместные и их объединение – достоверное событие) или $\Omega_A = \overline{\Omega}_B$, где $\overline{\Omega}_B$ – дополнение[16] множества Ω_B до множества Ω.

Таковы основные операции над событиями.

Поскольку операции над событиями сводятся к соответствующим операциям над множествами благоприятных им исходов, то все утверждения алгебры множеств, рассмотренные в [7], остаются справедливыми и для операций над событиями.

Например, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Поэтому можно говорить, что события образуют *алгебру* событий.

Далее рассмотрим ряд теорем, с помощью которых можно по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других, «более сложных» случайных событий. Начнем с теорем, которые образуют группу с общим названием «теоремы сложения».

8 ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

Теорема 1 (*теорема сложения для несовместных событий*). Если события A и B несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство. Обозначим элементарные исходы, благоприятные для события A, через $a_1,\dots, a_m$, а для события B – через $b_1, \dots, b_n$. Вероятности этих исходов обозначим соответственно через $p_1, \dots, p_m$ и $q_1, \dots, q_n$. Тогда событию $A \cup B$ благоприятны все исходы $a_1,\dots, a_m, b_1, \dots, b_n$. В силу того, что события A и B несовместны, среди этих исходов нет повторяющихся. Поэтому вероятность события $A \cup B$ равна сумме вероятностей этих исходов:

$$P(A \cup B) = p_1 + \dots + p_m + q_1 + \dots + q_n .$$

Но $p_1 + \dots + p_m = P(A)$, $q_1 + \dots + q_n = P(B)$, поэтому $P(A \cup B) = \; = P(A) + P(B)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если события $A_1, \dots, A_n$ попарно несовместны, то $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Доказательство. Так как события $A_1, \dots, A_n$ попарно несовместны, то события $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}$ и A_n также несовместны. Действительно, по свойствам операций над событиями:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cup A_n) = N .$$

Далее, по теореме 1:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) + P(A_n) .$$

Применяя это рассуждение к первому слагаемому $n - 1$ раз, получим, что

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) .$$

Следствие доказано.

Следствие 2. Для любого события A имеем: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно учесть, что $\overline{A} \cup A = D$, где D – достоверное событие; $\overline{A} \cap A = N$, где N – невозможное событие. Тогда по теореме 1:

$$1 = P(D) = P(\overline{A} \cup A) = P(\overline{A}) + P(A) ,$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) .$$

Следствие доказано.

---

[16] См. [7].

Используя на практике эти утверждения, необходимо иметь твердое убеждение о несовместности рассматриваемых событий. Для примера рассмотрим следующую задачу.

Задача. В отдел уголовного розыска поступило сообщение о том, что 5 неизвестных лиц взломали сейф сельскохозяйственного предприятия, и похитили крупную сумму денег. Свидетели успели заметить, что грабители сели в автобус, следующий по маршруту в город. Об этом сразу же была поставлена в известность милиция. Как только автобус остановился на посту автоинспекции при въезде в город, к его дверям подошел инспектор уголовного розыска и запретил водителю открывать двери автобуса. Тот сообщил инспектору, что в автобусе 40 пассажиров. Обыск может привести к значительной задержке автобуса. Инспектор успокоил водителя: «Первоначально мне достаточно проверить человек 6 пассажиров». Он предложил шестерым наугад выбранным пассажирам зайти в дежурную комнату контрольного пункта.

Один преступник был сразу обнаружен – в его кармане нашли пачку денег. Он назвал сообщников и дело было закончено.

Что руководило инспектором при выборе количества досматриваемых: риск или трезвый расчет?

Решение. Найдем вероятность того, что среди шести отобранных пассажиров есть хотя бы один преступник; обозначим соответствующее событие буквой A. Пусть событие A_k – среди случайно выбранных 6 пассажиров есть ровно k преступников (k = 1, 2, 3, 4, 5).

Тогда $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ и

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5)\,.$$

Найдем вероятность события A_k (среди 6 пассажиров находится ровно k (k = 1, 2, 3, 4, 5) преступников). Рассмотрим испытание, состоящее в том, что из 40 пассажиров выбирается 6 лиц. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов образовать (или «выбрать») подмножество, содержащее 6 элементов, из множества, в котором 40 элементов, т.е. C_{40}^6 – числу сочетаний из 40 по 6. Подсчитаем число исходов, благоприятных событию A_k (k = 1, 2, 3, 4, 5). В каждом благоприятном для события A_k исходе среди 6 выбранных лиц должно быть k преступников и 6 – k обыкновенных пассажиров. Далее, k преступников из 5 можно «выбрать» C_5^k способами, 6 – k пассажиров из 35 можно «выбрать» C_{35}^{6-k} способами. Поэтому, по правилу произведения, число благоприятных для события A_k элементарных исходов равно $C_5^k \cdot C_{35}^{6-k}$. Применяя классическое определение вероятности, найдем вероятность события A_k:

$$P(A_k) = \frac{C_5^k \cdot C_{35}^{6-k}}{C_{40}^6}\,,$$

или $$P(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{35}^5}{C_{40}^6} \approx 0{,}4229\,, \qquad P(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{35}^4}{C_{40}^6} \approx 0{,}1364\,;$$

$$P(A_3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{35}^3}{C_{40}^6} \approx 0{,}017\,; \qquad P(A_4) = \frac{C_5^4 \cdot C_{35}^2}{C_{40}^6} \approx 0{,}0008\,;$$

$$P(A_5) = \frac{C_5^5 C_{35}^1}{C_{40}^6} \approx 0{,}00001\,.$$

Складывая полученные вероятности, найдем $P(A) \approx 0{,}5771$.

Таким образом, вероятность того, что среди 6 пассажиров окажется по крайней мере один преступник, оказывается больше 0,5 и тем самым больше, чем не обнаружить такового.

