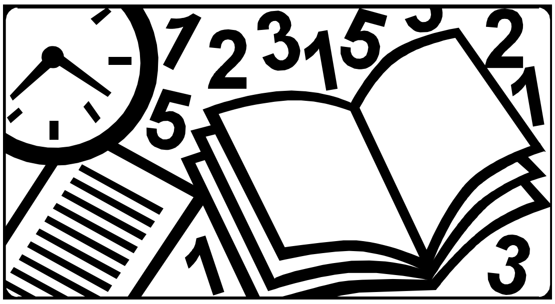
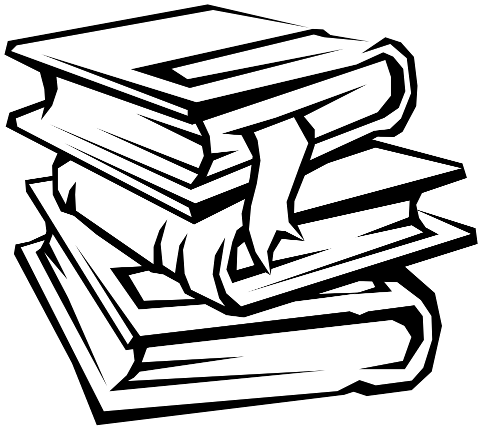
В.И. ФОМИН

МАТЕМАТИКА 1.1





• ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ •

УДК 51(075)
ББК В11я73
Ф753

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
ТГУ им. Г.Р. Державина

А.И. Булгаков

Доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой прикладной математики и механики ТГТУ
Г.М. Куликов

Фомин, В.И.

Ф753 Математика 1.1 : учебное пособие для студентов заочной и дистанционной форм обучения / В.И. Фомин. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 100 с. – 200 экз. – ISBN 5-8265-0605-9 (978-5-8265-0605-9).

Содержит справочный материал по различным разделам математики, необходимый для выполнения трех контрольных работ, предусмотренных Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования. Рассмотрены методы решения типовых задач, входящих в контрольные работы.

Предназначено для студентов заочной и дистанционной форм обучения первого курса инженерных специальностей вузов.

УДК 51(075)
ББК В11я73

ISBN 5-8265-0605-9
(978-5-8265-0605-9)

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО "ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

В.И. Фомин

МАТЕМАТИКА 1.1

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия для студентов
заочной и дистанционной форм обучения

Тамбов

Издательство ТГТУ

2007

Учебное издание

ФОМИН Василий Ильич

МАТЕМАТИКА 1.1

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 13.06.2007
Формат 60 × 84/16. 5,81 усл. печ. л. Тираж 200 экз. Заказ № 363

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, ТАМБОВ, СОВЕТСКАЯ, 106, К. 14

ВВЕДЕНИЕ

Цель данного учебного пособия – помочь студентам первого курса заочной и дистанционной форм обучения инженерных специальностей вузов самостоятельно выполнить три контрольные работы по различным разделам математики, предусмотренным Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (тексты контрольных заданий см. в пособии: Фомин В.И. Математика. Контрольные задания. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 88 с.; Электронный вариант: Электронная библиотека системы федеральных образовательных порталов: http: window.edu.ru/window/library: Фомин В.И. Математика. Контрольные задания. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2004.)

Необходимый справочный материал снабжен двойной нумерацией: первый номер – это номер контрольной работы, второй номер – это номер задачи из соответствующей контрольной работы, к которым относится данный материал.

Типовые задачи, решение которых изложено в учебном пособии, снабжены аналогичной двойной нумерацией.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$::=$	– оператор определения («это по определению»)
$\varnothing$	– пустое множество
ДПСК	– декартова прямоугольная система координат
$\uparrow\uparrow$	– сонаправленность
$\uparrow\downarrow$	– противоположная направленность
$\parallel$	– параллельность, коллинеарность
$\nparallel$	– непараллельность, неколлинеарность
$\perp$	– перпендикулярность, ортогональность
$\not\perp$	– неперпендикулярность, неортогональность
$\vec{0}$	– нулевой вектор
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	– единичные векторы координатных осей
$\lvert\vec{a}\rvert$	– модуль (длина) вектора $\vec{a}$
$\vec{a}\vec{b}$	– скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
$\vec{a}\times\vec{b}$	– векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$	– смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
$O_\delta(x_0)$	– дельта-окрестность точки x_0
$\dot{O}_\delta(x_0)$	– проколотая дельта-окрестность точки x_0
$\forall$	– квантор общности («для любого», «для каждого», «для всякого»)
$\exists$	– квантор существования («существует», «найдется»)
$\mid$	– «такой (такая, такое), что»
R	– множество действительных чисел
$D(y)$	– область определения функции y
$P_n(x)$	– многочлен степени n переменной x
$A\subset B$	– множество A включено во множество B и $A\neq B$
$A\subseteq B$	– множество A включено во множество B (возможно, что $A=B$)
$f(x_0+0)$	– правосторонний предел функции $f(x)$ в точке x_0
$f(x_0-0)$	– левосторонний предел функции $f(x)$ в точке x_0
$\Leftrightarrow$	– знак равносильности (эквивалентности) («тогда и только тогда»)
$\wedge$	– конъюнкция («и»)
$\in$	– знак принадлежности («принадлежит»)
$\overline{\in}$ или $\notin$	– знак непринадлежности («не принадлежит»)
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	– предел функции $f(x)$ в точке x_0 (при $x\to x_0$)
$f'(x_0)$	– производная функции $f(x)$ в точке x_0

Контрольная работа 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. МАТРИЦЫ, ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Матрица размеров $m \times n$ $::=$ массив $m \cdot n$ чисел a_{ij} ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$), расположенных в виде таблицы, состоящей из m горизонтальных и n вертикальных рядов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

при этом числа a_{ij} называются элементами матрицы, горизонтальные ряды – строками матрицы, вертикальные ряды – столбцами матрицы.

Таким образом, матрица размеров $m \times n$ имеет m строк и n столбцов; первый индекс элемента a_{ij} указывает на номер строки, второй – на номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент. Сокращенное обозначение матрицы размеров $m \times n$: $A = (a_{ij})_{m,n}$.

Транспонированная матрица к матрице $A = (a_{ij})_{m,n}$ $::=$ матрица вида

$$A^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операция перехода от матрицы A к матрице A^{T} называется транспонированием матрицы A.

Прямоугольная матрица размеров $m \times n$ $::=$ матрица $A = (a_{ij})_{m,n}$, для которой $m \ne n$.

Квадратная матрица порядка n $::=$ матрица $A = (a_{ij})_{m,n}$, для которой $m = n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенное обозначение квадратной матрицы порядка n: $A = (a_{ij})_{n}$.

Главная диагональ квадратной матрицы порядка n $::=$ ее диагональ, идущая от левого верхнего угла к правому нижнему углу, т.е. диагональ, составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Побочная диагональ квадратной матрицы порядка n $::=$ ее диагональ, идущая от правого верхнего угла к левому нижнему углу, т.е. диагональ, составленная из элементов $a_{1n}, \dots, a_{n1}$.

Верхняя треугольная матрица порядка n $::=$ матрица $A = (a_{ij})_{n}$, для которой $a_{ij} = 0$ для $\forall 1 \le i, j \le n$, таких что $i > j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нижняя треугольная матрица порядка n $::=$ матрица $A = (a_{ij})_{n}$, для которой $a_{ij} = 0$ для $\forall 1 \le i, j \le n$, таких что $i < j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Треугольная матрица порядка n $::=$ верхняя треугольная или нижняя треугольная матрица порядка *n*.

Диагональная матрица порядка n $::=$ матрица $A = (a_{ij})_n$, для которой $a_{ij} = 0$ для $\forall 1 \le i, j \le n$, $i \ne j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица порядка n $::=$ матрица $A = (a_{ij})_n$, для которой $a_{ii} = 1$ для $\forall 1 \le i \le n$ и $a_{ij} = 0$ для $\forall 1 \le i, j \le n$, $i \ne j$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, единичная матрица – это частный случай диагональной матрицы.

Нулевая матрица размеров $m \times n$ $::=$ матрица $A = (a_{ij})_{m,n}$, для которой $a_{ij} = 0$ для $\forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$:

$$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нулевую матрицу порядка *n* принято обозначать O_n.

Ненулевая матрица размеров $m \times n$ $::=$ матрица $A = (a_{ij})_{m,n}$, у которой хотя бы один элемент отличен от нуля.

Матрица-строка длины n $::=$ матрица $A = (a_{1j})_{1,n} = (a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{1n})$.

Матрица-столбец высоты m $::=$ матрица $A = (a_{i1})_{m,1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Пусть $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m,n}$. Тогда $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ для $\forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$;

$A + B$ $::=$ $C = (c_{ij})_{m,n}$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $\forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ ($A + B$ – сумма матриц A и B);

$A - B$ $::=$ $C = (c_{ij})_{m,n}$, где $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для $\forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ ($A - B$ – разность матриц A и B);

αA $::=$ $C = (c_{ij})_{m,n}$, где $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ для $\forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ (здесь α – любое действительное число) (αA – произведение матрицы A на число α).

Пусть $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{n,l}$. Тогда AB $::=$ $C = (c_{ij})_{m,l}$, где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ для $\forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le l$ (AB – произведение матрицы A на матрицу B).

Задача 1.1. Даны две матрицы A и B. Найти AB, BA. Проверить выполнимость равенства $AB = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 1} \\ \boxed{1 \quad -2 \quad 4} \\ \boxed{3 \quad -5 \quad 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}7\\5\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}5\\3\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\-1\\3\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = 1\cdot 7 + 2\cdot 5 + 1\cdot 1 = 18, \qquad c_{12} = 1\cdot 5 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 = 13,$$
$$c_{13} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 3 = 2;$$
$$c_{21} = 1\cdot 7 + (-2)\cdot 5 + 4\cdot 1 = 1, \qquad c_{22} = 1\cdot 5 + (-2)\cdot 3 + 4\cdot 2 = 7,$$
$$c_{23} = 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) + 4\cdot 3 = 15;$$
$$c_{31} = 3\cdot 7 + (-5)\cdot 5 + 3\cdot 1 = -1, \qquad c_{32} = 3\cdot 5 + (-5)\cdot 3 + 3\cdot 2 = 6,$$
$$c_{33} = 3\cdot 1 + (-5)\cdot(-1) + 3\cdot 3 = 17;$$

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 18 & 13 & 2 \\ 1 & 7 & 15 \\ -1 & 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{7 \quad 5 \quad 1} \\ \boxed{5 \quad 3 \quad -1} \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\-2\\-5\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\4\\3\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix},$$

$$d_{11} = 7\cdot 1 + 5\cdot 1 + 1\cdot 3 = 15, \qquad d_{12} = 7\cdot 2 + 5\cdot(-2) + 1\cdot(-5) = -1,$$
$$d_{13} = 7\cdot 1 + 5\cdot 4 + 1\cdot 3 = 30;$$
$$d_{21} = 5\cdot 1 + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 3 = 5, \qquad d_{22} = 5\cdot 2 + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot(-5) = 9,$$
$$d_{23} = 5\cdot 1 + 3\cdot 4 + (-1)\cdot 3 = 14;$$
$$d_{31} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 = 12, \qquad d_{32} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 3\cdot(-5) = -17,$$
$$d_{33} = 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 3 = 18;$$

$$\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 15 & -1 & 30 \\ 5 & 9 & 14 \\ 12 & -17 & 18 \end{pmatrix}.$$

Так как $c_{11} \neq d_{11}$ $(18 \neq 15)$, то $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$.

Задача 1.1 решена.

1.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система m линейных уравнений с n неизвестными $::=$ система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\,, \end{cases} \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные величины; a_{ij} $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ – некоторые заданные числа, называемые коэффициентами системы (1); b_i $(1 \le i \le m)$ – некоторые заданные числа, называемые свободными членами системы (1); при этом, если все свободные члены равны нулю, то система (1) называется однородной; если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система (1) называется неоднородной.

Решение системы (1) $::=$ упорядоченный набор чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, при подстановке которых в уравнения системы (1) соответственно вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получаются верные числовые равенства, при этом числа ξ_i $(1 \le i \le n)$ называются компонентами данного решения. Решение $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ системы (1) можно записывать в виде $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \ldots, x_n = \xi_n$.

Пусть M – множество решений системы (1).

Система (1) называется *несовместной*, если она не имеет решений, т.е. если $M = \varnothing$.

Система (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, т.е. если $M \neq \varnothing$.

Совместная система (1) называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Совместная система (1) называется *неопределенной*, если она имеет более, чем одно решение.

Матрица (*основная матрица*) *системы* (1) $::=$ матрица $\mathrm{A} = (a_{ij})_{m,n}$, составленная из коэффициентов системы (1):

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица системы (1) $::=$ матрица, получаемая из основной матрицы А системы (1) добавлением к ней столбца свободных членов:

$$\tilde{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \ ; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \ ; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \ . \end{cases} \tag{2}$$

Матрица системы (2) имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Определитель (*детерминант*) *системы* (2) (*или матрицы* (3)) $::=$ число, записываемое в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

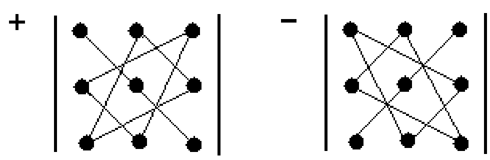
и вычисляемое по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \ . \tag{5}$$

При этом числа a_{ij} ($1 \le i, j \le 3$) называются элементами определителя; горизонтальные ряды этих чисел – строками определителя; вертикальные ряды – столбцами определителя; диагональ, составленная из элементов a_{11}, a_{22}, a_{33}, − главной диагональю определителя; диагональ, составленная из элементов a_{13}, a_{22}, a_{31}, − побочной диагональю определителя; слагаемые в правой части формулы (5) − членами определителя.

Для записи формулы (5) удобно использовать следующую схему:



(6)

где слева схематически указанно правило записи членов определителя со знаком «+», а справа – правило записи членов определителя со знаком «−».

Определитель Δ матрицы А принято также обозначать через $\det \mathrm{A}$ или $|\mathrm{A}|$.

Определитель (4) называется определителем третьего порядка.

Вспомогательные определители системы (2) $::=$ определители, получаемые из определителя Δ системы (2) заменой в нем одного из столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера (Крамер Г. (1704 − 1752) – швейцарский математик): если $\Delta \ne 0$, то система (2) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}\,; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}\,. \tag{7}$$

Формулы (7) называются формулами Крамера.

Укажем матричный способ решения системы (2). Наряду с матрицей А системы (2) введем в рассмотрение матрицы – столбцы неизвестных и свободных членов:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (2) можно записать в матричной форме:

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B}\,. \tag{8}$$

Определитель второго порядка $::=$ число, записываемое в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix} = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}\,.$$

Минор M_{ij} *элемента* a_{ij} *матрицы* (3) $::=$ определитель второго порядка, составленный из элементов матрицы (3), остающихся после вычеркивания ее *i*-й строки и *j*-го столбца.

Например, минор элемента a_{32} имеет вид

$$\mathrm{M}_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} *элемента* a_{ij} *матрицы* (3) $::=$ минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\,\mathrm{M}_{ij}\,.$$

Например, алгебраическое дополнение элемента a_{12} имеет вид

$$\mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что если сумма $i + j$ четна, то алгебраическое дополнение элемента a_{ij} совпадает с его минором, если $i + j$ нечетна, то алгебраическое дополнение элемента a_{ij} отличается от его минора лишь знаком.

Матрица (3) называется *невырожденной* (или неособенной), если ее определитель Δ отличен от нуля.

Матрица (3) называется вырожденной (или особенной), если $\Delta = 0$.

Обратная матрица к матрице (3) $::=$ матрица $\mathrm{A}^{-1} \mid \mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{E}$, $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E}$, где E – единичная матрица.

Если матрица (3) является невырожденной, т.е. $\Delta \neq 0$, то для нее существует обратная матрица A^{-1} и A^{-1} находится по формуле

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32} \\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{23} & \mathrm{A}_{33} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где A_{ij} − алгебраические дополнения элементов a_{ij} ($1 \le i, j \le 3$) матрицы (3).

Заметим, что алгебраические дополнения к элементам первой строки матрицы (3) записываются в первый столбец матрицы в формуле (9), второй строки – во второй столбец, третьей строки − в третий столбец.

Пусть матрица (3) является невырожденной. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножая обе части (8) слева на матрицу A^{-1}, получаем

$$\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AX}) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\,. \tag{10}$$

В силу свойства ассоциативности

$$\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AX}) = (\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{X}\,. \tag{11}$$

Заметим, что

$$A^{-1}A = E\,,\ EX{=}X. \tag{12}$$

В силу (10) − (12)

$$X{=}A^{-1}B\,. \tag{13}$$

Итак, при матричном способе решения матрица-столбец неизвестных находится по формуле (13).

Систему (2) можно решить также методом Гаусса (методом последовательного исключения неизвестных) (Гаусс К.Ф (1777 − 1855) – немецкий математик, астроном, физик и геодезист).

Пусть $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то в системе (2) надо первое уравнение поменять местами с каким-либо другим уравнением, у которого коэффициент при неизвестной x_1 отличен от нуля, и в дальнейшем рассматривать вновь полученную систему уравнений, которая равносильна (эквивалентна) исходной системе (2) (две системы линейных уравнений называются равносильными, если множества их решений совпадают)). Преобразуем систему (2), исключая неизвестное x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого обе части первого уравнения, умноженные на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, вычтем из соответствующих частей второго уравнения; затем обе части первого уравнения, умноженные на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения. В результате придем к системе вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\,; & (14.1) \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2\,; & (14.2) \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3\,. & (14.3) \end{cases} \tag{14}$$

Полученная система уравнений (14) равносильна исходной системе (2).

Может оказаться, что хотя бы в одном из двух последних уравнений системы (14) коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля. Пусть, например, уравнение (14.2) имеет вид $0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b_2$, где $b_2 \neq 0$. В этом случае система (14) несовместна и, следовательно, равносильная ей исходная система (2) тоже несовместна.

