

А.А. Коптев

**ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
В ЦЕНТРОБЕЖНЫХ  
ПОЛЯХ**

Часть II

**ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА**

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2006

А.А. Коптев

**ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
В ЦЕНТРОБЕЖНЫХ  
ПОЛЯХ**

Часть II

# ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

---

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2006

УДК 532  
ББК В253.31  
К65

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
*М.Б. Генералов*

Кандидат технических наук, профессор  
*А.С. Клинков*

**Коптев А.А.**

К65 Движение жидкости в центробежных полях. Ч. II. Течение жидкости в ограниченном пространстве вблизи вращающегося диска. М.: "Издательство Машиностроение-1", 2006. 300 с.

Рассмотрен ряд прикладных задач движения жидкости вблизи вращающегося диска в ограниченном, стесненном пространстве другими дисками. Разработаны по аналогии с частью I монографии программы численного интегрирования уравнений Навье-Стокса в цилиндрической системе координат при различных граничных условиях.

Для инженерно-технических работников, занимающихся проектированием и технологическими расчетами центробежных аппаратов, а также научных сотрудников, аспирантов. Может быть полезна студентам технических вузов.

УДК 532  
ББК В253.31

ISBN 5-94275-259-1

© Коптев А.А., 2006  
© "Издательство Машиностроение-1",  
2006

Научное издание

КОПТЕВ Андрей Алексеевич

# ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЦЕНТРОБЕЖНЫХ ПОЛЯХ

Часть II

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ  
В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

Монография

Редактор З.Г. Чернова  
Компьютерное макетирование Е.В. Кораблевой

Подписано к печати 20.04.2006.  
Формат 60 × 84 / 16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Гарнитура Times New Roman. Объем: 17,44 усл. печ. л.; 17,85 уч.-изд. л.  
Тираж 400 экз. С. 220<sup>М</sup>

"Издательство Машиностроение-1"  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Подготовлено к печати и отпечатано в Издательско-полиграфическом центре  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

---

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>2 ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА</b> .....	6
2.1 ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМ ДИСКАМИ .....	6
2.2 ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ РАЗНОНАПРАВЛЕННО ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКАМИ ....	124
2.3 ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ОДНОНАПРАВЛЕННО ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКАМИ ....	154
2.4 ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ С РАЗЛИЧНЫМИ УГЛОВЫМИ СКОРОСТЯМИ ДИСКАМИ ПРИ РАДИАЛЬНОМ ГРАДИЕНТЕ ДАВЛЕНИЯ, РАВНОМ НУЛЮ .....	186
2.5 ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И ПРОНИЦАЕМОМ НЕПОДВИЖНЫМ ДИСКАМИ .....	209
2.6 ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ НЕПОДВИЖНЫМИ СПЛОШНЫМ И ПЕРФОРИРОВАННЫМ ДИСКАМИ .....	255
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	298
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	299

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящей части работы рассматриваются различные случаи движения жидкости в зазорах между вращающимися дисками (конусами), осесимметрично расположенными. Технологически это может иметь место применения в сепараторах, диспергаторах и других аппаратах.

Для установившегося движения ньютоновской несжимаемой жидкости используем уравнения Навье-Стокса в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ .

В связи с осесимметричностью задачи производные по окружной координате  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ .

Тогда уравнения Навье-Стокса принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

Приведем систему дифференциальных уравнений (2.1) к безразмерному виду подстановкой

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega r H'(\varepsilon); \\ v &= \omega r G(\varepsilon); \\ w &= -2\sqrt{\omega \nu} H(\varepsilon); \\ p &= -C \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - 2\rho \omega \nu P(\varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon$  – безразмерная аксиальная координата;

$$\varepsilon = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad (2.4)$$

$C$  – постоянная, подлежащая определению при каждом конкретном случае при интегрировании системы уравнений (2.5).

Таким образом, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'); \\ P' &= H'' + 2HH', \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где штрихами обозначены производные по  $\varepsilon$ . Уравнение неразрывности (2.2) удовлетворяется тождественно.

## 2. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

---

### 2.1. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМИ ДИСКАМИ

Схема движения жидкости и выбранная система координат показаны на рис. 2.1.1. Считаем, что расстояние между дисками  $z_0$  мало по сравнению с радиусом диска  $R$ ,  $z_0 \ll R$ . Диски погружены в жидкость.

Граничными условиями при решении поставленной задачи и уравнений (2.5) с учетом (2.3) будут непроницаемость дисков и прилипание жидкости к их поверхности:

$$\text{при } \varepsilon = 0 \quad H = 0, \quad H' = 0, \quad G = 1; \quad (2.1.1)$$

$$\text{при } \varepsilon = \varepsilon_0 \quad H = 0, \quad H' = 0, \quad G = 0,$$

где 
$$\varepsilon_0 = z_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

Разрешив первые два уравнения системы (2.5), из третьего уравнения найдем функцию  $P(\varepsilon)$ . Поскольку дифференциальные уравнения (2.5) нелинейны, проводим численное интегрирование, выполняя граничные условия (2.1.1) при различных значениях  $\varepsilon_0$ .

Разложим функции  $H(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$  в степенные ряды по уравнениям (2.5):

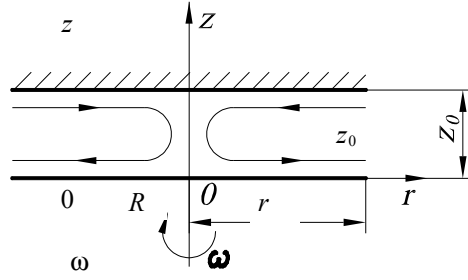


Рис. 2.1.1. Схема движения жидкости между вращающимся и неподвижным дисками

$$\begin{aligned}
 H(\varepsilon) &= \frac{A}{2!} \varepsilon^2 + \frac{C-1}{3!} \varepsilon^3 - \frac{2B}{4!} \varepsilon^4 - \frac{2B^2}{5!} \varepsilon^5 - \frac{2A+2(C-1)}{6!} \varepsilon^6 - \\
 &\quad - \frac{2(C-1)^2 + 4(C-1) + 8AB}{7!} \varepsilon^7 + \dots; \\
 H'(\varepsilon) &= A\varepsilon + \frac{C-1}{2!} \varepsilon^2 - \frac{2B}{3!} \varepsilon^3 - \frac{2B^2}{4!} \varepsilon^4 - \frac{2A+2A(C-1)}{5!} \varepsilon^5 + \\
 &\quad + \frac{2(C-1)^2 + 4(C-1) + 8AB}{6!} \varepsilon^6 + \dots; \\
 G(\varepsilon) &= 1 + B\varepsilon + \frac{2A}{3!} \varepsilon^3 + \frac{2(C-1) + 2AB}{4!} \varepsilon^4 - \frac{4B+2B(C-1)}{5!} \varepsilon^5 - \\
 &\quad - \frac{4B^2 - 2A^2}{6!} \varepsilon^6 - \frac{4A+24A(C-1) + 20A^2B + 16B^3}{7!} \varepsilon^7 + \dots,
 \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

где обозначено  $H''(0) = A$ ,  $G(0) = B$ .

Для выполнения граничных условий при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  по (2.1.1) выражения (2.1.2) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{A}{2!} \varepsilon_0^2 + \frac{C-1}{3!} \varepsilon_0^3 - \frac{2B}{4!} \varepsilon_0^4 - \frac{2B^2}{5!} \varepsilon_0^5 - \frac{2A+2(C-1)}{6!} \varepsilon_0^6 - \\
 &\quad - \frac{2(C-1)^2 + 4(C-1) + 8AB}{7!} \varepsilon_0^7 + \dots; \\
 0 &= A\varepsilon_0 + \frac{C-1}{2!} \varepsilon_0^2 - \frac{2B}{3!} \varepsilon_0^3 - \frac{2B^2}{4!} \varepsilon_0^4 - \frac{2A+2A(C-1)}{5!} \varepsilon_0^5 + \\
 &\quad + \frac{2(C-1)^2 + 4(C-1) + 8AB}{6!} \varepsilon_0^6 + \dots; \\
 0 &= 1 + B\varepsilon_0 + \frac{2A}{3!} \varepsilon_0^3 + \frac{2(C-1) + 2AB}{4!} \varepsilon_0^4 - \frac{4B+2B(C-1)}{5!} \varepsilon_0^5 - \\
 &\quad - \frac{4B^2 - 2A^2}{6!} \varepsilon_0^6 - \frac{4A+24A(C-1) + 20A^2B + 16B^3}{7!} \varepsilon_0^7 + \dots.
 \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Алгебраические уравнения (2.1.3) нелинейны, значит возможны несколько их решений. Аппроксимация решения при  $\varepsilon_0 \leq 0,5$  может быть по (2.1.3) представлена зависимостями

$$A \approx 0,1\varepsilon_0, \quad B \approx -\frac{1}{\varepsilon_0}, \quad C \approx 0,3. \tag{2.1.4}$$

При больших значениях безразмерной аксиальной координаты  $\varepsilon_0$  численное решение системы дифференциальных уравнений (2.5) при выполнении граничных условий (2.1.1) представлено в табл. 2.1.1 и на рис. 2.1.2 показаны функции начальных параметров  $A = H''(0)$ ,  $B = G'(0)$  и  $C$  в зависимости от параметра  $\varepsilon_0$ . Эти данные мы назвали первым решением.

На рис. 2.1.3 – 2.1.7 изображено графически изменение безразмерных аксиальной  $H(\varepsilon)$ , радиальной  $H'(\varepsilon)$  и тангенциальной  $G(\varepsilon)$  скоростей при изменении расстояния между дисками в

безразмерном виде  $\varepsilon_0 = z_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ . Замечаем, что при  $\varepsilon_0 > 20$  выявляется разделение пограничных слоев вблизи вращающегося диска и вблизи неподвижного диска.

Особенно это заметно при анализе радиальных безразмерных скоростей  $H'(\varepsilon)$ . То же самое мы наблюдаем, изучая табл. 2.1.2 – 2.1.11. На значительном интервале между пограничными слоями, например, при  $\varepsilon_0 = 40$  и  $C = 0,0980495$  замечаем, что функция  $H'(\varepsilon)$  колеблется около нуля,  $H(\varepsilon)$  – около значения 0,377555,  $G(\varepsilon)$  – около значения 0,313129. Одновременно на поверхности неподвижного диска имеем граничные параметры

$$\begin{aligned} H'' &= 0,165052; \\ G' &= -0,135425, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

что соответствует данным табл. 2.1.11.

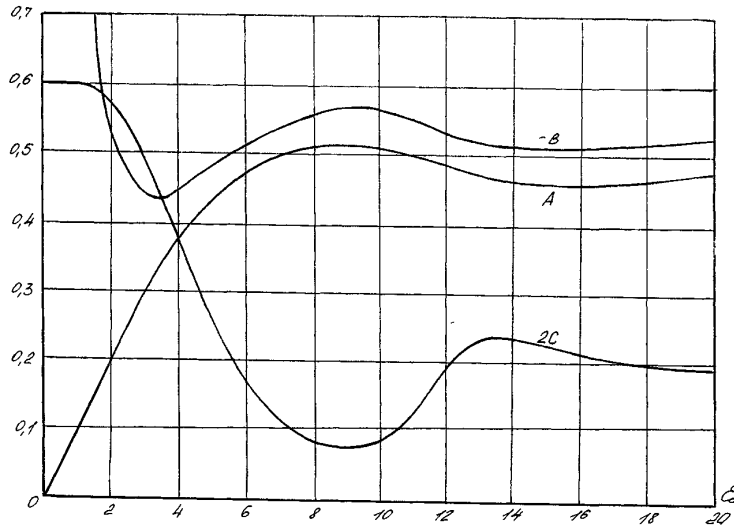


Рис. 2.1.2. Зависимость начальных параметров  $A = H''(0)$ ,  $B = G'(0)$  и  $C$  от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$

**2.1.1. Граничные параметры при  $G(0) = 1$ ;  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$**   
(Первое решение)

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
0,2	0,020000	-5,000034	0,299999	0,013333	-4,999990
0,4	0,040000	-2,500274	0,299980	0,026665	-2,499919
0,6	0,059998	-1,667592	0,299901	0,039989	-1,666392
0,8	0,079991	-1,252193	0,299687	0,053285	-1,249351
1,0	0,099972	-1,004278	0,299236	0,066521	-0,998734
1,2	0,099552	-0,914779	0,298884	0,073099	-0,907407
1,4	0,129897	-0,778596	0,297831	0,086128	-0,766462
1,6	0,149789	-0,680993	0,296182	0,098904	-0,662439
1,8	0,169604	-0,608963	0,293762	0,111303	-0,582134
2,0	0,189308	-0,555005	0,290399	0,123171	-0,517901
2,2	0,208856	-0,514480	0,285936	0,134332	-0,465013
2,4	0,228194	-0,484335	0,280242	0,144599	-0,420408
2,6	0,247255	-0,462441	0,273241	0,153781	-0,382028
2,8	0,265963	-0,447224	0,264913	0,161708	-0,348461
3,0	0,284232	-0,437453	0,255312	0,168237	-0,318721
3,2	0,310616	-0,430852	0,238812	0,175218	-0,279824
3,4	0,327390	-0,430618	0,226699	0,177960	-0,257033
3,6	0,343413	-0,432902	0,213978	0,179217	-0,236379
3,8	0,358611	-0,437107	0,200908	0,179085	-0,217632
4,0	0,372927	-0,442723	0,187744	0,177700	-0,200611

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
4,2	0,386321	-0,449320	0,174716	0,175223	-0,185166
4,4	0,398772	-0,456542	0,162023	0,171830	-0,171165
4,6	0,410280	-0,464104	0,149823	0,167698	-0,158491
4,8	0,420860	-0,471779	0,138235	0,162998	-0,147036
5,0	0,430540	-0,479397	0,127341	0,157886	-0,136698
5,2	0,439360	-0,486829	0,117187	0,152504	-0,127381
5,4	0,447368	-0,493985	0,107795	0,146972	-0,118995

Продолжение табл. 2.1.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
5,6	0,454616	-0,500804	0,099163	0,141393	-0,111458
5,8	0,461161	-0,507245	0,091273	0,135853	-0,104694
6,0	0,467058	-0,513290	0,084098	0,130420	-0,098633
6,2	0,472362	-0,518929	0,077600	0,125149	-0,093212
6,4	0,477127	-0,524164	0,071740	0,120084	-0,088374
6,6	0,481401	-0,529005	0,066476	0,115258	-0,084069
6,8	0,485234	-0,533462	0,061766	0,110697	-0,080252
7,0	0,488667	-0,537552	0,057570	0,106419	-0,076886
7,2	0,491740	-0,541290	0,053852	0,102440	-0,073937
7,4	0,494489	-0,544694	0,050576	0,098772	-0,071377
7,6	0,496944	-0,547780	0,047713	0,095425	-0,069182
7,8	0,499135	-0,550563	0,045236	0,092409	-0,067335
8,0	0,501084	-0,553057	0,043123	0,089735	-0,065822
8,2	0,502813	-0,555276	0,041356	0,087413	-0,064632
8,4	0,504337	-0,557229	0,039922	0,085458	-0,063761
8,6	0,505670	-0,558924	0,038812	0,083886	-0,063207
8,8	0,506818	-0,560369	0,038023	0,082718	-0,062975
9,0	0,507787	-0,561566	0,037557	0,081981	-0,063075
9,2	0,508575	-0,562516	0,037422	0,081707	-0,063520
9,4	0,509173	-0,563214	0,037634	0,081937	-0,064336
9,6	0,509568	-0,563650	0,038221	0,082726	-0,065558
9,8	0,509731	-0,563803	0,039222	0,084146	-0,067238
10,0	0,509623	-0,563640	0,040704	0,086299	-0,069453
10,2	0,509179	-0,563104	0,042761	0,089328	-0,072318
10,4	0,508300	-0,562106	0,045542	0,093435	-0,075998
10,6	0,506832	-0,560510	0,049259	0,098903	-0,080727
10,8	0,504558	-0,558128	0,054194	0,106079	-0,086793
11,0	0,501228	-0,554761	0,060607	0,115232	-0,094422

Продолжение табл. 2.1.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
11,2	0,496727	-0,550365	0,068462	0,126172	-0,103469
11,4	0,491352	-0,545270	0,077095	0,137872	-0,113105
11,6	0,485768	-0,540084	0,085458	0,148914	-0,122181
11,8	0,480570	-0,535301	0,092794	0,158386	-0,129960
12,0	0,476049	-0,531132	0,098853	0,166074	-0,136270
12,2	0,472265	-0,527602	0,103689	0,172126	-0,141236
12,4	0,469174	-0,524663	0,107457	0,176794	-0,145066



$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
12,6	0,466700	-0,522242	0,110429	0,180324	-0,147962
12,8	0,464757	-0,520270	0,112457	0,182926	-0,150095
13,0	0,463268	-0,518685	0,113973	0,184772	-0,151609
13,2	0,462164	-0,517431	0,114984	0,186000	-0,152616
13,4	0,461386	-0,516463	0,115580	0,186723	-0,153209
13,6	0,460882	-0,515740	0,115835	0,187031	-0,153462
13,8	0,460610	-0,515228	0,115810	0,187001	-0,153436
14,0	0,460531	-0,514898	0,115556	0,186693	-0,153183
14,2	0,460614	-0,514724	0,115115	0,186159	-0,152745
14,4	0,460831	-0,514684	0,114524	0,185442	-0,152156
14,6	0,461158	-0,514759	0,113813	0,184578	-0,151447
14,8	0,461576	-0,514930	0,113008	0,183598	-0,150643
15,0	0,462066	-0,515184	0,112131	0,182529	-0,149765
15,2	0,462615	-0,515506	0,111201	0,181392	-0,148832
15,4	0,463207	-0,515885	0,110233	0,180207	-0,147860
15,6	0,463833	-0,516311	0,109242	0,178990	-0,146862
15,8	0,464482	-0,516774	0,108240	0,177757	-0,145850
16,0	0,465146	-0,517266	0,107236	0,176519	-0,144834
16,2	0,465818	-0,517779	0,106239	0,175287	-0,143823
16,4	0,466490	-0,518307	0,105258	0,174072	-0,142826
16,6	0,467157	-0,518844	0,104298	0,172880	-0,141848

Продолжение табл. 2.1.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
16,8	0,467815	-0,519385	0,103366	0,171720	-0,140896
17,0	0,468459	-0,519925	0,102466	0,170598	-0,139975
17,2	0,469085	-0,520459	0,101603	0,169518	-0,139090
17,4	0,469689	-0,520983	0,100780	0,168487	-0,138244
17,6	0,470270	-0,521495	0,100000	0,167509	-0,137441
17,8	0,470824	-0,521991	0,099267	0,166587	-0,136684
18,0	0,471349	-0,522469	0,098582	0,165723	-0,135976
18,2	0,471844	-0,522924	0,097947	0,164922	-0,135318
18,4	0,472306	-0,523357	0,097363	0,164185	-0,134714
18,6	0,472735	-0,523764	0,096833	0,163514	-0,134163
18,8	0,473127	-0,524143	0,096358	0,162912	-0,133669
19,0	0,473486	-0,524495	0,095934	0,162374	-0,133227
19,2	0,473807	-0,524816	0,095565	0,161906	-0,132844
19,4	0,474091	-0,525107	0,095251	0,161507	-0,132516
19,6	0,474338	-0,525365	0,094991	0,161176	-0,132244
19,8	0,474547	-0,525592	0,094783	0,160911	-0,132027
20,0	0,474720	-0,525787	0,094627	0,160712	-0,131864
20,2	0,474857	-0,525949	0,094521	0,160577	-0,131753
20,4	0,474959	-0,526079	0,094462	0,160502	-0,131691
20,6	0,475026	-0,526179	0,094448	0,160484	-0,131677
20,8	0,475061	-0,526248	0,094477	0,160521	-0,131707
21,0	0,475065	-0,526289	0,094545	0,160608	-0,131779
21,2	0,475041	-0,526302	0,094649	0,160740	-0,131887
21,4	0,474990	-0,526289	0,094785	0,160913	-0,132029

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
21,6	0,474915	-0,526257	0,094948	0,161121	-0,132200
21,8	0,484820	-0,526197	0,095136	0,161360	-0,132395
22,0	0,474706	-0,526121	0,095342	0,161622	-0,132611
22,2	0,474577	-0,526030	0,095564	0,161904	-0,132842

Окончание табл. 2.1.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
22,4	0,474436	-0,525924	0,095796	0,162199	-0,133084
22,6	0,474286	-0,525808	0,096035	0,162503	-0,133333
22,8	0,474130	-0,525684	0,096277	0,162809	-0,133585
23,0	0,473970	-0,525554	0,096518	0,163115	-0,133836
23,2	0,473809	-0,525420	0,096755	0,163416	-0,134082
23,4	0,473649	-0,525285	0,096985	0,163707	-0,134321
23,6	0,473493	-0,525150	0,097206	0,163986	-0,134551
23,8	0,473341	-0,525018	0,097416	0,164251	-0,134768
24,0	0,473197	-0,524891	0,097612	0,164499	-0,134971
25,0	0,472613	-0,524350	0,098360	0,165445	-0,135747
26,0	0,472289	-0,524019	0,098717	0,165894	-0,136116
27,0	0,472197	-0,523892	0,098759	0,165946	-0,136159
28,0	0,472261	-0,523914	0,098608	0,165756	-0,136003
29,0	0,472403	-0,524019	0,098377	0,165466	-0,135765
30,0	0,472559	-0,524150	0,098153	0,165183	-0,135532
31,0	0,472688	-0,524267	0,097984	0,164969	-0,135357
32,0	0,472769	-0,524347	0,097888	0,164849	-0,135258
33,0	0,472803	-0,524386	0,097860	0,164814	-0,135229
34,0	0,472799	-0,524390	0,097881	0,164840	-0,135250
35,0	0,472773	-0,524373	0,097927	0,164897	-0,135298
36,0	0,472739	-0,524345	0,097977	0,164961	-0,135350
37,0	0,472709	-0,524318	0,098018	0,165012	-0,135392
38,0	0,472669	-0,524299	0,098042	0,165043	-0,135418
39,0	0,472689	-0,524299	0,098042	0,165043	-0,135418
40,0	0,472678	-0,524285	0,098050	0,165053	-0,135426
41,0	0,472682	-0,524288	0,098042	0,165042	-0,135417
42,0	0,472690	-0,524294	0,098030	0,165028	-0,135405
43,0	0,472696	-0,524300	0,098021	0,165017	-0,135396
44,0	0,472701	-0,524304	0,098015	0,165009	-0,135389

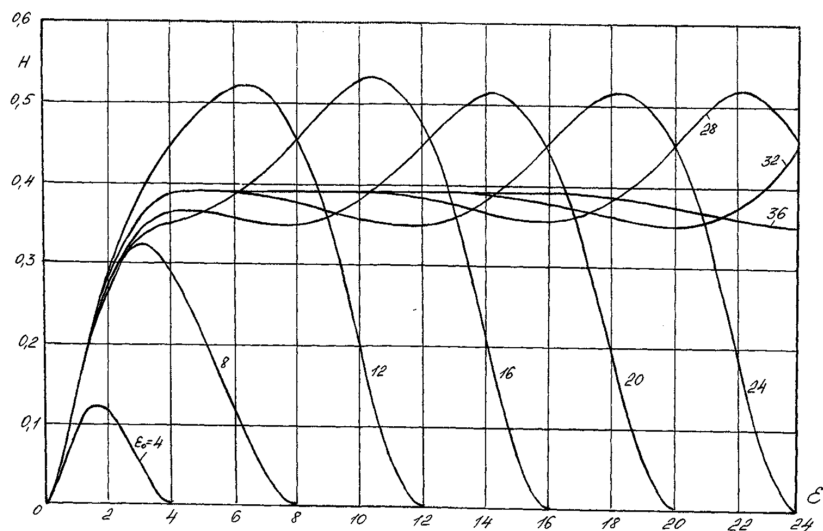


Рис. 2.1.3. Эпюры безразмерной аксиальной скорости  $H(\epsilon)$  при различных значениях  $\epsilon_0$

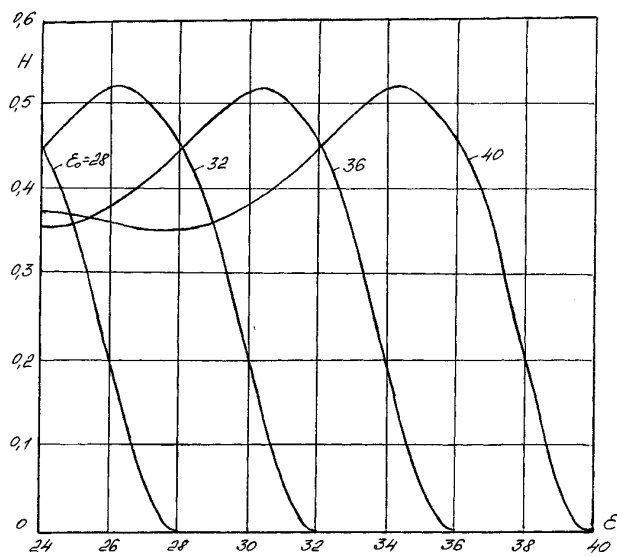


Рис. 2.1.4. Фрагмент эпюр безразмерных аксиальных скоростей при различных значениях  $\epsilon_0$

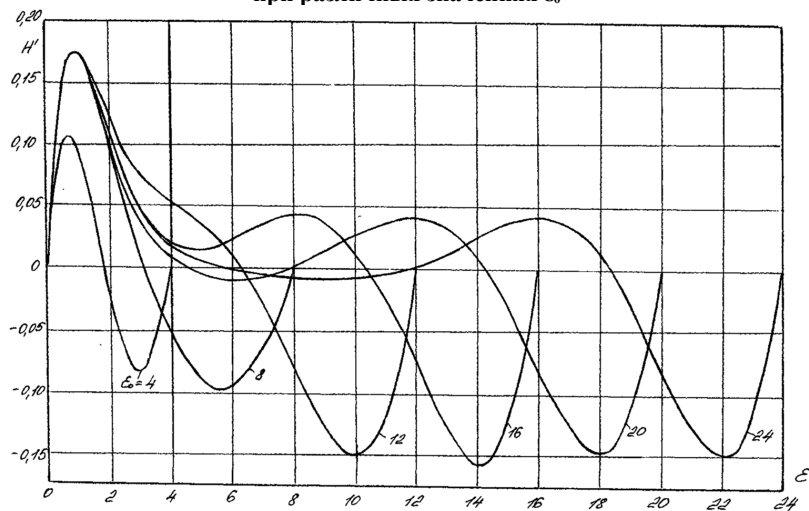


Рис. 2.1.5. Эпюры безразмерных радиальных скоростей при  $\epsilon_0$

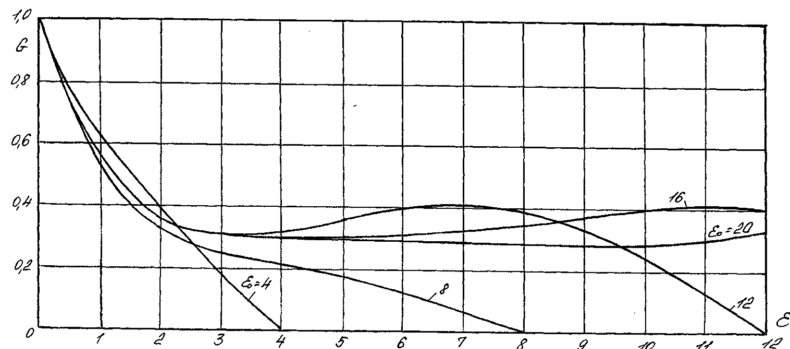


Рис. 2.1.6. Эпюры безразмерных окружных скоростей при  $\varepsilon_0$

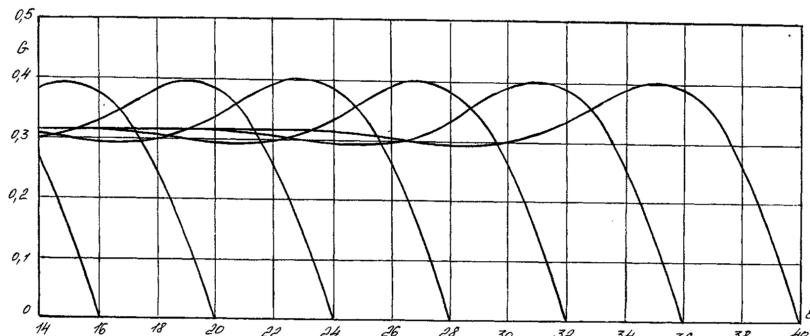


Рис. 2.1.7. Фрагмент эпюр безразмерных окружных скоростей  $G(\varepsilon)$  при  $\varepsilon_0$

Теперь сравним пограничный слой на неподвижном диске при  $\varepsilon_0 = 40$  с решением задачи Бедевадта [6]. Здесь решалась численно [14] известная система дифференциальных уравнений (2.5)

$$H''' = C + H'H' - G^2 - 2HH''; \quad G'' = 2(H'G - HG'), \quad (2.1.6)$$

причем полагалось  $C = 1$ .

Были определены граничные параметры на поверхности неподвижной плоскости

$$\begin{aligned} H'' &= 0,941971, & H' &= 0, & H &= 0; \\ G' &= -0,772885, & G &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

и вдали от диска

$$G_\infty = 1, \quad H_\infty = W = 0,674713, \quad H'_\infty \rightarrow 0, \quad G'_\infty \rightarrow 0, \quad H''_\infty \rightarrow 0.$$

Чтобы редуцировать переменные уравнений (2.1.6) на значение  $C = 0,0980495$  вместо  $C = 1$ , мы должны пересчитать все функции по следующему методу:

$$\varepsilon = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{1}{\sqrt[4]{C}};$$

$$\begin{aligned} H &= \sqrt[4]{C}H, & H' &= \sqrt{C}H', & H'' &= \sqrt[4]{C^3}H'', & H''' &= CH'''; \\ G &= \sqrt{C}G, & G' &= \sqrt[4]{C^3}G', & G'' &= CG''. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Для примера покажем пересчет функций, полученных при решении задачи Бедевадта, на пограничный слой при  $\varepsilon_0 = 40$ , в частности, на поверхности неподвижного диска:

$$\begin{aligned} H'' &= 0,941971 \sqrt[4]{0,0980495^3} = 0,165052; \\ G' &= -0,772885 \sqrt[4]{0,0980495^3} = -0,135425 \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

и вдали от диска:

$$\begin{aligned} G &= S = 1 \cdot \sqrt{0,0980495} = 0,313129; \\ H &= W = 0,674713 \sqrt[4]{0,0980495} = 0,377555. \end{aligned}$$

Видим, что начальные параметры по (2.1.9) и (2.1.5) полностью совпадают.

Расчеты показывают, что полное совпадение безразмерных скоростей  $H'$ ,  $H''$ ,  $G$  (до шести знаков после запятой) осуществляется на интервале изменения  $14 \leq \varepsilon \leq 40$  при  $\varepsilon_0 = 40$ , рассчитанных по уравнениям (2.5) и (2.1.6).

Значит первое решение рассматриваемой задачи при  $\varepsilon_0 \geq 40$  всегда на интервале  $14 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  может быть описано редуцированным решением Бедевадта. Одновременно замечаем, что передаточные функции  $W-H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $S-G(\varepsilon)$ , где  $S = \sqrt{C}$ , между пограничными слоями на поверхностях вращающегося и неподвижного дисков стремятся к нулю. Это наглядно видно в данных табл. 2.1.11.

Эти редуцированные функции Бедевадта по системе уравнений (2.1.8) могут быть представлены в виде уравнений (1.4.20) [часть первая монографии]:

$$\begin{aligned}
 H(\varepsilon) &= W + \frac{1}{2\alpha} e^{-(W+\alpha)\varepsilon} \left[ \left( -a \sin \beta \varepsilon + \frac{\beta}{W+\alpha} \cos \beta \varepsilon \right) + \right. \\
 &\quad \left. + b \left( \frac{\beta}{W+\alpha} \sin \beta \varepsilon - \cos \beta \varepsilon \right) \right] + \dots; \\
 H'(\varepsilon) &= e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (-a \sin \beta \varepsilon + b \cos \beta \varepsilon) + \dots; \\
 G(\varepsilon) &= S + e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (-b \sin \beta \varepsilon + a \cos \beta \varepsilon) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.1.10}$$

В нижеприведенной таблице представлены значения констант уравнений (2.1.10) для значения  $\varepsilon = \varepsilon^* = 14$  при различных значениях безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$  между вращающимся и неподвижным дисками. На интервале  $\varepsilon \geq 14$  функции  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$  удовлетворяют редуцированным значениям решения Бедевадта в соответствии с преобразованиями согласно равенствам (2.1.8).

$$\varepsilon^* = 14$$

$\varepsilon_0$	$S = \sqrt{C}$	$\alpha$	$\beta$	$W$	$a$	$b$
28,0	0,314018	0,627315	0,500574	0,378087	-0,00600316	-0,00836659
32,0	0,312871	0,626170	0,499658	0,377400	0,00373574	-0,00786796
36,0	0,132702	0,626313	0,499772	0,377486	-0,00031154	0,00137422
40,0	0,313129	0,626428	0,499864	0,777555	-0,00041354	-0,00031661

Как видно из приведенной таблицы, все константы изменяются очень мало. Следствием этого является, что гидродинамика пограничных слоев изменяется мало, графически совпадают, рис. 2.1.8 – 2.1.13, аналитически отличаются в четвертом и менее знаке после запятой табл. 2.1.8 – 2.1.11. На рисунках пограничных слоев вблизи поверхности неподвижного диска начало координат расположено на его поверхности. При увеличении  $\varepsilon_0$  сверх значений  $\varepsilon_0 > 40$  постоянные для уравнений (2.1.10) практически не изменяются и для  $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$  можно принять  $S = 0,313128$ ,  $W = 0,377555$ . Отсюда вытекает заключение, что при удалении неподвижного диска в бесконечность, мы не приближаемся на основании *первого* решения системы дифференциальных уравнений (2.5) к решению задачи Кармана [1, 14].

Одновременно замечаем, что передаточные функции  $H(\varepsilon)-W$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)-S$ , где  $S = \sqrt{C}$ , между пограничными слоями на поверхностях вращающегося и неподвижного дисков с увеличением безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$  между ними стремятся к нулю. Это наглядно видно в табл. 2.1.11. Объяснением может быть, что кинетическая энергия за счет трения о жидкость, вносимая вращающимся диском, не передается в пограничный слой неподвижного диска. Такое решение становится неустойчивым, и следует искать иные распределения скоростей по толщине зазора, иные решения системы дифференциальных уравнений (2.5).

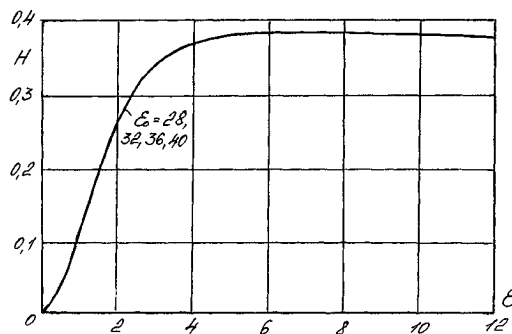


Рис. 2.1.8. Эпюра безразмерной аксиальной скорости в пограничном слое вблизи поверхности вращающегося диска

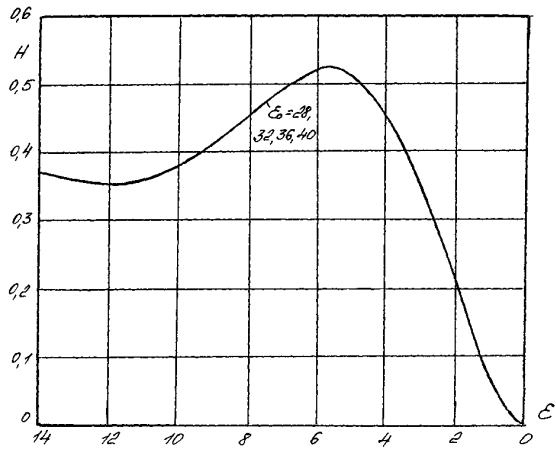


Рис. 2.1.9. Эпюра безразмерной аксиальной скорости в пограничном слое вблизи поверхности неподвижного диска

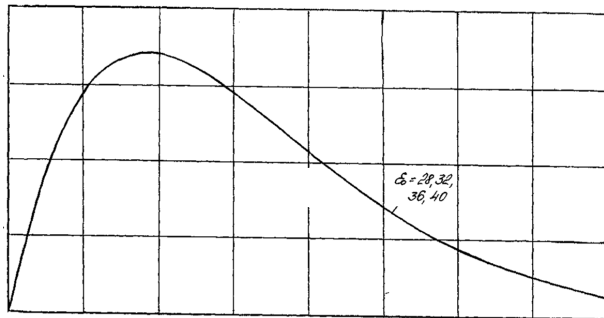


Рис. 2.1.10. Эпюра безразмерной радиальной скорости в пограничном слое вблизи поверхности вращающегося диска

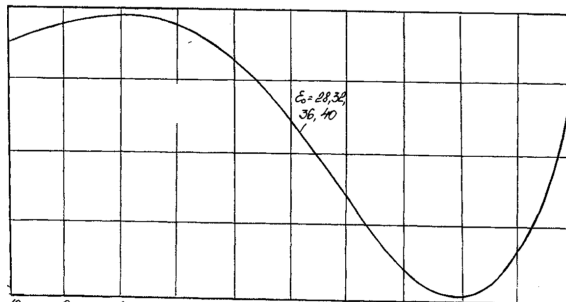


Рис. 2.1.11. Эпюра безразмерной радиальной скорости в пограничном слое вблизи поверхности неподвижного диска

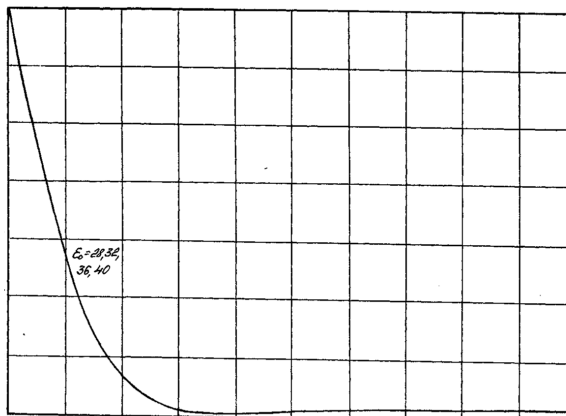


Рис. 2.1.12. Эпюра безразмерной тангенциальной скорости вблизи поверхности вращающегося диска

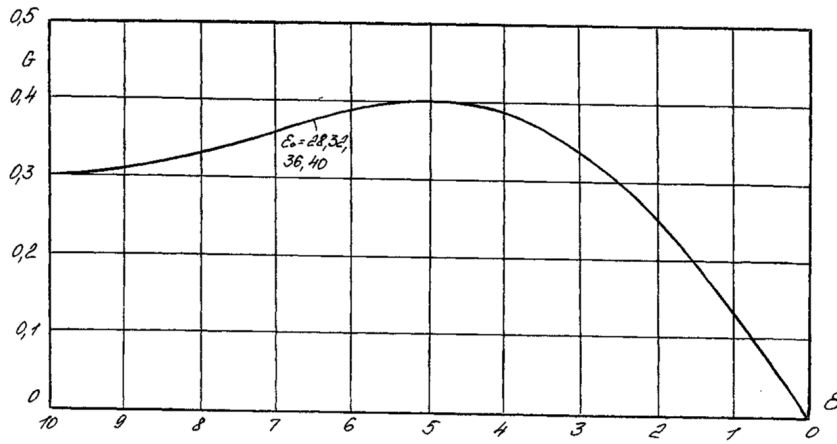


Рис. 2.1.13. Эюра безразмерной тангенциальной скорости  
вблизи поверхности неподвижного диска

В результате системного исследования системы дифференциальных уравнений (2.5)

$$\left. \begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG') \end{aligned} \right\}$$

при выполнении граничных условий для рассматриваемой задачи, что и в первом решении (2.1.1):

$$\begin{aligned} \text{при } \epsilon = 0 \quad & H = 0, H' = 0, G = 1; \\ \text{при } \epsilon = \epsilon_0 \quad & H = 0, H' = 0, G = 0 \end{aligned}$$

нами были получены еще два решения. Назовем их *второе* и *третье решения*. На рис. 2.1.14 – 2.1.16 и табл. 2.1.12 представлены начальные (граничные) параметры второго и третьего решений, где наблюдаем, что начальные параметры с ростом  $\epsilon_0$  приближаются к некоторым постоянным величинам, в частности, отметим петлеобразное поведение начального параметра  $B = G'(0)$ .

Второе решение при  $\epsilon_0 = 72$  практически приходят к константам, свойственным  $\epsilon_0 \rightarrow \infty$ ,  $A = H''(0) = 0,485979$ ,  $B = G'(0) = 0,602834$ ,  $C = 0,0014120$ .

Третье решение при  $\epsilon_0 = 1000$  соответствует решению  $C = 0$ ,  $A = H''(0) = 0,510467$ ,  $B = G'(0) = -0,616188$ , которое аналогично ранее полученному решению при полном покое вдали от вращающегося диска [14]. Это важное подтверждение наших подходов в решении рассматриваемых задач.

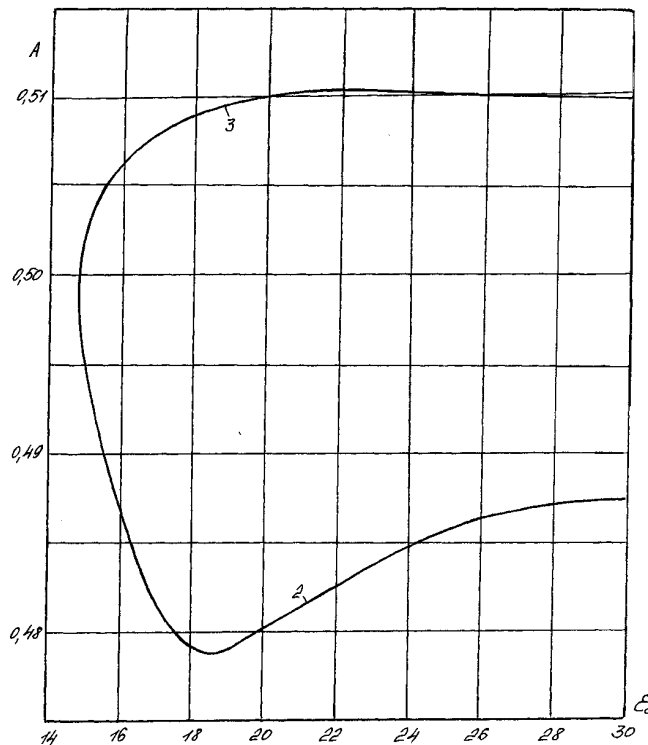


Рис. 2.1.14. Зависимость второго и третьего решений параметра  $H''(0) = A$

от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$

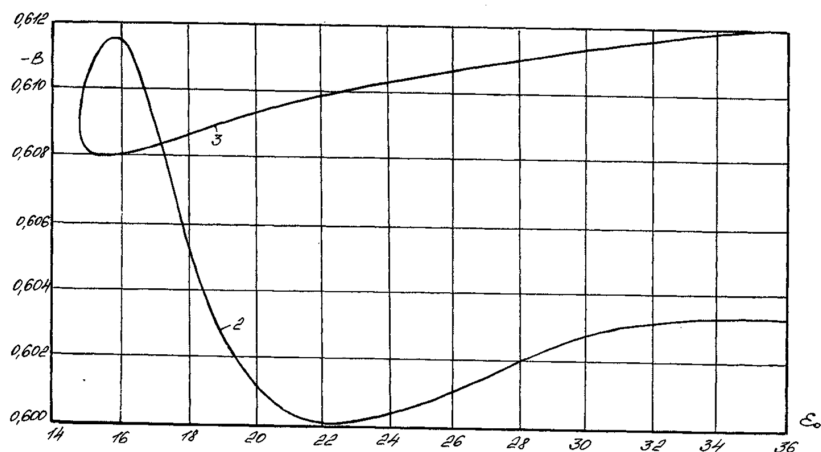


Рис. 2.1.15. Зависимость второго и третьего решений  $G'(0) = B$  от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$

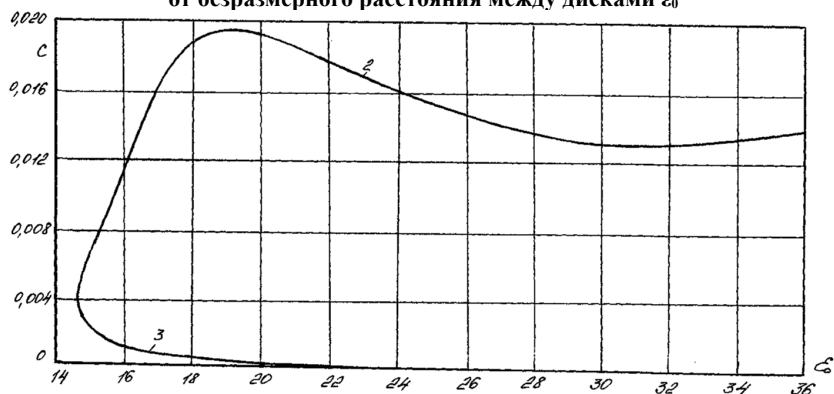


Рис. 2.1.16. Зависимость коэффициента давления  $C$  второго и третьего решений от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$  между вращающимся и неподвижным дисками

2.1.12. Граничные параметры при  $G(0) = 1; H(0) = 0; H'(0) = 0; G(\varepsilon_0) = 0; H(\varepsilon_0) = 0; H'(\varepsilon_0) = 0$

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
Второе решение					
14,7264	0,498785	-0,608958	0,003684	0,015870	0,012620
14,7266	0,498716	-0,608974	0,003713	0,015931	0,012688
14,7268	0,498670	-0,608984	0,003732	0,015972	0,012734
14,7270	0,498633	-0,608993	0,003748	0,016005	0,012771
14,7280	0,498501	-0,609024	0,003804	0,016123	0,012903
14,7290	0,498405	-0,609047	0,003846	0,016209	0,012999
14,7300	0,498326	-0,609066	0,003880	0,016281	0,013078
14,7310	0,498256	-0,609082	0,003910	0,016344	0,013147
14,7320	0,498194	-0,609097	0,003937	0,016400	0,013209
14,7330	0,498137	-0,609111	0,003962	0,016452	0,013266
14,7340	0,498084	-0,609124	0,003985	0,016501	0,013319
14,7350	0,498034	-0,609136	0,004007	0,016546	0,013369
14,7360	0,497987	-0,609148	0,004027	0,016589	0,013415
14,7370	0,497942	-0,609159	0,004047	0,016631	0,013460
14,7380	0,497899	-0,609169	0,004066	0,016670	0,013502
14,7390	0,497858	-0,609180	0,004084	0,016708	0,013543
14,7400	0,497819	-0,609189	0,004101	0,016744	0,013582

Продолжение табл. 2.1.12

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
14,7500	0,497484	-0,609274	0,004251	0,017058	0,013915
14,7600	0,497213	-0,609343	0,004374	0,017315	0,014183



$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
14,7700	0,496978	-0,609404	0,004481	0,017541	0,014415
14,7800	0,496769	-0,609460	0,004578	0,017745	0,014623
14,7900	0,496577	-0,609511	0,004668	0,017934	0,014812
14,8000	0,496400	-0,609559	0,004752	0,018111	0,014988
14,8100	0,496233	-0,609604	0,004832	0,018279	0,015153
14,8200	0,496076	-0,609648	0,004908	0,018439	0,015309
14,8300	0,495926	-0,609689	0,004980	0,018593	0,015457
14,8400	0,495783	-0,609729	0,005050	0,018741	0,015599
14,8500	0,495646	-0,609768	0,005118	0,018884	0,015735
14,8600	0,495514	-0,609805	0,005183	0,019023	0,015866
14,8700	0,495387	-0,609841	0,005247	0,019159	0,015993
14,8800	0,495263	-0,609876	0,005309	0,019291	0,016116
14,8900	0,495143	-0,609911	0,005369	0,019421	0,016236
14,9000	0,495027	-0,609944	0,005429	0,019548	0,016352
14,9100	0,494913	-0,609977	0,005487	0,019672	0,016466
14,9200	0,494802	-0,610009	0,005544	0,019795	0,016577
14,9300	0,494694	-0,610041	0,005600	0,019915	0,016686
14,9400	0,494588	-0,610072	0,005655	0,020034	0,016792
14,9500	0,494484	-0,610102	0,005709	0,020151	0,016897
14,9600	0,494383	-0,610132	0,005763	0,020267	0,016999
14,9700	0,494283	-0,610161	0,005815	0,020381	0,017100
14,9800	0,494185	-0,610190	0,005867	0,020494	0,017199
14,9900	0,494089	-0,610218	0,005919	0,020605	0,017297
15,0000	0,493994	-0,610246	0,005970	0,020716	0,017394
15,1000	0,493115	-0,610503	0,006454	0,021777	0,018300
15,2000	0,492324	-0,610729	0,006911	0,022789	0,019138
15,3000	0,491588	-0,610927	0,007354	0,023780	0,019943
15,4000	0,490885	-0,611099	0,007795	0,024771	0,020736
15,5000	0,490204	-0,611244	0,008240	0,025773	0,021533
15,6000	0,489535	-0,611360	0,008695	0,026798	0,022343

