ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

♦ Издательство ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Теория автоматического управления

Учебно-методическое пособиедля студентов 3 курса заочного отделения специальности 220301 "Автоматизация технологических процессов и производств"

Тамбов
Издательство ТГТУ
2006

УДК 681.51
ББК ⌘965.73-5
Л17

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор
С.М. Дзюба

Авторы-составители:

Т.Я. Лазарева*, *Ю.Ф. Мартемьянов*, *В.Ю. Харченко

Л17 Теория автоматического управления: Учеб.-метод. пособие / Авт.-сост.: Т.Я. Лазарева, Ю.Ф. Мартемьянов, В.Ю. Харченко. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. 56 с.

Содержит сведения по теоретическим основам и методам расчета, проектирования и создания систем автоматизации. Даны программа и методические указания по изучению курса, варианты задач к контрольным работам, а также примеры их решения. В конце каждой темы приводятся вопросы для повторения теории и упражнения.

Предназначено для студентов 3 курса заочного отделения специальности 220301 "Автоматизация технологических процессов и производств".

УДК 681.51
ББК ⌘965.73-5

Учебное издание

Теория автоматического управления

Учебно-методическое пособие

Авторы-составители:
Лазарева Татьяна Яковлевна,
Мартемьянов Юрий Федорович,
Харченко Владимир Юрьевич

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынкова

Подписано к печати 24.01.2006.
Формат $60 \times 84/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Объем: 3,25 усл. печ. л.; 3,25 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. С. $24^{М}$

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматического управления является базовой дисциплиной подготовки инженеров по специальности "Автоматизация технологических процессов и производств", целью которой является изучение общих принципов построения и законов функционирования автоматических систем управления технологическими процессами, основных методов анализа и синтеза этих систем на базе современных математических методов и технических средств.

Кроме того, курс теории автоматического управления является базой для развития у студентов навыков анализа, проектирования и расчета систем управления как химико-технологических, так и родственных с ними производственных процессов. В связи с этим основное внимание в данном курсе уделяется общим методам изучения сущности протекающих в системах управления процессов. Анализ этих процессов требует знания математических приемов исследования, что накладывает свой отпечаток на его содержание. В начале курса даются общие понятия о системах управления, их характеристиках, основных звеньях, затем изучаются математические модели и методы исследования динамических процессов, вопросы устойчивости и качества систем автоматического управления. В заключении курса рассматриваются методы расчета систем автоматического регулирования.

Т е м а 1

Основные сведения о системах автоматического регулирования

Программа

Основные этапы развития теории управления. Современное состояние и перспективы развития теории автоматического управления. Классификация автоматических систем. Регулирование по отклонению. Принцип отрицательной обратной связи. Регулирование по возмущению. Основные элементы функциональной схемы системы автоматического регулирования. Регулярные сигналы и их характеристики. Определение линейной стационарной системы.

Методические указания

Студент должен ознакомиться с основными этапами развития теории управления, современным состоянием и перспективами дальнейшего развития теории автоматического управления, изучить классификацию систем управления, познакомиться с некоторыми простейшими системами автоматического регулирования, примеры которых можно найти в указанной литературе. После знакомства с основными понятиями теории управления необходимо изучить основные принципы регулирования: по отклонению, по возмущению, их особенности, достоинства и недостатки, область применения. Кроме того, необходимо познакомиться с основными элементами функциональной схемы системы автоматического управления: датчик, измерительное устройство, задающее устройство, элемент сравнения, регулятор, регулирующий орган, исполнительный механизм.

В заключение темы следует ознакомиться с понятием линейной стационарной системы, методом определения линейности системы, а также основными регулярными сигналами, используемыми для исследования систем управления, такими как прямоугольный импульс, единичная функция, импульсная функция.

Вопросы для самопроверки

1 Назовите основные этапы развития, современное состояние и перспективы развития теории автоматического управления.

2 Приведите примеры простейших систем автоматического управления.

3 В чем преимущества принципа регулирования по отклонению перед регулированием по возмущению?

4 Назовите основные элементы схемы системы управления. Выделите в простейшей системе автоматического управления эти элементы.

5 Дайте характеристику основных регулярных сигналов, используемых для исследования систем управления.

6 Какая система называется линейной?

Литература: [1, 2, 6].

Т е м а 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Программа

Основные способы математического описания. Уравнения движения. Линеаризация дифференциальных уравнений. Примеры уравнений объектов управления. Свободное, установившееся и переходное движения системы.

Статические и динамические характеристики. Временные динамические характеристики: кривая разгона и весовая функция линейных систем. Интеграл свертки.

Преобразование Лапласа. Определение передаточной функции, связь передаточной функции с дифференциальным уравнением, кривой разгона и весовой функцией.

Методические указания

Студент должен познакомиться с основными способами математического описания систем автоматического управления. Он должен понять, что уравнением движения системы управления является дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, обычно последние являются нелинейными, поэтому их необходимо бывает линеаризовать, т.е. заменить исходные нелинейные уравнения линейными, приближенно описывающими процессы в системе. Одним из методов линеаризации дифференциальных уравнений является разложение нелинейных функций, входящих в уравнение, в ряд Тейлора.

Как известно, решение дифференциального уравнения складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Общее решение однородного уравнения получило название – свободное движение системы, частное решение неоднородного уравнения – вынужденное движение системы или установившееся, общее решение неоднородного уравнения – переходное движение системы.

Далее студенту необходимо познакомиться с основными статическими и динамическими характеристиками. Под статической характеристикой следует понимать зависимость выходной величины от входной в установившемся режиме. Среди динамических характеристик различают временные характеристики (кривая разгона, весовая функция) и частотные в зависимости от действующего регулярного сигнала, а также дифференциальное уравнение и передаточную функцию. Последние две характеристики являются чисто теоретическими. В связи с этим необходимо изучить основной математический аппарат теории управления, используемый для описания динамических характеристик, которым является преобразование Лапласа. При этом необходимо знать преобразование Лапласа от элементарных функций, его свойства, уметь находить оригинал по дробно-рациональному изображению, решать линейные дифференциальные уравнения операционным методом. Здесь же необходимо познакомиться с основной динамической характеристикой объекта, наиболее широко используемой – передаточной функцией, представляющей собой отношение выходного сигнала объекта к его входному сигналу, преобразованных по Лапласу, а также уметь перейти от передаточной функции объекта к другим его динамическим характеристикам.

Вопросы для самопроверки

1 Что Вы понимаете под уравнением движения?
2 С какой целью проводится линеаризация дифференциальных уравнений?
3 Какая характеристика называется статической характеристикой?
4 Какие динамические характеристики Вам известны? Дайте их определение.
5 Что такое интеграл свертки?
6 Что представляет собой преобразование Лапласа от некоторой функции?
7 Для каких функций существует преобразование Лапласа?
8 Какая характеристика называется передаточной функцией элемента?
9 Как по известной передаточной функции объекта управления найти его кривую разгона, весовую функцию?

Литература: [1, 2].

Т е м а 3

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Программа

Частотные характеристики. Амплитудно-фазовая характеристика, амплитудно-частотная характеристика, фазо-частотная характеристика, вещественно-частотная характеристика, мнимая частотная характеристика. Определение частотных характеристик, их взаимосвязь. Физический смысл частотных характеристик. Понятие минимально-фазовой системы. Сравнение максимально фазовой системы с неминимально-фазовой.

Методические указания

При изучении данной темы следует обратить внимание на ряд определений амплитудно-фазовой характеристики (АФХ), в частности, определение АФХ, как отображение мнимой оси комплексной плоскости корней характеристического уравнения на плоскость амплитудно-фазовой характеристики. Рассматривая передаточную функцию как функцию комплексного переменного, можно исследовать отображение, задаваемое этой функцией. АФХ представляет часть этого отображения – отображение только мнимой части. Затем необходимо познакомиться и изучить составляющие амплитудно-фазовой характеристики – амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), фазо-частотную характеристику (ФЧХ), вещественную и мнимую частотные характеристики (ВЧХ, МЧХ). Необходимо знать физический смысл всех частотных характеристик и связь между собой, уметь переходить от одних характеристик к другим.

В заключение темы необходимо познакомиться с понятием минимально-фазовой системы, все нули передаточной функции которой лежат в левой полуплоскости.

Вопросы для самопроверки

1 Какая характеристика называется амплитудно-фазовой характеристикой?
2 Какие существуют формы записи амплитудно-фазовой характеристики?
3 Почему годограф АФХ большинства элементов начинается под прямым углом к действительной оси?
4 Как по известной передаточной функции найти частотные характеристики?
5 Как Вы понимаете минимально-фазовую систему? Приведите примеры минимально-фазовых систем.

Литература: [2, 6, 7].

Т е м а 4

ОСНОВЫ СТРУКТУРНОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ

Программа

Звено направленного действия. Типовые динамические звенья: усилительное звено, интегрирующее звено, идеальное и реальное дифференцирующие звенья, звено чистого запаздывания, апериодическое звено первого порядка, апериодическое звено второго порядка, колебательное звено. Основные способы соединения звеньев направленного действия: параллельное, последовательное и соединение с обратной связью. Алгебра передаточных функций. Правила преобразования структурных схем. Передаточные функции замкнутой одноконтурной системы автоматического регулирования по различным каналам. Типовые законы регулирования: пропорциональный (П), интегральный (И), пропорционально-дифференциальный (ПД), пропорционально-интегральный (ПИ), пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД).

Методические указания

Изучение темы необходимо начать с знакомства с типовыми динамическими звеньями, рассмотрев динамические характеристики каждого звена: передаточную функцию, дифференциальное уравнение, кривую разгона, весовую функцию, амплитудно-частотную, фазо-частотную, амплитудно-фазовую характеристики. Необходимо знать качественный вид всех перечисленных характеристик и уметь выводить их по известной передаточной функции.

С целью изучения в дальнейшем сложных схем систем автоматизации требуются знания структурного анализа. Здесь необходимо прежде всего изучить способы соединения звеньев: последовательное, параллельное, соединение с обратной связью, для каждого из них познакомиться с алгеброй передаточных функций, т.е. уметь получать передаточную функцию соединения, если известны передаточные функции отдельных звеньев. Например, передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев. Затем необходимо изучить правила преобразования структурных схем, таких, как перенос узла через узел, перенос узла через звено по направлению распространения сигнала и против, перенос сумматора через сумматор и др.; кроме того, необходимо научиться проводить структурные преобразования и получать передаточные функции сложных структурных схем. Закончить изучение этого раздела следует рассмотрением передаточных функций одноконтурной системы автоматического регулирования по различным каналам.

В простейшей системе регулирования – одноконтурной – в отрицательной обратной связи располагается регулятор, поэтому встает необходимость знания типовых законов регулирования и выпускаемых на их основе промышленных регуляторов. Типовые законы регулирования изучаются так же, как типовых динамических звеньев, с позиций их динамических характеристик. Необходимо знать особенности, достоинства и недостатки, область применения каждого из типовых регуляторов.

Вопросы для самопроверки

1 Дайте характеристику каждого из типовых звеньев, выведите для каждого звена все его динамические характеристики.
2 Назовите основные способы соединения звеньев.

3 Как Вы понимаете алгебру передаточных функций?
4 Проведите структурные преобразования заданной схемы.
5 Дайте краткую характеристику каждого из промышленных регуляторов.
6 Назовите области применения каждого из типовых регуляторов.

Литература: [1, 2].

Тема 5

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Программа

Понятие устойчивости и ее определение. Устойчивость решения обыкновенного дифференциального уравнения, признак устойчивости (необходимое и достаточное условие устойчивости). Необходимое условие устойчивости. Изображение свободных движений линейных стационарных систем второго порядка на фазовой плоскости. Алгебраический критерий устойчивости Рауса–Гурвица. Область устойчивости.

Частотные методы исследования устойчивости. Критерий Михайлова. Критерий Найквиста. Область применения критерия Найквиста. Метод Д-разбиения, построение области устойчивости.

Методические указания

Изучение данной темы необходимо начать с определения устойчивости и твердо уяснить, что устойчивость линейных систем автоматического управления, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, определяется расположением корней характеристического уравнения. Признак устойчивости дает необходимое и достаточное условия устойчивости и является базой, на которой стоят все критерии устойчивости; заключается он в отрицательности действительной части корней характеристического уравнения. В практическом применении использование признака устойчивости весьма ограничено, в связи с этим разработан ряд критериев и, прежде всего, необходимое условие – положительность коэффициентов характеристического уравнения.