По-видимому, инспектор руководствовался трезвым расчетом.

Если рассматриваемые события совместны, то необходимо руководствоваться следующим правилом.

Теорема 2 (*теорема сложения для совместных событий*). Если события A и B совместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Доказательство. Попытаемся использовать результаты теоремы 1. Для этого достаточно представить $A \cup B$ через сумму каких-то несовместных, связанных с A и B, событий. Например, событие A есть сумма двух несовместных событий $A \cap B$ и $A \cap \overline{B}$, а событие B есть сумма двух несовместных событий $A \cap B$ и $\overline{A} \cap B$. Представляя события как подмножества множества Ω и применяя свойства операций над множествами, получим:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Заметим, что события $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ попарно несовместные, поэтому по следствию 1 из теоремы 1:

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B).$$

Учитывая равенство $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ (в силу $A = (A \cap B) \cup (A \cup \overline{B})$) и аналогичное ему $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ (или $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$), получим: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 1 является частным случаем теоремы 2.

Теорему 2 можно распространить на любое число событий. Найдем, например, $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Обозначим $A_2 \cup A_3 = B_2$. Тогда:

$$P(A_1 \cup B_2) = P(A_1) + P(B_2) - P(A_1 \cap B_2);$$

$$P(B_2) = P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3);$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B_2) &= P\big(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)\big) = P\big((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cup A_3)\big) = \\ &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \\ &- P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3); \end{aligned}$$

Выскажем гипотезу, что структура формулы для подсчета вероятности суммы n случайных событий следующая:

сначала идет сумма вероятностей всех n событий $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$, которую мы обозначим S_{1n};

далее, сумма вероятностей всевозможных произведений пар событий $P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + ... + P(A_{n-1} \cap A_n)$, которую мы обозначим S_{2n} и в общей формуле будем брать со знаком «минус».

Аналогично,

$$S_{3n} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + ... + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n);$$

...

$$S_{nn} = P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n).$$

В итоге $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = S_{1n} - S_{2n} + S_{3n} - S_{4n} + ... + (-1)^{n+1} S_{nn}$.

Проверим истинность предположения методом математической индукции (для начального значения $n = 2$ предположение уже доказано). Найдем структуру формулы для (n + 1)-го множества, предполагая что для события $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ данная формула справедлива:

$$\begin{aligned} &P(A \cup A_{n+1}) = P(A) + P(A_{n+1}) - P(A \cap A_{n+1}) = \\ &= S_{1n} - S_{2n} + S_{3n} - S_{4n} + ... + (-1)^{n+1} S_{nn} + P(A_{n+1}) - P(A \cap A_{n+1}) = \\ &= (S_{1n} + P(A_{n+1})) - (S_{2n} + P(A_1 \cap A_{n+1}) + P(A_2 \cap A_{n+1}) + ... + P(A_n \cap A_{n+1})) + \\ &+ S_{3n} + P(A_1 \cap A_2 \cap A_{n+1}) + ... + P(A_{n-1} \cap A_n \cap A_{n+1}) + ... + \\ &+ (-1)^{n+2} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n+1}) = S_{1n+1} - S_{2n+1} + ... + (-1)^{n+2} S_{n+1\,n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, структура формулы сохранилась и мы получили формулу для подсчета вероятности суммы n случайных событий.

Используем полученные результаты для решения следующей задачи.

Задача. Группа Российских парламентариев перед поездкой в одну из стран Западной Европы совершенно не преднамеренно укомплектовала себя идентичными портфелями – дипломатами с кодовыми замками. Среди прочих бумаг и личных вещей каждый член группы имел в портфеле общие для всех программные документы визита.

При посещении одной из организаций парламентариям пришлось сдать портфели в камеру хранения, не имеющую индивидуальных ячеек, так что при получении портфелей назад возникли проблемы с их принадлежностью. Ситуация усугубилась тем, что срочно возникла необходимость посмотреть программные материалы визита. Соблюдая деликатность, каждый парламентарий взял случайно доставшийся ему портфель и, не привлекая внимание, попытался его открыть своим кодом.

Насколько успешной оказалась эта попытка? Насколько сильно зависит результат от численности группы?

Решение. Построим математическую (вероятностную) модель задачи. Пронумеруем парламентариев: 1, 2, 3, …, n. Пусть событие A_k – «k-й парламентарий взял свой портфель» (заметим, что эти события совместные). Тогда событие $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ означает – «по крайней мере, один парламентарий взял свой портфель».

Для вычисления $P(A)$ применим доказанную формулу для подсчета вероятности суммы n случайных событий.

Вначале подсчитаем вероятности событий A_k, $k = 1, \ldots, n$, используя классическое определение вероятности. Всего n портфелей. Они могут быть распределены среди n парламентариев $n!$ способами. Это число всех элементарных исходов. Если k-й парламентарий взял свой портфель, то остальные $n - 1$ портфель могут быть распределены между $n - 1$ парламентариями $(n - 1)!$ способами и $P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

Найдем вероятности событий $A_i \cap A_k$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$. Если i-й и k-й парламентарии взяли свои портфели, то остальные портфели могут быть распределены $(n - 2)!$ способами, поэтому

$$P(A_i \cap A_k) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{(n-1)\,n}.$$

Соответственно:

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{(n-2)(n-1)n}, \ \ldots, \ P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \frac{1}{n!}.$$

Сумма S_{1n} имеет n членов, поэтому $S_{1n} = \frac{1}{n}\, n = 1$.