Продолжение табл. 2.1.12

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
15,7000	0,488871	-0,611442	0,009164	0,027852	0,023175
15,8000	0,488207	-0,611489	0,009650	0,028940	0,024033
15,9000	0,487542	-0,611494	0,010155	0,030061	0,024921
16,0000	0,486877	-0,611455	0,010679	0,031215	0,025837
16,1000	0,486214	-0,611369	0,011219	0,032395	0,026776
16,2000	0,485556	-0,611234	0,011773	0,033591	0,027731
16,3000	0,484912	-0,611050	0,012334	0,034791	0,028692
16,4000	0,484287	-0,610820	0,012896	0,035979	0,029647
16,5000	0,483687	-0,610549	0,013451	0,037143	0,030584
16,6000	0,483120	-0,610241	0,013993	0,038267	0,031491
16,7000	0,482589	-0,609904	0,014516	0,039341	0,032359
16,8000	0,482098	-0,609544	0,015015	0,040357	0,033182
16,9000	0,481648	-0,609168	0,015487	0,041310	0,033954
17,0000	0,481240	-0,608782	0,015929	0,042197	0,034674
17,1000	0,480872	-0,608391	0,016341	0,043016	0,035340
17,2000	0,480544	-0,607999	0,016722	0,043770	0,035952
17,3000	0,480254	-0,607610	0,017072	0,044460	0,036513
17,4000	0,479999	-0,607227	0,017393	0,045088	0,037025
17,5000	0,479777	-0,606851	0,017685	0,045658	0,037489

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
17,6000	0,479586	-0,606484	0,017951	0,046173	0,037908
17,7000	0,479423	-0,606127	0,018190	0,046636	0,038286
17,8000	0,479287	-0,605782	0,018406	0,047052	0,038624
17,9000	0,479175	-0,605449	0,018598	0,047422	0,038926
18,0000	0,479086	-0,605128	0,018769	0,047750	0,039194
18,1000	0,479018	-0,604820	0,018920	0,048040	0,039430
18,2000	0,478969	-0,604524	0,019053	0,048293	0,039636
18,3000	0,478937	-0,604240	0,019168	0,048513	0,039815
18,4000	0,478920	-0,603969	0,019267	0,048701	0,039968
18,5000	0,478919	-0,603710	0,019350	0,048861	0,040098
18,6000	0,478931	-0,603464	0,019420	0,048993	0,040206
18,7000	0,478956	-0,603228	0,019476	0,049101	0,040294
18,8000	0,478991	-0,603005	0,019521	0,049185	0,040362

Продолжение табл. 2.1.12

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
18,9000	0,479037	-0,602792	0,019554	0,049248	0,040413
19,0000	0,479093	-0,602590	0,019576	0,049291	0,040448
19,1000	0,479157	-0,602398	0,019588	0,049315	0,040467
19,2000	0,479228	-0,602217	0,019592	0,049322	0,040472
19,3000	0,479307	-0,602045	0,019587	0,049313	0,040464
19,4000	0,479392	-0,601883	0,019574	0,049289	0,040444
19,5000	0,479484	-0,601730	0,019554	0,049251	0,040413
19,6000	0,479580	-0,601585	0,019527	0,049200	0,040371
19,7000	0,479682	-0,601449	0,019494	0,049138	0,040320
19,8000	0,479787	-0,601321	0,019455	0,049065	0,040259
19,9000	0,479897	-0,601201	0,019410	0,048981	0,040191
20,0000	0,480010	-0,601088	0,019361	0,048888	0,040114
20,1000	0,480126	-0,600983	0,019307	0,048787	0,040030
20,2000	0,480244	-0,600884	0,019249	0,048677	0,039940
20,3000	0,480365	-0,600792	0,019188	0,048560	0,039844
20,4000	0,480489	-0,600707	0,019122	0,048436	0,039742
20,5000	0,480614	-0,600628	0,019053	0,048305	0,039635
20,6000	0,480740	-0,600554	0,018982	0,048169	0,039523
20,7000	0,480868	-0,600486	0,018908	0,048028	0,039407
20,8000	-0,480997	0,600424	0,018831	0,047882	0,039287
20,9000	-0,481127	0,600367	0,018752	0,047731	0,039164
21,0000	-0,481257	0,600314	0,018671	0,047577	0,039037
21,1000	-0,481388	0,600267	0,018588	0,047418	0,038907
21,2000	-0,481519	0,600224	0,018503	0,047257	0,038774
21,3000	-0,481651	0,600186	0,018417	0,047092	0,038639
21,4000	-0,481782	0,600151	0,018330	0,046925	0,038502
21,5000	-0,481913	0,600121	0,018242	0,046755	0,038362
21,6000	-0,482044	0,600095	0,018153	0,046584	0,038222
21,7000	-0,482174	0,600071	0,018063	0,046410	0,038079
21,8000	-0,482304	0,600053	0,017972	0,046235	0,037935
21,9000	-0,482433	0,600037	0,017880	0,046059	0,037791
22,0000	-0,482561	0,600024	0,017788	0,045881	0,037645

Продолжение табл. 2.1.12

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
22,1000	-0,482689	0,600015	0,017696	0,045703	0,037499

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
22,2000	-0,482816	0,600008	0,017604	0,045523	0,037352
22,3000	-0,482941	0,600004	0,017511	0,045344	0,037204
22,4000	-0,483066	0,600003	0,017418	0,045164	0,037056
22,6000	-0,483311	0,600009	0,017233	0,044803	0,036761
22,8000	-0,483552	0,600024	0,017049	0,044443	0,036465
23,0000	-0,483787	0,600047	0,016866	0,044085	0,036171
23,2000	-0,484016	0,600078	0,016685	0,043729	0,035879
23,4000	-0,484240	0,600117	0,016505	0,043377	0,035590
23,6000	-0,484456	0,600161	0,016329	0,043029	0,035304
23,8000	-0,484666	0,600212	0,016156	0,042685	0,035023
24,0000	-0,484869	0,600267	0,015985	0,042348	0,034746
25,0000	-0,485777	0,600607	0,015193	0,040763	0,033446
26,0000	-0,486496	0,601012	0,014513	0,039387	0,032317
27,0000	-0,487024	0,601444	0,013959	0,038255	0,031388
28,0000	-0,487362	0,601875	0,013540	0,037390	0,030678
29,0000	-0,487519	0,602282	0,013258	0,036805	0,030198
30,0000	-0,487509	0,602644	0,013112	0,036500	0,029949
32,0000	-0,487102	0,603164	0,013183	0,036648	0,030069
34,0000	-0,486465	0,603344	0,013565	0,037441	0,030720
36,0000	-0,485946	0,603243	0,013982	0,038300	0,031426
38,0000	-0,485695	0,603033	0,014248	0,038847	0,031874
40,0000	-0,485669	0,602852	0,014339	0,039033	0,032027
45,0000	-0,485937	0,602732	0,014192	0,038733	0,031780
50,0000	-0,486044	0,602826	0,014077	0,038496	0,031586
55,0000	-0,485989	0,602857	0,014104	0,038552	0,031632
60,0000	-0,485964	0,602837	0,014130	0,038606	0,031676
65,0000	-0,485975	0,602830	0,014125	0,038595	0,031667
70,0000	-0,485981	0,602834	0,014119	0,038583	0,031658
72,0000	-0,485979	0,602834	0,014120	0,038575	0,031656

Продолжение табл. 2.1.12

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
Третье решение					
14,7264	0,498944	-0,608922	0,361759	0,015730	0,012461
14,7266	0,499012	-0,608906	0,358918	0,015670	0,012393
14,7268	0,499057	-0,608896	0,357035	0,015631	0,012347
14,7270	0,499093	-0,608888	0,355522	0,015599	0,012311
14,7280	0,499224	-0,608859	0,350146	0,015485	0,012180
14,7290	0,499318	-0,608838	0,346294	0,015404	0,012086
14,7300	0,499395	-0,608821	0,343138	0,015337	0,012008
14,7310	0,499462	-0,608806	0,340406	0,015279	0,011940
14,7320	0,499522	-0,608793	0,337967	0,015228	0,011880
14,7330	0,499577	-0,608781	0,335746	0,015180	0,011824
14,7340	0,499628	-0,608770	0,333694	0,015137	0,011773
14,7350	0,499675	-0,608760	0,331781	0,015096	0,011725
14,7360	0,499720	-0,608751	0,329983	0,015058	0,011680
14,7370	0,499763	-0,608742	0,328281	0,015022	0,011637
14,7380	0,499803	-0,608733	0,326664	0,014987	0,011596
14,7390	0,499842	-0,608725	0,325120	0,014954	0,011557
14,7400	0,499879	-0,608717	0,323640	0,014923	0,011519
14,7500	0,500193	-0,608653	0,311299	0,014658	0,011201
14,7600	0,500442	-0,608603	0,301646	0,014450	0,010948

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
Третье решение					
14,7700	0,500654	-0,608562	0,293529	0,014274	0,010732
14,7800	0,500841	-0,608527	0,286438	0,014119	0,010541
14,7900	0,501010	-0,608495	0,280097	0,013980	0,010368
14,8000	0,501165	-0,608467	0,274333	0,013853	0,010209
14,8100	0,501309	-0,608441	0,269032	0,013735	0,010061
14,8200	0,501444	-0,608418	0,264112	0,013625	0,009922
14,8300	0,501571	-0,608396	0,259513	0,013522	0,009792
14,8400	0,501691	-0,608376	0,255191	0,013425	0,009668
14,8500	0,501805	-0,608357	0,251108	0,013332	0,009550
14,8600	0,501914	-0,608339	0,247236	0,013244	0,009437
14,8700	0,502018	-0,608322	0,243552	0,013160	0,009329
14,8800	0,502119	-0,608306	0,240035	0,013079	0,009225

*Продолжение табл. 2.1.12*

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
14,8900	0,502215	-0,608292	0,236671	0,013001	0,009125
14,9000	0,502308	-0,608277	0,233444	0,012926	0,009028
14,9100	0,502398	-0,608264	0,230343	0,012853	0,008934
14,9200	0,502485	-0,608251	0,227357	0,012783	0,008844
14,9300	0,502569	-0,608239	0,224479	0,012715	0,008756
14,9400	0,502651	-0,608228	0,221699	0,012649	0,008671
14,9500	0,502731	-0,608217	0,219010	0,012585	0,008588
14,9600	0,502808	-0,608206	0,216407	0,012522	0,008507
14,9700	0,502884	-0,608196	0,213885	0,012462	0,008428
14,9800	0,502957	-0,608186	0,211437	0,012402	0,008351
14,9900	0,503029	-0,608177	0,209059	0,012344	0,008276
15,0000	0,503099	-0,608168	0,206748	0,012288	0,008203
15,1000	0,503721	-0,608096	0,186607	0,011782	0,007548
15,2000	0,504240	-0,608047	0,170416	0,011356	0,007000
15,3000	0,504687	-0,608014	0,156915	0,010984	0,006528
15,4000	0,505078	-0,607993	0,145378	0,010652	0,006112
15,5000	0,505427	-0,607981	0,135346	0,010350	0,005741
15,6000	0,505741	-0,607976	0,126506	0,010072	0,005408
15,7000	0,506027	-0,607977	0,118634	0,009814	0,005104
15,8000	0,506287	-0,607983	0,111564	0,009573	0,004828
15,9000	0,506527	-0,607993	0,105170	0,009346	0,004573
16,0000	0,506748	-0,608007	0,099352	0,009131	0,004339
16,1000	0,506953	-0,608023	0,094030	0,008928	0,004122
16,2000	0,507143	-0,608042	0,089141	0,008734	0,003920
16,3000	0,507321	-0,608063	0,084632	0,008549	0,003732
16,4000	0,507487	-0,608086	0,080458	0,008371	0,003557
16,5000	0,507643	-0,608110	0,076583	0,008201	0,003393
16,6000	0,507789	-0,608136	0,072975	0,008037	0,003239
16,7000	0,507927	-0,608164	0,069607	0,007879	0,003095
16,8000	0,508057	-0,608192	0,066456	0,007727	0,002959
16,9000	0,508179	-0,608221	0,063502	0,007580	0,002832
17,0000	-0,508295	0,608251	0,060727	0,007437	0,002711

*Продолжение табл. 2.1.12*

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
17,1000	-0,508404	0,608281	0,058116	0,007300	0,002597

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
17,2000	-0,508508	0,608312	0,055654	0,007166	0,002490
17,3000	-0,508606	0,608344	0,053331	0,007036	0,002388
17,4000	-0,508700	0,608376	0,051135	0,006911	0,002291
17,5000	-0,508788	0,608408	0,049057	0,006788	0,002200
17,6000	-0,508873	0,608440	0,047088	0,006670	0,002113
17,7000	-0,508935	0,608473	0,045219	0,006554	0,002030
17,8000	-0,509030	0,608506	0,043445	0,006441	0,001951
17,9000	-0,509102	0,608539	0,041759	0,006332	0,001877
18,0000	-0,509172	0,608572	0,040154	0,006225	0,001806
18,1000	-0,509238	0,608605	0,038626	0,006086	0,001738
18,2000	-0,509302	0,608638	0,037169	0,006020	0,001673
18,3000	-0,509362	0,608671	0,035781	0,005921	0,001611
18,4000	-0,509420	0,608704	0,034455	0,005824	0,001553
18,5000	-0,509475	0,608737	0,033189	0,005730	0,001496
18,6000	-0,509528	0,608770	0,031979	0,005638	0,001443
18,7000	-0,509579	0,608803	0,030821	0,005548	0,001391
18,8000	-0,509627	0,608835	0,029714	0,005460	0,001342
18,9000	-0,509674	0,608868	0,028654	0,005374	0,001295
19,0000	-0,509718	0,608900	0,027639	0,005290	0,001250
19,1000	-0,509761	0,608932	0,026666	0,005208	0,001207
19,2000	-0,509802	0,608964	0,025733	0,005128	0,001165
19,3000	-0,509841	0,608996	0,024838	0,005049	0,001126
19,4000	-0,509879	0,609028	0,023979	0,004973	0,001088
19,5000	-0,509915	0,609059	0,023155	0,004897	0,001051
19,6000	-0,509949	0,609091	0,022363	0,004824	0,001016
19,7000	-0,509983	0,609122	0,021602	0,004752	0,000982
19,8000	-0,510015	0,609153	0,020871	0,004681	0,000950
19,9000	-0,510045	0,609183	0,020168	0,004612	0,000919
20,0000	-0,510075	0,609213	0,019492	0,004545	0,000889
20,1000	-0,510103	0,609244	0,018842	0,004479	0,000860
20,2000	-0,510130	0,609274	0,018216	0,004414	0,000832

Продолжение табл. 2.1.12

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
20,3000	-0,510156	0,609303	0,017614	0,004350	0,000806
20,4000	-0,510181	0,609333	0,017034	0,004288	0,000780
20,5000	-0,510205	0,609362	0,016475	0,004227	0,000755
20,6000	-0,510229	0,609391	0,015937	0,004167	0,000732
20,7000	-0,510251	0,609420	0,015418	0,004109	0,000709
20,8000	-0,510272	0,609449	0,014918	0,004051	0,000687
20,9000	-0,510293	0,609477	0,014436	0,003995	0,000665
21,0000	-0,510313	0,609505	0,013972	0,003940	0,000645
21,1000	-0,510332	0,609533	0,013523	0,003886	0,000625
21,2000	-0,510350	0,609561	0,013091	0,003833	0,000606
21,3000	-0,510368	0,609588	0,012674	0,003781	0,000587
21,4000	-0,510384	0,609615	0,012271	0,003729	0,000570
21,5000	-0,510401	0,609642	0,011883	0,003679	0,000553
21,6000	-0,510416	0,609669	0,011508	0,003630	0,000540
21,7000	-0,510431	0,609696	0,011145	0,003582	0,000520
21,8000	-0,510446	0,609722	0,010795	0,003534	0,000504
21,9000	-0,510460	0,609748	0,010457	0,003488	0,000490
22,0000	-0,510473	0,609774	0,010131	0,003442	0,000475

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
22,1000	-0,510486	0,609800	0,009815	0,003397	0,000461
22,2000	-0,510498	0,609825	0,009511	0,003353	0,000448
22,3000	-0,510510	0,609850	0,009216	0,003310	0,000435
22,4000	-0,510521	0,609875	0,008931	0,003268	0,000422
22,6000	-0,510543	0,609925	0,008390	0,003185	0,000398
22,8000	-0,510562	0,609973	0,007883	0,003106	0,000375
23,0000	-0,510581	0,610021	0,007409	0,003029	0,000354
23,2000	-0,510597	0,610068	0,006966	0,002955	0,000335
23,4000	-0,510613	0,610114	0,006550	0,002883	0,000316
23,6000	-0,510627	0,610160	0,006161	0,002814	0,000299
23,8000	-0,510640	0,610204	0,005796	0,002747	0,000282
24,0000	-0,510652	0,610249	0,005454	0,002682	0,000267
25,0000	-0,510697	0,610458	0,000040	0,002390	0,000202
26,0000	-0,510724	0,610652	0,000030	0,002142	0,000155

Окончание табл. 2.1.12

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
27,0000	-0,510736	0,610833	0,000022	0,001929	0,000119
28,0000	-0,510740	0,610012	0,000017	0,001746	0,000091
29,0000	-0,510735	0,611159	0,000012	0,001588	0,000070
30,0000	-0,510725	0,611307	0,000009	0,001451	0,000055
40,0000	-0,510557	0,612411	0,000001	0,000705	0,000002
50,0000	-0,510438	0,613102	0,000000	0,000423	0,000000
60,0000	-0,510377	0,613568	0,000000	0,000283	0,000000
70,0000	-0,510344	0,613901	0,000000	0,000203	0,000000
80,0000	-0,510326	0,614151	0,000000	0,000153	0,000000
90,0000	-0,510315	0,614344	0,000000	0,000120	0,000000
100,000	-0,510310	0,614499	0,000000	0,000096	0,000000
200,000	-0,510363	0,615177	0,000000	0,000024	0,000000
300,000	-0,510470	0,615428	0,000000	0,000013	0,000000
400,000	-0,510523	0,615622	0,000000	0,000010	0,000000
500,000	-0,510535	0,615777	0,000000	0,000010	0,000000
1000,00	-0,510467	0,616188	0,000000	0,000012	0,000000

Дальнейший анализ второго и третьего решений, например, при  $\varepsilon_0 = 24$  представлен на рис. 2.1.17 – 2.1.22 и в табл. 2.1.13, 2.1.14, в которых кроме известных обозначений вычислены: распределение безразмерного давления в зазоре  $P(\varepsilon) - P(0) = H^2(z) + H'(z)$  и безразмерная результирующая скорости  $U = \sqrt{(H')^2 + G^2}$ .

Из рисунков и соответствующих таблиц видим, что вблизи неподвижного диска вращение жидкости направлено в обратную сторону относительно вращения диска. Третье решение в рассматриваемом случае ( $\varepsilon_0 = 24$ ) показывает, что тангенциальная безразмерная скорость, начиная с  $\varepsilon > 8,0$ , близка к нулю, соответственно и ее производные. Это означает, что третье решение является наиболее вероятным осуществлением гидродинамической обстановки вблизи вращающегося и неподвижного дисков (к рассмотрению этого вопроса мы вернемся позже). Это подтверждают и соотношения экстремумов безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$  в приводимых решениях на рис. 2.1.17 – 2.1.22 и в табл. 2.1.13, 2.1.14.

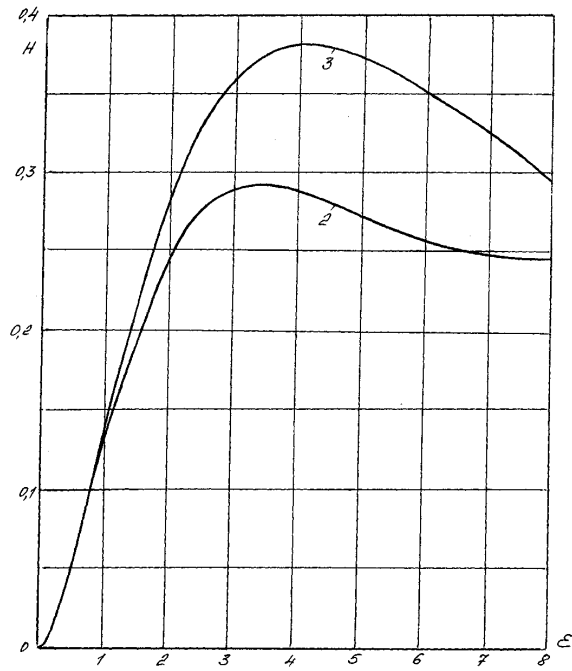


Рис. 2.1.17. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\epsilon)$  от безразмерной осевой координаты  $\epsilon$  для второго и третьего решений

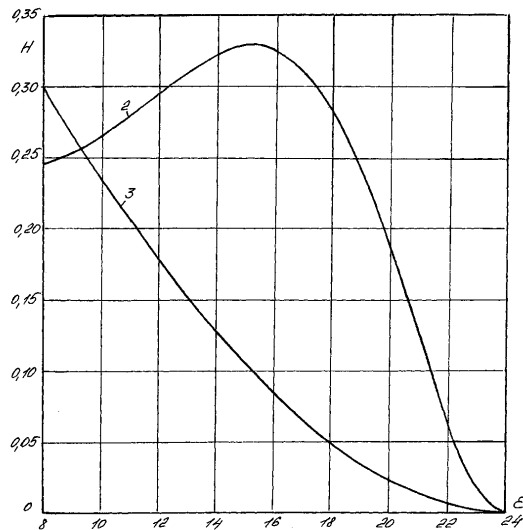


Рис. 2.1.18. Зависимость аксиальной скорости  $H(\epsilon)$  при  $\epsilon_0 = 24$  для второго и третьего решений (продолжение)

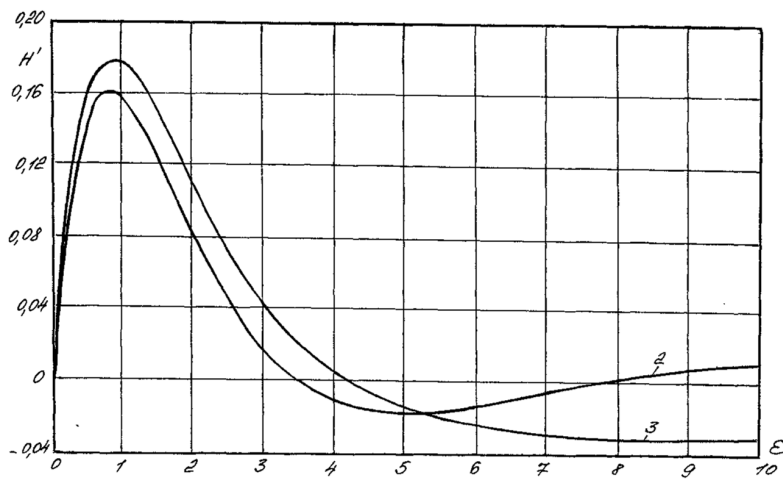


Рис. 2.1.19. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  от безразмерной осевой координаты  $\epsilon$  для второго и третьего решений

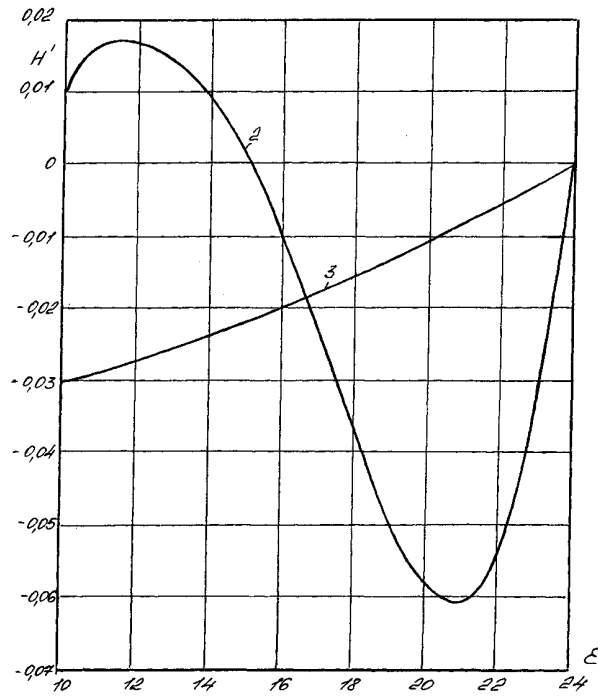


Рис. 2.1.20. Зависимость радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  при  $\epsilon_0 = 24$  для второго и третьего решений (продолжение)

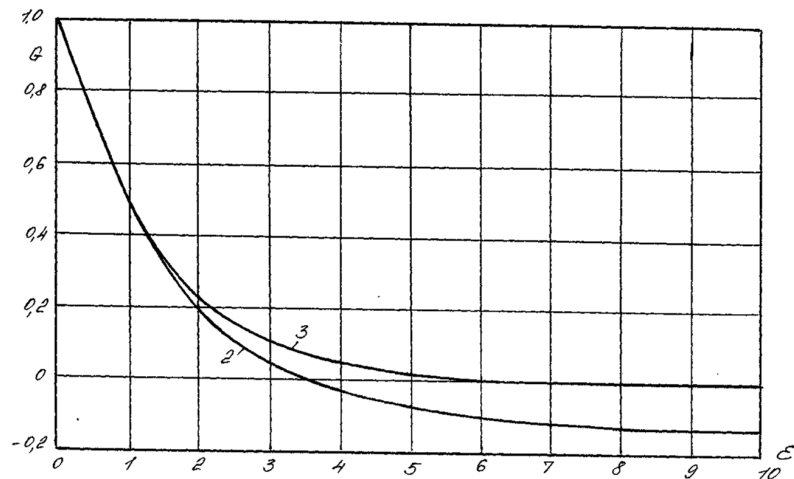


Рис. 2.1.21. Зависимость безразмерной тангенциальной скорости  $G(\epsilon)$  от безразмерной осевой координаты  $\epsilon$  для второго и третьего решений

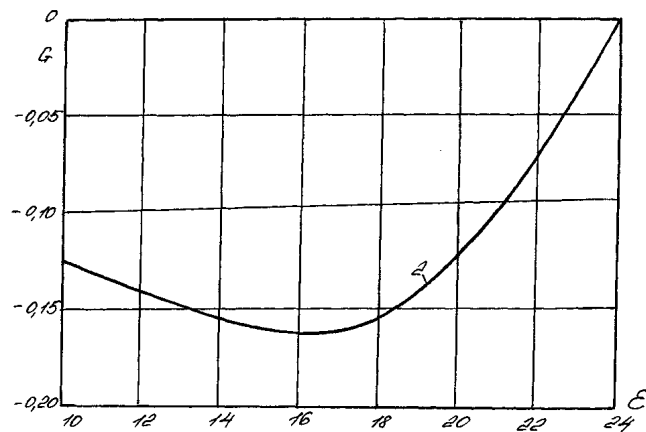


Рис. 2.1.22. Зависимость тангенциальной скорости  $G(\epsilon)$  при  $\epsilon_0 = 24$  для второго решения (продолжение)

Второе решение:

$$\begin{aligned}
 H_{\max} &\approx 0,294472 & \text{при } \epsilon \approx 3,4; & & H_{\min} &\approx 0,245998 & \text{при } \epsilon \approx 8,0; \\
 H_{\max} &\approx 0,329699 & \text{при } \epsilon \approx 15,0; & & H'_{\max} &\approx 0,161720 & \text{при } \epsilon \approx 0,8; \\
 H'_{\min} &\approx -0,018643 & \text{при } \epsilon \approx 4,8; & & H'_{\max} &\approx 0,016921 & \text{при } \epsilon \approx 11,5;
 \end{aligned}$$



$$H'_{\min} \approx -0,061018 \quad \text{при } \varepsilon \approx 21,0; \quad G_{\min} \approx -0,161784 \quad \text{при } \varepsilon \approx 16,5. \quad (2.1.11)$$

Третье решение:

$$H_{\max} \approx 0,382159 \quad \text{при } \varepsilon \approx 4,2; \quad H'_{\max} \approx 0,180085 \quad \text{при } \varepsilon \approx 0,9;$$

$$H'_{\min} \approx -0,031210 \quad \text{при } \varepsilon \approx 8,5; \quad G_{\min} \approx -0,002008 \quad \text{при } \varepsilon \approx 15,0.$$

Из приведенных данных (2.1.11) заключаем, что число экстремумов составляющих скоростей второго решения вдвое больше, чем третьего. То есть второе решение носит колебательный характер, третье решение более спокойное, а значит в реальности оно более вероятно.

Изучение второго–третьего решений показало, что при  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^* = 14,72631$  они смыкаются и при  $\varepsilon_0 < \varepsilon_0^*$  существует только первое решение. Мы численно проинтегрировали систему дифференциальных уравнений (2.5) при значении  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^*$ , для второго–третьего решения и для первого. Результаты расчетов представлены на рис. 2.1.23 – 2.1.25 и в табл. 2.1.15, 2.1.16.

На основании графических изображений и таблиц замечаем, что первое решение имеет по количеству большее число экстремумов и по модулю большие их значения, чем при втором–третьем решении, т.е. реализоваться в действительности второе–третье решение имеет большую вероятность по сравнению с первым.

Для сопоставления запишем значения начальных (граничных) условий второго–третьего и первого решений при  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^* = 14,72631$ :

• второе–третье решение:

$$H''(0) = A = 0,498863; \quad G'(0) = B = -0,608940; \quad C = 0,003651;$$

$$H''(\varepsilon_0) = a = 0,015801; \quad G'(\varepsilon) = b = 0,012542;$$

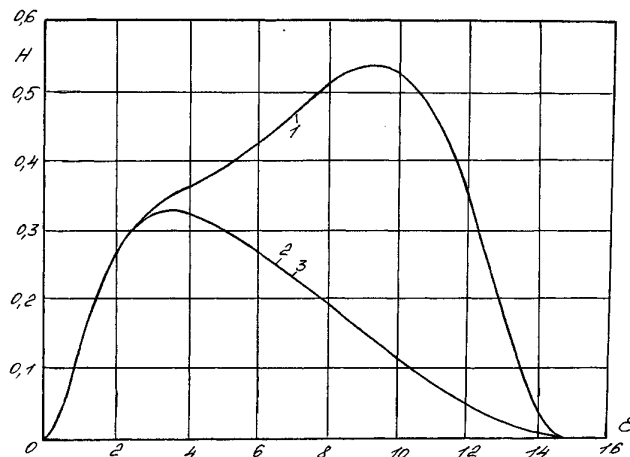


Рис. 2.1.23. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon)$  для первого, второго и третьего решений при  $\varepsilon_0 = \varepsilon^* = 14,72631$

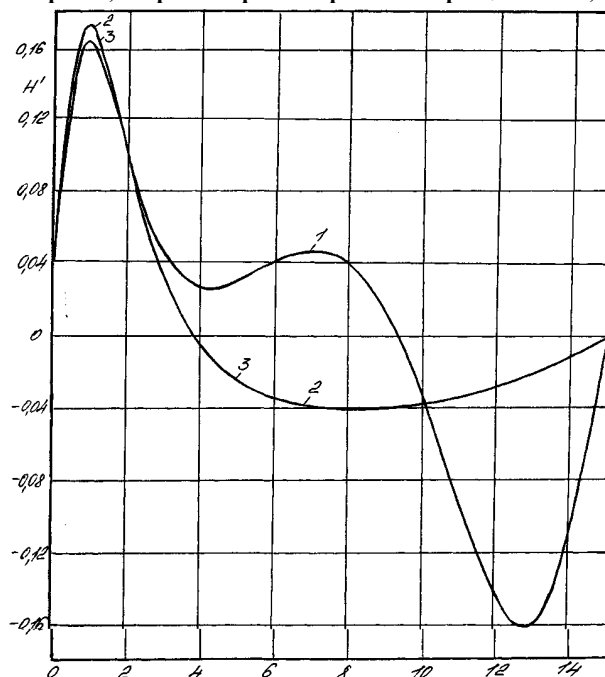


Рис. 2.1.24. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\varepsilon)$

для первого, второго и третьего решений при  $\varepsilon_0 = \varepsilon^* = 14,72631$

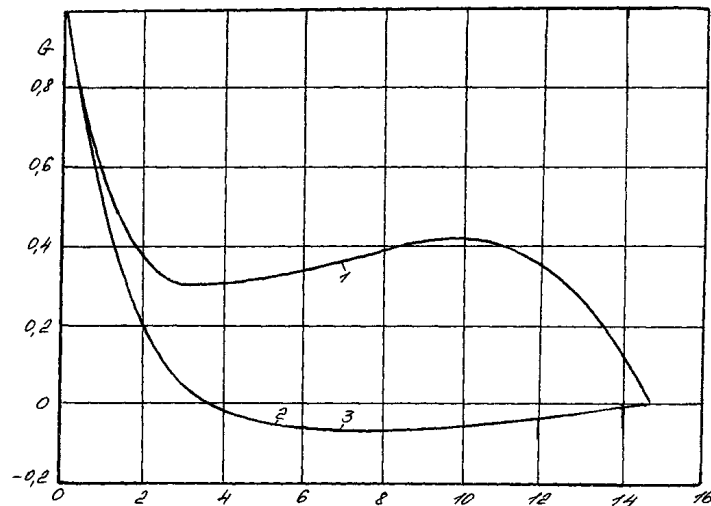


Рис. 2.1.25. Зависимость безразмерной тангенциальной скорости  $G(\varepsilon)$  для первого, второго и третьего решений при  $\varepsilon_0 = \varepsilon^* = 14,72631$

• первое решение:

$$H''(0) = A = 0,461413; \quad G'(0) = B = -0,514857; \quad C = 0,113314;$$

$$H''(\varepsilon_0) = a = 0,183971; \quad G'(\varepsilon) = b = -0,150949.$$

Итак, мы в решении рассматриваемой задачи нашли три математически возможные решения, одно из которых реализуется в действительности. По нашей оценке – это первое решение при  $0 < \varepsilon_0 \leq 14,72631$  и третье при  $\varepsilon_0 \geq 14,72631$ .

Поведение безразмерных скоростей на интервале между пограничными слоями на вращающемся и неподвижном дисках проанализируем из рассмотрения полученного ранее уравнения (1.2.14) [14]:

$$H^{\text{VI}} = -4CH'' - 8HH^{\text{V}} + 2H'H^{\text{IV}} + 2H''H''' - 16CHH' - 4H'H'H'' + 8HH''H'' + 16HH'H''' - 20HHH^{\text{IV}} - 16HH'H'H' + 32HHH'H'' - 16HHHH' \quad (2.1.12)$$

Положив  $H = W + h$ , где  $W$  – постоянная величина аксиальной скорости, вокруг которой колеблется с малой амплитудой скорость  $H$ , преобразуем уравнений (2.1.12) к виду

$$(2.1.13)$$

Для анализа этого многосложного уравнения предположим для первого приближения, что члены, содержащие произведения  $h^n h^m$ , есть величины второго порядка малости по сравнению с линейными, где  $n, m$  – есть порядки производных по  $\varepsilon$ .

На основании принятых допущений уравнение (2.1.13) приводится к виду

$$h^{VI} + 8Wh^V + 20W^2h^{IV} + 16W^3h''' + 4Ch'' + 16CWh' = 0. \quad (2.1.14)$$

Это есть линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $h'$ .

Характеристическим уравнением для решения (2.1.14) будет

$$r^5 + 8Wr^4 + 20W^2r^3 + 16W^3r^2 + 4Cr + 16CW = 0, \quad (2.1.15)$$

которое преобразуем

$$(r + 4W)(r^4 + 4Wr^3 + 4W^2r^2 + 4C) = 0. \quad (2.1.16)$$

Первым решением (2.1.16) является

$$r_1 = -4W. \quad (2.1.17)$$

Остальные четыре корня будут комплексными решениями уравнения

$$r^4 + 4Wr^3 + 4W^2r^2 + 4C = 0, \quad (2.1.18)$$

которые имеют вид

$$r_{2,3,4,5} = (-W \pm \alpha) \pm i\beta,$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4C} + W^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{W^4 + 4C} - W^2}{2}}. \quad (2.1.19)$$

Значит общее решение дифференциального уравнения (2.1.14) запишем в виде

$$h' = de^{-4W\varepsilon} + e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (a \sin \beta\varepsilon + b \cos \beta\varepsilon) + e^{-(W-\alpha)\varepsilon} (a_1 \sin \beta\varepsilon + b_1 \cos \beta\varepsilon). \quad (2.1.20)$$

На основании (2.1.19) всегда  $\alpha > W$ . Тогда последнее слагаемое уравнения (2.1.20) бесконечно возрастает, что противоречит условию ограниченности скоростей движения жидкости в зазоре между вращающимися и неподвижным дисками. Значит следует положить  $a_1 = b_1 = 0$ . Тогда окончательно решение дифференциального уравнения (2.1.14) для рассматриваемой задачи выглядит следующим образом

$$h' = de^{-4W\varepsilon} + e^{-(W+\alpha)\varepsilon} (a \sin \beta\varepsilon + b \cos \beta\varepsilon). \quad (2.1.21)$$

Решение (2.1.21) при  $d = 0$  полностью совпадает с решением дифференциального уравнения (1.4.4) [14]:

$$h^V + 4Wh^{IV} + 4W^2h''' + 4S^2h' = 0, \quad (2.1.22)$$

где  $S^2 = C$ .

Значит дифференциальное уравнение (2.1.14) идентично уравнению (2.1.22). Докажем это. Проинтегрируем по  $\varepsilon$  уравнение (2.1.22), а также умножим (2.1.22) на  $4W$  и полученные равенства сложим:

$$\begin{aligned} & h^{VI} + 4Wh^V + 4W^2h^{IV} + 4S^2h'' = 0 \\ & + \\ & 4Wh^V + 16W^2h^{IV} + 16W^3h''' + 16WS^2h' = 0 \\ & \text{-----} \\ & h^{VI} + 8Wh^V + 20W^2h^{IV} + 16W^3h''' + 4Ch'' + 16CWh' = 0 \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Полученное уравнение (2.1.23) полностью совпадает с уравнением (2.1.14), т.е. они тождественны при  $d = 0$ .

В связи с нелинейностью системы дифференциальных уравнений (2.5) и полученным на основе их преобразования уравнения (2.1.13) мы сделали еще одну попытку найти, наряду с описанными тремя вариантами решений, другие при более значительных безразмерных расстояниях  $\varepsilon_0$  между вращающимися и неподвижным дисками. Эта цель была достигнута. Назовем их *четвертым и пятым решениями*.

Начальные параметры  $A = H''(0)$ ,  $B = G'(0)$ ,  $C$ ,  $a = H''(\varepsilon_0)$ ,  $b = G'(\varepsilon_0)$  графически показаны на рис. 2.1.26 – 2.1.29 и в табл. 2.1.16. Четвертое и пятое решения математически возможны при  $\varepsilon_0 \geq 20,322996$ . Когда  $\varepsilon_0 = 20,322996$ , четвертое и пятое решения смыкаются, и начальные параметры равны

$$\begin{aligned} A = H''(\varepsilon) &= 0,500568; & B = G'(\varepsilon) &= -0,564327; & C &= -0,00171008; \\ a = H''(\varepsilon_0) &= -0,0533516; & b = G'(\varepsilon_0) &= 0,0304781. \end{aligned}$$

Интересным является то, что коэффициент давления  $C = C(\varepsilon_0)$  изменяет знак с плюса на минус, т.е. как бы может существовать ситуация, когда в центробежном поле исследуемой задачи давление к оси вращения растет. При  $C = 0$  начальные параметры имеют значения

$$A = H''(0) = 0,499043; \quad B = G'(0) = -0,563746; \quad \varepsilon_0 = 20,339457;$$

$$a = H''(\varepsilon_0) = -0,0466999; \quad b = G(\varepsilon_0) = 0,0289510.$$

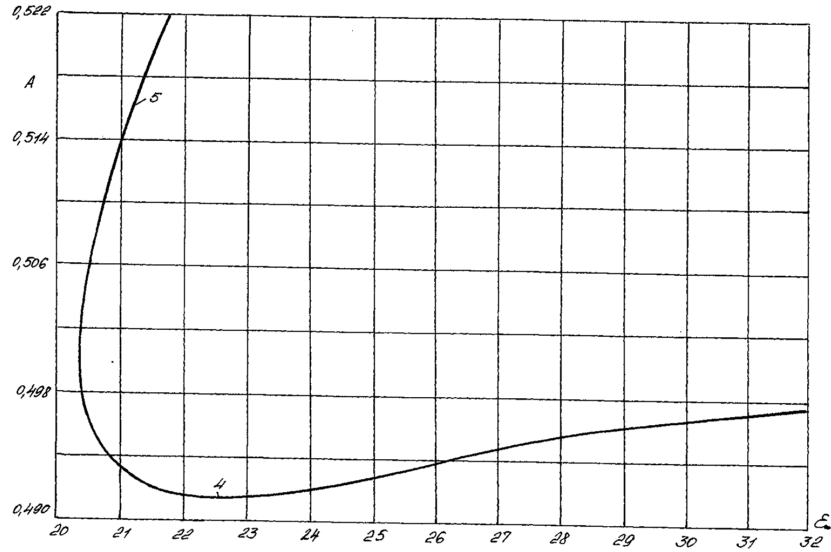


Рис. 2.1.26. Зависимость коэффициента  $A = H''(0)$  от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$  для четвертого и пятого решений

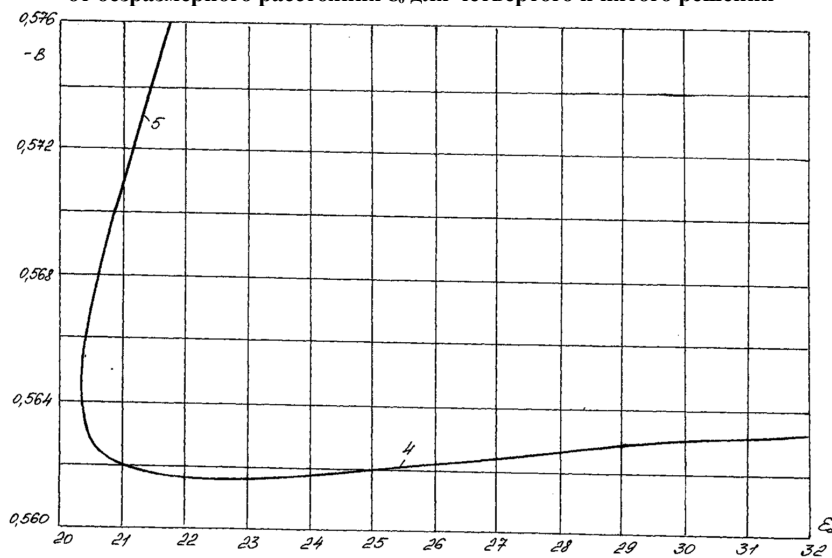


Рис. 2.1.27. Зависимость коэффициента  $B = G'(0)$  от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$  для четвертого и пятого решений

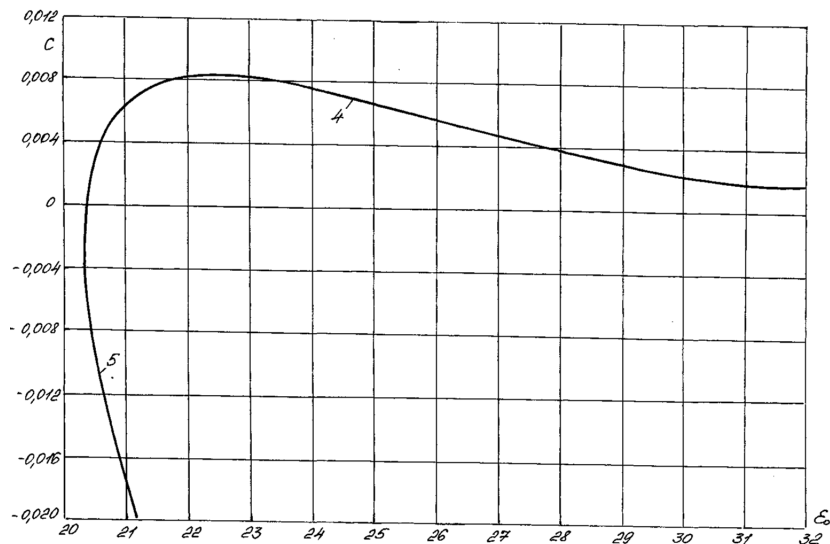


Рис. 2.1.28. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$  для четвертого и пятого решений

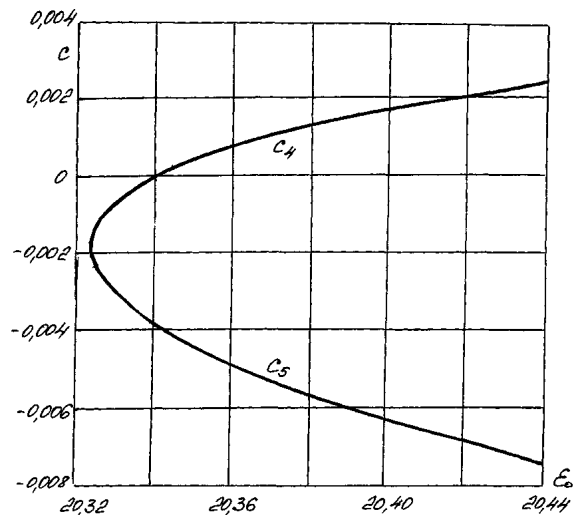


Рис. 2.1.29. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$  (фрагмент)

На рис. 2.1.30 – 2.1.36 и в табл. 2.1.17 и 2.1.18 представлены для сравнения с первым, вторым и третьим решениями численное интегрирование четвертого и пятого решений при безразмерном расстоянии между вращающимся и неподвижным дисками  $\varepsilon_0 = 24$ . Чтобы было наглядно наблюдать за поведением безразмерных функций скоростей, мы разделили диапазон  $0 \leq \varepsilon \leq 24$  на два интервала с различными масштабами. Из графического изображения и таблиц видно, что экстремумы функций скоростей четвертого и пятого решений удивительно большие. Поэтому в реальности они вряд ли реализуемы.

Для сравнения приводим значения начальных параметров при всех найденных пяти решениях, когда  $\varepsilon_0 = 24$ .