Возможен случай, когда в одном из двух последних уравнений системы (14) коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю. Пусть, например, уравнение (14.2) имеет вид

$$0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0\,. \tag{15}$$

Уравнение (15) удовлетворяется при любых значениях неизвестных x_2, x_3, поэтому его можно отбросить и перейти от системы (14) к равносильной ей системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\,; \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3\,. \end{cases} \tag{16}$$

Если $a'_{33} = 0$, то из второго уравнения системы (16) находим $x_2 = x_2^{\circ}$ и подставляем найденное значение в первое уравнение системы (16). В результате получаем уравнение вида

$$a_{11}x_1 + a_{13}x_3 = b'_1\,. \tag{17}$$

Полагая x_3 равным произвольному числу γ $(\gamma \in R)$ и подставляя в уравнение (17) вместо x_3 параметр γ, находим из полученного уравнения $x_1 = \varphi(\gamma)$. Тогда множество решений системы (16) и, тем самым, системы (2) в случае $a'_{33} = 0$ имеет вид

$$M = \left\{ \left(\varphi(\gamma)\,, x_2^{\circ}\,, \gamma \right) | \, \gamma \in R \right\},$$

т.е. система (2) имеет бесконечное множество решений. Если положить γ, равным конкретному числу γ_*, то получим конкретное решение $(\varphi(\gamma_*)\,, x_2^{\circ}\,, \gamma_*)$.

Если $a'_{33} \neq 0$, то полагая $x_3 = \gamma\ (\gamma \in R)$ и подставляя во второе уравнение системы (16) вместо x_3 параметр γ, находим из полученного уравнения $x_2 = \psi(\gamma)$. Затем в первое уравнение системы (16) вместо x_2 и x_3 подставляем соответственно $\psi(\gamma)$ и γ и из полученного уравнения находим $x_1 = \varphi(\gamma)$. Тогда множество решений системы (16) и, тем самым, системы (2) в случае $a'_{33} \neq 0$ имеет вид

$$M = \left\{ \left(\varphi(\gamma)\,, \psi(\gamma)\,, \gamma \right) | \, \gamma \in R \right\},$$

т.е. система (2) является неопределенной.

Если второе и третье уравнения системы (14) имеют вид (15), то отбрасывая их, переходим от системы (14) к равносильному ей уравнению

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\,. \tag{18}$$

Полагая $x_3=\gamma$, $x_2=\beta$ и подставляя в уравнение (18) вместо x_2 и x_3 соответственно β и γ, находим из полученного уравнения $x_1=\varphi(\beta,\gamma)$. Тогда множество решений уравнения (18) и, тем самым, системы (2) имеет вид

$$M=\left\{\left(\varphi(\beta,\gamma)\,,\beta\,,\gamma\right)\,|\,\beta,\gamma\in R\right\},$$

т.е. система (2) имеет бесконечное множество решений.

Если положить β и γ равными конкретным числам β_* и γ_*, то получим конкретное решение $(\varphi(\beta_*,\gamma_*)\,,\beta_*,\gamma_*)$.

Вернемся к системе (14). Пусть $a'_{22}\neq 0$ (если $a'_{22}=0$, то из уравнения (14.2) найдем $x_3=x_3^\circ$; подставив в уравнение (14.3) вместо x_3 число x_3°, найдем из полученного уравнения $x_2=x_2^\circ$; затем, подставив в уравнение (14.1) вместо x_2 и x_3 соответственно x_2° и x_3°, найдем из полученного уравнения $x_1=x_1^\circ$). Преобразуем систему (14), исключая неизвестное x_2 из третьего уравнения. Для этого обе части второго уравнения, умноженные на число $\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}$, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения. В результате придем к системе вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\,; & (19.1)\\ \qquad a'_{22}x_2+a'_{23}x_3=b'_2\,; & (19.2)\\ \qquad\qquad a''_{33}x_3=b''_3\,. & (19.3)\end{cases}\qquad (19)$$

Если $a''_{33}=0$ и $b''_3\neq 0$, то система (19) несовместна, следовательно, равносильная ей система (2) тоже несовместна. Если $a''_{33}=0$ и $b''_3=0$, то уравнение (19.3) можно отбросить и мы окажемся в ситуации, аналогичной (16).

Пусть $a''_{33}\neq 0$. Тогда из уравнения (19.3) найдем $x_3=x_3^\circ$. Подставим в уравнение (19.2) вместо x_3 число x_3° и найдем из полученного уравнения $x_2=x_2^\circ$. Подставим в уравнения (19.1) вместо x_2 и x_3 соответственно x_2° и x_3° и из полученного уравнения найдем $x_1=x_1^\circ$. Таким образом, в этом случае система (19) и, следовательно, система (2) имеет единственное решение $(x_1^\circ\,,x_2^\circ\,,x_3^\circ)$, т.е. является определенной:

$$M=\left\{(x_1^\circ\,,x_2^\circ\,,x_3^\circ)\right\}.$$

Изложенный выше метод Гаусса применим к произвольной системе m линейных уравнений с n неизвестными, т.е. к любой системе вида (1).

З а д а ч а 1.2. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: а) найти ее решение с помощью формул Крамера; б) записать систему в матричной форме и решить ее матричным способом; в) решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases}7x_1+4x_2-x_3=13\,;\\ 3x_1+2x_2+3x_3=3\,;\\ 2x_1-3x_2+x_3=-10\,.\end{cases}$$

Решение.

а) Найдем решение системы с помощью формул Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\,;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\,;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}\,,$$

где Δ − определитель системы уравнений; $\Delta_1\,,\Delta_2\,,\Delta_3$ − вспомогательные определители системы уравнений.

Вычислим $\Delta\,,\Delta_1\,,\Delta_2\,,\Delta_3$, используя схему (6):

$$\Delta=\begin{vmatrix}7&4&-1\\3&2&3\\2&-3&1\end{vmatrix}=7\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot2+3\cdot(-3)\cdot(-1)-$$

$$-(-1)\cdot2\cdot2-4\cdot3\cdot1-3\cdot(-3)\cdot7=14+24+9+4-12+63=102\,;$$

$\Delta=102\neq0\Rightarrow$ система уравнений совместна.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}13&4&-1\\3&2&3\\-10&-3&1\end{vmatrix}=13\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot(-10)+3\cdot(-3)\cdot(-1)-$$

$$-(-1)\cdot2\cdot(-10)-4\cdot3\cdot1-3\cdot(-3)\cdot13=26-120+9-20-12+117=0\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 13 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & -10 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot 3\cdot 1 + 13\cdot 3\cdot 2 + 3\cdot(-10)\cdot(-1) -$$

$$-(-1)\cdot 3\cdot 2 - 13\cdot 3\cdot 1 - 3\cdot(-10)\cdot 7 = 21 + 78 + 30 + 6 - 39 + 210 = 306,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 13 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -10 \end{vmatrix} = 7\cdot 2\cdot(-10) + 4\cdot 3\cdot 2 + 3\cdot(-3)\cdot 13 -$$

$$-13\cdot 2\cdot 2 - 4\cdot 3\cdot(-10) - 3\cdot(-3)\cdot 7 = -140 + 24 - 117 - 52 + 120 + 63 = -102,$$

$\Delta = 102$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 306$, $\Delta_3 = -102$;

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{102} = 0, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{306}{102} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-102}{102} = -1;$$

$$x_1 = 0,\, x_2 = 3,\, x_3 = -1.$$

б) Запишем систему в матричной форме и решим ее матричным способом. Матрица системы имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов системы:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричная форма системы имеет вид

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B}.$$

Найдем матрицу-столбец неизвестных по формуле

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}.$$

Для этого найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32} \\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{23} & \mathrm{A}_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot(-3) = 11,$$

$$\mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\left(3\cdot 1 - 3\cdot 2\right) = 3,$$

$$\mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3) - 2\cdot 2 = -13;$$

$$\mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -\left(4\cdot 1 - (-1)\cdot(-3)\right) = -1,$$

$$\mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot 1 - (-1)\cdot 2 = 9,$$

$$\mathrm{A}_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -\left(7\cdot(-3) - 4\cdot 2\right) = 29;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 14,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -\left(7 \cdot 3 - (-1) \cdot 3\right) = -24,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 2.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{102}\begin{pmatrix} 11 & -1 & 14 \\ 3 & 9 & -24 \\ -13 & 29 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{102}\begin{pmatrix} 11 & -1 & 14 \\ 3 & 9 & -24 \\ -13 & 29 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{102}\begin{pmatrix} 11 \cdot 13 + (-1) \cdot 3 + 14 \cdot (-10) \\ 3 \cdot 13 + 9 \cdot 3 + (-24) \cdot (-10) \\ -13 \cdot 13 + 29 \cdot 3 + 2 \cdot (-10) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{102}\begin{pmatrix} 143 - 3 - 140 \\ 39 + 27 + 240 \\ -169 + 87 - 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{102}\begin{pmatrix} 0 \\ 306 \\ -102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

в) Решим систему методом Гаусса. Исключим неизвестное x_1 из второго и третьего уравнений системы. Для этого обе части первого уравнения, умноженные на число 3, вычтем из соответствующих частей второго уравнения, умноженных на число 7; затем обе части первого уравнения, умноженные на число 2, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения, умноженных на число 7. В результате получаем систему вида

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13; \\ 2x_2 + 24x_3 = -18; \\ -29x_2 + 9x_3 = -96. \end{cases}$$

Разделим обе части второго уравнения полученной системы на общий множитель 2:

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13; \\ x_2 + 12x_3 = -9; \\ -29x_2 + 9x_3 = -96. \end{cases}$$

Исключим неизвестное x_2 из третьего уравнения системы. Для этого к обеим частям третьего уравнения прибавим соответствующие части второго уравнения, умноженные на число 29:

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13; \\ x_2 + 12x_3 = -9; \\ 357x_3 = -357. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы находим $x_3 = -1$. Подставляя во второе уравнение вместо x_3 число -1, получаем $x_2 - 12 = -9$, откуда $x_2 = 3$. Подставляя в первое уравнение вместо x_2 и x_3 числа 3 и -1, получаем $7x_1 + 12 + 1 = 13$, откуда $x_1 = 0$. Итак, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

Задача 1.2 решена.

1.3. ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Рассмотрим однородную систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Система (20) совместна, ибо имеет нулевое решение $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 0,\ x_4 = 0$.

Как уже отмечалось выше, систему (20) можно решить методом Гаусса. При этом в процессе решения число уравнений системы (20) может лишь уменьшаться (за счет отбрасывания уравнений, у которых коэффициенты при всех неизвестных и свободный член равны нулю, если такие уравнения появляются в ходе преобразований системы уравнений). Следовательно, система (20) в конечном итоге приводится к трапецеидальному виду а, значит, является неопределенной.

Нулевое решение системы (20) называется также *тривиальным решением*. Если хотя бы одна из компонент решения $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ системы (20) отлична от нуля, то такое решение называется *нетривиальным*.

Задача 1.3. Найти множество решений однородной системы трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Выписать три конкретные нетривиальные решения и проверить одно из них.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Применим метод Гаусса. Исключим из второго и третьего уравнений системы неизвестное x_1. Для этого из обеих частей второго уравнения, умноженных на число 3, вычтем соответствующие части первого уравнения, умноженные на число 7; затем из обеих частей третьего уравнения, умноженных на число 3, вычтем соответствующие части первого уравнения, умноженные на число 5. В результате приходим к системе вида

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ \quad 23x_2 - 11x_3 - 26x_4 = 0; \\ \quad 46x_2 - 22x_3 - 52x_4 = 0. \end{cases}$$

В полученной системе уравнений исключаем из третьего уравнения неизвестное x_2. Для этого из обеих частей третьего уравнения вычтем соответствующие части второго уравнения, умноженные на число 2:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ \quad 23x_2 - 11x_3 - 26x_4 = 0; \\ \qquad\quad 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение этой системы можно отбросить:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ \quad 23x_2 - 11x_3 - 26x_4 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = \gamma,\ x_4 = \mu\ (\gamma, \mu \in R)$. Подставляя во второе уравнение системы вместо x_3 и x_4 соответственно γ и μ, получаем $23x_2 - 11\gamma - 26\mu = 0$, откуда $x_2 = \frac{11}{23}\gamma + \frac{26}{23}\mu$. Подставляя в первое уравнение системы вместо x_2, x_3, x_4 соответственно $\frac{11}{23}\gamma + \frac{26}{23}\mu$, γ, μ получаем

$$3x_1 - \frac{55}{23}\gamma - \frac{130}{23}\mu + 2\gamma + 5\mu = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{3}{23}\gamma + \frac{5}{23}\mu.$$

Итак, $x_1 = \frac{3}{23}\gamma + \frac{5}{23}\mu$, $x_2 = \frac{11}{23}\gamma + \frac{26}{23}\mu$, $x_3 = \gamma$, $x_4 = \mu$, где γ, μ − произвольные действительные числа (параметры). Следовательно, исходная система имеет бесконечное множество решений вида

$$M = \left\{ \left(\frac{3}{23}\gamma + \frac{5}{23}\mu, \frac{11}{23}\gamma + \frac{26}{23}\mu, \gamma, \mu \right) \mid \gamma, \mu \in R \right\}.$$

Запишем три конкретные нетривиальные решения:

- положим $\gamma = 23,\ \mu = 0$, тогда $x_1 = 3,\ x_2 = 11,\ x_3 = 23,\ x_4 = 0$;
- положим $\gamma = 0,\ \mu = 23$, тогда $x_1 = 5,\ x_2 = 26,\ x_3 = 0,\ x_4 = 23$;

- положим $\gamma = 1$, $\mu = 1$, тогда $x_1 = \dfrac{8}{23}$, $x_2 = \dfrac{37}{23}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

Проверим первое решение $x_1 = 3$, $x_2 = 11$, $x_3 = 23$, $x_4 = 0$, для чего подставим его в уравнения исходной системы:

$$
\begin{aligned}
&3\cdot 3 - 5\cdot 11 + 2\cdot 23 + 5\cdot 0 = 9 - 55 + 46 = 0, \quad 0 = 0;\\
&7\cdot 3 - 4\cdot 11 + 23 + 3\cdot 0 = 21 - 44 + 23 = 0, \quad 0 = 0;\\
&5\cdot 3 + 7\cdot 11 - 4\cdot 23 - 9\cdot 0 = 15 + 77 - 92 = 0, \quad 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Задача 1.3 решена.

1.4. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Рассмотрим квадратную матрицу порядка 3

$$
\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.
$$

Число λ называется *собственным значением матрицы* А, если существует ненулевая матрица-столбец

$$
\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},
$$

такая что

$$
\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}, \tag{21}
$$

при этом, матрица-столбец X называется собственным *вектором матрицы* А, отвечающим собственному значению λ. Проведя умножение в обеих частях (21) и приравнивая соответствующие элементы полученных матриц-столбцов, приходим к скалярной записи соотношения (21):

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1;\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2;\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3.
\end{cases}
$$

или

$$
\begin{cases}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0;\\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0;\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0.
\end{cases} \tag{22}
$$

Таким образом, число λ является собственным значением матрицы А тогда и только тогда, когда система уравнений (22) с таким λ имеет хотя бы одно ненулевое решение. При этом каждое такое ненулевое решение $\mathrm{X}_{1,3} = (x_1, x_2, x_3)$, если его протранспонировать, т.е. матрица-столбец

$$
\mathrm{X} = \mathrm{X}_{1,3}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

является собственным вектором матрицы А, отвечающим данному собственному значению λ.

В матричной форме система (22) имеет вид

$$
(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})\mathrm{X} = 0, \tag{23}
$$

где Е – единичная матрица порядка 3.

Система (22) – это система трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Если определитель $\Delta = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})$ системы (22) отличен от нуля, то она, согласно правилу Крамера, имеет единственное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Следовательно, система (22) имеет ненулевые решения в том и только том случае, когда

$$
\det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}) = 0. \tag{24}
$$

Итак, собственными значениями матрицы А являются корни уравнения (24).

Уравнение (24) называется *характеристическим уравнением матрицы* А, его левая часть, т.е. $\det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})$ – *характеристическим многочленом матрицы* А; решения уравнения (24) – *характеристическими числами матрицы* А.

Заметим, что

$$\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Матрица (25) называется *характеристической матрицей матрицы* А. Учитывая (25), характеристическое уравнение (24) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (26)$$

Из вышесказанного следует, что если ставится задача о нахождении собственных значений и собственных векторов матрицы А, то нужно:

1) записать характеристическое уравнение (26) и найти его корни (тем самым будут найдены собственные значения матрицы А);

2) для каждого собственного значения λ записать систему линейных однородных уравнений (22) и найти ее ненулевые решения а затем протранспонировать найденные ненулевые решения (тем самым будут найдены собственные векторы матрицы А, отвечающие данному собственному значению λ).

Все вышесказанное в этом пункте о собственных значениях и собственных векторах квадратной матрицы порядка 3 естественным образом переносится на случай квадратной матрицы произвольного порядка *n*.

Задача 1.4. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение матрицы А:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Раскроем левую часть уравнения

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)+1\cdot 2\cdot(-2)+$$

$$+1\cdot 2\cdot(-2)\ -(-2)\cdot(4-\lambda)\cdot(-2)-1\cdot 1\cdot(1-\lambda)-2\cdot 2\cdot(4-\lambda)=$$

$$=(16-8\lambda+\lambda^2)(1-\lambda)-4-4-16+4\lambda-1+\lambda-16+4\lambda=$$

$$=16-8\lambda+\lambda^2-16\lambda+8\lambda^2-\lambda^3+9\lambda-41=-\lambda^3+9\lambda^2-15\lambda-25.$$

Характеристическое уравнение принимает вид

$$-\lambda^3+9\lambda^2-15\lambda-25=0,$$

или

$$\lambda^3-9\lambda^2+15\lambda+25=0.$$

Найдем методом подбора целый корень данного уравнения, исходя из того, что целые корни уравнения, если они есть, находятся среди делителей свободного члена. Делители свободного члена: $\pm 1, \pm 5, \pm 25$. Подставляя поочередно эти делители в уравнение, приходим к выводу, что $\lambda_1=-1$ − корень данного уравнения. Следовательно, левая часть уравнения делится нацело на двучлен $\lambda-\lambda_1=\lambda+1$:

$$\begin{array}{r|l} -\ \lambda^3-9\lambda^2+15\lambda+25 & \lambda+1 \\ \cline{2-2} \underline{\lambda^3+\lambda^2\qquad\qquad\quad} & \lambda^2-10\lambda+25 \\ -\ -10\lambda^2+15\lambda+25 & \\ \underline{-10\lambda^2-10\lambda\quad\ \ } & \\ -\ 25\lambda+25 & \\ \underline{25\lambda+25} & \\ 0 & \end{array}$$

Тогда уравнение принимает вид

$$(\lambda+1)(\lambda^2-10\lambda+25)=0 .$$

Приравниваем второй множитель в левой части уравнения нулю: $\lambda^2-10\lambda+25=0$ или $(\lambda-5)^2=0$, т.е. $\lambda_2=5$. Итак, матрица A имеет два собственных значения $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=5$.