Далее следует отметить, что при исследовании устойчивости широко используется изображение свободных движений систем в фазовом пространстве. Поэтому студенту необходимо познакомиться с понятиями фазового пространства, фазовой траектории, фазового портрета, а также изображением на фазовой плоскости свободных движений линейных стационарных систем второго порядка и только после этого можно приступить к изучению критериев устойчивости.

Все критерии устойчивости подразделяются на две группы: алгебраические и частотные. К первой группе относится критерий Рауса–Гурвица, который дает ответ об устойчивости системы, исходя из коэффициентов характеристического уравнения, из которых составляется так называемый главный определитель Гурвица. Из определителя Гурвица составляются диагональные миноры, которые для устойчивых систем должны быть положительны.

Ко второй группе критериев относятся частотные критерии Михайлова и Найквиста. Наибольшее практическое применение получил критерий Найквиста, позволяющий по АФХ разомкнутой системы судить об устойчивости замкнутой системы. Это единственный критерий, используемый в тех случаях, когда характеристики отдельных элементов и систем заданы экспериментально, а также для систем с запаздыванием. Частотные критерии являются графоаналитическими.

К частотным методам исследования устойчивости относится и метод Д-разбиения, позволяющий разбить комплексную плоскость коэффициентов характеристического уравнения на области с равным количеством левых и правых корней характеристического уравнения, выделив таким образом область устойчивой работы.

Вопросы для самопроверки

1 Как расположены корни характеристического уравнения устойчивой, неустойчивой систем и системы, находящейся на границе устойчивости?
2 В чем заключается необходимое условие устойчивости?
3 Что такое фазовое пространство?
4 Какие виды фазовых портретов имеют линейные стационарные системы второго порядка?
5 Сформулируйте критерий Рауса–Гурвица и исследуйте на устойчивость заданную систему.
6 С какой целью определяется область устойчивости с использованием критерия Гурвица?
7 Сформулируйте критерий Михайлова и исследуйте на устойчивость заданную систему.
8 Сформулируйте критерий Найквиста и исследуйте на устойчивость заданную систему.
9 Назовите основные области применения критерия Найквиста.
10 Опишите метод Д-разбиения. Как описывается область устойчивой работы?

Литература: [1, 2, 6].

Тема 6

ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Программа

Устойчивые и неустойчивые звенья. Синтез устойчивых систем, построение границы устойчивости для систем с ПИ- и ПД-регуляторами, граница устойчивости для систем с П- и И-регуляторами. Оценка запаса устойчивости: корневые методы оценки запаса устойчивости, частотные методы. Анализ систем на запас устойчивости, расширенные частотные характеристики. Синтез систем, обладающих заданным запасом устойчивости. Системы с П-регулятором, системы с И-регулятором, системы с ПИ-регулятором и системы с ПД-регулятором.

Методические указания

Основное внимание при изучении темы необходимо обратить на показатели оценки запаса устойчивости, которые подразделяются на две основных группы: корневые – степень устойчивости и степень колебательности, частотные – запас устойчивости по модулю, запас устойчивости по фазе, показатель колебательности. При проведении анализа систем на запас устойчивости следует обратить внимание на расширенные частотные характеристики, их отличие от обычных частотных характеристик. Далее необходимо изучить основные методы синтеза систем на заданный запас устойчивости, остановившись, прежде всего, на методе расширенных амплитудно-фазовых характеристик и его применении для параметрического синтеза одноконтурных систем автоматического регулирования с различными типовыми законами регулирования.

Вопросы для самопроверки

1 Как Вы понимаете вопрос обеспечения запаса устойчивости?

2 Что такое степень колебательности?

3 Какой физический смысл имеет показатель колебательности?

4 Каков механизм получения расширенных частотных характеристик?

5 В чем заключается алгоритм параметрического синтеза одноконтурных систем методом расширенных частотных характеристик?

6 Почему системы автоматического регулирования рассчитываются на заданный запас устойчивости, а не на запас устойчивости вышезаданного?

Литература: [1, 2].

Т е м а 7

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Программа

Требования к переходному процессу. Прямые показатели качества. Косвенные методы исследования качества регулирования.

Показатели качества: частотные, корневые, интегральные.

Исследование автоматических систем с помощью частотных характеристик. Трапециидальные характеристики. Методы построения переходных процессов: метод трапеций, метод Акульшина.

Методические указания

Прежде всего необходимо познакомиться с критериями качества переходных процессов, которые, как и методы исследования, делятся на группы. Среди всего множества критериев следует выделить прямые показатели качества, которые позволяют оценить качество регулирования непосредственно по кривой переходного процесса (статическая ошибка, динамическая ошибка, время регулирования, степень затухания и перерегулирование). Следующими показателями качества являются косвенные показатели – корневые (степень устойчивости и степень колебательности), интегральные (линейный, модульный, квадратичный и обобщенные). Частотные показатели качества позволяют оценить качество регулирования по частотным характеристикам, в частности, по вещественно-частотной характеристике системы, так как установлена взаимосвязь между вещественно-частотной характеристикой и кривой переходного процесса. На основе этой взаимосвязи разработан метод построения кривой переходного процесса – метод трапеций. В последние годы наибольшее применение получил метод Акульшина, использующий амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики замкнутой системы.

Вопросы для самопроверки

1 Какова связь степени затухания со степенью колебательности?

2 В чем состоят особенности интегральных критериев качества?

3 Сформулируйте основные свойства вещественных частотных характеристик и соответствующих им переходных процессов.

4 В чем заключается метод трапеций построения переходного процесса.

5 На чем основан метод Акульшина построения кривой переходного процесса?

Литература: [1, 2, 6].

Т е м а 8

СИНТЕЗ ОДНОКОНТУРНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Программа

Задача синтеза. Выбор оптимальных настроек регуляторов методом незатухающих колебаний. Графоаналитический метод синтеза систем. Алгоритм расчета области настроек типовых регуляторов методом РАФХ. Выбор оптимальных настроек типовых регуляторов из условия минимума интегрального квадратичного критерия качества регулирования.

Методические указания

Как известно, основным и практически наиболее важным приложением результатов полученных теорий автоматического управления является синтез автоматических систем, под которым следует понимать выбор структуры и составных элементов системы. При изучении данной темы студент знакомится только с вопросами параметрического синтеза оптимальных законов регулирования. В зависимости от критерия качества регулирования различают ряд методов параметрического синтеза. При использовании интегрального квадратичного критерия качества регулирования для расчета оптимальных настроек регуляторов используется метод расширенных частотных характеристик. Этот метод имеет в последнее время наибольшее применение из всех точных методов параметрического синтеза. Второй точный метод основан на сравнении частотных характеристик реальной системы с идеальной. Он получил название графоаналитического метода или метода расчета оптимальных настроек регуляторов по амплитудно-фазовой характеристике регулируемого объекта.

После общего знакомства с точными методами необходимо освоить методику выбора оптимальных настроек типовых законов регулирования: пропорционального, интегрального, пропорционально-интегрального, пропорционально-интегрально-дифференциального.

В заключение необходимо познакомиться с приближенными методами параметрического синтеза, в частности, с методом незатухающих колебаний.

Вопросы для самопроверки

1 Как Вы понимаете синтез оптимальных законов регулирования?

2 В чем заключается физическая осуществимость оптимальных алгоритмов?

3 Для чего используется понятие РАФХ в расчете настроек регуляторов?

4 Как меняется переходный процесс в системе с ПИ-регулятором с увеличением интегральной составляющей от нуля до номинального значения?

5 Каковы особенности расчета ПИД-регуляторов?

Литература: [1].

Т е м а 9

СТАТИЧЕСКИЕ И АСТАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. СХЕМНЫЕ МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Программа

Понятие статических и астатических объектов, регуляторов и систем. Переходные процессы.

Системы регулирования с сигналами из промежуточной точки. Каскадные АСР. Регулирование объектов с взаимосвязанными координатами. Условия автономности. Принцип инвариантности, условия реализуемости инвариантных систем.

Методические указания

Вопрос о статическом и астатическом регулировании всегда вызывает трудности, поэтому необходимо прежде всего познакомиться с понятиями статических и астатических объектов, регуляторов и систем регулирования.

Далее следует познакомиться со схемными методами повышения качества регулирования переходных процессов. Наиболее распространенными являются двухконтурные схемы регулирования – это каскадные АСР, АСР с введением производной из промежуточной точки. Необходимо уметь приводить примеры этих промышленных АСР, освоить методику расчета настроек регуляторов двухконтурных схем. Особое внимание следует обратить на случай, когда быстродействие внутреннего контура значительно превосходит внешний, а также на приведение схемы с сигналом из промежуточной точки к двухконтурной схеме.

При изучении вопроса регулирования объектов с взаимосвязанными координатами более подробно следует изучить обоснования внутренних связей по переходным каналам, принципы автономности и инвариантности. Автономное регулирование позволяет, вводя внешние компенсирующие связи между регуляторами, добиться расчленения сложной системы со многими взаимосвязанными параметрами на ряд простейших систем, обладающих одним регулируемым параметром каждая. Инвариантное же регулирование позволяет достичь независимости регулируемой величины от внешних возмущающих воздействий путем их полной компенсации. Особое внимание следует обратить на особенности, достоинства, недостатки, а также методы расчета и условия реализуемости систем автономного и инвариантного регулирования.

Вопросы для самопроверки

1 Какое регулирование называется статическим?

2 В чем заключается особенность расчета настроек регуляторов двухконтурной АСР, если их быстродействия близки?

3 Почему в схемах с введением сигнала из промежуточной точки используется дифференцирующее устройство?

4 Перечислите условия реализуемости компенсаторов.

5 Выведите условие автономности для возможных схем компенсации.

6 Как определяются настройки конкретных типов компенсаторов?

Литература: [6, 7].

Тема 10

ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Программа

Понятие нелинейной системы. Особенности нелинейных систем. Методы линеаризации нелинейных систем: линеаризация в малом, в среднем; гармоническая и статистическая линеаризация.

Метод фазового пространства исследования нелинейных систем. Методы построения фазовых портретов: метод изоклин, методы припасовывания и сшивания. Принципиальные особенности фазовых портретов нелинейных систем. Связь фазового портрета с переходным процессом.

Автоколебания в нелинейных системах. Мягкое и жесткое возбуждение автоколебаний. Методы исследования автоколебаний: критерий Бендиксона, метод точечного преобразования, метод гармонического баланса.

Методические указания

Изучение темы следует начать с понятия нелинейной системы, с повторения принципа суперпозиции, с знакомства с характерными особенностями нелинейных систем, такими, как зависимость частотных характеристик от амплитуды, понятия устойчивости "в малом" и "в большом" и др. Затем следует познакомиться с типовыми статическими нелинейностями систем автоматического регулирования – это усилительное звено с ограничением амплитуды, двухпозиционное реле и др.; рассмотрев их статические характеристики и прохождение гармонического сигнала через эти типовые нелинейные звенья.

Основным методом исследования нелинейных систем является их сведение к линейным системам. Поэтому следующий вопрос, на который следует обратить внимание, – это методы линеаризации. С одним из методов линеаризации – разложение в ряд Тейлора – знакомились в начале курса; здесь предстоит познакомиться с другими методами – гармонической линеаризацией, применяемой для существенно нелинейных зависимостей, вибрационной линеаризацией, применяемой для линеаризации релейных элементов, и статистической линеаризацией, применяемой для систем со случайными воздействиями.

Следующим методом исследования нелинейных систем является уже рассмотренный ранее метод фазового пространства. В связи с этим необходимо изучить методы построения фазовых портретов: метод изоклин, используемый для качественной оценки хода фазовых траекторий, методы припасовывания и сшивания, используемые при возможности кусочно-линейной аппроксимации нелинейной характеристики. Особое внимание следует уделить особенностям фазовых портретов нелинейных систем, среди которых выделяют предельный цикл, сепаратрисы, познакомиться с характерным примером фазового портрета нелинейной системы.

В заключение темы необходимо изучить такую особенность нелинейных систем, как явление автоколебаний, т.е. возможность возникновения незатухающих колебаний в нелинейной системе, обусловленных внутренними особенностями этой системы. Параметры автоколебаний – амплитуда и частота – зависят от начальных условий и определяются свойствами системы, условиями их возникновения. Различают два режима возникновения автоколебаний: мягкое и жесткое возбуждение. Основными методами исследования автоколебаний, позволяющими ответить на вопрос об их возникновении, параметрах автоколебаний являются критерий Бендиксона, метод точечного преобразования и метод гармонического баланса.