Сумма S_{2n} имеет C_n^2 членов, поэтому

$$S_{2n} = C_n^2 \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}.$$

Аналогично

$$S_{3n} = \frac{1}{3!}, \quad S_{4n} = \frac{1}{4!}, \quad ..., \quad S_{nn} = \frac{1}{n!}.$$

Окончательно имеем:

$$P(A) = S_{1n} - S_{2n} + S_{3n} - S_{4n} + ... + (-1)^{n+1} S_{nn} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} =$$
$$= 1 - 0{,}5 + 0{,}1(6) - 0{,}041(6) + 0{,}008(3) - 0{,}0013(8) + ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}.$$

Вычислим $P(A)$ при последовательных значениях $n = 3, 4, \ldots$.

n	$P(A)$
3	$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}66667$
4	$\frac{2}{3} - \frac{1}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = 0{,}62500$
5	$\frac{5}{8} + \frac{1}{5!} = \frac{5}{8} + \frac{1}{120} = \frac{76}{120} = \frac{19}{30} \approx 0{,}63333$
6	$\frac{19}{30} - \frac{1}{6!} = \frac{19}{30} - \frac{1}{720} = \frac{455}{720} = \frac{91}{144} \approx 0{,}63194$
7	$\frac{91}{144} + \frac{1}{7!} = \frac{91}{145} + \frac{1}{5040} \approx 0{,}63214$

Таким образом, мы пришли к удивительному на первый взгляд выводу: если число парламентариев 3 или более, то вероятность того, что хотя бы один из них возьмет свой портфель практически одинаковая (около 0,63)[17]. Эта вероятность превышает 0,5, поэтому попытка открыть своим кодом случайно взятый портфель может быть удачной.

Не следует думать, что это – «жизненно-производственная» задача. Это пример использования математического аппарата и пример построения математической модели реального процесса. Причем, рассмотренный пример может быть основой для построения математической модели во многих других ситуациях. Например, рассмотрим такую задачу.

Задача. На столе у преподавателя находятся несколько одинаковых по внешнему виду зачетных книжек студентов. Насколько вероятно событие, состоящее в том, что хотя бы один студент получит свою зачетку, если преподаватель раздаст их не открывая?

Ясно, что «парламентарии» заменились на «студентов», а «дипломаты» заменились на «зачетные книжки». Можно дать общую формулировку такого рода задач.

Имеются два конечных множества A и B с равным количеством элементов $a_i \in A$ и $b_i \in B$, $i = 1, ..., n$. Между элементами множеств существует взаимно-однозначное соответствие: a_i соответствует b_i, $i = 1, ..., n$. Произвольным образом образуют пары (a_i, b_k), $i = 1, ..., n$, $k = 1, ..., n$ из элементов множеств A и B. Какова вероятность того, что хотя бы одна пара удовлетворяет первоначальному соответствию?

9 УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

На практике часто возникают задачи на выяснение степени зависимости одних событий от других. Например, при анализе результатов того или иного испытания перед наблюдателем часто возникает вопрос о том, как влияет на возможность появления некоторого события A наступление другого события B. Ведь получение добавочной информации может изменить значение вероятностей тех или иных исходов испытания, в результате которых может произойти событие A. В теории вероятностей для оценки степени зависимости случайных событий используют понятие условной вероятности.

Определение. *Условной вероятностью события A относительно события B* называется число, выражающее вероятность события A при условии, что произошло событие B.

Обозначение: $P_B(A)$ или $P(A/B)$.

Для того, чтобы уметь находить это число (а, следовательно, и оценивать степень зависимости случайных событий), рассмотрим несколько утверждений, исключив бессодержательный случай $P(A) = 0$, $P(B) = 0$ (т.е. мы считаем далее, что A, B не являются невозможными событиями).

[17] С точки зрения математики, выражение для $P(A)$ представляет собой сумму первых n членов знакочередующегося ряда, сумма которого равна $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63$.

Лемма.[18] Если известно, что произошло событие B, то вероятность любого элементарного исхода, не благоприятствующего событию B, обращается в нуль, а вероятность элементарного исхода, благоприятствующего событию B, умножается на $\frac{1}{P(B)}$.

Доказательство. Получение некоторой информации (т.е. событие B) о результате испытания означает, что вместо всего множества элементарных исходов Ω надо брать его часть, которую мы обозначим Ω_B. Если исход ω не принадлежит Ω_B, то его вероятность обращается в нуль (т.к. становится невозможным). Если же он принадлежит Ω_B, то его вероятность увеличивается (в силу уменьшения Ω до Ω_B). При этом естественно считать, что новая информация «одинакова» по отношению к элементарным исходам из Ω_B, поэтому вероятности исходов из Ω_B увеличиваются в одно и то же число раз. Обозначим элементарные исходы, благоприятствующие событию B через $\omega_1, \ldots, \omega_k$, а их вероятности через $p_1, \ldots, p_k$. После получения новой информации эти вероятности станут равными числам $\lambda p_1, \ldots, \lambda p_k$. Значение λ легко определить из того, что сумма новых вероятностей должна равняться 1. Поэтому: $\lambda p_1 + \ldots + \lambda p_k = 1$, $\lambda(p_1 + \ldots + p_k) = 1$. Но $p_1 + \ldots + p_k = P(B)$, и потому $\lambda = \frac{1}{P(B)}$. Лемма доказана.

Рассмотрим ситуацию, описываемую в лемме на примере.

Пример. В корзине лежат 15 шаров двух разных размеров: 5 шаров меньшего размера и 10 шаров большего размера. Среди 10 шаров большего размера 5 окрашены в красный цвет, 5 – в синий цвет. Все шары меньшего размера окрашены в зеленый цвет.

