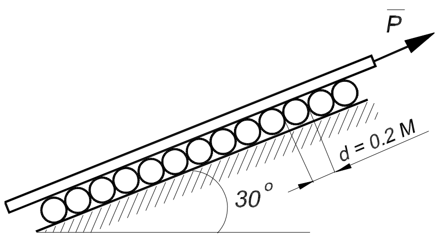
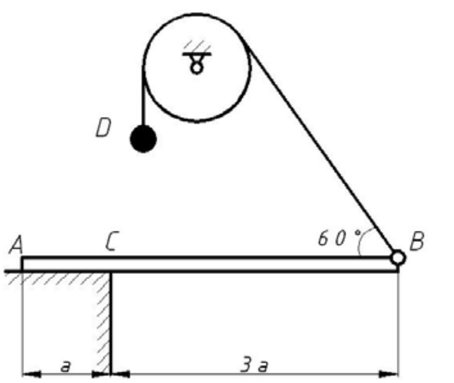
А.И. ПОПОВ, В.И. ПОПОВ,
В.А. ТЫШКЕВИЧ, М.П. ШУМСКИЙ

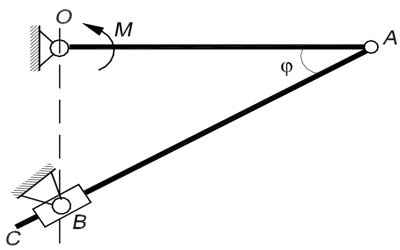
СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 1

СТАТИКА







ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

**ВСЕМ ЭНТУЗИАСТАМ ОЛИМПИАДНОГО ДВИЖЕНИЯ
ПОСВЯЩАЕТСЯ**

Олимпиады по теоретической механике, проводимые в технических вузах, а в последнее время и в классических университетах, являются системообразующим элементом организации творческой учебно-познавательной деятельности в высшей школе. Участие студентов в олимпиадном движении способствует более системному и глубокому усвоению профессиональных знаний, дает возможность сформировать у них готовность к творческой деятельности, развить креативный характер мышления.

Необходимость третьего издания сборника обусловлена возрождением традиций олимпиадного движения и возрастающей потребностью в изданиях, систематизирующих оригинальные творческие задачи. В третье издание дополнительно включены задачи Всероссийских олимпиад, зональных олимпиад, а также задачи олимпиад, проводившихся в Тамбове на базе Тамбовского государственного технического университета.

В сборник включены решения ряда задач по теоретической механике.

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

А.И. ПОПОВ, В.И. ПОПОВ,
В.А. ТЫШКЕВИЧ, М.П. ШУМСКИЙ

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 1

СТАТИКА

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям в области «Металлургии, машиностроения и материалообработки» и в области «Архитектуры и строительства».

Тамбов
Издательство ТГТУ
2006

УДК 531(075)
ББК В21я73-5
П58

Рецензенты:

Заведующий кафедрой теоретической механики
Пермского государственного технического университета,
академик РАЕН, доктор технических наук, профессор
Ю.И. Няшин

Заведующий кафедрой высшей математики
Самарского государственного аэрокосмического университета,
доктор технических наук, профессор
И.А. Тимбай

П58 Сборник олимпиадных задач по теоретической механике : в 3 ч. ; ч. 1. Статика / А.И. Попов, В.И. Попов, В.А. Тышкевич, М.П. Шумский. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – 96 с. – 150 экз. – ISBN 5-8265-0510-9.

Соответствует содержанию дисциплины ОПД.Ф.02.01 «Теоретическая механика» государственных образовательных стандартов по направлениям подготовки бакалавров и дипломированных специалистов 150000 «Металлургия, машиностроение и материалообработка», 270000 «Архитектура и строительство».

Содержит сведения об истории олимпиадного движения по теоретической механике, почти все оригинальные задачи или задачи повышенной сложности по статике, предложенные на всесоюзных и всероссийских олимпиадах по теорети-

ческой механике с 1981 по 2005 гг., а также других олимпиадах по теоретической механике различного уровня прошлых лет.

Рекомендуется для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 150000, 290000 по дисциплине «Теоретическая механика», а также может быть использовано в процессе самостоятельной работы при углубленном изучения механики.

УДК 531(075)
ББК В21я73-5

ISBN 5-8265-0510-9

Учебное издание

ПОПОВ Андрей Иванович,
ПОПОВ Владимир Иванович,
ТЫШКЕВИЧ Валерий Алексеевич,
ШУМСКИЙ Михаил Петрович

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 1

СТАТИКА

Учебное пособие

Редактор О.М. Ярцева
Компьютерное макетирование Е.В. Кораблевой

Подписано в печать 10.10.2006
Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
5,5 уч.-изд. л. Тираж 150 экз. Заказ № 534

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ*

Проведение олимпиад по теоретической механике в вузах СССР началось еще в середине 70-х годов. Сначала они проводились только в вузах на уровне академических групп и затем вузовский тур.

Придавая огромное значение роли олимпиад по теоретической механике в повышении качества подготовки будущих специалистов, в более полном развитии способностей и дарований студенческой молодежи, в привитии им навыков самостоятельной работы и умения принимать правильные решения в экстремальных условиях, в 1981 г. Минвузом СССР и Секретариатом ЦК ВЛКСМ было принято решение о проведении Всесоюзного тура олимпиады под эгидой «Студент и научно-технический прогресс». С этого момента проведение олимпиад приняло более организованный характер. Поэтапное проведение I – Вузовского, II – Республиканского и III – Всесоюзного туров сделали предметную олимпиаду по теоретической механике массовым соревнованием студентов.

Базовым вузом по проведению III – Всесоюзного тура был определен Ижевский механический институт на пять лет (1981 – 1985 гг.). Победителями этих олимпиад в 1982 – 1985 гг. были следующие студенты: Д.В. Файнгауз (Ленинградский политехнический институт), М.Б. Демидов (МВТУ), А.И. Иващенко (МАИ), А.Э. Пушкарев (Ижевский механический институт).

В марте 1986 г. аналогичным постановлением на следующие пять лет (1986 – 1990 гг.) базовым вузом по проведению III – Всесоюзного тура был утвержден Белорусский политехнический институт. На III тур практически всегда и в полном составе приезжали представители всех 15 союзных республик, а также Москвы и Ленинграда.

В рамках III тура проводился научно-методический семинар руководителей делегации и членов жюри, что способствовало обмену опытом и совершенствованию деятельности кафедр теоретической механики страны в улучшении учебного процесса и качества знаний студентов.

За пять лет в олимпиаде приняли участие 251 студент из 70 вузов страны. Среди участников – 16 студенток, 7 иностранных студентов. Лучшие достижения – у студентов Москвы, Ленинграда и РСФСР. Призерами олимпиады стали 6 студентов Ленинграда, 4 – Москвы, 4 – РСФСР и 1 – БССР (табл. 1.)

Вузы, студенты которых неоднократно занимали 1 – 10 места в конкурсе: ЛГТУ (Ленинград) – 5 раз, ТТУ (Таллин) – 4 раза, МГТУ, МСИИ, МАИ (Москва), БПИ (Минск) – 3 раза. Замечательного успеха добился

* При составлении раздела использованы материалы Н.И. Горбача (Минск) и Р.М. Подгайца (Пермь).

1. Результаты призеров олимпиады

(В СКОБКАХ УКАЗАН СУММАРНЫЙ БАЛЛ КОНКУРСНОГО ЗАДАНИЯ И БАЛЛ ПРИЗЕРОВ)

Год/ Место	1986 (56)	1987 (57)	1988 (56)	1989 (55)	1990 (51)
1	А. Попов (27), ТИХМ, Тамбов	С. Баранов (45,5), ЧПИ, Челябинск	С. Шубин (38,5), МСИИ, Москва	В. Синильщиков (49,5), ЛМИ, Ленинград	А. Тялин (32), ТИХМ, Тамбов
2	И. Цигельский (22), МИНиГ, Москва	Д. Шкловский (37), ЛИТМО, Ленинград	И. Минков (35,5), МИНиГ, Москва	М. Славутич (46,5), ЛГТУ, Ленинград	В. Малышев (28,5), НПИ, Н. Новгород
3	Д. Явид (21), БПИ, Минск	Т. Ойхберг (36), ЛГТУ, Ленинград	А. Киселев (34), ЛИТМО, Ленинград	В. Щигулов (43), ЛКИ, Ленинград	Т. Ноготков (24,5) МГТУ, Москва

Тамбовский институт химического машиностроения, студенты которого – победители олимпиады 1986 и 1990 гг. Дважды входили в десятку сильнейших студенты МИНиГ (Москва) и ЛИТМО (Ленинград), КПИ (Кишинев), Н-НПИ (Н. Новгород).

III тур олимпиады проводился как личное первенство. Однако руководители делегаций неизменно проявляли заинтересованность в рассмотрении результатов команд и их сопоставлении – эти результаты дают полезный материал для «обратной связи», совершенствования учебного процесса и индивидуальной работы. Места в неофициальном командном первенстве определялись по суммарным баллам 3-х студентов-участников конкурса (или по баллу меньшего числа участников, если команда прибывала на олимпиаду в неполном составе) (табл. 2). Место команды по итогам пяти лет установлено по сумме баллов команды за все годы (1-ое место – 416, 2-ое – 407,5, …, 17-ое – 41 балл).

Стартовые условия у разных команд были неодинаковыми. Вероятность отбора лучших студентов выше там, где больше вузов, участвующих во II туре олимпиады. Таких вузов в РСФСР было более 100, в УССР – около 50, в Ленинграде – 15, в Москве – 14, в БССР – 12, в Азербайджане и Литве – по 3, в остальных республиках – по 2 вуза. Поэтому значительные трудности в комплектовании команд постоянно испытывали Таджикистан, Грузия, Киргизия и Туркмения. Результаты Эстонии, Узбекистана и Молдовы показывают, что и в условиях малого числа технических вузов можно достичь многого. Так, команда Эстонии ежегодно занимала 5 – 7 места; команда УзССР в 1987 г. заняла 4-ое место; личное 4-ое место – у студента из Молдовы в 1988 г.

2. Результаты в неофициальном командном зачете

Команда	1986 место	1987 место	1988 место	1989 место	1990 место	Место по итогам пяти лет
Азербайджана	–	15	9	13	–	16
Армении	7	10	10	11	10	10…11
БССР	1	6	4	6	4	4
Грузии	15	13	16	11	12…13	13
Казахстана	13	11	14	10	5	9
Киргизии	–	14	15	14	14	15
Латвии	10…11	–	12	15	12…13	14
Литвы	10…11	9	11	7…8	–	10…11
Молдовы	12	7	6	9	8	8
РСФСР	2…3	2	5	3	1	3
Таджикистана	14	12	13	12	11	12
Туркмении	8	16	17	17	15	17
Узбекистана	6	8	8	4	9	7
УССР	9	4	3	5	6	5
Эстонии	5	5	7	7…8	7	6
Ленинграда	4	1	2	1	3	1
Москвы	2…3	3	1	2	2	2

ПРОГРАММА ОЛИМПИАДЫ НЕ ОГРАНИЧИВАЛАСЬ КОНКУРСОМ. НАЧИНАЯ С 1987 Г., ЕЖЕГОДНО ПРОВОДИЛИСЬ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ КОНФЕРЕНЦИИ УЧАСТНИКОВ ОЛИМПИАДЫ, НА КОТОРЫХ С ДОКЛАДАМИ ВЫСТУПИЛИ 13 СТУДЕНТОВ – 6 ИЗ ЛЕНИНГРАДА, 2 – ИЗ БССР, ПО ОДНОМУ ИЗ МОСКВЫ, ЭСТОНИИ, ТУРКМЕНИИ, ТАДЖИКИСТАНА И УЗБЕКИСТАНА. ТЕМАТИКА ДОКЛАДОВ ВЫЛА РАЗНООБРАЗНА. ЭТО, В ПЕРВУЮ ОЧЕРЕДЬ, ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ (ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРИФУГИ, МАНИПУЛЯТОРА, ШАССИ САМОЛЕТА И Т.П.). РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РЕАЛИЗОВЫВАЛИСЬ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ. СЛЕДУЕТ ОТМЕТИТЬ НЕИЗМЕННО ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ ДОКЛАДОВ ЛЕНИНГРАДСКИХ СТУДЕНТОВ.

Всероссийские олимпиады проводятся с 1982 г. В 1982, 1983, 1986 – 1990 гг. они проводились в Омском политехническом институте, в 1984 и 1985 гг. – в Алтайском политехническом институте. Наивысших результатов здесь добились студенты А.Ф. Валлер (Астраханский технологический институт рыбной промышленности), Е.Б. Кивенко (Томский политехнический институт), С.Р. Ашихмин (Казанский авиационный институт), В.М. Серов (Куйбышевский авиационный институт), А.И. Попов (Тамбовский институт химического машиностроения), С.В. Баранов (Челябинский политехнический институт), Р.Е. Гильманов (Казанский авиационный институт), А.И. Кудашов (Горьковский политехнический институт), А.В. Морозов (Ижевский механический институт).

После первых двух пятилетних циклов в 1991 г. проведение Всесоюзной олимпиады по теоретической механике было поручено Пермскому политехническому институту (с 1992 г. – Пермский государственный технический университет). Начало девяностых годов прошлого столетия, когда олимпиада проводилась в Перми, было временем больших перемен и потрясений для всей нашей страны, и это не могло не сказаться на студенческих олимпиадах. Трудности начались с самого начала подготовки олимпиады. В 1991 г. Госкомитет РСФСР по делам науки и высшей школы не запланировал проведение Всероссийской олимпиады, и поэтому Оргкомитетом было принято решение совместить Всероссийскую олимпиаду с Всесоюзной. На Всесоюзную олимпиаду 1991 г. наряду с командами союзных республик (которые к тому времени уже объявили о своем государственном суверенитете), Москвы и Санкт-Петербурга, были приглашены команды десяти экономических регионов России. Такой принцип организации Всесоюзной олимпиады был более справедливым для Российской Федерации, которая раньше, кроме команд Москвы и Ленинграда, была представлена только одной сборной командой. Ведь любой из регионов России превосходит по количеству технических вузов многие союзные республики, некоторые из которых имели только по одному техническому вузу.

На приглашение откликнулись и прибыли на олимпиаду команды 6 союзных республик – Азербайджана, Белоруссии, Таджикистана, Туркмении, Узбекистана и Украины. Вузы прибалтийских республик поблагодарили за приглашение, но отказались участвовать, а из остальных республик ответа просто не было – в одних шла война, другие были поражены жестоким экономическим кризисом. Из России в олимпиаде приняли участие команда Москвы, команды восьми регионов (Центрального, Центрально-Черноземного, Волго-Вятского, Северо-Кавказского, Поволжского, Уральского, Западно-Сибирского и Восточно-Сибирского), а также команда хозяев олимпиады – Пермского политехнического института.

Всего в олимпиаде 1991 г. участвовали 44 студента из 23 городов и 26 вузов. Первые четыре места заняли украинские и белорусские студенты: Геннадий Степанов (Донецк), Виталий Кравец (Запорожье), Игорь Герасимович (Могилев) и Эдуард Цвирко (Минск). Явно сказалось то, что эти студенты у себя дома прошли через горнило республиканских олимпиад. Призерами Российского первенства стали Роберт Балоян (Краснодар), Олег Харгелия (Пермь) и Тихон Протасов (Москва).

Основным новшеством в программе олимпиады стало проведение командного компьютерного конкурса, где студентам предлагалось с помощью ЭВМ решить задачу по теоретической механике, не имеющую аналитического решения. Победителями этого конкурса, ставшего впоследствии традиционным, также стали украинские студенты.

В 1992 г. олимпиада проводилась уже в ранге Межреспубликанской. В связи с усилением экономического кризиса она собрала рекордно малое число участников – всего 21 студента из 15 вузов. Олимпиада проводилась на борту теплохода, совершавшего рейс Пермь-Чайковский-Пермь. В олимпиаде приняли участие команды 3 республик (Азербайджана, Белориссии, Украины), 4 регионов России (Центрально-Черноземного, Волго-Вятского, Поволжского, Уральского) и команда ПГТУ. Победителем в теоретическом и компьютерном конкурсах опять стала команда Украины.

Начиная с 1993 г., олимпиада стала проводиться как Всероссийская, но все же традиция участия бывших республик СССР сохранилась. На этот раз кроме россиян приехали только две команды – Белоруссии и Узбекистана. С 1993 г. Всероссийская олимпиада стала проводиться в загородном пансионате, и эта традиция сохраняется до сих пор. Число участников возросло – 42 студента из 22 вузов. Победителями теоретического конкурса стали Олег Гусев (Ярославль), Константин Вешняков (Нижний Новгород) и Наиль Мубинов (Пермь). В компьютерном конкурсе победила команда пермских студентов, второе и третье места заняли команды Санкт-Петербурга и Нижнего Новгорода.

С 1994 г. в олимпиаде стали участвовать не только студенты технических вузов, но и студенты-механики Уральского государственного университета. Число участников продолжало расти, и в 1995 г. достигло 50 человек. Победителями теоретического конкурса в 1994 г. стали Марат Сабирзянов (Ижевск), Алексей Монастыренко и Иван Мороз (Санкт-Петербург), в 1995 г. – Алексей Гун (Челябинск), Александр Пределин (Екатеринбург) и Валерий Вуколов (Самара). В компьютерном конкурсе в 1994 г. победу одержала команда Ижевска, а в 1995 г. – команда Санкт-Петербурга.

Из «иноземных» участников с 1994 г. остались только представители Республики Беларусь, которые и поныне приезжают не только на Всероссийские, но и на Уральские региональные олимпиады. А начиная с 2001 г., и российские студенты стали приезжать в Минск на олимпиаду Беларуси.

Все эти годы председателем жюри был заведующий кафедрой теоретической механики профессор Юрий Иванович Няшин. Составителями задач теоретического конкурса были доцент (ныне профессор) Рудольф Николаевич Рудаков и доцент Юрий Викторович Калашников (безвременно скончавшийся в сентябре 2002 г.), они же вместе с Ю.И. Няшиным работали в апелляционной комиссии. Секретарем оргкомитета и жюри был доцент (ныне профессор) Роман Михайлович Подгаец. Составителем задач и организатором компьютерного конкурса был ассистент Виктор Валерьевич Шишляев.

В 1996 – 2003 гг. олимпиады проводились Уральским государственным университетом, а с 2004 г. – Казанским государственным университетом имени В.И. Ульянова-Ленина (полные данные о проведении олимпиад в отчетах [20 – 24]).

Конкурсное задание разрабатывается рабочей группой базового вуза. Следуя традиции, установленной Ижевским механическим институтом, на конкурс выносится 8 задач: 2 – по статике, 2 – по кинематике, 4 – по динамике. В зависимости от сложности задачи оценивались баллами от 3 до 10. Предполагается, что с наиболее простыми задачами могут справиться все студенты.

В основу разработки конкурсных задач были положены следующие принципы.

1. Условия задач должны быть не громоздкими и легко доступными для восприятия. Их решения не требуют большого объема выкладок и вычислений.

2. Задачи должны быть оригинальными (не заимствованными) и содержать элемент нестандартности, позволяющий участнику олимпиады показать не только знания, но и сообразительность.

3. В некоторых задачах необходим анализ решения – рассмотрения различных случаев.

4. В условии задачи не указывается метод решения.

5. Решение задачи может требовать применения понятий математики или физики, известных студенту, но редко используемых в курсе теоретической механики.

Отбор задач, подготовленных рабочей группой в избыточном числе, проводился на заседании жюри, с участием руководителей делегаций в день конкурса.

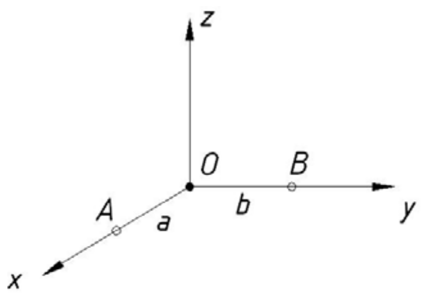
1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СТАТИКИ

1. (СССР, 1986, 4 балла)

К твердому телу приложены две пары сил с моментами m_1 и m_2, расположенными в плоскостях $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, соответственно. Определить проекции $\overline{m}$ момента результирующей пары на координатные оси.

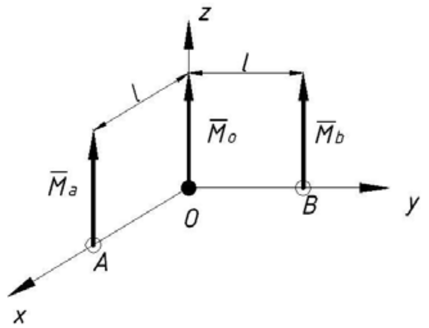
2. (СССР, 1987, 7 баллов)

Главные моменты некоторой системы сил относительно центров O, A и B одинаковы по величине $M_O = M_A = M_B = m$. Главный вектор этой системы сил по величине равен V и параллелен оси z; $OA = a$, $OB = b$. Определить углы, составляемые главными моментами M_O, M_A, M_B с плоскостью xOy.



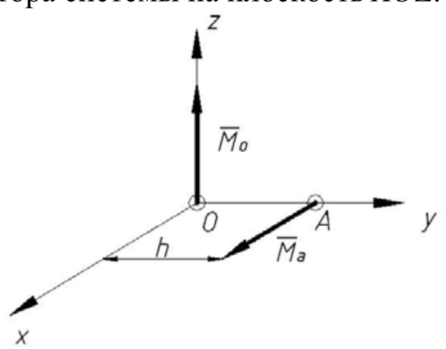
3. (БССР, 1986, 3 балла)

Главные моменты системы сил относительно центров O, A, B направлены, как указано на чертеже, и равны по величине: $M_O = M$, $M_A = 4M$, $M_B = 5M$. Докажите, что система сил приводится к равнодействующей, определите модуль равнодействующей.



4. (БССР, 1987)

Главные моменты системы сил относительно центров O и A равны M_O и M_A и направлены, как указано на чертеже. Докажите, что система сил не имеет равнодействующей. Определите проекцию главного вектора системы на плоскость XOZ.



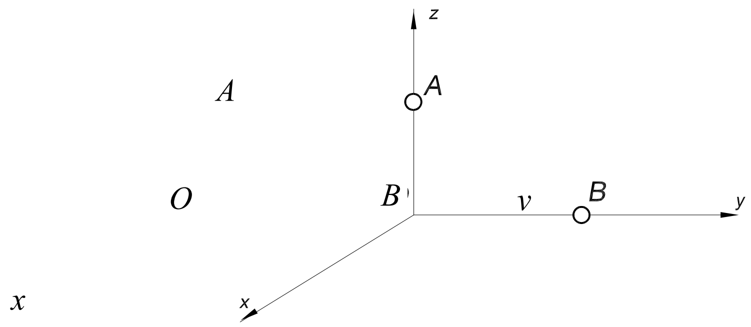
5. (БССР, 1983)

Сформулировать в аналитической форме условие, при котором две силы P_1 (P_{1X}, P_{1Y}, P_{1Z}) и P_2 (P_{2X}, P_{2Y}, P_{2Z}), приложенные соответственно в точках A_1 (a_1, b_1, c_1), A_2 (a_2, b_2, c_2), лежат в одной плоскости.