Вопросы для самопроверки

1 Дайте сравнительную характеристику линейных и нелинейных систем.

2 Изобразите реакцию типовых нелинейных звеньев на воздействие гармонического входного сигнала.

3 Для заданного нелинейного элемента одним из известных Вам методов проведите линеаризацию.

4 Постройте фазовый портрет нелинейного элемента одним из известных методов.

5 Что такое автоколебания?

6 Изобразите фазовые портреты нелинейной системы, иллюстрирующие режимы мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний.

Литература: [1, 3].

Тема 11

УСТОЙЧИВОСТЬ И КАЧЕСТВО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Программа

Устойчивость состояния равновесия и автоколебаний в нелинейных системах. Устойчивость по А.М. Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Первый и второй методы А.М. Ляпунова.

Абсолютная устойчивость. Метод В.П. Попова. Приближенные методы исследования устойчивости и параметров автоколебаний. Метод гармонического баланса.

Качество переходных процессов в нелинейных системах. Улучшение динамических свойств систем при помощи нелинейных связей.

Методические указания

Сложные вопросы устойчивости процессов регулирования нелинейной системы можно наглядно представить, используя, как и в линейных системах, понятие фазового пространства. Здесь необходимо обратить внимание на различные виды устойчивости и их геометрическую интерпретацию в фазовом пространстве. В частности, необходимо знать понятия орбитальной устойчивости; устойчивости нелинейной системы "в малом", "в большом", "в целом"; устойчивости по А.М. Ляпунову; асимптотической устойчивости.

Для исследования устойчивости нелинейных систем используются два метода А.М. Ляпунова. Первый из них позволяет исследовать устойчивость системы "в малом", а второй – "в большом". Необходимо уметь формулировать теоремы Ляпунова, применять их к решению задач, знать основные проблемы практического использования второго метода – это выбор функции Ляпунова. Необходимо познакомиться с рекомендации по составлению функции Ляпунова для конкретных систем.

Для исследования абсолютной устойчивости используется метод В.П. Попова, относящийся к группе частотных методов. Студенту рекомендуется познакомиться с функцией Попова, знать геометрическую интерпретацию метода.

Изучение устойчивости нелинейных систем следует закончить приближенными методами исследования устойчивости автоколебаний. Здесь необходимо отметить использование такого метода, как метод гармонического баланса, основанного на применении частотных характеристик, полученных при гармонической линеаризации нелинейностей.

В заключение темы студент знакомится с вопросами качества переходных процессов в нелинейных системах.

Вопросы для самопроверки

1 Как вы понимаете устойчивость состояния равновесия и устойчивость автоколебаний?

2 Дайте сравнительную характеристику различных видов устойчивости.

3 Прокомментируйте использование первого и второго методов устойчивости А.М. Ляпунова.

4 Покажите связь критерия абсолютной устойчивости Попова с критерием Найквиста.

5 Как определить устойчивость автоколебаний методом гармонического баланса?

Литература: [3, 4, 6].

Тема 12

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Программа

Элементы теории вероятности. Случайные величины, законы распределения и вероятностные характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, центрированная случайная величина. Понятие об оценках, требования к оценкам.

Случайные стационарные процессы, свойство эргодичности, марковские процессы. Характеристики случайных процессов: корреляционная функция, спектральная плотность.

Преобразование случайных сигналов линейными системами. Характеристики выходного сигнала. Связь между корреляционными функциями, спектральными плотностями входного и выходного сигналов.

Основные задачи анализа и синтеза систем при случайных воздействиях. Оптимальная ширина полосы пропускания идеального полосового фильтра. Анализ и синтез систем по минимуму среднеквадратичной погрешности. Общая задача упреждения и фильтрации. Уравнение Винера-Хопфа и методы его решения.

Методические указания

Студентам заочного отделения тему "Случайные процессы в системах автоматического управления" рекомендуется изучить обзорно, познакомившись с основными понятиями, используемыми при описании случайных величин, случайных стационарных процессов. Необходимо изучить и уметь составлять корреляционную функцию и спектральную плотность случайного процесса, понять суть расчета систем автоматического управления со случайными воздействиями, знать уравнение Винера-Хопфа.

Вопросы для самопроверки

1 Назовите основные характеристики случайной величины.
2 Какой случайный процесс называется случайным стационарным процессом?
3 Что такое свойство эргодичности?
4 Как экспериментально определить корреляционную функцию случайного процесса?
5 В чем заключается расчет системы автоматического управления со случайными воздействиями?
6 Какие методы определения спектральной плотности Вам известны? Какой из них наиболее эффективен с Вашей точки зрения?
7 Какие методы решения уравнения Винера-Хопфа Вы знаете?

Литература: [2, 3, 6].

ЗАДАНИЯ

Контрольная работа 1

***Задача* 1**

Найти оригиналы по заданным изображениям (табл. 1).

Таблица 1

№ варианта	$F_1(s)$	$F_2(s)$
0	$\dfrac{2e^{-s}}{s+1}$	$\dfrac{s+6}{(s+1)(s^2+3s+2)(s^2+s+1)}$
1	$\dfrac{5e^{-3s}}{s^2+4}$	$\dfrac{5s+8}{s^2(p+2)(s^2+5s+5)}$
2	$\dfrac{e^{-2s}}{4s+2}$	$\dfrac{s+6}{(s+2)(s^2+3s)(s^2+4s+5)}$
3	$\dfrac{3e^{-2s}}{6s+1}$	$\dfrac{2s+8}{s(s^2+2s)(s^2+4s+5)}$
4	$\dfrac{2e^{-3s}}{s^3}$	$\dfrac{5}{(s+4)(s^2+6s+8)(s^2+4s+29)}$
5	$\dfrac{4e^{-3s}}{3s+1}$	$\dfrac{2s+10}{s^4(s^2+6s+10)}$
6	$\dfrac{5e^{-2s}}{s^3}$	$\dfrac{12}{(s+1)(s^2+9s+14)(s^2+s+1)}$
7	$\dfrac{7e^{-2s}}{(s+3)^3}$	$\dfrac{2s+5}{s^3(s^2+5s+13)}$
8	$\dfrac{3e^{-2s}}{s+2}$	$\dfrac{10}{(s+5)(s^2+6s-4)(s^2+s+10)}$
9	$\dfrac{e^{-4s}}{s^4}$	$\dfrac{12s+8}{s^3(s+1)(s^2+s+1)}$

***Задача* 2**

С помощью преобразования Лапласа решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями (табл. 2).

Таблица 2

№ вари-	Уравнение	Начальные условия

анта		
0	$y'' + 4y' + 3y = 2e^{-t}\cos(t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
1	$y'' + y' + 5y = 2\sin(t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 0$
2	$y'' - 2y' + 5y = 2\sin(2t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
3	$y'' - y' + 2y = 3e^{2t}\cos(2t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
4	$y'' + 6y' + 13y = \int\limits_0^t e^t\,dt$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
5	$y'' + y' - 5y = 2e^{2t}\sin(t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
6	$y'' + 2y' + y = e^t$	$y(0) = 1;\ y'(0) = 0$
7	$y^{IV} - y'' = e^{-t}\cos(t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = -1;\ y''(0) = y'''(0) = 0$
8	$y''' - y'' = e^{2t}$	$y(0) = 1\ ;\ y'(0) = y''(0)$
9	$y'' - y' = te^{2t}$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 0$

***Задача* 3**

По известной кривой разгона и весовой функции линейного элемента (табл. 3) найти: 1) реакцию на входной сигнал $x(t)$; 2) весовую функцию или кривую разгона соответственно; 3) передаточную функцию элемента.

Таблица 3

№ варианта	$h(t)$	$\omega(t)$	$x(t)$
0	$1-e^{-3t}$	e^{-t}	t^2
1	$4e^{-2t}$	$t\cdot e^{-2t}$	t
2	t^2+t	$1-e^{-t}$	$1-e^{-t}$
3	$1-e^{-2t}$	$4e^{-2t}$	$1-e^{-2t}$
4	$-1-e^{-2t}+t$	$t\cdot e^{-t}$	t^2-1
5	$1-e^{-t}\cos t$	$8t\cdot e^{-t/2}$	$t-1$
6	t^2+1	e^{-2t}	$\sin 3t$
7	$2t^2$	$2-t\cdot e^{-t}$	$1-e^{-2t}\sin t$
8	$2(1-e^{-3t})$	$t\cdot e^{-2t}$	$2t^2+t$
9	$1-e^{-2t}\sin 3t$	$5e^{-3t}$	$t+1$

***Задача* 4**

По известной передаточной функции элемента $W(s)$ найти его кривую разгона, весовую функцию, амплитудно-частотную, фазо-частотную, амплитудно-фазовую характеристики. Построить графики. Записать дифференциальное уравнение элемента, связывающее выходную координату и входную координату (табл. 4).

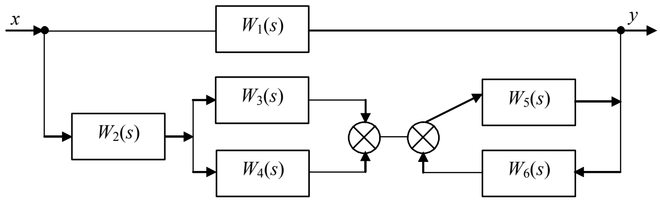
Таблица 4

№ варианта	Передаточная функция $W(s)$	№ варианта	Передаточная функция $W(s)$
0	$\dfrac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$	5	$\dfrac{s+1}{(3s+1)(2s+1)}$
1	$\dfrac{4s+1}{(2s+1)(s+2)}$	6	$\dfrac{2s+3}{(3s+1)(4s+3)}$
2	$\dfrac{2s+3}{(2s+1)(s+3)}$	7	$\dfrac{5s+4}{(2s-3)(4s+3)}$
3	$\dfrac{2s+5}{(3s+2)(2s+4)}$	8	$\dfrac{3s+2}{(2s+1)(s+2)}$
4	$\dfrac{3s+2}{(3s+4)(s+1)}$	9	$\dfrac{s+2}{(2s+1)(3s+2)}$

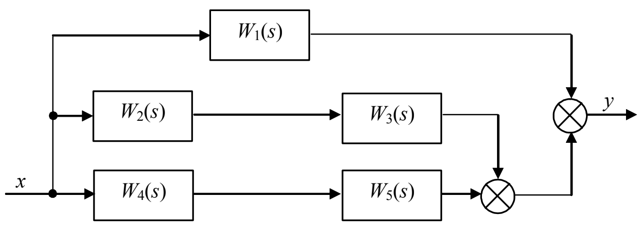
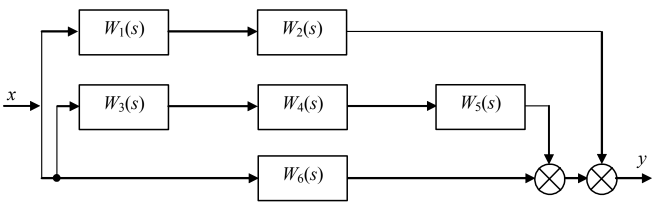
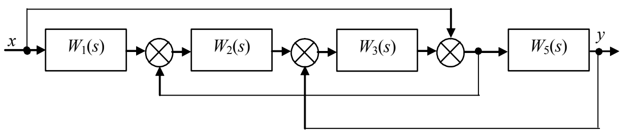
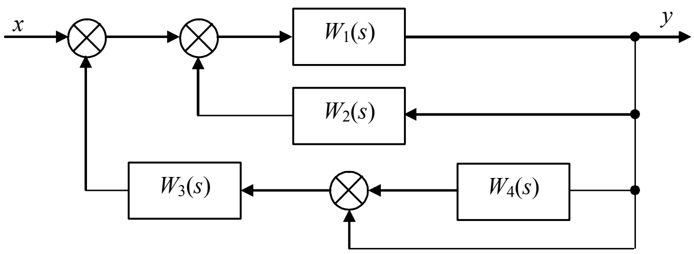
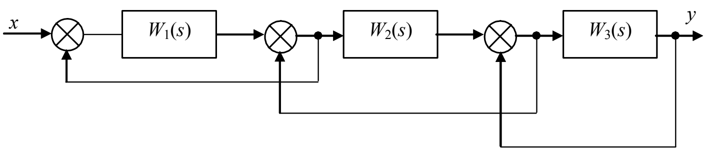
***Задача* 5**

Вывести передаточную функцию для заданной структурной схемы (табл. 5).