Рассмотрим испытание, состоящее в том, что из корзины извлекается случайным образом шар. Построим вероятностное пространство для данного испытания. В данном испытании 15 элементарных исходов (по числу шаров), т.е. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{15}\}$. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_5$ – элементарные исходы, соответствующие извлечению шара меньшего размера; $\omega_6, \ldots, \omega_{10}$ – элементарные исходы, соответствующие извлечению красного шара большего размера; $\omega_{11}, \ldots, \omega_{15}$ – элементарные исходы, соответствующие извлечению синего шара большего размера. Все шары равноправны, поэтому $p_i = \frac{1}{15}$ для любого $i = 1, \ldots, 15$.

Обозначим событие B, состоящее в том, что из корзины извлечен шар большего размера. По классическому определению вероятности события $P(B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Допустим, что в результате испытания произошло событие B. Что изменится в построенном ранее вероятностном пространстве? Элементарные исходы $\omega_1, \ldots, \omega_5$ станут невозможными, поэтому в новой ситуации надо считать, что $p_i' = 0$ для $i = 1, \ldots, 5$ (для избежания двусмысленности вероятности элементарных исходов ω_i в новой ситуации будем обозначать p_i'). Остальные элементарные исходы тоже изменят свои вероятности. Согласно рассуждению из доказательства леммы 1, получим $p_6' + \ldots + p_{15}' = 1$. Так как шары по-прежнему равноправны, то $p_6' = \ldots = p_{15}' = \frac{1}{10}$ или $p_i' = \frac{3}{2} p_i = \frac{p_i}{2/3} = \frac{p_i}{P(B)}$ для $i = 6, \ldots, 15$.

Теорема. Условная вероятность события A относительно события B равна частному от деления вероятности совместного появления событий A и B на вероятность события B, т.е. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Доказательство. Пусть событие B произошло. Найдем новую вероятность события A. Ему благоприятствуют исходы двух видов – благоприятствующие B и неблагоприятствующие B. Согласно лемме, если произошло событие B, то вероятности элементарных исходов первого вида умножаются на $\frac{1}{P(B)}$, а элементарные исходы второго вида получают нулевую вероятность. Но исходы первого вида составляют событие $A \cap B$, следовательно $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Теорема доказана.

10 НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Различные случайные события могут иметь различные связи и их надо оценивать. В рамках вероятностных моделей это можно сделать на основе определенной выше условной вероятности.

[18] В математике леммой называют вспомогательное утверждение, которое используется для доказательства основного, более «важного» утверждения.

Определение 1. Событие A называется *независимым* (*или независимо*) *от события* B, если его вероятность не зависит от наступления события B:

$$P_B(A) = P(A).$$

Лемма 1. Событие A независимо от события B тогда и только тогда, когда $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Доказательство. Пусть A независимо от B, тогда $P_B(A) = P(A)$. В предыдущем параграфе мы доказали, что $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Следовательно и $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, а $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Обратно, пусть $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Тогда $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Но $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ – формула для вычисления $P_B(A)$. Таким образом, $P_B(A) = P(A)$, следовательно, A независимо от B. Лемма доказана.

Таким образом, определение независимости события A от B могло бы быть основанным на формуле $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Однако определение независимости на основе формулы $P_B(A) = P(A)$ более близко к интуитивному пониманию.

Определение 1 более полно отражало бы интуитивное понимание слова «независимость», если бы из определения 1 вытекало, что событие A не зависит и от ненаступления события B, т.е. $P_{\overline{B}}(A) = P(A)$.

Лемма 2. Если событие A независимо от события B, то событие A независимо и от $\overline{B}$, т.е. $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$.

Доказательство. Нам надо доказать, что из условия $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ следует условие $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$.

Попытаемся связать события $A \cap \overline{B}$ и $A \cap B$. Они несовместны, так как $\overline{B}$ и B несовместны. Их объединение

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A \cap D = A,$$

где D – достоверное событие. Поэтому $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$, а $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. По условию $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, следовательно

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Следовательно, A не зависит и от $\overline{B}$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если A независимо от B, то и B независимо от A, т.е. $P_B(A) = P(A) \Rightarrow P_A(B) = P(B)$.

Доказательство. По определению условной вероятности $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, так как A независимо от B, то $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Следовательно: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$. Лемма доказана.

Согласно лемме 3 можно говорить не о том, что событие A независимо от события B, а о том, что события A и B независимы (т.е. условие $P_B(A) = P(A)$ гарантирует «взаимную и полную» независимость событий A и B). Это позволяет уточнить определение 1.

Определение 2. События A и B *независимы*, если $P_B(A) = P(A)$ (и/или $P_A(B) = P(B)$).

Теорема. Если события A и B независимы, то

а) события A и $\overline{B}$ независимы,

б) события $\overline{A}$ и B независимы,

в) события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимы.

Доказательство. Утверждение а) доказано в лемме 2. Утверждение б) о независимости $\overline{A}$ и B вытекает из лемм 3 и 2. Утверждение в) о независимости $\overline{A}$ и $\overline{B}$ вытекает из а), б). Теорема доказана.

Если события A и B независимые, то можно уточнить теорему сложения для совместных событий.

Следствие. Если A и B независимые события, то

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

В заключение рассмотрим вопрос о соотношении понятий «независимость» и «совместность». С точки зрения интуиции, «независимость» и «совместность» – не связанные понятия, однако построенная вероятностная модель позволяет выделить связь между этими понятиями.

Лемма 4. Независимые события A и B (с положительными вероятностями $P(A) > 0,\ P(B) > 0$) обязательно являются совместными (т.е. утверждать, что события A и B одновременно произойти не могут – нельзя).

Доказательство. Пусть A, B – независимые события, $P(A \bigcap B) = P(A)P(B)$. Допустим, что A, B – несовместные события, т.е. $A \bigcap B = N$ – невозможное событие. Тогда $P(A \bigcap B) = P(N) = 0$. Следовательно, $P(A)P(B) = 0$ и по крайней мере одна из вероятностей $P(A)$ или $P(B)$ должна быть нулем. Это противоречит тому, что $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Следовательно, независимые события A, B с положительными вероятностями не могут быть несовместными, они являются совместными. Лемма доказана.