6. (БССР, 1985)

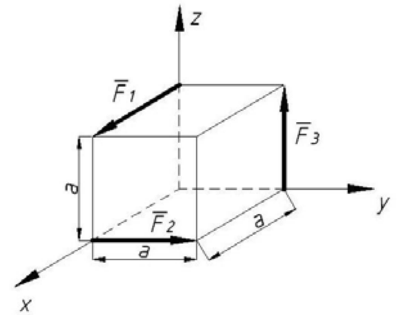
M_O, M_A и M_B – главные моменты пространственной системы сил относительно центров O, A, B соответственно; $M_O = 3Fhk$; $M_A = 3Fhk$; $M_B = 5Fh$; $OA = OB = h$. Определить модуль главного вектора этой системы сил.

z



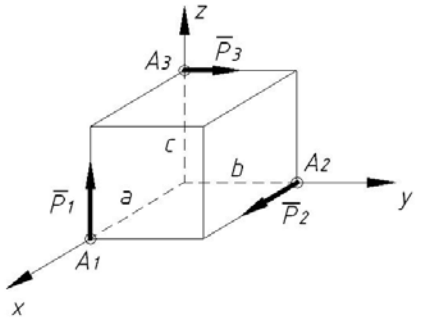
7. (Л., 1984, 3 балла)

Какую наименьшую по величине и параллельную оси OX силу Q надо приложить к кубу, чтобы система четырех сил F_1, F_2, F_3, Q имела равнодействующую? Считать $F_1 = F_2 = F_3 = F$.



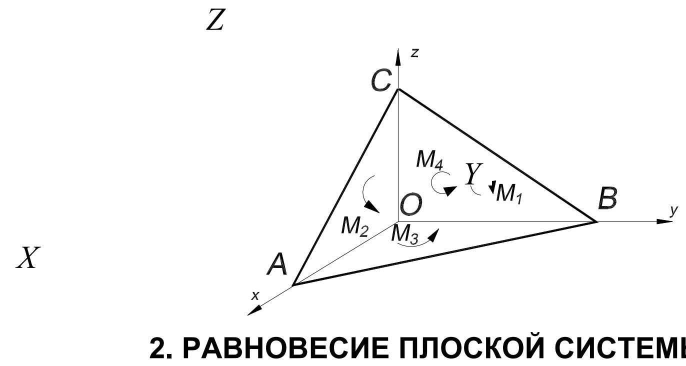
8. (Л., 1983)

На тело действуют три силы: $\vec{P}_1 = P\vec{k}$, $\vec{P}_2 = P\vec{i}$, $\vec{P}_3 = P\vec{j}$, приложенные в точках $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(0, b, 0)$, $A_3(0, 0, c)$, соответственно. Какой должна быть зависимость между a, b и c, чтобы система сил приводилась к равнодействующей?



9. (Белорус. политех. ин-т, 1982)

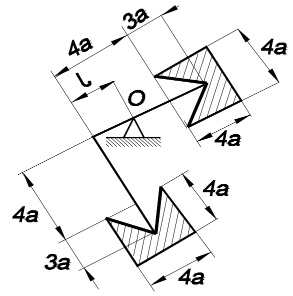
***К тетраэдру* OABC *приложены пары сил с моментами* M_1, M_2, M_3, M_4, *расположенные в плоскостях* YOZ, ZOX, XOY *и* ABC, *соответственно. Определить момент результирующей пары сил, если* $M_1 = 4$ *Н·м;* $M_2 = 3$ *Н·м;* $M_3 = 1$ *Н·м;* $M_4 = 3$ *Н·м;* OA = OB = OC.**



2. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

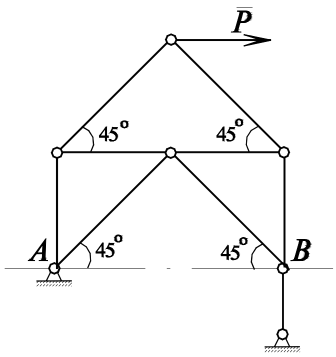
1. (СССР, 1984, 4 балла)

Жесткая конструкция, состоящая из двух одинаковых тяжелых однородных пластин, соединенных тонким, изогнутым под прямым углом, стержнем пренебрежимо малого веса, удерживается в равновесии на опоре *O*. Считая коэффициент трения стержня об опору равным *f*, найти максимальное значение *l*, при котором тело будет удерживаться на опоре в равновесии. Размеры и форма пластин показаны на рисунке.



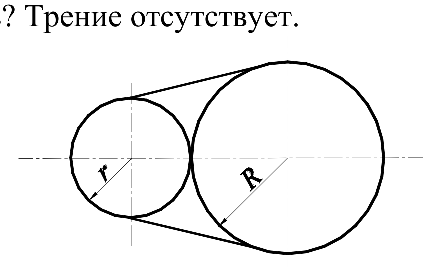
2. (СССР, 1986, 3 балла)

Определить усилие *S* в стержне *AB* плоской фермы, закрепленной и нагруженной, как указано на рисунке.



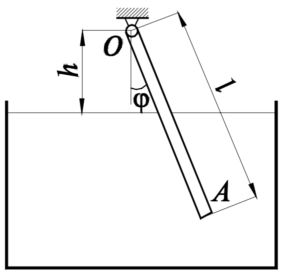
3. (СССР, 1987, 4 балла)

Два диска радиусами *R* и *r*, расположенные на горизонтальной плоскости, стянуты упругой нитью жесткостью *c*. Диски давят друг на друга с силами, равными *Q*. Как изменится длина нити, если ее перерезать? Трение отсутствует.



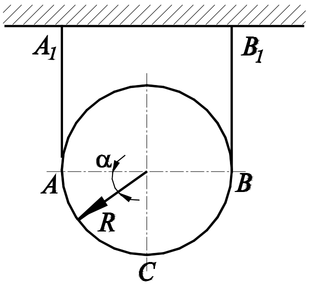
4. (СССР, 1988, 10 баллов)

Тонкий однородный стержень *OA* длины *l* концом *O* закреплен шарнирно на высоте *h* над горизонтальной поверхностью жидкости, в которую опущен второй его конец. Плотность жидкости равна ρ, плотность стержня *k*ρ (*k* и ρ – постоянные). Определить значения угла φ при равновесии стержня. Исследовать устойчивость положений равновесия.



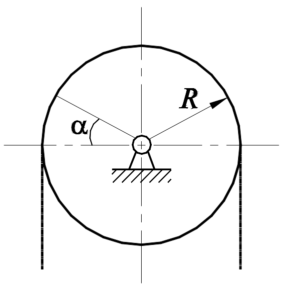
5. (СССР, 1988, 4 балла)

Однородный диск весом P и радиусом R удерживается в равновесии с помощью невесомой нити, концы которой прикреплены к потолку. Найти натяжение нити и давление на единицу длины нити как функцию угла α на участке ACB. Ветви нерастяжимой нити AA_1 и BB_1 вертикальны, трение не учитывать.



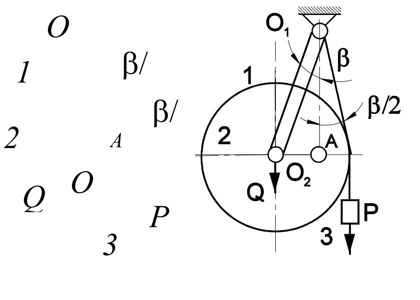
6. (РСФСР, 1985, 3 балла)

Однородная цепь веса P и длины $2\pi R$ перекинута через гладкий блок, имеющий горизонтальную ось. Определить в случае равновесия силу натяжения цепи T_α в ее произвольном поперечном сечении.



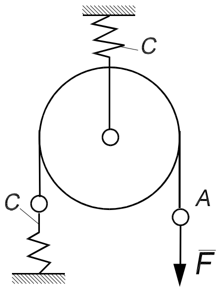
7. (РСФСР, 1989, 3 балла)

Цилиндр *2* веса Q и радиуса r соединен шарнирным невесомым стержнем O_1O_2 длиной $2r$ с опорой O_1; к оси O_1 прикреплен на нити груз *3*. Система находится в равновесии; при этом вертикальная прямая O_1A делит угол β пополам. Определить вес P груза *3*.



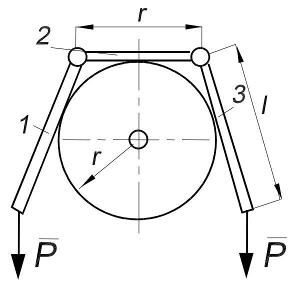
8. (Арм. ССР, 1987)

На сколько переместится конец перекинутой через подвижный блок нити (точка A), если к нему приложить силу F? Жесткость пружины c.



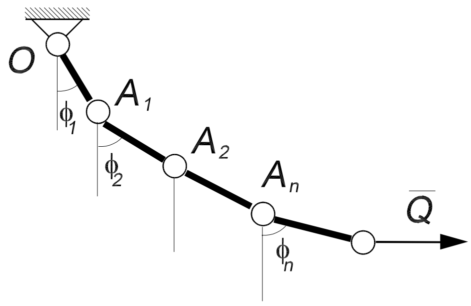
9. (БССР, 1983, 3 балла)

Три невесомых стержня, расположенных в вертикальной плоскости, опираются на цилиндр радиуса r. Средний стержень длиной r – горизонтален, боковые стержни имеют одинаковую длину l. Определить давление среднего стержня на цилиндр в зависимости от длины l боковых стержней, если к их концам приложены одинаковые силы P, направленные вертикально вниз.



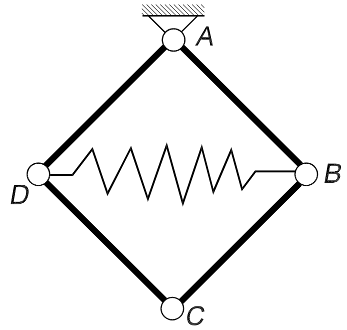
10. (БССР, 1982)

Цепь, состоящая из n одинаковых стержней, подвешена в вертикальной плоскости. P – вес одного стержня; Q – заданная горизонтальная сила; O, A_1, A_2, ..., A_n – шарниры. Найти углы φ_k $(k = 1, 2, ..., n)$ стержней с вертикалью в положении равновесия.



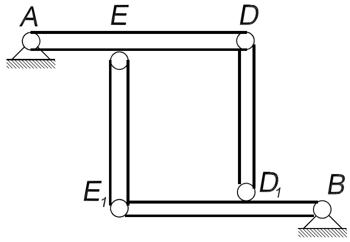
11. (БССР, 1984)

Конструкция, изображенная на рисунке, состоит из четырех одинаковых стержней массы M и длины l каждый, соединенных шарнирами и расположенных в вертикальной плоскости. Шарниры D и B соединены пружиной. В состоянии равновесия стержни образуют квадрат. Определить жесткость c пружины, если в ненапряженном состоянии она имеет длину $2l\sqrt{2}$.



12. (Лит. ССР, 1988)

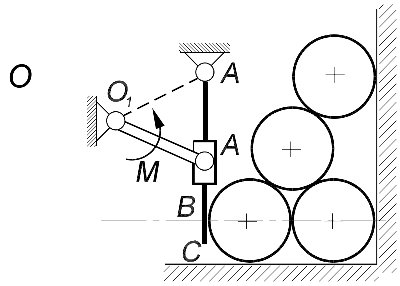
Конструкция состоит из двух балок AD и BE_1 одинаковой длины, соединенных между собой посредством двух шарнирных стержней EE_1 и DD_1. Масса балки BE_1 в два раза больше массы балки AD, расстояние $ED = E_1D_1 = 1/3\ E_1B$. Определить усилия в стержнях и реакции опор A и B при равновесии системы.



13. (Молд. ССР, 1983, 3 балла)

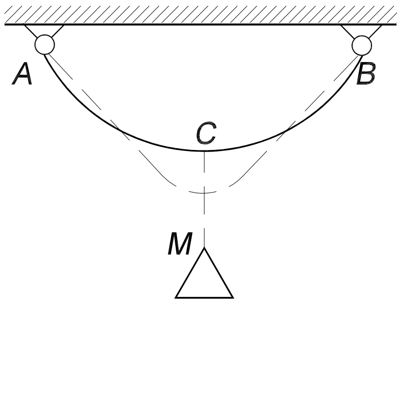
Вертикальная плита OC удерживает в равновесии четыре одинаковые, горизонтально лежащие трубы весом P каждая. Найти минимальную величину момента M, приложенного к рычагу O_1A длиной r при условии, что

$$\angle AO_1O = \pi/2,\ \angle AOO_1 = \pi/6,\ \ OB = 2\sqrt{3}\,r.$$



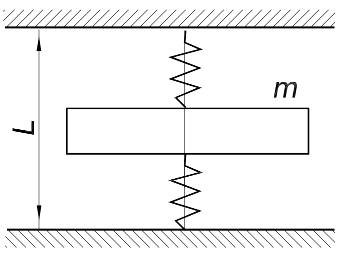
14. (УССР, 1985, 3 балла)

Тяжелая гибкая нить ACB, закрепленная в точках A и B, как показано на рисунке, находится в равновесии. В некоторый момент времени к нити в точке C подвешивают груз M, переводящий нить в новое положение равновесия, обозначенное на рисунке пунктиром. Куда переместится при этом центр тяжести нити?



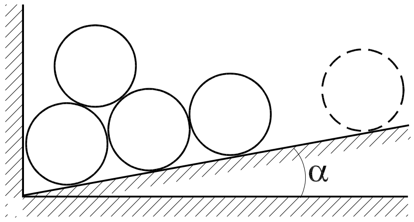
15. (УССР, 1986, 3 балла)

Тонкая пластинка массы m зажата между двумя вертикальными пружинами. Длина каждой пружины в свободном состоянии равна l. Под действием силы P верхняя пружина сжимается на Δ_1, нижняя – на Δ_2. Определить положение пластинки при равновесии.



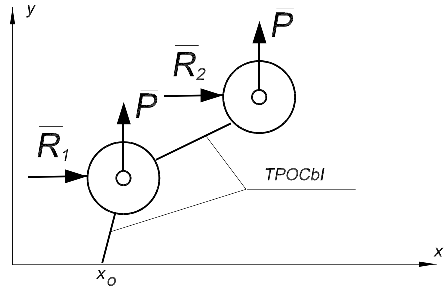
16. (УССР, 1986, 3 балла)

При каком минимальном количестве одинаковых труб нижнего ряда система не раскатится, если не учитывать трение? Угол $\alpha = 2°$.



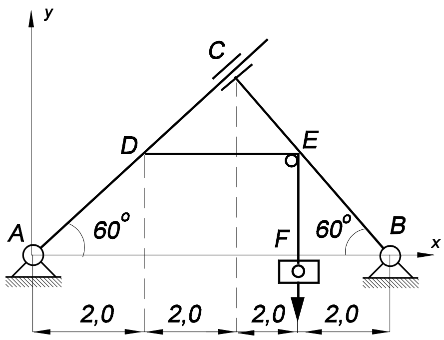
17. (Л., 1986, 3 балла)

Написать зависимости, определяющие положение равновесия системы двух одинаковых воздушных шаров, показанной на рисунке. P – подъемная сила каждого шара, R_1 и R_2 – силы давления ветра на шары, зависящие от высоты y_i: $R_i = R_0 + k_0 y_i$, где R_0 и k_0 – постоянные. Расстояния от точки x_0 до центра первого шара и между центрами шаров равны l_0. Весами тросов и силами давления ветра на них пренебречь.



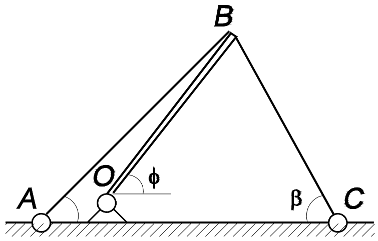
18. (Л., 1986, 3 балла)

Для конструкции, показанной на рисунке, определить реакции опор A и B и усилия взаимодействия во втулке, допускающей относительное скольжение без трения вдоль AC. P = 12,0 кН. Стержни AC и BC, а также блок E и нить DEF считать невесомыми. Размеры блоков не учитывать.



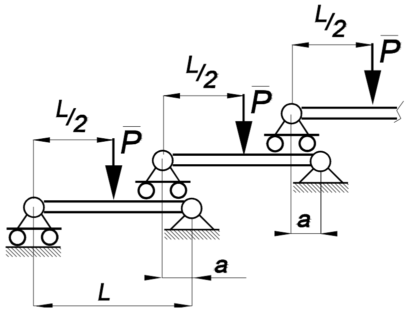
19. (Л., 1987)

Однородный тяжелый стержень OB шарнирно закреплен в точке O и удерживается в равновесии в вертикальной плоскости невесомым тросом ABC. Считая угол φ известным, найти условие, которому должны удовлетворять углы α и β, если трение между тросом и стержнем в точке B отсутствует.



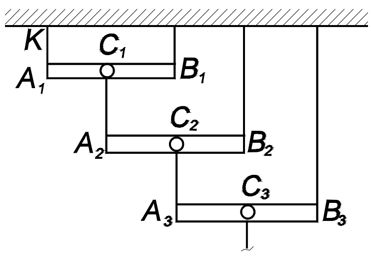
20. (Л., 1982)

В системе, состоящей из n балок, каждая из последующих опирается левым концом на предыдущую балку, а правым – на шарнирно-неподвижную опору. К каждой балке приложена сила P в середине пролета l. Определить реакцию опоры A.



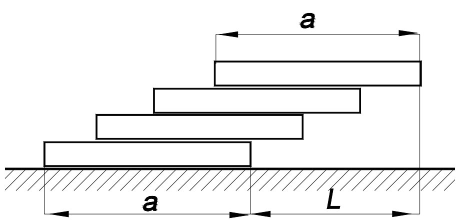
21. (Л., 1982)

Система состоит из n одинаковых горизонтальных стержней весом P каждый, укрепленных при помощи тросов. Найти натяжение троса A_1K, если $C_1B_1/A_1B_1 = C_2B_2/A_2B_2 = ... = C_nB_n/A_nB_n = 1/4$.



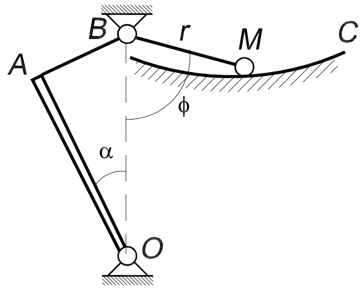
22. (Л., 1984)

Гладкие однородные бруски одинакового веса и длины уложены один на другой так, как показано на рисунке. Найти такую максимальную длину L (как функцию от числа n брусков), чтобы система n брусков оставалась в состоянии покоя.



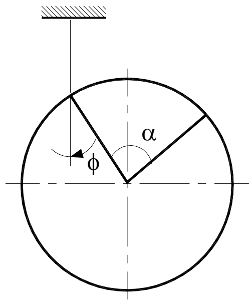
23. (М., 1977)

Плоская система состоит из однородного стержня OA длиной a и весом Q и груза M весом P, соединенных нитью ABM длиной l, перекинутый через блок B. Найти уравнение кривой BMC в координатах r и φ ($r = BM$), чтобы при любом угле $\alpha < \pi/2$ система находилась в равновесии; $OA = OB$; $l = a\sqrt{2}$. Трением пренебречь.



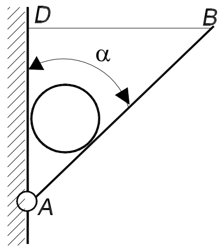
24. (Зап.-Сиб. зона, Новосибирск. ин-т ж/д трансп., 1990)

Из круга вырезали сектор с центральным углом α, а из окружности – дугу с таким же центральным углом. Получившиеся тела подвесили на нитях, как указано для первого тела на рисунке. Определить углы φ и φ_1, образуемые радиусами элементов круга и окружности с вертикалью при равновесии тел.



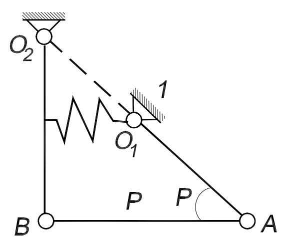
25. (Брянск, 1986)

Круглое бревно весом $2\ Q$ и радиусом r касается вертикальной стены и удерживается в горизонтальном положении двумя одинаковыми балками AB длиной l и горизонтальными тросами BD. При каком угле α натяжение тросов будет наименьшим? Найти также наименьшее натяжение тросов. Весом балок и трением пренебречь; в точке A – шарнир.



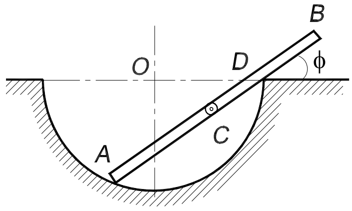
26. (Свердловск, 1985)

В стержневой системе, расположенной в вертикальной плоскости, $AO_1 = O_1O_2$, стержни *1* и *2* однородны и имеют веса P_1 и P_2, соответственно. Определить силу натяжения пружины, если в положении равновесия системы, изображенном на рисунке, угол $O_1AB = \alpha$, $ABO_2 = 90°$, точки A, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.



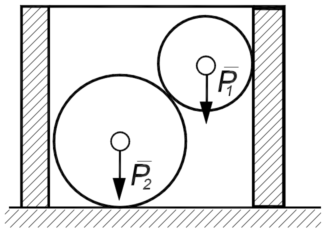
27. (Брянск. ин-т трансп. машиностр., 1987)

Однородный стержень AB длины $2l$ опирается на полуокружность радиуса R. Определить, пренебрегая трением, угол φ в положении равновесия стержня.



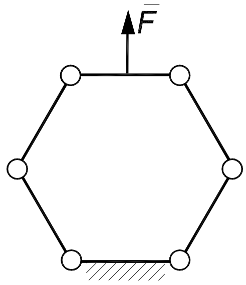
28. (МИИТ, 1979)

На горизонтальной гладкой поверхности стоит прямой полый цилиндр радиуса a. Внутри цилиндра находятся два шара весами P_1 и P_2 и радиусами r_1 и r_2, соответственно. Нижний шар лежит на горизонтальной плоскости. Определить наименьший вес цилиндра, при котором шары его не опрокинут. Толщиной стенок цилиндра и трением пренебречь.



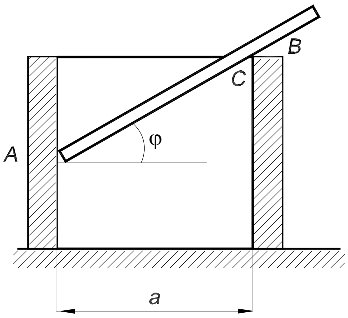
29. (МИИТ, 1981)

Шесть одинаковых однородных стержней веса P, связанных шарнирно своими концами, образуют правильный шестиугольник, расположенный в вертикальной плоскости. Нижний стержень закреплен в горизонтальном положении. Какую направленную вертикально вверх силу нужно приложить к середине верхнего горизонтального стержня, чтобы система находилась в равновесии?



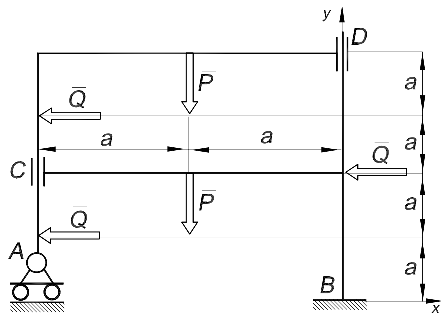
30. (МИИТ, 1980)

На горизонтальной плоскости стоит абсолютно гладкий цилиндр диаметра a и веса P. В него опускают однородную палочку AB длины $2l$ и веса Q, которая занимает положение равновесия под углом φ к горизонту. Найти угол φ и наименьший вес Q_0 палочки, при котором она в состоянии опрокинуть цилиндр, а также реакции в точках A и C в начальный момент опрокидывания. Указать соотношение между a и l, при котором возможно равновесие палочки. Толщиной стенок цилиндра пренебречь.



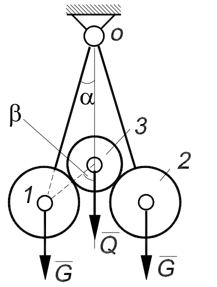
31. (МИИТ, 1978)

Конструкция состоит из двух частей, соединенных с помощью втулок *C* и *D*. Внутренние поверхности втулок гладкие. Стержни входят во втулки без зазора (скользящая посадка). Определить реакции опор конструкции в точках *A* и *B*.