Таблица 5

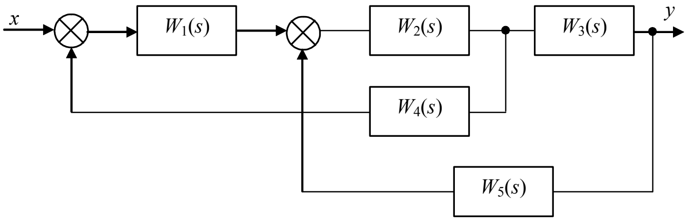
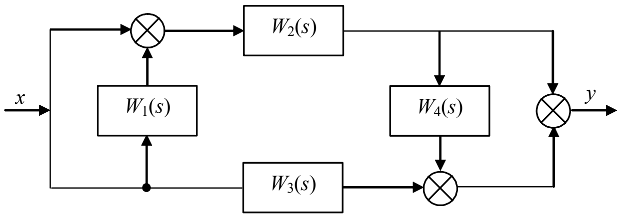
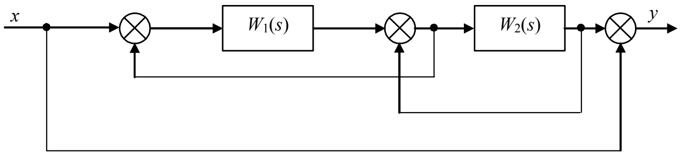
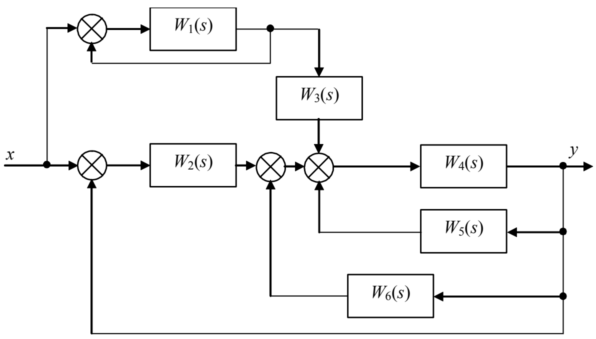
№ варианта	Структурная схема
0	

Продолжение табл. 5

№ варианта	Структурная схема
1	
2	
3	
4	
5	

Продолжение табл. 5

№ варианта	Структурная схема
6	

	
7	
8	
9	

***Задача* 6**

Исследовать на устойчивость систему автоматического регулирования, схема которой приведена на рис. 1 (табл. 6):

1) с помощью критерия Рауса–Гурвица;
2) с помощью критерия Михайлова.

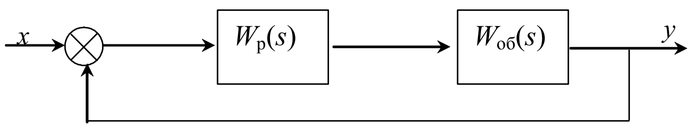


Рис. 1

Таблица 6

№ варианта	$W_{\text{р}}(s)$	$W_{\text{об}}(s)$
0	$\dfrac{4+3s}{s}$	$\dfrac{3s+1}{3s^3+2s^2+s+1}$
1	$1+2s$	$\dfrac{3}{2s^4+s^3+2s^2+3s+4}$
2	$\dfrac{3+s}{s}$	$\dfrac{2}{3s^3+s^2+s+1}$
3	$3s+2$	$\dfrac{4}{4s^4+3s^3+2s^2+2}$

4	$\frac{6}{s}$	$\frac{2s^2+1}{3s^3+3s^2+2s+3}$
5	2	$\frac{s^2+5}{3s^4+s^3+5s^2+s+1}$
6	$3s+1$	$\frac{3s^2+s+1}{s^4+2s^3+2s^2+s+5}$
7	$\frac{1}{2s}$	$\frac{s+2}{s^3+2s^2+s+4}$
8	$4s+1$	$\frac{4}{s^4+2s^3+7s^2+s+6}$
9	$\frac{3s+2}{s}$	$\frac{2s+3}{s^3+2s^2+s+10}$

***Задача* 7**

Исследовать на устойчивость с помощью критерия Найквиста систему автоматического регулирования, схема которой приведена на рис. 2 (табл. 7).

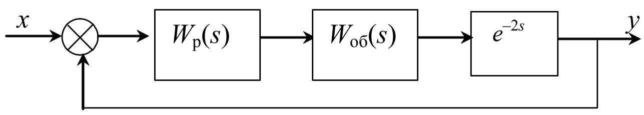


Рис. 2

Таблица 7

№ варианта	$W_р(s)$	$W_{об}(s)$
0	$3+\frac{1}{2s}$	$\frac{5}{3s+1}$
1	$6+\frac{1}{s}$	$\frac{10}{2s+1}$
2	$4+\frac{1}{s}$	$\frac{10}{s+1}$
3	$7+\frac{2}{s}$	$\frac{6}{s+1}$
4	$6+\frac{2}{s}$	$\frac{4}{s+2}$
5	$5+\frac{2}{2s}$	$\frac{6}{s+8}$
6	$10+\frac{1}{s}$	$\frac{3}{2s+3}$
7	$4+\frac{2}{s}$	$\frac{2}{3s+1}$
8	$1+\frac{2}{s}$	$\frac{4}{5s+1}$
9	$3+\frac{2}{s}$	$\frac{15}{2s+1}$

Контрольная работа 2

***Задача* 1**

Уравнение статики объекта имеет вид, представленный в табл. 8. Линеаризовать уравнение в окрестности точки $x_0=1$, $y_0=y(x_0)=y(1)$. Построить статическую характеристику линеаризованного объекта и сравнить с исходной.

Таблица 8

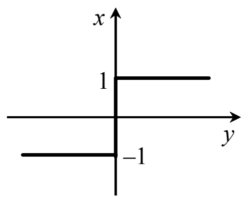
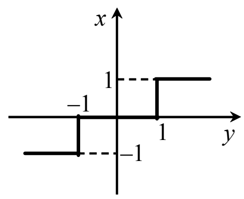
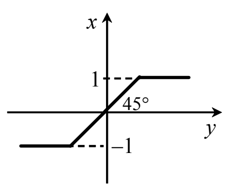
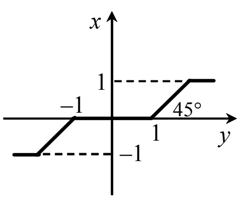
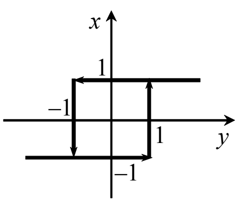
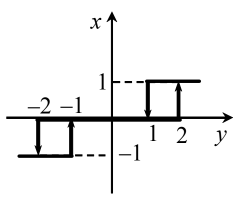
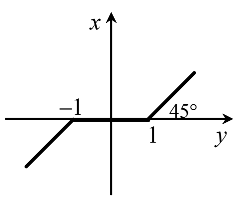
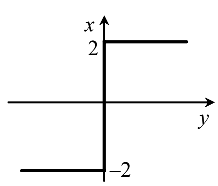
№ варианта	Статическая характеристика	№ варианта	Статическая характеристика
0	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	1	$y^3 = x$
2	$y = \ln(x+1)$	3	$y = e^x$
4	$y = x^4$	5	$y = x^2 + 1$
6	$y = x^5$	7	$y = \dfrac{1}{x}$
8	$y^2 = x$	9	$y = 3x^2 \ln x$

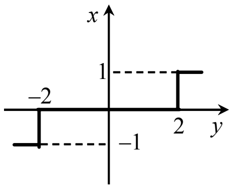
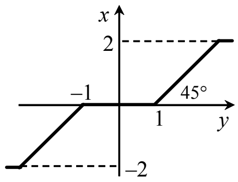
***Задача* 2**

На вход нелинейного элемента подаются гармонические колебания. Нарисовать вынужденные колебания на выходе нелинейного элемента. Вывести формулу эквивалентной передаточной функции нелинейного элемента с помощью метода гармонической линеаризации. Статическая характеристика нелинейного элемента приведена в табл. 9.

Таблица 9

Продолжение табл. 9

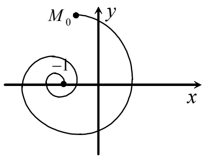
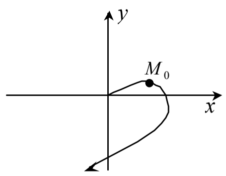
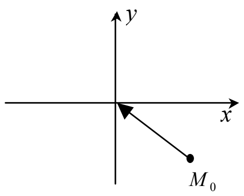
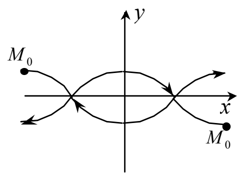
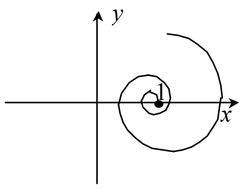
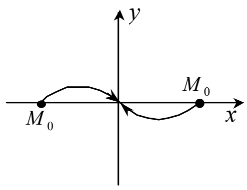
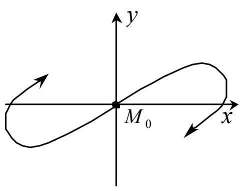
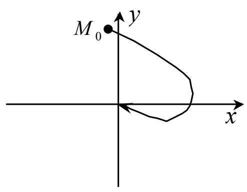
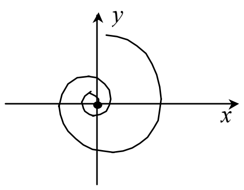
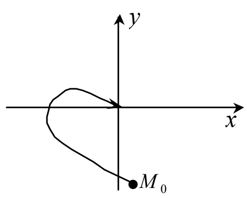
№ варианта	Статическая характеристика	№ варианта	Статическая характеристика
0		1	
2		3	
4		5	
6		7	

8		9	

***Задача* 3**

Нарисовать (качественно) переходные процессы, соответствующие фазовым траекториям, указанным в табл. 10.

Таблица 10

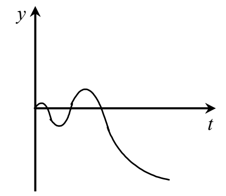
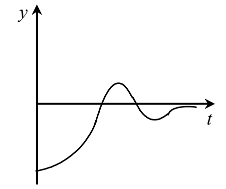
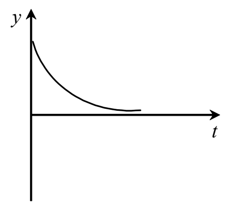
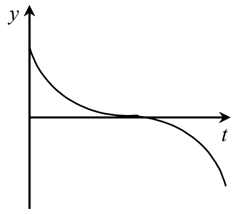
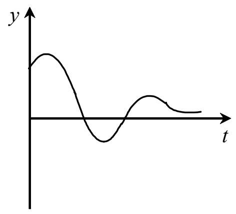
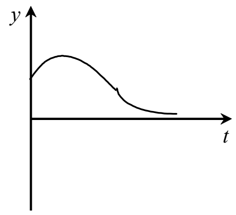
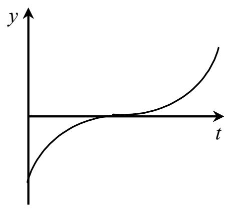
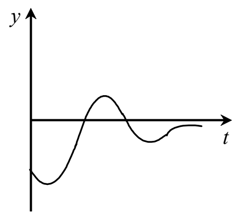
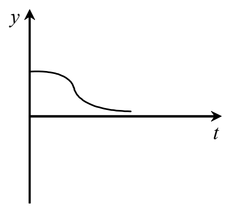
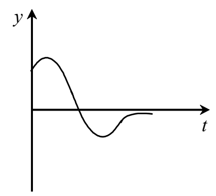
№ варианта	Фазовая траектория	№ варианта	Фазовая траектория
0		1	
2		3	
4		5	
6		7	
8		9	

***Задача* 4**

Нарисовать (качественно) фазовые траектории, соответствующие переходным процессам, указанным в табл. 11.

Таблица 11

№ варианта	Фазовая траектория	№ варианта	Фазовая траектория

0		1	
2		3	
4		5	
6		7	
8		9	

***Задача* 5**

Построить методом изоклин фазовый портрет для системы, уравнение движения которой представлено в табл. 12.

Таблица 12

№ варианта	Уравнение	№ варианта	Уравнение
0	$x'' + x'x^2 + x = 1$	1	$x''x^2 + x' + 0{,}5x = 3$
2	$x''x + x' + x^2 = 1$	3	$x''x + x'x^2 + x = 1$
4	$x''x^2 + x' + x = 1$	5	$x'' + x' + x^2 = 2$
6	$x'' + x'x^2 + 2x = 3$	7	$x'' + x'x + 3x = 4$
8	$x''x + 0{,}5x + x^2 = 3$	9	$x''x^2 + x' + x = 2$

***Задача* 6**

Определить возможные состояния равновесия системы и исследовать их устойчивость первым методом Ляпунова, если она описывается системой уравнений: $\dfrac{dx}{dt} = P(x, y)$; $\dfrac{dy}{dt} = Q(x, y)$ (табл. 13).