Запишем систему уравнений (22):

$$\begin{cases}(4-\lambda)x_1+x_2-2x_3=0;\\ x_1+(4-\lambda)x_2+2x_3=0;\\ -2x_1+2x_2+(1-\lambda)x_3=0.\end{cases} \tag{27}$$

Найдем собственные векторы матрицы A, отвечающие собственному значению $\lambda_1=-1$. Для этого запишем систему (27) при $\lambda=\lambda_1$:

$$\begin{cases}5x_1+x_2-2x_3=0;\\ x_1+5x_2+2x_3=0;\\ -2x_1+2x_2+2x_3=0.\end{cases} \tag{28}$$

Найдем ненулевые решения системы (28):

$$\begin{cases}5x_1+x_2-2x_3=0;\\ x_1+5x_2+2x_3=0;\\ -2x_1+2x_2+2x_3=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-x_2-x_3=0;\\ x_1+5x_2+2x_3=0;\\ 5x_1+x_2-2x_3=0;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1-x_2-x_3=0;\\ \quad 6x_2+3x_3=0;\\ \quad 6x_2+3x_3=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-x_2-x_3=0;\\ \quad 2x_2+x_3=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{\gamma}{2};\\ x_2=-\dfrac{\gamma}{2};\\ x_3=\gamma,\ \gamma\in R.\end{cases}$$

Таким образом, множество ненулевых решений системы (28) имеет вид

$$M_1=\left\{\left(\frac{\gamma}{2},-\frac{\gamma}{2},\gamma\right)\mid \gamma\in R,\gamma\neq 0\right\}.$$

Следовательно, множество собственных векторов матрицы A, отвечающих собственному значению $\lambda_1=-1$, имеет вид

$$S_1=\left\{\left(\frac{\gamma}{2},-\frac{\gamma}{2},\gamma\right)^{\mathrm{T}}\mid \gamma\in R,\gamma\neq 0\right\}.$$

Найдем собственные векторы матрицы A, отвечающие собственному значению $\lambda_2=5$. Для этого запишем систему (27) при $\lambda=\lambda_2$:

$$\begin{cases}-x_1+x_2-2x_3=0;\\ x_1-x_2+2x_3=0;\\ -2x_1+2x_2-4x_3=0.\end{cases} \tag{29}$$

Найдем ненулевые решения системы (29):

$$\begin{cases}-x_1+x_2-2x_3=0;\\ x_1-x_2+2x_3=0;\\ -2x_1+2x_2-4x_3=0;\end{cases} \Leftrightarrow x_1-x_2+2x_3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\beta-2\gamma;\\ x_2=\beta,\ \beta\in R;\\ x_3=\gamma,\ \gamma\in R.\end{cases}$$

Таким образом, множество ненулевых решений системы (29) имеет вид

$$M_2=\left\{\left(\beta-2\gamma,\beta,\gamma\right)\mid \beta,\gamma\in R;\beta^2+\gamma^2\neq 0\right\}.$$

Следовательно, множество собственных векторов матрицы A, отвечающих собственному значению $\lambda_2=5$, имеет вид

$$S_2 = \left\{ (\beta - 2\gamma\,,\beta\,,\gamma)^{\mathrm{T}} \ \mid \beta, \gamma \in R\,; \beta^2 + \gamma^2 \neq 0 \right\}$$

(заметим, что условие $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ означает, что β и γ не обращаются одновременно в нуль).

Задача 1.4 решена.

Контрольная работа 2

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Понятия точки, прямой и плоскости относятся к неопределяемым (первичным) понятиям математики.

Рассмотрим прямую *d* на плоскости (рис. 1) и введем на этой плоскости декартову прямоугольную систему координат (ДПСК) (Декарт Р. (1596 − 1650) − французский философ, математик, физик, физиолог):

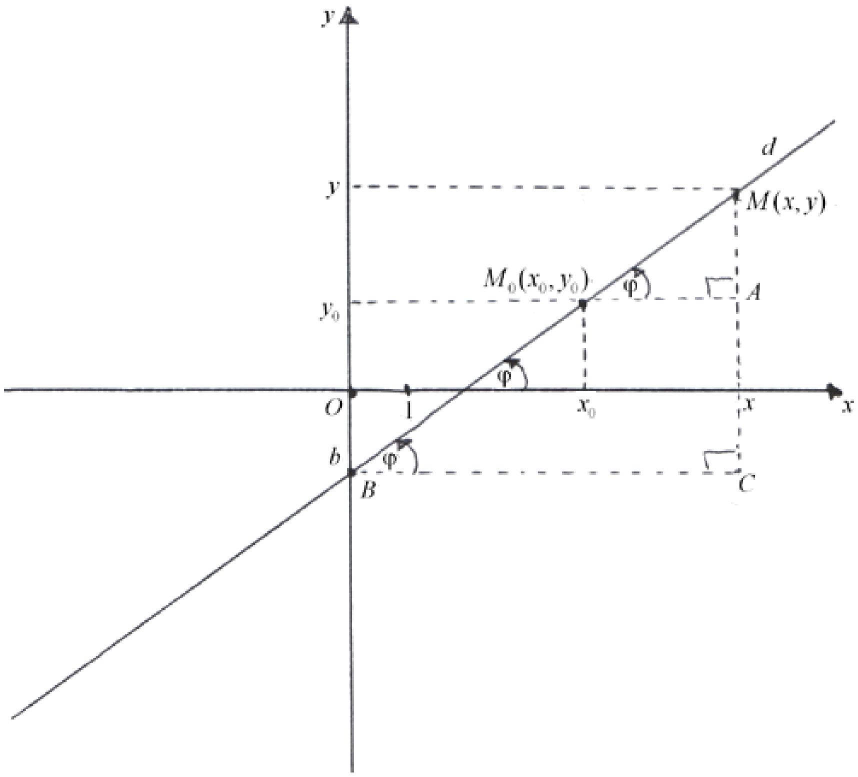


Рис. 1

Пусть φ − угол наклона прямой *d* к положительному направлению оси $\mathrm{O}x$.

Угловой коэффициент прямой d $::=$ тангенс угла наклона прямой *d* к положительному направлению оси $\mathrm{O}x$:

$$k = \operatorname{tg}\varphi\,.$$

Пусть b − величина отрезка, отсекаемого прямой *d* на оси $\mathrm{O}y$. Выведем уравнение прямой *d*, учитывая, что она имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси $\mathrm{O}y$ отрезок величиной b . Пусть $M(x, y)$ − переменная точка с текущими координатами x, y . Тогда, как видно из прямоугольного треугольника BCM ,

$$M \in d \iff \frac{y-b}{x} = \operatorname{tg}\varphi\,,$$

т.е.

$$M \in d \iff \frac{y-b}{x} = k$$

или

$$y = kx + b\,. \qquad (30)$$

Таким образом, уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и отсекающей на оси ординат отрезок величиной b , записывается в виде (30).

Уравнение вида (30) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Возьмем точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$, принадлежащую прямой *d*. Выведем уравнение прямой *d*, учитывая что она проходит через точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ и имеет угловой коэффициент k. Из прямоугольного треугольника M_0AM видно, что

$$M \in d \;\Leftrightarrow\; \frac{MA}{M_0A} = \operatorname{tg}\varphi .$$

Но $MA = y - y_0$, $M_0A = x - x_0$, $\operatorname{tg}\varphi = k$. Следовательно,

$$M \in d \;\Leftrightarrow\; \frac{y - y_0}{x - x_0} = k$$

или

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right). \tag{31}$$

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k, записывается в виде (31).

Заметим, что уравнение (31) можно записать в виде (30) ($b = y_0 - kx_0$).

Уравнение (31) выведено в предположении, что $\varphi \neq 0, \varphi \neq \frac{\pi}{2}$. Если $\varphi = 0$, т.е. прямая *d* параллельна оси Ox, то уравнение прямой *d* имеет вид $y = y_0$ (при условии, что $M_0 \in d$). Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. прямая *d* перпендикулярна к оси Ox (в этом случае угловой коэффициент прямой *d* не существует, так как $\operatorname{tg}\varphi$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ не определен), то уравнение прямой *d* имеет вид $x = x_0$ (в этом случае говорят, что угловой коэффициент прямой *d* равен бесконечности).

Рассмотрим на плоскости, снабженной ДПСК, прямую *d* (рис. 2).

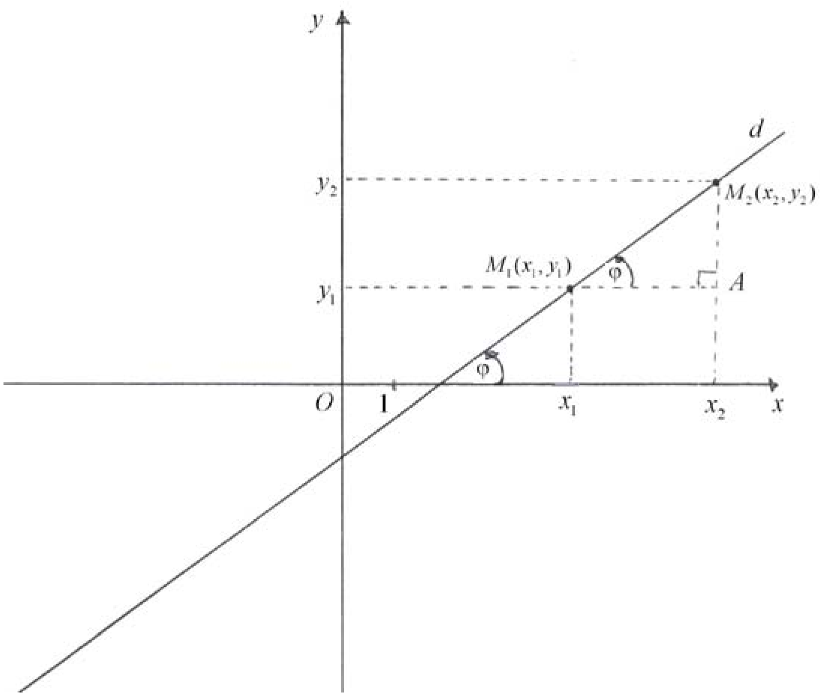


РИС. 2

Рассмотрим две точки $M_1\left(x_1, y_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2\right)$, принадлежащие прямой *d*. Из прямоугольного треугольника M_1AM_2 видно в силу теоремы Пифагора (Пифагор (ок. 580 − 500 до н.э.) − древнегреческий математик, философ), что расстояние между точками $M_1\left(x_1, y_1\right)$ и $M_2\left(x_2, y_2\right)$, т.е. длина отрезка M_1M_2, определяется формулой

$$\left|M_1M_2\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} .$$

Из $\Delta\, M_1AM_2$ также видно, что

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} . \tag{32}$$

Прямая d проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеет угловой коэффициент вида (32), следовательно, в силу (31) уравнение d имеет вид

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{33}$$

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, записывается в виде (33).

Рассмотрим на плоскости, снабженной ДПСК, две прямые $d_1 : y = k_1 x + b_1$ и $d_2 : y = k_2 x + b_2$ (рис. 3).

Пусть ψ − угол наклона прямой d_2 к прямой d_1, т.е. угол, на который нужно повернуть прямую d_1 вокруг точки L пересечения этих прямых, чтобы она совпала с прямой d_2. Из чертежа видно, что $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Применяя известную формулу тригонометрии

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

получаем

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2},$$

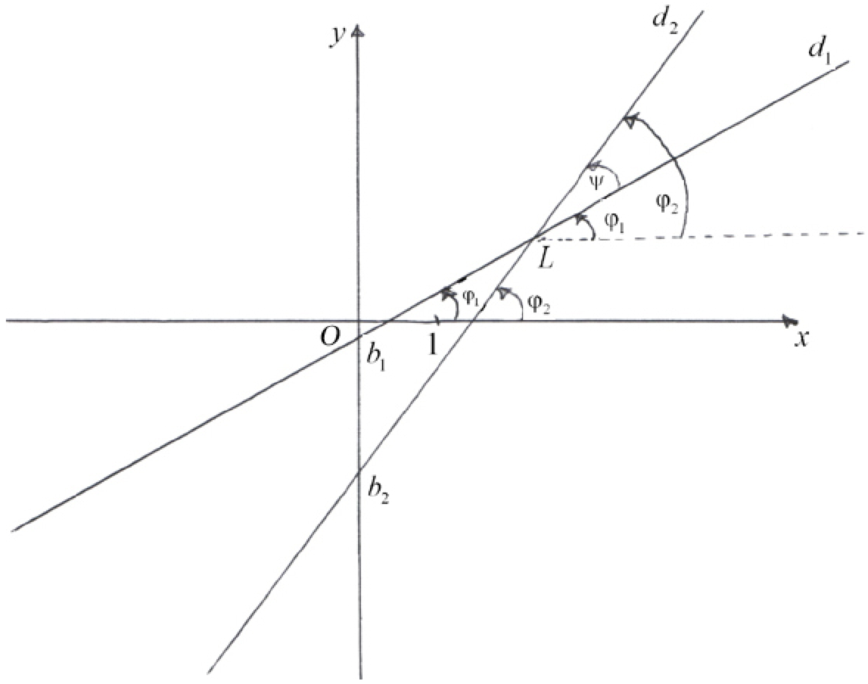


Рис. 3

или с учетом того, что $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{34}$$

Таким образом, тангенс угла наклона прямой $d_2 : y = k_2 x + b_2$ к прямой $d_1 : y = k_1 x + b_1$ вычисляется по формуле (34).

Анализ формулы (34) приводит к следующим утверждениям:

- признак параллельности двух прямых:

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2;$$

- признак перпендикулярности двух прямых:

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0$$

или

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

З а д а ч а 2.1. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

а) длину стороны AB;
б) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;
в) угол B;
г) уравнение высоты CD и ее длину;
д) уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD;
е) уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне AB;
ж) координаты точки M, расположенной симметрично точке A относительно прямой (CD):

$$A(1;-6),\ B(3;4),\ C(-3;3).$$

Решение.

а) Найдем длину стороны AB. Используя формулу для вычисления расстояния между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

получаем

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-(-6))^2} =$$
$$= \sqrt{4+100} = \sqrt{104} = \sqrt{4 \cdot 26} = 2\sqrt{26},$$
$$|AB| = 2\sqrt{26}.$$

б) Найдем уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты. Используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

получаем

$$(AB):\ \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A};\quad \frac{y-(-6)}{4-(-6)} = \frac{x-1}{3-1};\quad \frac{y+6}{10} = \frac{x-1}{2};$$
$$y + 6 = 5x - 5;\quad y = 5x - 11.$$

Итак, AB: $y = 5x - 11$, $1 \le x \le 3$, следовательно, $k_{AB} = 5$.

Аналогично,

$$(BC):\ \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B};\quad \frac{y-4}{3-4} = \frac{x-3}{-3-3};\quad \frac{y-4}{-1} = \frac{x-3}{-6};$$
$$y - 4 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2};\quad y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{2}.$$

Итак, BC: $y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{2}$, $-3 \le x \le 3$, следовательно, $k_{BC} = \frac{1}{6}$.

в) Найдем угол *B*. Изобразим треугольник ΔABC на чертеже (рис. 4).

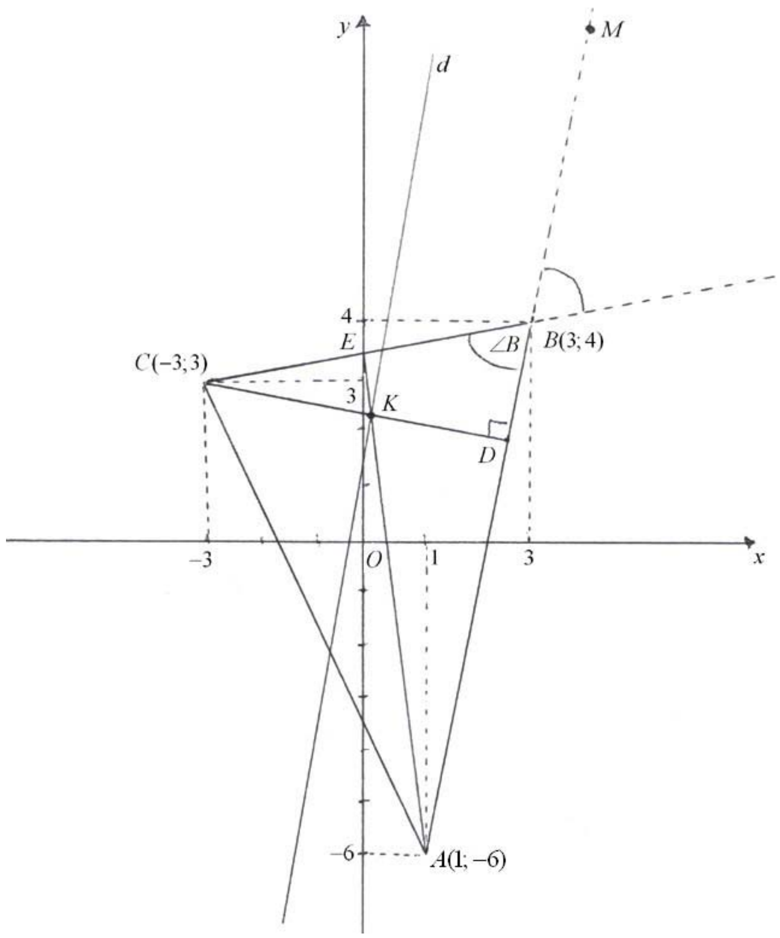


Рис. 4

Из чертежа видно, что $\angle B$ равен углу наклона прямой (AB) к прямой (BC). Используя формулу для вычисления тангенса угла наклона прямой $d_2 : y = k_2 x + b_2$ к прямой $d_1 : y = k_1 x + b_1$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

получаем

$$\operatorname{tg}\angle B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AB}} = \frac{5 - \dfrac{1}{6}}{1 + \dfrac{1}{6} \cdot 5} = \frac{30 - 1}{6 + 5} = \frac{29}{11},$$

$\operatorname{tg}\angle B = \dfrac{29}{11}$, следовательно, $\angle B = \operatorname{arctg}\dfrac{29}{11}$.