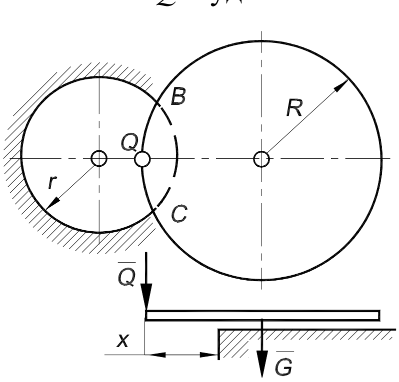
32. (Омск. политех. ин-т, 1982)

К концам двух невесомых стержней, подвешенных на шарнире *O*, прикреплены цилиндры *1* и *2* весом *G* каждый. Третий цилиндр весом *Q* опирается на два первые так, что вся система находится в равновесии. Найти зависимость между углами α и β.



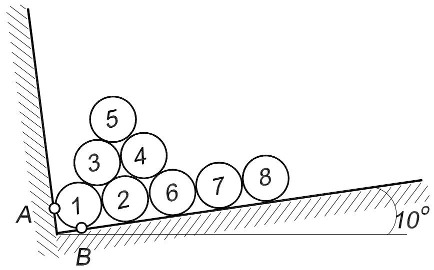
33. (Омск. политех. ин-т, 1983)

Над круглым отверстием в полу радиусом *r* положена тонкая круглая пластинка весом *G* и радиусом *R*; к ее краю приложена сила *Q* так, что пластинка может поворачиваться около прямой *BC*. При каком расстоянии *x* сила *Q* будет минимальной?



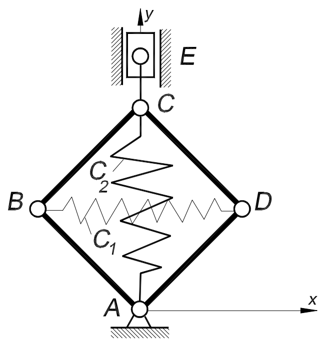
34. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1983)

Раскатится ли система восьми одинаковых цилиндрических труб? Трение не учитывать. Определить реакции опор, действующие на трубу с номером *1*.



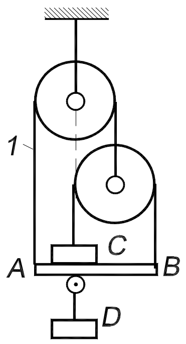
35. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1988)

Четыре однородных стержня массой m и длиной l каждый с помощью шарниров образуют квадрат $ABCD$, противоположные вершины которого соединены пружинами жесткостью c_1 и c_2; длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы. К вершине C квадрата с помощью невесомого стержня CE прикреплен ползун массой M, который может скользить в вертикальных направляющих. Пренебрегая трением, найти деформации пружин при равновесии.



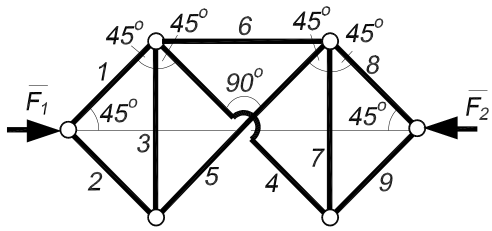
36. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1988)

Два груза C и D веса P каждый с помощью невесомых блоков одинакового радиуса, веревок и балки AB приведены в состояние равновесия, причем балка горизонтальна. Определить усилие в ветви *1* веревки, если все ветви вертикальны, а ось блока с неподвижным центром и точка подвеса груза D лежат на одной вертикали.



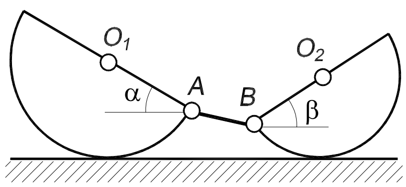
37. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989)

Определить усилие в стержне *6* стержневой конструкции, нагруженной одинаковыми по модулю силами F_1 и F_2, которые направлены по одной прямой.



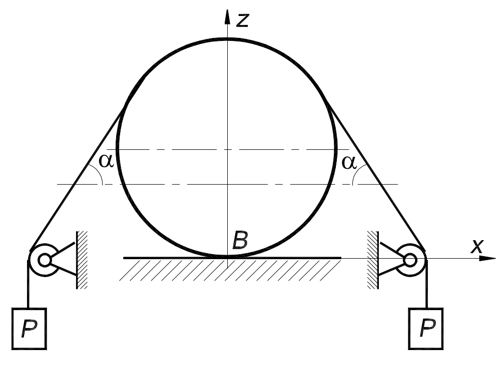
38. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989)

Два однородных полудиска O_1A и O_2B радиусов R и r соединены шарнирно однородным стержнем AB. Веса дисков – P, Q, вес стержня – p. Система расположена в вертикальной плоскости, полудиски опираются о горизонтальный гладкий пол. Определить углы α и β при равновесии системы.



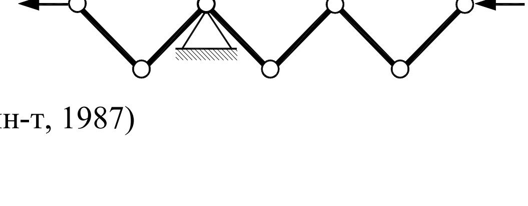
39. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989)

На горизонтальной гладкой опоре расположен круглый цилиндр весом $2Q$ и радиусом r, разрезанный вертикальной плоскостью, проходящей через его ось. Чтобы части цилиндра не распадались на середине его длины, на него накинута нить, несущая на концах грузы весом P каждый. Участки нити, непосредственно сходящие с цилиндра, образуют с горизонтом равные углы α. Определить наименьшую величину P, при которой части цилиндра будут в покое. Найти также силу взаимодействия частей цилиндра и реакцию опоры при минимальном весе грузов.



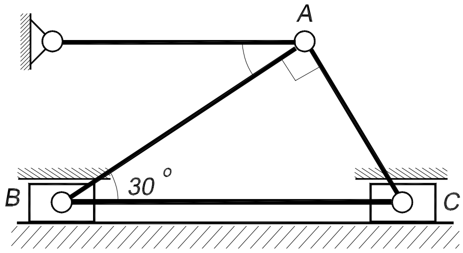
40. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1988)

Шарнирный трехкратный параллелограмм находится под действием горизонтальных сил F и Q. Сила F задана. Определить величину силы Q, которая обеспечивает равновесие параллелограмма.



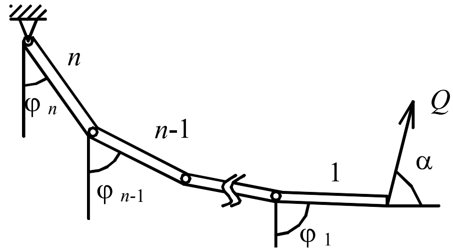
41. (Томск. политехн. ин-т, 1987)

Конструкция состоит из трех однородных стержней одинакового веса P, соединенных шарнирно в точке A, и невесомых ползунов B и C, связанных нерастяжимой нитью. Конструкция расположена в вертикальной плоскости. Трение в направляющих отсутствует. Углы между стержнями указаны на чертеже. Определить усилия в стержнях узла A.



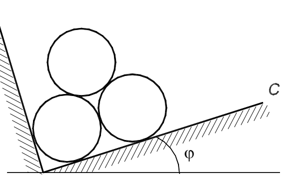
42. (Россия, 1996, 3 балла)*

Система, состоящая из n одинаковых однородных стержней веса P каждый, подвешена в вертикальной плоскости. Один конец этой системы шарнирно закреплен, а на второй действует сила Q, образующая угол α с горизонтом ($P > Q\sin\alpha$). Определить углы, которые образуют стержни с вертикалью в положении равновесия. Трением в шарнирах пренебречь.



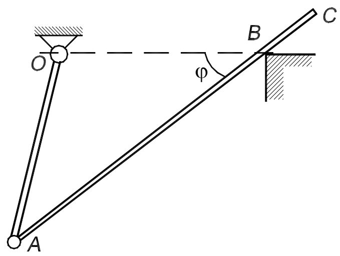
43. (Россия, 1997, 3 балла)

Три гладких однородных цилиндра опираются на две взаимно перпендикулярные плоскости AB и BC. Каков наименьший угол наклона φ плоскости BC, при котором система сохраняет равновесие?



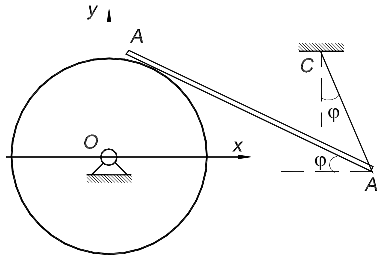
44. (Россия, 1998, 5 баллов)

Два однородных стержня: OA длиной l, весом P и AC длиной $2l$, весом $2P$, соединены шарниром A. Стержень OA укреплен шарнирно, а стержень AC опирается на острие B. Определить, при каком угле φ система находится в равновесии в вертикальной плоскости, если расстояние $OB = l$ (отрезок OB – горизонтальный).



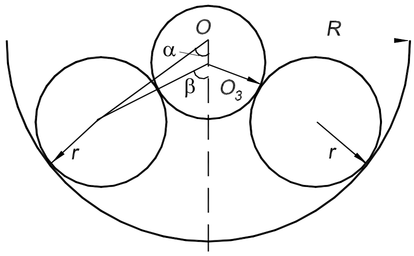
45. (Россия, 2000, 5 баллов)

Тонкий однородный стержень длиной $2r$ опирается на шероховатый диск радиуса r и удерживается в равновесии невесомой нитью длины r. Определить координаты точки C прикрепления нити, если угол наклона стержня с горизонталью равен φ и нить составляет с вертикалью также угол φ. Трением в шарнире O пренебречь.



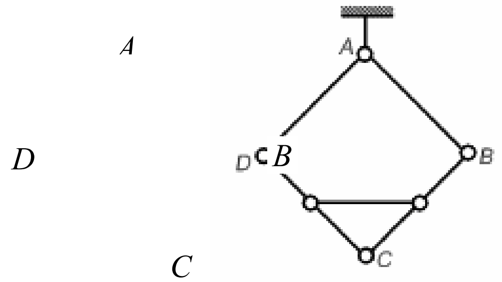
46. (Поволжье – Урал, Оренбург, 2001, 6 баллов)

Два однородных цилиндра массой m каждый положены на внутреннюю поверхность полого цилиндра. Они удерживают третий цилиндр массы M. Определить зависимость между углами α и β в положении равновесия. Проскальзывания нет.



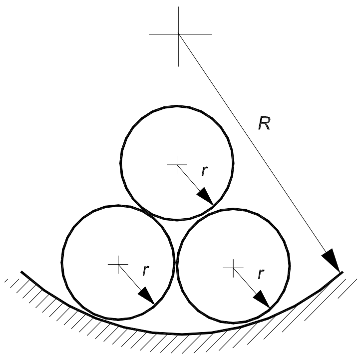
47. (Тамбов, ТИХМ, 1992, 4 балла)

Стороны ромба $ABCD$, подвешенного в точке A, сделаны из тяжелых однородных стержней, соединенных шарнирно. Середины сторон BC и CD соединены невесомым стержнем-распоркой, которая фиксирует ромб. Зная вес P ромба и длины его диагоналей $AC = a$ и $BD = b$, определить усилие в распорке.



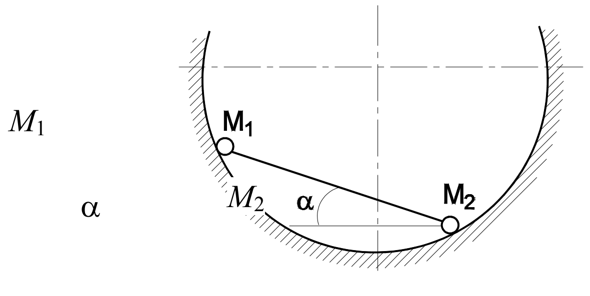
48. (Тамбов, ТГТУ, 1996, 4 балла)

Три одинаковые трубы радиуса r находятся в равновесии в неподвижно закрепленной трубе радиуса R, располагаясь в два ряда. Все трубы малого радиуса касаются друг друга, при этом трубы нижнего ряда касаются также трубы большего радиуса. Найти наибольшее значение R, при котором равновесие системы еще возможно.



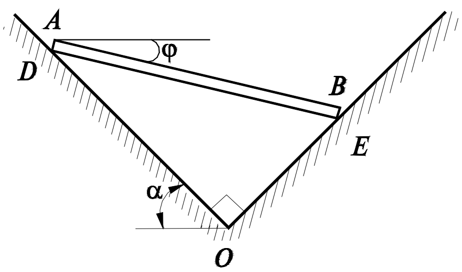
1. (СССР, 1986, 3 балла)

Две тяжелые точки M_1 и M_2 соединены между собой невесомым жестким стержнем, находящимся внутри гладкой сферы. Длина стержня и радиус сферы равны. Определить при равновесии угол α между стержнем и горизонтом, если масса точки M_2 в два раза больше массы точки M_1.



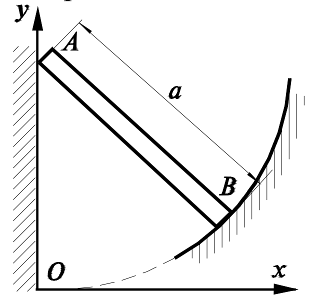
2. (СССР, 1990, 5 баллов)

Концы расположенного в вертикальной плоскости тяжелого однородного стержня могут скользить в прорезях взаимно перпендикулярных плоскостей OD и OE. Плоскость OD составляет с горизонтом угол α. Пренебрегая трением, определить значение угла φ при равновесии стержня. Будет ли положение равновесия стержня устойчивым?



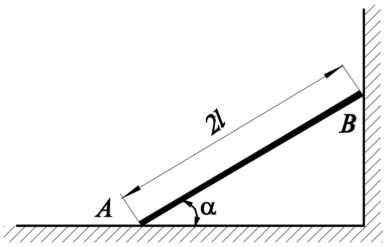
3. (РСФСР, 1982, 3 балла)

Однородный стержень длины a опирается одним концом A на гладкую вертикальную стенку, другим B – на гладкий профиль, расположенный в вертикальной плоскости. Какова должна быть форма профиля, чтобы стержень мог оставаться в покое в любом положении?



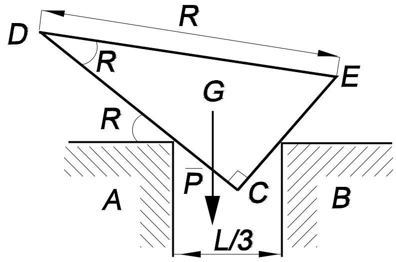
4. (РСФСР, 1987, 3 балла)

Однородный стержень AB весом G опирается на шероховатые горизонтальную и вертикальную плоскости. Угол α и коэффициент f трения таковы, что стержень не находится в равновесии. Определить величину и направление наименьшей силы P, которая должна быть приложена в центре тяжести стержня для того, чтобы стержень в данном положении был неподвижным.



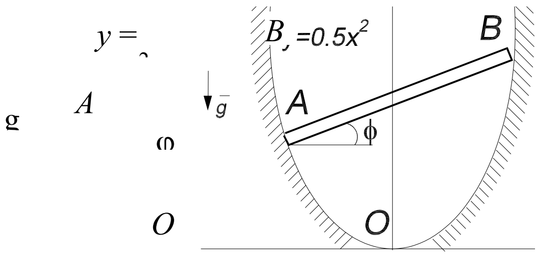
5. (Аз. ССР, 1984, 3 балла)

Гладкий однородный прямоугольный клин с указанными на рисунке размерами и веса P вложен прямым углом между краями двух столов одинаковой высоты, находящихся друг от друга на расстоянии $l/3$. Один из острых углов клина равен α. Найти положение равновесия клина и давление клина на опоры в точках A и B.



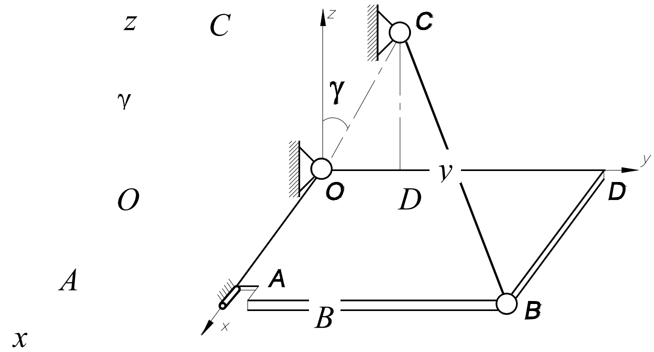
6. (Молд. ССР, 1988)

Концы тонкого тяжелого однородного стержня AB длины l = 4 м могут скользить по гладкой параболе $y = 0{,}5x^2$. Определить значения угла φ при равновесии.



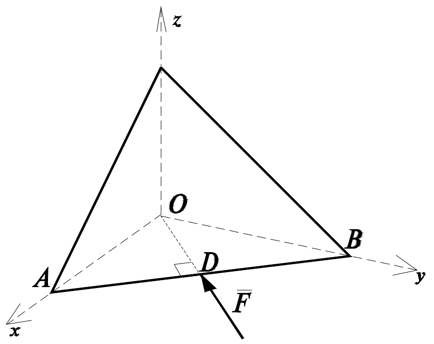
1. (СССР, 1983, 10 баллов)

Тяжелая тонкая однородная прямоугольная плита *OABD* весом *Q* удерживается в горизонтальном положении сферическим шарниром *O*, цилиндрическим шарниром *A* и тонким тяжелым стержнем *CB* весом *P*. Стержень прикреплен сферическими шарнирами к плите в точке *B* и к вертикальной стене в точке *C*. Считая трение во всех шарнирах пренебрежимо малым и угол γ известным, найти составляющую реакции цилиндрического шарнира *A*, параллельную оси *Oy*.



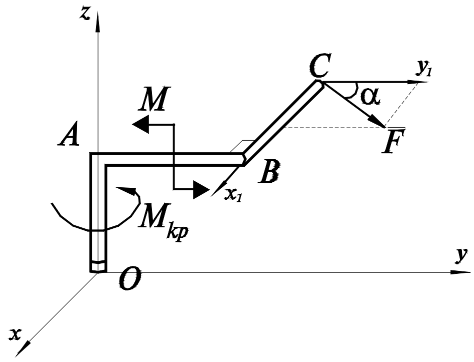
2. (СССР, 1988, 5 баллов)

Однородная равносторонняя пластинка веса *P* стороной $AB = l$ опирается на горизонтальный пол *XOY*, ее стороны *AC* и *BC* касаются стен *XOZ* и *YOZ*. Пренебрегая трением, определить силу $\vec{F}$ (лежащую в плоскости *XOY*), удерживавшую пластинку в равновесии.



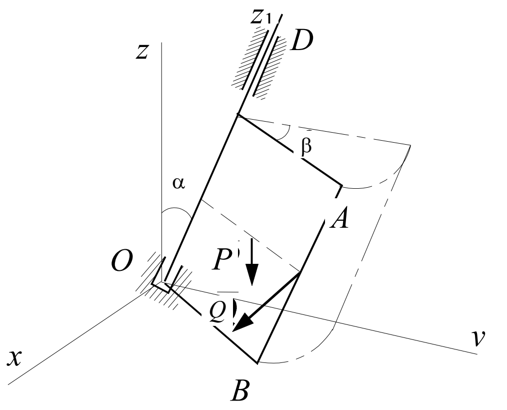
3. (СССР, 1989, 4 балла)

Конец *O* ломаного стержня *OABC* жестко защемлен. Стержень нагружен крутящим моментом $M_{кр}$, парой сил с моментом *M*, расположенной в плоскости *YOZ*, и силой *F*. Сила *F* расположена в плоскости X_1CY_1 ($X_1//X$, $Y_1//Y$) и составляет с осью Y_1 угол $\alpha = 60°$. Определить модуль реактивного момента заделки, если $OA = a$, $AB = b$, $BC = c$. Проведите вычисления при $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 0{,}5$ м, $F = 2$ Н, $M_{кр} = 0{,}5$ Н·м, $M = 1$ Н·м.



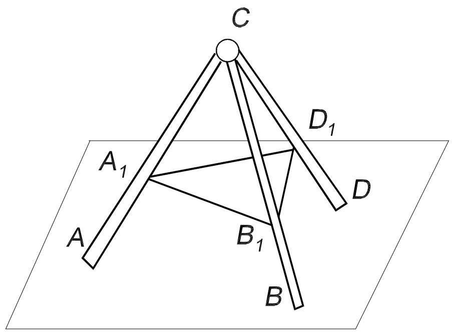
4. (Аз. ССР, 1984, 3 балла)

Дверь $OBAD$ может вращаться вокруг оси OZ при пренебрежимо малом трении в подшипниках O и D. Ось OZ образует с вертикалью угол α. Под действием только своего веса дверь остается в вертикальной плоскости zOz_1. Найти положение равновесия двери, если к середине ребра AB приложена сила Q, перпендикулярная плоскости ее полотна. Считая дверь однородной прямоугольной пластиной с размерами $2a$ и $2b$ ($AD = 2a$, $OD = 2b$) и веса P, определить реакции опор O и D.



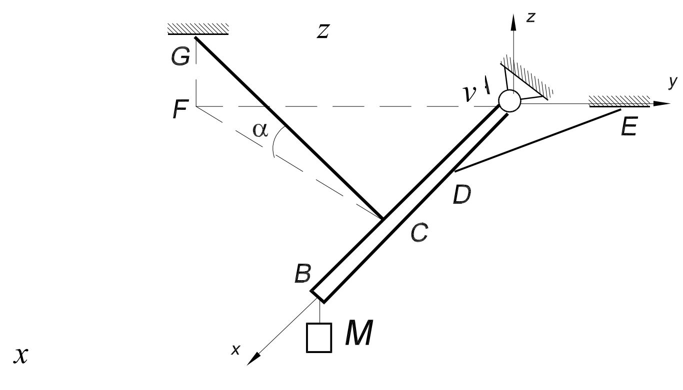
5. (БССР, 1984)

Стержни CA, CB и CD одинаковой длины соединены в точке C сферическим шарниром, концами A, B, D опираются на гладкую горизонтальную плоскость. Середины стержней A_1, B_1, D_1 связаны нитями, длины которых в два раза меньше длин стержней. Определить натяжение нитей, если стержни однородные и масса каждого равна M.



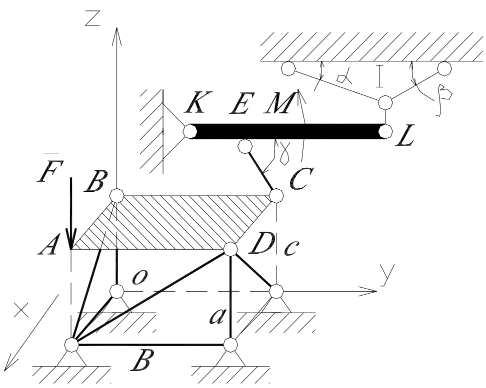
6. (Каз.ССР, 1985, 3 балла)

Однородная балка AB весом P и длиной $4a$ прикреплена к вертикальной стене сферическим шарниром A и удерживается перпендикулярно стене невесомыми растяжками DE и GC, причем DE лежит в горизонтальной плоскости, а GC составляет с этой плоскостью угол α. К концу B балки подвешен груз M весом Q. Определить реакцию шарнира A и натяжение растяжек, если $AE = AD = DC = a$, $AF = 2a$.



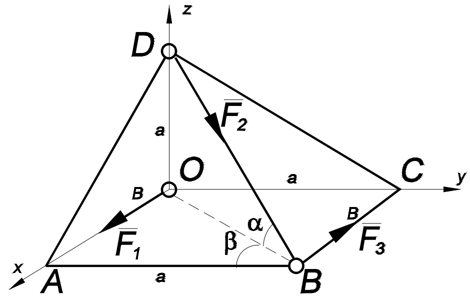
7. (Узб. ССР, 1986, 3 балла)

Однородная прямоугольная плита $ABCD$, вес которой P, удерживается в горизонтальном положении стержнями *5*, *6*, *7*, *8*, *9*. Однородный стержень KL весом Q закреплен в плоскости OYZ стержнями *1*, *2*, *3*, *4*. Определить усилия в стержнях *1* и *2*, считая все стержни невесомыми, если $P = 8$ кН; $Q = 6$ кН; $P = 4$ кН, $M = 3$ кН·м, $a = b = c = 2$ м; $KL = 5$ м; $KE = 2$ м; $\alpha = \beta = = \gamma = 45°$; $KL \,||\, OY$.