Понятие условной вероятности используется при решении широкого круга вероятностных задач. Рассмотрим часто встречающиеся задачи: как найти вероятность события A, если его появление возможно (с предполагаемой вероятностью) только совместно с одним из попарно несовместных событий $B_1, ..., B_n$ и как влияет наступление события A на вероятности событий $B_1, ..., B_n$?

11 ТЕОРЕМА О ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ТЕОРЕМА БАЙЕСА

Теорема (*о полной вероятности*). Пусть событие A может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий $B_1, ..., B_n$, причем $B_1 \bigcup ... \bigcup B_n = D$ – достоверное событие[19], тогда

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Доказательство. Согласно свойствам операции пересечения и объединения событий, получим:

$$A = A \bigcap D = A \bigcap (B_1 \bigcup ... \bigcup B_n) = (A \bigcap B_1) \bigcup ... \bigcup (A \bigcap B_n).$$

Так как события $B_1, ..., B_n$ несовместные, то для $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, $B_i \bigcap B_j = N$, N – невозможное событие.

Следовательно,

$$(A \bigcap B_i) \bigcap (A \bigcap B_j) = A \bigcap B_i \bigcap B_j = A \bigcap (B_i \bigcap B_j) = A \bigcap N = N.$$

Значит, событие A является объединением попарно несовместных событий $A \bigcap B_1, ..., A \bigcap B_n$ и поэтому его вероятность по теореме сложения для несовместных событий равна:

$$P(A) = P(A \bigcap B_1) + ... + P(A \bigcap B_n).$$

Далее, согласно равенству $P(A \bigcap B_i) = P(B_i)P_{B_i}(A)$, получим:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Теорема доказана.

Следствие (теорема Байеса). В условиях теоремы о полной вероятности справедливы равенства:

[19] Такую совокупность событий $B_1, \ldots, B_n$ называют полной группой событий. Теорема о полной вероятности будет верна, если заменить условие $B_1 \bigcup ... \bigcup B_n = D$ на более слабое предположение, которое при помощи теории множеств можно записать так $A \subset B_1 \bigcup ... \bigcup B_n$ (сформулируйте это условие в терминах событий!). Однако с целью наглядности доказательства оставлено условие $B_1 \bigcup ... \bigcup B_n = D$.

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A)},\ \ i=1,\ ...,\ n.$$

Доказательство. Так как $P(A\bigcap B_i)=P(B_i)P_{B_i}(A)=P(A)P_A(B_i)$, то $P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}$, $i=1,\ ...,\ n.$ Заменяя *P(A)* по теореме о полной вероятности, получим утверждение следствия. Следствие доказано.

Теорема Байеса обычно интерпретируется следующим образом. Предположим, что событие *A* может произойти при одной из *n* взаимоисключающих гипотез. Событие B_i играет роль *i*-й гипотезы. Известна вероятность события *A* при каждой из гипотез. Из априорных (известным предварительно, до проведения опыта) соображений гипотезам можно приписать определенные вероятности. Пусть в результате опыта произошло событие *A*. Условные вероятности гипотез B_i при условии, что наблюдалось *A* (т.е. $P_A(B_i)$), называются апостериорными (вычисленные после опыта) вероятностями. Теорема Байеса дает значения апостериорных вероятностей гипотез. Другими словами, формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез по результатам произведенного опыта.

Пример. При обследовании больного появилось подозрение на одно из двух заболеваний B_1 и B_2. Их вероятности в данных условиях были оценены $P(B_1)=0{,}6$, $P(B_2)=0{,}4$.

Для уточнения диагноза назначается анализ, результатом которого является положительная или отрицательная реакция (например, повышение температуры при приеме лекарственного средства). Опыт медицинской работы показывает, что в случае болезни B_1 вероятность положительной реакции равна 0,9, отрицательной – 0,1; в случае B_2 положительная и отрицательная реакции равновероятны. Анализ провели дважды, и оба раза реакция оказалась отрицательной. Требуется переоценить вероятность каждого заболевания после проделанных анализов.

Решение. Пусть событие *A* состоит в том, что отрицательная реакция на препарат была дважды. Тогда $P_{B_1}(A)=0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}01$ (как вероятность произведения независимых событий) и, соответственно, $P_{B_2}(A)==0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25$. Так как событие *A* произошло, то по формуле Байеса имеем:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}01}{0{,}6\cdot 0{,}01+0{,}4\cdot 0{,}25}\approx 0{,}06\ ;$$

$$P_A(B_2)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}25}{0{,}6\cdot 0{,}01+0{,}4\cdot 0{,}25}\approx 0{,}94\ .$$

Отсюда видно, что полученные результаты анализов дают веские основания предполагать болезнь B_2.

12 ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «МАТЕМАТИКА СЛУЧАЙНОГО»

НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ[20]

1 Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «герб».

Решение. Испытание – два раза подбрасывается монета и фиксируется каждый раз верхняя сторона монеты.

Событие *A* – хотя бы один раз появится «герб».

Число всех исходов в испытании – …….(герб, герб; герб, решка; …).

Число благоприятных для события *A* исходов – …….

Вероятность события *A* равна *P*(*A*) = …

Ответ: 0,75.

2 Куб, все грани которого окрашены, распилен на 125 кубиков одинакового размера (т.е. каждое ребро разделено на 5 равных частей). Все кубики перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, взятый наудачу, будет иметь а) одну; б) две; в) три окрашенные грани.

---

[20] Решение нижеследующих задач основано на классическом определении вероятности. Алгоритм решения показан в задаче 1, где необходимо заполнить пропуски, отмеченные многоточием.