Таблица 13

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
0	$P(x, y) = 0{,}5y^2 - y + x$	1	$P(x, y) = y$

	$Q(x,y)=xy+1$		$Q(x,y)=y-x^2+2x$
2	$P(x,y)=y-x+1$ $Q(x,y)=y-x^2+2x$	3	$P(x,y)=x+y$ $Q(x,y)=2x^2+y-1$
4	$P(x,y)=0{,}5x+y$ $Q(x,y)=2xy+1$	5	$P(x,y)=y-x^2+2x$ $Q(x,y)=xy+1$
6	$P(x,y)=2x^2+y+1$ $Q(x,y)=y-x^2+2x$	7	$P(x,y)=2x^2y+1$ $Q(x,y)=x+y$
8	$P(x,y)=y^2x+1$ $Q(x,y)=x+0{,}5y$	9	$P(x,y)=y^2-y+2x$ $Q(x,y)=3x^2+y$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Контрольная работа 1

***Задача* 1.** Найти оригиналы по заданным изображениям, используя преобразование Лапласа:

$$F_1(s)=\frac{4e^{-s}}{(s+3)^2},\qquad F_2(s)=\frac{3s+7}{s^3(s^2+6s+13)}.$$

По таблице преобразования Лапласа и свойствам преобразования Лапласа найдем

$$F_1(t)=4I(t-1)te^{-3(t-1)},$$

где I – единичная функция.

Для определения преобразования Лапласа от дроби $F_2(s)$ необходимо эту правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших дробей, которые определяются в соответствии с корнями характеристического уравнения и по которым преобразование Лапласа можно взять, используя таблицы преобразования; рассматриваемая дробь имеет три нулевых корня и пару комплексно-сопряженных корней, поэтому она разлагается на простейшие дроби следующим образом:

$$F_2(s)=\frac{3s+7}{s^3(s^2+6s+13)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{(s^2+6s+13)}=$$

$$=\frac{As^2(s^2+6s+13)+Bsp(s^2+6s+13)+C(s^2+6s+13)+(Ds+E)s^3}{s^3(s^2+6s+13)}.$$

В результате разложения получена сумма простейших дробей, коэффициенты которых определяются методом неопределенных коэффициентов, для чего рассматривается равенство двух дробей. Две правильные рациональные дроби равны между собой, если равны их числители и знаменатели. Так как знаменатели равны, то, следовательно, необходимо приравнять друг к другу и числители. Приравняв в числителях коэффициенты при одинаковых степенях параметра s, получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases}A+D=0;\\ 6A+B+E=0;\\ 13A+6B+C=0;\\ 13B+6C=3;\\ 13C=7.\end{cases}$$

Решение системы дает следующие корни:

$$A=-\frac{73}{2197};\quad B=-\frac{3}{169};\quad C=\frac{7}{13};\quad D=\frac{73}{2197};\quad E=\frac{477}{2197}.$$

Таким образом, исходная дробь записывается в виде

$$F_2(p)=\frac{7}{13}\frac{1}{s^3}-\frac{3}{169}\frac{1}{s^2}-\frac{73}{2197}\frac{1}{s}+\frac{1}{2197}\frac{73s+477}{s^2+6s+13}.$$

В соответствии с таблицами преобразований Лапласа оригинал имеет вид

$$F_2(t)=\frac{7}{26}t^2-\frac{3}{169}t-\frac{73}{2197}+\frac{73}{2197}+e^{-3t}\cos 2t+\frac{129}{2197}e^{-3t}\sin 2t.$$

***Задача* 2.** С помощью преобразования Лапласа решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями:

$$y^{III} - y^{II} = e^{-2t};$$
$$y(0) = 0;\ y^{I}(0) = 0;\ y^{II}(0) = 0.$$

При решении уравнения с использованием преобразования Лапласа необходимо его преобразовать по Лапласу с учетом начальных условий:

$$y(s)s^3 - y(s)s^2 = \frac{1}{(s+2)}.$$

Из последнего выражения определяется $y(s)$, которое и является решением уравнения, но оно записано в терминах преобразования Лапласа. Для получения решения уравнения во временной области полученная дробь разлагается на простейшие дроби, от которых в последствии по таблицам необходимо взять обратное преобразование Лапласа. В результате разложения получаем следующее выражение:

$$y(s) = \frac{1}{(s+2)s^2(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s-1} =$$
$$= \frac{As^2(s-1) + B(s+2)s(s-1) + C(s+2)(s-1) + D(s+2)s^2}{(s+2)s^2(s-1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в числителе, записываем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} A + B + D = 0; \\ -A + B + C + 2D = 0; \\ -2B + C = 0; \\ -2C = 1. \end{cases}$$

Решение системы:

$$C = -\frac{1}{2};\quad B = -\frac{1}{4};\quad A = -\frac{1}{12};\quad D = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, дробь разложена на следующие простейшие дроби:

$$y(s) = -\frac{1}{12(s+2)} - \frac{1}{4s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{3(s-1)}.$$

Взяв обратное преобразование Лапласа от последнего выражения, получим

$$y(t) = -\frac{1}{12}e^{-2t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}e^{t}.$$

Функция $y(t)$ является решением дифференциального уравнения.

***Задача* 3.** По известной кривой разгона и весовой функции линейного элемента найти:

1. реакцию на входной сигнал $x(t)$;
2. весовую функцию или кривую разгона соответственно;
3. передаточную функцию элемента.

Задано: кривая разгона – $h(t) = 2t$; весовая функция – $\omega(t) = 1 - te^{-t}$; входной сигнал – $x(t) = 1 - e^{-t}\sin t$.

1) Реакция элемента на входной сигнал определяется по интегралу Дюамеля, который может быть записан через кривую разгона или через весовую функцию.

Если известна кривая разгона, то интеграл Дюамеля записывается следующим образом:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t h(t-\tau)\frac{dx}{dt}d\tau,$$

следовательно,

$$y(t) = 2t + \int_0^t 2(t-\tau)(e^{-\tau}\sin(\tau) - e^{-\tau}\cos(\tau))\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-2e^{-t}\sin t + 2e^{-t}\cos t\right)t^2 + 2t^2\left(e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t\right).$$

Если известна весовая функция, то интеграл Дюамеля имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \omega(t-\tau)\,x(\tau)d\tau,$$

и тогда выходной сигнал в данной задаче будет записан как

$$y(t)=\int_0^t (1-(t-\tau)e^{-(t-\tau)})(1-e^{-\tau}\sin\tau)d\tau = =t-1+e^{-t}\sin t+te^{-t}+e^{-t}-te^{-2t}\sin t+e^{-2t}\sin t.$$

2) Между кривой разгона и весовой функцией существует взаимная связь. Если известна кривая разгона, то весовая функция определяется как $\omega(t)=h'(t)$, т.е. $\omega(t)=(2t)'=2$.

Если же известна весовая функция, то кривая разгона – $h(t)=\int_0^t \omega(t)dt$, следовательно, в нашем случае

$$h(t)=\int_0^t (1-te^{-t})\,dt=t+e^{-t}t+e^{-t}-1.$$

3) Передаточная функция, которая представляет собой отношение преобразованного по Лапласу выходного сигнала к преобразованному по Лапласу входному сигналу при нулевых начальных условиях, может быть определена как через кривую разгона, так и через весовую функцию:

$$W(s)=s\,h(s)\,,\qquad W(s)=\omega(s)\,.$$

Для нашей задачи:

$$W(s)=s\,L(2t)=s\left[\frac{2}{s^2}\right]=\frac{2}{s}\,;$$

$$W(s)=L(1-te^{-t})=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{s^2+s+1}{s(s+1)^2}\,.$$

***Задача* 4.** По известной передаточной функции элемента $W(s)$ найти его кривую разгона, весовую функцию, частотные характеристики – АФХ, ФЧХ, АЧХ, ВЧХ, построить графики. Записать дифференциальное уравнение элемента, связывающее выходную координату и входную координату.

Задана следующая передаточная функция

$$W(s)=\frac{3s+4}{(2s+3)(4s+1)}\,.$$

По определению передаточная функция представляет собой $W(s)=y(s)/x(s)$. Для получения дифференциального уравнения запишем $y(s)/x(s)=(3s+4)/((2s+3)(4s+1))$. Полученное выражение преобразуем следующим образом:

$$y(s)((2s+3)(4s+1))=x(s)(3s+4)$$

или

$$8s^2y(s)+14sy(s)+3y(s)=3sx(s)+x(s)\,,$$

но это есть не что иное, как дифференциальное уравнение, но записанное в терминах преобразования Лапласа. Для получения дифференциального уравнения в привычной временной форме записи необходимо взять обратное преобразование Лапласа с учетом нулевых начальных условий, т.е.

$$8y''+14y'+3y=3x'+4x\,.$$

Временные характеристики: кривая разгона и весовая функция связаны с передаточной функцией соотношениями

$$h(t)=L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right),\qquad \omega(t)=L^{-1}(W(s))\,.$$

Таким образом, кривая разгона определяется выражением

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{3s+4}{(2s+3)(4s+1)s}\right]=\frac{4}{3}-\frac{1}{30}e^{-\frac{3}{2}t}-\frac{13}{10}e^{-\frac{t}{4}}\,,$$

а весовая функция выражением

$$\omega(t)=L^{-1}\left[\frac{3s+4}{(2s+3)(4s+1)}\right]=\frac{1}{20}e^{-\frac{3}{2}t}+\frac{13}{40}e^{-\frac{t}{4}}\,.$$

Кроме того, если определена кривая разгона, то весовая функция может быть получена по ней, так как они связаны между собой формулой $\omega(t)=h'(t)$, т.е. имеем $\omega(t)=\frac{1}{20}e^{-\frac{3}{2}t}+\frac{13}{40}e^{-\frac{t}{4}}$.

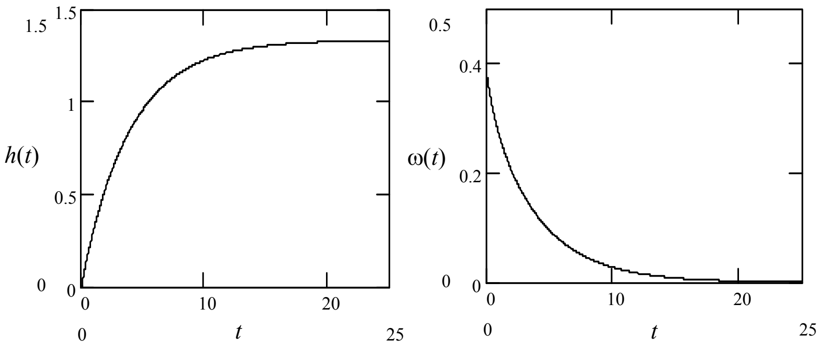
Графики функций $h(t)$ и $\omega(t)$ представлены на рис. 3, *а* и *б* соответственно.

Для отыскания частотных характеристик в передаточной функции производится замена – $s = i\omega$, т.е. $W(i\omega) = \dfrac{3i\omega + 4}{(2i\omega + 3)(4i\omega + 1)}$.

Амплитудно-фазовая характеристика является комплексной функцией, которую записывают в показательной форме с выделением амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и фазо-частотной характеристики (ФЧХ) или в алгебраической форме с выделением вещественно-частотной характеристики (ВЧХ) и мнимой частотной характеристики (МЧХ).

Показательная форма записи АФХ имеет вид

$$W(i\omega) = M(\omega)e^{i\varphi(\omega)}.$$



а) *б*)

Рис. 3 Временные характеристики:
а – кривая разгона; *б* – весовая функция

Рассматриваемый элемент является линейным и поэтому для него выполняется принцип суперпозиции, в связи с которым его амплитудно-частотная характеристика определяется как отношение АЧХ числителя к АЧХ знаменателя, так выражение для АФХ представляет собой дробь, т.е. $M(\omega) = M_{\text{чис}}(\omega)/M_{\text{зн}}(\omega)$. Числитель и знаменатель АФХ записаны в алгебраической форме, в этом случае модуль определяется как $M(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)}$.