$A_1 = H_1''(0) = 0,473197;$	$B_1 = G_1'(0) = -0,524891;$	$C_1 = 0,097612;$
$A_2 = H_2''(0) = 0,484869;$	$B_2 = G_2'(0) = -0,600267;$	$C_2 = 0,015985;$
$A_3 = H_3''(0) = 0,510652;$	$B_3 = G_3'(0) = -0,610249;$	$C_3 = 0,00005454;$
$A_4 = H_4''(0) = 0,492113;$	$B_4 = G_4'(0) = -0,561723;$	$C_4 = 0,00765093;$
$A_5 = H_5''(0) = 0,539552;$	$B_5 = G_5'(0) = -0,588573;$	$C_5 = -0,046915;$
$a_1 = H_1''(\varepsilon_0) = 0,164499;$	$b_1 = G_1'(\varepsilon_0) = -0,134971;$	
$a_2 = H_2''(\varepsilon_0) = 0,042348;$	$b_2 = G_2'(\varepsilon_0) = 0,034746;$	
$a_3 = H_3''(\varepsilon_0) = 0,002682;$	$b_3 = G_3'(\varepsilon_0) = 0,0002668;$	
$a_4 = H_4''(\varepsilon_0) = 0,009281;$	$b_4 = G_4'(\varepsilon_0) = 0,0104443;$	
$a_5 = H_5''(\varepsilon_0) = 0,194048;$	$b_5 = G_5'(\varepsilon_0) = 0,0510963.$	

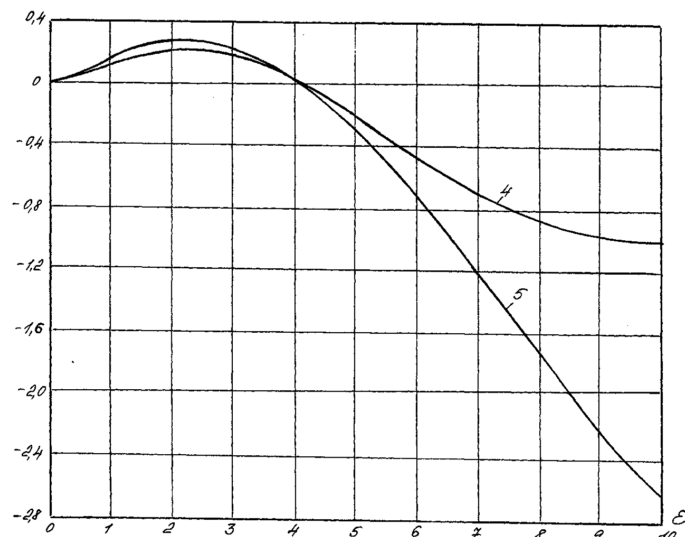


Рис. 2.1.30. Зависимости безразмерных аксиальных скоростей  $H(\varepsilon)$  при  $\varepsilon_0 = 24$  для четвертого и пятого решений

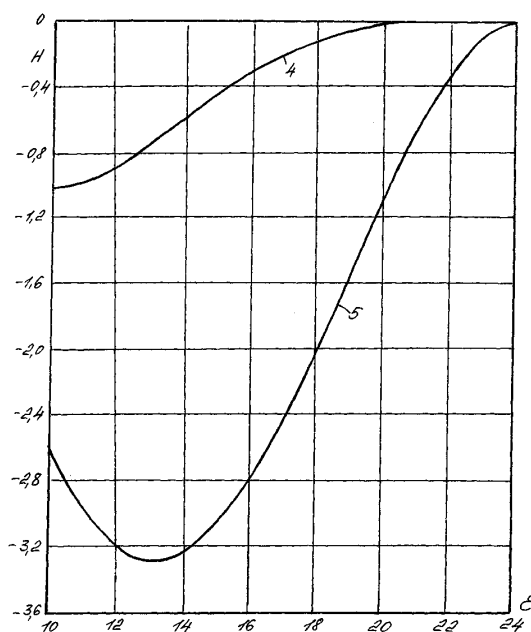


Рис. 2.1.31. Зависимости безразмерных аксиальных скоростей  $H(\varepsilon)$  при  $\varepsilon_0 = 24$  для четвертого и пятого решений (продолжение)

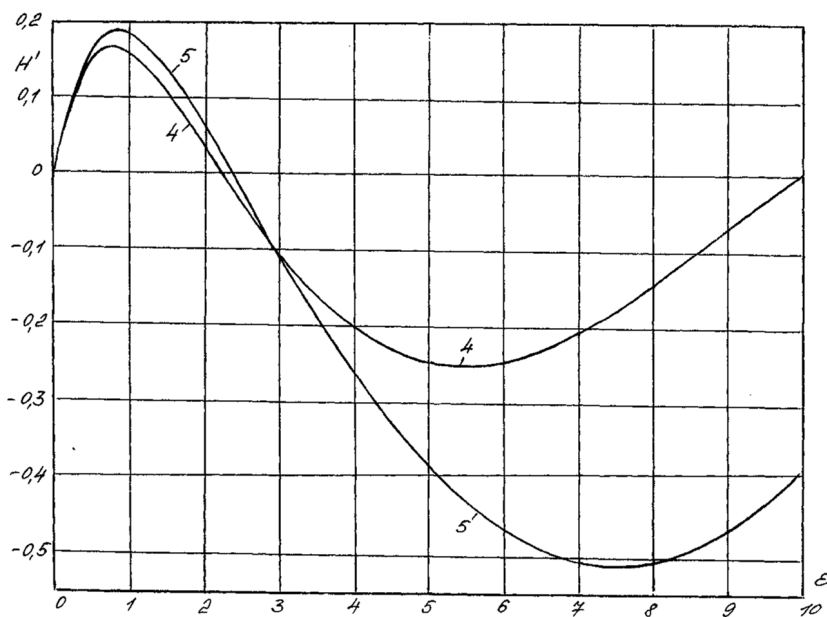


Рис. 2.1.32. Зависимости безразмерных радиальных скоростей  $H'(\varepsilon)$  при  $\varepsilon_0 = 24$  для четвертого и пятого решений

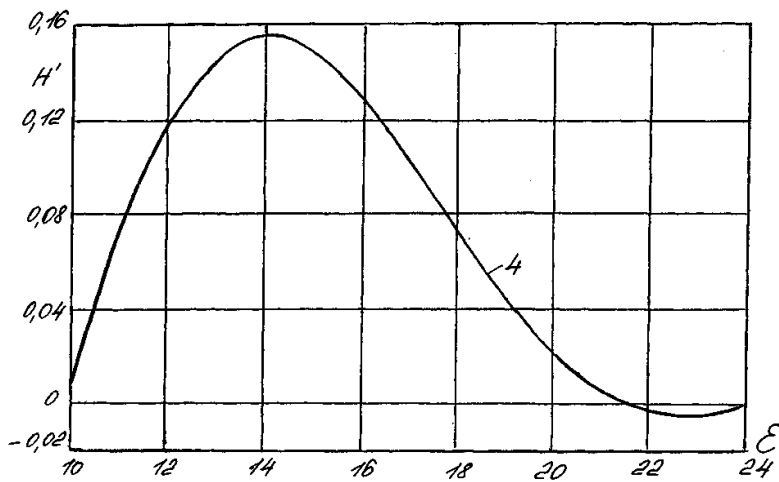


Рис. 2.1.33. Зависимости безразмерных радиальных скоростей  $H'(\epsilon)$  при  $\epsilon_0 = 24$  для четвертого решения (продолжение)

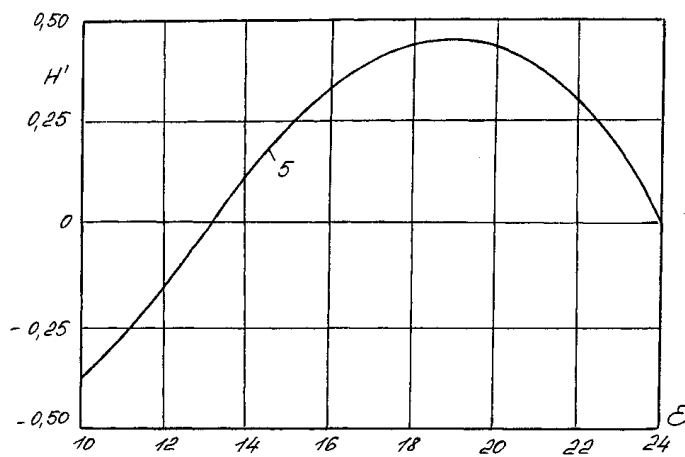


Рис. 2.1.34. Зависимости безразмерных радиальных скоростей  $H'(\epsilon)$  при  $\epsilon_0 = 24$  пятого решения (продолжение)

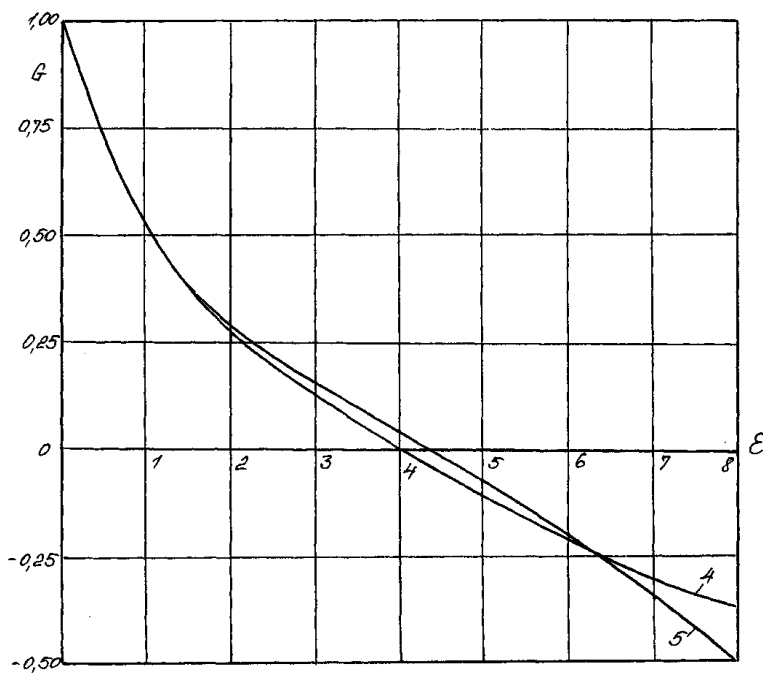


Рис. 2.1.35. Зависимости безразмерных окружных скоростей  $G(\epsilon)$  при  $\epsilon_0 = 24$  для четвертого и пятого решений

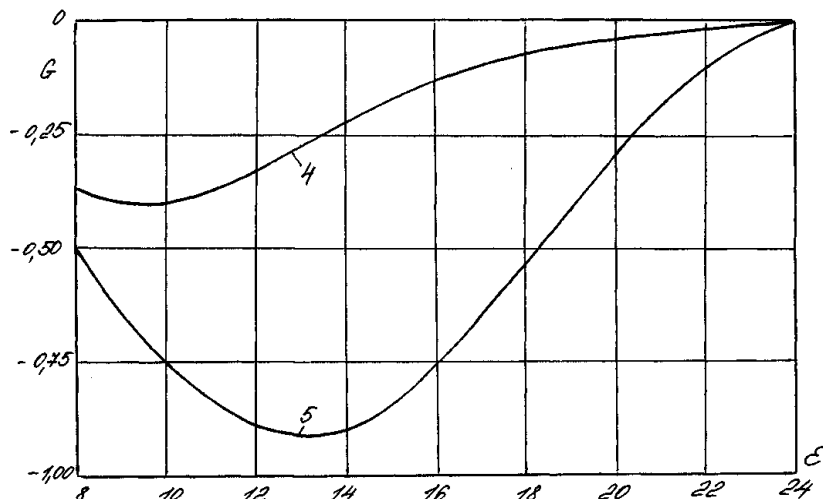


Рис. 2.1.36. Зависимости безразмерных окружных скоростей  $G(\varepsilon)$  при  $\varepsilon_0 = 24$  для четвертого и пятого решений (продолжение)

Из пяти возможных математических решений считаем, что наибольшую вероятность при  $\varepsilon_0 = 24$  имеет третье, когда коэффициент давления  $C$  минимален. Начальные параметры при этом близки к решениям Кармана–Кохрена [14]. Запишем их рядом:

- решение Кармана:

$$A = H''(0) = 0,510233; B = G'(0) = -0,615922; C = 0;$$

- решение третье при  $\varepsilon_0 = 24$ :

$$A = H''(0) = 0,510652; B = G'(0) = -0,610249; C = 0,000055.$$

В порядке анализа нами проинтегрированы уравнения (2.5) при найденных значениях, когда  $\varepsilon_0 = 20,339457$  и  $C = 0$ . Результаты представлены графически на рис. 2.1.37 и в табл. 2.1.19. Отметим, что в процессе решения начало цилиндрических координат было расположено на неподвижном диске, а аксиальная координата была направлена к вращающемуся диску. В таких условиях сходимость решения была более быстрой. В итоге можно сделать вывод, что это математическое решение, при  $C = 0$ , имеет малую вероятность осуществиться в действительности, поскольку аксиальная безразмерная скорость изменяет свой знак, а радиальная – дважды.

### 2.1.17. Граничные параметры

при  $G(0) = 1; H(0) = 0; H'(0) = 0; G(\varepsilon_0) = 0; H(\varepsilon_0) = 0; H'(\varepsilon_0) = 0$

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
Четвертое решение					
20,33	0,4995780	-0,5639450	-0,5991230	-0,0490633	0,0295013
20,34	0,4990180	-0,5637370	0,0276320	-0,0465899	0,0289252
20,35	0,4986240	-0,5635950	0,4677540	-0,0448267	0,0285085
20,40	0,4973910	-0,5631670	1,8427860	-0,0391540	0,0271322
20,45	0,4966030	-0,5629100	2,7171210	-0,0353901	0,0261865
20,50	0,4960050	-0,5627240	3,3979760	-0,0324351	0,0254241
20,60	0,4951080	-0,5624610	4,3703180	-0,0287078	0,0241912
20,70	0,4944430	-0,5622770	5,1030790	-0,0241722	0,0231855
20,80	0,4939190	-0,5621400	5,6781470	-0,0211463	0,0223203
20,90	0,4934940	-0,5620340	6,1443950	-0,0185436	0,0215533
21,00	0,4931410	-0,5619500	6,5300040	-0,0162561	0,0208599
21,10	0,4928460	-0,5618820	6,8529610	-0,0142151	0,0202243
21,20	0,4925960	-0,5618260	7,1255650	-0,0123734	0,0196358
21,30	0,4923840	-0,5617800	7,3566580	-0,0106971	0,0190865
21,40	0,4922030	-0,5617420	7,5528450	-0,0091609	0,0185705
21,50	0,4920510	-0,5617100	7,7192110	-0,0077452	0,0180835
21,60	0,4919210	-0,5616840	7,8597670	-0,0064347	0,0176217



$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
21,70	0,4918130	-0,5616630	7,9777440	-0,0052170	0,0171824
21,80	0,4917220	-0,5616450	8,0757870	-0,0040819	0,0167631
22,00	0,4915890	-0,5616190	8,2205260	-0,0020274	0,0159773
22,20	0,4915080	-0,5616040	8,3078300	-0,0002183	0,0152519
22,40	0,4914710	-0,5615970	8,3479210	0,0013840	0,0145778
22,60	0,4914710	-0,5615970	8,3486140	0,0028088	0,0139482
22,80	0,4915010	-0,5616020	8,3160650	0,0040791	0,0133577
23,00	0,4915570	-0,5616130	8,2552480	0,0052131	0,0128020
23,20	0,4916350	-0,5616280	8,1702680	0,0062256	0,0122776
23,40	0,4917330	-0,5616470	8,0645790	0,0071290	0,0117816

Продолжение табл. 2.1.17

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
23,60	0,4918460	-0,5616690	7,9411360	0,0079336	0,0113118
23,80	0,4919740	-0,5616950	7,8025020	0,0086483	0,0108661
24,00	0,4921130	-0,5617230	7,6509270	0,0092808	0,0104426
24,50	0,4925020	-0,5618050	7,2279760	0,0105446	0,0094724
25,00	0,4929290	-0,5619010	6,7621530	0,0114222	0,0086138
25,50	0,4933750	-0,5620050	6,2738350	0,0119828	0,0078526
26,00	0,4938270	-0,5621170	5,7791310	0,0122837	0,0071773
26,50	0,4942720	-0,5622320	5,2906860	0,0123739	0,0065785
27,00	0,4947020	-0,5623470	4,8181780	0,0122955	0,0060481
27,50	0,4951100	-0,5624610	4,3687010	0,0120854	0,0055790
28,00	0,4954910	-0,5625710	3,9471100	0,0117753	0,0051650
28,50	0,4958450	-0,5626760	3,5563700	0,0113923	0,0048006
29,00	0,4961690	-0,5627750	3,1978940	0,0109590	0,0044809
29,50	0,4964640	-0,5628660	2,8718850	0,0104944	0,0042017
30,00	0,4967290	-0,5629510	2,5776390	0,0100137	0,0039591
30,50	0,4969670	-0,5630270	2,3138230	0,0095293	0,0037501
31,00	0,4971790	-0,5630970	2,0787020	0,0090506	0,0035720
31,50	0,4973660	-0,5631590	1,8703450	0,0085853	0,0034227
32,00	0,4975310	-0,5632140	1,6867620	0,0081390	0,0033006
32,50	0,4976750	-0,5632630	1,5260360	0,0077162	0,0032047
33,00	0,4978010	-0,5633060	1,3864140	0,0073204	0,0031348
33,50	0,4979080	-0,5633430	1,2663910	0,0069549	0,0030910
34,00	0,4980000	-0,5633740	1,1647780	0,0066222	0,0030744
34,50	0,4980750	-0,5634000	1,0807750	0,0063260	0,0030869
35,00	0,4981350	-0,5634210	1,0140270	0,0060698	0,0031306
35,50	0,4981790	-0,5634370	0,9646660	0,0058585	0,0032088
36,00	0,4982070	-0,5634470	0,9332610	0,0056981	0,0033243
36,50	0,4982190	-0,5634510	0,9206080	0,0055950	0,0034788

Продолжение табл. 2.1.17

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
37,00	0,4982130	-0,5634490	0,9272860	0,0055550	0,0036717
37,50	0,4981900	-0,5634400	0,9530710	0,0055813	0,0038984
38,00	0,4981500	-0,5634270	0,9966000	0,0056730	0,0041516
38,50	0,4980980	-0,5634080	1,0556730	0,0058258	0,0044237
39,00	0,4980330	-0,5633860	1,1281230	0,0060341	0,0047096
39,50	0,4979570	-0,5633590	1,2127270	0,0062943	0,0050092
40,00	0,4978700	-0,5633290	1,3097610	0,0066068	0,0053271

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
40,50	0,4977700	-0,5632950	1,4211650	0,0069763	0,0056721
41,00	0,4975640	-0,5632560	1,5503730	0,0074115	0,0060561
41,50	0,4975180	-0,5632100	1,7016000	0,0079227	0,0064915
42,00	0,4973590	-0,5631560	1,8779770	0,0085147	0,0069857
42,50	0,4971790	-0,5630970	2,0788090	0,0091766	0,0075325
43,00	0,4969860	-0,5630330	2,2926400	0,0098730	0,0081049
43,50	0,4967940	-0,5629710	2,5058340	0,0105511	0,0086611
44,00	0,4966170	-0,5629140	2,7022230	0,0111642	0,0091636

Пятое решение

20,33	0,5017650	-0,5648120	-0,3056610	-0,0584092	0,0315962
20,34	0,5024210	-0,5650870	-0,3796930	-0,0611336	0,0321841
20,35	0,5029110	-0,5652980	-0,4350510	-0,0631477	0,0326125
20,40	0,5046230	-0,5660630	-0,6291240	-0,0700702	0,0340460
20,45	0,5058870	-0,5666550	-0,7728610	-0,0750770	0,0350469
20,50	0,5069590	-0,5671750	-0,8951640	-0,0792679	0,0358625
20,55	0,5079180	-0,5675310	-1,0047100	-0,0829734	0,0365672
20,60	0,5087980	-0,5681030	-1,1055140	-0,0863466	0,0371955
20,65	0,5096210	-0,5685310	-1,1998240	-0,0894731	0,0377670
20,70	0,5103980	-0,5689440	-1,2890540	-0,0924068	0,0382937
20,75	0,5111380	-0,5693440	-1,3741580	-0,0951842	0,0387840
20,80	0,5118470	-0,5697330	-1,4558150	-0,0978311	0,0392438

Продолжение табл. 2.1.17

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
20,85	0,5125300	-0,5701130	-1,5345330	-0,1003670	0,0396774
20,90	0,5131910	-0,5704850	-1,6107000	-0,1028070	0,0400884
20,95	0,5138310	-0,5708510	-1,6846210	-0,1051620	0,0404930
21,00	0,5144530	-0,5712100	-1,7565430	-0,1074420	0,0408524
21,05	0,5150590	-0,5715650	-1,8266670	-0,1096540	0,0412093
21,10	0,5158830	-0,5720520	-1,9221330	-0,1126510	0,0416848
21,15	0,5162290	-0,5722590	-1,9621630	-0,1139020	0,0418807
21,20	0,5167950	-0,5726000	-2,0277950	-0,1159470	0,0421974
21,25	0,5173490	-0,5729370	-2,0921600	-0,1179450	0,0425028
21,30	0,5178940	-0,5732710	-2,1553480	-0,1198990	0,0427976
21,35	0,5184280	-0,5736010	-2,2174360	-0,1218120	0,0430826
21,40	0,5189530	-0,5739280	-2,2784930	-0,1236880	0,0433582
21,45	0,5194700	-0,5742530	-2,3385800	-0,1255280	0,0436253
21,50	0,5199780	-0,5745750	-2,3977520	-0,1273340	0,0438841
21,55	0,5204790	-0,5748940	-2,4560560	-0,1291090	0,0441353
21,60	0,5209720	-0,5752110	-2,5135380	-0,1308530	0,0443790
21,65	0,5214590	-0,5755260	-2,5702370	-0,1325690	0,0446158
21,70	0,5219390	-0,5758380	-2,6261890	-0,1342580	0,0448460
21,75	0,5224120	-0,5761480	-2,6814260	-0,1359210	0,0450698
21,80	0,5228790	-0,5764560	-2,7355980	-0,1375590	0,0452875
21,85	0,5233410	-0,5767620	-2,7898750	-0,1391730	0,0454995
21,90	0,5237970	-0,5770670	-2,8431400	-0,1407650	0,0457059
21,95	0,5242480	-0,5773690	-2,8957970	-0,1423350	0,0459070
22,00	0,524693	-0,5776690	-2,9478680	-0,1438840	0,0461029
22,05	0,5251340	-0,5779680	-2,9993730	-0,1454130	0,0462939
22,10	0,5255690	-0,5782650	-3,0503310	-0,1469230	0,0464801
22,15	0,5260010	-0,5785610	-2,1007590	-0,1484130	0,0466617

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
22,20	0,5264270	-0,5788550	-3,1506740	-0,1498860	0,0468389

Продолжение табл. 2.1.17

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
22,25	0,5268490	-0,5791470	-3,2000910	-0,1513400	0,0470118
22,30	0,5272670	-0,5794380	-3,2490240	-0,1527780	0,0471805
22,35	0,5276810	-0,5797280	-3,2974880	-0,1541990	0,0473452
22,40	0,5280910	-0,5800150	-3,3459490	-0,1556050	0,0475060
22,45	0,5284970	-0,5803020	-3,3930550	-0,1569940	0,0476630
22,50	0,5288990	-0,5805870	-3,4401820	-0,1583690	0,0478163
22,55	0,5292990	-0,5808700	-3,4868860	-0,1597280	0,0479661
22,60	0,5296920	-0,5811520	-3,5331780	-0,1610740	0,0481124
22,70	0,5304710	-0,5817130	-3,624560	-0,1637230	0,0483949
22,80	0,5312370	-0,5822680	-3,7144010	-0,1663190	0,0486647
22,90	0,5319890	-0,5828180	-3,8027660	-0,1688640	0,0489223
23,00	0,5327300	-0,5833640	-3,8897150	-0,1713610	0,0491684
23,10	0,5334590	-0,5839050	-3,9753030	-0,1738120	0,0494034
23,20	0,5341760	-0,5844410	-4,0595780	-0,1762180	0,0496280
23,30	0,5348830	-0,5849720	-4,1425890	-0,1785810	0,0498425
23,40	0,5355790	-0,5854990	-4,2243770	-0,1809030	0,0500474
23,50	0,5362650	-0,5860220	-4,3049830	-0,1831850	0,0502432
23,60	0,5369410	-0,5865400	-4,3844440	-0,1854290	0,0504301
23,80	0,5382640	-0,5875640	-4,5400670	0,1898080	0,0507788
24,00	0,5395520	-0,5885730	-4,6915000	0,1940480	0,0510963
24,20	0,5408060	-0,5895650	-4,8389670	0,1981580	0,0513847
24,40	0,5420280	-0,5905430	-4,9826680	0,2021440	0,0516462
24,60	0,5432190	-0,5915050	-5,1227850	0,2060150	0,0518826
24,80	0,5443820	-0,5924540	-5,2594810	0,2097750	0,0520956
25,00	0,5455170	-0,5933880	-5,3929070	0,2134310	0,0522867
25,20	0,5466250	-0,5943090	-5,5231980	0,2169860	0,0524573
25,40	0,5477080	-0,5952160	-5,6504820	0,2204460	0,0526048
25,60	0,5487670	-0,5961100	-5,7744880	0,2238140	0,0527420

Продолжение табл. 2.1.17

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
25,80	0,5498020	-0,5969920	-5,8964870	0,2270960	0,0528584
26,00	0,5508150	-0,5978610	-6,0154190	0,2302930	0,0529588
26,40	0,5527770	-0,5995640	-0,0624560	2 0,236449	0,0531154
26,80	0,5546570	-0,6012190	-0,0646616	0,2423080	0,0532187
27,20	0,5564630	-0,6028300	-0,0667760	7 0,247888	0,0532743
27,60	0,5581980	-0,6043980	-0,0688069	0,2532120	0,0532875
28,00	0,5598670	-0,6059240	-0,0707570	3 0,258293	0,0532627
28,40	0,5614740	-0,6074100	-0,0726324	0,2631500	0,0532041
28,80	0,5630210	-0,6088580	-0,0744360	3 0,267794	0,0531151
29,20	0,5645130	-0,6102700	-0,0761729	0,2722390	0,0529990
29,60	0,5659520	-0,6116440	-0,0778450	6 0,276495	0,0528585
30,00	0,5673410	-0,6129850	-0,0794577	0,2805740	0,0526964
30,40	0,5686820	-0,6142930	-0,0810120	3 0,284486	0,0525147

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
30,80	0,5699780	-0,6155680	-0,0825120	0,2882390	0,0523156
31,20	0,5712310	-0,6168120	-0,0839590	6 0,291841	0,0521011
31,60	0,5724430	-0,6180270	-0,0853574	0,2953020	0,0518727
32,00	0,5736160	-0,6192120	-0,0867070	8 0,298626	0,0516320
32,40	0,5747510	-0,6203700	-0,0880128	0,3018230	0,0513803
32,80	0,5758510	-0,6215000	-0,0892740	6 0,304897	0,0511190
33,20	0,5769170	-0,6226050	-0,0904950	0,3078550	0,0508492
33,60	0,5779500	-0,6236840	-0,0916750	7 0,310702	0,0505718
34,00	0,5789510	-0,6247380	-0,0928184	0,3134430	0,0502879
34,40	0,5799230	-0,6257690	-0,0939240	8 0,316084	0,0499983
34,80	0,5808640	-0,6267770	-0,0949964	0,3186280	0,0497038
35,20	0,5817800	-0,6277620	-0,0960340	5 0,321080	0,0494051
35,60	0,5826690	-0,6287260	-0,0970405	0,3234490	0,0491027
36,00	0,5835320	-0,6296690	-0,0980150	6 0,325726	0,0487974
36,40	0,5843700	-0,6305920	-0,0989612	0,3279260	0,0484897

Окончание табл. 2.1.17

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$C \times 10^3$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
36,80	0,5851850	-0,6314950	-0,0998780	3 0,330049	0,0481800
37,20	0,5859770	-0,6323790	-0,1007680	0,3320990	0,0478687
37,60	0,5867470	-0,6332450	-0,1016310	0,3340780	0,0465563
38,00	0,5874970	-0,6340920	-0,1024690	0,3359900	0,0472433
38,40	0,5882250	-0,6349220	-0,1032830	0,3378360	0,0469298
38,80	0,5889350	-0,6357360	-0,1040730	0,3396200	0,0466162
39,20	0,5896250	-0,6365320	-0,1048400	0,3413450	0,0463028
39,60	0,5902970	-0,6373130	-0,1055860	0,3430120	0,0459898
40,00	0,5909520	-0,6380780	-0,1063100	0,3446240	0,0456775
41,00	0,5925160	-0,6399260	-0,1080340	0,3484260	0,0449008
42,00	0,5939820	-0,6416860	-0,1096410	0,3519270	0,0441323
43,00	0,5953580	-0,6433640	-0,1111420	0,3551640	0,0433741
44,00	0,5966520	-0,6449650	-0,1125440	0,3581320	0,0426277
45,00	0,5978700	-0,6464940	-0,1138560	0,3608830	0,0418945
46,00	0,5990170	-0,6479560	-0,1150840	0,3634250	0,0411754
47,00	0,6000980	-0,6493550	-0,1162360	0,3657770	0,0404710
48,00	0,6011200	-0,6506940	-0,1173160	0,3679530	0,0397818
49,00	0,6020840	-0,6519780	-0,1183300	0,3699690	0,0391080
50,00	0,6029960	-0,6532090	-0,1192820	0,3718370	0,0384497
55,00	0,6068860	-0,6586740	-0,1232650	0,3793250	0,0353894
60,00	0,6098910	-0,6631970	-0,1263220	0,3844650	0,0326933
65,00	0,6122470	-0,6669940	-0,1284650	0,3879730	0,0303207
70,00	0,6130460	-0,6683460	-0,1295240	0,3890310	0,0294524
75,00	0,6156120	-0,6729930	-0,1314390	0,3918270	0,0263767
80,00	0,6168190	-0,6753960	-0,1324110	0,3927150	0,0247067
85,00	0,6177970	-0,6774970	-0,1331420	0,3931450	0,0232611
90,00	0,6185940	-0,6793480	-0,1336860	0,3932310	0,0219428
100,00	0,6197770	-0,6824490	-0,1343600	0,3926900	0,0106911

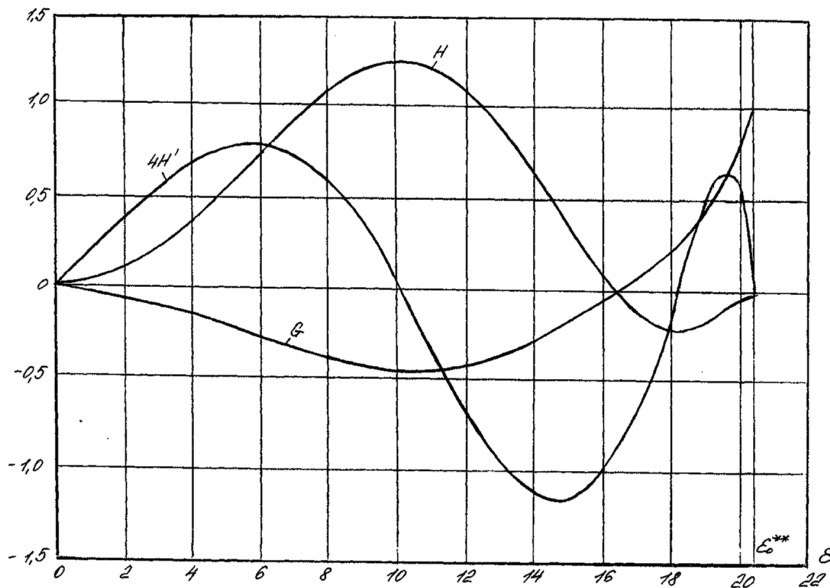


Рис. 2.1.37. Зависимости безразмерных скоростей аксиальной  $H(\epsilon)$ , радиальной  $H'(\epsilon)$  и окружной  $G(\epsilon)$  при коэффициенте давления  $C = 0$  и безразмерном расстоянии между дисками  $\epsilon_0 = \epsilon_0^{**} = 20,339457$

Из рассмотренных в данной главе материалов можно сделать следующие заключения:

1. Эта глава является ключевой для решения прикладных задач, скажем, рассмотрения течений при проницаемых, перфорированных дисках. Здесь решены задачи нулевой проницаемости, как бы начало отсчета подачи жидкости в различных направлениях и вариациях, что в последующих разделах работы будет выполнено.

2. Подтверждена гипотеза о неоднозначности решений уравнений Навье-Стокса при одних и тех же граничных условиях ввиду нелинейности этих уравнений.

3. Сделано предположение, что из множества математических решений в практике будут реализовываться течения, когда коэффициент давления  $|C|$  минимален, во всяком случае при расстояниях между вращающимся и неподвижным дисками  $z_0$  много меньше их радиусов  $R$ .

## 2.2. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ РАЗНОНАПРАВЛЕННО ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

Схема движения и цилиндрическая система координат представлены на рис. 2.2.1.

Решение этой задачи может быть рассмотрено двояким образом. *Первое*: течение жидкости в радиальном направлении является симметричным относительно срединной поверхности  $z_0/2$ . *Второе*: течение жидкости в радиальном направлении не является симметричным относительно срединной поверхности  $z_0/2$ . Такие предпосылки нам дает опять же нелинейность уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим сначала симметричное состояние движения среды.

В цилиндрической системе координат описанными нами преобразованиями можно привести уравнения Навье-Стокса к безразмерному виду (1.4) [14]:

$$\begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'); \\ P' &= H'' + 2HH'. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Для решения первой симметричной задачи принимаем граничные условия интегрирования дифференциальных уравнений (2.2.1) при  $z = z_0/2$ ,  $w = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ , где соответственно  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – радиальная, окружная и осевая составляющие скорости жидкости. В безразмерном виде граничные условия будут:

$$\text{при } \epsilon = 0 \quad H(0) = 0, H'(0) = 0, G(0) = 1; \quad (2.2.2)$$

$$\text{при } \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \quad H\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) = 0, G\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) = 0, H''\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) = 0.$$

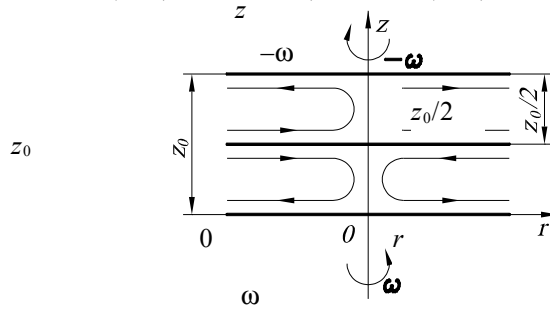


Рис. 2.2.1. Схема движения жидкости

На рис. 2.2.2 – 2.2.7 и в табл. 2.2.1 представлены результаты численного интегрирования уравнений (2.2.1) при граничных условиях (2.2.2). На рисунках эти расчетные данные представлены под номером 1. Интегрирование функций до  $\varepsilon_0 = 1000$  ( $\frac{\varepsilon_0}{2} = 500$ ) при условиях (2.2.2) практически совпадает с решениями (1.3) [14] при полном покое в бесконечности:

ранее получено  
 $A = 0,510242;$   
 $B = -0,615638;$   
 $C = 0;$   
 $\varepsilon^* = 500.$

получено в этом разделе  
 $A = 0,510123;$   
 $B = -0,615902;$   
 $C = -0,000001;$   
 $\varepsilon^* = 500.$

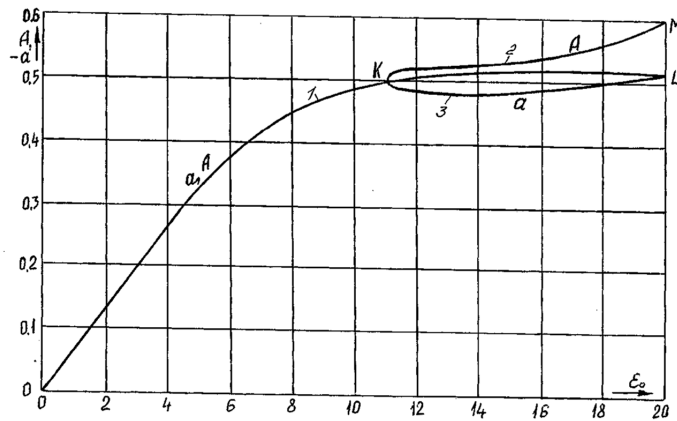


Рис. 2.2.2. Зависимость безразмерных коэффициентов радиального трения  $H''(0) = A, H''(\varepsilon_0) = a$  от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$

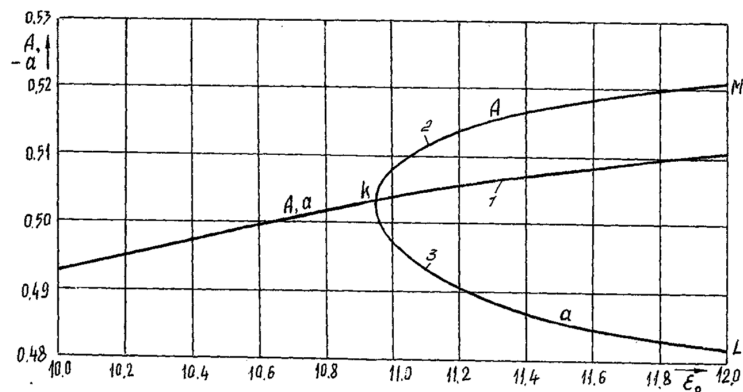


Рис. 2.2.3. Зависимость безразмерных коэффициентов радиального трения  $H''(0) = A, H''(\varepsilon_0) = a$  от  $\varepsilon_0$  (фрагмент)

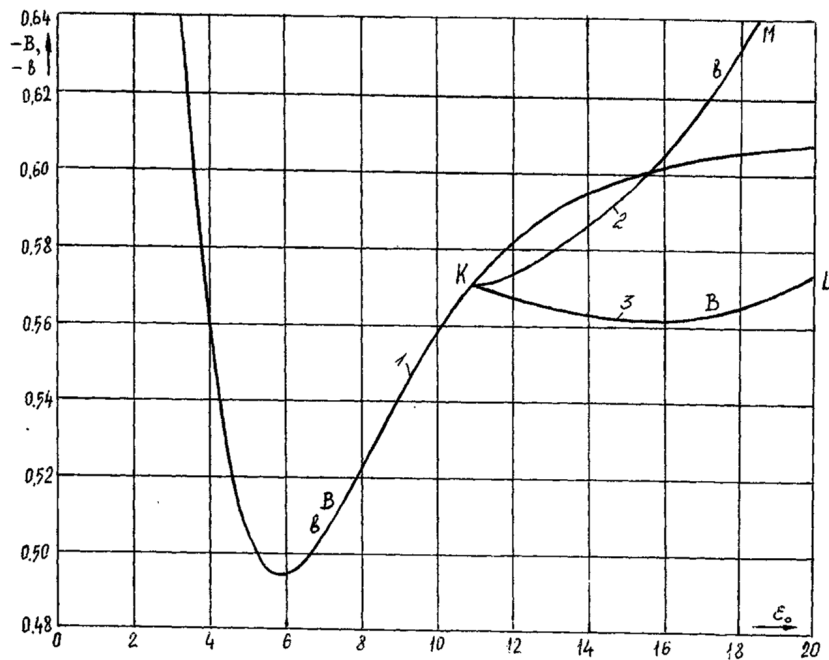


Рис. 2.2.4. Зависимость безразмерного коэффициента тангенциального трения  $G'(0) = B$  от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$

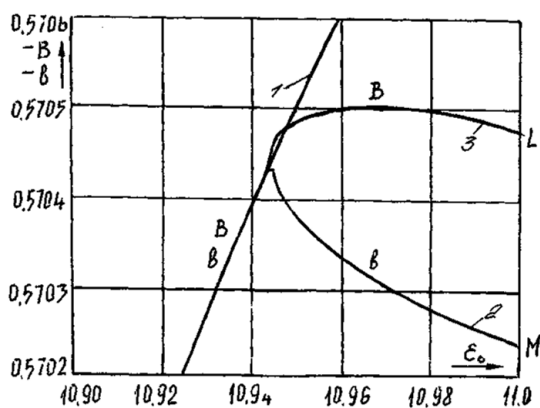


Рис. 2.2.5. Зависимость безразмерных коэффициентов тангенциального трения  $G'(0) = B$  от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$  (фрагмент)

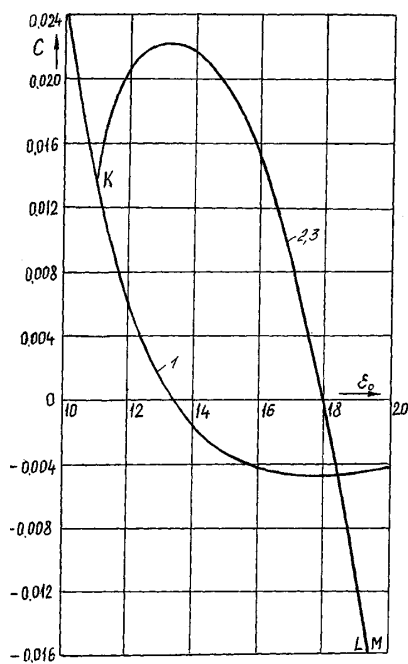


Рис. 2.2.6. Зависимость коэффициента

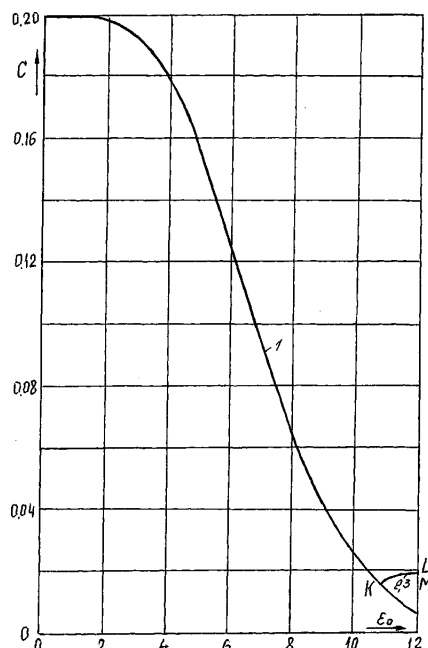


Рис. 2.2.7. Зависимость коэффициента

ента давления  $C$   
от безразмерного расстояния меж-  
ду дисками  $\varepsilon_0$

та давления  $C$   
от безразмерного расстояния между  
дисками  $\varepsilon_0$  (фрагмент)

То, что существуют другие математические решения системы дифференциальных уравнений (2.1) у нас сомнений не было. Системные исследования дали свои результаты. Назовем эти решения второе и третье, по своей сути они асимметричны относительно срединной поверхности  $z_0/2$  или  $\varepsilon_0/2$ , в смысле, скажем, эпюры скоростей радиального движения, и других. Первые результаты асимметричного распределения начальных параметров были получены и графически представлены по отношению к начальным параметрам  $A, B, C, a, b$  на рис. 2.2.2 – 2.2.7 и в табл. 2.2.1. На этих рисунках отмечены точки  $K$  пересечения функций начальных параметров  $A = H''(0)$ ,  $B = G'(0)$  и  $C$  решений первого и второго-третьего. Однако, нами было обнаружено, что координаты точки  $K$  для различных коэффициентов  $A, B, C$  имеют не одинаковые значения безразмерной координаты  $\varepsilon_0$ . Для изучения состояния начальных параметров точек  $K$  мы уменьшили шаг численного интегрирования дифференциальных уравнений (2.2.1) до 0,0002.

В результате было найдено, что никакой точки  $K$  не существует. Решения первое, второе, третье асимптотически приближаются друг к другу при  $\varepsilon_0$ , стремящейся от точки  $K$  к нулю. Это показано на рис. 2.2.8 – 2.2.13 и соответственно в табл. 2.2.1, 2.2.2 на интервале изменения безразмерной координаты  $\varepsilon_0$  вблизи "мифических" точек  $K$ .

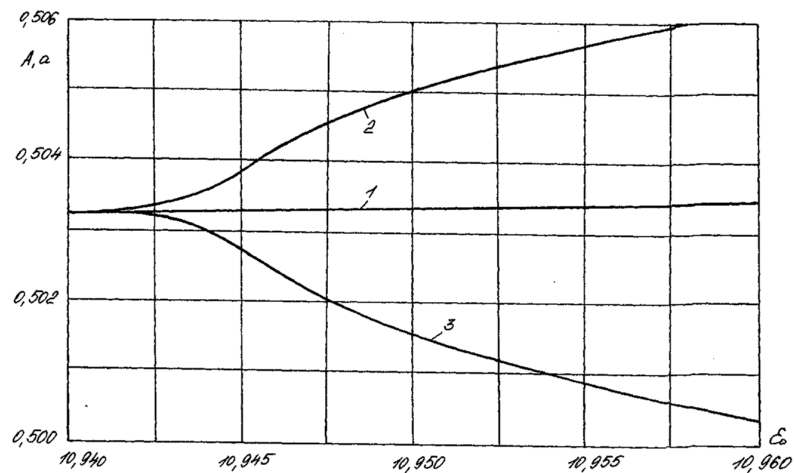


Рис. 2.2.8. Зависимость безразмерного коэффициента радиального трения  $H''(0) = A$  от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$  вблизи "критической" точки  $K$



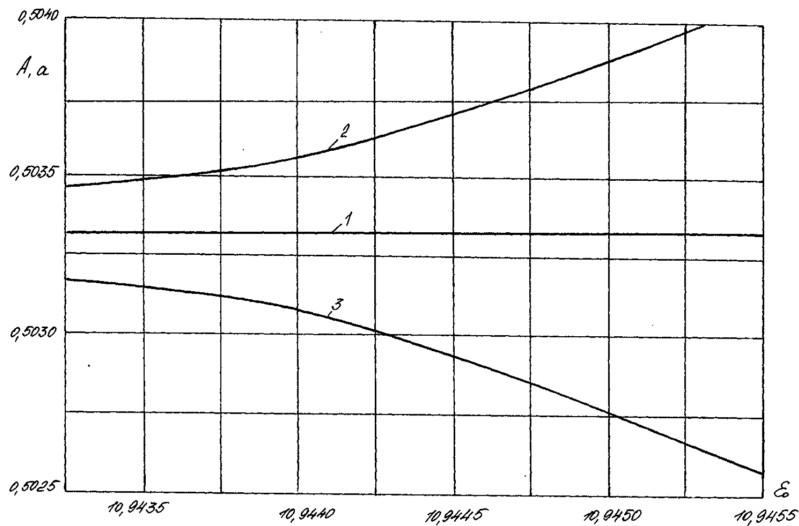


Рис. 2.2.9. Зависимость безразмерного коэффициента радиального трения  $H''(0) = A$  от безразмерного расстояния между дисками  $\epsilon_0$  вблизи "критической" точки  $K$  (фрагмент)

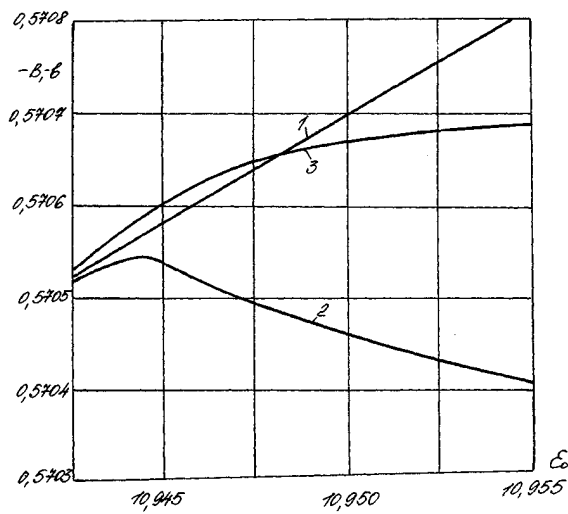


Рис. 2.2.10. Зависимость безразмерного коэффициента тангенциального трения  $G'(0) = B$  от безразмерного расстояния между дисками  $\epsilon_0$  вблизи "критической" точки  $K$

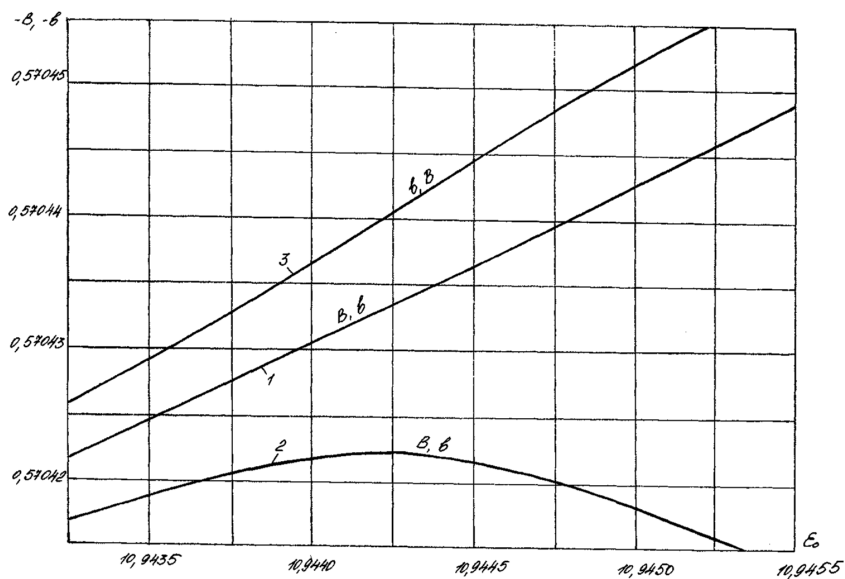


Рис. 2.2.11. Зависимость безразмерного коэффициента тангенциального трения  $G'(0) = B$  от безразмерного расстояния между дисками  $\epsilon_0$  вблизи "критической" точки  $K$  (фрагмент)

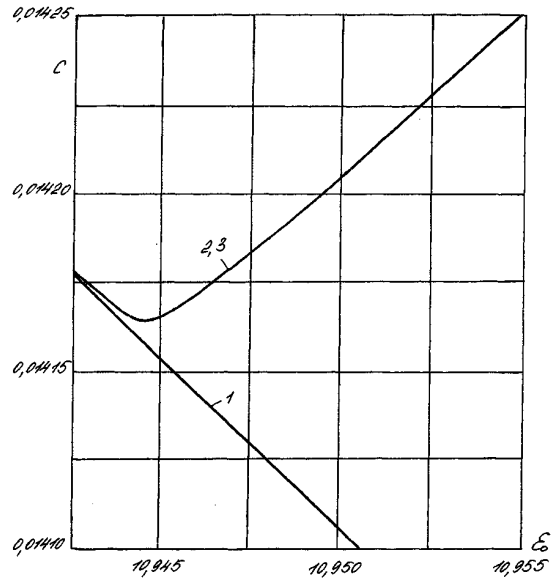


Рис. 2.2.12. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$  вблизи "критической" точки  $K$

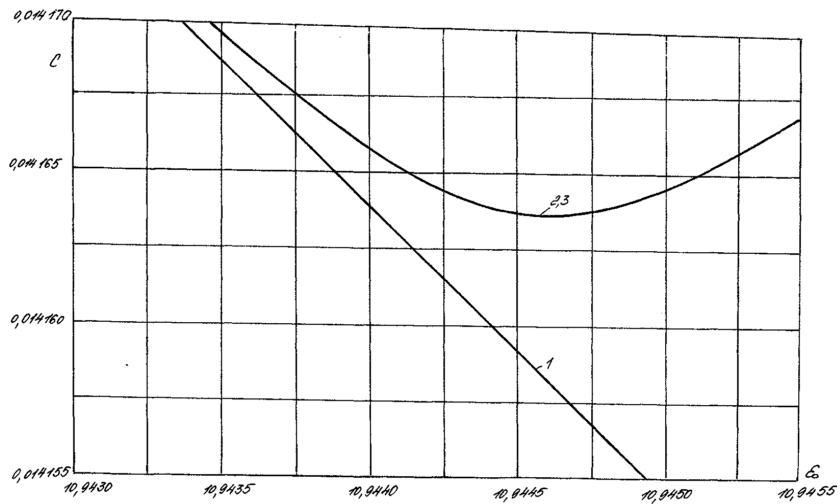


Рис. 2.2.13. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$  вблизи "критической" точки  $K$  (фрагмент)

Отметим, что во всех случаях коэффициент давления  $C$  изменяет знак с плюса на минус. Это происходит при симметричном решении  $C = 0$  при  $\varepsilon_0 \approx 13,376$ , если  $\varepsilon_0 > 13,376$ , то коэффициент давления  $C < 0$ , отрицательный. Асимметричное решение дает  $C = 0$  при  $\varepsilon_0 \approx 17,9172$ . Когда безразмерное расстояние между дисками значительное, коэффициент давления отрицательный, т.е. давление к центру вращения растет. Это парадоксально в центробежном поле, но математический факт. При симметричной картине радиальной эпюры, когда  $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$ , коэффици-

ент давления  $C \rightarrow 0$ . Если картина асимметричная, этого не происходит, коэффициент  $C$  стремится к некоторой отрицательной величине  $C \rightarrow \approx -0,14$ .