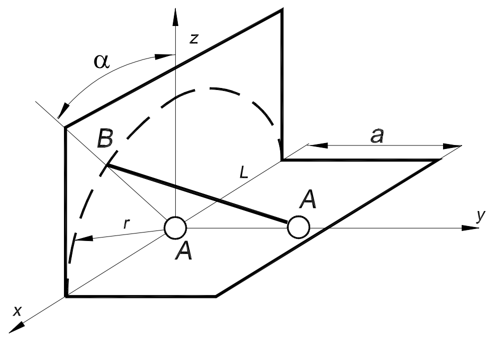
8. (Л, 1983)

Система состоит из трех сил: F_1, F_2, F_3, приложенных к вершинам O, B, D пирамиды. При каком значении $OA = BC = b$ угол между главным вектором и главным моментом данной системы будет равен 120°? $F_1 = F_2 = F_3 = P$, $AB = OC = OD = a$.



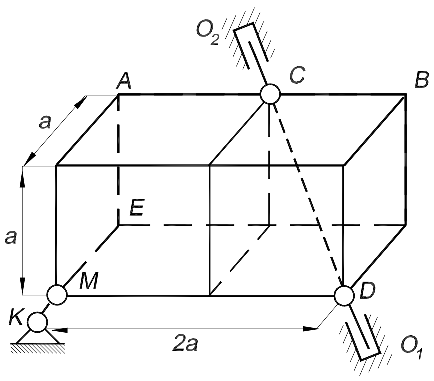
9. (Коммунарск. горно-металлург. ин-т, 1978)

Однородный тонкий стержень AB длиной l и весом Q шарнирно укреплен в точке A и опирается на вертикальную стену другим концом B. Вертикальная стена находится на расстоянии a от шарнира A. В момент возможного возникновения движения стержня определить значение угла α, который образует с вертикальной плоскостью YOZ плоскость OAB. Коэффициент трения между концом B стержня и стеной равен f. Трением в шарнире пренебречь.



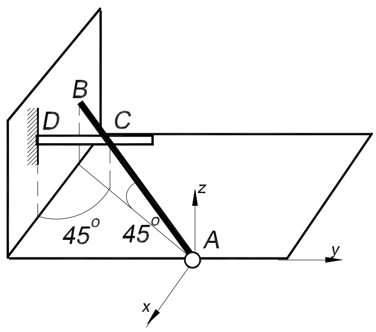
10. (МВТУ, 1980)

Однородный прямоугольный брус размерами $a \cdot a \cdot 2a$, имеющий возможность вращаться вокруг оси O_1O_2, удерживается в равновесии нитью MK. Ось O_1O_2 проходит через вершину D и среднюю точку C ребра AB, точка K лежит на продолжении прямой ME, ребро EA вертикально. Определить натяжение нити MK, если вес бруса P. Трением в опорах пренебречь.



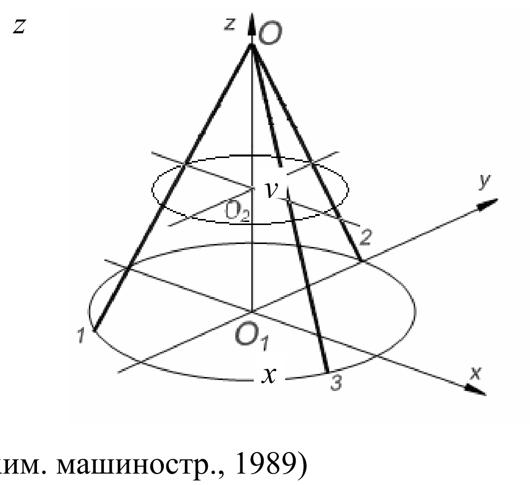
11. (Новочеркасск. политех. ин-т, 1982)

Однородная балка AB весом P, прикрепленная к полу шарниром A, опирается концом B на гладкую вертикальную стену, а промежуточной точкой C на гладкий стержень DC, заделанный в стену перпендикулярно к ее плоскости. Балка с плоскостью пола и ее горизонтальная проекция с плоскостью стены составляет равные углы по 45°. Определить реакцию шарнира A и реакции опор в точках B и C, если $AB = 4\ BC$.



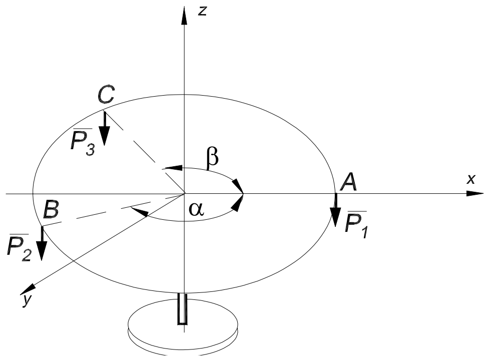
12. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989)

Круглое кольцо радиуса R посредством трех нитей одинаковой длины, прикрепленных к кольцу в равноотстоящих друг от друга точках, подвешено к неподвижной точке O. На образовавшийся таким образом конус надето меньшее кольцо радиуса r, равного с первым веса. Кольцо это при равновесии системы делит нити пополам. Найти отношение расстояний колец от точки O.



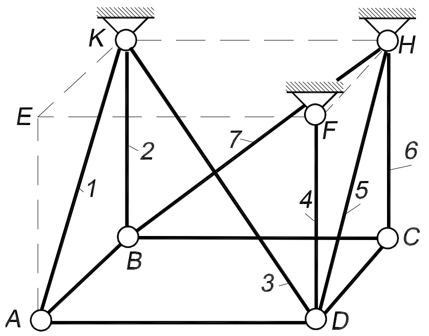
13. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989)

Круглая невесомая пластинка покоится в горизонтальном положении, опираясь центром на острие O. Разместить по окружности пластинки, не нарушая равновесия, грузы P_1 = 1,5 кН, P_2 = 1 кН, P_3 = 2 кН в точках A, B и C, то есть найти углы α и β.



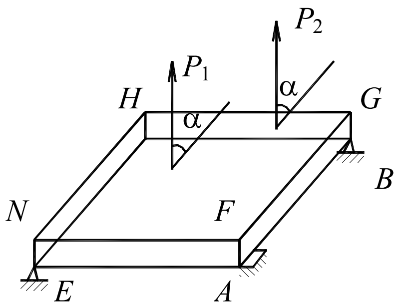
14. (Тольяттинск. политехн. ин-т, 1986)

Для крепления прямоугольной плиты $ABCD$ можно использовать любые из семи заданных шарнирных стержней. Указать все возможные комбинации стержней, обеспечивающие жесткое и статически определенное крепление плиты при любом ее нагружении.



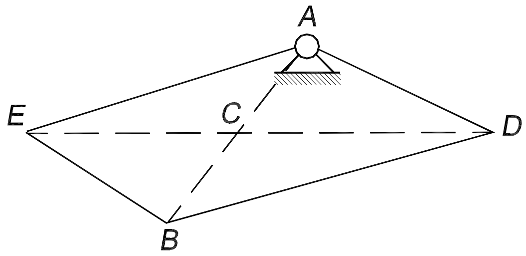
15. (СНГ, 1992, 3 балла)

Прямоугольная однородная плита весом Q соединена с неподвижной опорой цилиндрическим шарниром A и сферическим шарниром B. Плита удерживается в горизонтальном положении острием E, упирающимся в гладкую поверхность нижней грани плиты. К верхней грани плиты $FGHN$ приложены две параллельные силы, равные P и лежащие в плоскости этой грани. Линии действия сил образуют острый угол α со стороной NH, а центр тяжести плиты находится от них на равных расстояниях. Определить реакции опор, если известно, что $AF = AB/5 = AE/10$.



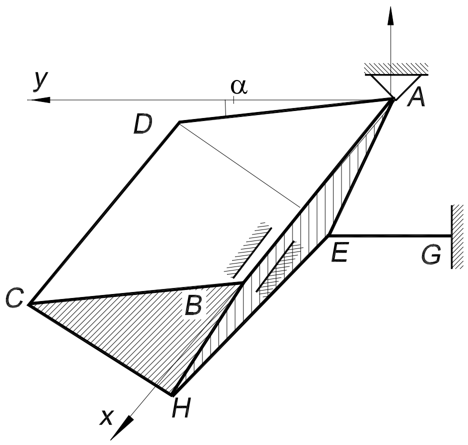
16. (Россия, 1993, 4 балла)

Однородный горизонтально расположенный квадрат $ADBE$ весом P с диагоналями AB = DE = $2l$ прикреплен в точке A к неподвижной опоре сферическим шарниром. Квадрат уравновешен некоторой дополнительной системой активных сил, о которой известно: 1) линия действия равнодействующей этой системы проходит через точку B; 2) если к этой системе добавить вес квадрата, то при приведении новой системы сил к точке D ее главный момент равен $Pl\sqrt{5}/2$. Определить реакцию шарнира A, пренебрегая толщиной квадрата.



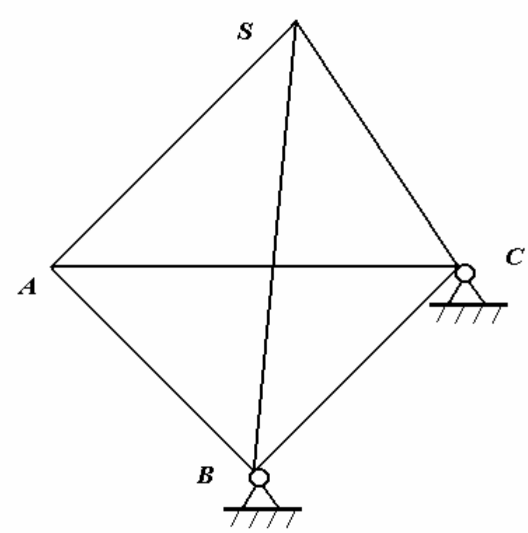
17. (Россия, 1995, 4 балла)

Невесомый симметричный треугольный короб $ABCDEH$ длиной $AB = CD = 4l$ со сторонами $AE = DE = l$ и углом $AED = \pi/2$ удерживается в равновесии сферическим и цилиндрическим шарнирами в точках A и B, соответственно, и невесомым стержнем EG. Ось шарниров A и B горизонтальна, а стержень EG расположен горизонтально в перпендикулярной ей плоскости. В короб наливается максимально возможное количество жидкости с массовой плотностью ρ. Определить величину реакции в шарнире A, если край короба AD составляет угол $\varphi = 15^{o}$ с горизонтом.



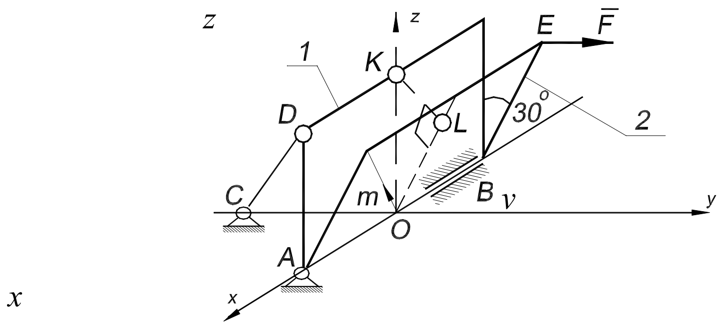
18. (Тамбов, ТИХМ, 1993, 4 балла)

Треугольная пирамида $SABC$ с равными ребрами и весом P расположена так, что ее основание ABC горизонтально, а вершины B и C закреплены с помощью неподвижных шарниров. В центре тяжести каждой боковой грани приложены силы, равные по модулю P и направленные перпендикулярно к граням вовнутрь пирамиды. Какую надо приложить в вершине S силу F, параллельную вектору $\overline{AB}$, чтобы пирамида находилась в данном положении в равновесии? Трение в шарнирах не учитывать.



19. (Тамбов, ТГТУ, 1995, 5 баллов)

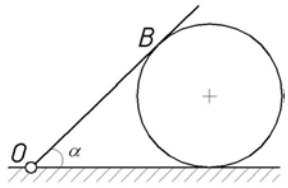
Две прямоугольные однородные плиты P = 4 кН каждая соединены так, что могут вращаться вокруг неподвижной оси AB независимо друг от друга, при этом в точке A – неподвижный пространственный шарнир, в точке B – подшипник. Плиты находятся в равновесии с помощью невесомых стержней CD и KL с шарнирами на концах. Плита *1* расположена в плоскости xOz, а плита *2* составляет с ней угол 30°. На плиту *2* действует сила F = 2 кН, приложенная в точке E и направленная параллельно оси Oy, и вектор-момент m некоторой пары, направленной по $\overline{ON}$ и численно равный $m = \sqrt{2}\,a$ кН·м, а – в метрах. $OA = OB = AN = BE = AD = OK = OC = a$ (м), KL – в плоскости yOz и $KL \perp OL$, $OL \parallel AN$. Определить величину и характер (растяжение-сжатие) усилий в стержнях CD и KL.



5. ЗАДАЧИ С ТРЕНИЕМ

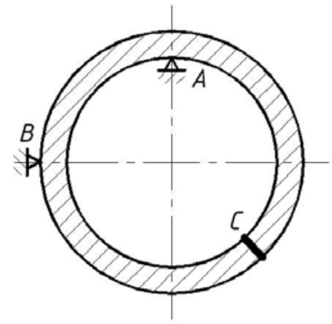
1. (СССР, 1982, 3 балла)

Тяжелая балка OA, закрепленная одним концом в шарнире O, опирается в точке B на шар весом P, лежащий на неподвижной горизонтальной плоскости. Определить угол α при равновесии, если коэффициент трения шара о балку и горизонтальную плоскость одинаков и равен f. Трение качения отсутствует.



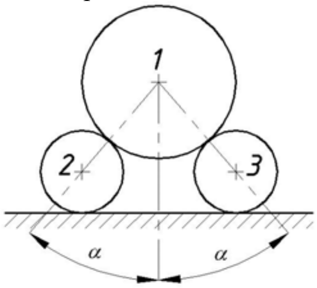
2. (СССР, 1983, 3 балла)

Однородное кольцо весом P свободно опирается в точках A и B на неподвижные призмы, которые расположены, соответственно, на вертикальном и горизонтальном диаметрах кольца. Считая коэффициенты трения кольца о призмы одинаковыми, определить такое их значение, при котором точечный груз C весом Q, закрепленный в любом месте правой половины кольца, будет оставлять последнее в покое. Поперечными размерами кольца пренебречь.



3. (СССР, 1986, 4 балла)

Цилиндр *1* веса Q_1 опирается на два одинаковых цилиндра веса Q_2, как показано на рисунке. Коэффициент трения скольжения между цилиндрами равен f. Определить максимальный угол α и минимальный коэффициент трения f_0 между цилиндрами *2* и *3* и опорной поверхностью.

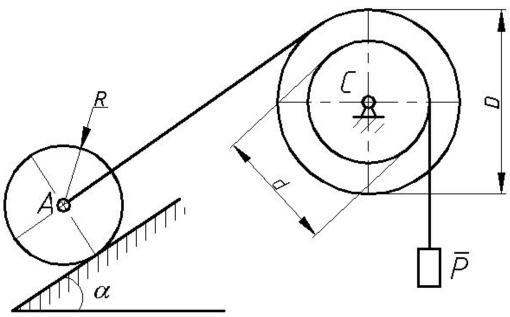


4. (СССР, 1987, 5 баллов)

Поверхность параболического купола описывается уравнением $z = H - (x^2 + y^2)/H$. На высоте h на купол был положен груз. При каких значениях h возможно равновесие груза, если коэффициент трения между грузом и куполом f?

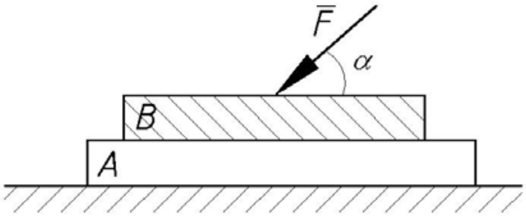
5. (СССР, 1987, 6 баллов)

Цилиндр веса Q и радиуса R лежит на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α, и удерживается тросом, намотанным на барабан ступенчатого вала диаметра D. На барабан диаметра d намотан трос, к концу которого подвешен груз веса P. Коэффициент трения качения цилиндра A о плоскость равен δ, коэффициент трения скольжения равен f, при этом $\mathrm{tg}\,\alpha > \delta/R$, $f > \delta/R$. При каких значениях P система будет находиться в равновесии?



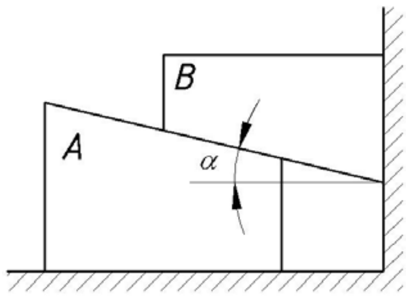
6. (СССР, 1989, 6 баллов)

На верхней грани прямоугольного бруса A веса P_1 находится прямоугольный брус B веса P_2. Брус A опирается нижней гранью на горизонтальную плоскость, причем коэффициент трения между ними равен f_1. Коэффициент трения между брусками A и B равен f_2. К брусу B приложили силу под углом α к горизонту. При каких значениях силы F система будет оставаться в равновесии?



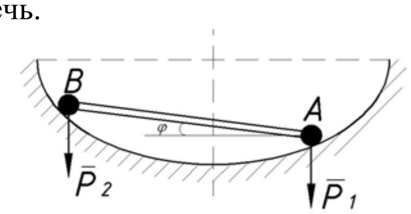
7. (СССР, 1990, 4 балла)

Призма B опирается на клин A и вертикальную стену. Массы призмы и клина одинаковы. Трение между клином и призмой пренебрежимо мало. Коэффициенты трения между клином и полом, призмой и стеной одинаковы и равны f. Наклонная плоскость клина составляет с горизонтом угол α. При каких значениях f призма и клин будут оставаться в покое?



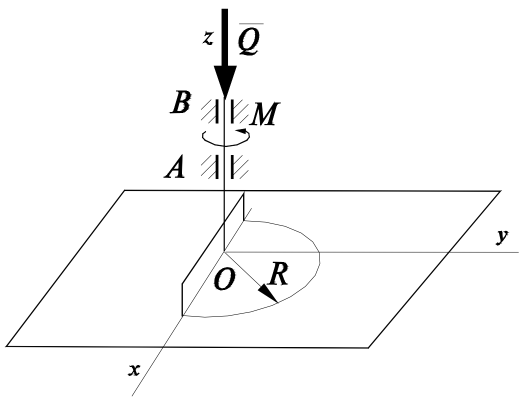
8. (РСФСР, 1982, 3 балла)

Система, состоящая из двух шаров A и B с весами P_1 и P_2 ($P_1 > P_2$) и соединяющего их невесомого стержня длиной l, помещена в сферическую чашу радиуса $r = 0{,}5\sqrt{2}\,l$, коэффициент трения скольжения шаров о поверхность чаши равен f. Найти наименьшее значение угла φ между стержнем и горизонтом, при котором система может находиться в покое внутри чаши. Размерами шаров пренебречь.



9. (РСФСР, 1984, 5 баллов)

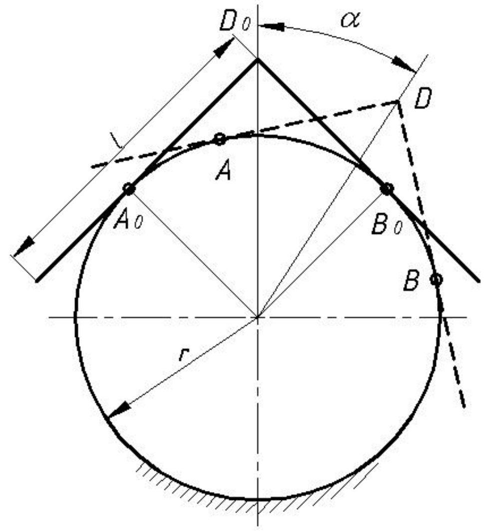
Жесткая стержневая фигура опирается равномерно полуокружностью на негладкую горизонтальную плоскость. Пренебрегая весом фигуры и трением в подшипниках A и B, определить для случая покоя наибольший движущий момент M и соответствующие реакции опор, если даны: радиус R, вертикальная сила Q и коэффициент сцепления f ($OA = AB = R$).



10. (РСФСР,1987, 5 баллов)

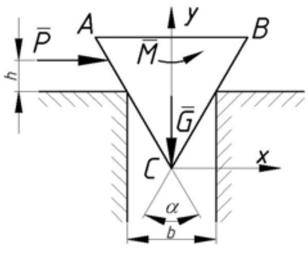
Плоский угольник состоит из двух одинаковых тонких однородных стержней. Стержни жестко соединены между собой в вершине D под углом 90°. Угольник установлен на неподвижную горизонтальную шероховатую цилиндрическую опору радиуса r, коэффициент трения скольжения f_0 = 0,268. Угольник поворачивают по часовой стрелке на угол α из начального положения A_0B_0, останавливают и затем освобождают без толчка. После освобождения угольника возможны два случая: 1) в точке B стержень соприкасается с опорой, 2) в точке B между ними имеется небольшой зазор $\Delta l << r$.

Опишите качественно дальнейшее движение угольника после его освобождения и определите предельные значения угла α, при которых угольник будет иметь различные состояния равновесия – безразличное, устойчивое, неустойчивое. Сопротивлением перекатывания пренебречь.



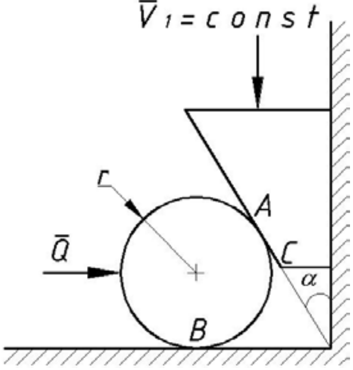
11. (РСФСР, 1988, 5 баллов)

В паз шириной b помещена негладкая призма весом G, сечение которой – равнобедренный треугольник с углом α при вершине C. К призме приложена пара сил с моментом M и наименьшая уравновешивающая сила P, перпендикулярная силе G и параллельная оси x, при которой призма будет находиться в покое. Определить реакцию связи и силу P. Дано: коэффициент трения f, $\alpha = 4\varphi$, tg $\varphi = f$, $M = bG$, $h = 3/2\, f\, b$.



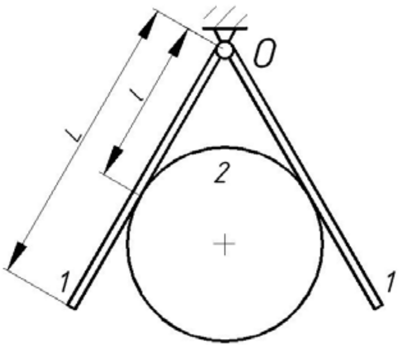
12. (РСФСР, 1988, 5 баллов)

Клин равномерно перемещается вертикально вниз, касаясь гладкой стены и шероховатой поверхности катка. Каток при этом может перемещаться по негладкой горизонтальной плоскости. Исследовать влияние угла α клина и коэффициента трения скольжения f связях A и B на характер движения цилиндрического катка. Силу N_A, перпендикулярную к стороне AC клина, считать постоянной. Каток невесомый.



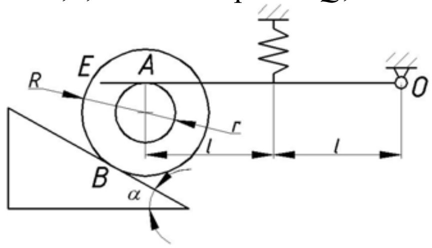
13. (РСФСР, 1990, 3 балла)

Шар *2* веса G_2 и радиуса r удерживается силами трения между одинаковыми пластинками *1* веса G_1 каждая, шарнирно подвешенными на горизонтальной оси O. Поперечными размерами пластин пренебречь. Длина пластины равна L, расстояние от оси O до точки касания пластины с шаром – l, коэффициент трения между шаром и пластиной – f. Считая заданными указанные геометрические размеры, найти условия, которым должны удовлетворять величины f, G_1, G_2 при равновесии системы.