3 Бросаются два одинаковых игральных кубика. Грани каждого игрального кубика пронумерованы цифрами от 1 до 6. Какова вероятность того, что а) сумма выпавших цифр окажется равной 8; б) сумма выпавших цифр окажется равной 8, а произведение – будет равным 15; в) сумма выпавших цифр окажется равной 8, а произведение – будет равным 10?

4 Решить предыдущую задачу в предположении, что игральные кубики – разные (например, отличаются по размеру).

5 Из 15 билетов лотереи выигрышными являются четыре. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу шести билетов будет два выигрышных?

6 В партии из 50 деталей 5 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки шести деталей две окажутся нестандартными?

7 Из последовательности целых чисел от 1 до 10 наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше 6, а другое больше 6?

8 В гаражном кооперативе разыгрываются 10 мест, расположенных в ряд, под строительство гаражей. Определить вероятность того, что при этом три определенных гаража окажутся рядом?

9 Из урны, содержащей 9 белых, 9 черных, 9 синих и 9 красных шаров, наудачу извлекаются 3 шара. Какова вероятность того, что извлеченными окажутся белые или черные шары?

10 В автобусе 5 пассажиров. Найти вероятность того, что на каждой из оставшихся 5 остановках будет сходить по одному человеку (предполагается, что каждый из пассажиров с равной вероятностью может выйти на любой из остановок).

В задачах 11 – 13 необходимо использовать геометрическое определение вероятности.

11 В квадрат вписан круг. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в квадрат, окажется внутри круга?

12 Производится выстрел в быстро вращающийся диск, разделенный на 20 равных секторов, попеременно окрашенных в черный и белый цвета. Какова вероятность, что пуля попадет в один из черных секторов?

13 Двое договорились о встрече в течение определенного часа. Пришедший первым ждет 20 минут и уходит. Какова вероятность встречи?

АЛГЕБРА СОБЫТИЙ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

14 Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из этих событий:

1) произошло только A;
2) произошли A и B, а C не произошло;
3) все три события не произошли;
4) произошло по крайней мере одно из событий;
5) ни одно из событий не произошло.

15 В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар а) белый; б) черный; в) белый или черный; г) синий или красный; д) белый, черный или синий?

16 Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, а для второго 0,9. Найти вероятность того, что при одном залпе а) цель будет поражена (т.е. вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет в цель); б) один из них попадет в цель, а другой не попадет?

17 Из полной колоды карт (52 карты) извлекаются три карты (без возврата). Вычислить вероятность того, что среди извлеченных карт будет а) точно один туз; б) хотя бы один туз?

18 Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что при одном залпе а) все три стрелка одновременно попадут в цель; б) в цель попадет только первый стрелок, а второй и третий – не попадут; в) только один из стрелков попадет в цель; г) в цель попадет хотя бы один стрелок?

19 Среди 100 деталей данной партии имеются 5 бракованных. Найти вероятность того, что среди 10 случайно отобранных деталей не больше одной бракованной.

20 В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вытащили по шару. Какова вероятность того, что оба шара белые?

21 В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика один за другим вытащили два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

22 Все грани игрального кубика заклеены непрозрачной бумагой: грани 1, 2, 3 – красной, грани 4, 5, 6 – черной. При бросании кости выпала черная грань. Какова вероятность того, что на этой грани стоит четное число?

ТЕОРЕМА О ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМА БАЙЕСА[21]

23 Имеются три корзины. В первой находятся 5 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 4 черных, в третьей – 8 белых. Наугад выбирается одна из корзин и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется черным?

Решение. Обозначим событие A – вынутый из наудачу выбранной корзины шар оказался черным. Это событие может произойти с одним из трех несовместных событий:

B_1 – наудачу выбрана первая корзина;

B_2 – …

B_3 – …

События B_1, B_2, B_3 образуют полную группу событий, так как …, и поэтому применима теорема о полной вероятности:

$$P(A) = \dots$$

Очевидно, что выбор каждой из трех корзин равновозможен, поэтому

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \dots$$

Вероятность $P_{B_i}(A)$, $i = 1, 2, 3$ – вероятность вынуть черный шар из i-й корзины, поэтому, используя классическое определение вероятности, находим, что

$$P_{B_1}(A) = \frac{3}{8}; \quad P_{B_2}(A) = \dots, \quad P_{B_3}(A) = \dots$$

[21] Решение нижеследующих задач основано на применении теоремы о полной вероятности и теоремы Байеса. Алгоритм решения показан в задаче 23, где необходимо заполнить пропуски, отмеченные многоточием.

Подставляя найденные значения в формулу для $P(A)$, получим:

$$P(A) = ... = \frac{7}{24}.$$

Ответ: $\frac{7}{24}$.

24 В первой урне 2 белых и 4 черных шара, а во второй – 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны переложили во вторую два шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны после перекладывания, окажется белым?

25 На карточках написаны буквы, образующие слово *комбинаторика,* но две карточки из этого набора утеряны. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что на ней окажется гласная буква?

26 На некоторой фабрике 30 % продукции производится машиной A, 25 % продукции – машиной B, а остальная часть продукции – машиной C. У машины A браком оказывается 1 % всей производимой ею продукции, у машины B – 1,5 %, у машины C – 2 %. Наугад выбранная единица продукции оказалась браком. Какова вероятность того, что она произведена машиной A?

27 В одной студенческой группе обучаются 24 студента, во второй – 26 студентов, в третьей – 20 студентов. По математике получили отличные оценки 6 студентов первой группы, 6 студентов второй группы и 4 студента третьей группы. Наугад выбранный студент оказался получившим по математике отметку «отлично». Какова вероятность того, что он учится в первой группе?