Отсюда можно сделать вывод, что в действительности, более вероятен случай симметричной картины распределения скоростей.

На рис. 2.2.14 – 2.2.16 и соответственно табл. 2.2.3, 2.2.4 приведены примеры интегрирования уравнений (2.2.2) симметричного и асимметричных случаев при  $\epsilon_0 = 16$ .

Представим для сравнения экстремумы решений:

симметрия	$H_{1\max} \approx 0,356549$	при $\epsilon \approx 3,2$ ;
	$H_{1\min} \approx -0,366549$	при $\epsilon \approx 12,8$ ;
асимметрия	$H_{2\max} \approx 0,749085$	при $\epsilon \approx 6,0$ ;
	$H_{2\min} \approx -0,215401$	при $\epsilon \approx 14,0$ ;
	$H_{3\max} \approx 0,215401$	при $\epsilon \approx 2,0$ ;
	$H_{3\min} \approx -0,749085$	при $\epsilon \approx 10$ ;
симметрия	$H'_1 \max \approx 0,183465$	при $\epsilon \approx 1,0$ ;
	$H'_1 \min \approx -0,110396$	при $\epsilon \approx 8,0$ ;
асимметрия	$H'_2 \max \approx 0,183465$	при $\epsilon \approx 15$ ;
	$H'_2 \max \approx 0,210140$	при $\epsilon \approx 1,0$ ;
	$H'_2 \min \approx -0,208534$	при $\epsilon \approx 5,2$ ;
	$H'_2 \max \approx 0,156305$	при $\epsilon \approx 15,2$ ;
	$H'_3 \max \approx 0,156305$	при $\epsilon \approx 0,8$ ;
	$H'_3 \min \approx -0,208534$	при $\epsilon \approx 5,2$ ;
	$H'_3 \max \approx 0,210140$	при $\epsilon \approx 15,0$ ;
симметрия	$G_1$ – экстремумов не имеет;	
асимметрия	$G_{2\min} \approx 0,237641$	при $\epsilon \approx 2,8$ ;
	$G_{2\max} \approx 0,333902$	при $\epsilon \approx 6,8$ ;
	$G_{3\min} \approx -0,333902$	при $\epsilon \approx 9,2$ ;
	$G_{3\max} \approx -0,237641$	при $\epsilon \approx 13,2$ .

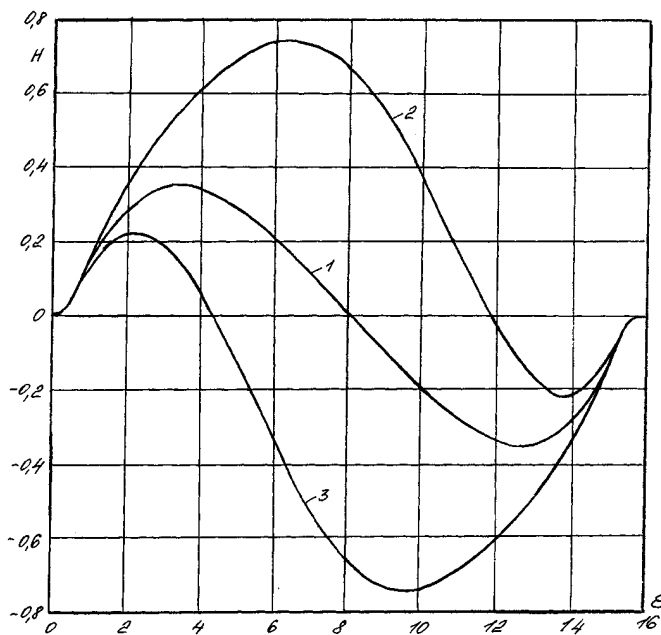


Рис. 2.2.14. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\epsilon)$  при  $\epsilon_0 = 16$ :  
1 – симметричное течение; 2, 3 – асимметричное течение

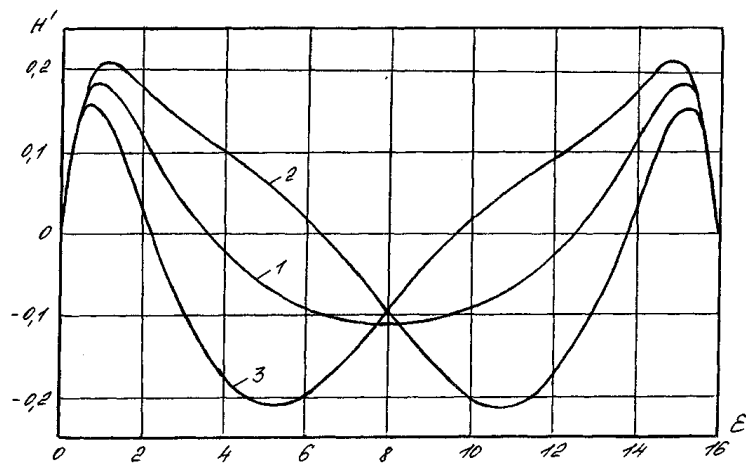


Рис. 2.2.15. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  при  $\epsilon_0 = 16$ :  
1 – симметричное течение; 2, 3 – асимметричное течение

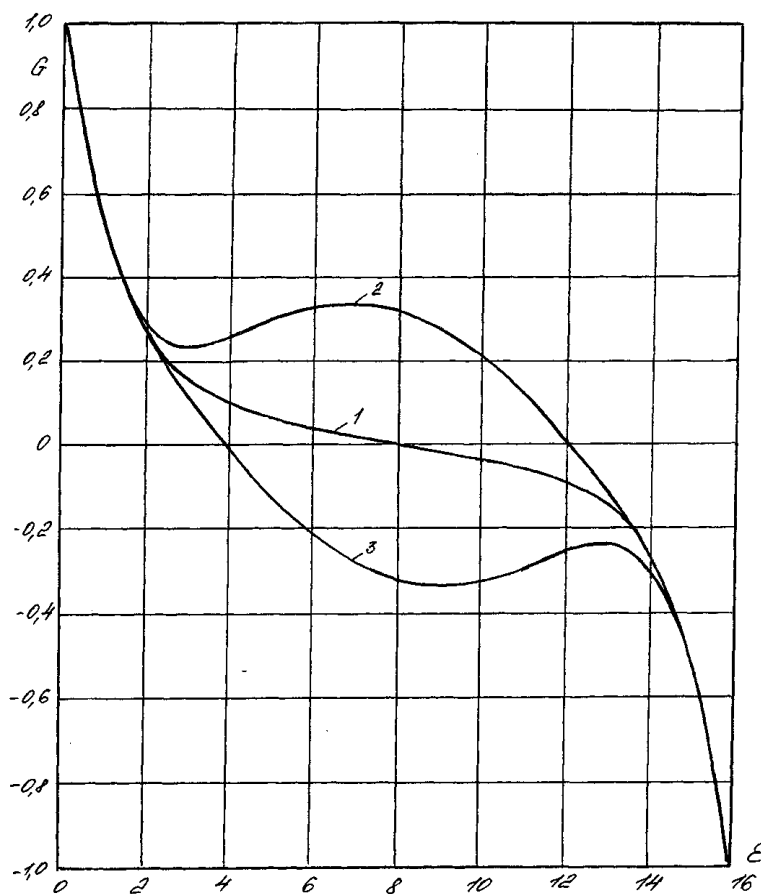


Рис. 2.2.16. Зависимость безразмерной окружной скорости  $G(\epsilon)$  при  $\epsilon_0 = 16$ :  
1 – симметричное течение; 2, 3 – асимметричное течение

Из этого небольшого анализа можно заключить, что симметричный случай изменения функций скоростей более гладкий и "минимальный" по сравнению с асимметрией, т.е. симметричная картина оптимальна и реальнее в осуществлении в действительности. Наше мнение, что природа "не любит симметрии" в данном случае не подтверждается.

### 2.3. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ОДНОНАПРАВЛЕННО ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

Схема движения и цилиндрическая система координат представлены на рис. 2.3.1.

Решение рассматриваемой задачи, как и в разделе 2.2, может быть рассмотрено с двух точек зрения. *Первое*: течение жидкости в радиальном и тангенциальном направлениях симметрично относительно срединной поверхности  $z_0/2$ . *Второе*: течение жидкости является асимметричным относительно срединной поверхности. *Третье*: при малых расстояниях между дисками  $z_0$  движение среды аналогично движению, подобному вращению твердого тела, т.е.  $V = \omega r$ . Границу этого расстояния  $\varepsilon_0^*$  нужно определить при решении системы дифференциальных уравнений (2.2.1):

$$\begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'). \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Для симметричного движения жидкости граничные условия будут:

$$\text{при } \varepsilon = 0 \quad H = 0, H' = 0, G = 1; \quad (2.3.2)$$

$$\text{при } \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \quad H = 0, H'' = 0, G' = 0.$$

В понятие симметрии мы полагаем, что радиальная скорость и тангенциальная симметричны относительно срединной плоскости  $z_0/2$ , или в безразмерном виде это положено в (2.3.2). Численное решение системы дифференциальных уравнений (2.3.1) при выполнении граничных условий (2.3.2) показано в отношении начальных параметров  $A, B, C, a, b$  на рис. 2.3.2 – 2.3.8.

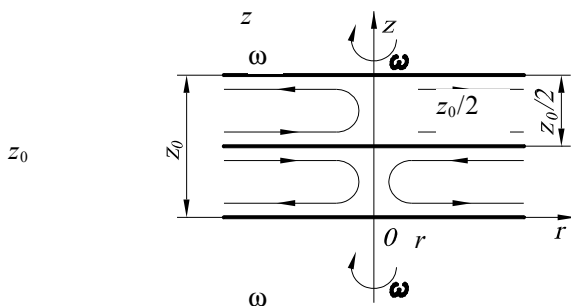


Рис. 2.3.1. Схема движения жидкости

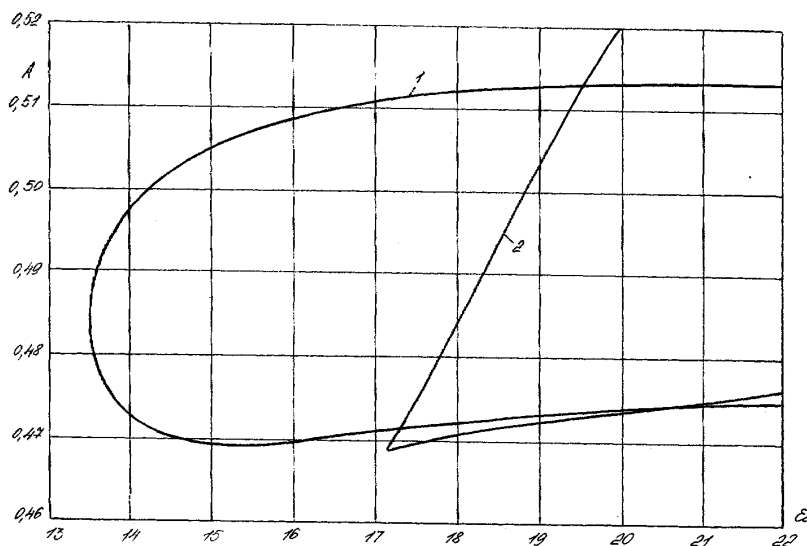


Рис. 2.3.2. Зависимость безразмерного коэффициента радиального трения  $H''(0) = A$  от безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$ : 1 – симметричное решение; 2 – асимметричное решение (первое)

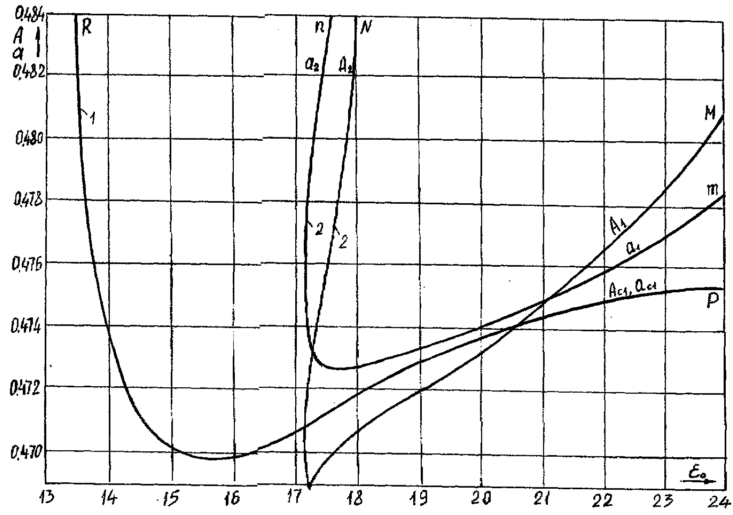


Рис. 2.3.3. Зависимость безразмерных коэффициентов радиального трения  $H''(0) = A$ ,  $H''(\varepsilon_0) = a$  от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$ :  
 1 – симметричное решение; 2 – асимметричное решение (первое)

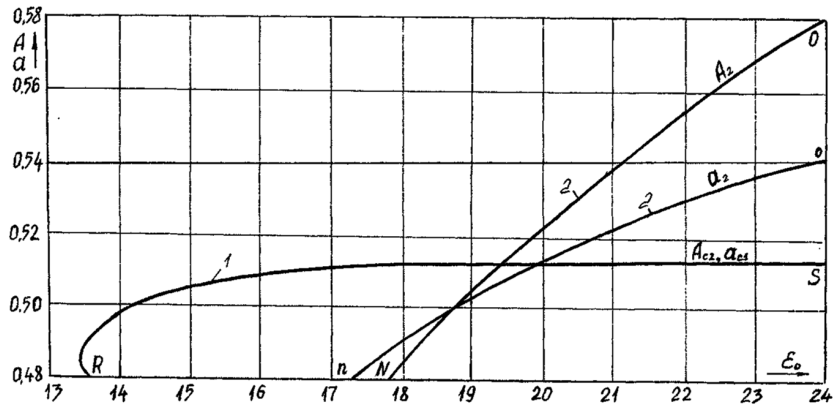


Рис. 2.3.4. Зависимость безразмерных коэффициентов радиального трения  $H''(0) = A$ ,  $H''(\varepsilon_0) = a$  от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$  (фрагмент):  
 1 – симметричное решение; 2 – асимметричное решение (первое)

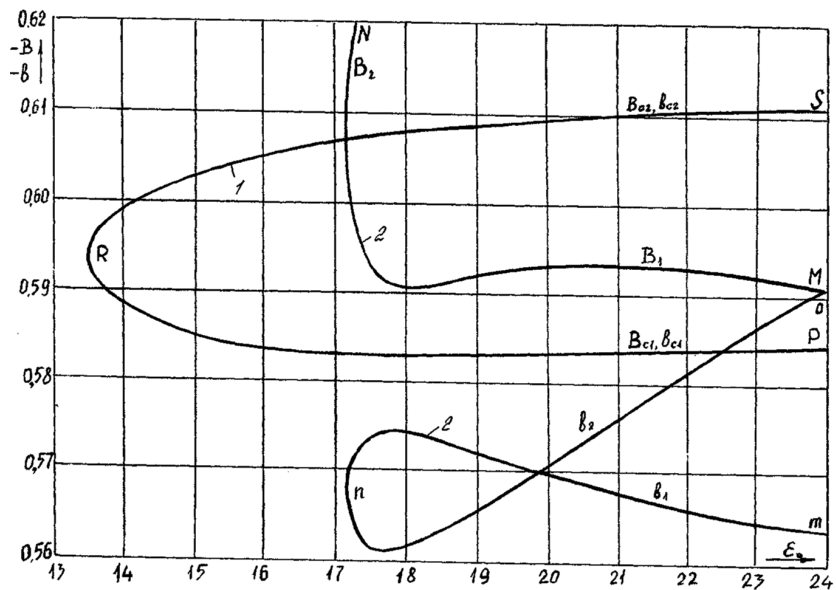


Рис. 2.3.5. Зависимость безразмерных коэффициентов тангенциального трения  $G'(0) = B$ ,  $G'(\varepsilon_0) = b$  от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$ :  
 1 – симметричное решение; 2 – асимметричное решение (первое)

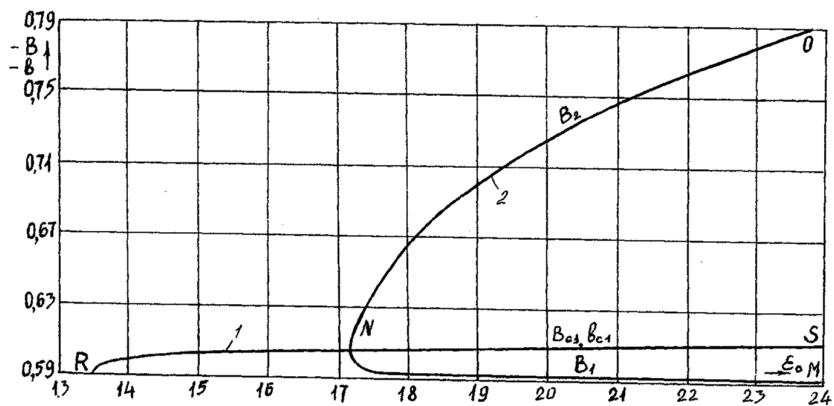


Рис. 2.3.6. Зависимость безразмерных коэффициентов тангенциального трения  $G'(0) = B$ ,  $G'(\epsilon_0) = b$  от безразмерного расстояния  $\epsilon_0$  (фрагмент):  
 1 – симметричное решение; 2 – асимметричное решение (первое)

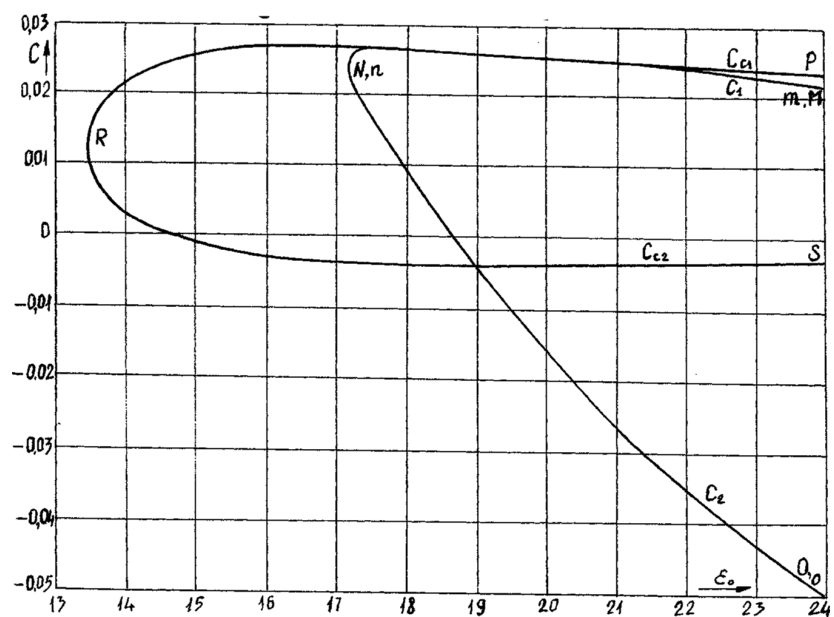


Рис. 2.3.7. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерного расстояния  $\epsilon_0$ :

1 – симметричное решение; 2 – асимметричное решение (первое)

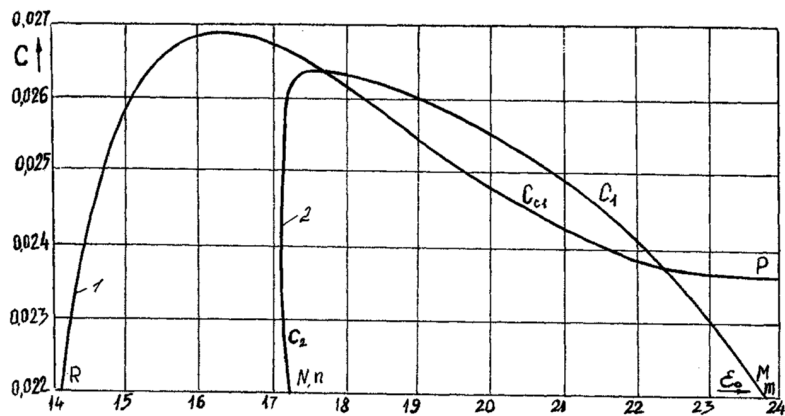


Рис. 2.3.8. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерного расстояния  $\epsilon_0$  (фрагмент):

1 – симметричное решение; 2 – асимметричное решение (первое)

К симметричному решению относятся кривые под номером 1, а результаты расчетов на некотором интервале изменения  $\epsilon_0$  представлены в табл. 2.3.1. Из полученных данных мы заключаем, что минимальное значение  $\epsilon_0 = \epsilon_0^* \approx 13,498$ . При  $\epsilon_0 < \epsilon_0^*$  жидкость в зазоре между однонаправленно вращающимися дисками с одинаковой угловой скоростью  $\omega$  движется как твердое тело, имея только окружную скорость  $V = \omega r$ , остальные проекции скоростей равны нулю.

Еще следует отметить, что при  $\varepsilon_0 > \varepsilon_0^*$  мы получили два решения при одних и тех же  $\varepsilon_0$  с выполнением граничных условий (2.3.2).

Интересным фактом решения является то, что при  $\varepsilon_0 = 14,659478$  коэффициент давления  $C = 0$ . Если  $\varepsilon_0 > 14,659478$ , то давление к оси вращения растет. Это удивительно для центробежного поля, но таковы результаты расчетов.

По одной из ветвей решения (с отрицательным значением  $C$ ) мы продолжили изучение состояния гидродинамики вплоть до  $\varepsilon_0 = 2000$ , т.е. как бы приближаясь к  $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$ . Практически получили, что пограничные вязкие слои друг на друга не влияют. Сравним полученные данные с решением уравнений при условиях Кармана [14]:

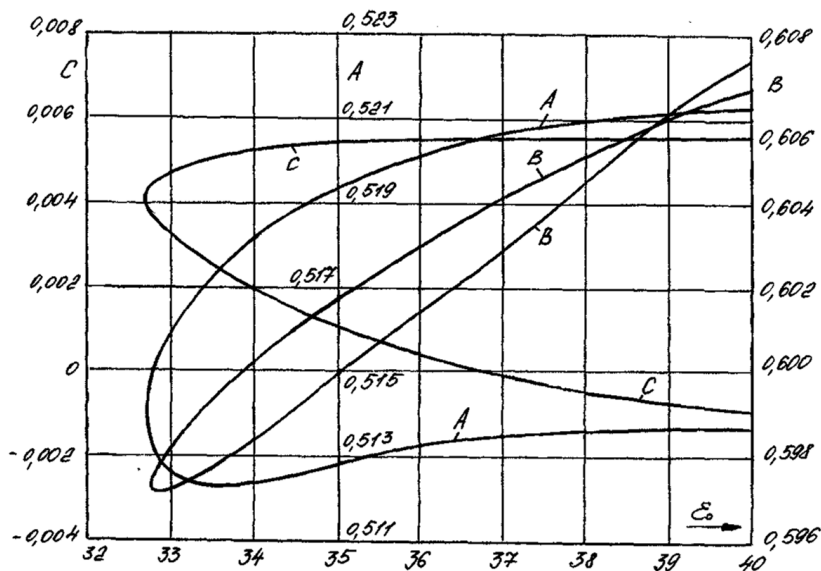
$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = 2000 & \quad H''(0) = 0,510234; \quad G'(0) = -0,615851; \quad C = -0,0000002; \\ \varepsilon_0 \rightarrow \infty & \quad H''(0) = 0,510233; \quad G'(0) = -0,615922; \quad C = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы имеем поразительное совпадение начальных параметров решений, полученных с различных точек зрения. Заметим также, что в рассматриваемой нами задаче минимальное значение коэффициента давления  $C_{\min} \approx -0,00389975$  при  $\varepsilon_0 \approx 18,8$ .

Попытка найти асимметричные решения в отношении всех проекций скоростей привела к результатам, графически изображенным на уже упомянутых рис. 2.3.2 – 2.3.8. На них изображены под цифрой 2 начальные параметры  $A = H''(0)$ ,  $B = G'(0)$ ,  $C$ ,  $a = H''(\varepsilon_0)$ ,  $b = G'(\varepsilon_0)$  и представлены в табл. 2.3.2. Минимальное значение безразмерного параметра для решения асимметрии  $I \varepsilon_0 = \varepsilon_0^{**} \approx 17,1734$ .

При  $\varepsilon_0 > \varepsilon_0^{**} \approx 17,1734$  имеют место четыре решения, два симметричных и два асимметричных. Асимметричное решение позволяет поменять местами  $A$ ,  $B$  и  $a$ ,  $b$ . Это, в самом деле, ничего нового в исследуемый вопрос не вносит. Из полученных расчетов видим, что коэффициент давления тоже пересекает ось  $C = 0$ , переходя в отрицательное значение при  $\varepsilon_0 > 18,6474$ , и медленно с ростом  $\varepsilon_0$  убывает (табл. 2.3.2). Отметим также, что коэффициент  $b = G'(\varepsilon_0)$  в своем изменении образует петлю (рис. 2.3.5).

На рис. 2.3.9. и в табл. 2.3.3 представлены результаты другого (второго) асимптотического решения задачи. Отмечаем, что это решение возможно при  $\varepsilon_0^{***} > 32,711$ . Ранее упомянутые решения на этом интервале имеют силу. Коэффициент давления  $C$  пересекает ось  $C = 0$  при  $\varepsilon_0 \approx 36,6$ , а затем медленно растет в отрицательном смысле. Мы уже не раз получали в различных ситуациях, что безразмерный коэффициент тангенциального трения  $B = G'(0)$  делает в своем изменении петлю (рис. 2.3.9).





**Рис. 2.3.9. Зависимость начальных параметров  $A = H''(0)$ ,  $B = G'(0)$ ,  $C$  от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$  (асимметрия 2)**

**2.3.3. Начальные параметры при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = 1$ ;  $H(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $G(\varepsilon_0) = 1$  (асимметрия 2)**

$\varepsilon_0$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H'(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
40,0	0,521186	-0,607374	0,00555378	-0,494033	0,562169
39,8	0,521159	-0,607087	0,00555323	-0,494033	0,562169
39,6	0,521131	-0,606800	0,00555233	-0,494034	0,562169
39,4	0,521103	-0,606513	0,00555118	-0,494035	0,562170
39,2	0,521073	-0,606226	0,00554961	-0,494036	0,562170
39,0	0,521042	-0,605937	0,00554785	-0,494038	0,562171
38,8	0,521008	-0,605648	0,00554583	-0,494040	0,562171
38,6	0,520972	-0,605358	0,00554358	-0,494042	0,562172
38,4	0,520933	-0,605067	0,00554110	-0,494044	0,562172
38,2	0,520891	-0,604775	0,00553838	-0,494047	0,562172
38,0	0,520846	-0,604482	0,00553541	-0,494049	0,562173
37,8	0,520796	-0,604188	0,00553215	-0,494052	0,562174
37,6	0,520742	-0,603892	0,00552857	-0,494056	0,562175
37,4	0,520683	-0,603594	0,00552461	-0,494059	0,562176
37,2	0,520619	-0,603296	0,00552020	-0,494063	0,562177
37,0	0,520548	-0,602995	0,00551524	-0,494068	0,562178
36,8	0,520471	-0,602694	0,00550612	-0,494073	0,562180
36,6	0,520386	-0,602391	0,00550318	-0,494079	0,562181
36,4	0,520294	-0,602087	0,00549579	-0,494086	0,562183
36,2	0,520193	-0,601781	0,00548722	-0,494093	0,562185
36,0	0,520082	-0,601475	0,00547726	-0,494102	0,562187
35,8	0,519960	-0,601167	0,00546562	-0,494113	0,562190
35,6	0,519827	-0,600860	0,00545199	-0,494125	0,562193
35,4	0,519680	-0,600551	0,00543601	-0,494140	0,562197
35,2	0,519520	-0,600244	0,00541724	-0,494157	0,562201
35,0	0,519343	-0,599936	0,00539517	-0,494177	0,562207
34,8	0,519147	-0,599630	0,00536921	-0,494201	0,562213
34,6	0,518932	-0,599326	0,00533863	-0,494229	0,562220
34,4	0,518693	-0,599025	0,00530256	-0,494261	0,562229
34,2	0,518426	-0,598728	0,00525991	-0,494300	0,562239

*Продолжение табл. 2.3.3*

$\varepsilon_0$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H'(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
34,0	0,518128	-0,598436	0,00520928	-0,494346	0,562251
33,8	0,517791	-0,598152	0,00514876	-0,494401	0,562266
33,6	0,517407	-0,597878	0,00507565	-0,494468	0,562284
33,4	0,516961	-0,597618	0,00498568	-0,494550	0,562306
33,2	0,516431	-0,597381	0,00487128	-0,494654	0,562334
33,0	0,515768	-0,597179	0,00471566	-0,494795	0,562373
32,90	0,515349	-0,597104	0,00460878	-0,494892	0,562400

$\varepsilon_0$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H'(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
32,88	0,515254	-0,597092	0,00458336	-0,494915	0,562406
32,86	0,515153	-0,597082	0,00455598	-0,494940	0,562413
32,84	0,515046	-0,597073	0,00452632	-0,494967	0,562421
32,82	0,514932	-0,597067	0,00449377	-0,494997	0,562429
32,80	0,514808	-0,597064	0,00445750	-0,495029	0,562438
32,78	0,414671	-0,597064	0,00441614	-0,495067	0,562449
32,76	0,514516	-0,597071	0,00436727	-0,495111	0,562461
32,74	0,514326	-0,597086	0,00430553	-0,495167	0,562477
32,72	0,514062	-0,597125	0,00421230	-0,495251	0,562501
32,715	0,513959	-0,597146	0,00417352	-0,495287	0,562512
32,711	0,513820	-0,597180	0,00411884	-0,495336	0,562526
32,711	0,513637	-0,597235	0,00404143	-0,495407	0,562546
32,715	0,513509	-0,597811	0,00398341	-0,495459	0,562562
32,72	0,513420	-0,597318	0,00394045	-0,495498	0,562573
32,74	0,513212	-0,597422	0,00383048	-0,495596	0,562602
32,76	0,513080	-0,597502	0,00375197	-0,495668	0,562623
32,78	0,512979	-0,597573	0,00368632	-0,495728	0,562641
32,80	0,512897	-0,597638	0,00362816	-0,495781	0,562657
32,90	0,512626	-0,597922	0,00339260	-0,495993	0,562720
33,0	0,512470	-0,598171	0,00320114	-0,496166	0,562774
33,2	0,512306	-0,598617	0,00287619	-0,496460	0,562865
33,4	0,512246	-0,599026	0,00259324	-0,496715	0,562946
33,6	0,512241	-0,599411	0,00233655	-0,496946	0,563021
33,8	0,512271	-0,599777	0,00209942	-0,497160	0,563090
34,0	0,512322	-0,600128	0,00187831	-0,497359	0,563156

Окончание табл. 2.3.3

$\varepsilon_0$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H'(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
34,2	0,512387	-0,600466	0,00167110	-0,497545	0,563219
34,4	0,512461	-0,600792	0,00147640	-0,497720	0,563278
34,6	0,512540	-0,601107	0,00129319	-0,497884	0,563334
34,8	0,512621	-0,601412	0,00112067	-0,498039	0,563388
35,0	0,512703	-0,601708	0,00095822	-0,498185	0,563439
35,2	0,512785	-0,601995	0,00080529	-0,498322	0,563487
35,4	0,512865	-0,602272	0,00066138	-0,498451	0,563533
35,6	0,512942	-0,602541	0,00052606	-0,498572	0,563576
35,8	0,513017	-0,602802	0,00039891	-0,498686	0,563617
36,0	0,513088	-0,603055	0,00027940	-0,498793	0,563655
36,2	0,513155	-0,603300	0,00016758	-0,498893	0,563692
36,4	0,513219	-0,603537	0,00006269	-0,498987	0,563726
36,6	0,513279	-0,603767	-0,00003549	-0,499075	0,563758
36,8	0,513335	-0,603989	-0,00012728	-0,499157	0,563788
37,0	0,513387	-0,604205	-0,00021299	-0,499233	0,563817
37,2	0,513435	-0,604414	-0,00029293	-0,499305	0,563843
37,4	0,513479	-0,604616	-0,00036739	-0,499371	0,563868
37,6	0,513519	-0,604812	-0,00043665	-0,499433	0,563891
37,8	0,513556	-0,605002	-0,00050099	-0,499491	0,563913
38,0	0,513589	-0,605185	-0,00056066	-0,499544	0,563933
38,2	0,513619	-0,605363	-0,00061592	-0,499593	0,563951
38,4	0,513645	-0,605535	-0,00066696	-0,499639	0,563968
38,6	0,513669	-0,605702	-0,00071413	-0,499681	0,563984
38,8	0,513689	-0,605863	-0,00075753	-0,499720	0,563999
39,0	0,513707	-0,606019	-0,00079742	-0,499755	0,564012
39,2	0,513722	-0,606170	-0,00083400	-0,499788	0,564025
39,4	0,523734	-0,606317	-0,00086745	-0,499818	0,564036
39,6	0,513744	-0,606459	-0,00089795	-0,499845	0,564047

$\varepsilon_0$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H'(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
39,8	0,513751	-0,606596	-0,00092568	-0,499870	0,564056
40,0	0,513756	-0,606729	-0,00095081	-0,499892	0,564065

В результате системного изучения рассматриваемой задачи нами математически численно было получено семь решений (об этом ранее мы отмечали, что число решений нечетное). Итак, два решения симметричные относительно  $H'(\varepsilon)$  и  $G(\varepsilon)$ , два решения асимметрии 1, два решения асимметрии 2, если  $\varepsilon_0 > \varepsilon_0^{***} \approx 32,711$ . Остается математически возможным, когда жидкая среда вращается как твердое тело. Значит, на различных интервалах изменения безразмерного расстояния между дисками  $\varepsilon_0$  теоретически возможны одно, три, пять или семь форм движения жидкости.

На рис. 2.3.10 – 2.3.14 изображены эпюры безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$  при безразмерном расстоянии между вращающимися дисками  $\varepsilon_0 = 40$  в случае симметричного распределения скоростей  $H'(\varepsilon)$  и  $G(\varepsilon)$  относительно срединной поверхности  $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ .

Для некоторого анализа и оценки вероятности реализации в действительности первого или второго симметричного решения выпишем экстремальные значения безразмерных скоростей при  $\varepsilon_0 = 40$ .

Первое решение:  $A = 0,511133$ ;  $B = -0,61279$ ;  $C = -0,000823$ :

$$\begin{aligned}
 H_{\max} &\approx 0,396374 & \text{при } \varepsilon &\approx 4,6; & H_{\min} &\approx -0,396374 & \text{при } \varepsilon &\approx 35,4; \\
 H'_{\max} &\approx 0,180088 & \text{при } \varepsilon &\approx 1,0; & H'_{\min} &\approx -0,029010 & \text{при } \varepsilon &\approx 20,0; \\
 H_{\max} &\approx 0,180088 & \text{при } \varepsilon &\approx 39,0; & G_{\min} &\approx -0,000297 & \text{при } \varepsilon &\approx 20,0.
 \end{aligned}$$

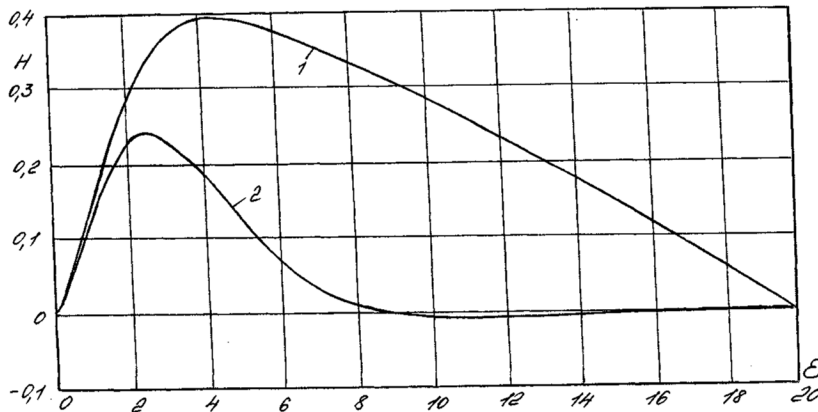


Рис. 2.3.10. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon)$  при  $\varepsilon_0 = 40$  (симметричное решение)

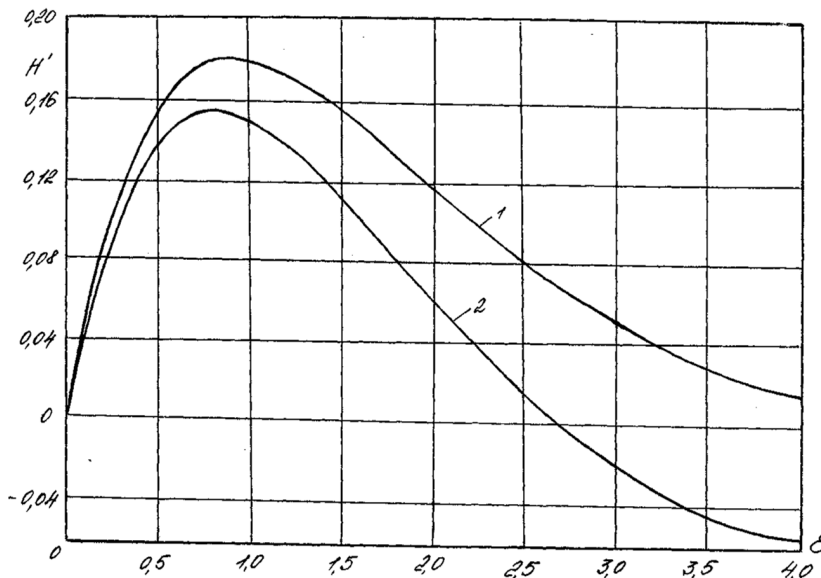


Рис. 2.3.11. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  вблизи вращающегося диска при  $\epsilon_0 = 40$  (симметричное решение)

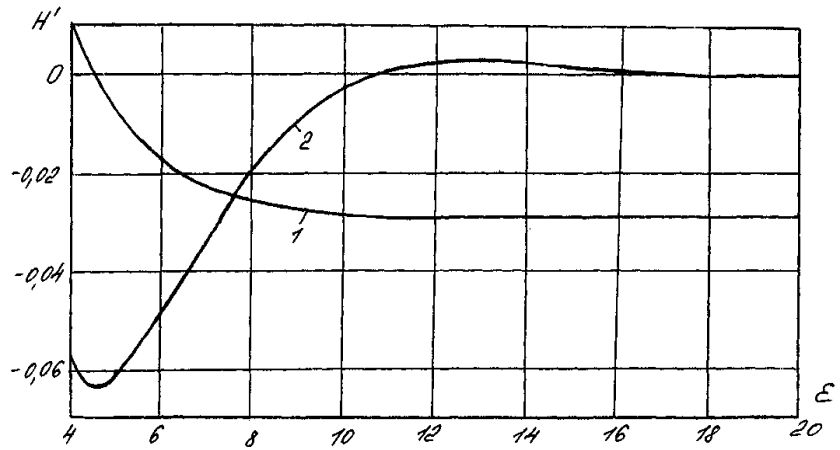


Рис. 2.3.12. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  в ядре течения при  $\epsilon_0 = 40$  (симметричное решение)

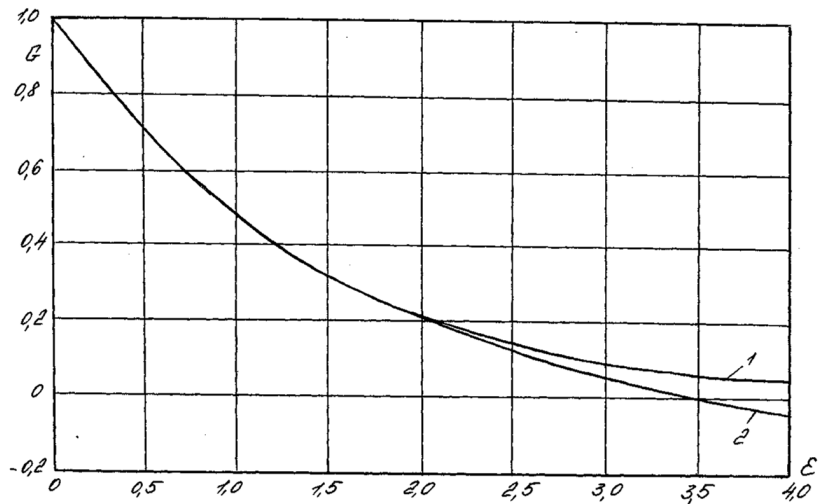


Рис. 2.3.13. Зависимость безразмерной тангенциальной скорости  $G(\epsilon)$  вблизи вращающегося диска при  $\epsilon_0 = 40$  (симметричное решение)

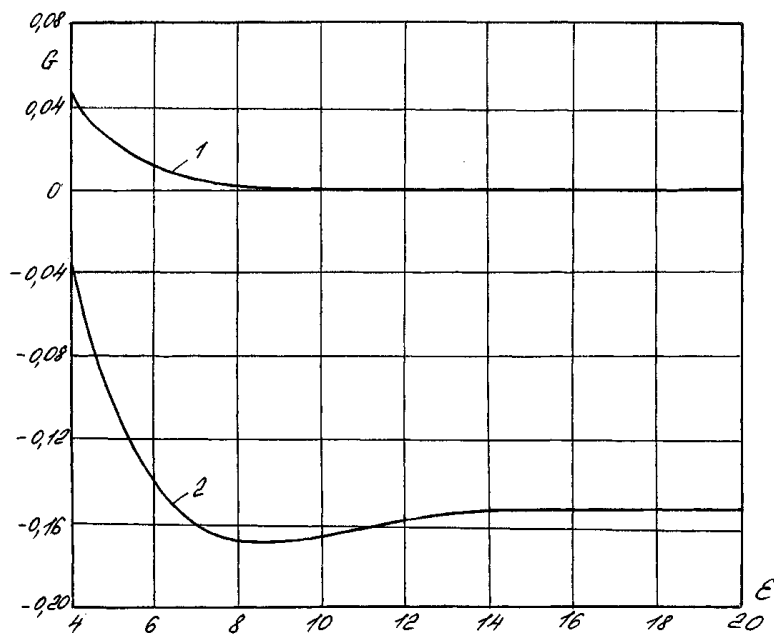


Рис. 2.3.14. Зависимость безразмерной тангенциальной скорости  $G(\epsilon)$  в ядре течения при  $\epsilon_0 = 40$  (симметричное решение)

Второе решение:  $A = 0,475081$ ;  $B = -0,583970$ ;  $C = -0,023777$ :

$H_{\max} \approx 0,242914$	при $\varepsilon \approx 2,6$ ;	$H_{\min} \approx -0,011472$	при $\varepsilon \approx 10,0$ ;
$H_{\max} \approx 0,011472$	при $\varepsilon \approx 30,0$ ;	$H_{\min} \approx -0,242914$	при $\varepsilon \approx 37,4$ ;
$H'_{\max} \approx 0,154262$	при $\varepsilon \approx 0,8$ ;	$H'_{\min} \approx -0,063097$	при $\varepsilon \approx 4,8$ ;
$H'_{\max} \approx 0,002903$	при $\varepsilon \approx 12,0$ ;	$H'_{\min} \approx -0,000250$	при $\varepsilon \approx 20,0$ ;
$H'_{\max} \approx 0,002903$	при $\varepsilon \approx 28,0$ ;	$H'_{\min} \approx 0,063097$	при $\varepsilon \approx 35,2$ ;
$H'_{\max} \approx 0,154262$	при $\varepsilon \approx 39,2$ ;	$G_{\min} \approx -0,167892$	при $\varepsilon \approx 8,8$ ;
$G_{\max} \approx -0,153844$	при $\varepsilon \approx 20,0$ ;	$G_{\min} \approx -0,167892$	при $\varepsilon \approx 31,2$ .

Выводы из представленных данных можно сделать разные, но сначала проанализируем асимметричные решения.

На рис. 2.3.15 – 2.3.19 изображены эпюры безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$  при безразмерном расстоянии между однонаправленно вращающимися с одинаковыми угловыми скоростями  $\omega$  дисками равным  $\varepsilon_0 = 40$ , как и в симметричном решении.

Приведем экстремальные значения безразмерных скоростей.

Первое решение:  $A = 0,69823$ ;  $B = -0,861328$ ;  $C = -0,106734$ :

$H_{\max} \approx 12,188597$	при $\varepsilon \approx 18,0$ ;	$H_{\min} \approx -0,357361$	при $\varepsilon \approx 37,4$ ;
$H'_{\max} \approx 0,999433$	при $\varepsilon \approx 8,2$ ;	$H'_{\min} \approx -1,017276$	при $\varepsilon \approx 27,8$ ;
$H'_{\max} \approx 0,214508$	при $\varepsilon \approx 39,1$ ;	$G_{\min} \approx -1,962291$	при $\varepsilon \approx 18,2$ .