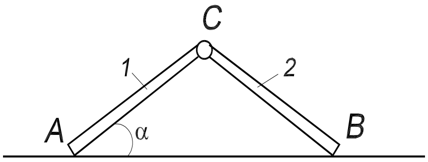
14. (РСФСР, 1990, 3 балла)

Определить деформацию λ пружины жесткостью c для системы, изображенной на рисунке в положении предельного состояния равновесия. Исходные данные: отношения радиусов двухступенчатого катка $r/R = 0{,}2$, коэффициент сцепления в точках A и B контакта катка с горизонтально расположенным невесомым стержнем OE и наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30°$ плоскостью $f = 0{,}577$, отношение коэффициента трения качения катка в точке B к большему радиуса катка $\delta/R = 0{,}5$, вес катка равен Q, в точке O – шарнир.



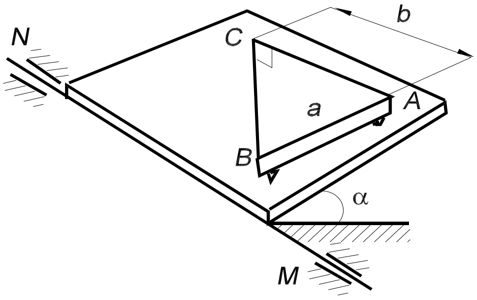
15. (БССР, 1985, 3 балла)

Однородные стержни *1* и *2* одинаковой длины с массами m_1 и m_2, расположенные в вертикальной плоскости, соединены идеальным шарниром C, а концами A и B опираются на шероховатую плоскость. Коэффициент трения между стержнями и полом равен f. Определить наименьший угол α наклона стержней к горизонту в состоянии равновесия.



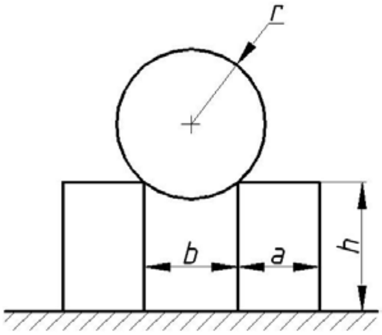
16. (БССР, 1982)

Треугольная пластина весом P лежит на наклонной плоскости и опирается на нее шаровой катковой опорой A и двумя штырями B и C. Коэффициенты трения скольжения штырей B и C о плоскость, соответственно, f_1 и f_2 ($f_1 < f_2$). Определить угол α, при котором пластина потеряет равновесие, $CA \,||\, MN$.



17. (БССР, 1982)

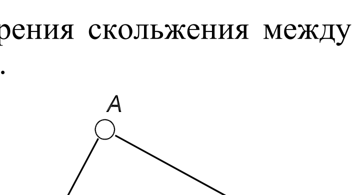
Цилиндр веса P опирается на два одинаковых параллелепипеда того же веса. Радиус цилиндра r и размеры параллелепипедов a и h заданы. Коэффициент трения между параллелепипедами и горизонтальной плоскостью равен f. Каким условиям должно удовлетворять расстояние b между параллелепипедами для того, чтобы система находилась в равновесии? Трением между цилиндром и параллелепипедами пренебречь.



18. (Латв. ССР, 1983, 3 балла)

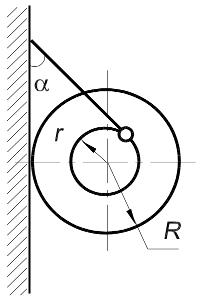
Кривошипно-ползунный механизм, расположенный в вертикальной плоскости, находится в равновесии в указанном на рисунке положении. Вес стержней *OA* и *AB* одинаков, ползун *B* – невесомый, опирается на шероховатую поверхность *1 – 1*.

Определить, коэффициент трения скольжения между ползуном и поверхностью *1 – 1*, пренебрегая трением в шарнирах.



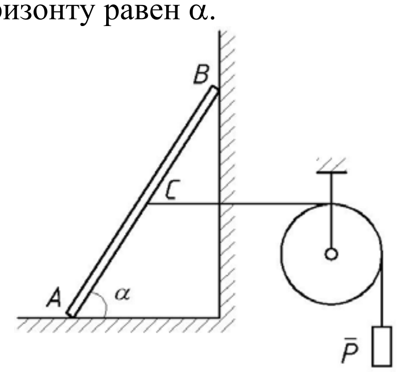
19. (Латв. ССР, 1988)

Катушка весом G, радиусами r и R удерживается в равновесии при помощи нити и негладкой вертикальной стены. Определить наименьший коэффициент трения f между катушкой и стеной, если угол $\alpha = 30°$ и $r/R = 0{,}2$.



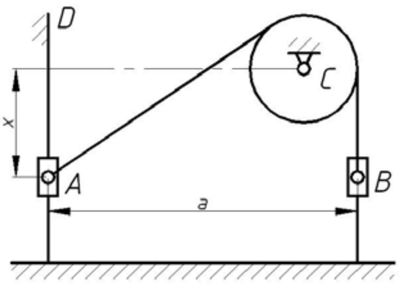
20. (Лит. ССР, 1987)

Однородный стержень AB веса G опирается одним концом на гладкий пол, другим – на шероховатую вертикальную стену; коэффициент трения стержня о стену равен f. Определить наибольший и наименьший вес груза P, чтобы стержень оставался в равновесии, если AC = BC, угол наклона стержня к горизонту равен α.



21. (Молд. ССР. 1984, 3 балла)

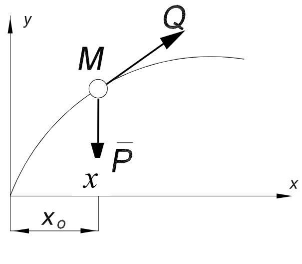
Два груза A и B, связанные невесомой нерастяжимой нитью ACB, могут двигаться по вертикальным направляющим, расстояние между которыми равно a. Коэффициент трения в направляющей груза A равен f, а трением в направлявшей груза B можно пренебречь. Каковы пределы изменения расстояния $x = DA$, в которых возможно равновесие системы, если груз B в n раз тяжелее груза A? Размерами идеального блока C можно пренебречь.



22. (УССР, 1988)

К точке M весом P, находящейся в равновесии в положении $x = x_0$ на шероховатой кривой $y = f(x)$ приложена сила Q, направленная по касательной к кривой вверх. Определить модуль этой силы, если коэффициент трения $f < (dy/dx)(x_0)$. Рассмотреть частный случай $y = \sin(x)$.

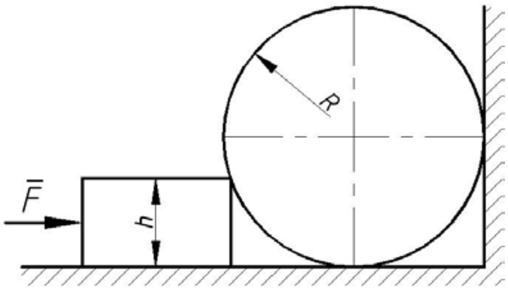
y



x_0

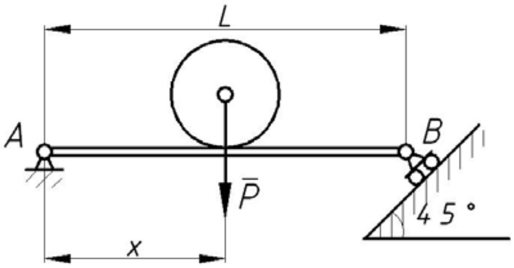
23. (Л., 1984, 3 балла)

Гладкий шар радиуса R и веса P, касаясь вертикальной стены, покоится на шероховатом горизонтальном полу (коэффициент трения скольжения равен f). С какой минимальной по величине силой F следует прижать к шару брусок высоты h, чтобы шар оторвался от пола?



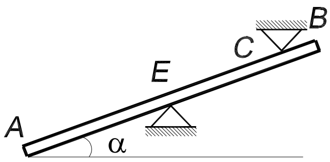
24. (Л., 1985)

Шарнирная опора A балки не закреплена, а установлена на шероховатую плоскость с коэффициентом трения f. Шарнирно-подвижная опора B расположена на наклонной плоскости под углом 45° к горизонтали. Определить точку приложения силы P (абсциссу x), при которой возможно смещение опоры A. Вес балки $2P$. Чему должны равняться f и x для того, чтобы в предельном равновесии балки вертикальные составляющие реакций опор A и B были бы одинаковыми?



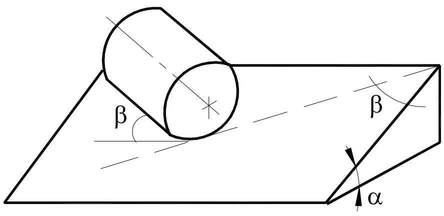
25. (М., 1987)

Тонкий однородный стержень AB веса P, который наклонен к горизонту под углом α, опирается на неподвижные призмы. Коэффициент трения стержня о призмы f. Какова должна быть длина стержня l, чтобы он находился в равновесии, если $CE = a$, $BC = b$?



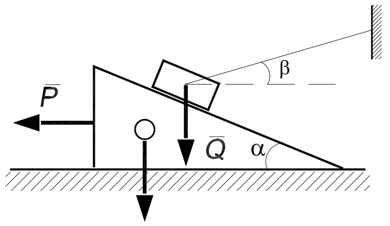
26. (Зап.-Сиб. Зона, Новосибирск. ин-т ж/д трансп., 1990)

Однородный цилиндр помещен на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом так, что его образующие составляют угол β с горизонтальной линией, проведенной на плоскости. Определить условия, при которых цилиндр будет в покое, если f – коэффициент трения скольжения, δ – коэффициент трения качения, r – радиус цилиндра.



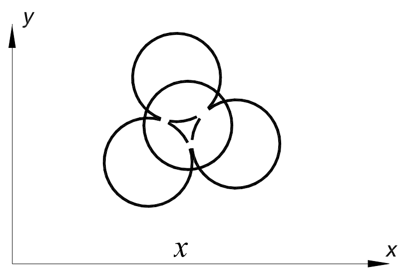
27. (Зап.-Сиб. зона, Новосибирск. ин-т ж/д трансп., 1990)

Груз веса Q привязан к неподвижной опоре тросом, составляющим с горизонтом угол β, и помещен на призму веса G, наклонная грань которой составляет угол α с горизонтом. Определить минимальную силу P, приводящую систему в движение, если угол трения груза о призму и призмы о плоскость равен φ.



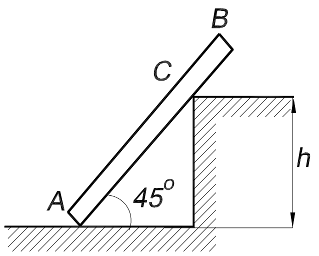
28. (Брянск, 1987)

На трех однородных, соприкасающихся друг с другом, шарах одного радиуса лежит сверху такой же четвертый шар. Какими должны быть коэффициенты трения скольжения между двумя шарами f_1 и между шаром и горизонтальной опорной плоскостью f_2, чтобы система была в равновесии?



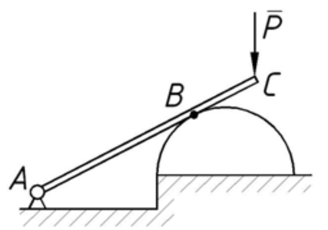
29. (Белорусс. политех. ин-т, 1983)

Однородный тяжелый стержень AB длиной $2h$ расположен в вертикальной плоскости. Концом A он опирается на шероховатый пол, а промежуточной точкой C – на выступ высотой h. В точке A коэффициент трения f равен 0,6. Будет ли стержень находиться в равновесии? Трением в точке C пренебречь.



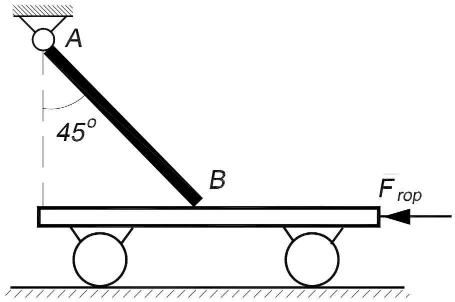
30. (Иркутск. политех. ин-т, 1986)

Стержень AC шарнирно закреплен на опоре в точке A и касается полудиска радиуса R и веса Q в точке B. Коэффициент трения скольжения между полудиском и опорной горизонтальной плоскостью $f = 0{,}5$. Какую вертикальную силу P надо приложить к стержню в точке C, чтобы сдвинуть вправо полудиск, если $AC = 2AB = 2R$? Весом стержня и трением в контактной точке B пренебречь.



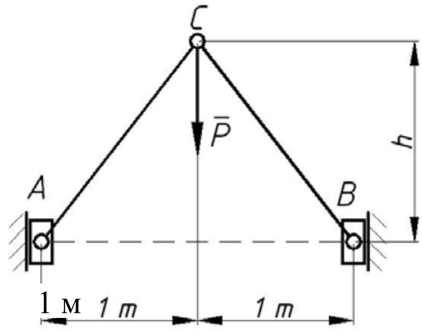
31. (МАТИ, 1982)

Однородный стержень AB шарнирно укреплен в точке A и опирается в точке B о неподвижную тележку. Коэффициент трения в точке B равен 0,3, а сила давления стержня на тележку равна N. Сдвинется ли тележка влево, если приложить к ней горизонтальную силу, равную $0{,}25N$?



32. (МВТУ, 1986)

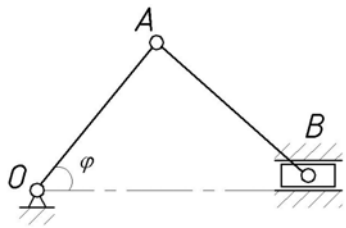
Какому условию должен удовлетворять размер h самотормозящего механизма, чтобы приложенная к узлу C сила P не могла вызвать скольжения ползунов A и B по вертикальным направляющим? Коэффициент трения $f = 0{,}2$; расстояние между направляющими 2 м.



1 м 1 м

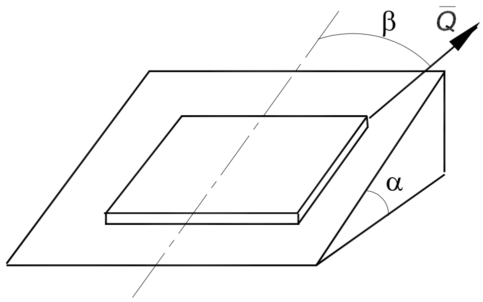
33. (МНИТ, 1979)

Определите наименьшее значение угла φ наклона кривошипа к горизонту, при котором шатунно-кривошипный механизм OAB будет находиться в равновесии. Кривошип OA, шатун AB и ползун B имеют одинаковый вес, равный P. Шатун и кривошип считать однородными стержнями, трением в шарнирах пренебречь. Коэффициент трения между ползуном и горизонтальной поверхностью f, $OA = AB = a$.



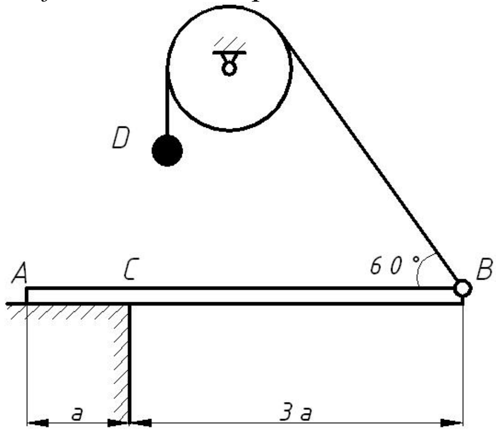
34. (МИИТ, 1978)

Тело весом P покоится на шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α. Коэффициент трения тела о плоскость равен f. Какому условию подчиняются величины α и f ? К телу прикладывают силу Q, лежащую в наклонной плоскости и направленную под углом β к линии наибольшего ската. При каком минимальном значении силы Q равновесие нарушится?



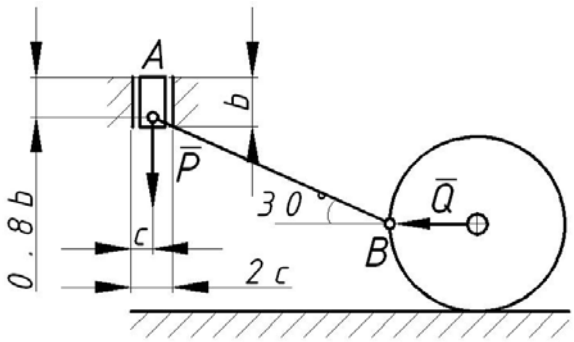
35. (Новочеркаск. политех. ин-т, 1982)

Однородная балка AB весом P, опирающаяся концом A на горизонтальную шероховатую поверхность, удерживается в горизонтальном положении нитью, образующей с ней угол 60° и переброшенной через блок. К концу нити подвешен груз D весом Q. Определить вес Q, при котором балка в указанном горизонтальном положении останется в равновесии, если коэффициент трения на опоре равен f. Исследовать решение.



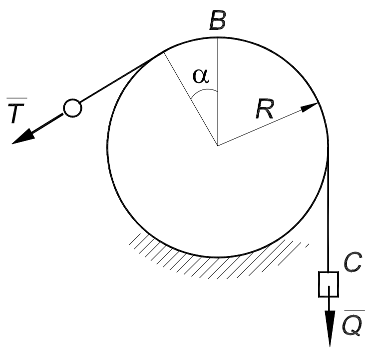
36. (Омск. политех. ин-т, 1983)

Система состоит из ползуна A, который может скользить по вертикальным направляющим стержня AB длиной $l = 2r$, однородного диска весом P_1 и радиусом r, в точках A и B – шарниры. На ползун действует вертикальная сила P_2. Определить минимальную горизонтальную силу Q, которую надо приложить в центре диска при равновесии системы; $b = r$, коэффициенты трения скольжения и качения – f и δ, соответственно; ширина ползуна – $2c$, трение в шарнирах не учитывать.



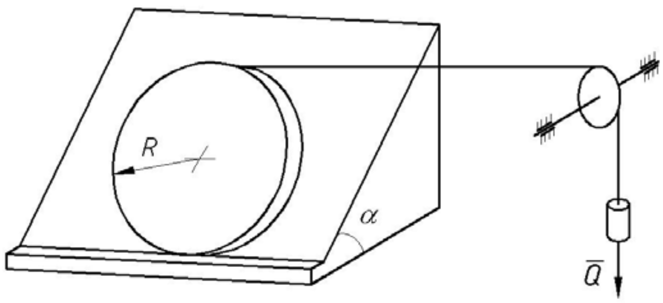
37. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1985)

Какую силу T надо приложить к нити, перекинутой через неподвижный блок, чтобы удержать в равновесии груз весом Q, закрепленный на другом ее конце? Коэффициент трения нити о блок f; α и R даны.



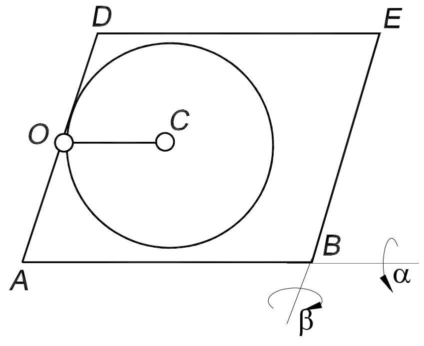
38. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1987)

На наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту лежит однородный диск весом *P* и радиусом *R*. На диск намотана нить. К свободному концу нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешен груз весом *Q*. При каком значении *Q* диск будет равномерно скользить по плоскости, совершая одновременно качение без скольжения по бортику *AB*? Коэффициент трения скольжения равен *f*, трение качения и трение на блоке не учитывать.



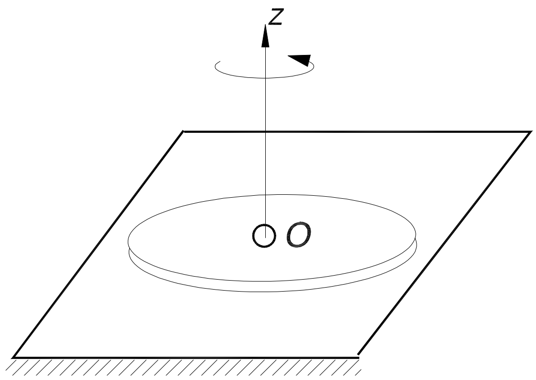
39. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1987)

На горизонтальной прямоугольной платформе *ABED* в некоторой точке *O* стороны *AD* шарнирно прикреплен точкой обода однородный диск весом *P* и радиусом *R*. Платформу последовательно поворачивают в указанных на рисунке направлениях на угол $\alpha = 60^{\circ}$ вокруг стороны *AB*, затем на угол $\beta = 30^{\circ}$ вокруг стороны *BE*. Первоначально точка *O* и центр диска *C* лежали на прямой, параллельной стороне AB. Определить минимальные значения коэффициентов трения f_1 и f_2, при которых диск будет оставаться в равновесии после первого и второго поворотов платформы. Давление диска на опору равномерно распределено по площади.



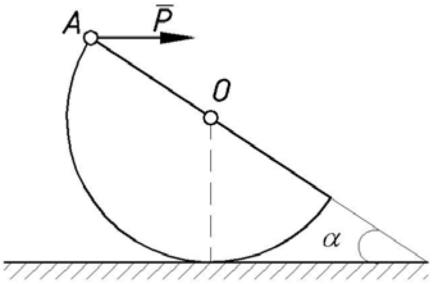
40. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989)

Однородный сплошной диск радиуса *R* и веса *P* лежит на шероховатой горизонтальной плоскости. Какой по модулю момент *M* способен вызвать вращение диска вокруг оси *OZ*, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр *O*, если давление диска на опорную плоскость распределено равномерно, а коэффициент трения скольжения о плоскость равен *f* ?



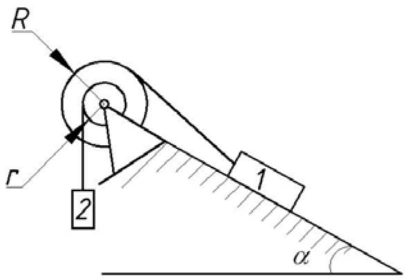
41. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989)

На шероховатой горизонтальной плоскости лежит полушар веса Q и радиуса r. В точке A на него действует горизонтальная сила P. Найти угол α в предельном состоянии равновесия шара, если $P = \frac{1}{8}Q$. Под каким углом β надо приложить в точке A минимальную силу P, чтобы она обеспечила предельное состояние равновесия при некотором угле α_{min}? Найти P_{min} и α_{min}.



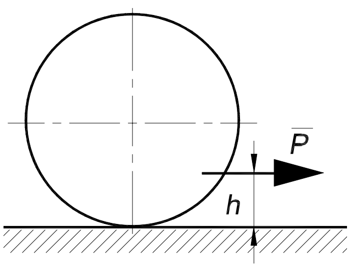
42. (Томск. политехн. ин-т, 1985)

Груз *1* веса P_1 лежит на шероховатой, наклоненной к горизонту на угол α плоскости и удерживается нитью, намотанной на ступень блока радиуса R. Коэффициент трения груза о плоскость равен f, $r = R/2$. При каком весе P_2 груза *2* система будет находиться в равновесии?



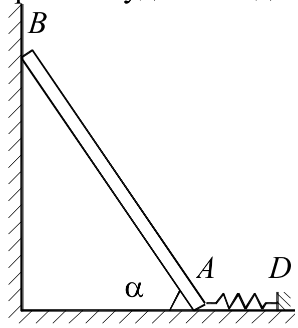
43. (Томск. политехн. ин-т, 1985)

На какой высоте h следует приложить горизонтальную силу P, чтобы каток, вес которого $10P$, равномерно скользил по горизонтальной поверхности без качения? Обозначить: f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения.