Таким образом, выражение для АЧХ запишется в виде

$$M(\omega) = \frac{\sqrt{16 + 9\omega^2}}{\sqrt{9 + 4\omega^2}\,\sqrt{1 + 16\omega^2}}.$$

Фазо-частотная характеристика определяется как разность фаз числителя и знаменателя – $\varphi(\omega) = \varphi_{\text{чис}}(\omega) - \varphi_{\text{зн}}(\omega)$, которые, в свою очередь, определяются как $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,(\mathrm{Im}(\omega)/\mathrm{Re}(\omega))$, если известна алгебраическая запись комплексной функции.

Таким образом, получаем следующее выражение для ФЧХ:

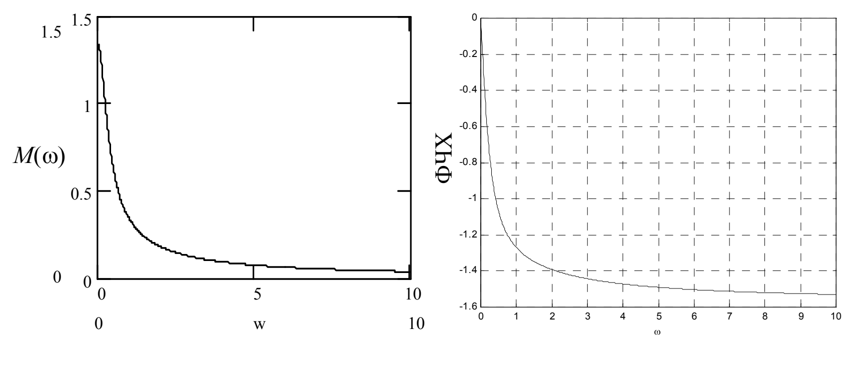
$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{3\omega}{4} - \mathrm{arctg}\frac{2\omega}{3} - \mathrm{arctg}\ 4\omega.$$

Амплитудно-фазовая характеристика в показательной форме записывается в виде

$$W(i\omega) = \frac{\sqrt{16 + 9\omega^2}\,e^{\mathrm{arctg}\frac{3\omega}{4}}}{\sqrt{9 + 4\omega^2}\,e^{\mathrm{arctg}\frac{2\omega}{3}}\,\sqrt{1 + 16\omega^2}\,e^{\mathrm{arctg}\ 4\omega}}.$$

Графики функции $M(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ представлены на рис. 4, *а* и *б*. Анализ характера АЧХ и ФЧХ показывает, что

$$\omega \to 0, \quad \varphi \to 0; \quad \omega \to \infty, \quad M \to -\frac{\pi}{2}.$$



ω

ω

а) *б*)

Рис. 4 Частотные характеристики:
а – АЧХ; *б* – ФЧХ

Годограф АФХ $W(i\omega)$ представлен на рис. 5.

Запишем теперь выражение для АФХ в алгебраической форме, для этого надо освободиться от мнимости в знаменателе. С этой целью умножим и знаменатель, и числитель на сопряженные выражения относительно комплексных составляющих знаменателя.

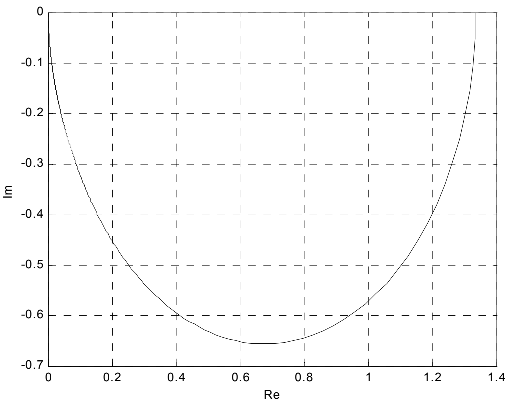


Рис. 5 Годограф АФХ

Проведем следующие математические преобразования:

$$W(i\omega) = \frac{(3i\omega + 4)(3 - i2\omega)(1 - 4i\omega)}{(3 + i2\omega)(1 + 4i\omega)(3 - i2\omega)(1 - i4\omega)} = \frac{10\omega^2 + 12 - i24\omega^3 - i47\omega}{(9 + 4\omega^2)(1 + 16\omega^2)}.$$

Из последнего выражения записываем:

ВЧХ

$$\mathrm{Re}(\omega) == \frac{10\omega^2 + 12}{(9 + 4\omega^2)(1 + 16\omega^2)},$$

МЧХ

$$\mathrm{Im}(\omega) = \frac{-i24\omega^3 - i47\omega}{(9 + 4\omega^2)(1 + 16\omega^2)}.$$

График функции $\mathrm{Re}(\omega)$ представлен на рис. 6.

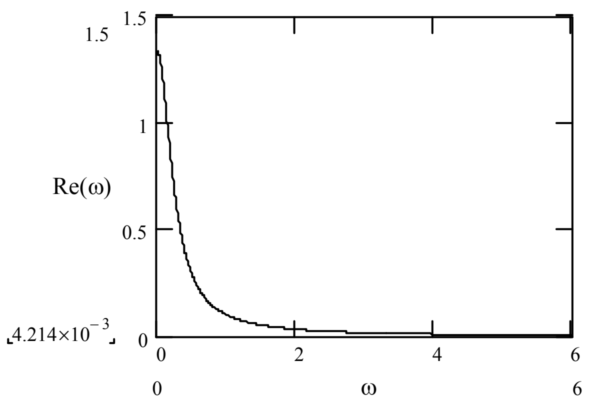


Рис. 6 Вещественно-частотная характеристика

***Задача* 5.** Преобразовать структурную схему (рис. 7) и записать передаточную функцию. Считается, что известны передаточные функции отдельных элементов и входной сигнал.

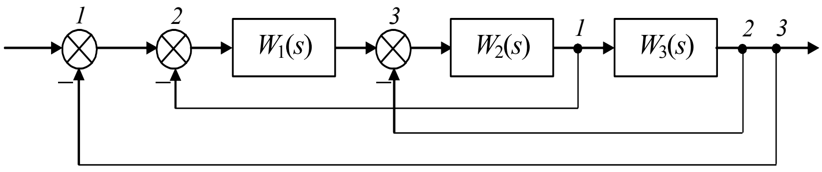


Рис. 7 Структурная схема

Для записи передаточной функции сложной структурной схемы ее необходимо преобразовать в соответствии с правилами преобразования структурных схем. Для того чтобы развязать перекрестные связи в заданной структурной схеме, перенесем узел *1* через звено с передаточной функцией $W_3(s)$ и через узел *2* в соответствии с правилами преобразования структурных схем. В результате проведенных преобразований получаем структурную схему (рис. 8), в которой четко прослеживаются основные типы соединений: последовательное соединение и вложенные друг в друга соединения с обратной связью.

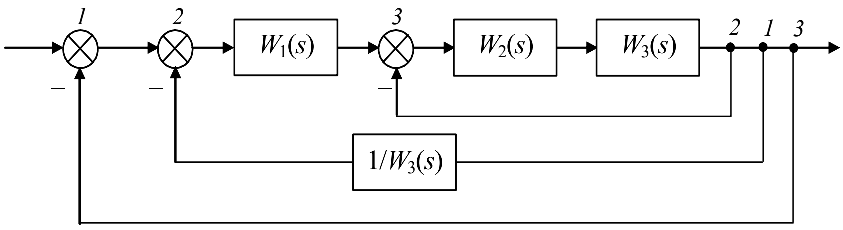


Рис. 8 Преобразованная структурная схема

Записывая последовательно передаточные функции отдельных элементов схемы, придем к выражению передаточной функции всей схемы:

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s) + W_2(s)W_3(s) + W_1(s)W_2(s)W_3(s)}.$$

***Задача* 6.** Исследовать устойчивость системы автоматического регулирования (рис. 9):

1) с помощью критерия Рауса–Гурвица;
2) с помощью критерия Михайлова.

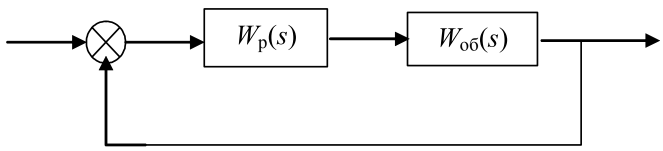


Рис. 9 Структурная схема системы автоматического регулирования

Заданы следующие исходные данные: передаточные функции объекта и регулятора

$$W_{\text{р}}(s) = \frac{5}{2s}; \qquad W_{\text{об}}(s) = \frac{3s+2}{s^3 + 2s^2 + s + 3}.$$

1) Для исследования устойчивости систем автоматического регулирования с помощью критерия Рауса–Гурвица необходимо знать дифференциальное или характеристическое уравнение системы. Знаменатель передаточной функции всегда представляет собой характеристический полином, поэтому необходимо, прежде всего, записать передаточную функцию замкнутой одноконтурной системы (рис. 9):

$$W_{\text{зс}}(s) = \frac{W_{\text{об}}(s)W_{\text{рег}}(s)}{1 + W_{\text{об}}(s)W_{\text{рег}}(s)}.$$

Характеристическое уравнение определяется путем приравнивания к нулю знаменателя передаточной функции замкнутой системы

$$W_{\text{рег}}(s)W_{\text{об}}(s) + 1 = 0,$$

с учетом конкретных значений передаточных функций объекта и регулятора получим

$$\frac{2s^4+4s^3+2s^2+21s+10}{2s^4+4s^3+2s^2+6s}=0\,,$$

откуда характеристическое уравнение запишется в виде

$$2s^4+4s^3+2s^2+21s+10=0\,.$$

Задачу будем решать с использованием формулировки критерия устойчивости по Гурвицу. Для этого необходимо из коэффициентов характеристического уравнения составить главный определитель Гурвица по определенному правилу: вдоль главной диагонали записываются коэффициенты, начиная с a_{n-1}, выше главной диагонали записываются коэффициенты с индексом на единицу меньше, ниже главной диагонали записываются коэффициенты с индексом на единицу больше. Порядок определителя соответствует порядку характеристического уравнения. Из этого определителя составляются диагональные миноры, которых должно быть $n-1$.

Система автоматического управления будет устойчивой тогда и только тогда, когда все диагональные миноры главного определителя будут положительны.

Для нашей задачи главный определитель Гурвица имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4 & 21 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 21 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}.$$

Вычислим последовательно диагональные миноры:

$$\Delta_1=4>0\,;\qquad \Delta_2=8-42=-34<0\,;$$

$$\Delta_3=4\cdot(42-40)-21\cdot 42=-874<0\,;\qquad \Delta_4=-874\cdot 10=-8740<0\,.$$

Все диагональные миноры отрицательны, следовательно, *система неустойчива.* Следует отметить, что для исследования устойчивости не обязательно вычислять все миноры. Если при вычислении миноров получают, что его значение отрицательно, дальнейшие расчеты можно прекратить и сделать вывод, что система неустойчива.

2) Исследуем эту же систему автоматического управления на устойчивость с использованием частотного критерия устойчивости Михайлова.

В соответствии с этим критерием необходимо построить годограф Михайлова, который для устойчивых систем имеет строго определенный вид. И тогда система автоматического управления будет устойчивой, если годограф Михайлова начинается на положительной вещественной полуоси, обходит последовательно, нигде не обращаясь в нуль, n квадрантов координатной плоскости, уходя в бесконечность в n квадранте, где n – порядок характеристического уравнения.

Для записи математического выражения годографа Михайлова необходимо в характеристическом уравнении перейти в частотную область, т.е. в уравнении $2s^4+4s^3+2s^2+21s+10=0$ сделать замену – $s=i\omega$. В результате получим комплексное выражение

$$2\omega^4-4i\omega^3-2\omega^2+21i\omega+10=0\,,$$

в котором выделим вещественную часть –

$$\varphi(\omega)=2\omega^4-2\omega^2+10=0$$

и мнимую часть –

$$\psi(\omega)=-4\omega^3+21\omega=0\,.$$

Первая называется вещественной функцией Михайлова, а вторая – мнимой функций Михайлова.

По вещественной и мнимой функциям Михайлова строится годограф Михайлова в координатах $\varphi(\omega)-\psi(\omega)$ методом контрольных точек. Для этого задается значение частоты, для которой определяются значения функций $\varphi(\omega), \psi(\omega)$. График годографа Михайлова представлен на рис. 10, его анализ показывает, что годограф начинается на вещественной положительной полуоси и располагается только в первом квадранте, что свидетельствует о том, что система неустойчива.