г) Найдем уравнение высоты CD и ее длину. Прямая (CD) перпендикулярна прямой (AB). Следовательно, по признаку перпендикулярности двух прямых

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}}, \quad k_{CD} = -\frac{1}{5}.$$

Прямая (CD) проходит через точку $C(-3;3)$ и имеет угловой коэффициент $k_{CD} = -\dfrac{1}{5}$. Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k:

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right),$$

получаем

$$(CD):\ y - y_C = k_{CD}\left(x - x_C\right); \quad y - 3 = -\frac{1}{5}\left(x - (-3)\right); \quad y - 3 = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5};$$

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}.$$

Итак, CD: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$, $-3\le x\le\frac{67}{26}$ $\left(x_D=\frac{67}{26}\text{, см. ниже}\right)$. Найдем длину высоты CD. Для этого найдем координаты точки $D=(AB)\cap(CD)$. Так как точка D принадлежит прямым (AB) и (CD), то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых. Следовательно, для нахождения координат точки D нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y=5x-11; \\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}. \end{cases}$$

Получаем

$$5x-11=-\frac{1}{5}x+\frac{12}{5};\quad 25x-55=-x+12;\quad 26x=67;\quad x=\frac{67}{26};$$

$$y=5x-11;\quad y=5\cdot\frac{67}{26}-11=\frac{49}{26}.$$

Итак, $D\left(\frac{67}{26},\frac{49}{26}\right)$. Тогда

$$|CD|=\sqrt{\left(x_D-x_C\right)^2+\left(y_D-y_C\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{67}{26}-(-3)\right)^2+\left(\frac{49}{26}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{21866}}{26};$$

$$|CD|=\frac{\sqrt{21866}}{26}.$$

д) Найдем уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD. По условию точка E является серединой отрезка BC. Используя формулы для нахождения координат точки $M_0\left(x_0,y_0\right)$, являющейся серединой отрезка M_1M_2, где $M_1\left(x_1,y_1\right)$, $M_2\left(x_2,y_2\right)$:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2},$$

получаем

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2};\quad y_E=\frac{y_B+y_C}{2};$$

$$x_E=\frac{3+(-3)}{2}=0;\quad y_E=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2};\quad E\left(0;\frac{7}{2}\right).$$

Используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки, получаем

$$(AE):\ \frac{y-y_A}{y_E-y_A}=\frac{x-x_A}{x_E-x_A};\quad \frac{y-(-6)}{\frac{7}{2}-(-6)}=\frac{x-1}{0-1};\quad \frac{y+6}{\frac{19}{2}}=-x+1;$$

$$y+6=-\frac{19}{2}x+\frac{19}{2};\quad y=-\frac{19}{2}x+\frac{7}{2},$$

Итак, AE: $y=-\frac{19}{2}x+\frac{7}{2}$, $0\le x\le 1$.

Найдем координаты точки $K=(AE)\cap(CD)$:

$$\begin{cases} y=-\frac{19}{2}x+\frac{7}{2}; \\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}, \end{cases}$$

$$-\frac{19}{2}x+\frac{7}{2}=-\frac{1}{5}x+\frac{12}{5};\quad 95x-35=2x-24;\quad 93x=11;\quad x=\frac{11}{93};$$

$$y=-\frac{19}{2}x+\frac{7}{2};\quad y=-\frac{19}{2}\cdot\frac{11}{93}+\frac{7}{2}=\frac{442}{186};$$

$$K\left(\frac{11}{93};\frac{442}{186}\right).$$

е) Найдем уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне AB. Обозначим эту прямую через d. По условию $d \parallel (AB)$. Следовательно, по признаку параллельности двух прямых

$$k_d = k_{AB}, \quad k_d = 5.$$

Прямая d проходит через точку $K\left(\frac{11}{93};\frac{442}{186}\right)$ и имеет угловой коэффициент $k_d = 5$. Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный угловой коэффициент, получаем

$$d: \; y - y_K = k_d\left(x - x_K\right); \quad y - \frac{442}{186} = 5\left(x - \frac{11}{93}\right);$$

$$y - \frac{442}{186} = 5x - \frac{55}{93}; \quad y = 5x + \frac{332}{186},$$

$$d: \; y = 5x + \frac{332}{186}.$$

ж) Найдем координаты точки M, расположенной симметрично точке A относительно прямой (CD). По условию точка D является серединой отрезка AM. Следовательно,

$$x_D = \frac{x_A + x_M}{2}; \quad y_D = \frac{y_A + y_M}{2},$$

откуда

$$x_M = 2x_D - x_A; \quad y_M = 2y_D - y_A.$$

Учитывая, что $D\left(\frac{67}{26};\frac{49}{26}\right)$ (см. пункт г)), получаем

$$x_M = 2\cdot\frac{67}{26} - 1 = \frac{54}{13}; \quad y_M = 2\cdot\frac{49}{26} - (-6) = \frac{127}{13},$$

$$M\left(\frac{54}{13};\frac{127}{13}\right).$$

Задача 2.1 решена.

2.2. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линия (*кривая*) *второго порядка* $::=$ линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением второй степени, т.е. уравнением вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{35}$$

где A, B, C, D, E, F − некоторые фиксированные числа, называемые коэффициентами уравнения, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Уравнение (35) называется общим уравнением второй степени.

Примерами линий второго порядка являются окружность, эллипс, гипербола, парабола.

Окружность с центром в точке M_0 *радиуса* r $::=$ геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до точки M_0 равно r.

Пусть на плоскости задана ДПСК (рис. 5). Выведем уравнение окружности L с центром в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ радиуса r.

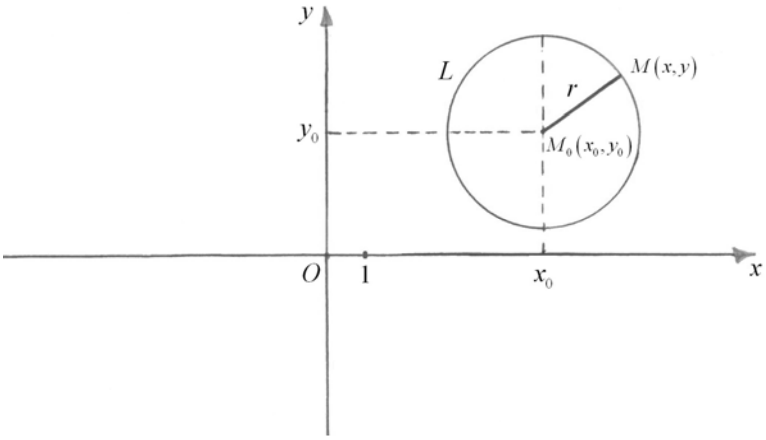


Рис. 5

Пусть $M(x,y)-$ переменная точка с текущими координатами x, y. Тогда $M \in L \Leftrightarrow |M_0M| = r$. Используя формулу для вычисления расстояния между двумя точками плоскости, получаем

$$|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\ .$$

Следовательно,

$$M \in L \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

или

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\ . \tag{36}$$

Таким образом, уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$ радиуса r задается формулой (36). В частности, уравнение окружности с центром в начале координат радиуса r имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2\ .$$

Уравнение (36) – это алгебраическое уравнение второй степени, следовательно, окружность есть линия второго порядка.

Эллипс $::=$ геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1, F_2 этой плоскости есть постоянная величина, равная $2a$ и эта постоянная больше расстояния между точками F_1 и F_2 $: 2a > 2c$, где $2c = |F_1F_2|$, при этом, точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса.

Рассмотрим на плоскости эллипс с фокусами F_1, F_2. Введем на этой плоскости ДПСК следующим образом: в качестве оси абсцисс возьмем прямую (F_1F_2), считая ее направленной от F_1 к F_2, начало координат поместим в середине отрезка F_1F_2. При таком выборе ДПСК уравнение данного эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ , \tag{37}$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (величина b является вещественным числом, ибо по определению эллипса $2a > 2c$, т.е. $a > c$). Заметим, что $b < a$. Уравнение (37) называется *каноническим уравнением эллипса*. Уравнение (37) – это алгебраическое уравнение второй степени, следовательно, эллипс есть линия второго порядка.

В уравнение (37) текущие координаты x, y переменой точки $M(x,y)$, принадлежащей эллипсу, входят в четной степени, следовательно, эллипс симметричен относительно координатных осей Ox и Oy. Поэтому для построения эллипса достаточно исследовать форму части эллипса, расположенной в первой координатной четверти, т.е. построить график функции

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{38}$$

при $0 \le x \le a$ (выражение (38) получено из формулы (37)), а затем с помощью зеркальных отражений графика относительно координатных осей восстановить форму эллипса в остальных координатных четвертях. В результате указанных операций получается, что эллипс имеет форму, изображенную на рис. 6.

Координатные оси Ox и Oy являются осями симметрии эллипса (оси симметрии эллипса называют обычно *осями эллипса*), а начало координат – центром симметрии эллипса (центр симметрии эллипса называют обычно *центром эллипса*). Таким образом, оси эллипса – это координатные оси Ox и Oy а центр эллипса – это точка $O(0;0)$. Точки пересечения эллипса с его осями называются *вершинами эллипса*. Таким образом, эллипс имеет четыре вершины A', A, B', B .

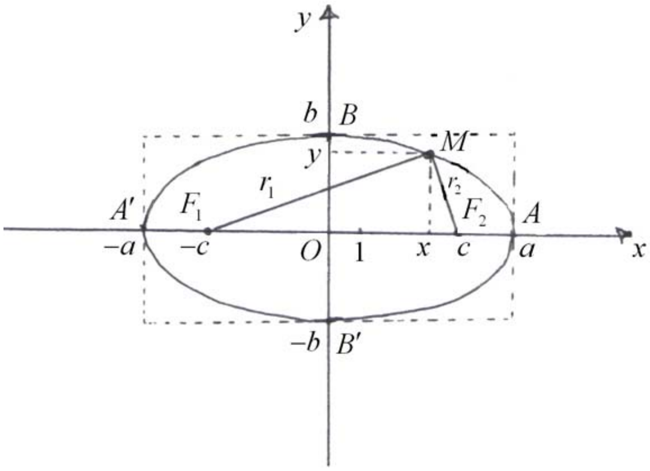


Рис. 6

Отрезки $A'A$ и $B'B$ (а также их длины $2a$ и $2b$) тоже принято называть осями эллипса: $A'A$ − большая ось эллипса; $B'B$ − малая ось эллипса (соответственно, $2a$ − большая ось эллипса; $2b$ − малая ось эллипса). В этом случае отрезки OA и OB (а также их длины a и b) принято называть полуосями эллипса: OA − большая полуось эллипса; OB − малая полуось эллипса (соответственно, a − большая полуось эллипса; b − малая полуось эллипса).

Пусть $M(x, y)$ − произвольная точка эллипса. Отрезки F_1M и F_2M (а также их длины r_1 и r_2) называются *фокальными радиусами точки M*.

Из определения эллипса следует, что $r_1 + r_2 = 2a$.

Подчеркнем еще раз, что величина b (малая полуось эллипса), входящая в каноническое уравнение эллипса, однозначно определяется величинами a и c по формуле $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Если окажется, что $b = a$, то каноническое уравнение эллипса принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2 , \tag{39}$$

а уравнение (39) определяет окружность с центром в точке $O(0;0)$ радиуса a . Следовательно, окружность можно рассматривать как частный случай эллипса.

Во многих задачах линия второго порядка задается общим уравнением, т.е. уравнением вида (35). Чтобы построить такую линию, нужно вначале уравнение (35) привести к каноническому виду, исходя из которого можно построить искомую линию.

Если в уравнении (35) $B = 0$, т.е. отсутствует член с произведением текущих координат, то для приведения такого уравнения к каноническому виду достаточно применить формулы сокращенного умножения $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ или $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

Может случиться, что при приведении общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду получится уравнение вида (37):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \tag{40}$$

но $a < b$. В этом случае уравнение (40) определяет эллипс следующего вида показанного на рис. 7 (переменные x и y поменялись ролями); $a = \sqrt{b^2 - c^2}$, т.е. $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

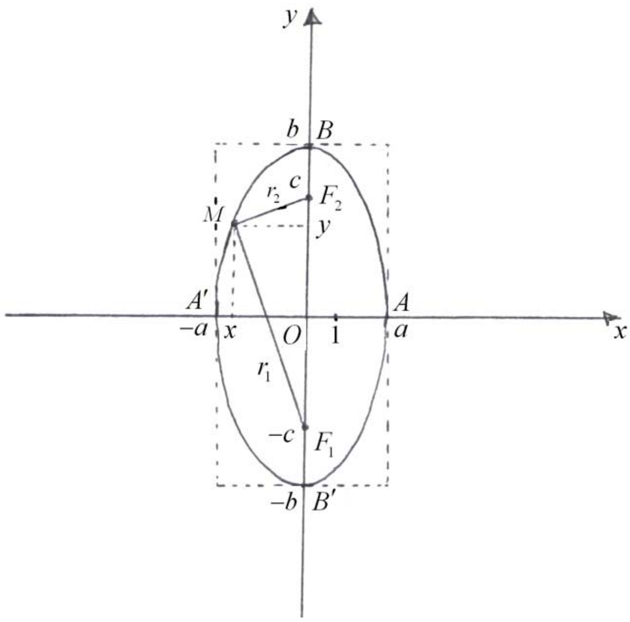


Рис. 7

Гипербола $::=$ геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1, F_2 этой плоскости есть постоянная величина $2a$ и эта постоянная меньше расстояния между точками F_1 и F_2 $: 2a < 2c$, где $2c = |F_1F_2|$, при этом точки F_1 и F_2 называются *фокусами гиперболы*.

Рассмотрим на плоскости гиперболу с фокусами F_1, F_2. Введем на этой плоскости ДПСК следующим образом: в качестве оси абсцисс возьмем прямую (F_1F_2), считая ее направленной от F_1 к F_2; начало координат поместим в середине отрезка F_1F_2. При таком выборе ДПСК уравнение данной гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{41}$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (величина b является вещественным числом, ибо по определению гиперболы $2a < 2c$, т.е. $a < c$).

Уравнение (41) называется *каноническим уравнением гиперболы*. Уравнение (41) является алгебраическим уравнением второй степени, следовательно, гипербола – это линия второго порядка.

В уравнение (41) текущие координаты x, y переменой точки $M(x, y)$, принадлежащей гиперболе, входят в четной степени, следовательно, гипербола симметрична относительно координатных осей Ox и Oy. Поэтому для построения гиперболы достаточно исследовать форму части гиперболы, расположенной в первой координатной четверти, т.е. построить график функции

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{42}$$

при $x \geq a$ (выражение (42) получено из формулы (41)), а затем с помощью зеркальных отражений полученного графика относительно координатных осей восстановить форму гиперболы в остальных координатных четвертях. В результате указанных операций получается, что гипербола имеет форму, представленную на рис. 8.

Координатные оси Ox и Oy являются осями симметрии гиперболы (оси симметрии гиперболы называют обычно *осями гиперболы*), а начало координат – центром симметрии гиперболы (центр симметрии гиперболы называют обычно *центром гиперболы*). Таким образом, оси гиперболы – это координатные оси Ox и Oy, а центр гиперболы – это точка $O(0;0)$. Точки пересечения гиперболы с ее осью называются *вершинами гиперболы*. Таким образом, гипербола имеет две вершины A' и A.

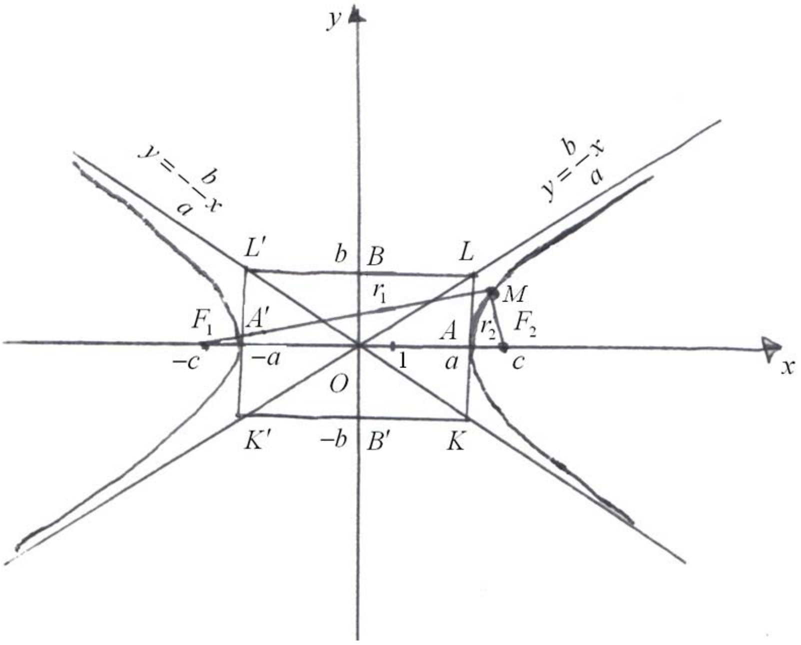


Рис. 8

Отрезки $A'A$ и $B'B$ (а также их длины $2a$ и $2b$) тоже принято называть осями гиперболы. В этом случае отрезки OA и OB (а также их длины a и b) принято называть полуосями гиперболы.

Пусть $M(x, y)$ − произвольная точка гиперболы. Отрезки F_1M и F_2M (а также их длины r_1 и r_2) называются *фокальными радиусами точки* M.

Из определения гиперболы следует, что $|r_1 - r_2| = 2a$.

Подчеркнем еще раз, что величина b, входящая в каноническое уравнение гиперболы, однозначно определяется величинами a и c по формуле $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Прямоугольник $LKK'L'$ со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется *основным прямоугольником гиперболы*. Диагонали основного прямоугольника гиперболы, т.е. прямые $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

При построении гиперболы удобно вначале изобразить ее основной прямоугольник и провести асимптоты, а затем изобразить саму гиперболу.

Может случиться, что при приведении общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду получится уравнение вида

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{43}$$

В этом случае уравнение (43) определяет гиперболу вида, показанного на рис. 9 (переменные x и y поменялись ролями).

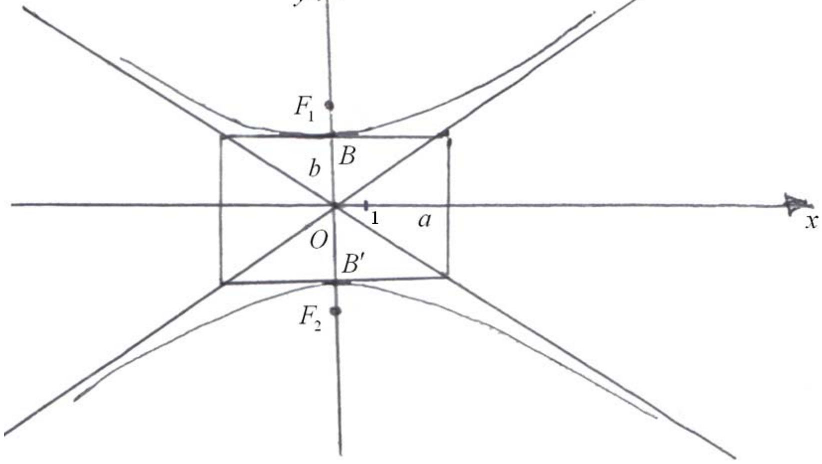


Рис. 9

Парабола ::= геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до фиксированной прямой Δ данной плоскости, при этом, точка F называется *фокусом параболы*, прямая Δ – *директрисой параболы*.