Второе решение:  $A = 0,480922$ ,  $B = -0,596492$ ,  $C = 0,018379$

$H_{\max} \approx 0,275147$	при $\varepsilon \approx 3,7$ ;	$H_{\min} \approx 0,0119853$	при $\varepsilon \approx 20,0$ ;
$H_{\max} \approx 0,647205$	при $\varepsilon \approx 30,4$ ;	$H_{\min} \approx -0,217540$	при $\varepsilon \approx 37,8$ ;
$H'_{\max} \approx 0,158843$	при $\varepsilon \approx 0,8$ ;	$H'_{\min} \approx -0,029599$	при $\varepsilon \approx 5,5$ ;
$H'_{\max} \approx -0,000639$	при $\varepsilon \approx 11,0$ ;	$H'_{\min} \approx -0,008895$	при $\varepsilon \approx 17,5$ ;
$H'_{\max} \approx 0,087371$	при $\varepsilon \approx 26,8$ ;	$H'_{\min} \approx -0,190363$	при $\varepsilon \approx 35,0$ ;
$H'_{\max} \approx 0,155030$	при $\varepsilon \approx 39,2$ ;	$G_{\min} \approx -0,139960$	при $\varepsilon \approx 11,0$ ;
$G_{\max} \approx -0,103082$	при $\varepsilon \approx 21,5$ ;	$G_{\min} \approx -0,307118$	при $\varepsilon \approx 31,2$ .

Приведенные здесь численные данные дают материал для анализа возможных гидродинамических ситуаций совместно с симметричными решениями, приведенными ранее.

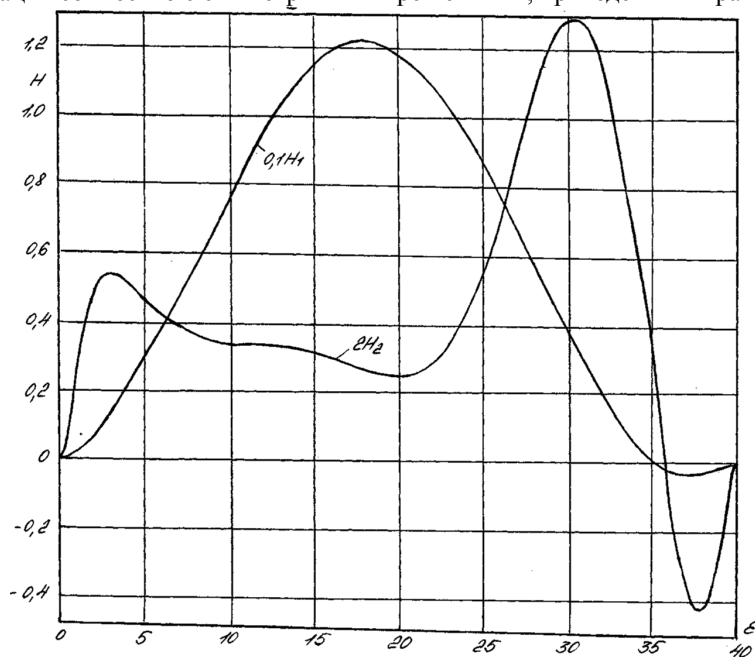


Рис. 2.3.15. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon)$  при  $\varepsilon_0 = 40$  (асимметричное решение 1)

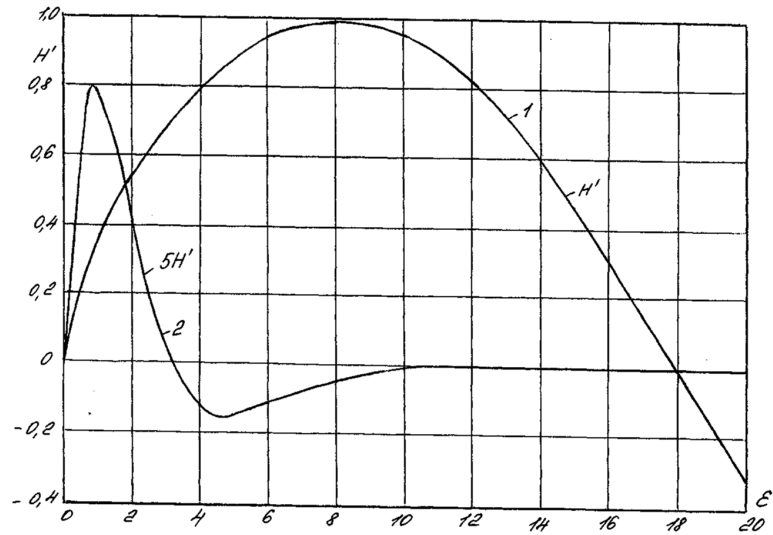


Рис. 2.3.16. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  вблизи первого вращающегося диска (асимметричное решение 1)

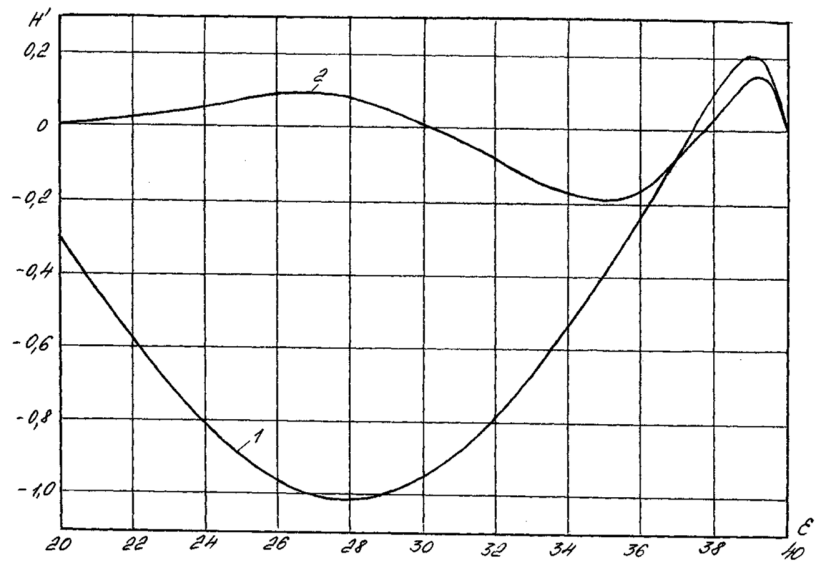


Рис. 2.3.17. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\epsilon)$  вблизи второго вращающегося диска (асимметричное решение 1)

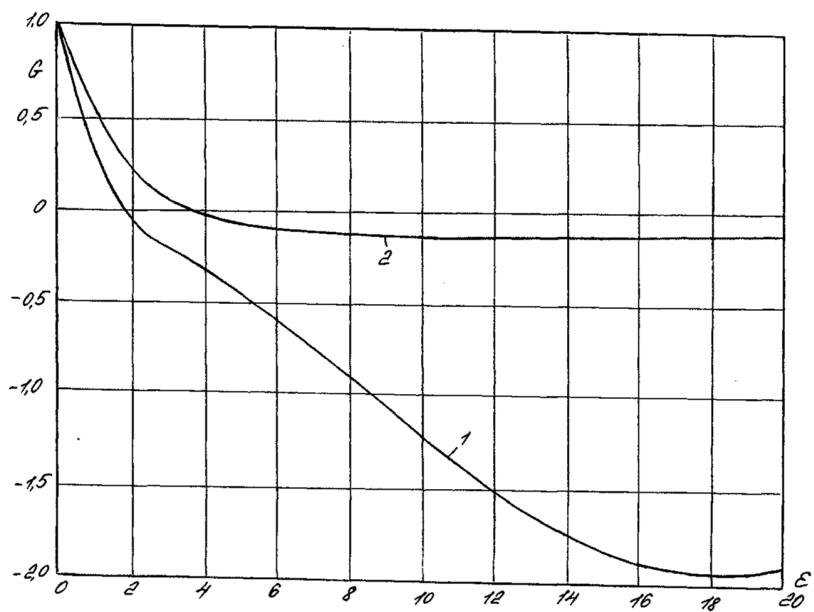


Рис. 2.3.18. Зависимость безразмерной тангенциальной скорости  $G(\epsilon)$  вблизи первого вращающегося диска (асимметричное решение 1)

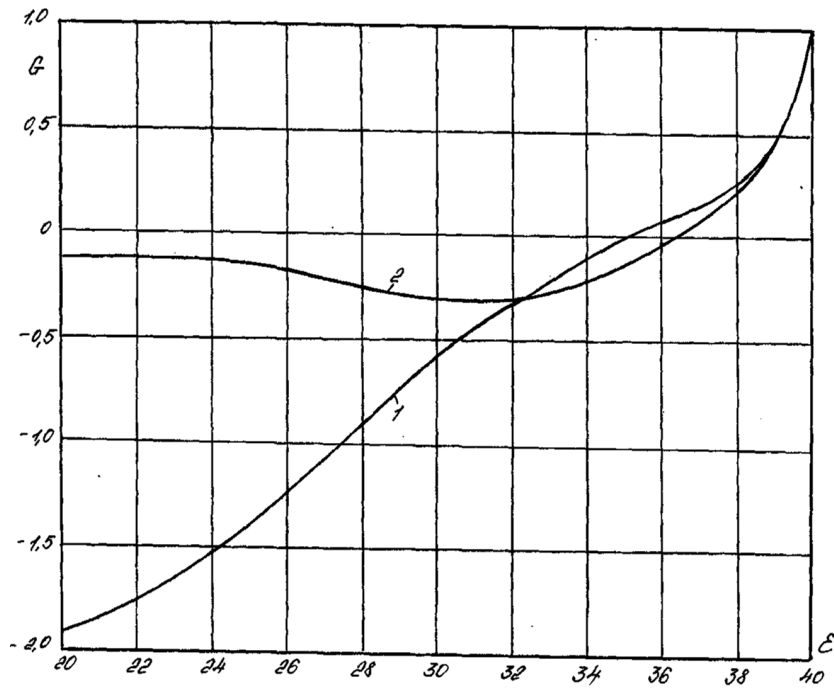


Рис. 2.3.19. Зависимость безразмерной тангенциальной скорости  $G(\varepsilon)$  вблизи второго вращающегося диска (асимметричное решение 1)

На рис. 2.3.20 – 2.3.24 изображены функции безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$ . Экстремальные величины скоростей в этих решениях (мы назвали их асимметрия 2) значительно больше по модулю ранее рассмотренных и в случае симметрии и асимметрии 1.

Приведем численные значения экстремумов.

Первое решение:  $A = 0,513756$ ;  $B = -0,606729$ ;  $C = -0,000931$ :

$H_{\max} \approx 0,372597$	при $\varepsilon \approx 3,8$ ;	$H_{\min} \approx -0,147080$	при $\varepsilon \approx 16,8$ ;
$H_{\max} \approx 1,279761$	при $\varepsilon \approx 29,6$ ;	$H_{\min} \approx -0,229133$	при $\varepsilon \approx 37,8$ ;
$H'_{\max} \approx 0,180187$	при $\varepsilon \approx 0,8$ ;	$H'_{\min} \approx -0,057178$	при $\varepsilon \approx 8,6$ ;
$H'_{\max} \approx 0,203003$	при $\varepsilon \approx 25,2$ ;	$H'_{\min} \approx -0,292451$	при $\varepsilon \approx 34,2$ ;
$H'_{\max} \approx 0,163526$	при $\varepsilon \approx 39,2$ ;	$G_{\min} \approx -0,476820$	при $\varepsilon \approx 30,0$ .

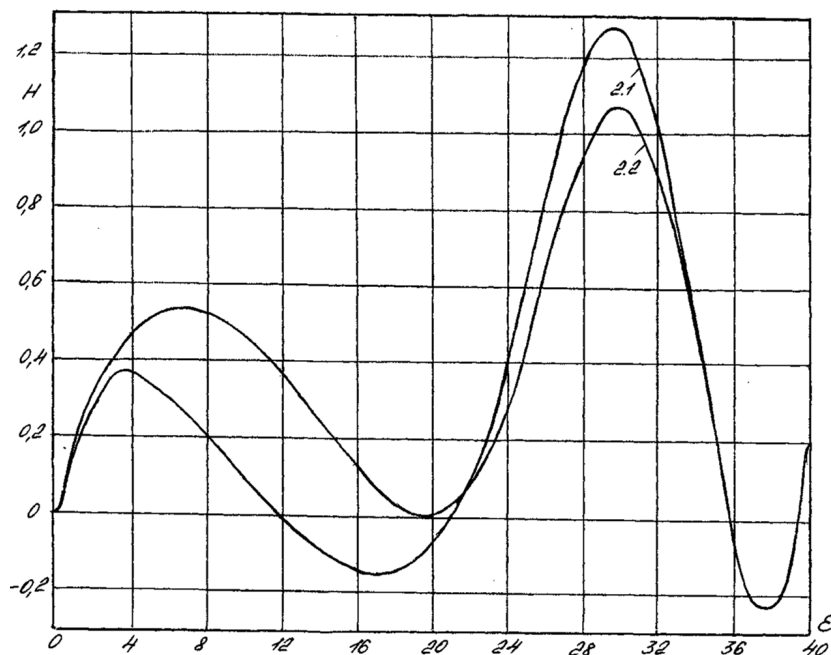


Рис. 2.3.20. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon)$  при  $\varepsilon_0 = 4$  (асимметричное решение 2)

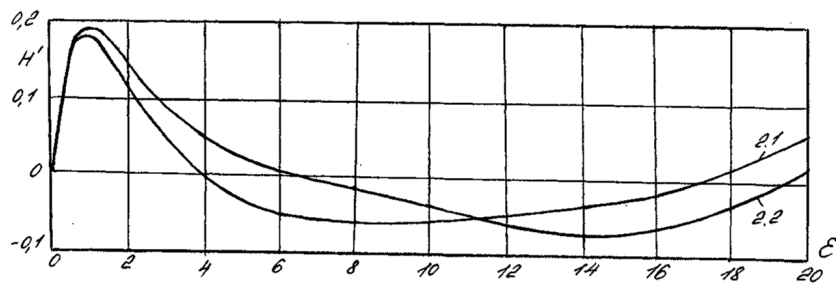


Рис. 2.3.21. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\varepsilon)$  вблизи первого вращающегося диска при безразмерном расстоянии между дисками  $\varepsilon_0 = 40$  (асимметричное решение 2)

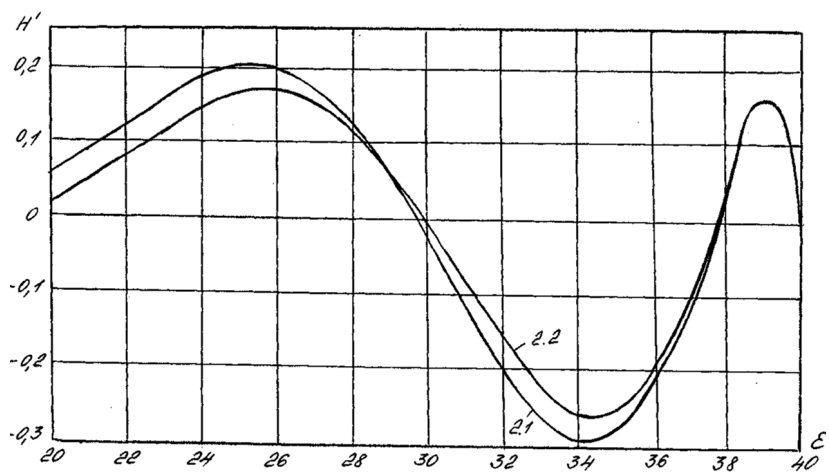


Рис. 2.3.22. Зависимость безразмерной радиальной скорости  $H'(\varepsilon)$  вблизи второго вращающегося диска при безразмерном расстоянии между дисками  $\varepsilon_0 = 40$  (асимметричное решение 2)

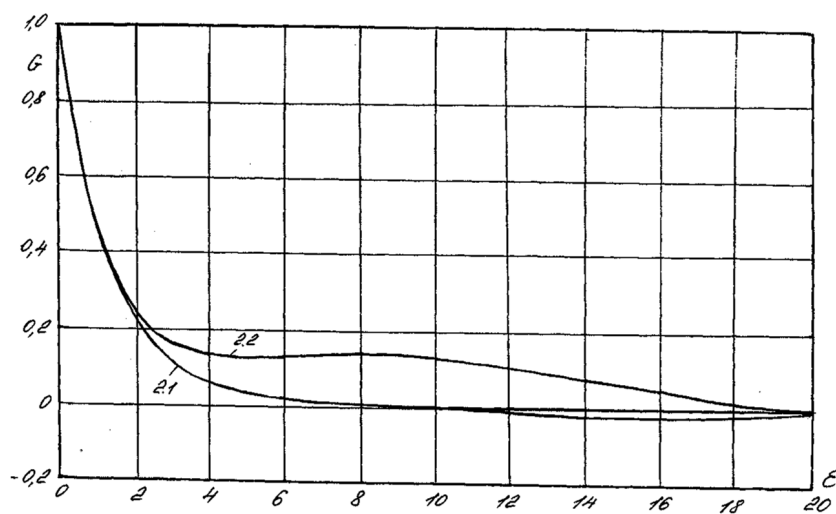


Рис. 2.3.23. Зависимость безразмерной тангенциальной скорости  $G(\varepsilon)$  вблизи первого вращающегося диска при безразмерном расстоянии между дисками  $\varepsilon_0 = 40$  (асимметричное решение 2)



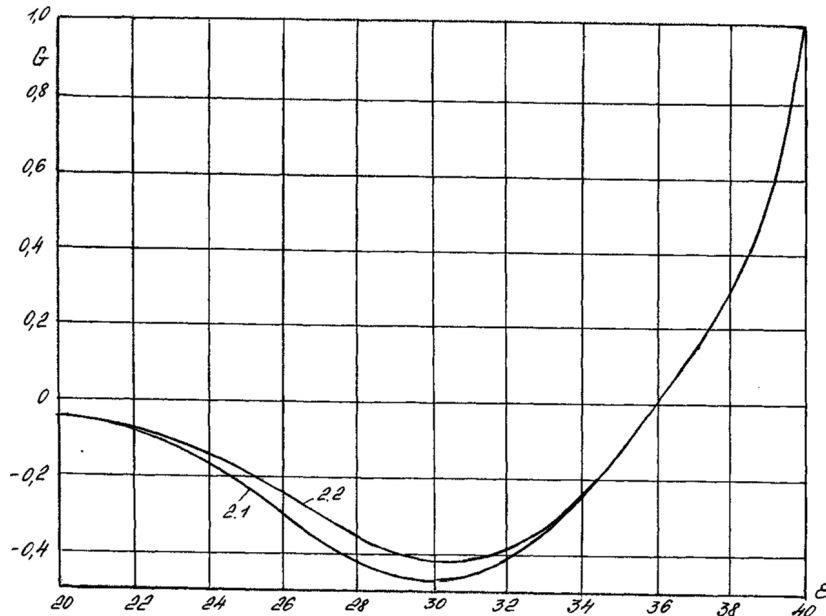


Рис. 2.3.24. Зависимость безразмерной тангенциальной скорости  $G(\varepsilon)$  вблизи второго вращающегося диска при безразмерном расстоянии между дисками  $\varepsilon_0 = 40$  (асимметричное решение 2)

Второе решение:  $A = 0,521186$ ;  $B = -0,607374$ ;  $C = 0,055537$ :

$H_{\max} \approx 0,538316$	при $\varepsilon \approx 7,0$ ;	$H_{\min} \approx 0,006822$	при $\varepsilon \approx 19,6$ ;
$H_{\max} \approx 1,070417$	при $\varepsilon \approx 30,0$ ;	$H_{\min} \approx -0,224469$	при $\varepsilon \approx 37,8$ ;
$H'_{\max} \approx 0,188251$	при $\varepsilon \approx 0,8$ ;	$H'_{\min} \approx -0,067356$	при $\varepsilon \approx 14,4$ ;
$H'_{\max} \approx 0,166769$	при $\varepsilon \approx 26,0$ ;	$H'_{\min} \approx -0,260453$	при $\varepsilon \approx 34,6$ ;
$H'_{\max} \approx 0,160738$	при $\varepsilon \approx 39,2$ ;	$G_{\min} \approx -0,421319$	при $\varepsilon \approx 30,4$ .

Анализ всех полученных решений, симметричных, асимметричных 1 и асимметричных 2, хотя бы по экстремальным значениям безразмерных скоростей  $H$ ,  $H'$ ,  $G$ , в первом приближении позволяет высказать предположения о наиболее вероятных состояниях гидродинамики в зазоре между однонаправлено вращающимися с одинаковыми угловыми скоростями дисками.

#### 2.4. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ С РАЗЛИЧНЫМИ УГЛОВЫМИ СКОРОСТЯМИ ДИСКАМИ ПРИ РАДИАЛЬНОМ ГРАДИЕНТЕ ДАВЛЕНИЯ, РАВНОМ НУЛЮ

Ставим задачу найти переход в значениях проекций скоростей от состояния, когда диски вращаются однонаправлено до случая их разнонаправленного вращения. Это означает, что мы будем искать переход от решений, полученных в разделе 2.2, к решениям в разделе 2.3. Логично предположить, что во всех выбираемых параметрах эпюры скоростей будут асимметричны относительно срединной поверхности кроме отдельных точек  $z_0$ . На рис. 2.4.1 показана схема движения жидкости, когда угловые скорости дисков разные, т.е.  $\omega \neq \omega_1$ .

За основу решения возьмем дифференциальные уравнения (2.2.1)

$$\begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'); \\ P' &= H'' + 2HH''. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Естественно, что для рассматриваемой задачи мы должны положить значения коэффициента радиального движения  $C = 0$ .

Первую попытку названного перехода при решении (2.4.1) начнем с граничных условий:

$$\text{при } \varepsilon = 0 \quad H(0) = 0, H'(0) = 0, G(0) = 1; \quad (2.4.2)$$

$$\text{при } \varepsilon = \varepsilon_0 \quad H(\varepsilon_0) = 0, H'(\varepsilon_0) = 0, G(\varepsilon_0) = v,$$

где

$$v = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{G(\varepsilon_0)}{G(0)}.$$

Будем изменять  $v$  от  $-1$  до  $+1$ , при этом следует найти значения  $\varepsilon_0$ , или варьировать безразмерным расстоянием  $\varepsilon_0$  и в результате численного интегрирования (2/4.1) получать значения  $v = G(\varepsilon_0)$ , выполняя граничные условия по (2.4.2), при  $\varepsilon = \varepsilon_0$   $H(\varepsilon_0) = 0$ ,  $H'(\varepsilon_0) = 0$ .

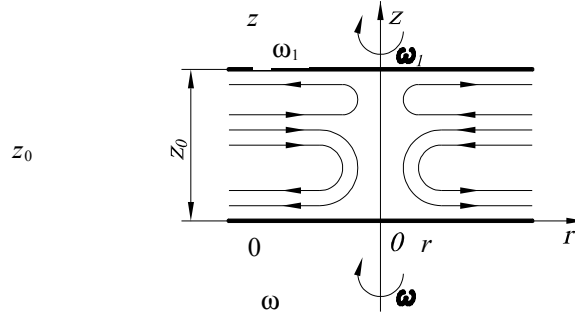


Рис. 2.4.1. Схема движения жидкости

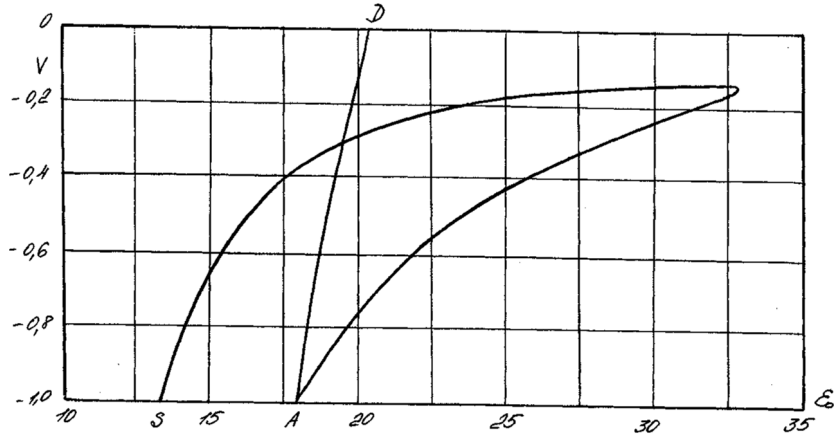


Рис. 2.4.2. Зависимость тангенциальной безразмерной скорости  $v = G(\varepsilon_0)$  при коэффициенте радиального давления  $C = 0$  вблизи  $G(0) = -1$ ,  $G(\varepsilon_0) = -1$  (первое решение)

Результаты расчетов изображены графически на рис. 2.4.2 и в табл. 2.4.1. Из этих исследований видим, что для достижения цели изменения значения  $G(\varepsilon_0)$  от  $-1$  до  $+1$  не состоялось. Стартовав от "симметрии" (точка  $S$  на рис. 2.4.2) при начальных (граничных) параметрах:  $\varepsilon_0 = 13,376$ ;  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $H''(0) = 0,515953$ ;  $G(0) = 1$ ;  $G'(0) = -0,591014$ ;  $H(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H''(\varepsilon_0) = -0,515935$ ;  $G(\varepsilon_0) = v = -1$ ;  $G'(\varepsilon_0) = -0,591014$  (см табл. 2.2.1) решение привело к "асимметрии" (точка  $A$  на рис. 2.4.2) при начальных (граничных) параметрах:  $\varepsilon_0 = 17,9172$ ;  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $H''(0) = 0,561454$ ;  $G(0) = 1$ ;  $H(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H''(\varepsilon_0) = 0,561454$ ;  $G(\varepsilon_0) = v = -1$ ;  $G'(\varepsilon_0) = -0,563746$  (см. табл. 2.2.2).

Из рис. 2.4.2 и табл. 2.4.1 следует, что  $v_{\max} \approx -0,140952$  при  $\varepsilon_0 \approx 31,5$ ,  $\varepsilon_{0 \max} \approx 32,763$ . При  $\varepsilon_0 > \varepsilon_{0 \max}$  решения поставленной задачи не существует. Отметим также, что на рис. 2.4.2 отмечена кривая  $AD$ . Об этом анализ будет представлен позже.

Вторую попытку мы осуществили для перехода от  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$  к  $G(0) = -G(\varepsilon_0) = 1$ , исходя из начальных условий:  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $H''(0) = 0,503177$ ;  $G(0) = 1$ ;  $G'(0) = -0,601473$ ;  $H(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H''(\varepsilon_0) = 0,503177$ ;  $G(\varepsilon_0) = 1$ ;  $G'(\varepsilon_0) = -0,601473$ , т.е. из условия симметрии.

**2.4.1. Начальные параметры при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = 1$ ;  $H(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $G(\varepsilon_0) = v$ ;  $C = 0$**

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
13,376	-1,000000	0,515935	-0,5910140	-0,5159350	-0,5910140
13,50	-0,964058	0,516144	-0,5914870	-0,4881640	-0,5589870
13,60	-0,936618	0,516303	-0,5918570	-0,5349480	-0,5349480
13,70	-0,910467	0,516453	-0,5922170	-0,4477180	-0,5123750
13,80	-0,885520	0,516594	-0,5925670	-0,4292920	-0,4911520
13,90	-0,861700	0,516728	-0,5929080	-0,4119400	-0,4711760

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
14,00	-0,838935	0,516855	-0,5932410	-0,3955810	-0,4523500
14,20	-0,796314	0,517087	-0,5938810	-0,3655560	-0,4178150
14,40	-0,757195	0,517294	-0,5944890	-0,3387030	-0,3869510
14,60	-0,721183	0,517477	-0,5950680	-0,3145970	-0,3592610
14,80	-0,687941	0,517640	-0,5956200	-0,2928800	-0,3343310
15,00	-0,657179	0,517785	-0,5961470	-0,2732530	-0,3118120
15,20	-0,628644	0,517912	-0,5966510	-0,2554590	-0,2914080
15,40	-0,602117	0,518024	-0,5971320	-0,2392840	-0,2728690
15,60	-0,577408	0,518122	-0,5975920	-0,2245400	-0,2559780
15,80	-0,554349	0,518207	-0,5980340	-0,2110690	-0,2405520
16,00	-0,532791	0,518281	-0,5984570	-0,1987310	-0,2264290
16,20	-0,512603	0,518345	-0,5988620	-0,1874070	-0,2134720
16,40	-0,493670	0,518399	-0,5992520	-0,1769930	-0,2015600
16,60	-0,475887	0,518445	-0,5996260	-0,1673970	-0,1905870
16,80	-0,459163	0,518485	-0,5999860	-0,1585390	-0,1804610
17,00	-0,443413	0,518515	-0,6003330	-0,1503470	-0,1711000
17,20	-0,428564	0,518540	-0,6006660	-0,1427600	-0,1624310
17,40	-0,414547	0,518559	-0,6009880	-0,1357220	-0,1543920
17,60	-0,401302	0,518574	-0,6012970	-0,1291830	-0,1469260
17,80	-0,388774	0,518583	-0,6015960	-0,1231000	-0,1399810
18,00	-0,376912	0,518588	-0,6018850	-0,3769120	-0,1335130
18,50	-0,349881	0,518587	-0,6025650	-0,1048660	-0,1191730
19,00	-0,326125	0,518567	-0,6031900	-0,0942290	-0,1070410
19,50	-0,305150	0,518532	-0,6037680	-0,0851664	-0,0967086
20,00	-0,286553	0,518487	-0,6043040	-0,0773984	-0,0878552

Продолжение табл. 2.4.1

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
20,50	-0,270005	0,518435	-0,6048030	-0,0707039	-0,0802277
21,00	-0,255231	0,518377	-0,6052680	-0,0649062	-0,0736237
21,50	-0,242003	0,518315	-0,6057040	-0,0598627	-0,0678802
22,00	-0,230130	0,518251	-0,6061140	-0,0554575	-0,0628648
22,50	-0,219450	0,518186	-0,6065010	-0,0515960	-0,0584693
23,00	-0,209825	0,518120	-0,6068670	-0,0482000	-0,0546047
23,50	-0,201139	0,518056	-0,6072140	-0,0452052	-0,0511972
24,00	-0,193306	0,517993	-0,6075460	-0,0425628	-0,0481911
24,50	-0,186211	0,517931	-0,6078620	-0,0402179	-0,0455242
25,00	-0,179794	0,517873	-0,6081670	-0,0381378	-0,0431590
25,50	-0,173993	0,517817	-0,6084600	-0,0362910	-0,0410595
26,00	-0,168753	0,517764	-0,6087430	-0,0346507	-0,0391953
26,50	-0,164029	0,517716	-0,6090180	-0,0331949	-0,0375411
27,00	-0,159781	0,517672	-0,6092870	-0,0319050	-0,0360758
27,50	-0,155978	0,517632	-0,6095510	-0,0307657	-0,0347819
28,00	-0,152596	0,517598	-0,6098110	-0,0297649	-0,0336455
28,50	-0,149617	0,517571	-0,6100690	-0,0288933	-0,0326562
29,00	-0,147035	0,517550	-0,6103270	-0,0281450	-0,0318069
29,50	-0,144850	0,517538	-0,6105870	-0,0275176	-0,0310948
30,00	-0,143082	0,517536	-0,6108520	-0,0270133	-0,0305226
30,50	-0,141772	0,517547	-0,6111260	-0,0266418	-0,0301009
31,00	-0,141004	0,517576	-0,6114160	-0,0264247	-0,0298541
31,50	-0,140952	0,517631	-0,6117320	-0,0264093	-0,0298354

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
32,00	-0,142023	0,517732	-0,6121000	-0,0267103	-0,0301746
32,50	-0,145677	0,517943	-0,6126010	-0,0277475	-0,0313456
32,60	-0,147275	0,518024	-0,6127490	-0,0282055	-0,0318629
32,70	-0,149911	0,518151	-0,6129540	-0,0289660	-0,0327219
32,72	-0,150751	0,518190	-0,6130130	-0,0292098	-0,0329973
32,74	-0,151881	0,518243	-0,6130870	-0,0295389	-0,0333690
32,76	-0,153992	0,518339	-0,6132160	-0,0301569	-0,0340670
32,672	-0,154513	0,518363	-0,6132460	-0,0303101	-0,0342401
32,763	-0,155051	0,518387	-0,6132770	-0,0304684	-0,0344190

Продолжение табл. 2.4.1

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
32,763	-0,155576	0,518410	-0,6133060	-0,0306233	-0,0345939
32,762	-0,156137	0,518436	-0,6133360	-0,0307889	-0,0347810
32,76	-0,156703	0,518461	-0,6133670	-0,0309568	-0,0349705
32,74	-0,159270	0,518574	-0,6134970	-0,0317204	-0,0358332
32,72	-0,160857	0,518644	-0,6135730	-0,0321956	-0,0363700
32,70	-0,162154	0,518701	-0,6136330	-0,0325860	-0,0368111
32,60	-0,167092	0,518914	-0,6138450	-0,0340857	-0,0385051
32,50	-0,171018	0,519083	-0,6140000	-0,0352939	-0,0398699
32,40	-0,174510	0,519232	-0,6141300	-0,0363804	-0,0410874
32,20	-0,180834	0,519501	-0,6143500	-0,0383757	-0,0433514
32,00	-0,186686	0,519748	-0,6145400	-0,0402537	-0,0454728
31,80	-0,192287	0,519984	-0,6147130	-0,0420787	-0,0475344
31,60	-0,197745	0,520213	-0,6148740	-0,0438830	-0,0495727
31,40	-0,203138	0,520441	-0,6150280	-0,0456901	-0,0516142
31,20	-0,208476	0,520665	-0,6151740	-0,0475030	-0,0536622
31,00	-0,213806	0,520889	-0,6153170	-0,0493363	-0,0557331
30,80	-0,219149	0,521113	-0,6154560	-0,0511969	-0,0578350
30,60	-0,224520	0,521339	-0,6155930	-0,0530908	-0,0599745
30,40	-0,229935	0,521567	-0,6157280	-0,0550228	-0,0621570
30,20	-0,235403	0,521798	-0,6158620	-0,0569975	-0,0643876
30,00	-0,240936	0,522032	-0,6159950	-0,0590187	-0,0666709
29,50	-0,255103	0,522632	-0,6163270	-0,0642998	-0,0726367
29,00	-0,269838	0,523260	-0,6166600	-0,0699504	-0,0790200
28,50	-0,285241	0,523921	-0,6169990	-0,0760245	-0,0858816
28,00	-0,301404	0,524619	-0,6173460	-0,0825773	-0,0932840
27,50	-0,318419	0,525361	-0,6177030	-0,0896677	-0,1012940
27,00	-0,336378	0,526150	-0,6180730	-0,0973596	-0,1099830
26,50	-0,355377	0,526994	-0,6184560	-0,1057240	-0,1194310
26,00	-0,375518	0,527898	-0,6188560	-0,1148380	-0,1297270
25,50	-0,396911	0,528869	-0,6192750	-0,1247890	-0,1409690
25,00	-0,419675	0,529916	-0,6197130	-0,1356770	-0,1532680
24,50	-0,443938	0,531047	-0,6201730	-0,1476120	-0,1667510

Продолжение табл. 2.4.1

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
24,00	-0,469844	0,532271	-0,6206580	-0,1607190	-0,1815570
23,50	-0,497548	0,533601	-0,6211680	-0,1751420	-0,1978500
23,00	-0,527225	0,535049	-0,6217070	-0,1910430	-0,2158130
22,80	-0,539691	0,535664	-0,6219310	-0,1978590	-0,2235120
22,60	-0,552515	0,536302	-0,6221600	-0,2049530	-0,2315260

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
22,40	-0,565713	0,536963	-0,6223940	-0,2123400	-0,2398710
22,20	-0,579299	0,537649	-0,6226330	-0,2200350	-0,2485640
22,00	-0,593288	0,538360	-0,6228780	-0,2280530	-0,2576210
21,80	-0,607695	0,539098	-0,6231280	-0,2364100	-0,2670620
21,60	-0,622567	0,539865	-0,6233850	-0,2451230	-0,2769050
21,40	-0,637831	0,540661	-0,6236470	-0,2542120	-0,2871720
21,20	-0,653597	0,541489	-0,6239150	-0,2636950	-0,2978850
21,00	-0,669852	0,542350	-0,6241890	-0,2735930	-0,3090660
20,80	-0,686616	0,543246	-0,6244700	-0,2839280	-0,3208410
20,60	-0,703911	0,544178	-0,6247570	-0,2947230	-0,3329360
20,40	-0,721758	0,545149	-0,6250510	-0,3060020	-0,3456770
20,20	-0,740180	0,546161	-0,6253520	-0,3177930	-0,3589960
20,00	-0,759202	0,547216	-0,6256590	-0,3301220	-0,3729240
19,80	-0,778849	0,548316	-0,6259740	-0,3430190	-0,3874930
19,60	-0,799147	0,549465	-0,6262960	-0,3565150	-0,4027390
19,40	-0,820125	0,550664	-0,6266240	-0,3706450	-0,4187010
19,20	-0,841812	0,551916	-0,6269610	-0,3854430	-0,4354180
19,00	-0,864239	0,553226	-0,6273040	-0,4009480	-0,4529340
18,80	-0,887439	0,554595	-0,6276550	-0,4172010	-0,4712930
18,60	-0,911446	0,556028	-0,6280130	-0,4342440	-0,4905470
18,50	-0,923764	0,556770	-0,6281950	-0,4430770	-0,5005240
18,40	-0,936297	0,557529	-0,6283790	-0,4521250	-0,5107450
18,30	-0,949051	0,558305	-0,6285640	-0,4613940	-0,5212160
18,20	-0,962030	0,559101	-0,6287520	-0,4708910	-0,5319450
18,10	-0,975239	0,559915	-0,6289410	-0,4806230	-0,5429380
18,00	-0,988685	0,560749	-0,6291320	-0,4905970	-0,5542050
17,9172	-1,000000	0,561454	-0,6292920	-0,4990430	-0,5637460

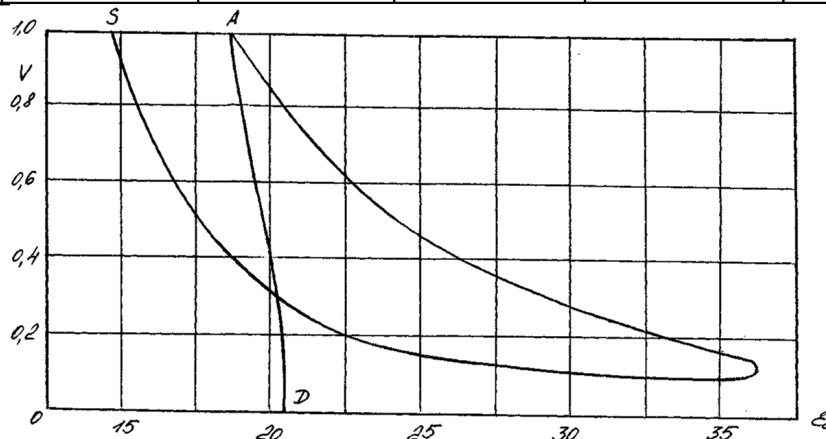


Рис. 2.4.3. Зависимость  $v = G(\varepsilon_0)$  от безразмерно расстояния между вращающимися дисками  $\varepsilon_0$  вблизи  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$  (второе решение)

Пользуясь алгоритмом, описанным выше, функция  $v = G(\varepsilon_0)$  от  $\varepsilon_0$  показана на рис. 2.4.3 и представлена в табл. 2.4.2. И в этот раз оказалось, что переход от  $G(0) = 1$ ,  $G(\varepsilon_0) = 1$  к состоянию  $G(0) = 1$ ,  $G(\varepsilon_0) = -1$  не получился. Сделав петлю, решение возвратилось от  $G(0) = G(\varepsilon) = 1$ , как симметрия, к решению  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$ , как асимметрия. На рис. 2.4.3 обозначено: точка  $S$  – симметрия, точка  $A$  – асимметрия. Отметим на рис. 2.4.3 кривую  $AD$ , о которой речь пойдет позже.

Экстремальные координаты решения:  $v_{\min} \approx 0,100315$  при  $\varepsilon_0 \approx 34,8$ ,  $A = H''(0) = 0,505292$ ,  $B = G'(0) = -0,616400$ ;  $\varepsilon_{0\max} = 37,622$  при  $v = 0,115450$ .

Когда становится  $\varepsilon_0 > \varepsilon_{0\max}$ , то решение рассматриваемой задачи не существует.

Третье решение привело к искомому результату. Переход от состояния  $G(0) = G(\varepsilon) = 1$  – однонаправленное вращение дисков, до состояния  $G(0) = -G(\varepsilon_0) = 1$  – разнонаправленное вращение дисков. Существенно и то, что зависимость  $v = G(\varepsilon_0)$  пересекает  $v = 0$  при  $G(0) = 1$ .

Графически это решение представлено на рис. 2.4.4. Там же для сравнения нанесены фрагменты первого (1) и второго (2) решений. Третье решение, кривая  $ADA$ , где точки  $A$  означают асимметричные решения первого и второго. Численные значения функций безразмерных скоростей представлены в табл. 2.4.3. Точка  $D$  имеет координаты:  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $H''(0) = 0,0467$ ;  $G(0) = 1$ ;  $G'(0) = -0,028951$ ;  $H(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H''(\varepsilon_0) = -0,499043$ ;  $G(\varepsilon_0) = 0$ ;  $G'(\varepsilon_0) = 0,563746$ ;  $\varepsilon_0 = 20,339458$ . Отметим также  $\varepsilon_{0 \max} \ll 20,438$ .

**2.4.2. Начальные параметры  
при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = 1$ ;  $H(\varepsilon_0) = 0$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $G(\varepsilon_0) = v$ ;  $C = 0$**

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
14,65595	1,000000	0,503177	-0,601473	-0,5031770	0,6014730
14,70	0,989034	0,503209	-0,601565	-0,4948910	0,5915160
14,80	0,962648	0,503284	-0,601786	-0,4751440	0,5677880
14,90	0,937215	0,503362	-0,602002	-0,4563670	0,5452280
15,00	0,912694	0,503435	-0,602213	-0,4385030	0,5237680
15,20	0,866222	0,503576	-0,602617	-0,4053110	0,4839020
15,40	0,822934	0,503709	-0,603002	-0,3751880	0,4477320
15,60	0,782563	0,503835	-0,603369	-0,3478050	0,4148600
15,80	0,744866	0,503955	-0,603718	-0,3228700	0,3849350
16,00	0,709628	0,504069	-0,604051	-0,3001300	0,3576510
16,20	0,676652	0,504178	-0,604370	-0,2793590	0,3327360
16,40	0,645762	0,504281	-0,604674	-0,2603590	0,3099520
16,60	0,616796	0,504378	-0,604965	-0,2429550	0,2890860
16,80	0,589610	0,504471	-0,605244	-0,2269910	0,2699520
17,00	0,564069	0,504560	-0,605512	-0,2123280	0,2523820
17,50	0,540054	0,504644	-0,605768	-0,1988430	0,2362280
17,40	0,517454	0,504724	-0,606015	-0,1864270	0,2213580
17,60	0,496168	0,504800	-0,606252	-0,1749800	0,2076530
17,80	0,476104	0,504873	-0,606480	-0,1644160	0,1950080
18,00	0,457169	0,504942	-0,606699	-0,1546550	0,1833270
18,50	0,414340	0,505100	-0,607214	-0,1333170	0,1578040
19,00	0,377088	0,505241	-0,607686	-0,1156470	0,1366820
19,50	0,344562	0,505365	-0,608120	-0,1009240	0,1190960
20,00	0,316057	0,505474	-0,608522	-0,0885884	0,1043700
20,50	0,290991	0,505571	-0,608896	-0,0781976	0,0919750
21,00	0,268878	0,505655	-0,609245	-0,0694017	0,0814893
21,50	0,249314	0,505729	-0,609572	-0,0619216	0,0725780
22,00	0,231961	0,505793	-0,609880	-0,0555329	0,0649719
22,50	0,216533	0,505849	-0,610172	-0,0500544	0,0584539
23,00	0,202787	0,505895	-0,610450	-0,0453392	0,0528476
24,00	0,179537	0,505966	-0,610970	-0,0377359	0,0438162

*Продолжение табл. 2.4.2*

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
24,50	0,169731	0,505991	-0,611217	-0,0346757	0,0401841
25,00	0,160937	0,506009	-0,611456	-0,0320081	0,0370203
25,50	0,153055	0,506020	-0,611689	-0,0296812	0,0342620
26,00	0,145992	0,506026	-0,611918	-0,0276483	0,0318538
26,50	0,139664	0,506026	-0,612143	-0,0258708	0,0297491
27,00	0,134001	0,506020	-0,612366	-0,0243160	0,0279091
27,50	0,128943	0,506008	-0,612588	-0,0229565	0,0263011

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
28,00	0,124437	0,505990	-0,612811	-0,0217692	0,0248974
28,50	0,120435	0,505977	-0,613036	-0,0207344	0,0236747
29,00	0,116899	0,505939	-0,613263	-0,0198358	0,0226133
29,50	0,113793	0,505212	-0,613494	-0,0190589	0,0216960
30,00	0,111085	0,505866	-0,613730	-0,0183915	0,0209084
30,50	0,108746	0,505822	-0,613972	-0,0178227	0,0202375
31,00	0,106749	0,505773	-0,614221	-0,0173431	0,0196719
31,50	0,105069	0,505720	-0,614478	-0,0169440	0,0192016
32,00	0,103680	0,505663	-0,614743	-0,0166175	0,0188169
32,50	0,102559	0,505602	-0,615016	-0,0163563	0,0185093
33,00	0,101683	0,505539	-0,615299	-0,0161542	0,0182712
33,50	0,101035	0,505473	-0,615591	-0,0160061	0,0180965
34,00	0,100603	0,505404	-0,615893	-0,0159085	0,0179810
34,40	0,100367	0,505350	-0,616141	-0,0158558	0,0179185
34,80	0,100315	0,505292	-0,616400	-0,0158462	0,0179054
35,20	0,100419	0,505231	-0,616670	-0,0158733	0,0179343
35,60	0,100707	0,505167	-0,616956	-0,0159438	0,0180127
36,00	0,101231	0,505098	-0,617263	-0,0160698	0,0181542
36,20	0,101665	0,505058	-0,617433	-0,0161744	0,0182719
36,40	0,102142	0,505018	-0,617608	-0,0162888	0,0184009
36,60	0,102743	0,504973	-0,617796	-0,0164333	0,0185639
36,80	0,103509	0,504924	-0,618003	-0,0166180	0,0187724
37,00	0,104510	0,504867	-0,618236	-0,0168598	0,0190457
37,20	0,105877	0,504797	-0,618511	-0,0171921	0,0194208

Продолжение табл. 2.4.2

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
37,40	0,107945	0,504703	-0,618867	-0,0176981	0,0199925
37,50	0,109567	0,504636	-0,619114	-0,0180992	0,0204455
37,60	0,112646	0,504518	-0,619531	-0,0188674	0,0213134
37,61	0,113300	0,504495	-0,619613	-0,0190319	0,0214992
37,62	0,114431	0,504454	-0,619752	-0,0193179	0,0218223
37,621	0,114663	0,504446	-0,619779	-0,0193765	0,0218884
37,622	0,115450	0,504419	-0,619871	-0,0195764	0,0221142
37,622	0,115450	0,504419	-0,619871	-0,0195764	0,0221142
37,621	0,115893	0,504403	-0,619923	-0,0196891	0,0222416
37,62	0,116139	0,504395	-0,619951	-0,0197518	0,0223124
37,60	0,118213	0,504325	-0,620182	-0,0202833	0,0229129
37,50	0,122742	0,504179	-0,620653	-0,0214600	0,0242422
37,40	0,125828	0,504084	-0,620955	-0,0222746	0,0251623
37,20	0,130857	0,503934	-0,621422	-0,0236233	0,0266859
37,00	0,135238	0,503808	-0,621809	-0,0248193	0,0280370
36,80	0,139303	0,503695	-0,622157	-0,0259468	0,0293107
36,60	0,143188	0,503588	-0,622481	-0,0270397	0,0305452
36,40	0,146962	0,503487	-0,622789	-0,0281157	0,0317608
36,20	0,150667	0,503390	-0,623086	-0,0291857	0,0329696
36,00	0,154332	0,503295	-0,623375	-0,0302571	0,0341798
35,80	0,157976	0,503202	-0,623660	-0,0313350	0,0353975
35,60	0,161614	0,503111	-0,613940	-0,0324236	0,0366273
35,40	0,165258	0,503021	-0,624176	-0,0335262	0,0378728
35,20	0,168916	0,502932	-0,624938	-0,0346455	0,0391372

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
35,00	0,172596	0,502843	-0,624769	-0,0357838	0,0404231
34,50	0,181933	0,502624	-0,625460	-0,0387264	0,0437472
34,00	0,191528	0,502405	-0,626160	-0,0418300	0,0472533
33,50	0,201445	0,502187	-0,626875	-0,0451206	0,0509705
33,00	0,211739	0,501966	-0,627611	-0,0486230	0,0549271
32,50	0,222461	0,501744	-0,628371	-0,0523626	0,0591515
32,00	0,233660	0,501519	-0,629162	-0,0563657	0,0636736
31,50	0,245382	0,501291	-0,629986	-0,0606603	0,0685251

Продолжение табл. 2.4.2

$\varepsilon_0$	$v = G(\varepsilon_0)$	$A = H''(0)$	$B = G'(0)$	$a = H'(\varepsilon_0)$	$B = G'(\varepsilon_0)$
31,00	0,257679	0,501059	-0,630849	-0,0652769	0,0737401
30,50	0,270602	0,500823	-0,631753	-0,0702482	0,0793561
30,00	0,284204	0,500583	-0,632705	-0,0756109	0,0854140
29,50	0,298543	0,500339	-0,633709	-0,0814046	0,0919590
29,00	0,313681	0,500091	-0,634769	-0,0876740	0,0990413
28,50	0,329684	0,499839	-0,635893	-0,0944682	0,1067160
28,00	0,346624	0,499583	-0,637085	-0,1018420	0,1150460
27,50	0,364580	0,499324	-0,638358	-0,1098570	0,1241000
27,00	0,383636	0,499061	-0,639704	-0,1185820	0,1339570
26,50	0,403887	0,498796	-0,641147	-0,1280940	0,1447020
26,00	0,425533	0,498528	-0,642691	-0,1384790	0,1564340
25,50	0,448389	0,498260	-0,644346	-0,1498370	0,1692640
25,00	0,472874	0,497993	-0,646124	-0,1622770	0,1833170
24,50	0,499029	0,497728	-0,648037	-0,1759250	0,1987340
24,00	0,527003	0,497467	-0,650102	-0,1909230	0,2156770
23,50	0,556962	0,497212	-0,652333	-0,2074330	0,2343220
23,00	0,589094	0,496968	-0,654751	-0,2256390	0,2548950
22,50	0,623603	0,496739	-0,657375	-0,2457540	0,2776170
22,00	0,660721	0,496528	-0,660232	-0,2680190	0,3027690
21,50	0,700703	0,496344	-0,663349	-0,2927110	0,3306620
21,00	0,743838	0,496192	-0,666658	-0,3201510	0,3616610
20,50	0,790448	0,496084	-0,670495	-0,3507100	0,3961810
20,00	0,840896	0,496031	-0,674605	-0,3848150	0,4347080
19,80	0,862238	0,496029	-0,676364	-0,3995570	0,4513620
19,60	0,884290	0,496039	-0,678194	-0,4149830	0,4687870
19,40	0,907078	0,496062	-0,680098	-0,4311270	0,4870250
19,20	0,930636	0,496101	-0,682081	-0,4480300	0,5061200
19,00	0,954996	0,496155	-0,684146	-0,4657360	0,5261200
18,90	0,967487	0,496189	-0,685212	-0,4749040	0,5364770
18,80	0,980191	0,496228	-0,686299	-0,4842880	0,5470790
18,70	0,993114	0,496272	-0,687410	-0,4938970	0,5579330
18,6474	1,000000	0,496297	-0,688004	-0,4990430	0,5637460



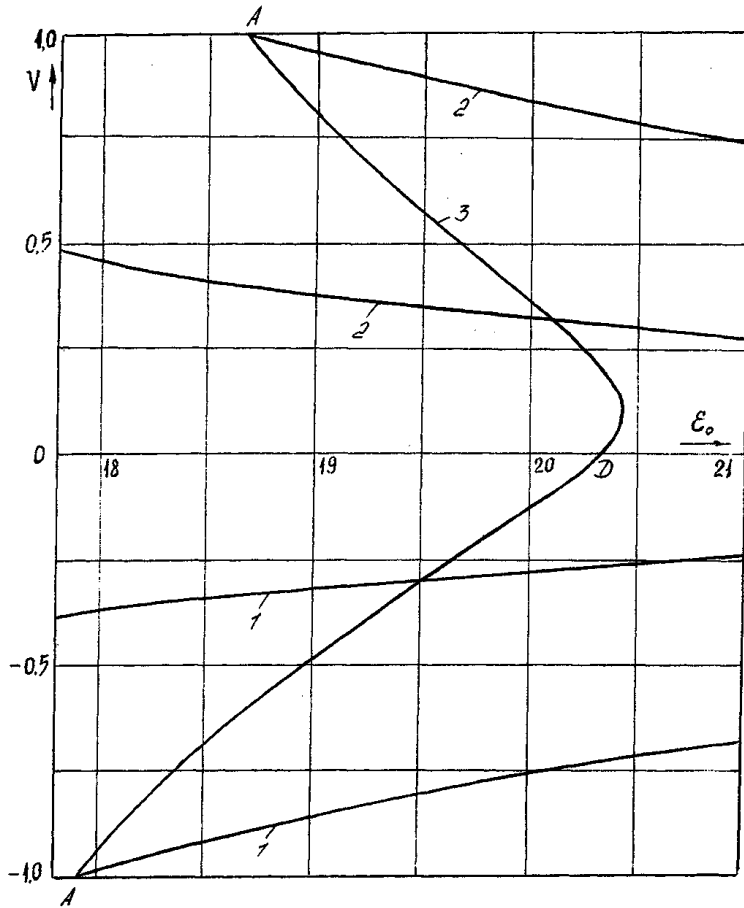


Рис. 2.4.4. Зависимость  $v = G(\varepsilon_0)$  при  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 1$   
до  $G(0) = -G(\varepsilon_0) = 1$ , третье решение:  
1 – первое решение; 2 – второе решение; 3 – третье решение

Для анализа и иллюстрации мы численно проинтегрировали дифференциальные уравнения (2.4.1) при граничных условиях (2.4.2), положив  $G(\varepsilon_0) = v = 0$ . Из третьего решения следует, что  $\varepsilon_0 = 20,339458$ , это соответствует точке  $D$  (рис. 2.4.4). Результаты решения относительно безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$  изображены на рис. 2.4.5 и представлены в табл. 2.4.3. Из рассмотрения результатов решения видим ряд неожиданностей функций скоростей. Безразмерная тангенциальная скорость на продолжительном интервале становится отрицательной, т.е. вращается в обратную сторону по отношению к вращающемуся диску. Аксиальная безразмерная скорость  $H(\varepsilon)$  имеет существенный экстремум.