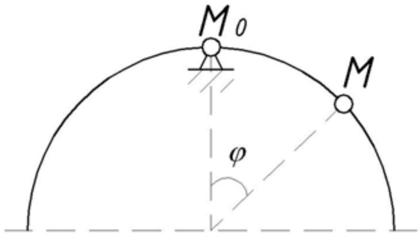
44. (СНГ, 1992, 4 балла)

Однородный тонкий стержень длиной $AB = l$ и весом P опирается в точке B на шероховатую поверхность с коэффициентом трения $f < 1$, а в точке A – на гладкую горизонтальную поверхность. В точке A к стержню прикреплена пружина жесткостью c, второй конец которой закреплен в точке D. Пружина не деформирована, когда стержень вертикален. Определить, при каких значениях угла α стержень будет находиться в равновесии, если $P = 2cl$.



45. (Россия, 1993, 5 баллов)

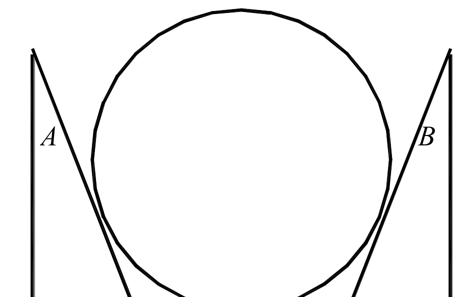
Тонкая проволока, изогнутая в виде полуокружности, свободно висит на уголке, опираясь на него в точке M_0. Определить: 1) при каких значениях коэффициента трения f возможно равновесие полуокружности, если точку контакта перенести в положение M, определяемое углом φ; 2) при каком угле φ минимальное значение коэффициента трения, обеспечивающее равновесие, является наибольшим. Найти этот максимум.



46. (Россия, 1994, 5 баллов)

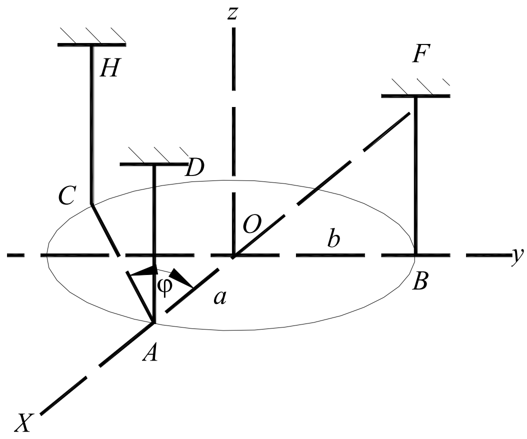
Две однородные треугольные призмы одинаковых размеров, сделанные из разных материалов, находятся на неподвижном основании, ребра их параллельны, и призмы удерживают в равновесии невесомый полый цилиндр, в который медленно наливают жидкость. Веса призм A и B, соответственно, равны P_1 = 1 кН, P_2 = 2 кН. Коэффициент трения между призмой A и цилиндром, а также неподвижной поверхностью f_1 = 0,2, для призмы B, соответственно, f_2 = 0,15. Угол при основании призмы $\alpha = 60^\circ$.

Определить, какая из призм начнет скольжение первой, а также силу трения между другой призмой и горизонтальной поверхностью в этот момент, если положение цилиндра обеспечивает неопрокидывание призм.



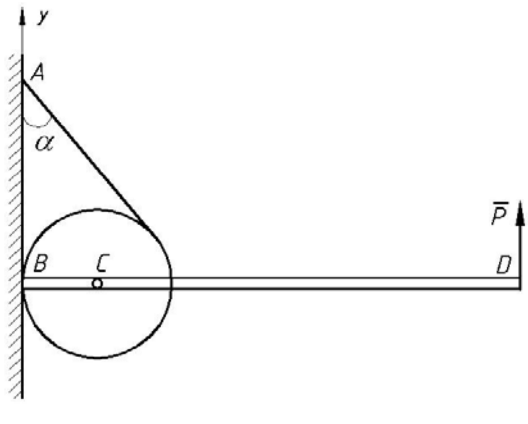
47. (Россия, 1994, 3 балла)

Однородная пластина весом P в виде эллипса с полуосями a и b удерживается в горизонтальном положении тремя вертикальными нитями AD, BF, CH. Точки A, B и C лежат на пересечении эллипса, соответственно, с осями x, y и линией, проходящей через точку A и составляющей угол φ с осью x. Определить силу натяжения нитей, если tg φ = $b/2a$.



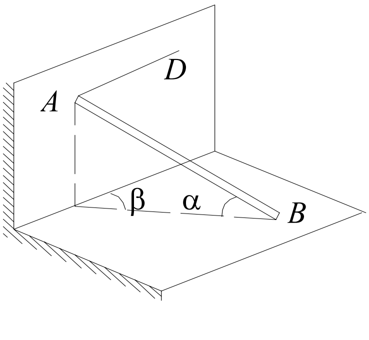
48. (Россия, 1995, 4 балла)

Однородный диск весом P и радиусом r находится в вертикальной плоскости. В точке B он касается неподвижной вертикальной стенки с коэффициентом трения $f = \sqrt{3}/15$. Невесомая нить намотана на диск и образует со стенкой угол $\alpha = 60°$. К диску жестко прикреплен однородный стержень BD длиной $8r$, расположенный горизонтально. На конец стержня действует вертикальная сила $F = 2P$. При каком значении веса стержня конструкция будет находиться в равновесии? Какой вес стержня обеспечивает равновесие при любом коэффициенте трения?



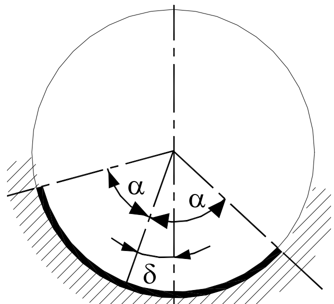
49. (Россия, 1996, 4 балла)

Тяжелый однородный стержень AB одним концом A опирается на гладкую вертикальную стену, а другим концом B – на шероховатый горизонтальный пол. Конец A стержня удерживается горизонтальной нитью AD. Указать область значений для углов α и β, при которых стержень AB будет находиться в покое в указанном на рисунке положении, если коэффициент трения скольжения между концом B стержня и полом равен f.



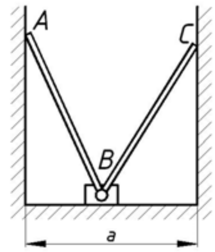
50. (Россия, 1997)

Гибкая однородная лента расположена внутри полого шероховатого цилиндра, ось которого горизонтальна. Лента образует дугу окружности с центральным углом 2α. Каково наибольшее значение угла δ с вертикалью, при котором лента не соскальзывает, если коэффициент трения скольжения равен f?



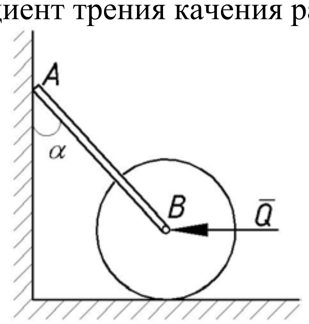
51. (Россия, 1998, 6 баллов)

Одинаковые однородные стержни AB и BC длиной l соединены цилиндрическим шарниром, на оси которого укреплен невесомый ползун B. Стержни опираются в точках A и C на вертикальные гладкие стенки, расположенные на расстоянии a друг от друга ($a < l$). Ползун может скользить по шероховатому горизонтальному полу с коэффициентом трения f. При каком соотношении между a и l эта система будет находиться в равновесии в любом положении ползуна на плоскости?



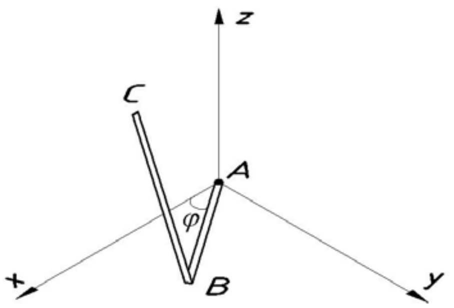
52. (Россия, 1999, 5 баллов)

Рукоятка катка, шарнирно соединенная с его осью, опирается своим концом A на вертикальную гладкую стенку. Вес рукоятки равен P, ее длина l, вес катка также равен P, его радиус r. В точке B к катку приложена горизонтальная сила $Q = 2P$. При каком угле α возможно равновесие системы, если коэффициент трения скольжения между катком и горизонтальной плоскостью равен f, а коэффициент трения качения равен δ?



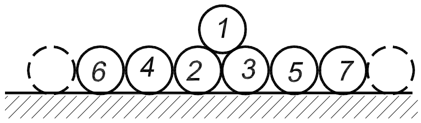
53. (Россия, 2000, 5 баллов)

Два одинаковых тонких однородных стержня AB и BC жестко скреплены в точке B под прямым углом. Стержень AB расположен на шероховатой горизонтальной плоскости xAy с коэффициентом трения f, его крепление в точке A допускает поворот вокруг оси стержня AB и перемещение в положительном направлении оси z. Стержень BC в точке C опирается на вертикальную гладкую стену xAz. При каком значении f предельное значение угла φ при равновесии составляет 30°? Считать, что равнодействующие сил трения и нормальных реакций шероховатой плоскости приложены в одной точке, вертикальной составляющей реакции опоры A пренебречь.



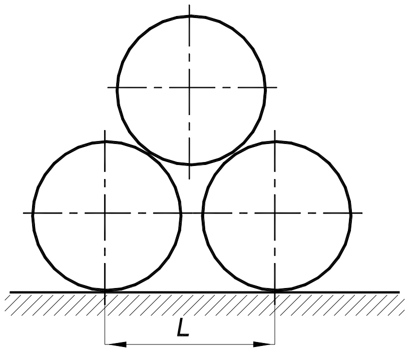
54. (Томск. политехн. ин-т, 1985)

Раскатятся ли трубы на горизонтальном полу, если коэффициент трения скольжения между поверхностями труб $f = 0{,}2$? Трубы и пол считать абсолютно твердыми. При каком минимальном количестве труб нижнего ряда система не будет раскатываться? Зависит ли результат от количества труб, если учитывать трение качения?



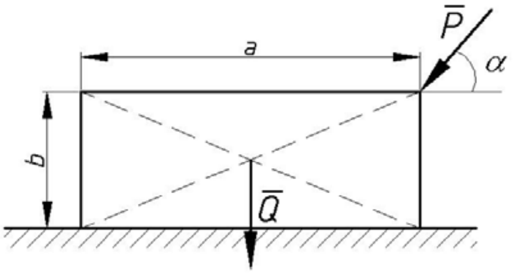
55. (Россия, 2001, 5 баллов)

Три одинаковых однородных диска радиуса R расположены в вертикальной плоскости, как указано на рисунке. Коэффициент трения между дисками, а также опорной поверхностью и дисками одинаков и равен f ($f < 1$). Определить максимальное расстояние между центрами нижних дисков и область допустимых значений коэффициента трения при равновесии системы.



56. (Россия, 2001, 6 баллов)

Однородный прямоугольник с основанием a, высотой b и весом Q лежит на шероховатой горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f. Каким условиям удовлетворяет величина силы P, для которой прямоугольник находится в равновесии при любом значении угла α $(0 \le \alpha \le \pi/2)$? Сила P расположена в плоскости прямоугольника.

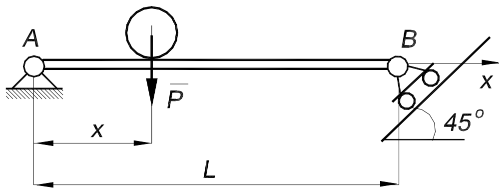


57. (Урал, Оренбург, 2000, 3 балла)

Дана система n материальных точек с массами m_k и координатами x_k, y_k, z_k, $k = 1\ldots n$. На каждую точку действует сила притяжения к некоторому центру Q: $F_k = f m_k M_k Q$, где f – одно и тоже для всех точек. Определить координаты точки Q, если известно, что система находится в равновесии.

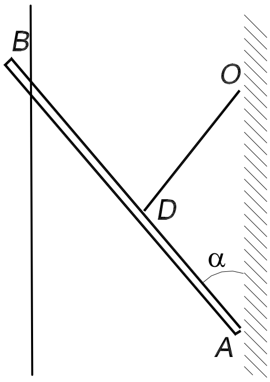
58. (Урал, Оренбург, 2000, 4 балла)

Балка AB весом $2P$ имеет шарнирную опору в точке A, не закрепленную, а установленную на шероховатую плоскость. Коэффициент трения между плоскостью и опорой равен f. Шарнирно-подвижная опора B расположена на наклонной плоскости, образующей угол 45° с горизонтом. Определить точку приложения силы P (абсциссу x), при которой нарушается равновесие, а также чему должны равняться f и x для того, чтобы в предельном положении равновесия балки вертикальные составляющие реакции опор A и B были бы одинаковы?



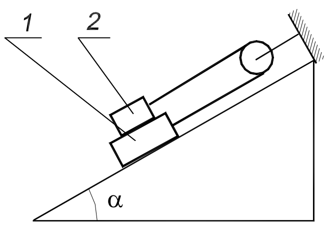
59. (Поволжье – Урал, Оренбург, 2001, 6 баллов)

Картина AB подвешена к вертикальной стене с помощью нити, прикрепленной к гвоздю в стене (O) и к картине в точке D. Определить длину нити OD и расстояние DA, для которых в положении равновесия сила трения обращается в нуль при любом значении угла α. Длина $AB = 2l$.



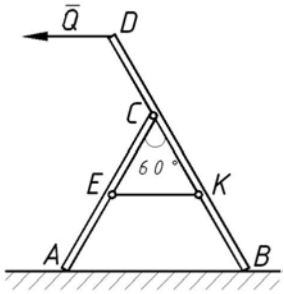
60. (Тамбов, ТГТУ, 1995, 4 балла)

На гладкой наклонной плоскости с углом наклона α находятся два груза *1* и *2* друг на друге, коэффициент трения скольжения между ними равен f. Грузы соединены нитью, перекинутой через неподвижный блок. Вес верхнего тела P_2. Найти вес P_1 нижнего тела при равновесии системы.



61. (Тамбов, ТГТУ, 1995, 3 балла)

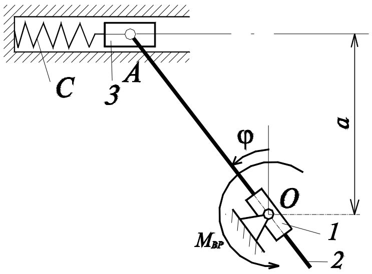
Две однородные балки AC и BD с весами P_1 и P_2, соответственно, соединены шарниром C и невесомым стержнем EK с шарнирами на концах, при этом $AC = l$, $BD = 1{,}5l$, $AE = EC = CK = KB$ и $\angle ACB = 60°$. Система находится в вертикальной плоскости и опирается в точках A и B на шероховатую горизонтальную плоскость с коэффициентом трения скольжения f. Какую горизонтальную силу Q надо приложить в точке D, чтобы система начала опрокидываться вокруг точки A, а опора A оставалась неподвижной? Найти также усилие S в стержне EK в момент начала опрокидывания системы.



6. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

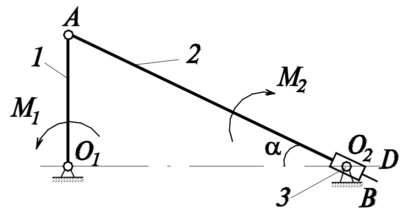
1. (СССР, 1982, 3 балла)

В плоском механизме звенья невесомы, связи идеальные. К цилиндру *1* приложен известный момент $M_{вр}$ пары сил. Найти величину деформации пружины, если жесткость пружины равна c и механизм в указанном на рисунке положении, определенном углом φ, находится в покое. Стержень *2* может свободно скользить в цилиндре *1*.



2. (СССР, 1984, 5 баллов)

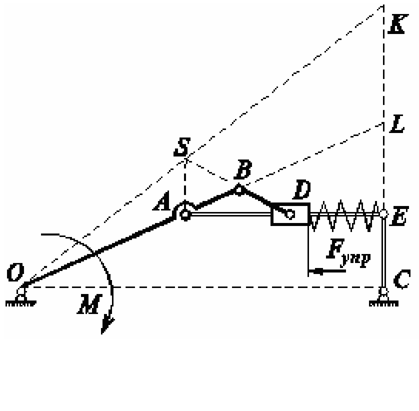
В плоском механизме на кривошип O_1A действует пара сил с известным моментом M_1. Найти минимальное значение момента M_2 пары сил, приложенной к звену *3* и обеспечивающей равновесие механизма в указанном на рисунке положении, если $AO_1O_2 = 90°$, $O_1O_2A = \alpha$, $O_1A = r$, $CO_2 = O_2D = a$, коэффициент трения между стержнем *2* и втулкой *3* равен f, трение в шарнирах O_1, A, O_2 пренебрежимо мало, все звенья механизма невесомые, контакт стержня *2* со втулкой *3* имеет место только в точках C и D.



3. (СССР, 1985, 8 баллов)

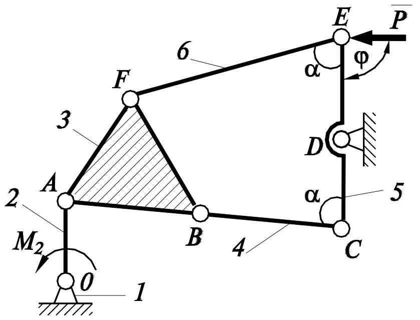
Плоский механизм с невесомыми звеньями находится в равновесии. Момент M пары сил, приложенной к звену OAB, уравновешен силой упругости пружины. Показать, что абсолютная величина силы упругости пружины при данном положении механизма может определяться равенством

$$F_{упр} = M\,SK/(LK\ OS),\ AS \perp AE,\ EC \perp OC,\ AE \parallel OC.$$



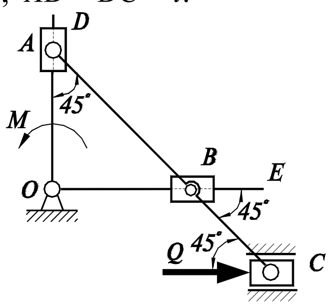
4. (РСФСР, 1983, 5 баллов)

Определить момент пары M_2, уравновешивающий механизм в данном его положении, и реакции в шарнирах C, D и E рычага 5. Шарнир B находится на прямой AC. Дано: $OA = CE = l$, $CD = 0{,}5l$, $\alpha = 60°$, $\varphi = 90°$; внешняя сила P.



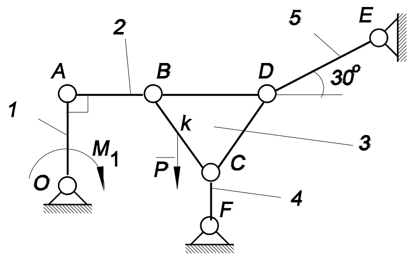
5. (РСФСР, 1984, 5 баллов)

В плоском кулисном механизме ползуны A и B могут перемещаться вдоль стержней кривошипа DOE. Пренебрегая трением и весом звеньев механизма, определить силу Q, уравновешивающую действие момента M, $AB = BC = l$.



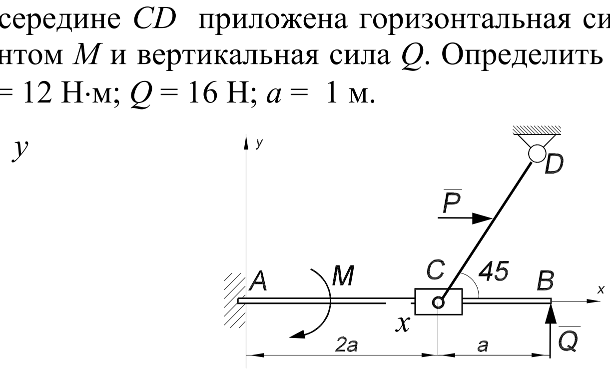
6. (РСФСР, 1986, 3 балла)

***К равностороннему трехшарнирному звену* BCD *приложена сила* P. *Определить уравновешивающий момент* M_1 *механизма. Размеры стержней одинаковы и равны* l, KB = KC = *0,5*l; *стержни* OA, CF *и сила* $\vec{P}$ *перпендикулярны стержню* BD.**



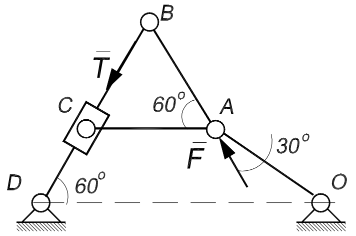
7. (Турк. ССР, 1988)

Заделанный в стену горизонтальный стержень AB соединен со стержнем CD скользящим шарниром C. К середине CD приложена горизонтальная сила P, на стержень AB действует пара сил с моментом M и вертикальная сила Q. Определить реакции в заделке и шарнире C, если $P = 4$ Н; $M = 12$ Н·м; $Q = 16$ Н; $a = 1$ м.



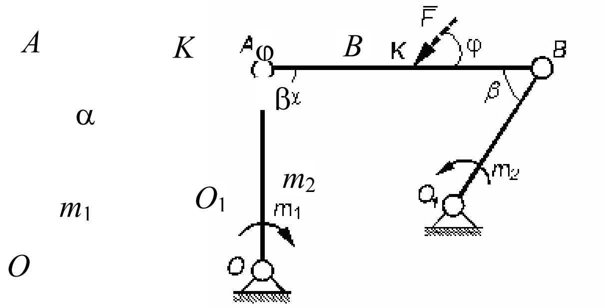
8. (Брянск, 1987)

В стержневой системе $AB = AC$, $BD = 2\ AB$, сила T приложена к ползуну C, который может двигаться вдоль стержня BD. Пренебрегая трением и весом стержней, определить, при каком соотношении между силами T и F система остается в равновесии в положении, показанном на рисунке.



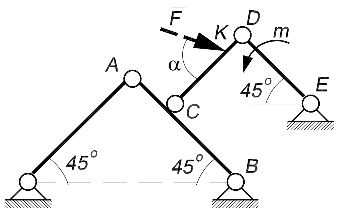
9. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1984)

На звено* OA *шарнирного четырехзвенника действует пара сил с моментом* m_1*. Определить момент пары* m_2*, которую надо приложить к звену* O_1B *для того, чтобы механизм находился в равновесии, если* $\alpha = 90°$*,* $\beta = 30°$*,* $OA = O_1B = l$*. Весом звеньев пренебречь. Под каким углом* φ *надо приложить в точке* K *звена* AB *произвольную силу* F*, чтобы она не нарушила равновесие системы? Для определенности положим* $AB = l\sqrt{2}$*,* $AK = l$*. Трением пренебречь.



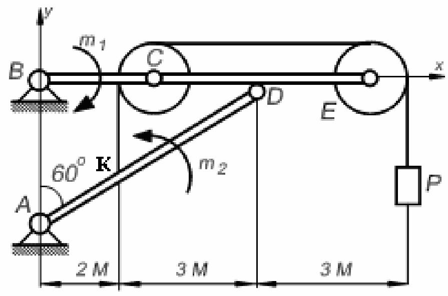
10. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1985)

В стержневой системе точки O, A, B, C, D, E – шарниры. Все стержни невесомые. На стержень DE действует пара сил с моментом m. Определить реакцию в точке O, если $DE = a$, $AC = CB$. Под каким углом α надо приложить в некоторой точке K звена CD любую силу F, чтобы она не изменила реакцию в точке O?



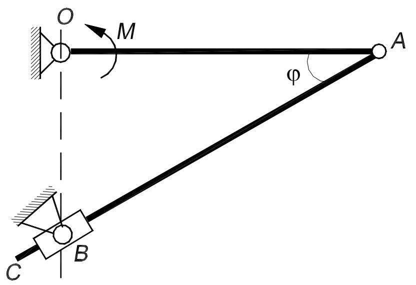
11. (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1987)

Два стержня BE и AD шарнирно соединены между собой и с опорами. В точках C и E стержня BE шарнирно укреплены два одинаковых блока, через которые перекинута нить, закрепленная в точке K на стержне AD и несущая на свободном конце груз весом P. Методом возможных перемещений определить составляющие реакции шарниров y_A, x_D; P = 20 Н; $m_1 = m_2$ = 120 Н м. Массой стержней, блоков и нити пренебречь, трение не учитывать.