Расстояние p от фокуса F до директрисы Δ, т.е. длина перпендикуляра, проведенного из точки F к прямой Δ, называется *параметром параболы*.

Рассмотрим на плоскости параболу с фокусом F, директрисой Δ и параметром p. Введем на этой плоскости ДПСК следующим образом: в качестве оси абсцисс возьмем прямую, проходящую через фокус F и перпендикулярную к директрисе Δ, считая ее направленной от директрисы к фокусу; начало координат поместим в середине перпендикуляра, проведенного из фокуса к директрисе. При таком выборе ДПСК уравнение данной параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{44}$$

Уравнение (44) называется *каноническим уравнением параболы*, оно является алгебраическим уравнением второй степени, следовательно, парабола – это линия второго порядка.

В уравнение (44) текущая координата y переменой точки $M(x, y)$, принадлежащей параболе, входит в четной степени, следовательно, парабола симметрична относительно координатной оси Ox. Поэтому для построения параболы достаточно исследовать форму части параболы, расположенной в первой координатной четверти, т.е. построить график функции

$$y = \sqrt{2px}, \tag{45}$$

при $x \geq 0$ (выражение (45) получено из формулы (44)), а затем с помощью зеркального отражения полученного графика относительно оси Ox восстановить форму гиперболы в четвертой координатной четверти. В результате указанных операций получается, что парабола имеет форму, показанную на рис. 10.

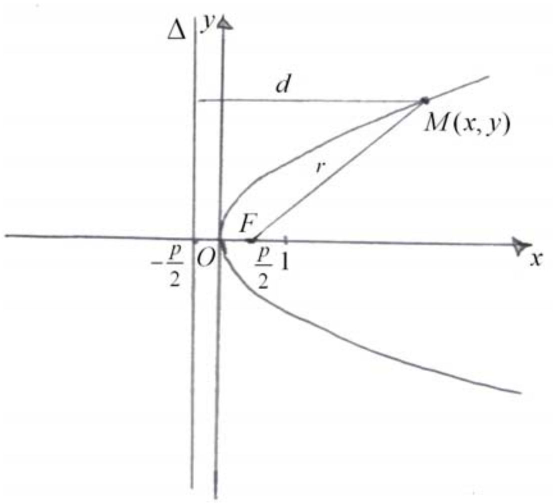


Рис. 10

Координатная ось Ox является осью симметрии параболы (ось симметрии параболы называют обычно *осью параболы*). Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной параболы*. Таким образом, точка $O(0;0)$ является вершиной параболы.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Отрезок FM (а также его длина r) называется *фокальным радиусом точки* M.

Из определения параболы следует, что $r = d$, где d − расстояние от точки M до директрисы Δ.

Может случиться, что при приведении общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду получится уравнение вида

$$y^2 = -2px, \quad p > 0. \tag{46}$$

В этом случае уравнение (46) определяет параболу вида, показанного на рис. 11.

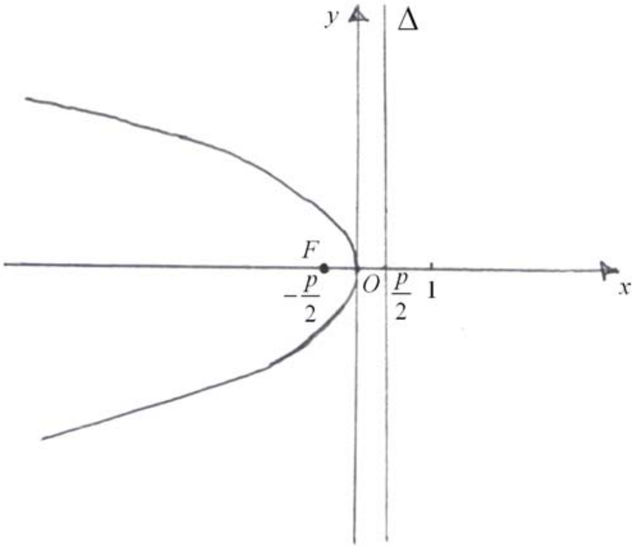


Рис. 11

Если после преобразований получится уравнение вида

$$x^2 = 2py\ ,$$

то это уравнение определяет параболу вида, показанного на рис. 12.

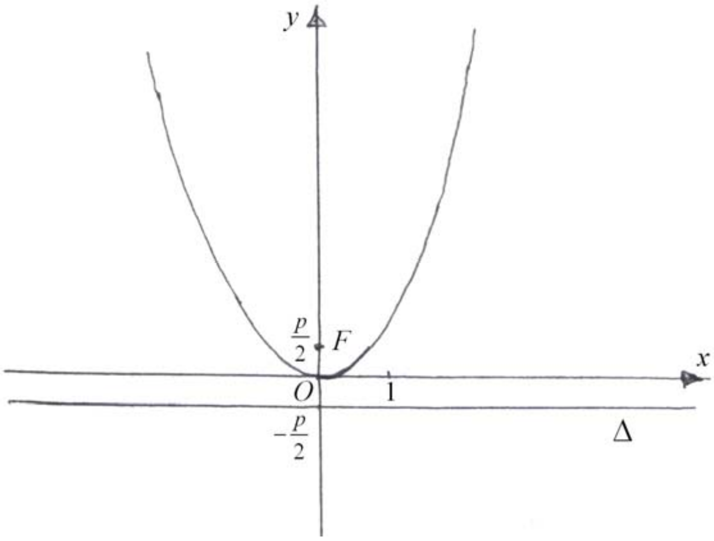


Рис. 12

Уравнение

$$x^2 = -2py$$

определяет параболу вида, представленного на рис. 13.

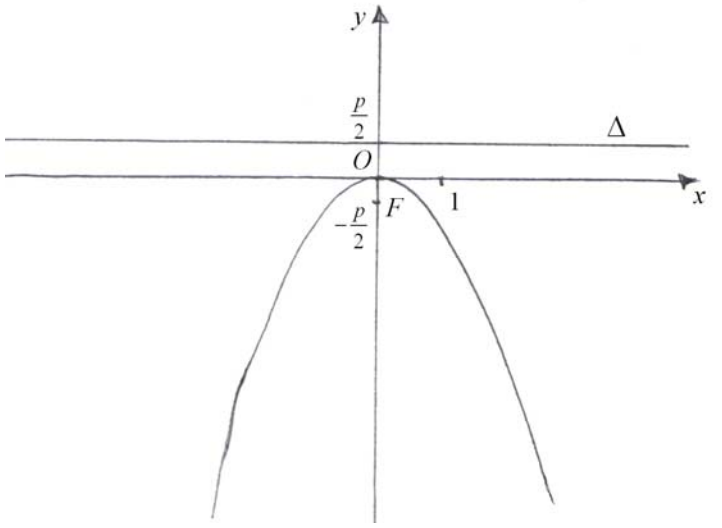


Рис. 13

З а д а ч а 2.2. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $Ax + By + C = 0$. Построить графики кривой и прямой.

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0,\ x + 3 = 0.$$

Решение.

Используя формулы алгебры

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$

преобразуем левую часть уравнения кривой, выделяя полные квадраты двучленов:

$$4\left(x^2 - 2x + 1\right) - 4 - 9\left(y^2 + 4y + 4\right) + 36 - 68 = 0;$$

$$4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 = 36.$$

Разделим обе части полученного уравнения на 36:

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1. \tag{47}$$

Введем новые координаты X, Y по формулам $X = x - 1$, $Y = y + 2$. Тогда $X = 0$, $Y = 0$ при $x = 1$, $y = -2$, т.е. новое начало координат имеет вид $O_1(1;-2)$, а уравнение (47) принимает вид

$$\frac{X^2}{3^2} - \frac{Y^2}{2^2} = 1. \tag{48}$$

Уравнение (48) является каноническим уравнением гиперболы в ДПСК XO_1Y с полуосями $a = 3$, $b = 2$.

Найдем точки пересечения гиперболы с прямой $x + 3 = 0$:

$$\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0; \\ x + 3 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $x = -3$. Тогда первое уравнение системы принимает вид

$$4(-3)^2 - 9y^2 - 8(-3) - 36y - 68 = 0$$

или после упрощения

$$9y^2 + 36y + 8 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим

$$y_1 = \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{3};\ y_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{7}}{3}.$$

Таким образом, прямая $x + 3 = 0$ пересекает гиперболу в двух точках

$$M_1\left(-3; \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{3}\right);\ M_2\left(-3; \frac{-6 + 2\sqrt{7}}{3}\right).$$

Выполним чертеж (рис. 14).

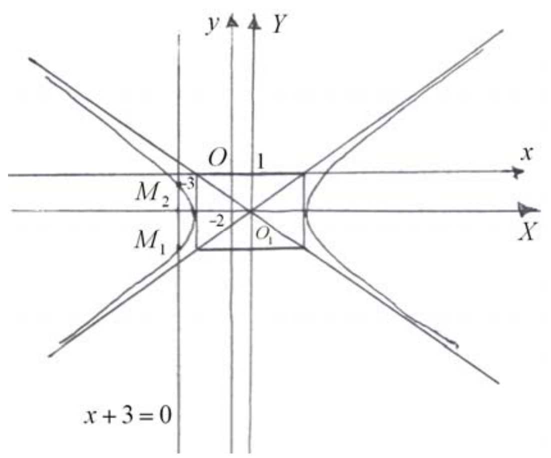


Рис. 14

Задача 2.2 решена.

2.3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим произвольную прямую в пространстве. Возьмем на данной прямой две произвольные точки, обозначим их через A и B.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ $::=$ направленный отрезок, т.е. отрезок прямой, ограниченный точками A и B, при условии, что точка A считается началом отрезка, точка B – концом отрезка (точки A и B называются соответственно *началом* и *концом вектора* $\overrightarrow{AB}$; начало вектора т.е. точку A, называют также точкой приложения вектора).

Вектор можно обозначать так же одной малой буквой латинского алфавита (на чертеже эта буква ставится около конца стрелки, обозначающей вектор). Например, вектор $\overrightarrow{AB}$ можно обозначить через $\vec{a}$ (рис. 15).

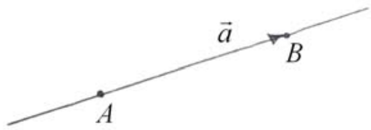


Рис. 15

Заметим, что любые две точки произвольной прямой определяют два вектора. Например, точки A и B определяют такие вектора:

$\overrightarrow{AB}$ − вектор с началом в точке A и концом в точке B;

$\overrightarrow{BA}$ − вектор с началом в точке B и концом в точке A.

Нулевой вектор $::=$ вектор, начало и конец которого совпадают (обозначение: $\vec{0}$, $\overrightarrow{AA}$ или 0).

Нулевой вектор изображается на чертеже точкой.

Длина (или *модуль*) *вектора* $\overrightarrow{AB}$ $::=$ расстояние между началом и концом этого вектора, измеренное с помощью заданной единицы измерения (обозначение: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$).

Заметим, что $\left|\vec{0}\right|$=0.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. (обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$).

Обозначение неколлинеарных векторов: $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

Нулевой вектор принято считать коллинеарным любому вектору, так как он не имеет определенного направления.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *сонаправленными*, если они коллинеарны и имеют одинаковое направление (обозначение: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$).

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *противоположно направленными*, если они коллинеарны и имеют противоположное направление (обозначение: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;

2) $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|$.

Например, для векторов, изображенных на рис. 16, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{EF} \neq \overrightarrow{GH}$.

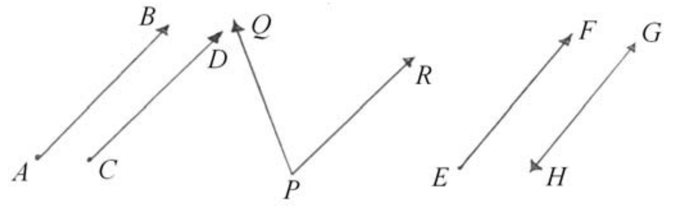


Рис. 16

Пусть дан некоторый вектор $\vec{a}$ и некоторая точка P. Тогда можно построить вектор $\overline{PQ}$ с началом в точке P, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 17).

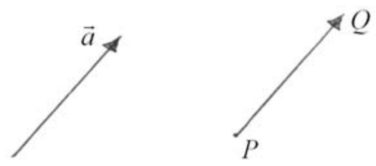


Рис. 17

Таким образом, каковы бы ни были вектор $\vec{a}$ и точка P, существует, и притом только один, вектор $\overline{PQ}$ с началом в точке P, равный вектору $\vec{a}$. Иначе говоря, для каждого вектора точка его приложения может быть выбрана где угодно. Соответственно этому в векторной алгебре векторы рассматриваются с точностью до их положения, т.е. не различаются равные векторы, получающиеся друг из друга параллельным переносом. В этом смысле векторы называются свободными.

Сумма $\vec{a}+\vec{b}$ *векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $::=$ вектор $\vec{c}$, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (сложение векторов по правилу треугольника), рис. 18.

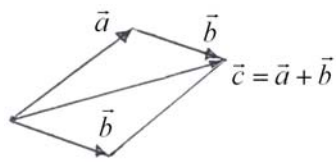


Рис. 18

Сумма $\vec{a}+\vec{b}$ представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к началу вектора $\vec{a}$ (сложение векторов по правилу параллелограмма).

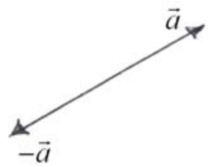


Рис. 19

Если окажется, что при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по указанному правилу конец вектора $\vec{b}$ совпадет с началом вектора $\vec{a}$, то $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

Противоположный вектор $-\vec{a}$ для вектора $\vec{a}$ $::=$ вектор, начало которого совпадает с концом вектора $\vec{a}$, а конец – с началом вектора $\vec{a}$ (рис. 19).

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (свойство коммутативности);
2) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ (свойство ассоциативности);
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

(здесь $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ $-$ произвольные векторы).

Заметим, что в силу свойства ассоциативности мы имеем право говорить о сумме трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и записывать ее в виде $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, не указывая при этом, считаем ли мы $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ или $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$.

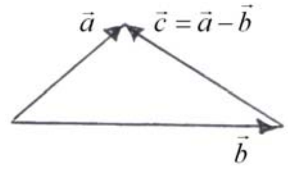


Рис. 20

Разность $\vec{a}-\vec{b}$ *векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $::=$ вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$ (рис. 20).

Из рисунка видно, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют общее начало, то разность $\vec{a}-\vec{b}$ есть вектор, идущий из конца вычитаемого вектора в конец уменьшаемого вектора.

Произведение $\lambda\vec{a}$ *вектора* $\vec{a}\neq\vec{0}$ *на число* $\lambda\neq 0$ $::=$ вектор $\vec{c}$, определяемый следующими условиями (рис. 21):

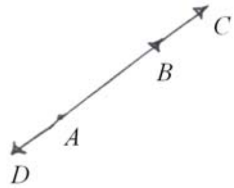


Рис. 21

1) $\vec{c}\,||\,\vec{a}$;
2) $\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{a}$ при $\lambda>0$, $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{a}$ при $\lambda<0$;
3) $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$.

$\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Если $\lambda=0$ или $\vec{a}=\vec{0}$, то, по определению, $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;
2) $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\vec{a}$;
3) $\left(\lambda+\mu\right)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
4) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

(здесь λ, μ − произвольные числа; $\vec{a}$, $\vec{b}$ − произвольные векторы).

Заметим, что вектор $-\vec{a}$, противоположный вектору $\vec{a}$, можно записать в виде $-\vec{a}=\left(-1\right)\cdot\vec{a}$, а разность $\vec{a}-\vec{b}$ в виде $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-1\right)\cdot\vec{b}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются линейными операциями над векторами.

Пусть в пространстве задана ДПСК, $\vec{a}$ − некоторый вектор. Вектор $\vec{a}$ можно приложить к началу координат, т.е. к точке $O\left(0;0;0\right)$.

Декартовы прямоугольные координаты x, y, z *вектора* $\vec{a}$ $::=$ проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz (рис. 22), где M_x, M_y, M_z − проекции точки M на координатные оси Ox, Oy, Oz.

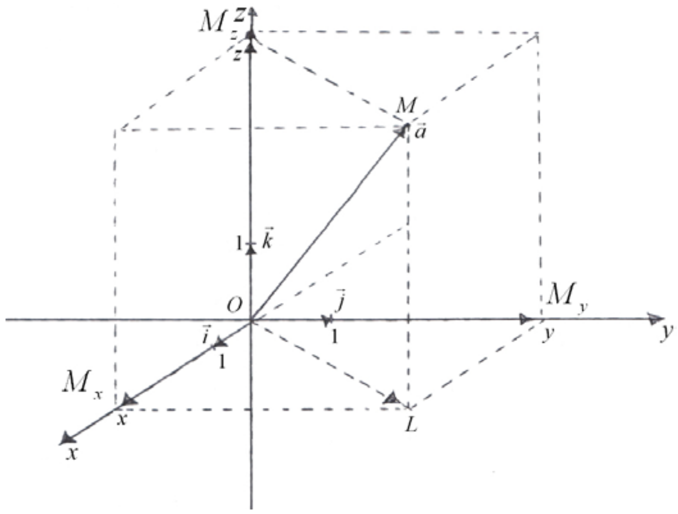


Рис. 22

Тот факт, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты x, y, z, отмечают следующим образом:

$$\vec{a} = \{x, y, z\}.$$

Таким образом, в рассматриваемой ДПСК координаты вектора $\vec{a}$ − это координаты конца M этого вектора при условии, что $\vec{a}$ приложен к началу координат.

Из чертежа (рис. 22) видно, что

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{49}$$

Рассмотрим единичные векторы координатных осей:

$$\vec{i} = \{1; 0; 0\}; \quad \vec{j} = \{0; 1; 0\}; \quad \vec{k} = \{0; 0; 1\}.$$

Из чертежа (рис. 22) видно, что

$$\overrightarrow{OM_x} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_y} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_z} = z\vec{k};$$

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}; \quad \vec{a} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM_z},$$

следовательно,

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{50}$$

Таким образом, любой вектор $\vec{a}$ можно представить с помощью векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в виде (50).