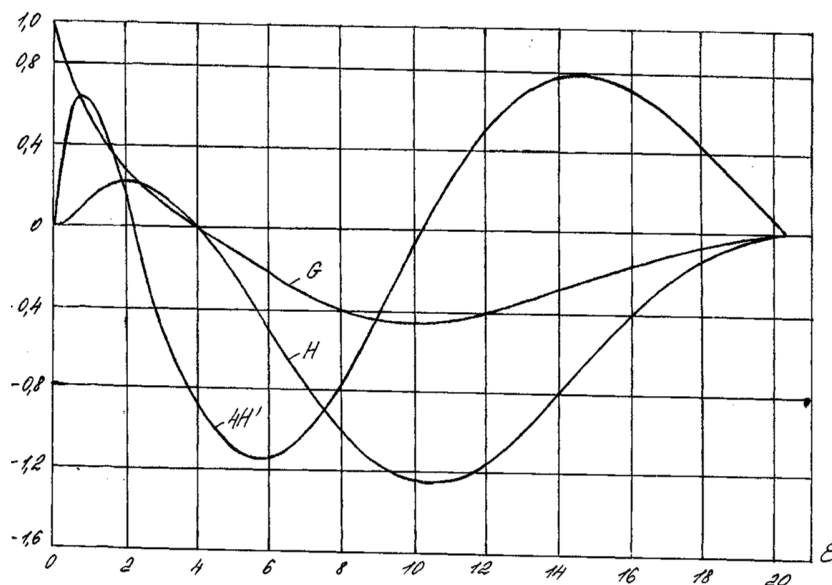


Рис. 2.4.5. Функции безразмерных скоростей аксиальной  $H(\epsilon)$ , радиальной  $H'(\epsilon)$ , тангенциальной  $G(\epsilon)$  (точка  $D$  третьего решения)

Представим в связи с этим экстремумы скоростей:

$$\begin{aligned}
 H_{\max} &\approx 0,228424 & \text{при } \epsilon &\approx 2,2; & H_{\min} &\approx -1,248472 & \text{при } \epsilon &\approx 10,2; \\
 H'_{\max} &\approx 0,161599 & \text{при } \epsilon &\approx 0,7; & H'_{\min} &\approx -0,286928 & \text{при } \epsilon &\approx 5,8; \\
 H'_{\max} &\approx 0,196876 & \text{при } \epsilon &\approx 14,6; & G_{\min} &\approx -0,468596 & \text{при } \epsilon &\approx 10,0.
 \end{aligned}$$

Как видим, и при отсутствии, равенства нулю, коэффициента  $C$ , "ответственного" за колебательный процесс функций скоростей, колебание функций скоростей имеет место.

## 2.5. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И ПРОНИЦАЕМЫМ НЕПОДВИЖНЫМ ДИСКАМИ

На рис. 2.5.1 показана схема движения жидкости. Аксиальная скорость  $w(z_0)$  переменная, одновременно и будем вести расчеты и при различных расстояниях  $z_0$  между дисками.

В основу расчета положим систему дифференциальных уравнений (2.2.1), полученную от преобразований Навье-Стокса для осесимметричного движения жидкости:

$$\begin{aligned}
 H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\
 G'' &= 2(H'G - HG').
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи будут:

$$\begin{aligned}
 \text{при } \epsilon = 0 & \quad H = 0, H' = 0, G = 1; \\
 \text{при } \epsilon = \epsilon_0 & \quad H' = 0, G = 0.
 \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (2.5.1), соблюдая граничные условия (2.5.2), осуществляем подобным ранее разработанным образом, разложением функций  $H$ ,  $G$  и их производных в степенные ряды Тэйлора. Частными случаями решений являются ранее исследованные при аксиальной безразмерной скорости  $H(\epsilon_0) = 0$  (см. раздел 2.1).

Таких решений ранее было получено одно, три или пять на различных интервалах изменения безразмерного расстояния  $\epsilon_0$  между вращающимся и неподвижным непроницаемым дисками. Таким образом начинаем исследования от точек  $H(0) = H(\epsilon_0)$  в сторону  $H(\epsilon_0) > 0$  и  $H(\epsilon_0) < 0$  при фиксированных  $\epsilon_0$ , т.е. как параметре.

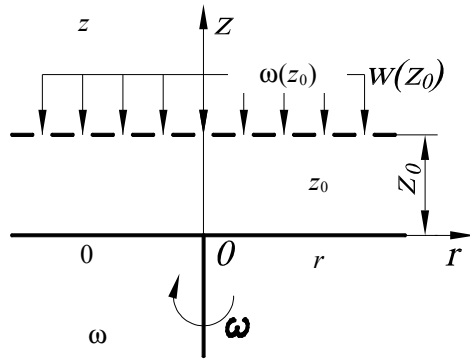


Рис. 2.5.1. Схема движения жидкости  
2.5.1. ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ

Некоторые результаты первого расчета представлены на рис. 2.5.2 – 2.5.7 и в табл. 2.5.3 – 2.5.4. На всех графиках мы ограничились изображением начального параметра – коэффициента радиального давления  $C$ . Другие начальные параметры  $H''(0) = A$ ,  $G'(0) = B$ ,  $H''(\epsilon_0) = a$ ,  $G'(\epsilon_0) = b$  имеются в табл. 2.5.1 – 2.5.4. Мы не все данные, которые изображены на рис. 2.5.4 и 2.5.5, представили в табличных значениях из-за громоздкости материала.

Отметим ряд качеств представленных графических изображений. Значения функции  $C = f(\epsilon_0)$  – первого решения при  $H(0) = H(\epsilon_0) = 0$  имеются в разделе 2.1 данной работы.

В пределах изменения коэффициента давления  $C$  0,5...1,0 его величины практически совпадают при различных значениях параметра  $\epsilon_0$ , т.е. лежат на одной линии, (см. рис. 2.5.2).

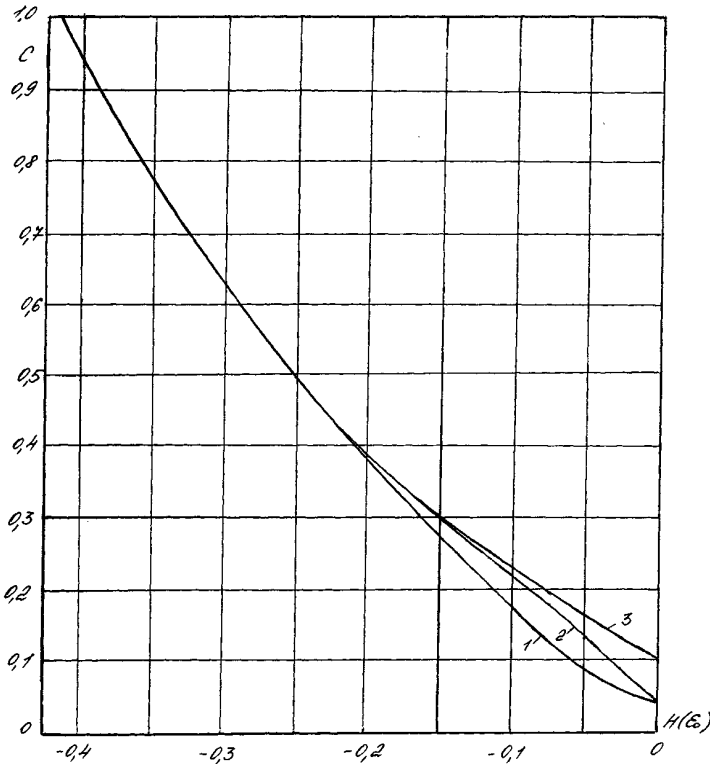


Рис. 2.5.2. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\epsilon_0) \leq 0$ , первое решение:  
1 – при  $\epsilon_0 = 8$ ; 2 – при  $\epsilon_0 = 10$ ; 3 – при  $\epsilon_0 = 12$

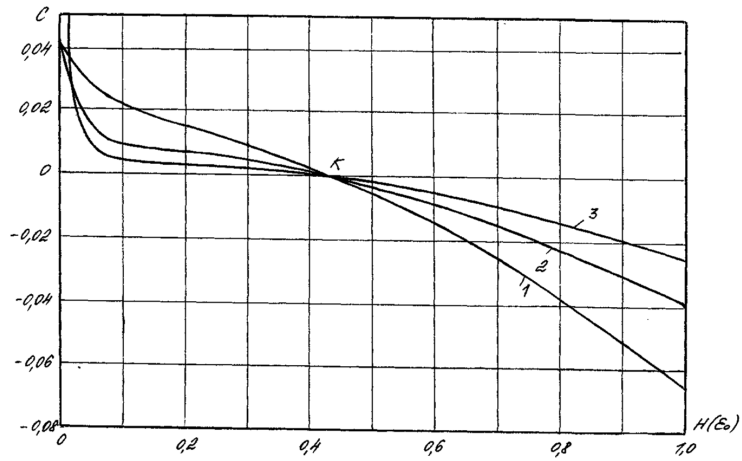


Рис. 2.5.3. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0) \geq 0$ , первое решение:  
 1 – при  $\varepsilon_0 = 8$ ; 2 – при  $\varepsilon_0 = 10$ ; 3 – при  $\varepsilon_0 = 12$

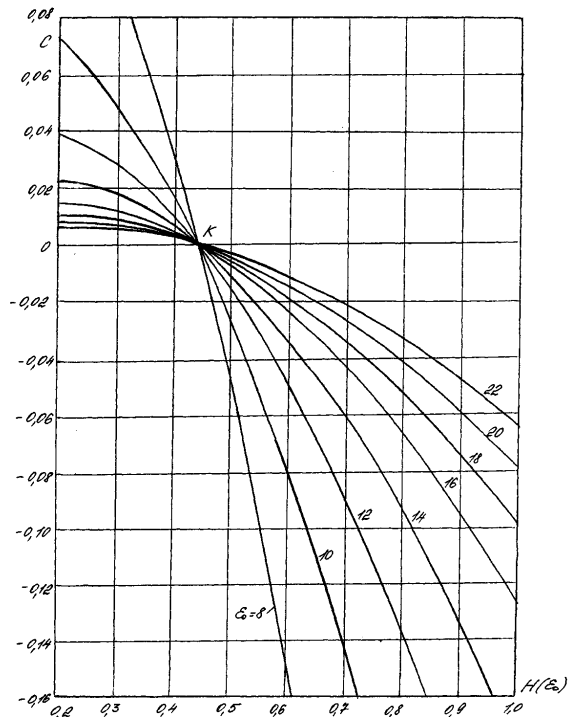


Рис. 2.5.4. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  (фрагмент первого решения)

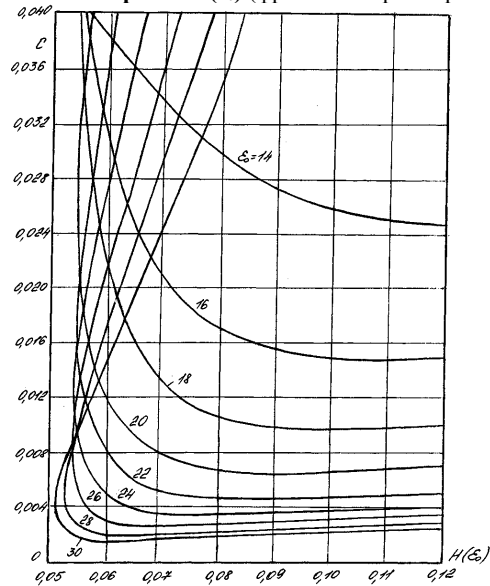


Рис. 2.5.5. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  (фрагмент первого решения)

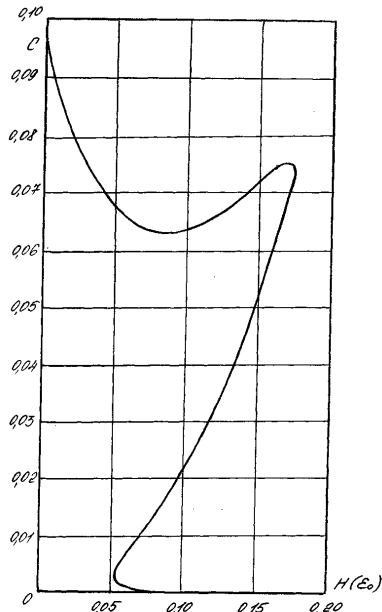


Рис. 2.5.6. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0) \geq 0$  при  $\varepsilon_0 = 20$  (фрагмент первого решения)

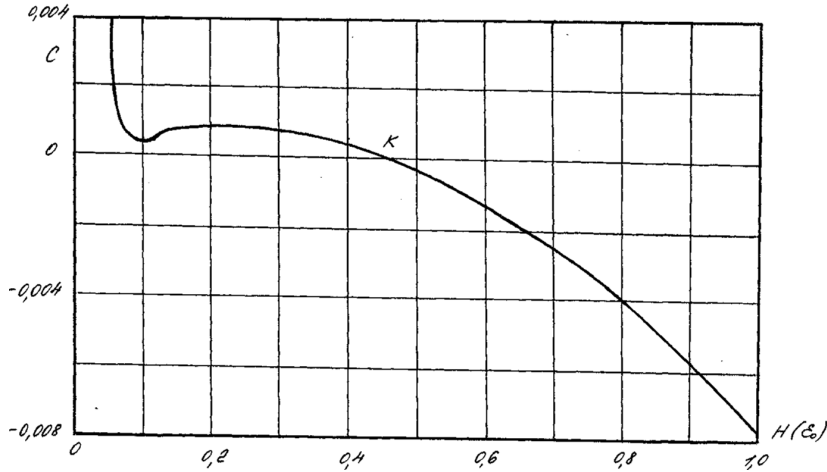


Рис. 2.5.7. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0) \geq 0$  при  $\varepsilon_0 = 20$  (фрагмент первого решения)

**2.5.1. Начальные параметры  
при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = 1$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $G(\varepsilon_0) = 0$**

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
Второе, третье решения при $\varepsilon_0 = 8,4$			
-0,980000	-0,00215280	0,498960	-0,570430
-1,000000	-0,00211405	0,498829	-0,569679
-1,020000	-0,00241298	0,499061	-0,569255
-1,040000	-0,00288394	0,499476	-0,569001
-1,060000	-0,00346874	0,500008	-0,568863
-1,080000	-0,00413842	0,500626	-0,568813
-1,100000	-0,00487595	0,501310	-0,568836
-1,150000	-0,00695192	0,503244	-0,569149
-1,200000	-0,00928901	0,505416	-0,569758
-1,250000	-0,01183810	0,507772	-0,570617
-1,300000	-0,01457400	0,510286	-0,571699
-1,350000	-0,01748570	0,512944	-0,572990
-1,400000	-0,02057350	0,515746	-0,574490
-1,450000	-0,02384820	0,518701	-0,576205
-1,500000	-0,02733490	0,521831	-0,578160

Продолжение табл. 2.5.1

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,520000	-0,02879880	0,523142	-0,579017
-1,540000	-0,03030880	0,524492	-0,579924
-1,560000	-0,03187120	0,525887	-0,580887
-1,580000	-0,03349490	0,527337	-0,581914
-1,600000	-0,03519270	0,528851	-0,583018
-1,620000	-0,03698420	0,530450	-0,584218
-1,640000	-0,03890290	0,532164	-0,585546
-1,660000	-0,04101480	0,534056	-0,587070
-1,680000	-0,04350310	0,536298	-0,588969
-1,689348	-0,04500000	0,537660	-0,590190
-1,693854	-0,04600000	0,538579	-0,591056
-1,695341	-0,04650000	0,539044	-0,591511
-1,696105	-0,04700000	0,539513	-0,591987
-1,695829	-0,04750000	0,539989	-0,592493
-1,693828	-0,04800000	0,540476	-0,593049
-1,687780	-0,04850000	0,540993	-0,593724
-1,680000	-0,04871370	0,541250	-0,594165
-1,670000	-0,04874470	0,541351	-0,594490
-1,660000	-0,04863610	0,541320	-0,594676
-1,640000	-0,04818650	0,541038	-0,594820
-1,620000	-0,04754830	0,540478	-0,594778
-1,600000	-0,04678820	0,540001	-0,594618
-1,580000	-0,04594010	0,539340	-0,594372
-1,560000	-0,04525890	0,538800	-0,594144
-1,540000	-0,04405410	0,537832	-0,593698
-1,520000	-0,04303880	0,537006	-0,593292
-1,500000	-0,04198530	0,536141	-0,592849
-1,450000	-0,03921650	0,533838	-0,591619
-1,400000	-0,03629630	0,531367	-0,590251
-1,350000	-0,03325830	0,528756	-0,588782
-1,300000	-0,03012230	0,526019	-0,587232
-1,250000	-0,02689800	0,523158	-0,585617

Продолжение табл. 2.5.1

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,200000	-0,02358490	0,520168	-0,583938
-1,150000	-0,02016950	0,517025	-0,582189
-1,100000	-0,01661680	0,513685	-0,580342
-1,080000	-0,01514080	0,512273	-0,579563
-1,060000	-0,01352020	0,510802	-0,578748
-1,040000	-0,01203920	0,509255	-0,577884
-1,020000	-0,01037010	0,507600	-0,576945
-1,000000	-0,00855620	0,505775	-0,575879
-0,980553	-0,00650000	0,503666	-0,574576
-0,969879	-0,00500000	0,502097	-0,573514
-0,965634	-0,00400000	0,501032	-0,572707
-0,964996	-0,00350000	0,500492	-0,572252
-0,966057	-0,00300000	0,499943	-0,571737
-0,970000	-0,00253230	0,499417	-0,571150
	Второе, третье решения при $\varepsilon_0 = 8,35$		
-1,110000	-0,00892274	0,505274	-0,572126

$H(\epsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,120000	-0,00911789	0,505424	-0,571972
-1,140000	-0,00968056	0,505902	-0,571837
-1,160000	-0,01038780	0,506528	-0,571848
-1,180000	-0,01119390	0,507253	-0,571961
-1,200000	-0,01207620	0,508053	-0,572154
-1,250000	-0,01454210	0,510298	-0,572916
-1,300000	-0,01731360	0,512823	-0,574015
-1,350000	-0,02036230	0,515594	-0,575421
-1,400000	-0,02370290	0,518621	-0,577147
-1,450000	-0,02740640	0,521971	-0,579262
-1,500000	-0,03170440	0,525864	-0,581992
-1,520000	-0,03378930	0,527765	-0,583454
-1,521801	-0,03400000	0,527958	-0,563608
-1,529604	-0,03500000	0,528878	-0,584365
-1,535762	-0,03600000	0,529807	-0,585172
-1,538984	-0,03700000	0,530755	-0,586069

Продолжение табл. 2.5.1

$H(\epsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,528953	-0,03800000	0,531796	-0,587370
-1,520000	-0,03798130	0,531842	-0,587625
-1,500000	-0,03752850	0,531547	-0,587789
-1,450000	-0,03552200	0,529957	-0,587340
-1,400000	-0,03298390	0,527833	-0,586381
-1,350000	-0,03015480	0,525401	-0,585150
-1,300000	-0,02711450	0,522731	-0,583731
-1,250000	-0,02388800	0,519839	-0,582152
-1,222066	-0,02200000	0,518118	-0,581198
-1,193589	-0,02000000	0,516271	-0,580161
-1,166416	-0,01800000	0,514398	-0,579094
-1,140859	-0,01600000	0,512495	-0,577985
-1,117508	-0,01400000	0,510561	-0,576815
-1,097616	-0,01200000	0,508587	-0,575541
-1,089888	-0,01100000	0,507580	-0,574833
-1,085063	-0,01000000	0,506553	-0,574027
-1,090000	-0,00896709	0,505433	-0,572856
-1,095000	-0,00885121	0,505283	-0,572572
-1,100000	-0,00882977	0,505232	-0,572379

Второе, третье решения при  $\epsilon_0 = 8,32$

-1,261961	-0,01930000	0,514927	-0,576964
-1,265253	-0,01940000	0,515007	-0,576954
-1,268019	-0,01950000	0,515091	-0,576962
-1,279354	-0,02000000	0,515525	-0,577084
-1,297778	-0,02100000	0,516417	-0,577469
-1,313625	-0,02200000	0,517321	-0,577942
-1,327565	-0,02300000	0,518236	-0,578479
-1,339358	-0,02400000	0,519161	-0,579087
-1,346215	-0,02500000	0,520117	-0,579856
-1,345344	-0,02510000	0,520223	-0,579983
-1,340976	-0,02510000	0,520253	-0,580123

Окончание табл. 2.5.1

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,337228	-0,02500000	0,520179	-0,580144
-1,315201	-0,02400000	0,519327	-0,579866
-1,297971	-0,02300000	0,518437	-0,579436
-1,282752	-0,02200000	0,517530	-0,578944
-1,269306	-0,02100000	0,516607	-0,578397
-1,258309	-0,02000000	0,515664	-0,577772
-1,254882	-0,01950000	0,515178	-0,577393
-1,254695	-0,01940000	0,515077	-0,577301
-1,255031	-0,01930000	0,514973	-0,577191

**2.5.2. Начальные параметры  
при  $H(0) = 0; H'(0) = 0; G(0) = 1; H'(\varepsilon_0) = 0; G(\varepsilon_0) = 0$**

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
Второе, третье решения при $\varepsilon_0 = 8,8$			
-1,163889	0,000000	0,497486	-0,563744
-1,270944	-0,005000	0,502197	-0,565443
-1,372707	-0,010000	0,506807	-0,567492
-1,470342	-0,015000	0,511339	-0,569805
-1,564365	-0,020000	0,515809	-0,572332
-1,654953	-0,025000	0,520230	-0,575041
-1,742087	-0,030000	0,524614	-0,577911
-1,825613	-0,035000	0,528967	-0,580927
-1,905286	-0,040000	0,533299	-0,584080
-1,980778	-0,045000	0,537614	-0,587364
-2,051687	-0,050000	0,541919	-0,590778
-2,117526	-0,055000	0,546219	-0,594323
-2,177695	-0,060000	0,550520	-0,598003
-2,231429	-0,065000	0,554828	-0,601828
-2,277688	-0,070000	0,559151	-0,605814
-2,314920	-0,075000	0,563498	-0,609990
-2,340423	-0,080000	0,567886	-0,614414

*Продолжение табл. 2.5.2*

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-2,346219	-0,082000	0,569659	-0,616278
-2,348558	-0,084000	0,571447	-0,618219
-2,348565	-0,084100	0,571537	-0,618318
-2,348560	-0,084200	0,571627	-0,618418
-2,346147	-0,086000	0,573260	-0,620266
-2,342239	-0,088000	0,575112	-0,622490
-2,307791	-0,090000	0,577069	-0,625151
-2,280000	-0,090665	0,577828	-0,626485
-2,260000	-0,090784	0,578054	-0,627094
-2,240000	-0,090704	0,578103	-0,627509
-2,220000	-0,090471	0,578017	-0,627778
-2,194531	-0,090000	0,577752	-0,627952
-2,125435	-0,088000	0,576394	-0,627730
-2,073630	-0,086000	0,574932	-0,627084
-2,028453	-0,084000	0,573429	-0,626274
-1,987044	-0,082000	0,571902	-0,625371



$H(\epsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,948122	-0,080000	0,570357	-0,624405
-1,857661	-0,075000	0,566445	-0,621815
-1,773128	-0,070000	0,562478	-0,619069
-1,692013	-0,065000	0,558467	-0,616228
-1,612956	-0,060000	0,554416	-0,613329
-1,535108	-0,055000	0,550323	-0,610396
-1,457889	-0,050000	0,546187	-0,607447
-1,380874	-0,045000	0,542002	-0,604499
-1,303742	-0,040000	0,537760	-0,601567
-1,226244	-0,035000	0,533453	-0,598667
-1,148195	-0,030000	0,529068	-0,595816
-1,069488	-0,025000	0,524588	-0,593032
-0,990135	-0,020000	0,519990	-0,590336
-0,910366	-0,015000	0,515246	-0,587749
-0,830877	-0,010000	0,510311	-0,585291

Продолжение табл. 2.5.2

$H(\epsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,753368	-0,005000	0,505133	-0,582958
-0,681719	0,000000	0,499647	-0,580686
-0,624108	0,005000	0,493827	-0,578233
-0,596044	0,010000	0,487789	-0,574935
-0,599953	0,012000	0,485392	-0,573032
-0,623492	0,014000	0,484218	-0,571822
-0,666229	0,015000	0,482013	-0,567549
-0,680000	0,015075	0,481956	-0,566894
-0,709721	0,015000	0,482096	-0,565708
-0,778538	0,014000	0,483292	-0,563812
-0,856656	0,012000	0,485489	-0,562646
-0,918476	0,010000	0,487595	-0,562257
-1,048881	0,005000	0,492640	-0,562552

Второе, третье решения при  $\epsilon_0 = 8,6$

-1,109532	0,000000	0,497000	-0,564713
-1,216657	-0,005000	0,501757	-0,566139
-1,314983	-0,010000	0,506409	-0,568033
-1,407393	-0,015000	0,510981	-0,570256
-1,494930	-0,020000	0,515491	-0,572730
-1,578089	-0,025000	0,519950	-0,575414
-1,657020	-0,030000	0,524369	-0,578279
-1,731654	-0,035000	0,528758	-0,581308
-1,801753	-0,040000	0,533125	-0,584493
-1,866921	-0,045000	0,537478	-0,587830
-1,926566	-0,050000	0,541823	-0,591323
-1,979806	-0,055000	0,546171	-0,594984
-2,025222	-0,060000	0,550532	-0,598840
-2,040679	-0,062000	0,552283	-0,600448
-2,054222	-0,064000	0,554042	-0,602103
-2,065445	-0,066000	0,555810	-0,603814
-2,073695	-0,068000	0,557591	-0,605598

Продолжение табл. 2.5.2

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-2,077757	-0,070000	0,559394	-0,607487
-2,077463	-0,071000	0,560309	-0,608489
-2,074742	-0,072000	0,561238	-0,609554
-2,067909	-0,073000	0,562192	-0,610725
-2,060000	-0,073591	0,562780	-0,611518
-2,050000	-0,074009	0,563225	-0,612195
-2,040000	-0,074229	0,563491	-0,612678
-2,030000	-0,074324	0,563643	-0,613037
-2,020000	-0,074330	0,563714	-0,613308
-2,010000	-0,074267	0,563723	-0,613512
-2,000000	-0,074148	0,563681	-0,613662
-1,990000	-0,073984	0,563599	-0,613767
-1,950447	-0,073000	0,562970	-0,613858
-1,920611	-0,072000	0,562262	-0,613677
-1,894685	-0,071000	0,561528	-0,613393
-1,870985	-0,070000	0,560779	-0,613051
-1,768578	-0,065000	0,556914	-0,610916
-1,678634	-0,060000	0,552939	-0,608454
-1,594426	-0,055000	0,548893	-0,605843
-1,513420	-0,050000	0,544786	-0,603153
-1,434420	-0,045000	0,540618	-0,600421
-1,356358	-0,040000	0,536386	-0,597676
-1,279055	-0,035000	0,532083	-0,594937
-1,202122	-0,030000	0,527697	-0,592222
-1,125445	-0,025000	0,523215	-0,589549
-1,049124	-0,020000	0,518616	-0,586931
-0,973597	-0,015000	0,513875	-0,584379
-0,899933	-0,010000	0,508957	-0,581886
-0,830472	-0,005000	0,503821	-0,579411
-0,770287	0,000000	0,498427	-0,576811
-0,751024	0,002000	0,496195	-0,575658

Окончание табл. 2.5.2

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,736293	0,004000	0,493925	-0,574369
-0,728480	0,006000	0,491624	-0,572842
-0,733489	0,008000	0,489305	-0,570829
-0,740000	0,008581	0,488631	-0,570044
-0,760000	0,009362	0,487723	-0,568540
-0,780000	0,009606	0,487430	-0,567523
-0,790000	0,009627	0,487399	-0,567111
-0,800000	0,009598	0,478423	-0,566744
-0,820000	0,009428	0,487594	-0,566120
-0,840000	0,009139	0,487891	-0,565615
-0,891981	0,008000	0,489067	-0,564708
-0,957972	0,006000	0,491100	-0,564178
-1,013154	0,004000	0,493096	-0,564131

**2.5.3. Начальные параметры**  
**при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = 1$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $G(\varepsilon_0) = 1$ ;  $C = 0$**

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
Первое решение при $\varepsilon_0 = 8$			
1,000000	-0,06710770	0,578437	-0,6917220
0,980000	-0,06393620	0,575021	-0,6888070
0,960000	-0,06082160	0,571672	-0,6859020
0,940000	-0,05776410	0,568391	-0,6830080
0,920000	-0,05476360	0,565178	-0,6801260
0,900000	-0,05182050	0,562034	-0,6772560
0,880000	-0,04893490	0,558959	-0,6743980
0,860000	-0,04610680	0,555955	-0,6715540
0,840000	-0,04333650	0,553021	-0,6687230
0,820000	-0,04062410	0,550159	-0,6659080
0,800000	-0,03796980	0,547369	-0,6631080
0,780000	-0,03537370	0,544652	-0,6603240

Продолжение табл. 2.5.3

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
0,760000	-0,03283590	0,542008	-0,6575570
0,740000	-0,03035660	0,539439	-0,6548080
0,720000	-0,02793590	0,536944	-0,6520770
0,700000	-0,02557400	0,534525	-0,6493660
0,680000	-0,02327080	0,532182	-0,6466740
0,660000	-0,02102660	0,529916	-0,6440030
0,640000	-0,01884130	0,527728	-0,6413530
0,620000	-0,01671500	0,525618	-0,6387260
0,600000	-0,01464770	0,523588	-0,6361210
0,580000	-0,01263930	0,521637	-0,6335400
0,560000	-0,01068970	0,519768	-0,6309830
0,540000	-0,00879883	0,517980	-0,6284510
0,520000	-0,00696633	0,516274	-0,6259430
0,500000	-0,00519190	0,514652	-0,6234620
0,480000	-0,00347508	0,513114	-0,6210050
0,460000	-0,00181526	0,511661	-0,6185750
0,440000	-0,00021168	0,510294	-0,6161710
0,437307	0,00000000	0,510116	-0,6158490
0,420000	0,00133664	0,509014	-0,6137920
0,400000	0,00283097	0,507822	-0,6114390
0,380000	0,00427286	0,506719	-0,6091090
0,360000	0,00566430	0,505707	-0,6068030
0,340000	0,00700779	0,504787	-0,6045170
0,320000	0,00830648	0,503959	-0,6022500
0,300000	0,00956437	0,503226	-0,5999990
0,280000	0,01078660	0,502588	-0,5977590
0,260000	0,01197970	0,502048	-0,5955240
0,240000	0,01315220	0,501607	-0,5932880
0,220000	0,01431540	0,501266	-0,5910390
0,200000	0,01548410	0,501027	-0,5887660
0,190000	0,01607660	0,500946	-0,5876150

Продолжение табл. 2.5.3

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
0,180000	0,01667860	0,500891	-0,5864510

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
0,170000	0,01729380	0,500861	-0,5852710
0,160000	0,01792670	0,500856	-0,5840710
0,150000	0,01858250	0,500877	-0,5828470
0,140000	0,01926760	0,500922	-0,5815930
0,130000	0,01998950	0,500991	-0,5803050
0,120000	0,02075760	0,501082	-0,5789730
0,110000	0,02158320	0,501193	-0,5775900
0,100000	0,02248030	0,501323	-0,5761460
0,090000	0,02346630	0,501466	-0,5746260
0,080000	0,02456320	0,501618	-0,5730160
0,070000	0,02579850	0,501771	-0,5712960
0,060000	0,02720780	0,501914	-0,5694410
0,050000	0,02883640	0,502033	-0,5674210
0,040000	0,03074380	0,502105	-0,5651980
0,030000	0,03300730	0,502101	-0,5627210
0,020000	0,03572890	0,501975	-0,5599280
0,010000	0,03904250	0,501666	-0,5567400
0,000000	0,04312280	0,501084	-0,5530580
-0,010000	0,04819380	0,500102	-0,5487580
-0,020000	0,05453190	0,498560	-0,5436970
-0,030000	0,06245460	0,496231	-0,5377200
-0,040000	0,07228440	0,492865	-0,5306810
-0,050000	0,08427730	0,488212	-0,5224790
-0,060000	0,09853180	0,482084	-0,5131020
-0,070000	0,11492100	0,474431	-0,5026470
-0,080000	0,13310000	0,465366	-0,4913050
-0,090000	0,15260100	0,455135	-0,4793150
-0,100000	0,17295400	0,444042	-0,4669050
-0,110000	0,19377500	0,432375	-0,4542570
-0,120000	0,21479900	0,420366	-0,4414940

Продолжение табл. 2.5.3

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,130000	0,23587500	0,408179	-0,4286880
-0,140000	0,25693500	0,395919	-0,4158710
-0,150000	0,27797000	0,383643	-0,4030530
-0,160000	0,29900800	0,371375	-0,3902250
-0,170000	0,35911900	0,377369	-0,3200960
-0,180000	0,34129600	0,346862	-0,3644630
-0,190000	0,36267200	0,334584	-0,3514830
-0,195000	0,37344700	0,328428	-0,3449570
-0,200000	0,38429000	0,322258	-0,3384040
-0,205000	0,39521000	0,316068	-0,3318190
-0,210000	0,40621500	0,309856	-0,3252010
-0,215000	0,41731200	0,303617	-0,3185450
-0,220000	0,42850900	0,297349	-0,3118510
-0,225000	0,43981400	0,291046	-0,3051140
-0,230000	0,45123400	0,284706	-0,2983320
-0,235000	0,46277500	0,278324	-0,2915020
-0,240000	0,47444400	0,271898	-0,2846230
-0,245000	0,48624800	0,265423	-0,2776910

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,250000	0,49819200	0,258898	-0,2707050
-0,255000	0,51028400	0,252318	-0,2636620
-0,260000	0,52252900	0,245679	-0,2565610
-0,265000	0,53493300	0,238979	-0,2493980
-0,270000	0,23221600	0,242174	-0,5475010
-0,275000	0,56023800	0,225385	-0,2348840
-0,280000	0,57315000	0,218485	-0,2275280
-0,285000	0,58624100	0,211512	-0,2201050
-0,290000	0,59951700	0,204464	-0,2126110
-0,295000	0,61298100	0,197338	-0,2050470
-0,300000	0,62663900	0,190133	-0,1974100
-0,305000	0,64049500	0,182845	-0,1897000
-0,310000	0,65455200	0,175473	-0,1819140

Продолжение табл. 2.5.3

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,315000	0,66881400	0,168014	-0,1740520
-0,320000	0,68328700	0,160466	-0,1661120
-0,325000	0,69797300	0,152829	-0,158093
-0,330000	0,71287600	0,145098	-0,1499940
-0,335000	0,72799900	0,137274	-0,1418140
-0,340000	0,74334600	0,129353	-0,1335520
-0,345000	0,75892000	0,121336	-0,1252070
-0,350000	0,77472500	0,113219	-0,1167790
-0,355000	0,79076200	0,105002	-0,1082650
-0,360000	0,80703700	0,096683	-0,0996658
-0,365000	0,82355000	0,088261	-0,0909801
-0,370000	0,84030500	0,079734	-0,0822070
-0,375000	0,85730600	0,071102	-0,0733460
-0,380000	0,87455400	0,062363	-0,0643961
-0,385000	0,89205200	0,053516	-0,0553568
-0,390000	0,90980400	0,044560	-0,0462272
-0,395000	0,92781100	0,035494	-0,0370069
-0,400000	0,94607600	0,026317	-0,0276949
-0,405000	0,96460100	0,017027	-0,0182909
-0,410000	0,98339000	0,007625	-0,00879402
-0,414362	1,00000000	0,000671	-0,00043180

Второе, третье решения при  $\varepsilon_0 = 9$

-0,615955	0,00000000	0,500681	-0,5836160
-0,601121	0,00100000	0,499515	-0,5832070
-0,586860	0,00200000	0,498332	-0,5827960
-0,573282	0,00300000	0,497131	-0,5823790
-0,560506	0,00400000	0,495914	-0,5819530
-0,548661	0,00500000	0,494681	-0,5815110
-0,537881	0,00600000	0,493435	-0,5810470
-0,528301	0,00700000	0,492178	-0,5805550
-0,520058	0,00800000	0,490914	-0,5800270

Продолжение табл. 2.5.3

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,513285	0,00900000	0,489646	-0,5794540

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,508119	0,01000000	0,488377	-0,5788260
-0,504704	0,01100000	0,487114	-0,5781340
-0,503210	0,01200000	0,485860	-0,5773650
-0,503857	0,01300000	0,484620	-0,5765040
-0,506973	0,01400000	0,483400	-0,5755310
-0,513097	0,01500000	0,482206	-0,5744150
-0,523242	0,01600000	0,481047	-0,5731050
-0,539734	0,01700000	0,479937	-0,5714870
-0,571220	0,01800000	0,478921	-0,5691590
-0,600000	0,01836930	0,478630	-0,5675110
-0,620000	0,01843050	0,478646	-0,5665500
-0,640000	0,01837040	0,478793	-0,5657110
-0,660000	0,01821090	0,479043	-0,5649740
-0,680000	0,01796790	0,479379	-0,5643290
-0,700000	0,01765370	0,479784	-0,5637640
-0,720000	0,01727790	0,480248	-0,5632720
-0,740000	0,01684820	0,480762	-0,5628460
-0,760000	0,01637110	0,481318	-0,5624800
-0,780000	0,01585210	0,481910	-0,5621690
-0,800000	0,01529550	0,482534	-0,5619090
-0,850000	0,01376480	0,484206	-0,5614560
-0,900000	0,01207130	0,486000	-0,5612470
-0,950000	0,01024960	0,487882	-0,5612440
-1,000000	0,00832510	0,489828	-0,5614160
-1,050000	0,00631681	0,491821	-0,5617390
-1,100000	0,00423911	0,493850	-0,5621950
-1,150000	0,00210288	0,495906	-0,5627670
-1,198105	0,00000000	0,497904	-0,5634150
-1,250000	-0,00231410	0,500076	-0,5642110
-1,300000	-0,00458404	0,502185	-0,5650650

Продолжение табл. 2.5.3

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,350000	-0,00689014	0,504305	-0,5659960
-1,400000	-0,00923022	0,506439	-0,5670010
-1,450000	-0,01160300	0,508585	-0,5680740
-1,500000	-0,01400800	0,510744	-0,5692120
-1,550000	-0,01644540	0,512918	-0,5704130
-1,600000	-0,01891610	0,515109	-0,5716770
-1,650000	-0,02142160	0,517319	-0,5730010
-1,700000	-0,02396400	0,519550	-0,5743870
-1,750000	-0,02654610	0,521807	-0,5758360
-1,800000	-0,02917130	0,524092	-0,5773490
-1,850000	-0,03184390	0,526410	-0,5792890
-1,900000	-0,03456900	0,528767	-0,5805800
-1,950000	-0,03735300	0,531168	-0,5823070
-2,000000	-0,04020280	0,533620	-0,5841160
-2,050000	-0,04312840	0,536328	-0,5860150
-2,100000	-0,04614100	0,538716	-0,5880150
-2,150000	-0,04925510	0,541384	-0,5901290
-2,200000	-0,05248960	0,544153	-0,5923740

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-2,250000	-0,05586950	0,547045	-0,5947760
-2,300000	-0,05942960	0,550092	-0,5973670
-2,350000	-0,06322060	0,553339	-0,6001960
-2,400000	-0,06732240	0,556857	-0,6033430
-2,450000	-0,07187530	0,560771	-0,6069460
-2,500000	-0,07717680	0,565347	-0,6113010
-2,548893	-0,08400000	0,571278	-0,6171970
-2,559290	-0,08600000	0,573029	-0,6190000
-2,567573	-0,08800000	0,574787	-0,6208430
-2,573471	-0,09000000	0,576555	-0,6227320
-2,576608	-0,09200000	0,578333	-0,6246740
-2,576437	-0,09400000	0,580125	-0,6266830
-2,572073	-0,09600000	0,581936	-0,6287770
-2,561983	-0,09800000	0,583773	-0,6309920

Продолжение табл. 2.5.3

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-2,542605	-0,10000000	0,585658	-0,6334070
-2,500349	-0,10200000	0,587662	-0,6363360
-2,249000	-0,10225200	0,587942	-0,6368200
-2,248000	-0,10243600	0,588160	-0,6372300
-2,246000	-0,10265800	0,588467	-0,6379070
-2,244000	-0,10271700	0,588630	-0,6384290
-2,242000	-0,10264300	0,588675	-0,6388210
-2,400000	-0,10245500	0,588620	-0,6391050
-2,350000	-0,10157400	0,588122	-0,6394220
-2,300000	-0,10022300	0,587211	-0,6392920
-2,250000	-0,09850140	0,585976	-0,6388100
-2,200000	-0,09648020	0,584477	-0,6380420
-2,150000	-0,09421250	0,582761	-0,6370370
-2,100000	-0,09174080	0,580864	-0,6358330
-2,050000	-0,08909990	0,578817	-0,6344640
-2,000000	-0,08631890	0,576645	-0,6329550
-1,959829	-0,08400000	0,574822	-0,6316580
-1,926039	-0,08200000	0,573244	-0,6305150
-1,892887	-0,08000000	0,571660	-0,6293540
-1,860260	-0,07800000	0,570071	-0,6281780
-1,828065	-0,07600000	0,568477	-0,6269900
-1,796225	-0,07400000	0,566878	-0,6257890
-1,746468	-0,07200000	0,565274	-0,6245800
-1,733367	-0,07000000	0,563667	-0,6233620
-1,702248	-0,06800000	0,562054	-0,6221370
-1,671281	-0,06600000	0,560437	-0,6209060
-1,640429	-0,06400000	0,558815	-0,6196700
-1,609660	-0,06200000	0,557188	-0,6184310
-1,578947	-0,06000000	0,555556	-0,6118800
-1,502246	-0,05500000	0,551453	-0,6140740
-1,425394	-0,05000000	0,547311	-0,6109600
-1,348108	-0,04500000	0,543127	-0,6078580