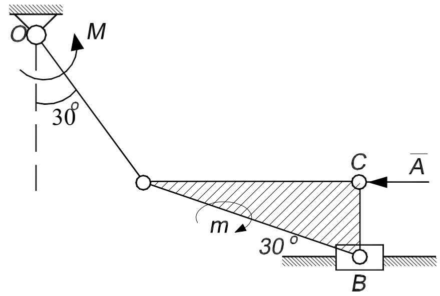
12. (Россия, 1999, 3 балла)

Два однородных стержня (*OA* длиной а, весом *P* и *AC* длиной *b*, весом *Q*) соединены шарниром *A* и находятся в вертикальной плоскости. Стержень *OA* укреплен шарнирно, а стержень *AC* проходит через гладкую муфту *B*. Определить уравновешивающий момент *M*, удерживающий стержень *OA* в горизонтальном положении под углом φ к стержню *AC*.



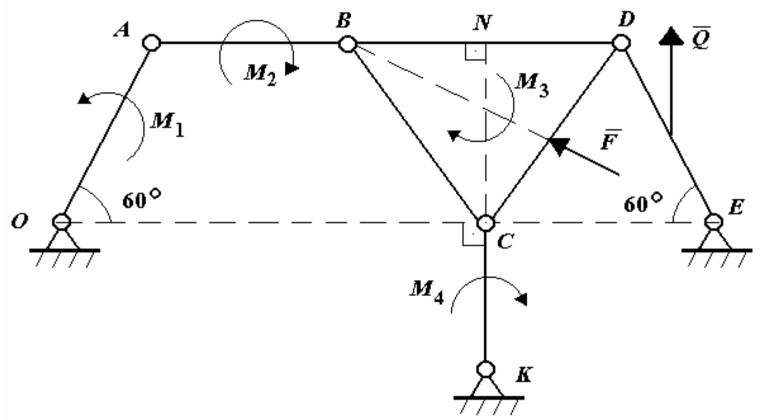
13. (Тамбов, ТИХМ, 1992, 6 баллов)

В кривошипно-шатунном механизме шатун выполнен в виде прямоугольного треугольника *ABC* (с горизонтальным катетом *AC* в данном положении), при этом *OA* = *AB* = *r*. Зная моменты пар сил *M* и $m = M\sqrt{3}$, приложенных к кривошипу и шатуну, определить силу *F*, направленную вдоль *AC* и уравновешивающую механизм.



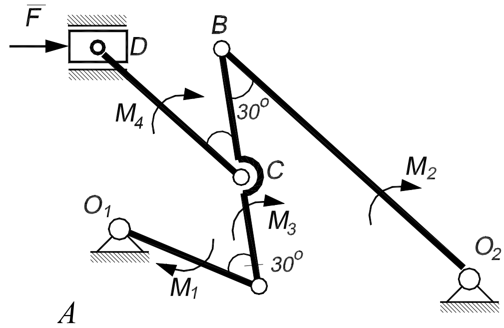
14. (Тамбов, ТИХМ, 1993, 6 баллов)

Механизм находится в равновесии под действием моментов M_1, M_2, M_3, M_4 и сил *F*, *Q*. Сила *F* приложена в середине отрезка *CD* перпендикулярно к нему, а сила *Q* приложена в середине *DE* параллельно *CK*; *CK* = *CN*. Выразить силу *Q* через другие силовые факторы. Трение в шарнирах не учитывать.



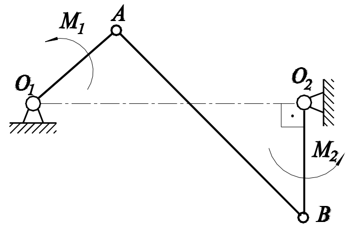
15. (Тамбов, ТГТУ, 1996, 3 балла)

Плоский механизм находится в горизонтальной плоскости в равновесии под действием силы *F* и системы пар сил с моментами M_1, M_2, M_3, M_4. Углы указаны на рисунке, размеры звеньев $O_1A = l,\ O_2B = 2l,\ CD = 1{,}5l.$ Выразить момент M_4 через остальные данные.



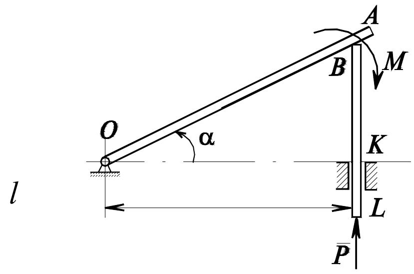
16. (СССР, 1989, 5 баллов)

В антипараллелограмме O_1ABO_2 длины звеньев равны, соответственно, $O_1A = O_2B = a$, $AB = O_1O_2 = b$ ($b > a$). Механизм находится в равновесии под действием вращающихся моментов M_1 и M_2, приложенных к звеньям O_1A и O_2B. Определить отношение M_2/M_1, если $O_2B_1 \perp O_1O_2$.



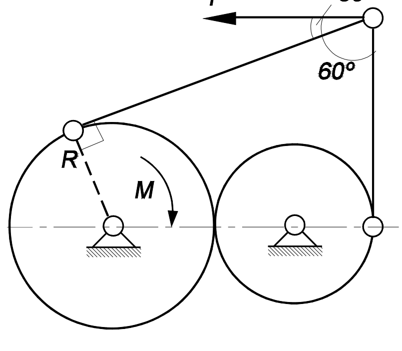
17. (СССР, 1985, 5 балла)

В плоском механизме стержень OA может вращаться вокруг шарнира O, перемещая шток BC в идеально гладких направляющих KL. Расстояние между шарниром и направляющими – l. Поверхность контакта между стержнем и штоком в точке B – шероховатая, коэффициент трения скольжения – f. Найти минимальное значение момента M пары сил, действующей на стержень OA и обеспечивающей равновесие механизма при заданных значениях угла α и силы P. Весом стержней пренебречь.



18. (РСФСР, 1985, 3 балла)

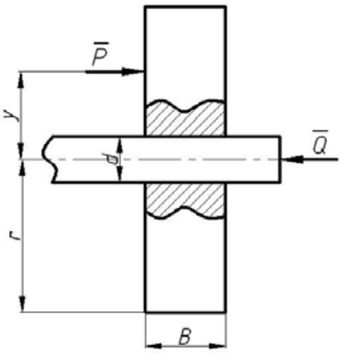
Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из двух зубчатых колес и стержней, связанных шарнирами. Считая связи идеальными, определить величину силы F, уравновешивающей действие момента M. Радиус левого колеса R.



7. ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

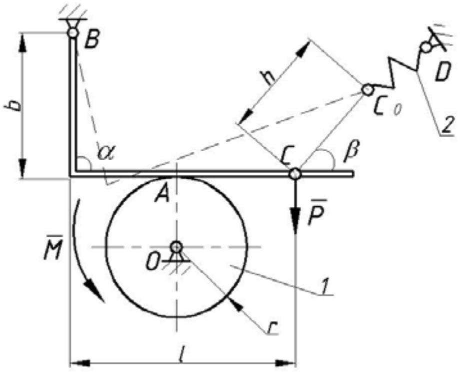
1. (РСФСР, 1983, 3 балла)

Шестерня напрессована на вал и сила трения между ними, вызванная напрессовкой, равна Q, коэффициент трения сцепления равен f_0. Определить закон изменения силы $P = f\,(y)$, которую нужно приложить для снятия шестерни с вала.



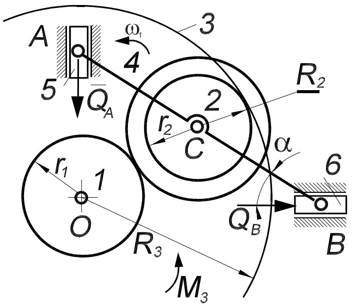
2. (РСФСР, 1986, 5 баллов)

При какой минимальной тормозной силе* P *и жесткости пружины* c *будет тормозиться и растормаживаться диск* 1*, на который действует постоянный момент внешних сил* M *= 600 Н·см? Для соприкосновения тормозной колодки с диском пружину нужно растянуть на величину* h *= 1 см. Коэффициент трения в паре* A f *= 0,3, трение в шарнирах не учитывать. Размеры механизма:* r *= 10 см,* a *= 4 см,* b *=* l *= 20 см,* α *= 90°,* β *= 45°.



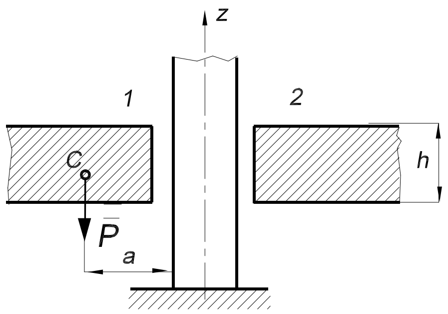
3. (РСФСР, 1989, 5 баллов)

Определить величину момента M_3, при котором зубчато-рычажный механизм в данном положении будет находиться в равновесии. Массами тел и трением в связях пренебречь. Дано: $AC = BC = l$, $r_1 = R_2 = 0{,}5l$, $r_2 = 0{,}25l$, угол $\alpha = 30°$, угол $AOB = 90°$, угловая скорость $\omega_3 = 0$, сила $Q_A = Q_B = Q$.



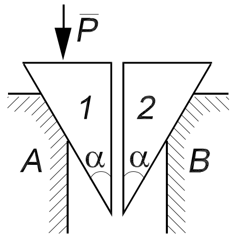
4. (Лит. ССР, 1985, 3 балла)

По вертикальному столбу *1* скользит пластина *2* толщины h с круглым отверстием. Определить наименьшую силу тяжести P и наименьшее расстояние a между центром тяжести C пластины и осью столба при условии равновесия пластины за счет сил трения. Коэффициент трения между столбом и пластиной равен f.



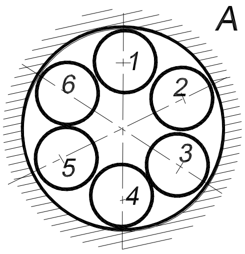
5. (Л., 1985, 3 балла)

Между неподвижными телами A и B установлены два клина *1* и *2*. Грани клина *1* и поверхность тела A гладкие. Вертикальная грань клина *2* гладкая, а наклонная грань и поверхность тела B шероховатые. При каком значении коэффициента трения f между поверхностями контакта клина *2* и тела B наступит момент предельного равновесия, если давить на клин *1* силой P? Считать, что силы давления клина *2* на тело B распределяются по поверхности тела равномерно.



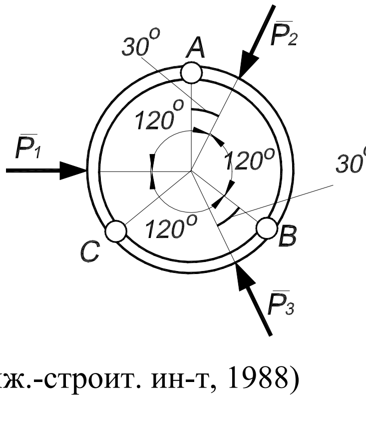
6. (Зап.-Сиб. зона, Томск, политех. ин-т, 1986)

В цилиндрическое отверстие тела A радиуса $R = 3r$ вставлены без натяга шесть цилиндров радиуса r и веса Q каждый. Определить давление цилиндра *4* на стенку отверстия в точке их контакта. Система расположена в вертикальной плоскости.



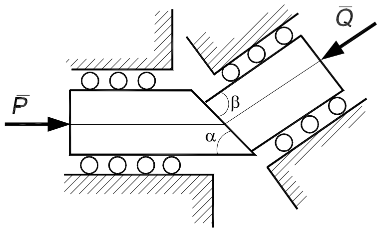
7. (Зап.-Сиб. зона, Томск. инж.-строит. ин-т, 1988)

Кольцо радиуса R состоит из трех одинаковых дуг AB, BC и CA, соединенных между собой шарнирами. К каждой из дуг на равных расстояниях от шарниров в плоскости кольца приложены силы P_i, линии действия которых проходят через центр O; кольцо расположено в горизонтальной плоскости. Определить реакции в шарнирах A, B и C. Принять $P_1 = P_2 = P_3 = P$.



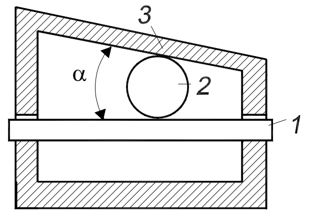
8. (Зап.-Сиб. зона, Томск. инж.-строит. ин-т, 1988)

Два клина A и B, коэффициент трения между которыми равен f, могут двигаться без трения в своих направляющих. К клину A приложена сила P. Какую силу Q нужно приложить к клину B, чтобы клин A двигался равномерно в сторону действия силы P?



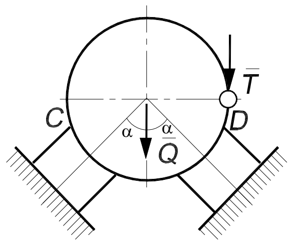
9. (Томск. область, 1979)

Храповое устройство позволяет двигаться направляющей *1* только влево. Считая, что коэффициент трения скольжения между шариком *2* и корпусом *3* значительно больше коэффициента трения скольжения f между шариком и направляющей, определить, при каком угле α храповое устройство работоспособно.



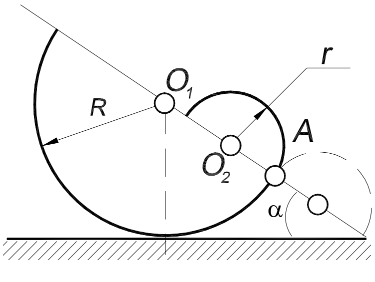
10. (Белорусск. политех. ин-т, 1984)

Цилиндр веса Q лежит на двух опорах C и D, расположенных симметрично относительно вертикали, проходящей через центр цилиндра. Коэффициент трения между цилиндром и опорами равен f. При какой величине тангенциальной силы T цилиндр начнет вращаться?



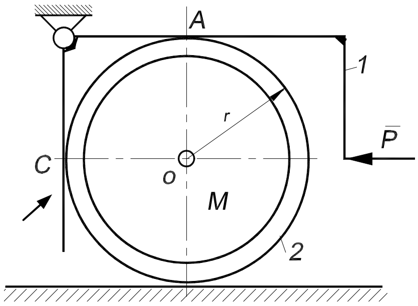
11. (Белорус. с.-х. акад., 1987)

Два однородных полудиска радиусов R и r жестко связаны между собой, как показано на рисунке. Исследовать положение равновесия системы. Указание: найти тангенс угла α, который образует общая прямая этих тел с горизонтом. Очевидно, что из $r \to 0$ следует $\alpha \to 0$ (т.е. имеем один нижний полудиск, находящийся в устойчивом положении равновесия). Будем увеличивать радиус малого полудиска. Может сложиться впечатление, что с возрастанием r должен увеличиваться до каких-то пределов и α, а затем при дальнейшем увеличении r угол α будет уменьшаться; при $r \to 0$ ожидаем $\alpha \to 0$. Так ли это? Из формулы для tg (α) из $r \to R$ не следует $\alpha \to 0$. Почему? Найти интервал для α при устойчивом положении системы, если $0 < r < \infty$. То же найти и для случая, когда верхний полудиск располагается справа от точки A (показано пунктиром).



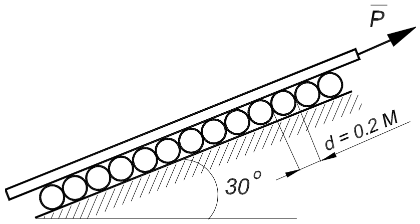
12. (МИИТ, 1978)

Определить условия, которым должны удовлетворять сила P, приложенная к жесткому рычагу *1*, момент пары M, приложенный к твердому кольцу *2* радиуса R, и коэффициенты сцепления (трения покоя) f_A и f_B в точках A и B, для того, чтобы кольцо вращалось вокруг неподвижной оси O. Трением в точке C, весом кольца и рычага пренебречь.



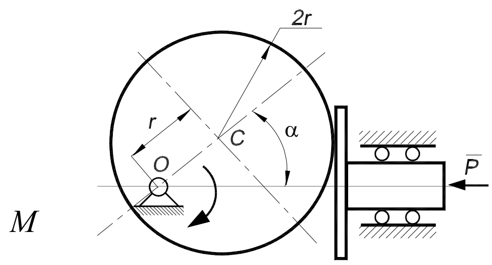
13. (Омск. политех. ин-т, 1984)

Бетонный блок массой m = 500 кг равномерно поднимают вверх по наклонной шероховатой плоскости на невесомых катках. Коэффициенты трения качения в парах: каток – наклонная плоскость δ_1 = 0,01 см, каток – поверхность блока δ_2 = 0,005 см. Коэффициент трения скольжения в паре блок – наклонная плоскость – f = 0,1. Определить тяговое усилие, приложенное к блоку параллельно плоскости, при вкатывании и при втягивании волоком.



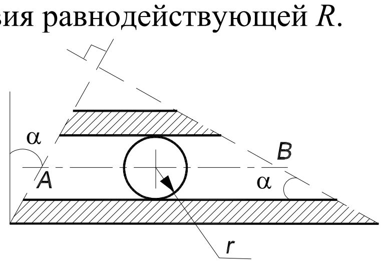
14. (Тольяттинск. политехн. ин-т., 1987)

При каких условиях система будет в равновесии, если α = 30° и коэффициент трения покоя f = 0,15? Трением в подшипниках пренебречь. Каково условие самоторможения при M = 0?



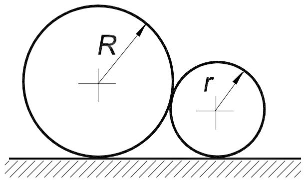
15. (Тольяттинск. политехн. ин-т., 1986)

Из цилиндрической трубы радиуса r двумя взаимно перпендикулярными сечениями вырезан патрубок. На его внутреннюю поверхность действует равномерное давление P. Определить величину и линию действия равнодействующей R.



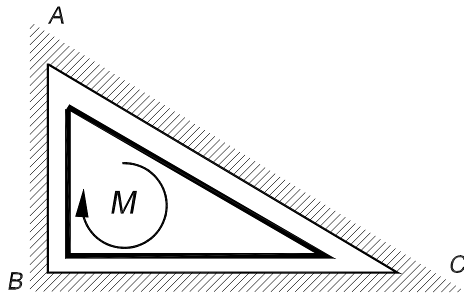
16. (Тольяттинск. политехн. ин-т, 1986)

При каком условии автомобильное колесо радиуса R сможет медленно переехать через свободно лежащий на дороге цилиндр радиуса r? Коэффициент трения цилиндра с колесом и дорогой f. Весом цилиндра пренебречь.



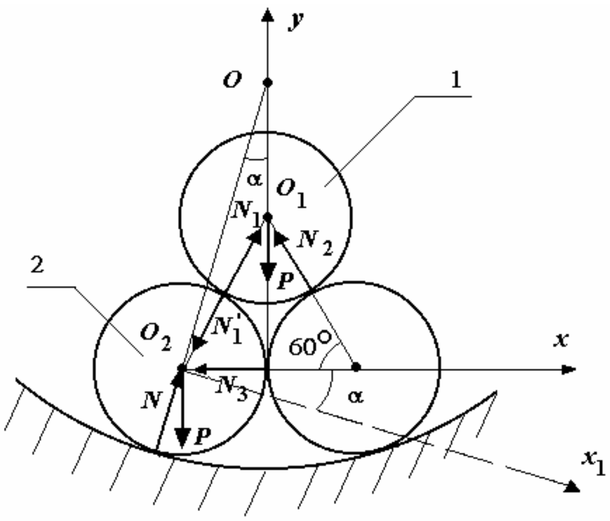
17. (Уфимск. нефтян. ин-т, 1983)

К треугольному ключу с сечением в виде прямоугольного треугольника с катетами $AB = a$ и $BC = b$ приложена пара сил с моментом M. Определить давления, производимые вершинами A, B и C на грани гнезда замка. Трением пренебречь. Зазор между ключом и гнездом считать малым.



Примеры решения задач

Задача 2-48.



Равновесие трубы 1:

$$\sum X = 0, \qquad N_1 \cos 60^\circ - N_2 \cos 60^\circ = 0; \qquad N_1 = N_2.$$

$$\sum Y = 0, \qquad N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 30^\circ - P = 0; \qquad N_1 = N_2 = \frac{P}{\sqrt{3}} = N_1'.$$

Равновесие трубы 2:

$$\sum X = 0, \qquad P \sin\alpha - N_3 \cos\alpha - N_1' \cos\left(60^\circ + \alpha\right) = 0\,.$$

В момент начала раскатывания

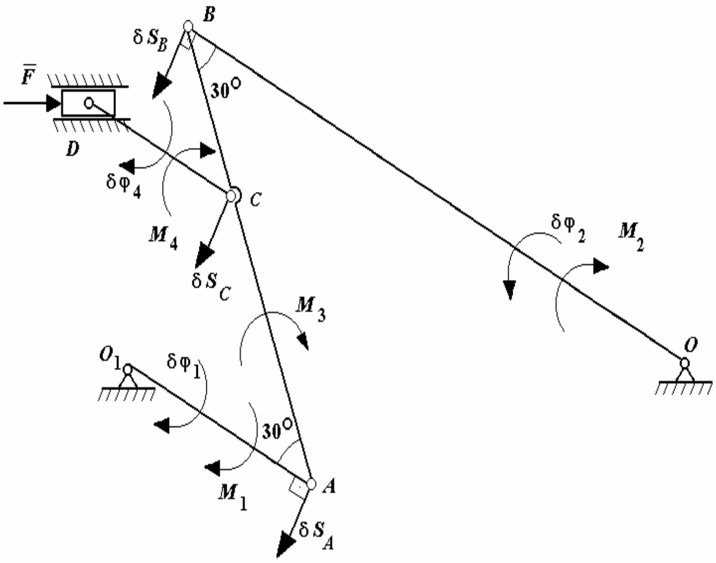
$$N_3 = 0.$$

$$P\sin\alpha - \frac{P}{\sqrt{3}}\cos\left(60^\circ + \alpha\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9};$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{14}; \qquad R = r + \frac{r}{\sin\alpha} = r\left(1 + 2\sqrt{7}\right) \approx 6{,}3r.$$

Ответ: Трубы не раскатятся при $R < 6{,}3r$.

Задача 6-15.



Согласно принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A = 0;$$

$$M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 + M_3 \cdot 0 + M_4\delta\varphi_4 + F \cdot 0 = 0.$$

Тело AB совершает мгновенно-поступательное движение, $\delta\varphi_3 = 0$.

М.ц.с. звена CD расположен в точке D,

$$\delta S_D = 0;$$

$$\delta S_A = \delta S_B = \delta S_C = \delta S;$$

$$\delta S_A = \delta\varphi_1 l, \qquad \delta S_B = \delta\varphi_2 2l, \qquad \delta S_C = \delta\varphi_4 \frac{3l}{2};$$

$$M_1\frac{\delta S}{l} - M_2\frac{\delta S}{2l} + M_4\frac{\delta S}{1{,}5l} = 0.$$

Ответ: $\quad M_4 = \frac{3}{4}\left(M_2 - 2M_1\right).$

Ответы

Глава 1

1. $m_x = m_1A_1/R_1 + m_2A_2/R_2;$
   $m_y = m_1B_1/R_1 + m_2B_2/R_2;$
   $m_z = m_1C_1/R_1 + m_2C_2/R_2;$
   $R_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}; \quad R_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$.

Здесь принято, что векторы m_1 и m_2 направлены в сторону соответствующих плоскостей (вверх).

2. Векторы составляют с плоскостью XOY одинаковые углы

$\alpha = \arccos(V\sqrt{a^2 + b^2}\,/\,2m)$.

3. $R = 5M\,/\,l$.