28 Студент пришел на экзамен не полностью подготовленным: он выучил лишь k билетов из n ($k < n$)/ В каком случае вероятность вытащить «хороший» билет будет выше: когда он берет билет первым или же когда он берет билет вторым?

29 Некий властелин разгневался на звездочета и повелел палачу отрубить ему голову. Однако в последний момент властелин смягчился и решил дать звездочету возможность спастись. Он взял два черных и два белых шара и предложил звездочету произвольным образом распределить их по двум урнам. Палач должен выбрать наугад одну из урн и наугад вытащить из нее шар. Если шар окажется белым, то звездочет будет помилован, а если черным, то казнен. Как должен звездочет распределить шары по двум урнам, чтобы иметь наибольшее число шансов спастись?

30 Милиция в малонаселенной местности преследует преступника, который выбежал на автодорогу и уехал в город с первым остановившимся по его просьбе автотранспортом. Он мог уехать с рейсовым автобусом и тогда его надо встречать на автовокзале или с попутной машиной, которая могла его высадить в районе его местожительства. Вероятность того, что первым в месте его выхода на дорогу окажется автобус, равна 0,2, а любая другая автомашина – 0,8. Вероятность того, что автобус остановится, равна 0,7; автомашину можно остановить с вероятностью 0,25. Какова вероятность, что преступник окажется на автовокзале?

31 В многоэтажном доме 5 подъездов по 10 квартир в каждом. В этот дом заселилось 10 семей сотрудников одного учреждения, причем в двух подъездах получили квартиры по одной семье, в одном – две семьи, в остальных двух – три и шесть семей соответственно. Работник этого же учреждения решил в выходной день навестить своих сотрудников. Зайдя в выбранный наудачу подъезд, а затем позвонив в случайно выбранную квартиру, он обнаружил, что там проживают его сотрудники. Какова вероятность того, что в этом подъезде нет других квартир, принадлежавших сотрудникам этого учреждения?

13 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Программой по математике для студентов гуманитарных специальностей предусмотрено их ознакомление с основами математической статистики. Математическая статистика – междисциплинарный предмет, «соединяющий» теорию вероятностей и статистику. Одна из задач математической статистики – указать методы сбора и обработки статистических данных[22], полученных в результате наблюдений (экспериментов) для получения практических выводов.

Для студентов-гуманитариев программой предусмотрено лишь рассмотрение задачи представления статистических данных. В достаточно сжатом виде это представляется следующим образом.

Пусть требуется изучить совокупность однородных относительно некоторого признака (качественного или количественного) элементов.

Можно рассмотреть каждый элемент совокупности, т.е. провести сплошное обследование. Но на практике провести сплошное обследование часто бывает невозможно в силу больших материальных или временных затрат (а порой и практически невозможно).

В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число элементов, подвергают их исследованию, а далее распространяют полученные результаты на всю совокупность.

Существуют следующие понятия математической статистики.

Генеральной совокупностью называют совокупность элементов, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью, или просто *выборкой* называют совокупность случайно отобранных элементов.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число элементов этой совокупности.

Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности относительно изучаемого признака, т.е. выборка должна обладать свойством *репрезентативности*.

Рассмотрим совокупность элементов, однородных относительно некоторого признака, характеризуемого значением x.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, x_k – n_k раз и $\sum_i n_i = n$ – объем выборки (например, генеральная совокупность – жители города; выборочная совокупность – n случайно отобранных жителей; x – их возраст: x_1 – 1 год, x_2 – 2 года, …).

Наблюдаемые значения x_i называются *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке – *вариационным рядом*.

Числа наблюдений n_i называют *частотами*, а их отношение к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ – *относительными частотами* (см. статистическое определение вероятности).

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот (или относительных частот). Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Для наглядности представления статистического распределения выборки строят «графики» статистического распределения: полигон и гистограмму.

Полигоном частот статистического распределения (или кратко полигоном) называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1; n_1), (x_2; n_2), …, (x_k ; n_k).

Рассмотрим конкретный пример описанной задачи.

Пример. Магазином за день проданы 45 пар женской обуви следующих размеров (x_i) (табл. 2).

Таблица 2

x_i	33	34	35	36	37	38	39	40
n_i	1	3	5	8	12	9	5	2

Построить полигон частот данного статистического распределения.

[22] Статистические данные – это данные о количестве элементов какой-либо совокупности, обладающих определенным признаком. Например, «количество дождливых дней в году», «количество жителей города, имеющих судимость» и т.д.

Согласно определению, надо сначала на координатной плоскости изобразить точки (33, 1), (34, 3), (35, 5), (36, 8), (37, 12), (38, 9), (39, 5), (40, 2). Затем данные точки соединить отрезками. Полученная линия (рис. 6) есть полигон частот для данного статистического распределения.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

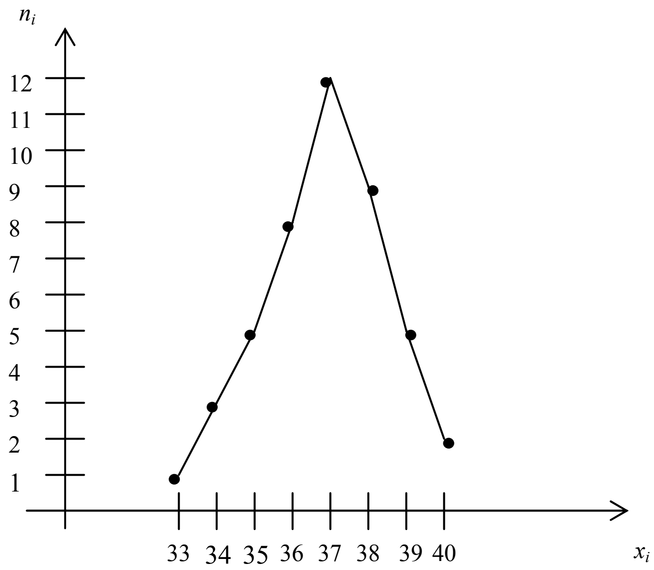

Рис. 6

Гистограммой частот статистического распределения (или кратко: гистограммой) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$. Площадь i-го частичного прямоугольника равна $\frac{n_i}{h}h = n_i$ – сумме частот вариант i-го интервала. Следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки. Рассмотрим еще один конкретный пример.