Окончание табл. 2.5.3

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,270144	-0,04000000	0,538888	-0,6047840
-1,191290	-0,03500000	0,534587	-0,6017510
-1,111362	-0,03000000	0,530211	-0,5987790
-1,030211	-0,02500000	0,525740	-0,5958880
-0,947759	-0,02000000	0,521151	-0,5931040
-0,914421	-0,01800000	0,519275	-0,5902720
-0,880899	-0,01600000	0,517373	-0,5909750
-0,847221	-0,01400000	0,515440	-0,5899490
-0,830338	-0,01300000	0,514461	-0,5894460
-0,813434	-0,01200000	0,513472	-0,5889510
-0,796520	-0,01100000	0,512476	-0,5884640
-0,779607	-0,01000000	0,511468	-0,5879850
-0,762711	-0,00900000	0,510450	-0,5875140
-0,745848	-0,00800000	0,509420	-0,5870510
-0,729041	-0,00700000	0,508378	-0,5865960
-0,712315	-0,00600000	0,507324	-0,5861490
-0,695703	-0,00500000	0,506255	-0,5857110
-0,679242	-0,00400000	0,505172	-0,5852800
-0,662297	-0,00300000	0,504074	-0,5848560
-0,646964	-0,00200000	0,502960	-0,5844380
-0,631265	-0,00100000	0,501829	-0,5840250
-0,615955	0,00000000	0,500681	-0,5836160

**2.5.4. Начальные параметры**  
**при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = 1$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $G(\varepsilon_0) = 0$ ;  $\varepsilon_0 = 10$**

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
Первое решение			
1,000000	-0,03901850	0,5503040	-0,6683100
0,980000	-0,03709370	0,5482010	-0,6661910
0,960000	-0,03520660	0,5461440	-0,6640850
0,940000	-0,03335750	0,5441350	-0,6619940
0,920000	-0,03154640	0,5421720	-0,6599160

*Продолжение табл. 2.5.4*

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
0,900000	-0,02977360	0,5402560	-0,6578540
0,880000	-0,02803910	0,5383880	-0,6558060
0,860000	-0,02634320	0,5365680	-0,5637750
0,840000	-0,02468600	0,5347970	-0,6517590
0,820000	-0,02306760	0,5330740	-0,6497610
0,800000	-0,02148830	0,5314000	-0,6477800
0,780000	-0,01994830	0,5297760	-0,6458170
0,760000	-0,01844770	0,5282020	-0,6438730
0,740000	-0,01698670	0,5266780	-0,6419490
0,720000	-0,01556540	0,5252040	-0,6400440
0,700000	-0,01418430	0,5237820	-0,6381590
0,680000	-0,01284330	0,5224110	-0,6362960
0,660000	-0,01154270	0,5210930	-0,6344550
0,640000	-0,01028270	0,5198270	-0,6326360
0,620000	-0,00906355	0,5186130	-0,6308410
0,600000	-0,00788533	0,5174540	-0,6290690



$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
0,580000	-0,00674826	0,5163480	-0,6273210
0,560000	-0,00565252	0,5152970	-0,6255990
0,540000	-0,00459826	0,5143010	-0,6239020
0,520000	-0,00358560	0,5133610	-0,6222310
0,500000	-0,00261466	0,5124780	-0,6205780
0,480000	-0,00168550	0,5116520	-0,6189710
0,460000	-0,00079815	0,5108840	-0,6173820
0,441148	0,00000000	0,5102140	-0,6159100
0,420000	0,00085133	0,5095260	-0,6142880
0,400000	0,00161379	0,5089380	-0,6127840
0,380000	0,00233512	0,5084130	-0,6113070
0,360000	0,00301583	0,5079520	-0,6098590
0,340000	0,00365665	0,5075570	-0,6084380
0,320000	0,00425859	0,5072290	-0,6070440
0,300000	0,00482309	0,5069730	-0,6056740
0,280000	0,00535213	0,5067900	-0,6043260

Продолжение табл. 2.5.4

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
0,260000	0,00584847	0,5066840	-0,6029980
0,240000	0,00631605	0,5066600	-0,6016840
0,220000	0,00676046	0,5067250	-0,6003780
0,200000	0,00718991	0,5068840	-0,5990700
0,190000	0,00740265	0,5070020	-0,5984120
0,180000	0,00761671	0,5071480	-0,5977470
0,170000	0,00783470	0,5073230	-0,5970740
0,160000	0,00805992	0,5075290	-0,5963880
0,150000	0,00829663	0,5077680	-0,5956860
0,140000	0,00855029	0,5080420	-0,5949620
0,130000	0,00882814	0,5083540	-0,5942090
0,120000	0,00913980	0,5087070	-0,5939800
0,110000	0,00949834	0,5090360	-0,5925760
0,100000	0,00992199	0,5095460	-0,5916700
0,090000	0,01043550	0,5100380	-0,5906770
0,080000	0,01107620	0,5105780	-0,5895670
0,070000	0,01189770	0,5111630	-0,5883010
0,060000	0,01298170	0,5117820	-0,5868170
0,050000	0,01445470	0,5124080	-0,5850290
0,040000	0,01651710	0,5129790	-0,5828030
0,030000	0,01949270	0,5133700	-0,5799390
0,020000	0,02390500	0,5133270	-0,5761280
0,010000	0,03058100	0,5123620	-0,5709090
0,000000	0,04070400	0,5096230	-0,5636400
-0,010000	0,05548000	0,5039600	-0,5536820
-0,020000	0,07482900	0,4947470	-0,5410810
-0,030000	0,09636700	0,4830430	-0,5271320
-0,040000	0,11745600	0,4707040	-0,5133000
-0,050000	0,13704500	0,4588170	-0,5002120
-0,060000	0,15514800	0,4476760	-0,4879070
-0,070000	0,17209600	0,4372410	-0,4762390
-0,080000	0,18823400	0,4273790	-0,4650410

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,090000	0,20385800	0,4179440	-0,4541680
-0,100000	0,21920500	0,4088080	-0,4435010
-0,110000	0,23446700	0,3998590	-0,4329430
-0,120000	0,24980000	0,3910000	-0,4224150
-0,130000	0,26533100	0,3821510	-0,4118530
-0,140000	0,28116900	0,3732430	-0,4012050
-0,150000	0,29740300	0,3642160	-0,3904240
-0,160000	0,31411100	0,3550180	-0,3794740
-0,170000	0,33135700	0,3456070	-0,3683220
-0,180000	0,34920000	0,3359430	-0,5569430
-0,190000	0,36768500	0,3259950	-0,3453140
-0,200000	0,38685500	0,3157350	-0,3334170
-0,210000	0,40674400	0,3051390	-0,3213660
-0,220000	0,42738200	0,2941900	-0,3087600
-0,230000	0,44879200	0,2828700	-0,2959780
-0,235000	0,45979400	0,2770670	-0,2894700
-0,240000	0,47099700	0,2711670	-0,2828820
-0,245000	0,48240300	0,2651690	-0,2762130
-0,250000	0,49401400	0,2590710	-0,2694650
-0,255000	0,50583200	0,2527840	-0,2626350
-0,260000	0,51785800	0,2467440	-0,2557230
-0,265000	0,53009400	0,2401740	-0,2487280
-0,270000	0,54254200	0,2336700	-0,2416510
-0,275000	0,55520300	0,2270640	-0,2344910
-0,280000	0,56807800	0,2203550	-0,2272470
-0,285000	0,58116900	0,2135410	-0,2199190
-0,290000	0,59447700	0,2066240	-0,2125060
-0,295000	0,60800300	0,1996020	-0,2050100
-0,300000	0,62174800	0,1924750	-0,1974280
-0,305000	0,63571400	0,1852430	-0,1897620
-0,310000	0,64990300	0,1779060	-0,1820100
-0,315000	0,66431500	0,1704640	-0,1741720

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,320000	0,67895100	0,1629150	-0,1662490
-0,325000	0,69381300	0,1552610	-0,1582400
-0,330000	0,70890300	0,1475010	-0,1501440
-0,335000	0,72422200	0,1396340	-0,1419620
-0,340000	0,73977200	0,1316610	-0,1336920
-0,345000	0,75555300	0,1235810	-0,1253360
-0,350000	0,77156700	0,1153940	-0,1168920
-0,355000	0,78781700	0,1071000	-0,1083600
-0,360000	0,80430400	0,0986979	-0,0997395
-0,365000	0,82102900	0,0901881	-0,0910307
-0,370000	0,83799400	0,0815701	-0,0822330
-0,375000	0,85520200	0,0728436	-0,0733460
-0,380000	0,87265400	0,0640081	-0,0643692
-0,385000	0,89035100	0,0550634	-0,0553024
-0,390000	0,90829700	0,0460090	-0,0461450

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,395000	0,92649300	0,0368445	-0,0368967
-0,400000	0,94494100	0,0275693	-0,0275569
-0,402000	0,95239100	0,0238282	-0,0237953
-0,404000	0,95988200	0,0200693	-0,0200190
-0,406000	0,96741400	0,0162926	-0,0162279
-0,408000	0,97498700	0,0124980	-0,0124220
-0,410000	0,98260200	0,0086855	-0,0086014
-0,412000	0,99025700	0,0048551	-0,0047658
-0,414000	0,99795500	0,0010067	-0,00091544
-0,4145296	1,00000 -0	0,00001531	-0,00010622

Второе, третье решения

-2,000000	-0,02574660	0,5214790	-0,5755300
-1,950000	-0,02395490	0,5199390	-0,5745400
-1,900000	-0,02216840	0,5184000	-0,5735710
-1,850000	-0,02038600	0,5168610	-0,5726260
-1,800000	-0,01860710	0,5153220	-0,5717030
-1,750000	-0,01683080	0,5137820	-0,5708030

Продолжение табл. 2.5.4

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,700000	-0,01505650	0,5122390	-0,5699260
-1,650000	-0,01328340	0,5106920	-0,5690740
-1,600000	-0,01151100	0,5091400	-0,5682460
-1,550000	-0,00973868	0,5075840	-0,5674440
-1,500000	-0,00796602	0,5060200	-0,5666700
-1,450000	-0,00619265	0,5044490	-0,5669240
-1,400000	-0,00441830	0,5028680	-0,5652090
-1,350000	-0,00264284	0,5012780	-0,5645260
-1,300000	-0,00086633	0,4996770	-0,5638790
-1,250000	0,00091058	0,4980640	-0,5632710
-1,200000	0,00268848	0,4964380	-0,5627040
-1,150000	0,00446532	0,4947990	-0,5621850
-1,100000	0,00624009	0,4931440	-0,5617180
-1,050000	0,00801075	0,4914750	-0,5613100
-1,000000	0,00977446	0,4897910	-0,5609700
-0,950000	0,01152720	0,4880930	-0,5607070
-0,900000	0,01326360	0,4863810	-0,5605350
-0,850000	0,01497600	0,4846600	-0,5604680
-0,800000	0,01674000	0,4827380	-0,5605020
-0,750000	0,01828340	0,4812130	-0,5607350
-0,700000	0,01984420	0,4795080	-0,5611270
-0,650000	0,02130850	0,4778420	-0,5617430
-0,600000	0,02263660	0,4762460	-0,5626360
-0,550000	0,02377130	0,4747730	-0,5638780
-0,500000	0,02462800	0,4735060	-0,5655630
-0,450000	0,02507830	0,4725780	-0,5678170
-0,400000	0,02491720	0,4722240	-0,5708160
-0,350321	0,02380000	0,4728690	-0,5747840
-0,345005	0,02360000	0,4730280	-0,5752810
-0,340146	0,02340000	0,4731930	-0,5757500
-0,335665	0,02320000	0,4733640	-0,5761960

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,331502	0,02300000	0,4735390	-0,5766210

Продолжение табл. 2.5.4

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,327615	0,02280000	0,4737190	-0,5770280
-0,323967	0,02260000	0,4739030	-0,5774190
-0,320531	0,02240000	0,4740900	-0,5777970
-0,317284	0,02220000	0,4742810	-0,5781620
-0,314207	0,02200000	0,4744740	-0,5785160
-0,311284	0,02180000	0,4746710	-0,5788590
-0,308502	0,02160000	0,4748700	-0,5791920
-0,305849	0,02140000	0,4750720	-0,5795170
-0,303316	0,02120000	0,4752760	-0,5798330
-0,300894	0,02100000	0,4754830	-0,5801400
-0,298575	0,02080000	0,4756920	-0,5804410
-0,296354	0,02060000	0,4759030	-0,5807340
-0,294223	0,02040000	0,4761160	-0,5810210
-0,292179	0,02020000	0,4763320	-0,5813020
-0,290216	0,02000000	0,4765490	-0,5815760
-0,297391	0,01900000	0,4776870	-0,5819830
-0,274357	0,01800000	0,4788240	-0,5840350
-0,268575	0,01700000	0,4800260	-0,5851000
-0,264029	0,01600000	0,4812700	-0,5860700
-0,260664	0,01500000	0,4825540	-0,5869540
-0,258480	0,01400000	0,4838780	-0,5877540
-0,257527	0,01300000	0,4852420	-0,5884770
-0,257899	0,01200000	0,4866450	-0,5891210
-0,259736	0,01100000	0,4880880	-0,5896890
-0,263221	0,01000000	0,4895660	-0,5901830
-0,268572	0,00900000	0,4910770	-0,5906040
-0,276016	0,00800000	0,4926110	-0,5909560
-0,285754	0,00700000	0,4941590	-0,5912460
-0,297907	0,00600000	0,4957070	-0,5914850
-0,312456	0,00500000	0,4972380	-0,5916890
-0,329224	0,00400000	0,4987390	-0,5918730
-0,347891	0,00300000	0,5001970	-0,5920550

Продолжение табл. 2.5.4

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,368063	0,00200000	0,5016070	-0,5922490
-0,389340	0,00100000	0,5029650	-0,5924640
-0,411368	0,00000000	0,5042740	-0,5927080
-0,433863	-0,00100000	0,5055360	-0,5929830
-0,456610	-0,00200000	0,5067570	-0,5932910
-0,479455	-0,00300000	0,5079410	-0,5936300
-0,502289	-0,00400000	0,5090920	-0,5940000
-0,525041	-0,00500000	0,5102130	-0,5943980
-0,547662	-0,00600000	0,5113100	-0,5948220
-0,570121	-0,00700000	0,5123830	-0,5952700
-0,592400	-0,00800000	0,5134370	-0,5957410
-0,614488	-0,00900000	0,5144720	-0,5962330
-0,636380	-0,01000000	0,5154910	-0,5967430

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-0,658075	-0,01100000	0,5164960	-0,5972710
-0,679575	-0,01200000	0,5174880	-0,5978150
-0,700883	-0,01300000	0,5184670	-0,5983740
-0,722004	-0,01400000	0,5194350	-0,5989460
-0,742941	-0,01500000	0,5203940	-0,5995310
-0,763699	-0,01600000	0,5213430	-0,6001280
-0,804703	-0,01800000	0,5232160	-0,6013540
-0,845056	-0,02000000	0,5250590	-0,6026170
-0,884796	-0,02200000	0,5268760	-0,6039120
-0,923960	-0,02400000	0,5286710	-0,6052360
-0,962578	-0,02600000	0,5304460	-0,6065840
-1,000683	-0,02800000	0,5322030	-0,6079540
-1,038298	-0,03000000	0,5339440	-0,6093420
-1,075450	-0,03200000	0,5356720	-0,6107460
-1,112160	-0,03400000	0,5373870	-0,6126490
-1,148448	-0,03600000	0,5390910	-0,6135960
-1,184335	-0,03800000	0,5407840	-0,6150370
-1,219838	-0,04000000	0,5424690	-0,6164870
-1,254974	-0,04200000	0,5441460	-0,6179450

Окончание табл. 2.5.4

$H(\varepsilon_0)$	$C$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$
-1,289760	-0,04400000	0,5458150	-0,6194100
-1,324211	-0,04600000	0,5474790	-0,6208790
-1,358342	-0,04800000	0,5491370	-0,6223530
-1,392169	-0,05000000	0,5507900	-0,6238310
-1,425706	-0,05200000	0,5524380	-0,6253100
-1,458967	-0,05400000	0,5540820	-0,6267920
-1,491967	-0,05600000	0,5557230	-0,6282740
-1,524721	-0,05800000	0,5573620	-0,6297560
-1,557243	-0,06000000	0,5589970	-0,6312380
-1,589548	-0,06200000	0,5606310	-0,6327190
-1,621652	-0,06400000	0,5622630	-0,6341980
-1,653570	-0,06600000	0,5638930	-0,6356740
-1,685319	-0,06800000	0,5655220	-0,6371480
-1,716916	-0,07000000	0,5671500	-0,6386170
-1,748378	-0,07200000	0,5687770	-0,6400830
-1,779724	-0,07400000	0,5704040	-0,6415440
-1,810975	-0,07600000	0,5720310	-0,6429990
-1,842151	-0,07800000	0,5736570	-0,6444490
-1,873276	-0,08000000	0,5752830	-0,6458930
-1,904373	-0,08200000	0,5769100	-0,6473290
-1,935469	-0,08400000	0,5785360	-0,6487580
-1,966593	-0,08600000	0,5801620	-0,6501780
-1,997778	-0,08800000	0,5817890	-0,6515900
-2,029058	-0,09000000	0,5834150	-0,6529920

Заметим также, что при безразмерном расстоянии между дисками в пределах от  $\varepsilon_0 = 8 \dots 30$  как параметре все функции  $C = f(H(\varepsilon_0))$  при  $C = 0$  проходят практически через одну точку  $K$ . Это видно из рис. 2.5.3, 2.5.4 и 2.5.7.

Координата точки  $K$  лежит вблизи решения задачи Кармана, когда  $H_\infty = W = 0,442237$  [14]. Для иллюстрации поведения коэффициента  $C$  на рис. 2.5.6 и 2.5.7 изображена функция  $C = f(H(\varepsilon_0))$  при  $\varepsilon_0 = 20$ .

### 2.5.2. ВТОРОЕ–ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЯ

Второе–третье решения рассматриваемой задачи графически представлены на многочисленных рис. 2.5.8 – 2.5.22, где изображены зависимости коэффициента  $C$  в функции от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре на разных интервалах изменения  $C$  и  $H(\varepsilon_0)$ .

При  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^* = 14,726211$  и  $C = 0,00351736$  мы имеем смыкание второго и третьего решений, когда  $H(0) = H(\varepsilon_0) = 0$ . Уменьшение  $\varepsilon_0 < \varepsilon_0^* = 14,726211$  приводит к "деградации" второго–третьего решений (рис. 2.5.20) и функциональные линии  $C = f(H(\varepsilon_0))$  представляют собой замкнутые кривые, а при  $\varepsilon_0 < 8,32$  таких решений не существует.

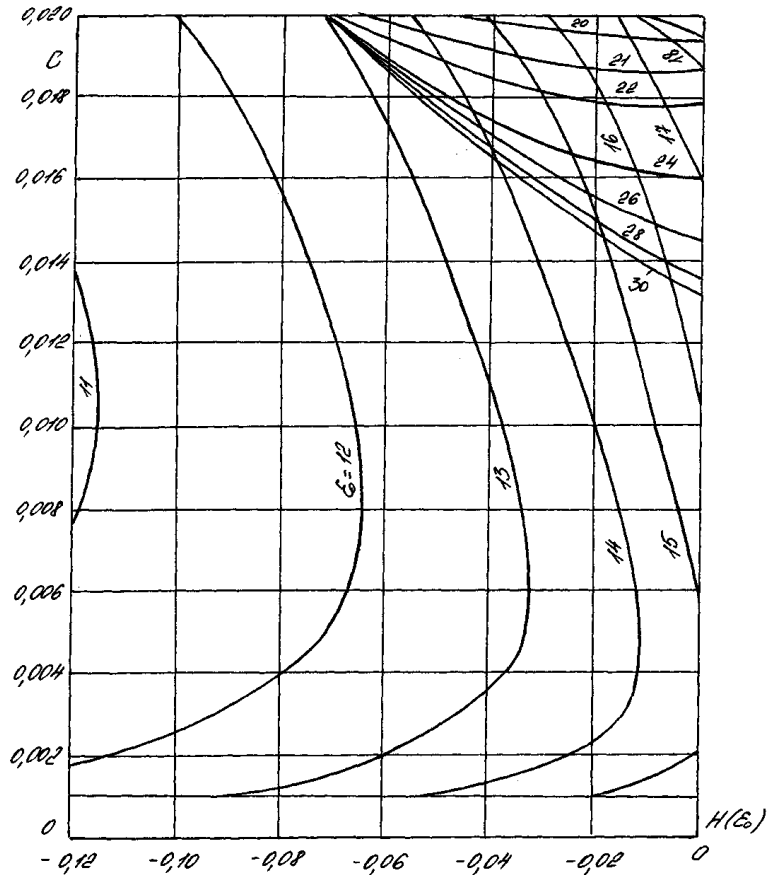


Рис. 2.5.8. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

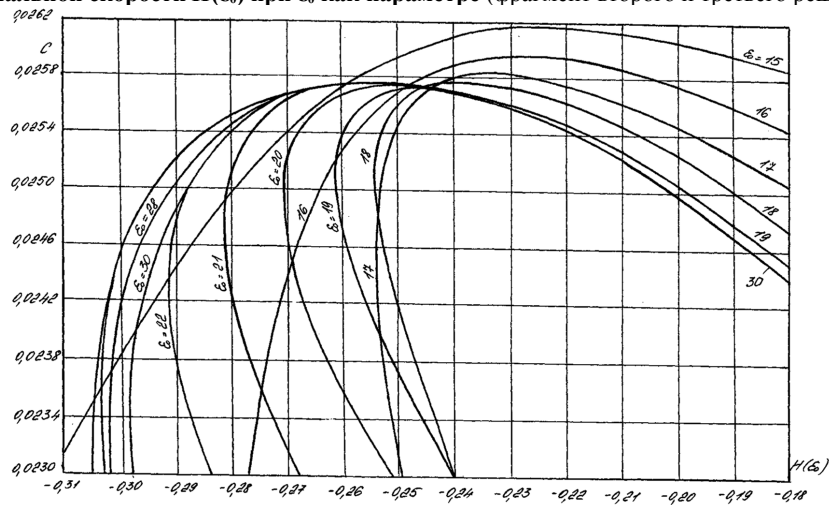


Рис. 2.5.9. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

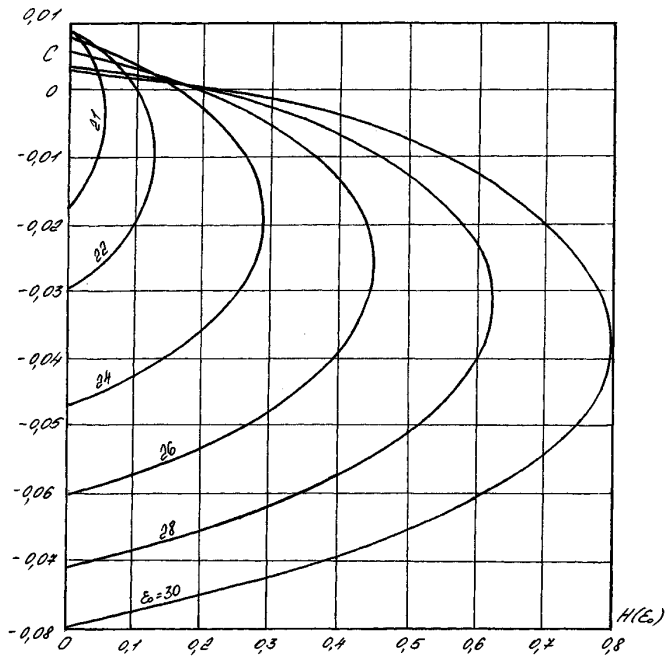


Рис. 2.5.10. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

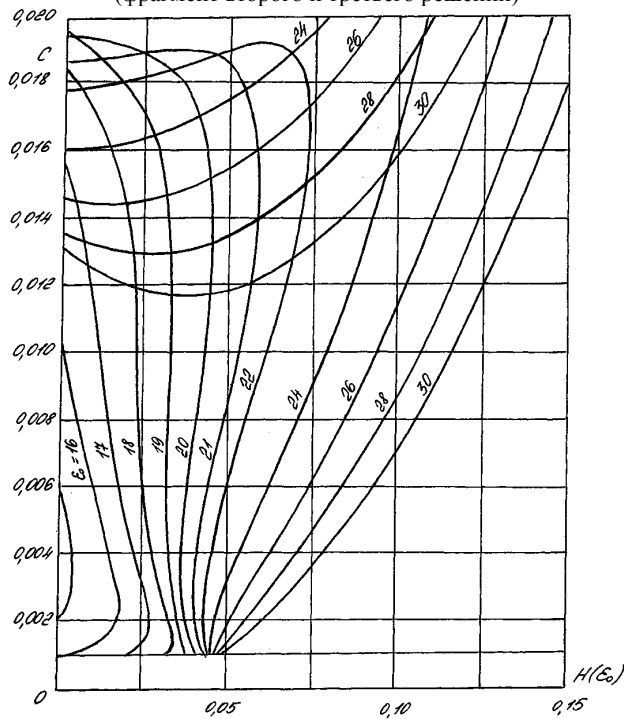


Рис. 2.5.11. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

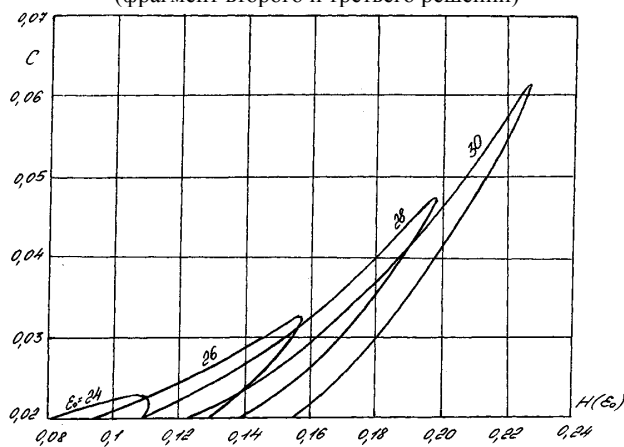


Рис. 2.5.12. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре  
(фрагмент второго и третьего решений)

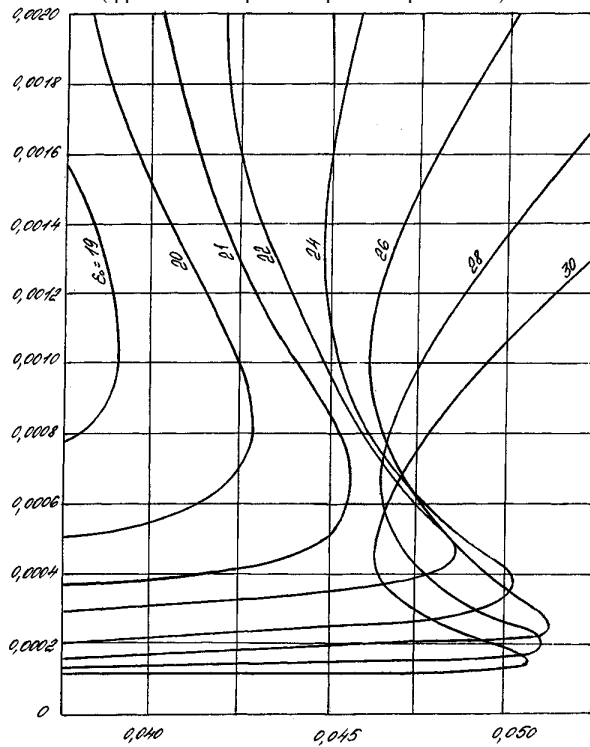


Рис. 2.5.13. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной  
аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре  
(фрагмент второго и третьего решений)

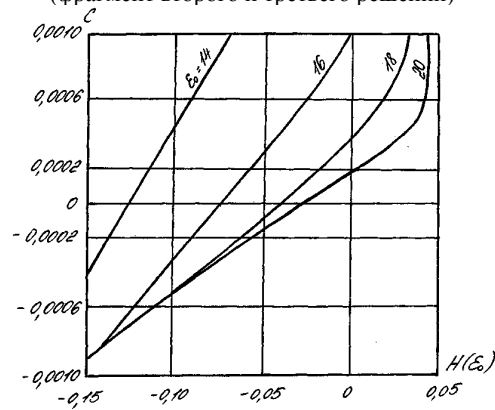


Рис. 2.5.14. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной  
аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре  
(фрагмент второго и третьего решений)

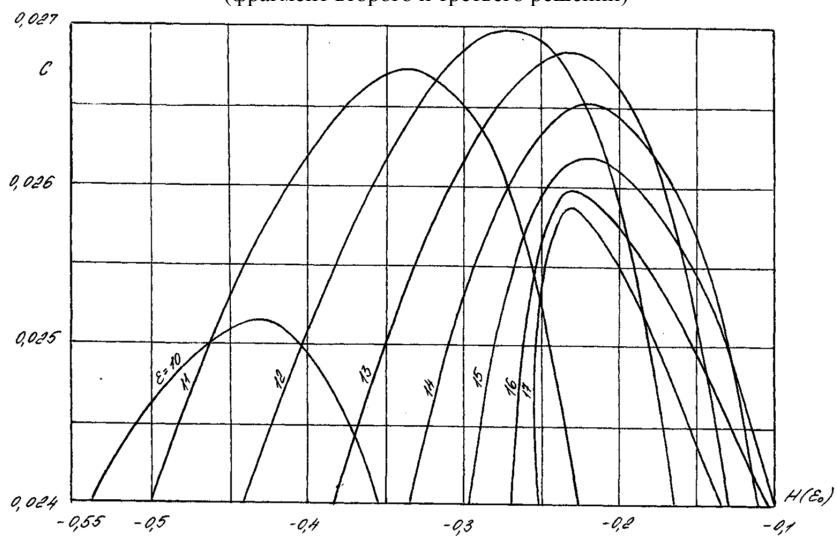


Рис. 2.5.15. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной  
аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре  
(фрагмент второго и третьего решений)



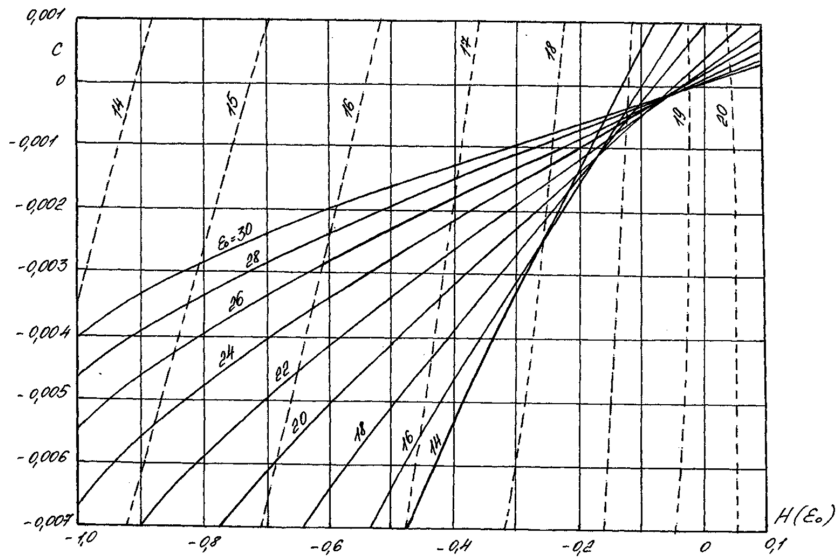


Рис. 2.5.16. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

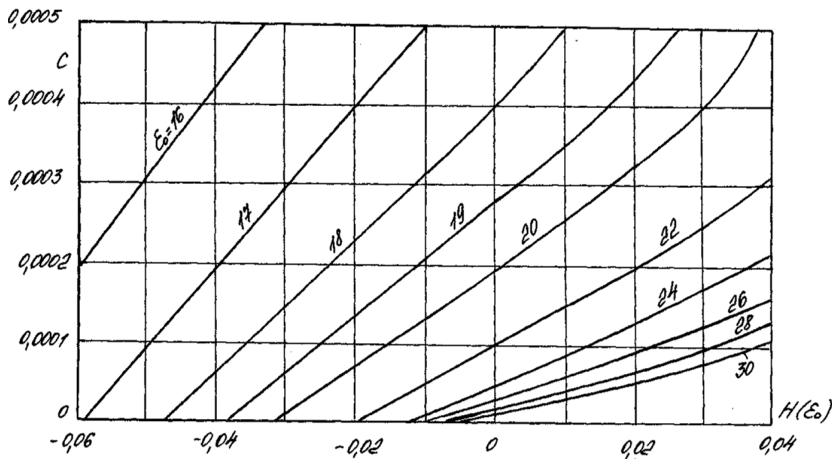


Рис. 2.5.17. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

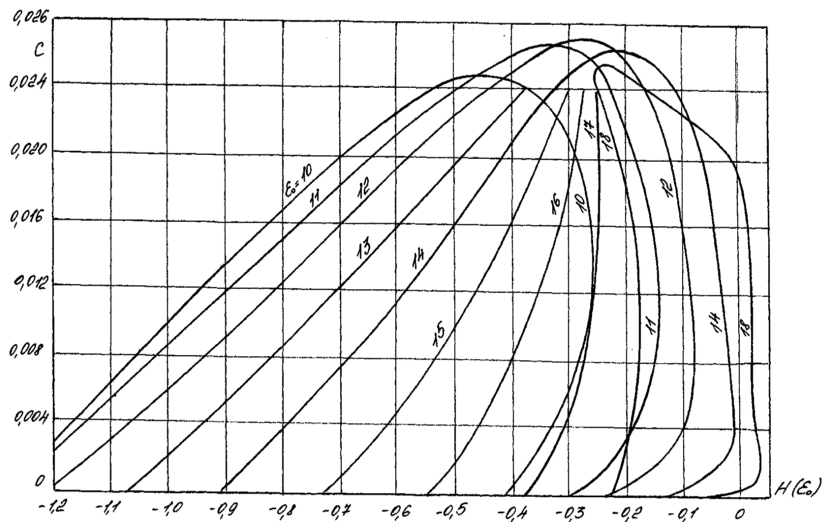


Рис. 2.5.18. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

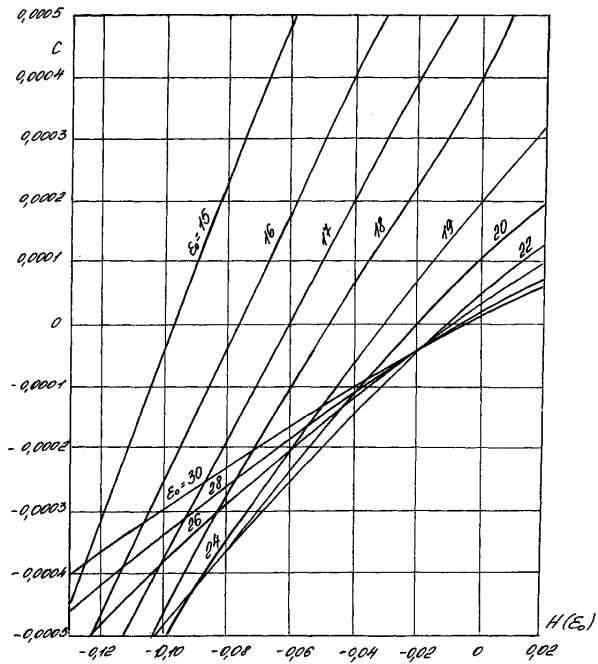


Рис. 2.5.19. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\epsilon_0)$  при  $\epsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

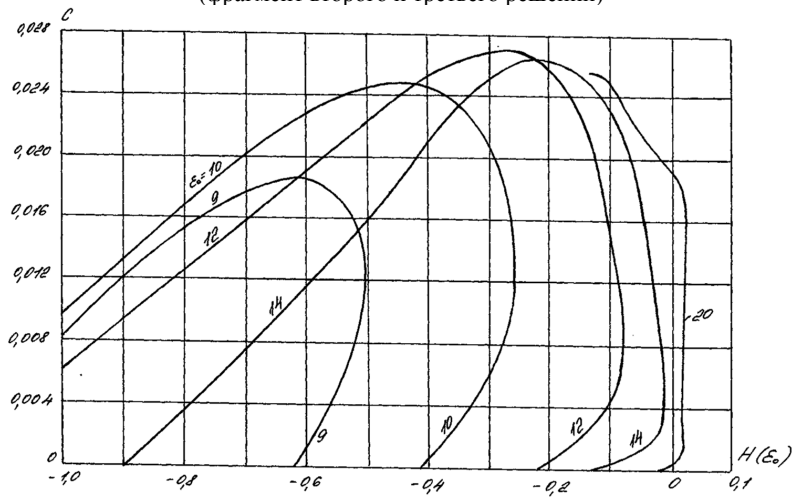


Рис. 2.5.20. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\epsilon_0)$  при  $\epsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

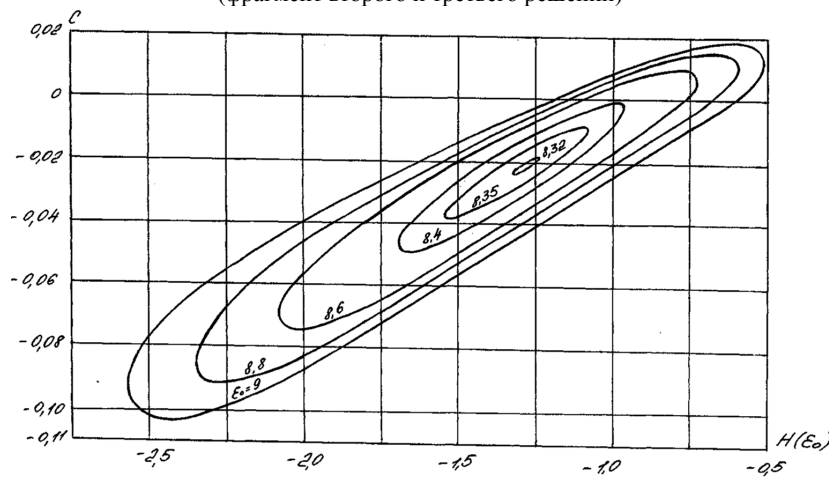


Рис. 2.5.21. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(\epsilon_0)$  при  $\epsilon_0$  как параметре (фрагмент второго и третьего решений)

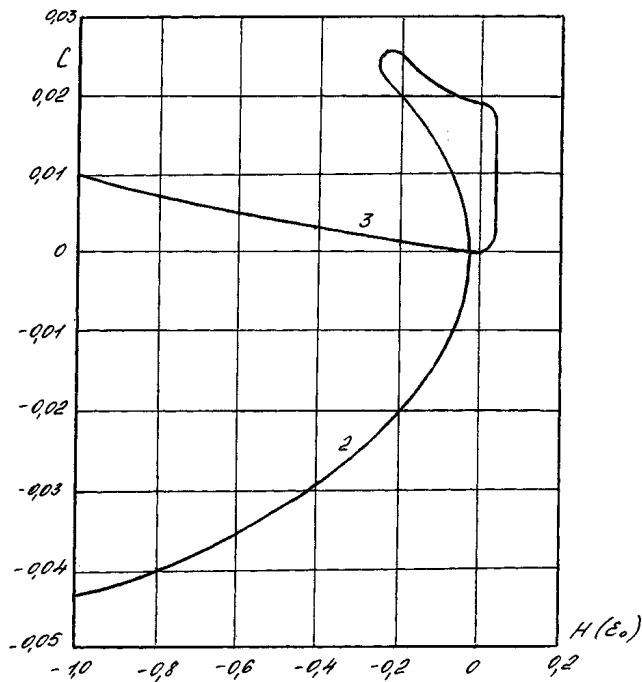


Рис. 2.5.22. Зависимость коэффициента  $C$  от  $H(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0 = 20$ :  
2, 3 – второе и третье решения

Если увеличивать  $\varepsilon_0 > \varepsilon_0^* = 14,726211$ , то функции  $C = f(H(\varepsilon_0))$  будут дважды пересекать ординату  $H(\varepsilon_0) = 0$ , т.е. тогда существуют второе–третье решения, переходящие одно в другое при некоторых значениях  $H(\varepsilon_0)$  и  $\varepsilon_0$ . При  $\varepsilon_0 = 20,332995$  получены три значения коэффициента  $C$ , когда  $H(\varepsilon_0) = 0$ . Если  $\varepsilon_0 > 20,332995$  таких значений имеем пять. Это означает, что мы плавно переходим в четвертое–пятое решения. Поверхность функции  $F(\varepsilon_0, H(\varepsilon_0), C) = 0$  непрерывна для решений 2-3-4-5. Первое решение имеет с этой поверхностью разрыв.

Некоторые вторые–третьи решения представлены в табл. 2.5.1 – 2.5.4 при  $\varepsilon_0 = 8,32; 8,35; 8,4; 8,6; 8,8; 9,0; 10,0$ . Отдельно мы выделили решение при  $\varepsilon_0 = 20$ , которое графически для наглядности на протяженном интервале изображено на рис. 2.5.22. Из рисунка видим, что второе и третье решения переходят друг в друга, имеются несколько экстремумов, имеется своеобразная петля. Другие значения функций при  $\varepsilon_0 = \text{const}$  в табличном виде не представлены в связи с их громоздкостью.

### 2.5.3. ЧЕТВЕРТОЕ–ПЯТОЕ РЕШЕНИЯ

Четвертое–пятое решения рассмотрим на примере  $\varepsilon_0 = 24$ . Начало координат разместим на поверхности неподвижного перфорированного диска. Граничные условия тогда будут

$$\text{при } \varepsilon = 0 \quad H'(0) = 0, G(0) = 0;$$

$$\text{при } \varepsilon = \varepsilon_0 \quad H(\varepsilon_0) = 0, H'(\varepsilon_0) = 0, G(\varepsilon_0) = 1.$$

Результаты интегрирования изображены на рис. 2.5.23 и представлены в табл. 2.5.5. Четвертое и пятое решения смыкаются при  $H(0) \approx -0,2884$ ; второе и четвертое при  $H(0) \approx 0,303025$ . Значения начальных параметров, при которых функция пересекает ось ординат  $H(0) = 0$ :

- пятое решение

$$C = -0,0469159; H''(0) = A = 0,539552; G'(0) = B = -0,588573;$$

$$H''(\varepsilon_0) = a = -0,194052; G'(\varepsilon_0) = b = -0,0510984;$$

- четвертое решение

$$C = 0,00765092; H''(0) = A = 0,492133; G'(0) = B = -0,561723;$$

$$H''(\varepsilon_0) = a = 0,00928074; G'(\varepsilon_0) = b = 0,0104426;$$

- второе решение

$$C = 0,0159855; H''(0) = A = 0,484869; G'(0) = B = -0,600267;$$

$$H''(\varepsilon_0) = a = 0,0423497; G'(\varepsilon_0) = b = 0,0347459;$$

- третье решение

$$C = 0,0000545326; H''(0) = A = 0,510652; G'(0) = B = -0,610248;$$

$$H''(\varepsilon_0) = a = -0,00268245; G'(\varepsilon_0) = b = 0,00026667.$$

Значения начальных параметров при разных  $\varepsilon_0 = \text{const}$  графически можно частично наблюдать на рисунках п. 2.5.2.

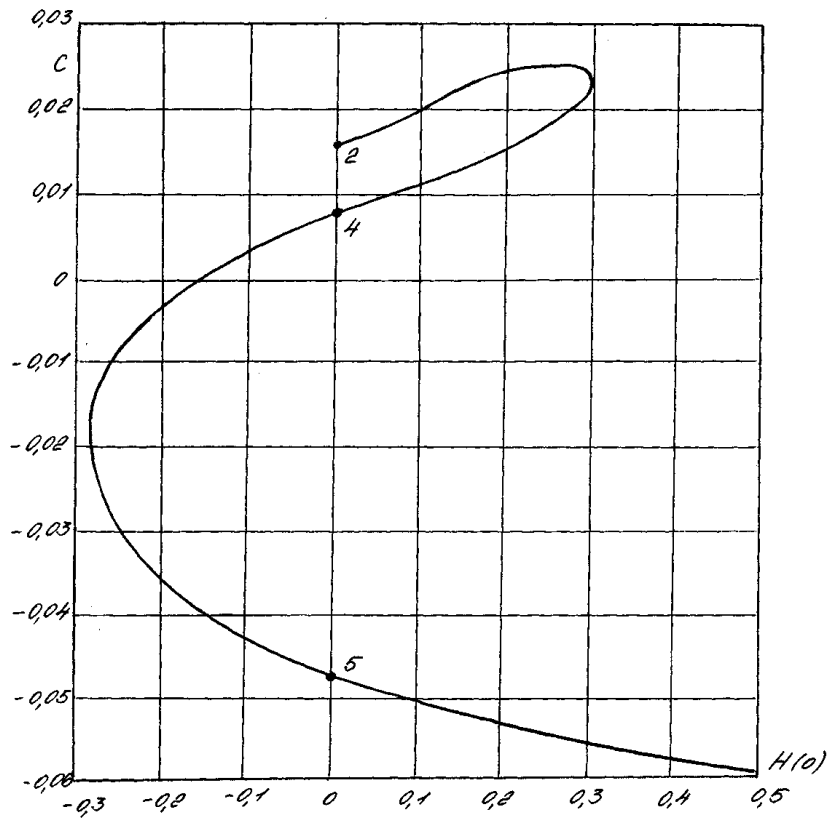


Рис. 2.5.23. Зависимость коэффициента давления  $C$  от безразмерной аксиальной скорости  $H(0)$  при  $\varepsilon_0 = 24$ :  
2, 4, 5 – второе, четвертое и пятое решения

## 2.6. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ НЕПОДВИЖНЫМИ СПЛОШНЫМ И ПЕРФОРИРОВАННЫМИ ДИСКАМИ

В рассматриваемом случае изучаем течение жидкости в зазоре между сплошным и перфорированным дисками при отсосе среды через перфорацию. В отличие от ранее исследованных задач мы имеем задачу, когда угловая скорость дисков равна нулю,  $\omega = 0$ . Поэтому подстановка Т. Кармана

$$u = \omega r H'(\varepsilon);$$

$$v = \omega r G(\varepsilon);$$

$$w = -2\sqrt{\omega v} H(\varepsilon); \quad (2.6.1)$$

$$p = -C \frac{\omega^2 r^2}{2} \rho - 2\rho \omega v P(\varepsilon),$$

где

$$\varepsilon = z \sqrt{\frac{\omega}{v}}$$

не имеет смысла.

За основу берем уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности в осесимметричной цилиндрической системе координат для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости [7]:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6.2)$$

где  $r, \varphi, z$  – цилиндрическая система координат;  $u, v, w$  – соответственно радиальная, окружная и осевая скорости;  $v$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\rho$  – плотность жидкости.

Граничные условия для решения задачи и уравнений (2.6.2) будут:

$$\text{при } z = 0 \quad u = 0, v = 0, w = 0;$$

$$\text{при } z = z_0, \quad u = 0, v = 0, \varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{C}} z_0 \sqrt{\frac{a}{v}}. \quad (2.6.3)$$

Для приведения системы дифференциальных уравнений (2.6.2) вместо подстановки (2.6.1) применим аналогичную:

$$u = arH'(\varepsilon);$$

$$v = arG(\varepsilon);$$

$$w = -2\sqrt{av} H(\varepsilon); \quad (2.6.4)$$

$$p = -C \frac{a^2 r^2}{2} \rho - 2arv P(\varepsilon);$$

$$\varepsilon = z \sqrt{\frac{a}{v}},$$

где  $a$  – некоторый коэффициент, имеющий размерность,  $c^{-1}$ ;  $C$  – коэффициент давления;  $H'(\varepsilon), G(\varepsilon), H(\varepsilon)$  – соответственно безразмерные радиальная, окружная и осевая скорости как функции безразмерной осевой координаты  $\varepsilon$ .

Подстановка уравнений (2.6.4) в систему уравнений (2.6.2) приводит к уже нам известной системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} H''' &= C + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'); \\ P' &= HH' + H'', \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

где штрихи означают производные по  $\varepsilon$ .

Граничные условия для решения системы дифференциальных уравнений (2.6.4):

$$\text{при } \varepsilon = 0 \quad H = 0, H' = 0, G = 0; \quad (2.6.6)$$

$$\text{при } \varepsilon = \varepsilon_0 \quad H' = 0, G = 0.$$

Если вместо замены переменных применить

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{C}arH'(\varepsilon); \\ v &= \sqrt{C}arG(\varepsilon); \\ w &= -2\sqrt[4]{C}\sqrt{av}H(\varepsilon); \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

$$p = -C \frac{a^2 r^2}{2} \rho - 2\sqrt{C}arvP(\varepsilon);$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[4]{C}} z \sqrt{\frac{a}{v}},$$

то система дифференциальных уравнений (2.6.2) приведет к виду:

$$\begin{aligned} H''' &= 1 + H'H' - G^2 - 2HH''; \\ G'' &= 2(H'G - HG'); \\ P' &= HH' + H''. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Граничные условия (2.6.6) остаются в силе.