4. $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$ – система не приводится к равнодействующей,

$R_{XZ} = \sqrt{M_A^2 + M_O^2} / h$.

5. $(P_{1x} + P_{2x})\ (b_1P_{1z} - c_1P_{1y} + b_2P_{2z} - c_2P_{2y}) + (P_{1y} + P_{2y})\ (c_1P_{1x} - a_1P_{1z} + + c_2P_{2x} - a_2P_{2z}) + (P_{1z} + P_{2z})\ (a_1P_{1y} - b_1P_{1z}) = 0$.

6. $R = 4F$.

7. $Q_X = -1{,}5F$.

8. $a + b + c = 0$.

9. $M = \sqrt{29}$ Н·м .

ГЛАВА 2

1. $l_{\max} = 3{,}3a(1 + f)$.

2. $S = P/2$.

3. $\Delta l = Q(R + r)/(4c\sqrt{Rr})$.

4. $\varphi = \varphi_1 = 0;\ \varphi = \varphi_2 = \arccos(h/l\sqrt{1-k})$ (при $k < 1$); положение равновесия $\varphi = \varphi_1$ устойчиво в случае, когда оно единственно (при $k \geq 1 - h^2/l^2$), при $k < 1 - h^2/l^2$ устойчиво только положение равновесия $\varphi = \varphi_2$.

5. $T = P/2$, $q = P/2R$.

6. $T_\alpha = P/4 + P\sin\alpha/2\pi$.

7. $P = Q\,2\sin 15^\circ/(1 - 2\sin 15^\circ) \approx 1{,}073Q$.

8. $S_A = 5F/c$.

9. $N_2 = 2P - 36Pl/25r$.

10. $\mathrm{tg}\varphi_K = 2Q/P/(2(n-k)+1)$.

11. $c = mg\sqrt{2}/l$.

12. $S_E = 2{,}4P$, $S_D = 2{,}1P$, $y_A = 1{,}3P$, $y_B = 1{,}2P$, P – вес балки AD.

13. $M_{\min} = 0{,}75\,\mathrm{Pr}$.

14. Центр тяжести нити переместится вверх.

15. Расстояние пластины от верхней опоры
$x = (Pl - mg\Delta_2)\Delta_1/(P(\Delta_1 + \Delta_2))$.

16. $n_{\min} = 9$.

17. $y_1(2R_0 + k_0(y_1 + y_2)) = 2P\sqrt{l_0^2 - y_1^2}$,

$(R_0 + k_0y_2)(y_2 - y_1) = P\sqrt{l_0^2 - (y_2 - y_1)^2}$.

18. $x_B = -x_A = 17{,}2$ кН , $y_A = 3$ кН , $y_B = 9$ кН , $N_C = 6$ кН ,
$M_C = 89{,}5$ кН·м .

19. $\sin(\varphi - \alpha) - \sin(\varphi + \beta) > 0$.

20. $y_A = 0{,}5P(1 - (a/l)^n)/(1 - a/l)$.

21. $T = 2P(1 - 1/4^n)/3$.

22. $L = a/2\sum\limits_{i=1}^{n}(1/i)$.

23. $r = 2a\sqrt{2} - 4aP\cos\varphi/Q$

24. $\mathrm{tg}\varphi = (1 - \cos\alpha)/(3\pi - 1{,}5\alpha + \sin\alpha)$,
$\mathrm{tg}\varphi_1 = (1 - \cos\alpha)/(2\pi - \alpha + \sin\alpha)$.

25. $\sin\alpha = 0{,}5$, $T_{\min} = 4Qr/l$.

26. $F = (P_1 + P_2)cg\alpha$.

27. $\cos\varphi = (l + \sqrt{l^2 + 32R^2})/8R$.

28. $Q_{\min} = P_2(2a - r_1 - r_2)/a$.

29. $F = 3P$.

30. $\cos\varphi = \sqrt[3]{a/l}$, $N_A = Q\ \mathrm{tg}\varphi$, $N_C = Q/\cos\varphi$, $a \leq l$, $Q_O = P/2\mathrm{tg}^2\varphi$.

31. $y_A = P$, $x_B = 3Q$, $y_B = P$, $M_B = -6Qa$.

32. $\text{tg}\beta = (2G+Q)\text{tg}\alpha / Q$.

33. $x = (GR + (G+Q)r - \sqrt{r^2(G+Q)^2 - R^2 G(G+2Q)})/(G+Q)$.

34. Не раскатятся, $R_A = 1{,}384\,P$, $R_B = 2{,}268\,P$.

35. $\lambda = (2m+M)g/(c_1+c_2)$.

36. $T_1 = P$.

37. $S_6 = 0$.

38. $\text{tg}\alpha = 3\pi p/8P$, $\text{tg}\beta = 3\pi p/8Q$.

39. $P_{\min} = 4Q/3\pi(1-\cos\alpha)$, $x_B = 4Q/3\pi$,
$y_B = 2(Q + 4Q/3\pi(1-\cos\alpha))$.

40. $Q = 2F$.

41. $x_{A1} = -3\sqrt{3}P/8$, $y_{A1} = P/8$, $x_{A2} = 3\sqrt{3}P/8$, $y_{A2} = -5P/8$, $x_{A3} = 0$, $y_{A3} = P/2$.

42. $\text{tg}\,\varphi_k = \dfrac{2\,Q\cos\alpha}{P(2k-1) - 2Q\sin\alpha}$.

43. $\varphi = \text{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

44. $\varphi = \arccos((1+\sqrt{51})/10)$.

45. $x_C = 2r\cos^3\varphi$, $y_C = r\cos\varphi(2-\sin 2\varphi)$.

46. $\text{tg}\alpha = M\ \text{tg}\beta/(2m+M)$.

47. $T = P\dfrac{b}{a}$.

48. Трубы не раскатятся при $R < 6{,}3\,r$.

Глава 3

1. $\alpha = \text{arctg}(\sqrt{3}/9)$.

2. $\varphi = 2\alpha - 90^\circ$, равновесие неустойчивое.

3. Часть эллипса $x^2/a^2 + (y-a/2)^2/(a/2)^2 = 1, \quad 0 \le x \le a, 0 \le y \le a/2$.

4. $P_{\min} = G\cos(\alpha + \text{arctg}\,f)$.

5. $\varphi = \alpha$, $N_A = P\cos\alpha$, $N_B = P\sin\alpha$.

6. $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$.

ГЛАВА 4

1. $Ya = -(P+Q)\text{tg}\gamma/2$.

2. $F = P/3\sqrt{2}$.

3. $M_o = \sqrt{15}$ Н·м.

4. $\sin\beta = 2Q/P\sin\alpha$, $x_0 = (2aPQ\cos\alpha - bmQ)/n$,
$y_0 = (2bQ^2 - bP^2\sin^2\alpha + Pam\cos\alpha)/n$, $z_0 = P\cos\alpha$,
$x_D = -(2aPQ\cos\alpha + bmQ)/n$, $y_D = (2bQ^2 - P^2 b\sin^2\alpha - Pam\cos\alpha)/n$,
$m = \sqrt{P^2\sin^2\alpha - 4Q^2}$, $n = 2bP\sin\alpha$.

5. $T = Mg/\sqrt{6}$.

6. $x_A = 3\sqrt{2}(P+2Q)\ \text{ctg}\alpha/2$, $y_A = -\sqrt{2}(P+2Q)\text{ctg}\alpha/2$, $z_A = -Q$, $T_{CG} = (P+2Q)/\sin\alpha$, $T_{DE} = 2(P+2Q)\text{ctg}\alpha$.

7. $S_1 = S_2 = 0{,}4\sqrt{2}$ кН.

8. $b = a\sqrt{2}/2$.

9. $\text{tg}\alpha = af/\sqrt{l^2 - a^2}$

10. $T = P/4$.

11. $x_A = -2P\sqrt{2}/9$; $y_A = -P\sqrt{2}/6$; $z_A = 7P/9$; $R_c = 2P\sqrt{3}/9$; $N_B = P\sqrt{2}/6$.
12. $OO_1/OO_2 = 1{,}5$.
13. $\cos(AOB) = 1/4$, $\cos(AOC) = -7/8$.
14. (123456), (123457), (124567), (234567).
15. $x_B = 2P\cos\alpha$; $R_E = \dfrac{Q}{2} + \dfrac{P}{5}\sin\alpha$; $z_B = \dfrac{Q}{2} + \dfrac{2}{5}P\cos\alpha$;

$y_B = P(\sin\alpha - 2\cos\alpha)$; $y_A = P(\sin\alpha + 2\cos\alpha)$; $z_A = -\dfrac{P}{5}(\sin\alpha + 2\cos\alpha)$.

16. $R_A = P$, $\alpha = 30^\circ$.
17. $R_A = 1{,}09 g\rho l^3$.
18. $F = P\sqrt{6}/3$.
19. $S_1 = 2$ кН.

Глава 5

1. $\mathrm{tg}\left(\alpha/2\right) \le f$.
2. $f \ge Q/(P+2Q)$.
3. $\alpha_{\max} = 2\mathrm{arctg}\, f$; $f_{O(\min)} = fQ_1/(Q_1+Q_2)$.
4. $h \ge H(1 - f^2/4)$.
5. $DQ(\sin\alpha - \delta\cos\alpha/R)/d < P < DQ(\sin\alpha + \delta\cos\alpha/R)/d$.
6. $F \le \min\left[f_2P_2/(\cos\alpha - f_2\sin\alpha),\ f_1(P_1+P_2)/(\cos\alpha - f_1\sin\alpha)\right]$.
7. $f \ge \mathrm{tg}(\alpha/2)$.
8. $\mathrm{tg}\varphi = (P_1 - P_2)(1+f^2)/((P_1+P_2)(1-f^2)) - 2f/(1-f^2)$.
9. $M_{\max} = QfR$, $x_A = -4fQ/\pi$, $x_B = 2fQ/\pi$, $y_A = -2Q/\pi$, $y_B = 2Q/\pi$.

10. 1 случай: а) при $0 \le \alpha \le 45^\circ$ безразличное равновесие; б) при $0 < \beta < \varphi_0$, $\beta = \alpha - 45^\circ$, $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\, f$ – устойчивое равновесие; в) при $\beta = \varphi_0$ – неустойчивое равновесие; г) при $\beta > \varphi_0$ равновесия нет. 2 случай: а) при $\alpha < 45^\circ - \varphi_0$ безразличное равновесие; б) при $-\varphi_0 < \beta < \varphi_0$ – устойчивое равновесие; в) при $\beta > \varphi_0$ равновесия нет.

11. $P = G/f$, $R_A = 0$.

12. $\cos\alpha = 2f/(1+f^2)$ – при поступательном движении катка; $\cos\alpha > 2f/(1+f^2)$ – при качении без проскальзывания.

13. $f \ge r/l$, $G_2 \le G_1(Lr/l)(fl - r)/(l^2 + r^2)$.
14. $\lambda = 4{,}5G/c$.
15. $\mathrm{tg}\alpha_{\min} = (m_1+m_2)/(f(3m_1+m_2))$.
16. $\mathrm{tg}\alpha > (af_1 + bf_2)/b$.
17. $b \le 6Rf/\sqrt{1+9f^2}$, $b \le 4Ra/\sqrt{4a^2+h^2}$.
18. $f \ge \sqrt{3}/3$.
19. $f_{\min} = 0{,}4$.
20. $P_{\min} = G\cos\alpha/(\sin\alpha + 2f\cos\alpha)$, $P_{\max} = G\cos\alpha/(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)$.
21. $(-fan^2+b)/(n^2-1) \le x \le (fan^2+b)/(n^2-1)$, $n > 1$, $b = a\sqrt{f^2n^2+n^2-1}$.
22. $\sin\alpha - f\cos\alpha \le Q/P \le \sin\alpha + f\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = x_0$.
23. $F_{\min} = P(f + \sqrt{h(2R-h)}/(R-h))$.
24. 1) $x > (2f-1)l/(1+f)$; 2) $f = 1$, $x = l/2$.
25. $l \ge (\mathrm{tg}\alpha/f + 1)a + 2b$, $\mathrm{tg}\alpha \ge f$.
26. $\mathrm{tg}\alpha \le f$, $\mathrm{tg}\alpha \le \delta/r\cos\beta$.
27. $P_{\min} = G\,\mathrm{tg}\varphi + Q\cos\beta\sin(2\varphi - \alpha)/(\cos\varphi\cos(\alpha+\beta-\varphi)$.
28. $f_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $f_2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/4$.
29. Стержень будет находиться в равновесии.

30. $P = fQ/(1-f)$.

31. Не сдвинется. Тележка сдвинется при $F_{гор} \ge 0{,}43N$.

32. $h \le 0{,}2$.

33. $\varphi = \mathrm{arctg}(1/4f)$.

34. $\mathrm{tg}\alpha \le f$, $Q_{\min} = P(\sin\alpha\ \cos\beta + \sqrt{f^2\cos\alpha - \sin^2\alpha\ \sin^2\beta}$.

35. Если $f < 1/2\sqrt{3}$, то равновесие невозможно при любом Q; если $1/2\sqrt{3} < f < 1/\sqrt{3}$, то равновесие будет при $2P/3\sqrt{3} \le Q \le 2fP/(1+f\sqrt{3})$; если $f \ge 1/\sqrt{3}$, то равновесие возможно при $2P/3\sqrt{3} \le Q \le P/\sqrt{3}$.

36. $Q = (R(r(\cos 30^\circ - \sin 30^\circ) - \delta \sin 30^\circ) - P_1\delta)/r$,

$R = P_2 r/(f(0{,}6r + 2cf)\cos 30^\circ - 0{,}5r)$.

37. $Q e^{-f(\pi/2+\alpha)} \le T \le Q e^{f(\pi/2+\alpha)}$.

38. $Q = Pf\cos\alpha/2$.

39. $f_1 = 0{,}576, \quad f_2 = 0{,}812$.

40. $M > 2PR/3$.

41. 1) $\alpha = 30^\circ$, 2) $P_{\min} = Q/\sqrt{65}$, $\mathrm{tg}\beta = 1/8$, $\alpha \approx 32{,}7^\circ$.

42. $\sin\alpha - f\cos\alpha \le P_2 r/(P_1 R) \le \sin\alpha + f\cos\alpha$.

43. $h < 10\delta$ при $f < 0{,}1$ (при $f > 0{,}1$ возможно качение и скольжение одновременно).

44. $\sin\alpha_2 = \dfrac{1-f^2}{1+f^2}$; $\alpha_2 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.

45. $f \ge 2\sin\varphi/(\pi - 2\cos\varphi)$.

$\varphi_1 = \arccos(2/\pi)$; $(f_{\min})_{\max} = 2/\sqrt{\pi^2 - 4}$.

46. $F_A = f_1 P_1\left[1 + \dfrac{f_1(1+f_2\ \mathrm{tg}\alpha)}{(1-f_1 f_2)\ \mathrm{tg}\,\alpha - f_1 - f_2}\right] = 0{,}238$ кН.

47. $T_A = \dfrac{1}{4}P, \quad T_B = \dfrac{1}{3}P, \quad T_C = \dfrac{5}{12}P$.

48. $Q = 12P$.

49. $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2f} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}; \quad 0 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2}$.

50. $\mathrm{tg}\delta = \dfrac{\left(f^2-1\right)\left(e^{-f\alpha} - e^{f\alpha}\right) - 2f\ \mathrm{tg}\alpha\left(e^{-f\alpha} + e^{f\alpha}\right)}{\left(f^2-1\right)\mathrm{tg}x\left(e^{-f\alpha} + e^{f\alpha}\right) + 2f\left(e^{-f\alpha} - e^{f\alpha}\right)}$.

51. $a/l \le 4f/\sqrt{1+16f^2}$.

52. При $f > \delta/r$ $\quad 4(1-\delta/r) \le \mathrm{tg}\alpha \le 4(1+\delta/r)$.

При $f \le \delta/r$ $\ 4(1-f) \le \mathrm{tg}\alpha \le 4(1+f)$.

53. $f = \sqrt{2}/5$.

54. 1) Раскатятся, 2) При абсолютно твердых трубах и поверхности пола количество труб теоретически неограниченно велико, 3) Зависит, так как необходимо преодолеть трение качения и трения скольжения в местах контакта труб, вызванное сопротивлением труб перекатыванию.

55. $l_{\max} = 8Rf/(1+f^2)$, $f \ge 2 - \sqrt{3}$.

56. $P \le Qa/2h$, $P \le Q/2$, $P \le Qf/\sqrt{1+f^2}$.

57. Система сходящихся сил. Из формул равновесия получаются формулы для координаты центра масс.

58. $x = l/2$.

59. $l = L/2$.

60. $P_2(1 - 2f\mathrm{ctg}\alpha) \le P_1 \le P_2(1 + 2f\mathrm{ctg}\alpha)$.

61. $\dfrac{2P_1 + 5P_2}{6\sqrt{3}} \le Q \le (P_1 + P_2)f$, $S = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{P_1}{2} + P_2 - Q\sqrt{3}\right)$.

Глава 6

1. $\lambda = (M_{\text{вр}} \cos^2 \varphi)/(ca)$.

2. $M_{2\min} = (aM_1)/(a\sin^2 \alpha + fr\cos\alpha)$.

3. Учесть, что точка L– МЦС звена AE, точка S – МЦС ползуна в его относительном движении по отношению к звену OAB, K – МЦС ползуна в абсолютном движении.

4. $M_2 = Pl$, $R_C = 2P/\sqrt{3}$, $R_D = P\sqrt{13}/\sqrt{3}$, $R_E = 0$.

5. $Q = M\sqrt{2}/3l$.

6. $M_1 = Pl\sqrt{3}/2$.

7. $x_A = 0$, $y_A = -14$ Н, $M_A = -32$ Н·м, $R_C = 2$ Н.

8. $F = 3T$.

9. $m_2 = 0{,}5m_1$, линия действия силы F должна пройти через МЦС звена AB, при $AB = l\sqrt{2}$, $AK = l$, $\cos\varphi = \sqrt{0{,}6}$.

10. $R_O = m/2a,\ \alpha = 90^\circ$.

11. $Y_A = 44$ Н, $X_D = 32\sqrt{3}$ Н.

12. $M = Pa/2 + Q(a - b\cos^3 \varphi/2)$.

13. $F = \dfrac{4M}{r\sqrt{3}}$.

14. $Q = 4(M_1 + M_3 - 2M_4 + Fa)/a$.

15. $M_4 = \dfrac{3}{4}(M_2 - 2M_1)$.

16. $M_2/M_1 = (b^2 - a^2)/(b^2 + a^2)$.

17. $M = (Pl) / ((\cos\alpha + f\sin\alpha)\cos\alpha)$.

18. $F = M\sqrt{3}/R$.

Глава 7

1. $P = bQ/(b - 2f_0 y)$.

2. $c_{\min} = 10\sqrt{2}$ (Н/см), $P_{\min} = 20$ Н.

3. $M_3 = 5(\sqrt{3}+1)lQ/6$.

4. $a_{\min} = h/2f$, $P_{\min} \to 0$.

5. $f = \text{tg}\alpha$.

6. $N = 4Q$.

7. $R_A = R_B = R_C = P/\sqrt{3}$.

8. $Q = P(\sin\beta + f\cos\beta)/(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.

9. $\alpha < 2\text{arctg}\, f$.

10. $T = Qf/((1 - f^2)\cos\alpha + f)$.

11. 1) $r > 0$, $tg\alpha = 3\pi r^2/4(R^2 + rR + r^2)$,

$(r \to R, \alpha \to 38{,}1^\circ; r \to \infty, \alpha \to 67^\circ; r = 2R, \alpha = 53{,}6^\circ; r = 0{,}5R, \alpha = 18{,}6^\circ)$.

2) $r < 0$, $\text{tg}\alpha = 3\pi r^2 (R + r)/4(R^3 - r^3)$,

$(r \to R, \alpha \to \pi/2; r \to \infty, \alpha = 113^\circ)$.

12. $f_A \le f_B < f_A + 1$, $M > (PR(f_A + f_B))/(1 + f_A - f_B)$.

13. 1) При вкатывании $P = 2453H$; 2) При втягивании $P = 2874H$.

14. $0{,}17 \le M/\Pr \le 0{,}83$, $f \ge 0{,}175$.

15. $R = \pi r^2 P/\sin\alpha\,\cos\alpha$, $\bar{R}$ проходит через точку C на прямой AB ($R \perp AB$), причем $BC = AC\,\text{tg}^2\alpha$.

16. $r \le f^2 R$.

17. $N_A = M/\sqrt{a^2 + b^2}$, $N_B = Ma/(a^2 + b^2)$, $N_C = Mb/(a^2 + b^2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будник, Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике / Ф.Г. Будник, Ю.М. Зингерман, Е.И. Селенский. – М. : Высшая школа, 1987. – 176 с.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики. Т. 1 / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб., 1998.
3. Зернов, Б.С. Сборник задач по теоретической механике / Б.С. Зернов. – М.-Л., 1980. – Ч. 1. – 172 с.
4. Исмагамбетов, М.У. Задачи из конкурсов по основам механики / М.У. Исмагамбетов, В.И. Рощанский. – Акмола : Ғылым, 1998. – 56 с.
5. Курс теоретической механики / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др. // под общ. ред. К.С. Колесникова. – М., 2000.
6. Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М., 1982. Т. 1.
7. Методические материалы и конкурсные задачи Всероссийской олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по теоретической механике 1993 года. – Пермь : Изд-во ПГТУ, 1994. – 26 с.
8. Методические материалы и конкурсные задачи Всероссийской олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по теоретической механике 1994 года. – Пермь : Изд-во ПГТУ, 1995. – 32 с.
9. Методические материалы и конкурсные задачи Межреспубликанской олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по теоретической механике 1992 года. – Пермь : Изд-во ПГТУ, 1993. – 32 с.
10. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.
11. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. – М., 2003.
12. Попов, А.И. Олимпиадные задачи по теоретической механике : учеб. пособие / А.И. Попов, В.И. Галаев. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. – 84 с.
13. Примеры и задачи в теоретической механике. Ч. 1. Статика. Кинематика / В.Д. Бертяев, П.П. Макарова, С.С. Маркелов и др. – М., 2004.
14. Сборник задач по теоретической механике / Е.С. Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко. – М. : Наука, 1980. – 210 с.
15. Сборник задач по теоретической механике / под общ. ред. Н.А. Бражниченко. – М. : Высшая школа, 1986. – 480 с.
16. Сборник задач по теоретической механике / под ред. К.С. Колесникова. – М. : Наука, 1983. – 320 с.
17. Сборник конкурсных задач олимпиад по теоретической механике 1987 – 1998 годов с анализом их решений / под ред. А.В. Чигарева. – Минск : Тэхналогiя, 2000. – 280 с.
18. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М., 2001.
19. Файн, А.М. Сборник задач по теоретической механике / А.М. Файн. М. : Высшая школа, 1978. 189 с.
20. Финальный отчет по Всероссийской олимпиаде студентов вузов по теоретической механике. – Екатеринбург : Изд-во УрГСХА, 1996. – 56 с.
21. Финальный отчет по Всероссийской олимпиаде студентов вузов по теоретической механике. – Екатеринбург : Изд-во Комитета по делам молодежи при правительстве Свердловской области, 1997. – 68 с.
22. Финальный отчет по Всероссийской олимпиаде студентов вузов по теоретической механике. – Екатеринбург : Изд-во Комитета по делам молодежи при правительстве Свердловской области, 1998. – 72 с.
23. Финальный отчет по Всероссийской олимпиаде студентов вузов по теоретической механике. – Екатеринбург : Изд-во Комитета по делам молодежи при правительстве Свердловской области, 1999. – 90 с.
24. Финальный отчет по Всероссийской олимпиаде студентов вузов по теоретической механике. – Екатеринбург : Изд-во Комитета по делам молодежи при правительстве Свердловской области, 2000. – 76 с.
25. Цывильский, В.Л. Теоретическая механика / В.Л. Цывильский. – М., 2004.
26. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.Л. Никифорова. – СПб., 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