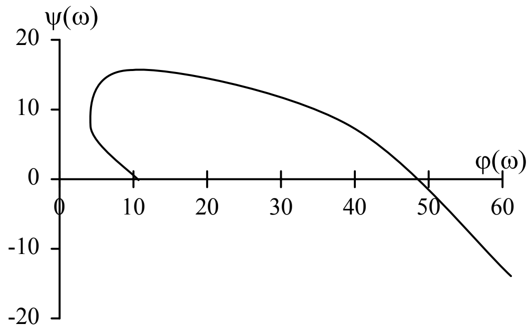


Рис. 10 Годограф Михайлова

На практике для исследования устойчивости систем автоматического управления удобно пользоваться не критерием Михайлова, а следствием из этого критерия. Для этого необходимо записать уравнения, которые получаются приравниванием к нулю вещественной мнимой функций Михайлова, найти их корни. Следствие гласит, для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы корни уравнений $\psi(\omega)=0$, $\varphi(\omega)=0$ были действительными чередующимися между собой и выполнялись условия $\varphi(0)\geq 0,\ \psi(0)\leq 0$.

Для ответа на вопрос об устойчивости системы необходимо решить следующие уравнения:

$$\varphi(\omega)=2\omega^4-2\omega^2+10=0;$$

$$\psi(\omega)=-4\omega^3+21\omega=0.$$

В результате решения этих уравнений получаем, что корни уравнения $\psi(\omega)=0$ – $\omega_1=0,\ \omega_{2,3}=\pm\sqrt{\dfrac{21}{4}}$, а уравнения $\varphi(\omega)=0$ – $\omega_{4,5}=\pm\sqrt{\dfrac{1+i\sqrt{19}}{2}}$, $\omega_{6,7}=\pm\sqrt{\dfrac{1-i\sqrt{19}}{2}}$. Как видно из расчетов, корни не чередуются и даже являются комплексно-сопряженными, что свидетельствует о том, что *система неустойчива*.

***Задача* 7.** Исследовать на устойчивость систему автоматического регулирования (рис. 11) с помощью критерия Найквиста.

Исходными данными являются передаточные функции объекта и регулятора:

$$W_{\text{р}}(s)=7+\frac{1}{s};\qquad W_{\text{об}}(s)=\frac{5}{3s+1}.$$

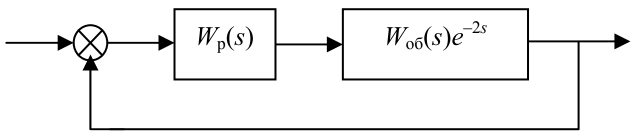


Рис. 11 Структурная схема АСР с запаздыванием

Критерий устойчивости Найквиста, в отличие от предыдущих критериев, применяется для исследования устойчивости систем автоматического управления с запаздыванием, поэтому в данной задаче рассматривается объект с запаздыванием. Критерий Найквиста дает ответ об устойчивости замкнутой системы по АФХ разомкнутой системы. Он имеет три формулировки в зависимости от того устойчива, нейтральна или неустойчива разомкнутая система. Поэтому, прежде всего, необходимо ответить на вопрос об устойчивости разомкнутой системы.

Исследуем на устойчивость разомкнутую систему известными методами. Для записи передаточной функции разомкнутой системы разорвем обратную связь в замкнутой системе. Разомкнутая система представляет собой последовательно соединенные между собой объект и регулятор, ее передаточная функция запишется в виде

$$W_{\text{рс}} = W_{\text{р}}(s) W_{\text{об}}(s) e^{-2s} = \frac{7s+1}{s} \frac{5}{3s+1} e^{-2s} .$$

Характеристическое уравнение разомкнутой системы – это знаменатель передаточной функции, приравненный к нулю, будет

$$s(3s+1) = 0 .$$

Корни характеристического уравнения $s_1 = 0,\ s_2 = -1/3$. В соответствии с необходимым и достаточным условием устойчивости разомкнутая система будет нейтральной. Критерий Найквиста в этом случае звучит: если разомкнутая система нейтральна, то для того чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы с добавлением в бесконечность не охватывала точку (–1, *i*0).

Для ответа на вопрос об устойчивости замкнутой системы по критерию Найквиста проще всего построить АФХ разомкнутой системы и посмотреть охватывает она точку (–1, *i*0) или нет, поэтому запишем выражение для АФХ разомкнутой системы:

$$W_{\text{рс}}(i\omega) = \frac{7i\omega+1}{i\omega} \frac{5}{3i\omega+1} e^{-2i\omega} = \frac{\sqrt{25+(35\omega)^2}\, e^{\operatorname{arctg}\frac{35\omega}{5}}\ e^{-2i\omega}}{\sqrt{1+9\omega^2}\, e^{\operatorname{arctg} 3\omega}\ \omega e^{\frac{\pi}{2}}} ,$$

откуда АЧХ:

$$M_{\text{рс}}(\omega) = \frac{\sqrt{25+(35\omega)^2}}{\sqrt{1+9\omega^2}} ,$$

ФЧХ:

$$\varphi_{\text{рс}} = -2\omega + \operatorname{arctg} 7\omega - \operatorname{arctg} 3\omega - \frac{\pi}{2} .$$

Задаваясь значениями частот построим годограф АФХ разомкнутой системы (рис. 12). Как видно из рисунка АФХ разомкнутой системы охватывает точку (–1, *i*0), что говорит о том, что замкнутая система *неустойчива*.

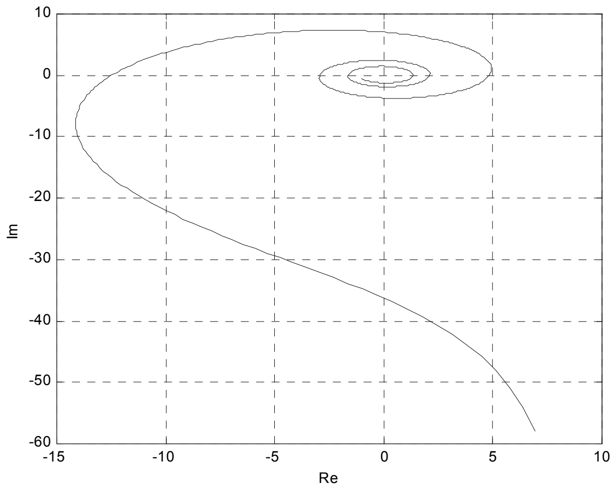


Рис. 12 Годограф АФХ разомкнутой системы

Контрольная работа 2

***Задача* 1.** Линеаризовать уравнение статики объекта в окрестности точки $x_0 = 1$, $y_0 = y(x_0) = y(1)$. Построить статическую характеристику линеаризованного объекта и сравнить со статической характеристикой исходной нелинейной системы.

Задана статическая характеристика нелинейного объекта

$$y(x) = x^3 \ln x \ .$$

Одним из методов линеаризации является разложение нелинейной функции в ряд Тейлора в окрестности заданной точки, с последующим отбрасыванием нелинейных членов. Ряд Тейлора выглядит следующим образом:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{y''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots,$$

где $y(x)$ – статическая характеристика нелинейного звена.

Линеаризованная характеристика получается в результате отбрасывания членов второго порядка и выше. Таким образом, статическая характеристика линеаризованного звена будет иметь вид

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x ,$$

которую можно записать следующим образом:

$$y_л(x) = a\,x + b ,$$

где $a = y'(x_0)$, $b = y(x_0) - y'(x_0)x_0$.

Рассчитаем коэффициенты линеаризованного уравнения. Определим, прежде всего, $y' = (x^3 \ln x)' = 3x^2 \ln(x) + x^2$; тогда

$$a = y'(x_0) = y'(1) = 1;\ b = y(x_0) - y'(x_0) = 0 - 1 = -1 .$$

Линеаризованное уравнение статики имеет вид

$$y_л = a\,x + b = x - 1 .$$

Графики исходной статической характеристики и линеаризованной характеристики представлены на рис. 13. Линеаризованная статическая характеристика является касательной к исходной нелинейной характеристике в точке разложения.

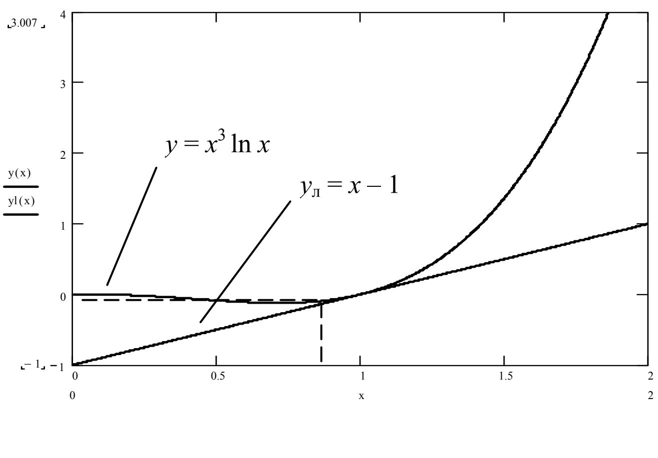


Рис. 13 Нелинейная и линеаризованная статические характеристики

***Задача* 2.** На вход нелинейного элемента подаются гармонические колебания. Нарисовать вынужденные колебания на выходе нелинейного элемента. Вывести эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного элемента (рис. 14) с помощью метода гармонической линеаризации.

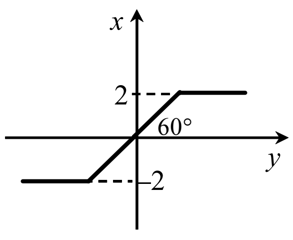


Рис. 14 Статическая характеристика нелинейного элемента

На вход нелинейного элемента, которым является усилительное звено с ограничением амплитуды, подается гармонический сигнал – $x(t) = A\sin\omega t$. Это звено называется также нелинейным звеном с зоной насыщения. Статическая характеристика этого звена изображена на рис. 14 и записывается в виде

$$x_{\text{нэ}} = \begin{cases} \sqrt{3}y, & |y| \le 2/\sqrt{3}; \\ 2\,\mathrm{sign}\, x, & |y| \ge 2/\sqrt{3}. \end{cases}$$

Она состоит из трех участков: линейного и двух участков зоны насыщения. На каждом из этих участков звено работает как линейное. Вся нелинейность сосредоточена на границах этих участков.

Сигнал на выходе определяется следующим образом: если на входе звена сигнал меньше, чем 2, т.е. зоны насыщения, то на выходе звена сигнал будет таким же, как и на входе, т.е. гармоническим, так как звено в этом случае работает как линейное звено. Если амплитуда входного сигнала будет больше, чем зона насыщения (> 2), то при достижении ее на выходе звена установится значение $x_{\text{нэ}} = 2$, которое будет сохраняться до тех пор пока $x_{\text{нэ}} \ge 2$. Если же значение входного сигнала достигнет значения –2, то на выходе установится значение выходного сигнала $x_{\text{нэ}} = -2$ и будет сохраняться пока $x_{\text{нэ}} \le -2$. В результате на выходе нашего нелинейного звена установятся периодический выходной сигнал по форме напоминающий трапеции, боковые стороны которых искривлены по синусоиде. Выходной сигнал может быть также построен, как строят в черчении третью проекцию. Построение представлено на рис. 15.

Второй частью задачи является вывод эквивалентной амплитудно-фазовой характеристики нелинейного звена. Для этого необходимо провести гармоническую линеаризацию, которая как раз и применяется для линеаризации нелинейных характеристик, представляющих собой кусочно-линейные функции.

Гармоническая линеаризация основана на том, что на вход нелинейного звена подается гармонический сигнал, на выходе образуется периодический сигнал сложной формы, который может быть разложен в ряд Фурье. В результате линеаризации из ряда Фурье остается только первая гармоника: $x_{\text{нэ}} = a_0 + a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t$.