Численное интегрирование дифференциальных уравнений приводит к трем решениям. Начальные параметры изображены на рис. 2.6.1 – 2.6.5, а также представлены в табл. 2.6.1. Отмечаем, что первые два решения сходятся в точке  $M$  с координатами  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^* \approx 1,97593$ ,  $H(\varepsilon_0) \approx -1,612097$ ,  $H''(0) = A \approx -1,672575$ ,  $H''(\varepsilon_0) = a \approx 5,031452$ ,  $G(0) = G(\varepsilon_0) = 0$ .

Значит, первое-второе решения существуют при  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^* \leq 1,97593$  и в этом интервале изменения  $\varepsilon_0$  тангенциальное движение жидкости в зазоре между дисками отсутствует.

Если  $\varepsilon_0 > 1,97593$ , то в жидкости возникает, в соответствии с третьим решением, вращательное движение, в безразмерном виде тангенциальная составляющая окружной скорости  $G(\varepsilon)$  не равна нулю. Как показали расчеты, третье решение "стартует" из окрестности точки  $M$  (рис. 2.6.1 – 2.6.5). На рис. 2.6.2, 2.6.4 и 2.6.5 показаны в увеличенном масштабе изменения начальных параметров вблизи точки  $M$ .

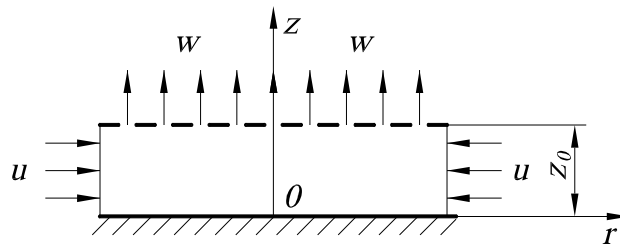


Рис. 2.6.1. Схема течения жидкости

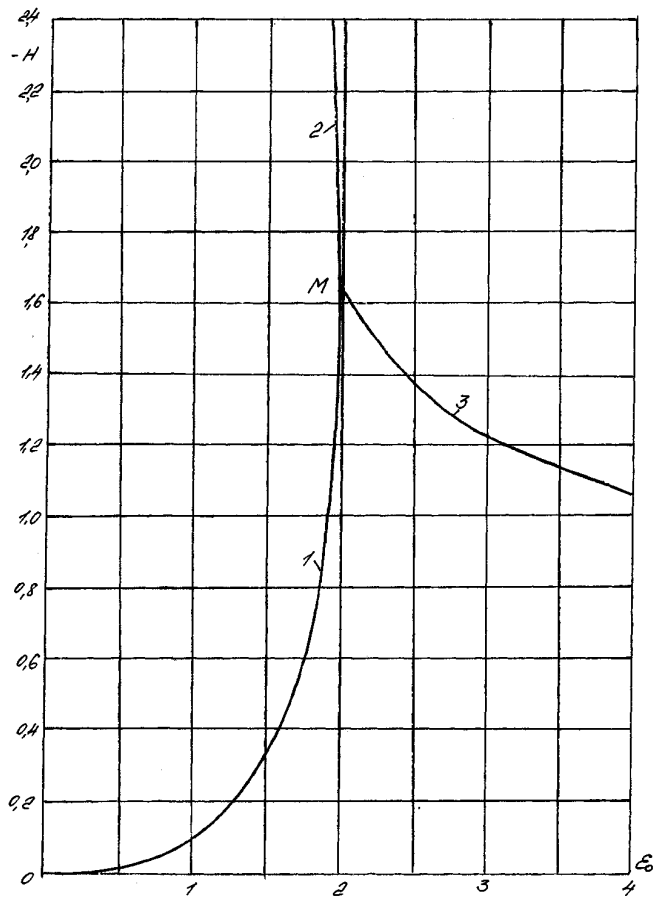


Рис. 2.6.2. Зависимость безразмерной осевой скорости  $H(\epsilon_0)$  от безразмерного расстояния между дисками  $\epsilon_0$ :  
1, 2, 3 – первое, второе, третье решения

Все приведенные результаты расчетов (табл. 2.6.1) выполнены при коэффициенте давления  $C = 1$ , что соответствует системе дифференциальных уравнений (2.6.8). Если коэффициент давления не равен единице, то все параметры табл. 2.6.1 следует пересчитать по формулам

$$H_1 = \sqrt[4]{CH}; \quad H_1'' = \sqrt[4]{C^3 H''}; \quad (2.6.9)$$

$$G_1' = \sqrt[4]{C^3 G'}; \quad \epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{C}} \epsilon.$$

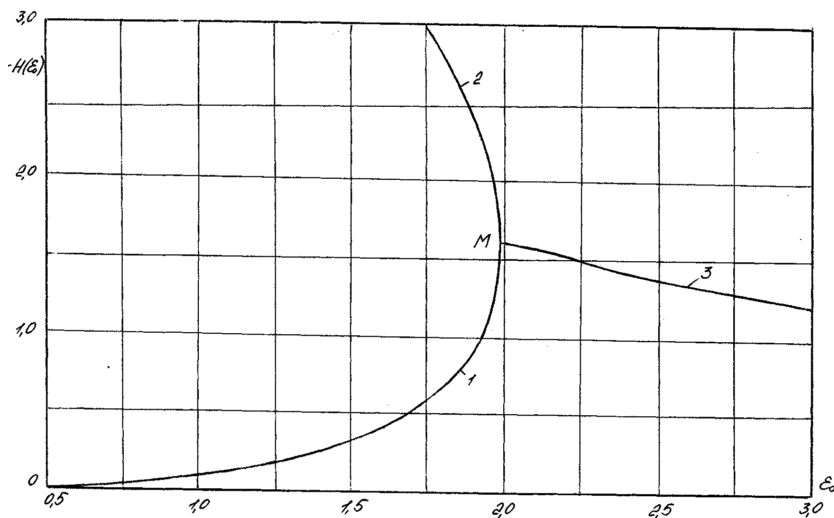


Рис. 2.6.3. Зависимость безразмерной аксиальной скорости  $H(\epsilon_0)$  и безразмерной аксиальной координаты  $\epsilon_0$  (фрагмент, 1, 2, 3 – первое, второе, третье решения)

Это относится ко всем трем решениям.

В третьем решении при  $\varepsilon_0 > 9,5$  (табл. 2.6.1) мы положили коэффициенты  $H''(0) = A = -0,941971$ ,  $G'(0) = B = -0,772885$  как бы постоянными. Они совпадают полностью с такими же коэффициентами решения задачи Бедевадта. В действительности при увеличении  $\varepsilon_0$  они изменяются, но в разрядах цифр больше шести. Эти изменения находятся в результате численных решений задачи.

Для сравнения и анализа мы приводим три численных значения безразмерных скоростей, первое—второе при  $\varepsilon_0 = 1,9$ , третье при  $\varepsilon_0 = 2,0$ . На рис. 2.6.6, 2.6.7 показаны скорости графически, а также в табл. 2.6.2 – 2.6.4 представлены численно. Из рисунков видна идентичность поведения функций. Например,  $H'(\varepsilon)$  изменяется во всех трех случаях параболически. Отметим также, что экстремумы функций существенно отличаются:

$$H_{1\min} \approx -0,931651; \quad H'_{1\min} \approx -0,728042;$$

$$H_{2\min} \approx -2,672861; \quad H'_{2\min} \approx -2,168074;$$

$$H_{3\min} \approx -1,628316; \quad H'_{3\min} \approx -1,216837.$$

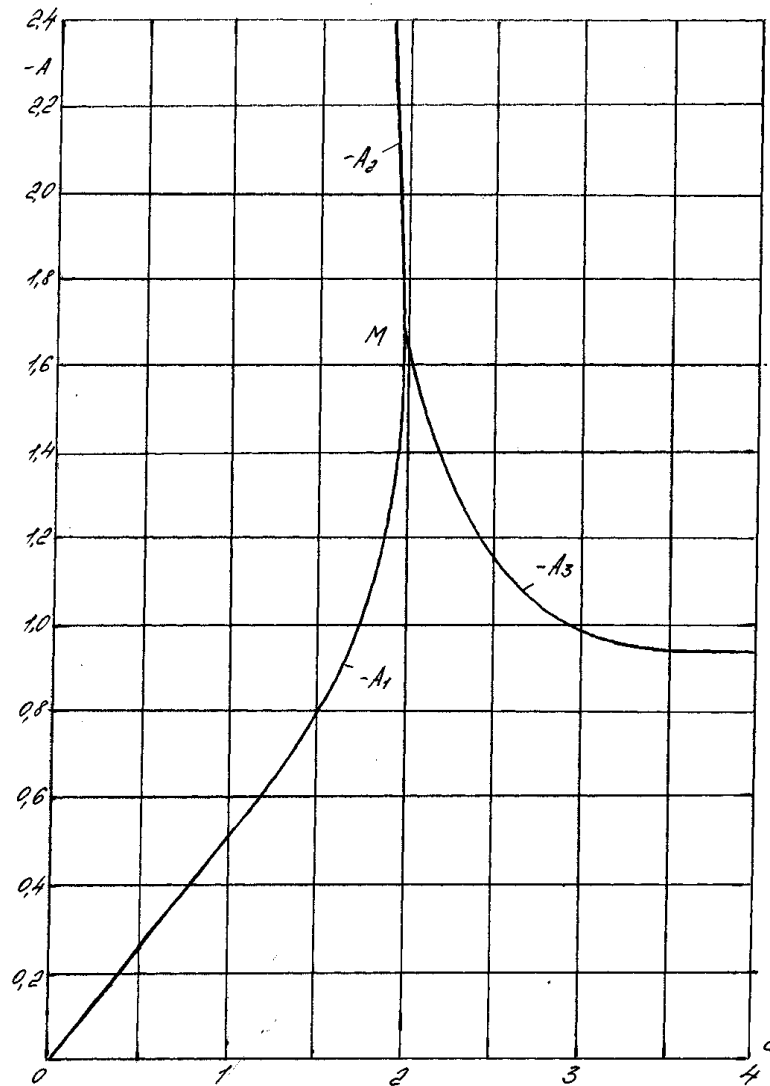


Рис. 2.6.4. Зависимость безразмерного радиального коэффициента трения  $A = H''(0)$  от безразмерной координаты  $\varepsilon_0$

Второе решение имеет наибольшие экстремумы, поэтому оно вряд ли может осуществляться на практике, т.е. при изменении  $\varepsilon_0$  первое решение при  $\varepsilon_0^*$  переходит в третье.



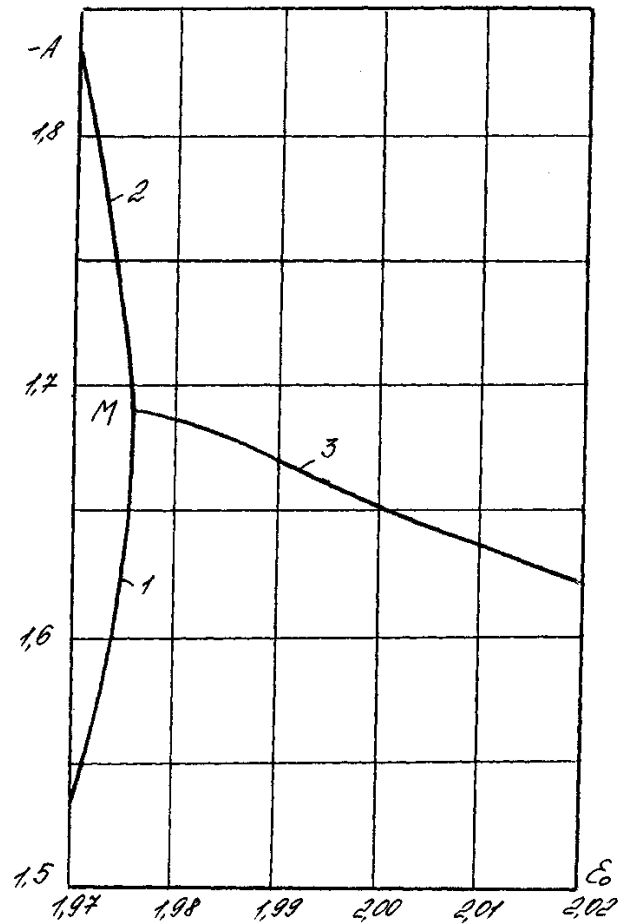


Рис. 2.6.5. Зависимость безразмерного радиального коэффициента трения  $A = H''(0)$  от безразмерной координаты  $\epsilon_0$  (фрагмент, 1, 2, 3 – первое, второе, третье решения)

Возникшая при  $\epsilon_0 = 2$  тангенциальная составляющая скорости  $G(\epsilon)$  пока численно мала,  $G_{\max} = 0,277968$ . Будет  $G(\epsilon)$  положительной или отрицательной, т.е. правое или левое вращение жидкости в зазоре на основании дифференциальной системы уравнений (2.6.8) не имеет значения. Правое-левое вращение возникает вероятно.

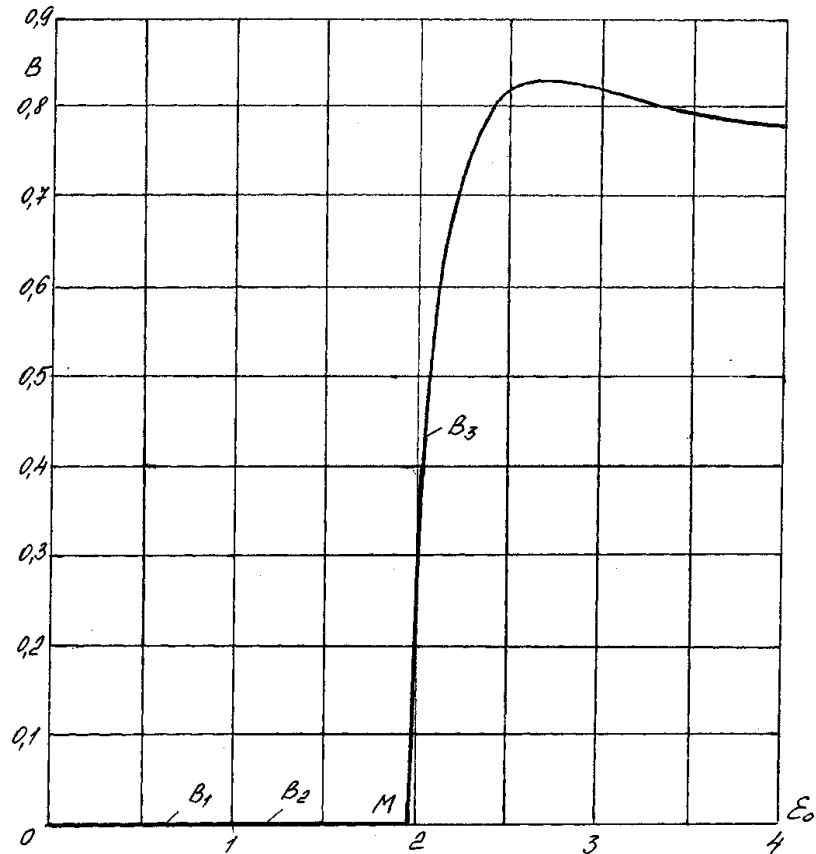


Рис. 2.6.6. Зависимость безразмерного тангенциального коэффициента трения  $B = G'(0)$  от безразмерного расстояния  $\varepsilon_0$

Поведение функций безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H''(\varepsilon)$  и  $G(\varepsilon)$  мы изучили при  $\varepsilon_0 = 20$ . Зависимости их от  $\varepsilon$  показаны на рис. 2.6.8, 2.6.9 и представлены в табл. 2.6.5. Результаты численного интегрирования на интервале  $0 < \varepsilon < 10$  полностью совпадают с решением Бевеадта. При  $\varepsilon > 10$  функции скоростей постепенно отклоняются от решения Бевеадта и при  $\varepsilon > 18$  резко изменяются, чтобы выполнить граничные условия при  $\varepsilon_0 = 20$ ,  $H' = 0$ ,  $G = 0$ . Аксиальная безразмерная скорость достигает значения  $H(\varepsilon_0) = H(20) = -0,866082$  (рис. 2.6.9).

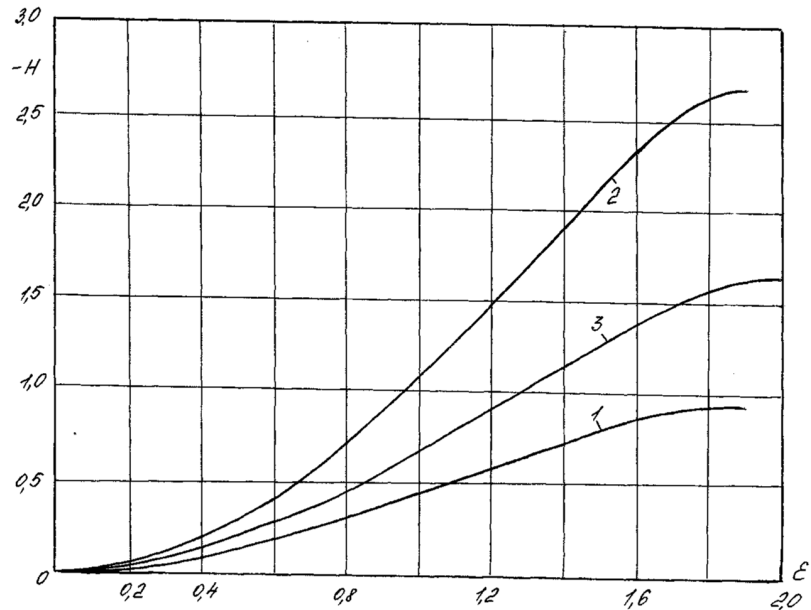


Рис. 2.6.7. Функции безразмерной аксиальной скорости  $H(\varepsilon)$ :

1, 2 – первое, второе решения при  $\varepsilon_0 = 1,9$ ;

3 – третье решение при  $\varepsilon_0 = 2,0$

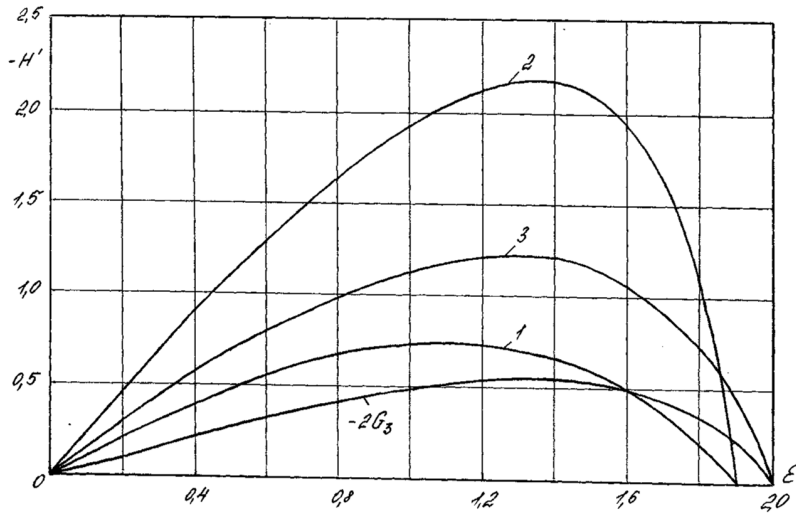


Рис. 2.6.8. Функции безразмерной радиальной скорости  $H'(\varepsilon)$  и тангенциальной скорости  $G_3(\varepsilon)$ :  
1, 2 – первое, второе решения при  $\varepsilon_0 = 1,9$ ; 3 – третье решение при  $\varepsilon_0 = 2,0$

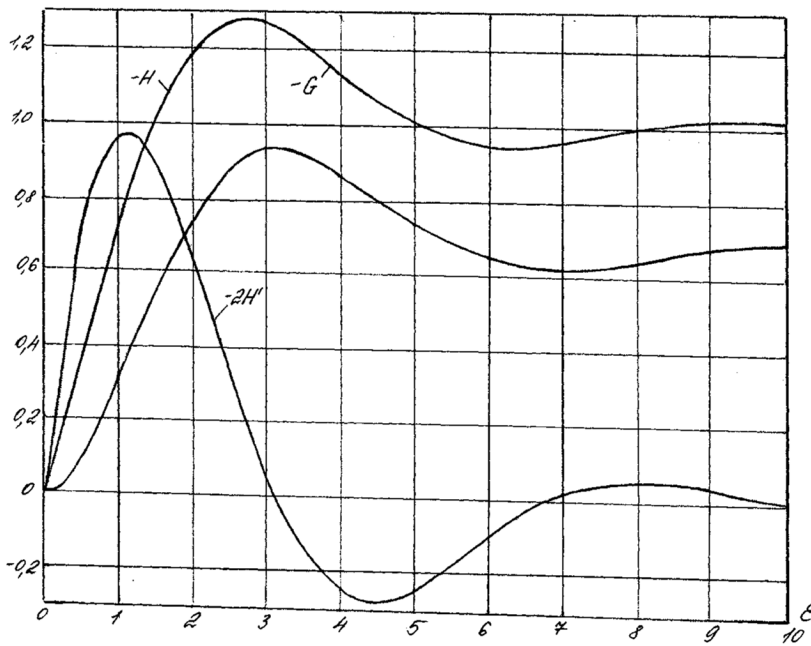


Рис. 2.6.9. Функции безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$   
на начальном участке третьего решения при  $\varepsilon_0 = 20$

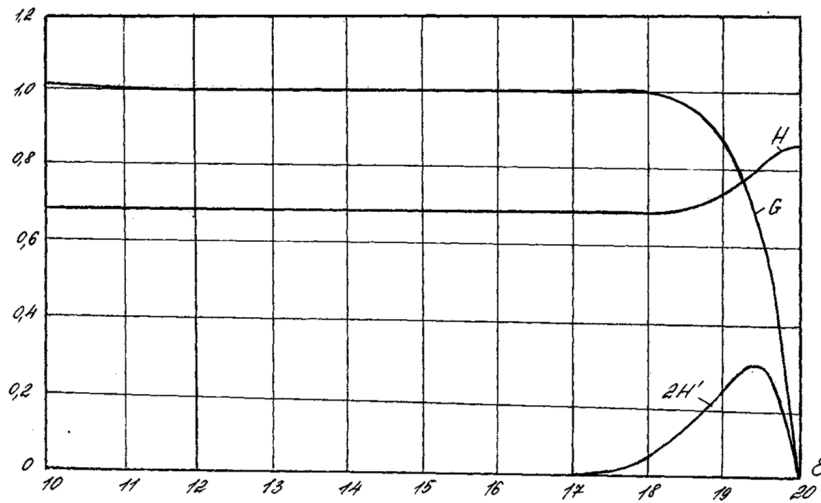


Рис. 2.6.10. Функции безразмерных скоростей  $H(\varepsilon)$ ,  $H'(\varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$   
на конечном участке третьего решения при  $\varepsilon_0 = 20$   
2.6.1. Граничные параметры  
при  $H(0) = 0$ ;  $H'(0) = 0$ ;  $G(0) = 0$ ;  $H'(\varepsilon_0) = 0$ ;  $G(\varepsilon_0) = 0$ ;  $C = 1$

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$
Первое решение при $G'(0) = B = 0; G'(\varepsilon_0) = b = 0$			
0,1000	-0,050000	-0,000083	0,050000
0,2000	-0,100002	-0,000667	0,100006
0,3000	-0,150016	-0,002250	0,150047
0,4000	-0,200569	-0,005336	0,200199
0,5000	-0,250174	-0,010431	0,250609
0,6000	-0,300434	-0,018050	0,301521
0,7000	-0,350941	-0,028732	0,353304
0,8000	-0,401845	-0,043047	0,406492
0,9000	-0,453353	-0,061625	0,461832
1,0000	-0,505745	-0,085186	0,520365
1,0500	-0,532388	-0,099097	0,551260
1,1000	-0,559404	-0,114592	0,583538
1,1500	-0,586864	-0,131813	0,617475
1,2000	-0,614851	-0,150922	0,653406
1,2500	-0,643464	-0,172111	0,691737
1,3000	-0,672819	-0,195601	0,732971
1,3500	-0,703060	-0,221660	0,777730
1,4000	-0,734364	-0,250611	0,826808
1,4500	-0,766951	-0,282855	0,881222
1,5000	-0,801100	-0,318896	0,942313
1,5200	-0,815276	-0,334515	0,969003
1,5400	-0,829786	-0,350892	0,997185
1,5600	-0,844663	-0,368085	1,027022
1,5800	-0,859944	-0,386157	1,058702
1,6000	-0,875668	-0,405178	1,092442
1,6200	-0,891882	-0,425233	1,128495
1,6400	-0,908643	-0,446414	1,167158
1,6600	-0,926012	-0,468833	1,208785
1,6800	-0,944064	-0,492617	1,253795
1,7000	-0,962888	-0,517918	1,302696

*Продолжение табл. 2.6.1*

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$
1,7200	-0,982589	-0,544918	1,356108
1,7400	-1,003298	-0,573836	1,414798
1,7600	-1,025172	-0,601942	1,479730
1,7800	-1,048413	-0,638570	1,552138
1,8000	-1,073276	-0,675151	1,633631
1,8200	-1,100100	-0,715243	1,726370
1,8400	-1,129340	-0,759599	1,833337
1,8600	-1,161640	-0,809272	1,958825
1,8800	-1,197954	-0,865810	2,109331
1,8900	-1,218057	-0,897361	2,197019
1,9000	-1,239799	-0,931651	2,295414
1,9100	-1,263553	-0,969268	2,407171
1,9200	-1,289841	-1,011043	2,563608
1,9300	-1,319446	-1,058206	2,687865
1,9400	-1,353618	-1,112718	2,871181
1,9500	-1,394603	-1,178073	3,104784
1,9600	-1,447239	-1,261760	3,423686
1,9700	-1,527269	-1,387959	3,950427
1,9710	-1,538894	-1,406151	4,031077
1,9720	-1,551948	-1,426530	4,122870
1,9730	-1,567030	-1,450009	4,230544

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$
1,9740	-1,585327	-1,478394	4,363480
1,9750	-1,609997	-1,516484	4,546686
1,9751	-1,613139	-1,521319	4,570340
1,9752	-1,616488	-1,526470	4,595636
1,9753	-1,620087	-1,532000	4,622916
1,9754	-1,624000	-1,538007	4,652677
1,9755	-1,628319	-1,544631	4,685664
1,9756	-1,633197	-1,552105	4,723082
1,9757	-1,638914	-1,560851	4,767153
1,9758	-1,646110	-1,571824	4,822963
1,9759	-1,657352	-1,588976	4,910911

Продолжение табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$
Второе решение при $G'(0) = B = 0$ ; $G'(\varepsilon_0) = b = 0$			
1,9759	-1,680386	-1,623927	5,093950
1,9758	-1,692057	-1,641555	5,188137
1,9756	-1,705827	-1,662283	5,300493
1,9754	-1,715882	-1,677370	5,383380
1,9752	-1,724253	-1,689897	5,452917
1,9750	-1,731602	-1,700871	5,514364
1,9740	-1,760572	-1,743914	5,760216
1,9720	-1,802587	-1,805700	6,126810
1,9700	-1,835946	-1,854214	6,426168
1,9650	-1,903512	-1,950981	7,054231
1,9600	-1,960082	-2,030456	7,601669
1,9550	-2,010866	-2,100610	8,109196
1,9500	-2,058019	-2,164745	8,593562
1,9450	-2,102678	-2,224612	9,063583
1,9400	-2,145531	-2,281267	9,524580
1,9350	-2,187032	-2,335408	9,980058
1,9300	-2,227497	-2,387522	10,432484
1,9250	-2,267159	-2,437967	10,88368
1,9200	-2,306196	-2,487014	11,335029
1,9150	-2,344746	-2,534873	11,787648
1,9100	-2,382920	-2,581713	12,242243
1,9050	-2,420809	-2,627672	12,700123
1,9000	-2,458488	-2,672861	13,161365
1,8950	-2,496023	-2,717376	13,626703
1,8900	-2,533468	-2,761296	14,096623
1,8850	-2,570870	-2,804692	14,571555
1,8800	-2,608271	-2,847621	15,051893
1,8750	-2,645709	-2,890137	15,537993
1,8700	-2,683217	-2,932285	16,030188
1,8650	-2,720824	-2,934105	16,528786
1,8600	-2,758558	-3,015633	17,034080

Продолжение табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$
1,8550	-2,796445	-3,056901	17,546349
1,8500	-2,834506	-3,097938	18,065857
1,8450	-2,872764	-3,138771	18,592862
1,8400	-2,911239	-3,179424	19,127614
1,8350	-2,949948	-3,219918	19,670354
1,8300	-2,988912	-3,260273	20,221321

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$
1,8250	-3,028145	-3,300509	20,780748
1,8200	-3,067665	-3,340641	21,348866
1,8150	-3,107487	-3,380685	21,925904
1,8100	-3,147625	-3,420657	22,512209
1,8050	-3,188095	-3,460570	23,107748
1,8000	-3,228910	-3,500436	23,712807
1,7950	-3,270084	-3,540269	24,327792
1,7900	-3,311630	-3,580078	24,952831
1,7985	-3,353561	-3,619875	25,588151
1,7800	-3,395890	-3,659670	26,233983
1,7750	-3,438630	-3,699473	26,890557
1,7700	-3,481793	-3,739292	27,558107
1,7650	-3,525392	-3,779137	28,236868
1,7600	-3,569438	-3,819014	28,927080
1,7550	-0,361394	-3,858934	29,628982
1,7500	-3,658921	-3,898902	30,342819
1,7450	-3,704383	-3,938926	31,068838
1,7400	-3,750340	-3,979014	31,807291
1,7350	-3,796806	-4,019172	32,558432
1,7300	-3,843791	-4,059406	33,322520
1,7250	-3,891309	-4,099724	34,099817
1,7200	-3,939370	-4,140130	34,890590
1,7150	-3,987988	-4,180130	35,951119
1,7100	-4,037175	-4,221233	36,513658
1,7050	-4,086943	-4,261941	37,346509
1,7000	-4,137304	-4,302761	38,193951

Продолжение табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
Третье решение					
1,976	-1,694454	-0,028384	-1,645615	5,209141	0,112950
1,977	-1,692706	-0,065146	-1,644488	5,201515	0,259245
1,978	-1,690961	-0,087562	-1,644154	5,193905	0,348456
1,979	-1,689221	-0,105238	-1,643425	5,186310	0,418808
1,980	-1,687484	-0,120282	-1,642696	5,178730	0,478690
1,990	-1,670331	-0,218118	-1,635462	5,103769	0,868288
2,000	-1,653562	-0,281493	-1,628316	5,030301	1,120879
2,050	-1,575141	-0,466847	-1,593854	4,684104	1,861567
2,100	-1,504993	-0,573318	-1,561409	4,370097	2,289532
2,150	-1,442178	-0,645647	-1,530856	4,084586	2,582411
2,200	-1,385883	-0,697673	-1,502080	3,824366	2,795065
2,250	-1,335400	-0,736077	-1,474797	3,586646	2,953946
2,300	-1,290111	-0,764742	-1,449449	3,368986	3,074402
2,350	-1,249475	-0,786172	-1,425409	3,169251	3,166309
2,400	-1,213015	-0,802089	-1,402773	2,985564	3,236454
2,450	-1,180312	-0,813734	-1,381465	2,816270	3,289707
2,500	-1,150994	-0,822033	-1,361412	2,659904	3,329683
2,550	-1,124733	-0,827688	-1,342547	2,515170	3,359122
2,600	-1,101233	-0,831250	-1,324806	2,380916	3,380142
2,650	-1,080234	-0,833151	-1,308126	2,256114	3,394401
2,700	-1,061499	-0,833737	-1,292448	2,139849	3,403206
2,750	-1,044818	-0,833289	-1,277771	2,031302	3,407597
2,800	-1,030000	-0,832034	-1,263869	1,929740	3,408403
2,850	-1,016870	-0,830590	-1,250857	1,834506	3,406283
2,900	-1,005273	-0,827818	-1,238624	1,745011	3,401765

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
2,950	-0,995063	-0,825139	-1,227114	1,660728	3,395261
3,000	-0,986110	-0,822227	-1,216275	1,581185	3,387097
3,050	-0,978293	-0,819170	-1,206052	1,505957	3,377521
3,100	-0,971500	-0,816039	-1,196391	1,434669	3,366720
3,150	-0,965629	-0,812894	-1,187238	1,366984	3,354827

Продолжение табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
3,200	-0,960585	-0,809784	-1,178540	1,302608	3,341934
3,250	-0,956280	-0,806747	-1,170245	1,241277	3,328097
3,300	-0,952633	-0,803813	-1,162299	1,182765	3,313345
3,350	-0,949590	-0,801008	-1,154651	1,126873	3,297685
3,400	-0,947019	-0,798347	-1,147253	1,073431	3,281106
3,450	-0,944196	-0,795844	-1,140057	1,022295	3,263588
3,500	-0,943213	-0,793506	-1,133018	0,973343	3,245105
3,550	-0,941845	-0,791337	-1,126095	0,926474	3,225626
3,600	-0,940769	-0,789336	-1,119249	0,881606	3,205125
3,650	-0,939941	-0,787502	-1,112245	0,838671	3,183577
3,700	-0,939323	-0,785829	-1,105656	0,797615	3,160966
3,750	-0,938880	-0,784311	-1,098851	0,758397	3,137285
3,800	-0,938583	-0,782941	-1,092009	0,720981	3,112536
3,850	-0,938404	-0,781709	-1,085114	0,685341	3,086731
3,900	-0,938320	-0,780607	-1,078151	0,651454	3,059895
3,950	-0,938312	-0,779624	-1,071109	0,619299	3,032061
4,000	-0,938364	-0,778751	-1,063984	0,588859	3,003275
4,050	-0,938461	-0,777977	-1,056771	0,560117	2,973589
4,100	-0,938591	-0,777295	-1,049472	0,533052	2,943066
4,150	-0,938745	-0,776695	-1,042090	0,507647	2,911774
4,200	-0,938141	-0,776169	-1,034630	0,483878	2,879787
4,250	-0,939093	-0,775709	-1,027099	0,461722	2,847185
4,300	-0,939271	-0,775307	-1,019507	0,441151	2,814050
4,350	-0,939458	-0,774957	-1,011865	0,422135	2,780464
4,400	-0,939637	-0,774653	-1,004184	0,404643	2,746514
4,450	-0,939812	-0,774390	-0,996477	0,388639	2,712283
4,500	-0,939979	-0,774162	-0,988758	0,374085	2,677856
4,550	-0,940139	-0,773965	-0,981041	0,360942	2,643316
4,600	-0,940289	-0,773796	-0,973339	0,349169	2,608740
4,650	-0,940431	-0,773650	-0,965666	0,338722	2,574209
4,700	-0,940563	-0,773525	-0,958038	0,329556	2,539795
4,750	-0,940686	-0,773418	-0,950468	0,321626	2,505569

Продолжение табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
4,800	-0,940800	-0,773327	-0,942969	0,314885	2,471160
4,850	-0,940905	-0,773249	-0,935556	0,309287	2,437948
4,900	-0,941001	-0,773182	-0,928241	0,304783	2,404468
4,950	-0,941090	-0,773125	-0,921037	0,301328	2,371838
5,000	-0,941172	-0,773078	-0,913956	0,298873	2,339486
5,050	-0,941246	-0,773037	-0,907010	0,297372	2,307669
5,100	-0,941314	-0,773003	-0,900210	0,296778	2,276429
5,150	-0,941376	-0,772974	-0,893566	0,297047	2,245809
5,200	-0,941433	-0,772950	-0,887090	0,298133	2,215845
5,250	-0,941484	-0,772930	-0,880789	0,299993	2,186570
5,300	-0,941530	-0,772913	-0,874673	0,302584	2,158015

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
5,350	-0,941573	-0,772899	-0,868750	0,305864	2,130209
5,400	-0,941611	-0,772888	-0,863028	0,309794	2,103172
5,450	-0,941646	-0,772879	-0,857514	0,314333	2,076929
5,500	-0,941677	-0,772871	-0,852213	0,319443	2,051499
5,550	-0,941706	-0,772865	-0,847133	0,325089	2,026897
5,600	-0,941732	-0,772861	-0,842278	0,331235	2,003138
5,650	-0,941755	-0,772957	-0,837652	0,337845	1,980234
5,700	-0,941777	-0,772854	-0,833260	0,344888	1,958194
5,750	-0,941958	-0,772852	-0,829105	0,352331	1,937026
5,800	-0,941813	-0,772831	-0,825190	0,360144	1,916737
5,850	-0,941829	-0,772850	-0,821517	0,368298	1,897331
5,900	-0,941843	-0,772850	-0,818087	0,376765	1,878811
5,950	-0,941856	-0,772850	-0,814902	0,385516	1,861177
6,000	-0,941868	-0,772850	-0,811962	0,394526	1,844431
6,050	-0,941879	-0,772850	-0,809267	0,403770	1,828569
6,100	-0,941888	-0,772851	-0,806816	0,413223	1,813591
6,150	-0,941897	-0,772852	-0,804608	0,422862	1,799491
6,200	-0,941905	-0,772853	-0,802641	0,432665	1,786265
6,250	-0,941912	-0,772854	-0,800913	0,442609	1,773907
6,300	-0,941918	-0,772855	-0,799420	0,452673	1,762409
6,400	-0,941929	-0,772858	-0,797126	0,473081	1,741961

Продолжение табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
6,500	-0,941938	-0,772860	-0,795727	0,493732	1,724843
6,600	-0,941946	-0,772862	-0,795178	0,514476	1,710962
6,700	-0,941951	-0,772865	-0,795431	0,535171	1,700211
6,800	-0,941956	-0,772867	-0,796428	0,555679	1,692467
6,900	-0,941960	-0,772869	-0,798107	0,575871	1,687593
7,000	-0,941963	-0,772871	-0,800400	0,595618	1,685436
7,100	-0,941966	-0,772873	-0,803234	0,614799	1,685833
7,200	-0,941968	-0,772875	-0,806535	0,633299	1,688602
7,300	-0,941969	-0,772876	-0,810226	0,651010	1,693554
7,400	-0,941970	-0,772877	-0,814230	0,667828	1,700486
7,500	-0,941971	-0,772879	-0,818471	0,683664	1,709186
7,600	-0,941971	-0,772880	-0,822876	0,698436	1,719436
7,700	-0,941972	-0,772881	-0,827375	0,712075	1,731015
7,800	-0,941972	-0,772881	-0,831903	0,724525	1,743698
7,900	-0,941972	-0,772882	-0,836401	0,735746	1,757266
8,000	-0,941973	-0,772883	-0,840815	0,745712	1,771150
8,100	-0,941973	-0,772883	-0,845099	0,754413	1,786194
8,200	-0,941972	-0,772883	-0,845099	0,754413	1,786194
8,300	-0,941972	-0,772884	-0,853125	0,768050	1,816181
8,400	-0,941972	-0,772884	-0,856809	0,773038	1,831120
8,500	-0,941972	-0,772885	-0,860244	0,776860	1,845813
8,600	-0,941972	-0,772885	-0,863418	0,779574	1,860123
8,700	-0,941972	-0,772885	-0,866322	0,718242	1,873931
8,800	-0,941972	-0,772885	-0,868951	0,781937	1,887136
8,900	-0,941972	-0,772885	-0,871306	0,781735	1,899653
9,000	-0,941972	-0,772885	-0,873390	0,780717	1,911415
9,100	-0,941971	-0,772885	-0,875210	0,778967	1,922369
9,200	-0,941971	-0,772885	-0,876774	0,776568	1,932248
9,300	-0,941971	-0,772885	-0,878092	0,773604	1,941713
9,400	-0,941971	-0,772885	-0,879177	0,770157	1,950066
9,500	-0,941971	-0,772885	-0,880041	0,766306	1,957533



$\varepsilon_0$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
-----------------	--------------	-------------	--------------------	--------------------------	-------------------------

Продолжение табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(0) = A$	$G'(\varepsilon_0) = b$
-----------------	--------------------	--------------	-------------------------

Продолжение третьего решения при  $H''(0) = A = -0,941971$ ;  $G'(0) = B = -0,772885$

9,6	-0,880697	0,762128	1,964120
9,7	-0,881160	0,757694	1,969844
9,8	-0,881442	0,753074	1,974727
9,9	-0,881560	0,748331	1,978798
10,0	-0,881527	0,743523	1,982089
10,1	-0,881357	0,738705	1,984641
10,2	-0,881062	0,733924	1,986494
10,3	-0,880658	0,729225	1,987693
10,4	-0,880157	0,724646	1,988283
10,5	-0,879572	0,720221	1,988314
10,6	-0,878915	0,715979	1,987833
10,7	-0,878198	0,711945	1,986889
10,8	-0,877433	0,708139	1,985532
10,9	-0,876629	0,704577	1,983810
11,0	-0,875798	0,701273	1,981770
11,1	-0,874949	0,698233	1,979459
11,2	-0,874090	0,695465	1,976921
11,3	-0,873231	0,692970	1,974200
11,4	-0,872378	0,690749	1,971336
11,5	-0,871539	0,688797	1,968368
11,6	-0,870721	0,687112	1,965332
11,7	-0,869929	0,685684	1,962263
11,8	-0,869168	0,684505	1,959192
11,9	-0,868443	0,683565	1,956147
12,0	-0,867757	0,682852	1,953155
12,1	-0,867115	0,682353	1,950240
12,2	-0,866517	0,682057	1,947422
12,3	-0,865965	0,681944	1,944718
12,4	-0,865462	0,682004	1,942146
12,5	-0,865008	0,682220	1,939717

Продолжение табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(0) = A$	$G'(\varepsilon_0) = b$
12,6	-0,864603	0,682578	1,937443
12,7	-0,864248	0,683061	1,935333
12,8	-0,863940	0,683655	1,933391
12,9	-0,863680	0,684345	1,931623
13,0	-0,863466	0,685116	1,930030
13,1	-0,863296	0,685955	1,928612
13,2	-0,863168	0,686847	1,927369
13,3	-0,863080	0,687780	1,926298
13,4	-0,863029	0,688742	1,925393
13,5	-0,863013	0,689720	1,924651
13,6	-0,863029	0,690705	1,924063
13,7	-0,863074	0,691687	1,923623
13,8	-0,863145	0,692657	1,923321
13,9	-0,863239	0,693606	1,923152
14,0	-0,863354	0,694528	1,923102
14,1	-0,863486	0,695415	1,923164
14,2	-0,863633	0,696263	1,923328

$\varepsilon_0$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(0) = A$	$G'(\varepsilon_0) = b$
14,3	-0,863793	0,697067	1,923582
14,4	-0,863961	0,697822	1,923917
14,5	-0,864137	0,698526	1,924323
14,6	-0,864317	0,699176	1,924790
14,7	-0,864501	0,699771	1,925309
14,8	-0,864685	0,700310	1,925869
14,9	-0,864867	0,700792	1,926463
15,0	-0,865047	0,701217	1,927082
15,1	-0,865223	0,701587	1,927717
15,2	-0,865393	0,701902	1,928361
15,3	-0,865555	0,702163	1,929007
15,4	-0,865711	0,702374	1,929649
15,5	-0,865858	0,702537	1,930281
15,6	-0,865995	0,702653	1,930898
15,7	-0,866123	0,702726	1,931495

Продолжение табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(0) = A$	$G'(\varepsilon_0) = b$
15,8	-0,866240	0,702759	1,932068
15,9	-0,866347	0,702754	1,932615
16,0	-0,866443	0,702716	1,933130
16,1	-0,866529	0,702647	1,933614
16,2	-0,866605	0,702550	1,934063
16,4	-0,866725	0,702288	1,934853
16,6	-0,866806	0,701954	1,935496
16,8	-0,866852	0,701573	1,935991
17,0	-0,866867	0,701166	1,936345
17,2	-0,866855	0,700752	1,936568
17,4	-0,866822	0,700348	1,936674
17,6	-0,866771	0,699966	1,936677
17,8	-0,866707	0,699617	1,936595
18,0	-0,866636	0,699308	1,936444
18,2	-0,866541	0,698986	1,936183
18,4	-0,866465	0,698781	1,935937
18,6	-0,866410	0,698658	1,935740
18,8	-0,866340	0,698534	1,935470
19,0	-0,866276	0,698453	1,935203
19,2	-0,866220	0,698410	1,934948
19,4	-0,866172	0,698402	1,934712
19,6	-0,866133	0,698423	1,934501
19,8	-0,866103	0,698466	1,934318
20,0	-0,866081	0,698528	1,934166
20,2	-0,866068	0,698602	1,934044
20,4	-0,866061	0,698685	1,933953
20,6	-0,866060	0,698771	1,933890
20,8	-0,866064	0,698857	1,933854
21,0	-0,866073	0,698940	1,933841
21,2	-0,866085	0,699017	1,933848
21,4	-0,866099	0,699087	1,933872
21,6	-0,866114	0,699148	1,933908

Окончание табл. 2.6.1

$\varepsilon_0$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(0) = A$	$G'(\varepsilon_0) = b$
21,8	-0,866130	0,699199	1,933955
22,0	-0,866146	0,699240	1,934007

$\varepsilon_0$	$H(\varepsilon_0)$	$H''(0) = A$	$G'(\varepsilon_0) = b$
22,2	-0,866161	0,699272	1,934062
22,4	-0,866175	0,699294	1,934119
22,6	-0,866188	0,699307	1,934174
22,8	-0,866199	0,699313	1,934226
23,0	-0,866208	0,699312	1,934273
23,2	-0,866216	0,699306	1,934315
23,4	-0,866221	0,699295	1,934350
23,6	-0,866225	0,699281	1,934380
23,8	-0,866227	0,699265	1,934403
24,0	-0,866228	0,699247	1,934419
24,2	-0,866228	0,699229	1,934430
24,4	-0,866227	0,699211	1,934435
24,6	-0,866224	0,699194	1,934436
24,8	-0,866222	0,699178	1,934433
25,0	-0,866219	0,699165	1,934427
25,2	-0,866215	0,699153	1,934418
25,4	-0,866212	0,699143	1,934408
25,6	-0,866209	0,699135	1,934397
25,8	-0,866206	0,699129	1,934385
26,0	-0,866203	0,699125	1,934373
26,2	-0,866200	0,699123	1,934362
26,4	-0,866198	0,699123	1,934351
26,6	-0,866196	0,699123	1,934342
26,8	-0,866195	0,699125	1,934334
27,0	-0,866194	0,699128	1,934327
27,2	-0,866193	0,699131	1,934321
27,4	-0,866193	0,699135	1,934317
27,6	-0,866193	0,699135	1,934317
27,8	-0,866193	0,699138	1,934314
28,0	-0,866193	0,699142	1,934312

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

---

При решении конкретных задач использовались методики и прикладные программы численного интегрирования уравнений, рассмотренные в первой части монографии.

Во всех изученных задачах подтвердилась неоднозначность решений при одних и тех же граничных условиях. На отдельных интервалах изменения параметров получено до пяти решений.

Показано, что, как парадокс, в центробежном поле вращающейся жидкости давление к оси вращения может возрастать.

Теоретически подтверждено, что при определенных условиях восходящие потоки над неподвижным диском должны быть закручены.

Рассмотренные примеры решений при разных граничных условиях могут быть использованы в технологических расчетах центробежных аппаратов.

В дальнейшем будут рассмотрены другие частные случаи движения жидкости вблизи вращающегося диска.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. *V. Karman Th.* Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921. 1. S. 233 – 252.
2. *Cochran W.G.* The flow due to a rotating disk // Proc. Camb. Phil. 1934. Soc. 30. P. 365 – 375.
3. *Koptev A.A.* Die Flüssigkeitsströmung in den Zentrifugalfeldern unter der Wirkung der sich drehenden Scheiben // Trans. of the Tambov State Technical University. 1995. 1. S. 65 – 75.
4. *Koptev A.A.* Die Flüssigkeitsströmung in den Zentrifugalfeldern unter der Wirkung der sich drehenden Scheiben. Blick auf das Karmanproblem aus der Unendlichkeit // Trans. of the Tambov State Technical University. 1996. 2. № 3. S. 271 – 280.

5. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. С. 294.
6. *Vödevadt U.N.* Die Drehströmung über festem Grund // ZAMM. 1940. 20. S. 241 – 253.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. С. 96.
8. *Фабрикант Н.Я.* Аэродинамика. М.: Наука, 1964. С. 814.
9. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика: в 2 т. М.: Мир, 1984.
10. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. С. 758.
11. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: в 2 т. М.: Наука, 1973.
12. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика. М.: "ФМ", 1963. Ч. 1, 2.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. С. 576.
14. *Коптев А.А.* Движение жидкости в центробежных полях. М.: Машиностроение, 2005. Ч. 1.
15. *Червяков В.М., Коптев А.А.* Определение энергозатрат в роторных аппаратах // Химнефтемаш, 2005. 4. С. 10 – 12.