По этой причине векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называются *базисными векторами*, а упорядоченная тройка векторов ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) – *ортонормированным базисом*, ибо это векторы взаимно ортогональны и длина каждого из них равна единице. Соотношение (50) называется разложением вектора $\vec{a}$ по базису ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Укажем, как проводятся линейные операции над векторами в случае, когда векторы заданы своими координатами: если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}, \tag{51}$$

т.е. при сложении векторов, их соответствующие координаты складываются;

$$\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}, \tag{52}$$

т.е. при вычитании векторов, их соответствующие координаты вычитаются.

Если $\vec{a} = \{x, y, z\}$, λ − некоторое число, то

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda x, \lambda y, \lambda z\}, \tag{53}$$

т.е. при умножении вектора на число каждая координата этого вектора умножается на данное число.

Если для вектора $\overrightarrow{AB}$ известны координаты его начала и конца: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \tag{54}$$

т.е. для нахождения координат вектора $\overrightarrow{AB}$ нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала.

Действительно, из чертежа (рис. 23) видно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Учитывая, что $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$, а также формулу (52), приходим к (54).

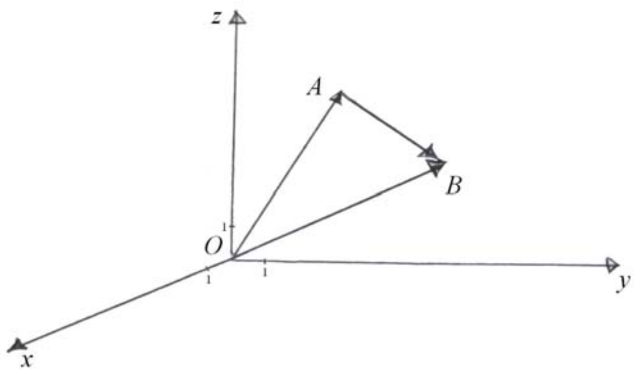


Рис. 23

В силу (49), (54)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Но $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |AB|$, где $|AB|$ − длина отрезка AB, следовательно,

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \tag{55}$$

Формула (55) позволяет вычислять расстояние между двумя точками пространства.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$ *векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $::=$ число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \tag{56}$$

где $\varphi = \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$ − угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (по определению, $0 \le \varphi \le \pi$).

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
2) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;
3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

(здесь $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ − произвольные векторы, λ − произвольное число).

Скалярный квадрат $\vec{a}^2$ *вектора* $\vec{a}$ $::=$ скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на самого себя:

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a}$$

Заметим, что

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2\ .$$

Из формулы (56) следует, что

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\ ,$$

тогда

$$\varphi = \arccos\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(последние две формулы имеют место при условии, что $\vec{a} \ne \vec{0}$ и $\vec{b} \ne \vec{0}$).

Признак *ортогональности* (перпендикулярности) векторов:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \ \Leftrightarrow\ \vec{a}\vec{b} = 0\ .$$

Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 ,$$

т.е. скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Первый признак коллинеарности векторов: пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, тогда

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} ,$$

т.е. векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они расположены на одной плоскости или параллельных плоскостях (рис. 24).

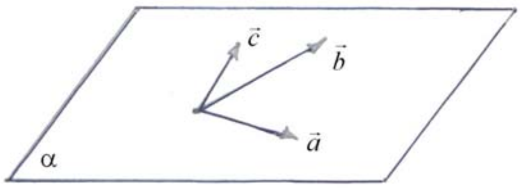


Рис. 24

В противном случае векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются некомплонарными (рис. 25).

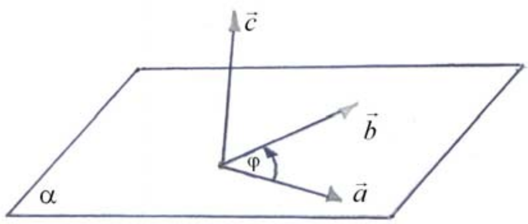


Рис. 25

Упорядоченная тройка ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) некомпланарных векторов называется *правоориентированной* или просто *правой*, если из конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки при условии, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ приложены к одной общей точке. В противном случае тройка векторов ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) называется *левоориентированной* или *левой*.

На последнем чертеже (рис. 25) тройка векторов ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) является правой.

На чертеже (рис. 26) тройка векторов ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) является левой.

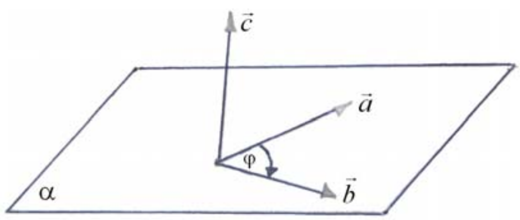


Рис. 26

Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ векторов $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ $::=$ вектор $\vec{c}$, определяемый следующими условиями:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при условии, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одной общей точке;

2) упорядоченная тройка векторов ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) является правой;

3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где $\varphi = \left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b} \right)$

(если $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$, то, по определению, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$) (рис. 27).

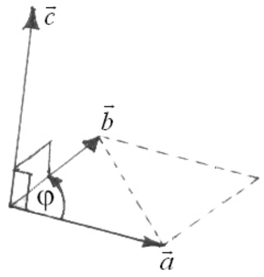


Рис. 27

Модуль векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при условии, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одной общей точке:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = S_{\text{пар}}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при условии, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одной общей точке, выражается формулой

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Второй признак коллинеарности векторов:

$$\vec{a}\,||\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}.$$

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$;
2) $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;
3) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(здесь $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ − произвольные векторы; λ − произвольное число).

Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{57}$$

Символический определитель в правой части (57) раскрывается по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ *векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $::=$ скалярное произведение вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}.$$

Абсолютная величина (модуль) смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ при условии, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ приложены к одной общей точке (рис. 28): $\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = V_{\text{пар}}$.

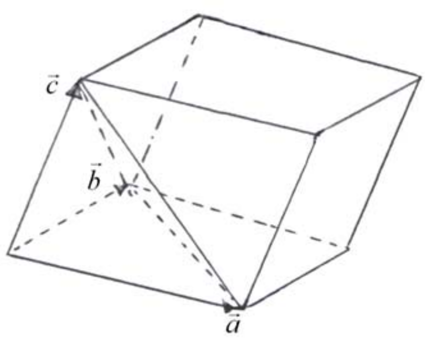


Рис. 28

Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ при условии, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ приложены к одной общей точке, выражается формулой

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Признак компланарности векторов:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$ обозначается также через $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ – через $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ – через $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

Задача 2.3. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Для векторов, указанных в пп. а) – д), выполнить соответственно следующие операции:

а) вычислить смешанное произведение трех векторов;
б) найти модуль векторного произведения;
в) вычислить скалярное произведение векторов;
г) проверить векторы на коллинеарность и ортогональность;
д) проверить, будут ли компланарны векторы.

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}; \quad \vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

а) $-2\vec{a}$, $\vec{b}$, $-2\vec{c}$; б) $-6\vec{a}$, $4\vec{c}$; в) $3\vec{b}$, $-8\vec{c}$;
г) $\vec{b}$, $\vec{c}$; д) $5\vec{a}$, $4\vec{b}$, $3\vec{c}$.

Решение. Запишем векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в координатной форме:

$$\vec{a} = \{2; -3; 1\},$$
$$\vec{b} = \{1; -2; 7\},$$
$$\vec{c} = \{1; -3; 2\}.$$

а) $(-2\vec{a})\vec{b}(-2\vec{c}) = 4\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot [2 \cdot (-2) \cdot 2 + (-3) \cdot 7 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - (-3) \cdot 1 \cdot 2 -$
$- 7 \cdot (-3) \cdot 2] = 4 \cdot (-8 - 21 - 3 + 2 + 6 + 42) = 4 \cdot (50 - 32) = 4 \cdot 18 = 72;$
$(-2\vec{a})\vec{b}(-2\vec{c}) = 72;$

б) $(-6\vec{a}) \times \left(4\vec{c}\right) = -24\vec{a} \times \vec{c} = -24 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -24 \cdot \left[\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right] =$

$= -24 \cdot (-3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}) = 72 \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 72 \cdot \{1; 1; 1\};$

$(-6\vec{a}) \times \left(4\vec{c}\right) = 72 \cdot \{1; 1; 1\};$

$\left|(-6\vec{a}) \times \left(4\vec{c}\right)\right| = \left|72 \cdot \{1; 1; 1\}\right| = |72| \cdot \left|\{1; 1; 1\}\right| = 72 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 72\sqrt{3};$

$\left|(-6\vec{a}) \times \left(4\vec{c}\right)\right| = 72\sqrt{3};$

в) $(3\vec{b})(-8\vec{c}) = -24\vec{b}\vec{c} = -24(1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 7 \cdot 2) =$
$= -24 \cdot (1 + 6 + 14) = -24 \cdot 21 = -504;$

$(3\vec{b})(-8\vec{c}) = -504$;

г) $\vec{b} = \{1; -2; 7\}$, $\vec{c} = \{1; -3; 2\}$

$\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{7}{2} \Rightarrow \vec{b} \nparallel \vec{c}$;

$\vec{b}\vec{c} = 21$ (см. п. в));

$\vec{b}\vec{c} = 21 \neq 0 \Rightarrow \vec{b} \not\perp \vec{c}$;

д) $(5\vec{a})(4\vec{b})(3\vec{c}) = 60\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 18$ (см. п. а))

$(5\vec{a})(4\vec{b})(3\vec{c}) = 1080 \neq 0 \Rightarrow$ векторы $5\vec{a}$, $4\vec{b}$, $3\vec{c}$ не компланарны.

Задача 2.3 решена.

2.4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в пространстве задана ДПСК и α − некоторая плоскость.

Нормальный вектор $\vec{n}$ *плоскости* α $::=$ любой ненулевой вектор, перпендикулярный к этой плоскости.

Пусть плоскость α проходит через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет заданный нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ (рис. 29).

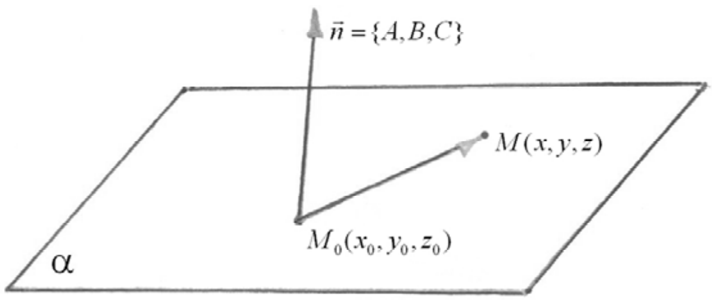


Рис. 29

Найдем уравнение плоскости α .

Пусть $M(x, y, z)$ − переменная точка с текущими координатами x , y , z . Тогда $M \in \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overline{M_0M} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$;

$$\vec{n} = \{A, B, C\}; \quad \overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\};$$

$$\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) .$$

Соотношение $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$ принимает вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 . \qquad (58)$$

Итак, уравнение плоскости α , проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющий заданный нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ задается соотношением (58).

Уравнение (58) можно записать в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0 , \qquad (59)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Уравнение (59) называется общим уравнением плоскости. Коэффициенты при x , y , z в этом уравнении являются координатами нормального вектора данной плоскости.

Выведем уравнение плоскости α , проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой (рис. 30).

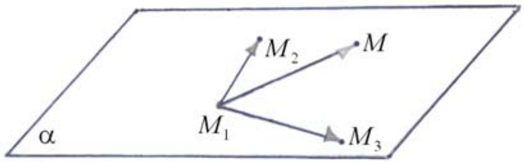


Рис. 30

Пусть $M(x,y,z)$ − переменная точка с текущими координатами x, y, z. Тогда $M \in \alpha \Leftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны $\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0 . \qquad (60)$$

Имеем:

$$\overrightarrow{M_1M} = \left\{ x - x_1, y - y_1, z - z_1 \right\} ;$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left\{ x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \right\} ;$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \left\{ x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 \right\} ;$$

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_2 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} .$$

Соотношение (60) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (61)$$

Итак, уравнение искомой плоскости α имеет вид (61).

Определитель в левой части (61) нужно раскрывать по элементам первой строки. В результате уравнение (61) сведется к виду (59).

Угол между двумя плоскостями определяется как угол между нормальными векторами этих плоскостей: пусть

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 ; \quad : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 ,$$

ψ − угол между плоскостями α и β, тогда

$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} ,$$

где $\overrightarrow{n_1} = \left\{ A_1, B_1, C_1 \right\}$; $\overrightarrow{n_2} = \left\{ A_2, B_2, C_2 \right\}$. Следовательно,

$$\psi = \arccos \frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} .$$

Пусть в пространстве дана некоторая прямая d . Рассмотрим две различные плоскости α и β, пересекающиеся по прямой d (рис. 31).

Пусть α и β заданы уравнениями

$$\alpha : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 ; \quad \beta \ : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 .$$

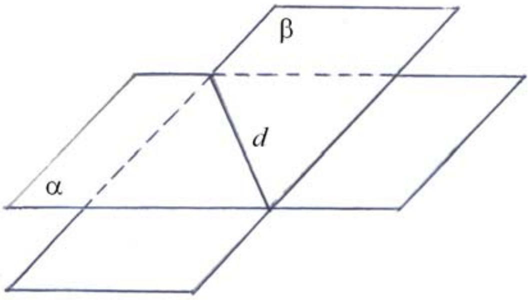


Рис. 31

Тогда прямую d можно задать системой двух уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{62}$$

Уравнения (62) называются *общими уравнениями прямой* d.

Направляющий вектор $\vec{a}$ *прямой* d ::= любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой.

Выведем уравнения прямой d, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{a} = \{l, m, n\}$ (рис. 32).

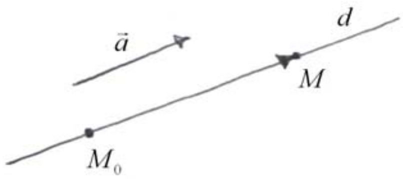


Рис. 32

Пусть $M(x, y, z)$ − переменная точка с текущими координатами x, y, z. Тогда

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}. \tag{63}$$

Заметим, что $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. В силу первого признака коллинеарности векторов

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{64}$$

В силу (63), (64) уравнения прямой d, проходящий через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{a} = \{l, m, n\}$, записываются в виде

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{65}$$

Уравнения (65) называются *каноническими уравнениями прямой* d.

Найдем уравнения прямой d, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 33).

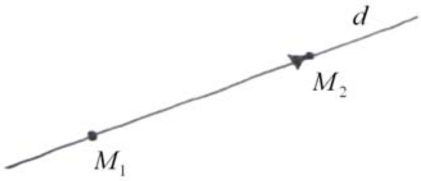


Рис. 33

В качестве направляющего вектора прямой d можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$: $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда, беря в качестве M_0 точку M_1 и используя (65), получаем уравнения прямой d:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{66}$$

Уравнения (66) называются каноническими уравнениями прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

З а д а ч а 2.4. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти:

а) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) объем пирамиды;

д) уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3;

е) уравнения плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$;

ж) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$.

$$A_1(6;1;4)\ ; \quad A_2(2;-2;-5)\ ; \quad A_3(7;1;3)\ ; \quad A_4(1;-3;7)\ .$$

Решение.

а) Используя формулу для вычисления расстояния между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ пространства

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ ,$$

получаем:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(2-6)^2 + (-2-1)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{16+9+81} = \sqrt{106}\ ;$$

$$|A_1A_3| = \sqrt{(7-6)^2 + (1-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}\ .$$

Итак, $|A_1A_2| = \sqrt{106}$, $|A_1A_3| = \sqrt{2}$.

б) Угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 равен углу между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|}\ .$$

Имеем: $\overrightarrow{A_1A_2} = \{2-6; -2-1; -5-4\}$, $\overrightarrow{A_1A_2} = \{-4; -3; -9\}$;

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \{7-6; 1-1; 3-4\}\ , \quad \overrightarrow{A_1A_3} = \{1; 0; -1\}\ ;$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = -4\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + (-9)\cdot(-1) = -4 + 0 + 9 = 5\ ,$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = 5\ ;$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = |A_1A_2| = \sqrt{106}\ , \quad \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| = |A_1A_3| = \sqrt{2}\ \ \text{(см. п. а))};$$

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{106}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{53}} = \frac{5\sqrt{53}}{106}\ , \quad \cos\varphi = \frac{5\sqrt{53}}{106}\ ;$$

$$\varphi = \arccos\frac{5\sqrt{53}}{106}\ .$$

в) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади $\Delta\, A_1A_2A_3$, а площадь $\Delta\, A_1A_2A_3$ − это площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$. Следовательно,

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|\ .$$

Имеем: $\overrightarrow{A_1A_2} = \{-4; -3; -9\}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \{1; 0; -1\}$ (см. п. б));

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 13\vec{j} + 3\vec{k} = \{3; -13; 3\}\ ,$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \{3; -13; 3\}\ ;$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{3^2 + (-13)^2 + 3^2} = \sqrt{9+169+9} = \sqrt{187}\ ,$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{187}\ ;$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{\sqrt{187}}{2}\ .$$

г) Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ – это объем пирамиды, построенной на векторах A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, следовательно,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|.$$

Имеем: $\overrightarrow{A_1A_2} = \{-4;-3;-9\}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \{1;0;-1\}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = \{-5;-4;3\}$;

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -4 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -4\cdot 0\cdot 3 + (-3)\cdot(-1)\cdot(-5) +$$

$$+1\cdot(-4)\cdot(-9) - (-9)\cdot 0\cdot(-5) - (-3)\cdot 1\cdot 3 - (-1)\cdot(-4)\cdot(-4) =$$
$$= 0 - 15 + 36 - 0 + 9 + 16 = 46,$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} = 46; \quad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right| = |46| = 46;$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\cdot 46 = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3},$$

$$V_{\text{пир}} = 7\frac{2}{3}.$$

д) Используя канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

получаем:

$$(A_1A_2):\ \frac{x-6}{2-6} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-4}{-5-4},$$

$$(A_1A_2):\ \frac{x-6}{-4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-4}{-9};$$

$$(A_1A_3):\ \frac{x-6}{7-6} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-4}{3-4},$$

$$(A_1A_3):\ \frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{-1}.$$

е) Используя уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

получаем:

$$(A_1A_2A_3):\ \begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-4 \\ 2-6 & -2-1 & -5-4 \\ 7-6 & 1-1 & 3-4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-4 \\ -4 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (x-6)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(z-4)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(x-6) - 13\cdot(y-1) + 3\cdot(z-4) =$$
$$= 3x - 13y + 3z - 18 + 13 - 12 = 3x - 13y + 3z - 17,$$

$$(A_1A_2A_3):\ 3x - 13y + 3z - 17 = 0;$$

$$(A_1A_2A_4):\ \begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-4 \\ -4 & -3 & -9 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-4 \\ -4 & -3 & -9 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (x-6)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(z-4)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -45(x-6)+57(y-1)+(z-4) =$$

$$= -45x+57y+z+270-57-4 = -45x+57y+z+209,$$

$$(A_1A_2A_4):\ -45x+57y+z+209=0.$$

ж) Из уравнений плоскостей $(A_1A_2A_3)$ и $(A_1A_2A_4)$, найденных в п. е), следует, что нормальные векторы этих плоскостей имеют вид:

$$\overrightarrow{n_1}=\{3;-13;3\} \text{ и } \overrightarrow{n_2}=\{-45;57;1\}.$$

Тогда косинус угла ψ между плоскостями $(A_1A_2A_3)$ и $(A_1A_2A_4)$ находится по формуле

$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}.$$

Имеем:

$$\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} = 3\cdot(-45)+(-13)\cdot57+3\cdot1 = -135-741+3 = -873,$$

$$\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} = -873;$$

$$\left|\overrightarrow{n_1}\right| = \sqrt{3^2+(-13)^2+3^2} = \sqrt{187},\ \left|\overrightarrow{n_1}\right| = \sqrt{187};$$

$$\left|\overrightarrow{n_2}\right| = \sqrt{(-45)^2+57^2+1^2} = \sqrt{2025+3249+1} = \sqrt{5275} = 5\sqrt{211},$$

$$\left|\overrightarrow{n_2}\right| = 5\sqrt{211};$$

$$\cos\psi = \frac{-873}{\sqrt{187}\cdot5\sqrt{211}};\quad \psi = \arccos\left(-\frac{873}{5\sqrt{187}\sqrt{211}}\right);$$

$$\psi = \pi - \arccos\left(\frac{873}{\sqrt{187}\cdot5\sqrt{211}}\right).$$

Задача 2.4 решена.