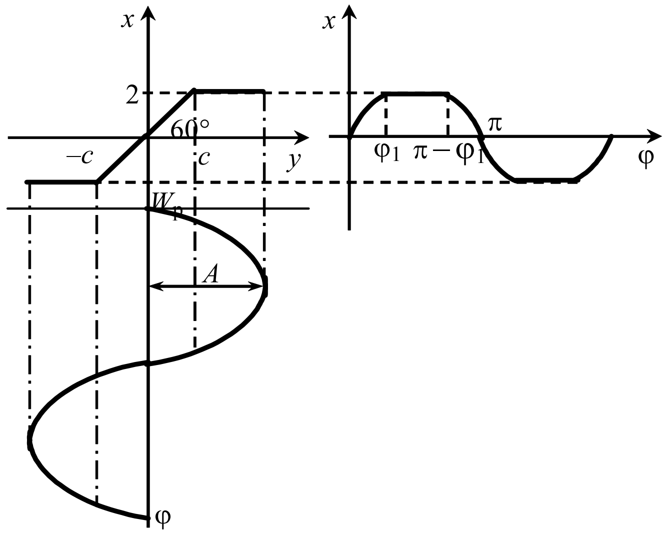


Рис. 15 Прохождение гармонического сигнала через усилительное звено с зоной насыщения

Коэффициенты гармонической линеаризации определяются по следующим формулам, в которых A – это амплитуда входного сигнала, которую необходимо учитывать, так как эквивалентные частотные характеристики нелинейного элемента зависят от амплитуды входного сигнала, а не от частоты:

$$a(A)=\frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi}F(A\sin\varphi)\,\sin\varphi\,d\varphi;$$

$$b(A)=\frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi}F(A\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi\,.$$

где $\varphi=\omega\,t$, $F(y)$ – статическая характеристика нелинейного звена.

В алгебраической форме эквивалентная АФХ нелинейного элемента имеет вид $J(A)=a(A)+i\,b(A)$.

Так как статическая характеристика $x=F(y)$ симметрична относительно $\pi/2$, то формулы для вычисления коэффициентов гармонической линеаризации в нашей задаче преобразуются к виду

$$a(A)=\frac{4}{\pi A}\int_0^{\varphi_1}A\ \mathrm{tg}\,60^{\circ}\,\sin^2\varphi\ d\varphi+\frac{4}{\pi A}\int_{\varphi_1}^{\pi/2}c\ \ \mathrm{tg}\,60^{\circ}\,\sin\varphi\ d\varphi;$$

$$b(A)=\frac{4}{\pi A}\int_0^{\varphi_1}A\ \mathrm{tg}\,60^{\circ}\,\sin\varphi\ \cos\varphi\ d\varphi+\frac{4}{\pi A}\int_{\varphi_1}^{\pi/2}c\ \ \mathrm{tg}\,60^{\circ}\,\cos\varphi\ d\varphi\,.$$

Проводя вычисления по приведенным формулам и подставляя $\sin\varphi_1=\dfrac{c}{A}$, $c=2\big/\sqrt{3}$ получаем следующие значения коэффициентов:

$$a(A)=\frac{2\mathrm{tg}\,60^{\circ}}{\pi}\left(\arcsin\frac{c}{A}+\frac{c}{A}\sqrt{1-\frac{c^2}{A^2}}\right);$$

$$b(A)=\frac{2\,\mathrm{tg}\,60^{\circ}\,c}{\pi A}+\frac{\mathrm{tg}\,60^{\circ}}{\pi}\left(\frac{4\,c}{A}-1\right).$$

Эквивалентная АФХ нелинейного элемента запишется в виде:

$$J(A)=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{3}A}+\frac{2}{\sqrt{3}A}\sqrt{1-\frac{4}{3A^2}}\right)+i\left(\frac{4}{\pi}+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{8}{\sqrt{3}A}-1\right)\right).$$

***Задача* 3.** Нарисовать (качественно) переходный процесс, соответствующий фазовой траектории (рис. 16).

Для решения этой задачи надо познакомиться с фазовыми портретами линейных систем второго порядка. Эти фазовые портреты классифицируются по корням характеристического уравнения. Возможны шесть различных вариантов. Между фазовым портретом и переходным процессом системы существует взаимная связь, т.е. по фазовому портрету (фазовой траектории) можно качественно изобразить переходной процесс и, наоборот, по переходному процессу изобразить качественно ход фазовой траектории.

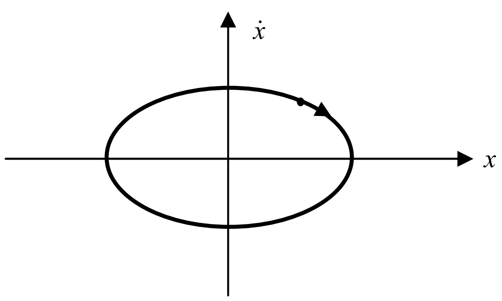


Рис. 16 Фазовая траектория: предельный цикл

Заданной фазовой траекторией является замкнутая кривая, которая соответствует случаю, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни, ее называют "центр". В этом случае система находится на границе устойчивости и переходной процесс представляет собой незатухающие колебания, изображенные на рис. 17.

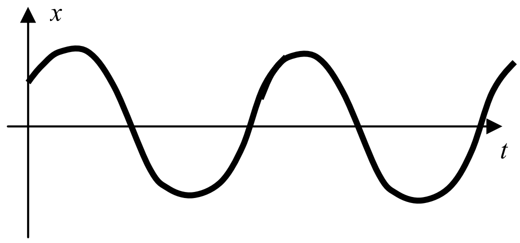


Рис. 17 Незатухающий переходной процесс

***Задача* 4.** Нарисовать (качественно) фазовую траекторию, соответствующую переходному процессу (рис. 18).

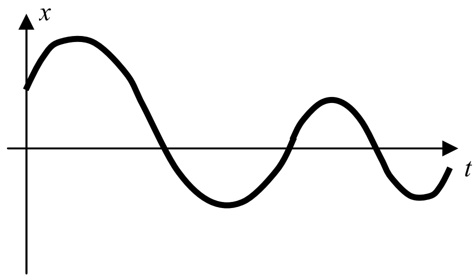


Рис. 18 Затухающий колебательный переходной процесс

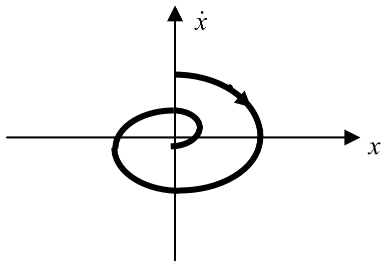


Рис. 19 Фазовая траектория – "устойчивый фокус"

Задача является обратной задаче 3. Затухающий колебательный переходной процесс соответствует случаю, когда корни характеристического уравнения – комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью, что свидетельствует о том, что система устойчива. Этому случаю соответствует фазовая траектория, получившая название "устойчивый фокус" (рис. 19).

***Задача* 5.** Построить методом изоклин фазовый портрет для системы, уравнение движение которой имеет вид

$$x'' + x'x + 4x = 2\ .$$

При построении фазового портрета методом изоклин необходимо заданное дифференциальное уравнение второго порядка свести к системе двух уравнений дифференциальных уравнений первого порядка. В результате проведения этой математической процедуры получаем следующую систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x' = y; \\ y' = 2 - yx - 4x. \end{cases}$$

Для записи уравнения фазовой траектории в полученной системе дифференциальных уравнений надо избавиться от времени, для чего второе уравнение делится на первое, что и дает возможность записать дифференциальное уравнение фазовой траектории

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2 - yx - 4x}{y}\ .$$

Метод изоклин построения фазового портрета дает качественную картину хода фазовых траекторий. Прежде всего на фазовой плоскости строится поле изоклин. Изоклина – кривая равного наклона, ее уравнением является уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - yx - 4x}{y} = C = \text{const}\,,$$

где C – задаваемая константа.

Решим полученное дифференциальное уравнение изоклины относительно y и выразим его через x. В результате получим

$$y = \frac{2 - 4x}{C + x}\,.$$

Задаваясь значениями C от –10 до 10 с шагом два, строим семейство изоклин (рис. 20).

Фазовая траектория пересекает соответствующую изоклину под углом arctg C. Произвольно задается начальная точка для начала фазовой траектории. Далее, нанося на каждой изоклине стрелки под углом arctg C, определяем качественный ход фазовой траектории, так как стрелки определяют направление касательной к фазовой траектории. Таким образом строится семейство фазовых траекторий, составляющих фазовый портрет.

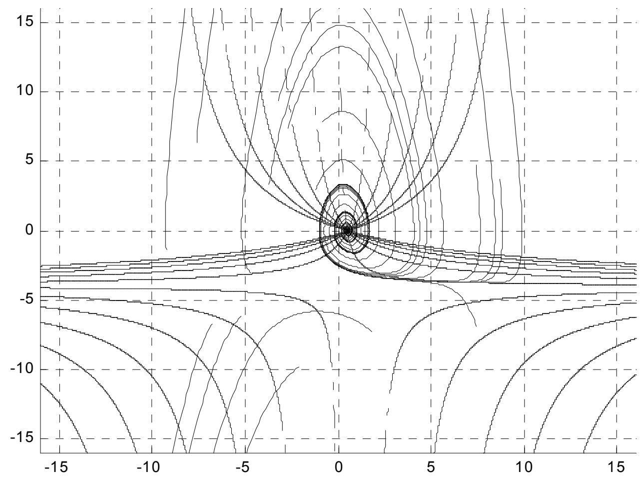


Рис. 20 Фазовый портрет системы, построенный методом изоклин

***Задача* 6.** Определить возможные состояния равновесия системы и исследовать их устойчивость первым методом Ляпунова, если она описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y) = -x + xy; \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y) = -y + y^2. \end{cases}$$

Первый метод Ляпунова исследования устойчивости нелинейных систем дает ответ об устойчивости состояния равновесия, которое прежде всего и необходимо определить. В состоянии равновесия производные равны нулю, поэтому, приравнивая нулю производные, получим систему нелинейных алгебраических уравнений для определения состояний равновесия. Решим эту систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y) = -x + xy = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y) = -y + y^2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 0$, $y_2 = 1$. Найденные корни – это точки равновесия исходной системы.

Для применения первого метода Ляпунова необходимо исходную нелинейную систему линеаризовать методом разложения в ряд Тейлора в окрестности точек состояний равновесия. В результате линеаризации получим следующую линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y;$$
$$\frac{dy}{dt} = b_1 x + b_2 y,$$

где $a_1 = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_1, y_1}$, $a_2 = \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{x_1, y_1}$, $b_1 = \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x_1, y_1}$, $b_2 = \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{x_1, y_1}$.

Проведем линеаризацию исходной системы в окрестности точки (0, 0), для этого рассчитаем коэффициенты линеаризованного уравнения:

$$a_1 = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} = -1; \qquad a_2 = \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} = 0;$$

$$b_1 = \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} = 0; \qquad b_2 = \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} = -1.$$

Линеаризованная система дифференциальных уравнений в точке (0, 0) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x; \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

Первый метод Ляпунова гласит: если линеаризованная система первого приближения устойчива, то и исходная нелинейная система устойчива; если линеаризованная система первого приближения неустойчива, то и исходная нелинейная система неустойчива; если линеаризованная система первого приближения нейтральна, то относительно исходной нелинейной системы сказать ничего нельзя, необходимо исследовать систему второго приближения.

Исследуем на устойчивость полученную линейную систему любым известным методом исследования устойчивости линейных систем. Проще всего в данном случае рассчитать корни характеристического уравнения и применить необходимое и достаточно условие исследования устойчивости. Для этого составим дискриминант

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 0 \\ 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение будет – $(\lambda+1)^2 = 0$, его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Корни действительные отрицательные, а это говорит том, что система в окрестности точки (0, 0) является устойчивой и, кроме того, состояние равновесия представляет собой устойчивый узел.

Исследуем второе состояние равновесия. Определим коэффициенты линеаризованного уравнения в окрестности точки (0, 1).

$$a_1 = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_2, y_2} = 0; \qquad a_2 = \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{x_2, y_2} = 0;$$

$$b_1 = \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x_2, y_2} = 0; \qquad b_2 = \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{x_2, y_2} = 1.$$

Линеаризованная система в точке (0, 1) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0; \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

Исследуем на устойчивость, полученную линеаризованную систему. Запишем ее дискриминант

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид – $(\lambda-1)\lambda = 0$, его корни: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$.

Один из корней положительный, следовательно, система в окрестности точки (0, 1) является неустойчивой. Состояние равновесия – неустойчивый узел.

Список рекомендуемой литературы

1. Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Основы теории автоматического управления: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 352 с.
2. Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Линейные системы автоматического регулирования: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. 264 с.
3. Лазарева Т.Я. Нелинейные системы автоматического управления: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1996. 84 с.
4. Лазарева Т.Я. Системы автоматического управления со случайными воздействиями: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1999. 64 с.
5. Топчеев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования: Учеб. пособие. М.: Машиностроение, 1977.
6. Теория автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. М.: Высшая школа, 1986. 367 с.
7. Автоматическое управление в химической промышленности: Учебник / Под ред. Е.Г. Дудникова. М.: Химия, 1987. 368 с.

Оглавление