Пример. Выборочное наблюдение в течение 1 часа продолжительности телефонных разговоров по определенному номеру дало следующие результаты: всего имело место 11 разговоров, их продолжительность «укладывается» в интервал от 0,1 мин до 1,35 мин. Если интервал (0,1; 1,35) разбить на 5 частичных длиной h = 0,25 мин, то оказалось возможным записать следующие данные (табл. 3).

Построить гистограмму частот данного статистического распределения.

Согласно определению, мы должны изобразить прямоугольники с основанием h = 0,25 и с высотами, соответственно: 4, 8, 12, 12, 8. Полученная фигура (рис. 7) есть гистограмма частот данного статистического распределения.

Таблица 3

Интервалы	n_i	n_i / h
0,1 – 0,35	1	4
0,35 – 0,6	2	8
0,6 – 0,85	3	12

0,85 – 1,1	3	12
1,1 – 1,35	2	8

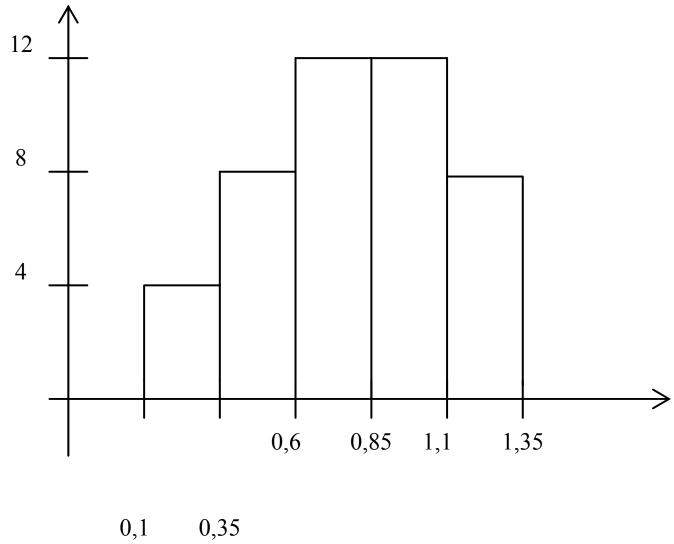

Рис. 7

Предлагаем обучающемуся самостоятельно решить несколько подобных задач.

1 Для анализа качества знаний абитуриентов, поступающих в университет, была осуществлена выборка результатов (количества набранных баллов на трех экзаменах) 60 абитуриентов. Эти результаты представлены в виде нижеследующей таблицы, где указано, что первый абитуриент набрал 10 баллов, второй – 9, шестой – 8 (один экзамен сдан на «2») и т.д., шестидесятый – 11. Количество набранных баллов – это варианты, количество студентов, набравших то или иное количество баллов – это частоты. Построить статистическое распределение выборки (таблицу: варианты – частоты) и начертить полигон частот данного статистического распределения 60 абитуриентов по числу баллов, полученных на приемных экзаменах (табл. 4).

Таблица 4

10	9	12	14	11	8	13	9	10	9	8	13	11	14	11
10	13	11	10	10	14	11	10	9	9	12	10	9	12	9
10	9	11	9	10	10	10	11	9	12	13	11	13	12	10
9	11	14	13	11	9	12	11	9	10	13	12	15	11	11

2 При исследовании частоты использования буквы «о» в газетной лексике в 40 газетах было приближенно подсчитано количество букв «о», встречающихся во всех статьях каждой газеты. Данные (по газетам) были сведены в табл. 5.

Таблица 5

1040	1025	1052	1100	1028	1059	1047	1002	1043	1041
1041	1059	1047	1063	1043	1054	1040	1052	1028	1047

1054	1063	1040	1054	1025	1047	1043	1052	1063	1043
1063	1052	1041	1002	1059	1028	1100	1041	1054	1025

Построить статистическое распределение и начертить полигон данного статистического распределения количества букв «о» в данном исследовании.

3 Таможней за месяц было задержано 20 наркокурьеров, каждый из которых пытался провести вещества, содержащие наркотики. Измерения массы (в граммах) этих веществ у каждого из наркокурьеров были сведены в табл. 6.

Таблица 6

20,3	19,4	18,7	20,4	17,5	19,7	20,6	19,9	18,2	17,7
17,3	20,2	18,3	19,2	18,4	19,1	18,7	20,9	17,5	19,8

Построить гистограмму частот данного статистического распределения (взять, например, $h = 1$).

Мы рассмотрели способы представления статистических данных. Их анализ осуществляется с использованием методов математической статистики, которая, в свою очередь, опирается на методы теории вероятностей. Только применение математики к обработке статистических данных позволяет осуществлять глубокий анализ происходящих событий и строить реальные прогнозы на будущее.

К сожалению, программа по математике для студентов-гуманитариев не предусматривает глубокого изучения как теории вероятностей, так и математической статистики. В то же время существует достаточно большое количество книг, где можно самостоятельно получить необходимые знания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. М.: Просвещение, 1979.

2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2000.

3 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2000.

4 Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1976.

5 Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1971.

6 Кордемский Б.А. Математика изучает случайность. М.: Просвещение, 1975.

7 Пучков Н.П., Ткач Л.И. Теория множеств в курсе «Математика» для гуманитарных специальностей: Учеб.-метод. рекомендации. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004.