Контрольная работа 3

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

3.1. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Говорят, что на плоскости определена *полярная система координат*, если заданы

1) точка O, называемая полюсом;
2) исходящий из точки O луч $O\rho$, называемый *полярной осью*;
3) единица измерения длин.

Пусть на плоскости дана полярная система координат и M − произвольная точка плоскости, отличная от полюса O (рис. 34).

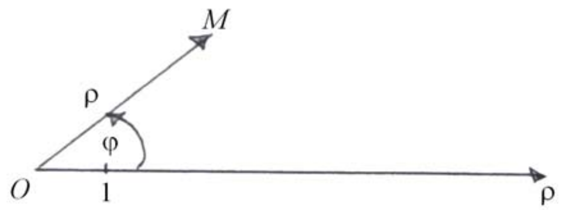


Рис. 34

Тогда положение точки M однозначно определяется двумя числами:

а) углом наклона φ вектора $\overline{OM}$ к полярной оси, называемым *полярным углом точки* M (по определению $0 \le \varphi < 2\pi$);

б) длиной ρ вектора $\overline{OM}$ (расстоянием от точки M до полюса), называемой *полярным радиусом точки* M.

Числа φ и ρ называются *полярными координатами точки* M : $M(\varphi, \rho)$.

Для полюса $\rho = 0$, а φ не определено.

Еще раз подчеркнем, что, по определению, $0 \le \varphi < 2\pi$, $\rho \ge 0$.

Замечание. В некоторых случаях удобно считать, что $-\pi < \varphi \le \pi$.

Пусть на плоскости задана полярная система координат. Введем на этой плоскости ДПСК, поместив ее начало в полюс и взяв полярную ось $O\rho$ в качестве положительной полуоси Ox (единица измерения длин в ДПСК та же, что и в полярной системе координат) (рис. 35).

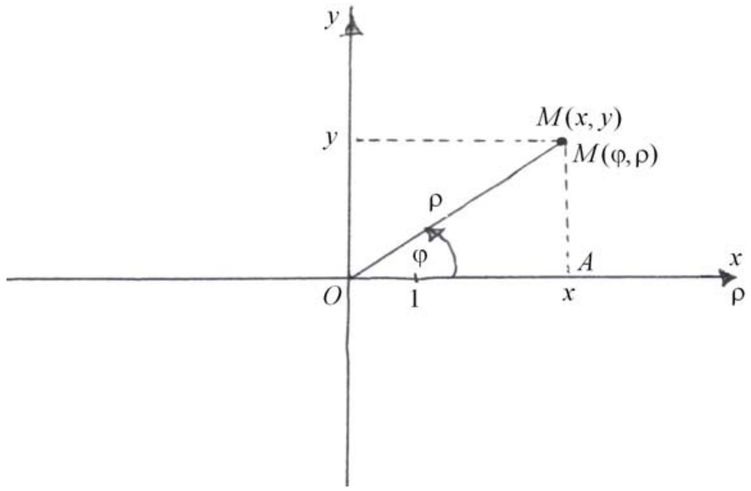


Рис. 35

Тогда положение произвольной точки M этой плоскости можно задавать как полярными, так и декартовыми прямоугольными координатами: $M(\varphi, \rho)$ или $M(x, y)$.

Из прямоугольного треугольника ΔOAM видно, что декартовы прямоугольные координаты точки выражаются через ее полярные координаты по формулам:

$$x = \rho \cos\varphi; \quad y = \rho \sin\varphi.$$

Из того же треугольника следуют формулы, выражающие полярные координаты точки через ее декартовы прямоугольные координаты:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \tag{67}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Угол φ определяется из соотношений (67), при этом следует помнить, что, по определению, $0 \le \varphi < 2\pi$.

З а д а ч а 3.1. Требуется:

а) построить по точкам график функции $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат (значения функции вычислять в точках $\varphi_k = \dfrac{\pi k}{8}$);

б) найти уравнение кривой в прямоугольной системе координат, начало которой совмещено с полюсом, а положительная полуось Ox − с полярной осью;

в) определить вид кривой.

$$\rho = 3\sin 2\varphi.$$

Решение.

а) Найдем область определения данной функции, исходя из того, что, по определению, $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$:

$$3\sin 2\varphi \ge 0\ ;\quad \sin 2\varphi \ge 0\ ;$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le 2\varphi \le \pi \\ 2\pi \le 2\varphi \le 3\pi \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right.$$

Итак, $D(\rho) = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Заполним таблицу вида

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\pi+\frac{\pi}{8}$	$\pi+\frac{\pi}{4}$	$\pi+\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$
2φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	2π	$2\pi+\frac{\pi}{4}$	$2\pi+\frac{\pi}{2}$	$2\pi+\frac{3\pi}{4}$	3π
$\sin 2\varphi$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
ρ	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0

Отмечая полученные точки $(\varphi_k\,;\rho_k)$ в полярной системе координат и соединяя их плавной линией, получаем график функции $\rho = 3\sin 2\varphi$ (рис. 36).

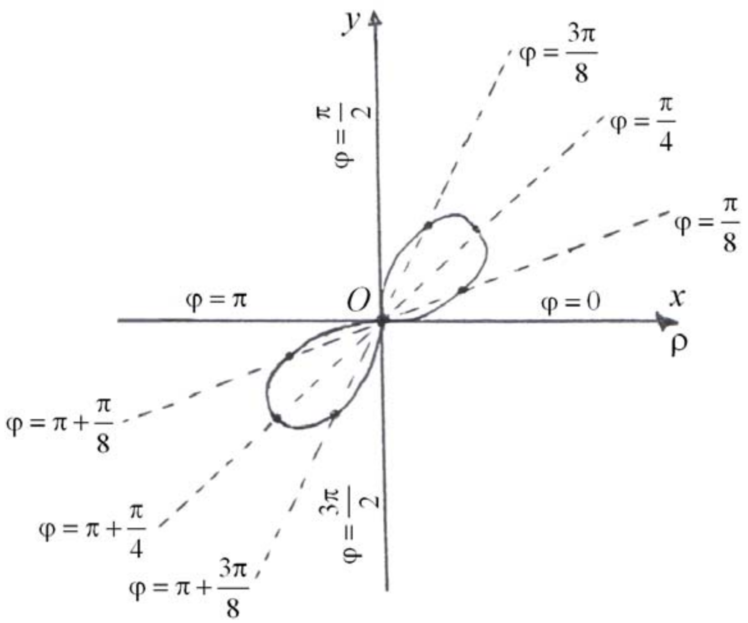


Рис. 36

б) Найдем уравнение кривой в прямоугольной системе координат:

$$\rho = 3\sin 2\varphi\,.$$

Используя формулу для синуса двойного аргумента, получаем:

$$\rho = 6\sin\varphi\cos\varphi\,.$$

Учитывая, что

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\ ;\quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

имеем:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{6xy}{x^2+y^2}$$

или

$$(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}-6xy=0\,.$$

в) Кривая представляет собой двухлепестковую розу.

Задача 3.1 решена.

3.2. ПРЕДЕЛЫ

Пусть $x_0 \in R$.

Дельта-окрестность $O_\delta(x_0)$ *точки* x_0 $::=$ интервал с центром в точке x_0 радиуса δ : $O_\delta(x_0)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ (рис. 37).

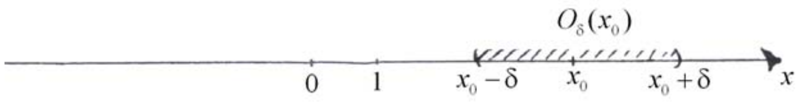


Рис. 37

Таким образом, $O_\delta(x_0)=\{x\in R : |x-x_0|<\delta\}$.

Проколотая дельта окрестность $\dot{O}_\delta(x_0)$ *точки* x_0 $::=$ множество вида $\dot{O}_\delta(x_0)=O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$, т.е. множество, получаемое из $O_\delta(x_0)$ удалением точки x_0 .

Таким образом, $\dot{O}_\delta(x_0)=\{x\in R : 0<|x-x_0|<\delta\}$.

Рассмотрим некоторое множество $M \subseteq R$.

Точка $x_0 \in R$ называется *предельной точкой множества* M , если в любой сколь угодно малой δ-окрестности точки x_0 найдется хотя бы одна точка, принадлежащая множеству M , отличная от точки x_0 :

$$\forall O_\delta(x_0)\ \ \exists x\in \dot{O}_\delta(x_0) \big| x\in M\ .$$

Пример. Пусть $M=[2;5)$ (рис. 38).

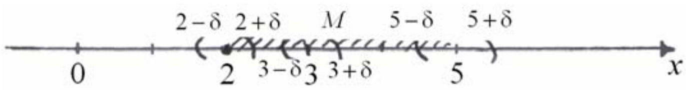


Рис. 38

Из рисунка видно, что $x_0=2$, $x_1=3$, $x_2=5$ − предельные точки множества M , при этом $x_0, x_1 \in M$, а $x_2 \overline{\in} M$, т.е. предельная точка множества может принадлежать, но может и не принадлежать этому множеству.

Замечание. Если x_0 − предельная точка множества M , то в любой сколь угодно малой δ-окрестности этой точки найдется бесконечное число точек, отличных от точки x_0 , принадлежащих множеству M (рис. 39).

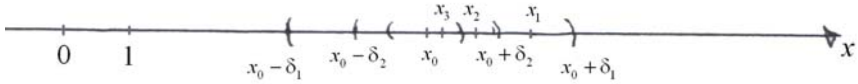


Рис. 39

Пусть функция $y=f(x)$ задана на своей области определения $D(y)$ и x_0 − предельная точка множества $D(y)$.

Число А называется *предельной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или при x стремящемся к x_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число δ , определяемое в зависимости от взятого числа ε , такое, что для любого $x\in D(y)$, такого, что $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A . \tag{68}$$

Таким образом, соотношение (68) означает, по определению, следующее:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,\Big|\, \forall x \in D(y) : 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Условие $0 < |x - x_0| < \delta$ означает, что $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$. Аналогично, условие $|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что $f(x) \in O_\varepsilon(A)$. В связи с этим можно дать геометрическое определение предела функции в точке.

Точка A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для $\forall O_\varepsilon(A)$ $\exists O_\delta(x_0), \delta = \delta(\varepsilon) \,\Big|\, \forall x \in D(y) : x \in \dot{O}_\delta(x_0) \ \Rightarrow \ f(x) \in O_\varepsilon(A)$ (рис. 40).

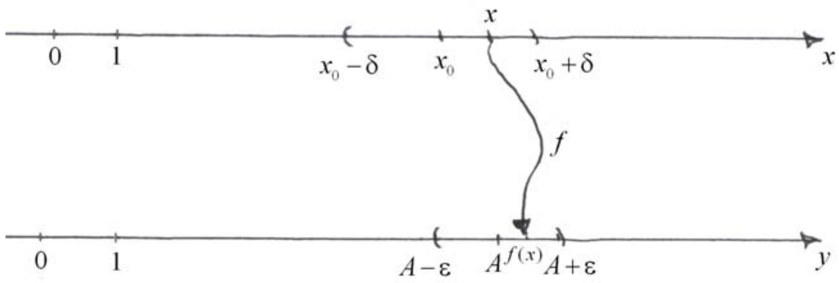


Рис. 40

При вычислении пределов функций применяют основную теорему о пределах:

Т е о р е м а . Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют в точке x_0 конечные пределы. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций тоже имеют конечные пределы в точке x_0 и справедливы формулы:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [u(x) + v(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} u(x) + \lim\limits_{x \to x_0} v(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [u(x) - v(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} u(x) - \lim\limits_{x \to x_0} v(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} [u(x) \cdot v(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} u(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} v(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)}$

(в случае частного предполагается, что $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) \neq 0$).

Если $f(x) \equiv C$ для $\forall x \in D(y)$ и x_0 − предельная точка множества $D(y)$, то

5) $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$,

т.е. предел постоянной равен этой постоянной.

Из свойств 3), 5) следует, что

6) $\lim\limits_{x \to x_0} [Cu(x)] = C \lim\limits_{x \to x_0} u(x)$,

т.е. постоянную можно выносить за знак предела.

В качестве предельной точки x_0 множества $D(y)$ может выступать бесконечно удаленная точка ∞.

Число А называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число Δ, определяемое в зависимости от взятого числа ε, такое, что для любого $x \in D(y)$, такого что $x > \Delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A .$$

Многочлен *n*-й степени одной переменной x $::=$ выражение вида

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \ ,$$

где $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ – некоторые числа, называемые коэффициентами многочлена, при этом $a_0 \neq 0$.

Часть слагаемых в выражении для многочлена может отсутствовать. Это означает, что коэффициенты при соответствующих степенях многочлена равны нулю. Например, выражение $5x^3 - 2x + 11 = 0$ является многочленом 3-й степени ($a_0 = 5; a_1 = 0; a_2 = -2; a_3 = 11$).

Заметим, что

$$\lim_{x\to\infty} P_n(x) = \begin{cases} \infty \ , \text{ если } a_0 > 0; \\ -\infty \ , \text{ если } a_0 < 0. \end{cases} \tag{69}$$

Действительно,

$$\lim_{x\to\infty} P_n(x) = \lim_{x\to\infty}\left[a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right)\right] = (\infty \cdot a_0) = \begin{cases} \infty \ , & a_0 > 0; \\ -\infty \ , & a_0 < 0. \end{cases}$$

В силу (69) отношение

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \tag{70}$$

двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ представляет собой при $x \to \infty$ неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$ (так говорят по той причине, что предел такого отношения может оказаться равным конечному ненулевому числу, нулю или бесконечности, в зависимости от соотношения по величине между n и m).

Для раскрытия такой неопределенности надо числитель и знаменатель дроби (70) разделить на x^l, где $l = \max\{n, m\}$, а затем применить основную теорему о пределах.

Если вычисляется предел отношения (70) при $x \to x_0$ и это отношение представляет собой при $x \to x_0$ неопределенность типа $\frac{0}{0}$, то для раскрытия такой неопределенности числитель и знаменатель дроби (70) делят на двучлен $x - x_0$ (такое деление корректно, ибо $x \to x_0$, но $x \neq x_0$, следовательно, $x - x_0 \neq 0$; кроме того, такое деление осуществляется нацело, ибо если x_0 − корень многочлена, то данный многочлен делится нацело на $x - x_0$; такое деление можно провести по правилу уголка или по схеме Горнера (Горнер В.Д. (1786 − 1837) − английский математик)).

При вычислении некоторых пределов используется первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{71}$$

и второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\,. \tag{72}$$

В силу (71)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1\,.$$

Если в (72) произвести замену $\alpha = \frac{1}{x}$ ($\alpha \to 0$ при $x \to \infty$), то второй замечательный предел можно записать в виде

$$\lim_{\alpha\to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e\,.$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in D(y)$, если существует $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $D \subseteq D(y)$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Справедлива основная теорема о непрерывных функциях.

Т е о р е м а . Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ непрерывны на множестве $D \subseteq D(y)$. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций тоже непрерывны на множестве D (в случае частного предполагается, что $v(x) \neq 0$ для $\forall x \in D$).

Основные элементарные функции (см. прил. 1) непрерывны на своей области определения.

Элементарная функция ::= функция, полученная с помощью конечного числа арифметических действий над основными элементарными функциями и конечного числа операций взятия функции от функции.

Например, функция

$$y=\frac{5\sin^3 x+\ln^2 x}{x^3+1}$$

является элементарной.

Каждая элементарная функция непрерывна на своей области определения.

Из определения непрерывности функции в точке следует, что при вычислении предела при $x\to x_0$ непрерывной в точке x_0 функции $f(x)$, достаточно в выражение для $f(x)$ подставить вместо x значение x_0.

Например,

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-x+5)=2\cdot 3^2-3+5=20\,.$$

З а д а ч а 3.2. Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^3+2}{3x^4-2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{2x^2-3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}$.

Решение.

а) $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^3+2}{3x^4-2x+3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^5}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}}=\left(\dfrac{9}{0}\right)=\infty$,

$A=\infty$;

б) $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{2x^2-3x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-4}{2x+1}=\dfrac{2}{5}=0,4$;

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-10x+8 & x-2 \\ \cline{2-2} -\;3x^2-6x & 3x-4 \\ \cline{1-1} -4x+8 & \\ -\;-4x+8 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2x^2-3x-2 & x-2 \\ \cline{2-2} -\;2x^2-4x & 2x+1 \\ \cline{1-1} x-2 & \\ -\;x-2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$A=0,4$;

в) $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\operatorname{tg}2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\boxed{=}$

$\left(1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha;\quad 1-\cos 5x=2\sin^2\dfrac{5x}{2}\right)$

$$\boxed{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{5x}{2}}{x\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\dfrac{\sin\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{5x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{25x^2}{4}}{x\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2x}\cdot 2x}=\frac{25}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{5x}{2}}\right)^2}{\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2x}}=$$

$=\dfrac{25}{4}\cdot\dfrac{1^2}{1}=\dfrac{25}{4}=6\dfrac{1}{4}=6,25$;

$A=6,25$;

г) $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}=(1^\infty)\boxed{=}$

$\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}=\dfrac{(3x+2)-2-1}{3x+2}=1+\dfrac{-3}{3x+2}\right)$

$$\boxed{=}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{2x-4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}\cdot\frac{-3}{3x+2}\cdot(2x-4)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}}\right]^{\frac{-3(2x-4)}{3x+2}} =$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(2x-4)}{3x+2}} = e^{-2},$$

$$A = e^{-2}.$$

Задача 3.2 решена.

3.3. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

3.3.1. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Правосторонний предел $f(x_0+0)$ *функции* $f(x)$ *в точке* x_0 $::=$ предел функции $f(x)$ в точке x_0, вычисленный при условии, что x стремится к x_0 справа, т.е. x стремится к x_0, оставаясь больше x_0:

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

(запись $x \to x_0+0$ означает, что x стремится к x_0 справа).

Левосторонний предел $f(x_0-0)$ *функции* $f(x)$ *в точке* x_0 $::=$ предел функции $f(x)$ в точке x_0, вычисленный при условии, что x стремится к x_0 слева, т.е. x стремится к x_0, оставаясь меньше x_0:

$$f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

(запись $x \to x_0-0$ означает, что x стремится к x_0 слева).

Правосторонний и левосторонний пределы функции $f(x)$ в точке называются *односторонними пределами* этой *функции* в данной точке.

3.3.2. ПРИЗНАК СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \exists\big(f(x_0+0),\, f(x_0-0)\big)\wedge$$

$$\wedge f(x_0+0) = f(x_0-0) = A. \qquad (73)$$

3.3.3. ПРИЗНАК НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда в силу (73) $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists\big(f(x_0+0),\, f(x_0-0)\big)\wedge\ f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0). \qquad (74)$$

Предельная точка x_0 множества $D(y)$, называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Из (74) видно, что x_0 является точкой разрыва функции в следующих случаях:

1) существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, но $x_0 \overline{\in} D(y)$; в этом случае x_0 называется *устранимой точкой разрыва функции* $f(x)$;

2) существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, но $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$; в этом случае x_0 называется *точкой разрыва первого рода функции* $f(x)$ (или точкой конечного разрыва); разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется *скачком функции* $f(x)$ *в точке* x_0;

3) хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ равен бесконечности (не важно какого знака); в этом случае x_0 называется *точкой разрыва второго рода функции* $f(x)$ (или точкой бесконечного разрыва).

З а д а ч а 3.3. Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность:

а) найти точки разрыва функции, если они существуют;
б) найти односторонние пределы и скачок функции в точках разрыва;
в) построить график функции.

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<-2; \\ -x+1, & -2\le x\le 1; \\ x^2-1, & x>1. \end{cases}$$

Решение.

а) Функция $f(x)$ может иметь разрыв лишь в тех точках, при переходе через которые выражение для функции меняется, т.е. в точках $x_1=-2$, $x_2=1$. Проверим, будет ли $x_1=-2$ точкой разрыва:

$$f(x_1+0)=f(-2+0)=\lim_{x\to-2+0} f(x)=\lim_{x\to-2+0}(-x+1)=3;$$

$$f(x_1-0)=f(-2-0)=\lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2-0} x=-2.$$

Получили: $f(-2+0)=3$; $f(-2-0)=-2$, но $f(-2+0)\ne f(-2-0)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=-2$ − точка разрыва первого рода. Вычислим скачок функции в точке $x_1=-2$:

$$h=f(-2+0)-f(-2-0)=3-(-2)=5,\ h=5.$$

Исследуем точку $x_2=1$:

$$f(x_2+0)=f(1+0)=\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}(x^2-1)=0;$$

$$f(x_2-0)=f(1-0)=\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}(-x+1)=0;$$

$$f(x_2)=f(1)=(-x+1)\big|_{x=1}=0.$$

Получим: $f(1+0)=f(1-0)=f(1)$ $\Rightarrow$ функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_2=1$.

б) $f(-2+0)=3$; $f(-2-0)=-2$; $h=5$ (см. а)).

в) Построим график функции (рис. 41).

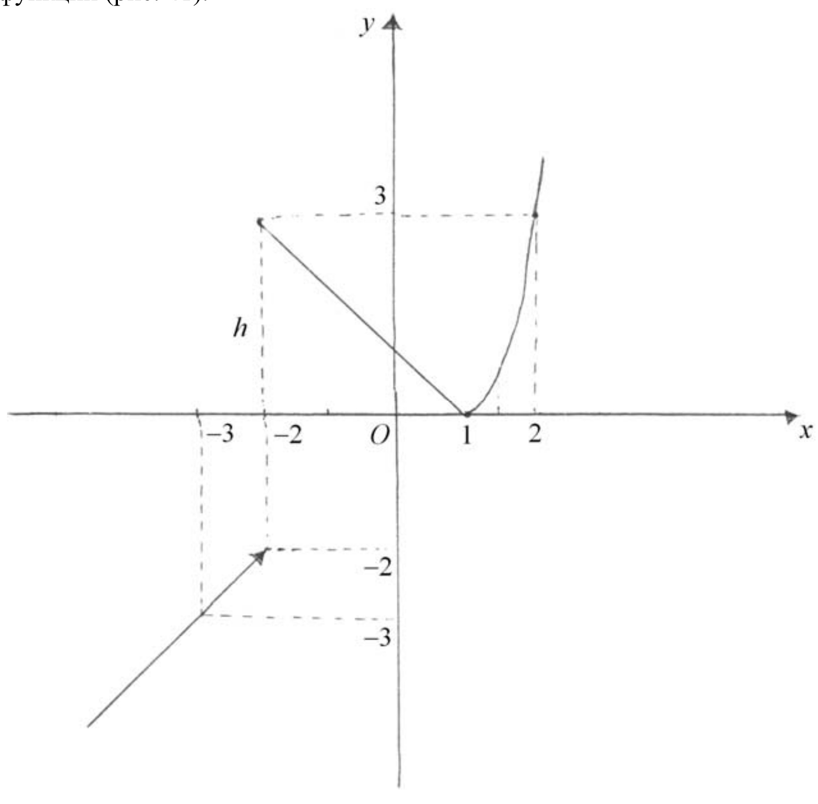


Рис. 41

Задача 3.3 решена.

3.4. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, $x \in D(y)$. Пусть x_0 − внутренняя точка множества $D(y)$, т.е. $\exists O_\delta(x_0) \mid O_\delta(x_0) \subset D(y)$.

Придадим x_0 приращение Δx, т.е. рассмотрим точку $x_0 + \Delta x$ (приращение Δx должно быть достаточно малым, а именно, таким, чтобы $x_0 + \Delta x \in D(y)$; приращение Δx может быть как положительным, так и отрицательным). Тогда функция $f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Величина Δy показывает насколько изменилась функция при переходе из точки x_0 в точку $x_0 + \Delta x$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ − это средняя скорость изменения функции при изменении аргумента на участке $[x_0, x_0 + \Delta x]$. А величина

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{75}$$

является мгновенной скоростью изменения функции $f(x)$ в точке x_0. В различных прикладных задачах функция $f(x)$ описывает некий процесс, и важно знать скорость протекания этого процесса, т.е. необходимо работать с величинами вида (75). В связи с этим вводят следующее определение.

Производная функции $f(x)$ *в точке* x_0 $::=$ конечный предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или, учитывая вид Δy,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если она имеет в этой точке конечную производную.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на множестве* $D \subseteq D(y)$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $D \subseteq D(y)$. Тогда каждой точке $x \in D$ можно поставить в соответствие производную $f'(x)$ функции $f(x)$ во взятой точке x. Тем самым на множестве D задана функция $y' = f'(x)$, называемая *производной функции* $f(x)$.

Производную $y' = f'(x)$ обозначают также символом $\frac{dy}{dx}$.

Операция нахождения производной $f'(x)$ функции $f(x)$ называется *дифференцированием*.

При дифференцировании функции применяют основную теорему о производных.

Теорема. Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы на множестве $D \subseteq D(y)$. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций тоже дифференцируемы на множестве D и справедливы формулы:

1) $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$;

2) $[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$;

3) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

4) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

(в случае частного предполагается, что $v(x) \neq 0$ для $\forall x \in D$).

Если $f(x) \equiv C$ для $\forall x \in D(y)$, то

5) $(C)' = 0$.

Из свойств 3), 5) следует, что

6) $[Cu(x)]' = Cu'(x)$.

При нахождении производных функций используется также правило дифференцирования сложной функции, выраженное следующей теоремой.

Теорема. Пусть функция $u = u(x)$ дифференцируема на множестве $D \subseteq D(u)$, а функция $y = y(u)$ дифференцируема на множестве $u(D)$. Тогда сложная функция $y = y(u(x))$ дифференцируема на множестве D и справедлива формула

$$y'_x = y'_u\, u'_x, \qquad (76)$$

т.е. производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу u и производной промежуточного аргумента u по основному аргументу x.

Например, согласно правилу (76) производная функции $y=\sin^3 x$ имеет вид

$$y' = 3\sin^2 x\cdot(\sin x)' = 3\sin^2 x\cdot\cos x$$

(данную функцию можно записать в виде $y=u^3$, $u=\sin x$).

Правило (76) распространяется на сложную функцию, состоящую из более, чем двух, звеньев. Например, если $y=y(w(u(x)))$, то

$$y'_x = y'_w\cdot w'_u\cdot u'_x. \qquad (77)$$

Согласно правилу (77) производная функции $y=\ln\cos^3 x$ имеет вид

$$y' = \frac{1}{\cos^3 x}\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)$$

(данную функцию можно представить в виде $y=\ln w$, $w=u^3$, $u=\cos x$).

Укажем правило дифференцирования функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad t\in T.$$

Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы на множестве T и $\varphi'(t)\neq 0$ для любого $t\in T$. Пусть функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t=\varphi^{-1}(x)$. Тогда справедлива формула

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ или } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

При дифференцировании функций используется таблица производных основных элементарных функций (см. прил. 3).

З а д а ч а 3.4. Найти производные первого порядка, используя правила вычисления производных:

а) $y=5\sin 2x - e^{4x}$; б) $y=\sin^2 3x$;

в) $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$; г) $\begin{cases} x=5\sin^3 t; \\ y=3\cos^3 t. \end{cases}$

Решение.

а) $y' = (5\sin 2x - e^{4x})' = 5\cdot(\sin 2x)' - (e^{4x})' =$

$$= 5\cos 2x\cdot 2 - e^{4x}\cdot 4 = 10\cos 2x - 4e^{4x},$$

$$y' = 10\cos 2x - 4e^{4x};$$

б) $y' = (\sin^2 3x)' = 2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3 = 3\sin 6x$

(использована формула тригонометрии $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$), $y' = 3\sin 6x$;

в) $y' = \left(\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}\right)' = \dfrac{(1+\sin 2x)'(1-\sin 2x)-(1+\sin 2x)(1-\sin 2x)'}{(1-\sin 2x)^2} =$

$$= \frac{\cos 2x\cdot 2\cdot(1-\sin 2x)-(1+\sin 2x)\cdot(-\cos 2x)\cdot 2}{(1-\sin 2x)^2} =$$

$$= \frac{2\cos 2x(1-\sin 2x+1+\sin 2x)}{(1-\sin 2x)^2} = \frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2},$$

$$y' = \frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2};$$

г) $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{(3\cos^3 t)'}{(5\sin^3 t)'} = \dfrac{3\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)}{5\cdot 3\sin^2 t\cdot(\cos t)} = -\dfrac{3}{5}\operatorname{ctg} t$,

$y'_x = -\dfrac{3}{5}\operatorname{ctg} t$.

Задача 3.4 решена.

3.5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ сама является функцией переменного x и, следовательно, может оказаться дифференцируемой по x . В связи с этим вводится следующее определение.

Производной второго порядка или *второй производной функции* $f(x)$ называется производная от производной $y' = f'(x)$ этой функции:

$$y''(x) = \left[y'(x)\right]' \quad \text{или} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Аналогично вводится понятие производной более высокого порядка:

$$y^{(n)}(x) = \left[y^{(n-1)}(x)\right]' \text{ или } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

З а д а ч а 3.5. Для данной функции $y = y(x)$ и аргумента x_0 вычислить $y''(x_0)$.

$$y = x^2\cos x\,; \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Решение.

$y' = (x^2)'\cos x + x^2\cdot(\cos x)' = 2x\cos x - x^2\sin x$;

$y'' = (2x)'\cdot\cos x + 2x\cdot(\cos x)' - (x^2)'\cdot\sin x - x^2\cdot(\sin x)' =$

$= 2\cos x - 2x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x = (2 - x^2)\cos x - 4x\sin x$;

$y'' = (2 - x^2)\cos x - 4x\sin x$;

$y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(2 - \dfrac{\pi^2}{4}\right)\cos\dfrac{\pi}{2} - 4\cdot\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2} = -2\pi$,

$y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2\pi$.

Задача 3.5 решена.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

I. Литература, рекомендуемая для изучения теоретической части курса

1. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии : учебник. – 13-е изд., стереотип. / Н.В. Ефимов. – М. : Физматлит, 2003. – 240 с.

2. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник. – 9-е изд., перераб. / Д.В. Беклемишев. – М. : Физматлит, 2001. – 376 с.

3. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа : учебник. – 10-е изд., стереотип. / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.

4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов. – В 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – Т. 1. – 416 с.

5. Щипачев, В.С. Основы высшей математики. – 4-е изд., стереотип. / В.С. Щипачев. – М. : Высш. шк., 2001. – 479 с.

6. Демидович, Б.П. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М. : Астрель, 2003. – 656 с.

7. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. – В 2 т. 7-е изд. / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2002. – Т. 1. – 416 с.

II. Литература, рекомендуемая для изучения практической части курса

1. Зимина, О.В. Высшая математика. – 2-е изд., испр. / О.В. Зимина [и др.]. – М. : Физматлит, 2001. – 368 с. (Решебник).

2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – 16-е изд., испр. / Д.В. Клетеник. – СПб. : Мифрил, 2001. – 208 с.

3. Цубербиллер, О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – 31-е изд., стереотип. / О.Н. Цубербиллер. – СПб. : Лань, 2003. – 336 с.

4. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – 2-е изд., перераб. / Л.А. Беклемишева [и др.]. – М. : Физматлит, 2001. – 496 с.

5. Щипачев, В.С. Задачник по высшей математике : учеб. пособие для вузов. – 4-е изд., стереотип. / В.С. Щипачев. – М. : Высш. шк., 2004. – 304 с.

6. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Астрель, 2004. – 558 с.

7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. – В 3 ч. / А.П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 270 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1. *Степенная функция*:

$$y = x^{\alpha}, \alpha \in R.$$

2. *Показательная функция*:

$$y = a^{x}, a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

3. *Логарифмическая функция*:

$$y = \log_a x,\ a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1\ \ (y = \log_a x\ ::=\ x = a^{y}).$$

4. *Тригонометрические функции*:

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\quad y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x,\ \left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

5. *Обратные тригонометрические функции*:

$y = \arcsin x,\quad y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x$

$(\ y = \arcsin x\ ::= \left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) \wedge (\sin y = x);$

$y = \arccos x\ ::= \left(y \in [0; \pi]\right) \wedge (\cos y = x);$

$y = \operatorname{arctg} x\ ::= \left(y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right) \wedge (\operatorname{tg} y = x);$

$y = \operatorname{arcctg} x\ ::= \left(y \in (0; \pi)\right) \wedge (\operatorname{ctg} y = x)\ .$

6. *Гиперболические функции*:

$y = \operatorname{sh} x$ (гиперболический синус),

$y = \operatorname{ch} x$ (гиперболический косинус),

$y = \operatorname{th} x$ (гиперболический тангенс),

$y = \operatorname{cth} x$ (гиперболический котангенс):

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2},\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},\ \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Приложение 2

НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1. *Рациональная функция*: $y = P_n(x)$, где $P_n(x)$ − многочлен степени *n*:

$$P_n(x) = a_0 x^{n} + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n;$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in R;\quad a_0 \neq 0.$$

Частные случаи:

Линейная функция:

$$y = ax + b;\quad a, b \in R;\quad a \neq 0.$$

Квадратичная функция:

$$y = ax^{2} + bx + c;\quad a, b, c \in R;\quad a \neq 0.$$

2. *Дробно-рациональная функция*:

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ − многочлены степени *n* и *m* соответственно.

Частные случаи:

Дробно-линейная функция:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d};\quad a, b, c, d \in R;\quad c \neq 0.$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$y = f(x)$	$y = f(u(x))$
1. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$	2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
4. $(\sin x)' = \cos x$	4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5. $(\cos x)' = -\sin x$	5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
6. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
7. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	7. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	9. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	10. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
11. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	11. $(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$	12. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$
13. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$	13. $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$
14. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	14. $(\mathrm{th}\, u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$
15. $(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	15. $(\mathrm{cth}\, u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ …………………………………………………………… 3

ОБОЗНАЧЕНИЯ ………………………………………………………….. 4

Контрольная работа 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ ………... 5

1.1. Матрицы, действия над ними ………………………………….... 5

Задача 1.1 ………………………………………………………… 8

1.2. Системы линейных уравнений ………………………………. 9

Задача 1.2 ………………………………………………………… 16

1.3. Однородная система трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными …………………………………………………… 20

Задача 1.3 ……………………………………………………….. 21

1.4. Собственные значения и собственные векторы матрицы ……. 23

Задача 1.4 ……………………………………………………….. 25

Контрольная работа 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ………………………………… 28

2.1. Прямая на плоскости ………………………………………. 28

Задача 2.1 ………………………………………………………… 33

2.2. Линии второго порядка ……………………………………. 38

Задача 2.2 ………………………………………………………… 49

2.3. Элементы векторной алгебры в пространстве ………………... 50

Задача 2.3 ………………………………………………………… 62

2.4. Элементы аналитической геометрии в пространстве ………… 63

Задача 2.4 ………………………………………………………… 67

Контрольная работа 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ ……………………... 72

3.1. Полярная система координат ……………………………….... 72

Задача 3.1 ………………………………………………………… 74

3.2. Пределы ……………………………………………………….. 76

Задача 3.2 ………………………………………………………… 82

3.3. Точки разрыва функции, их классификация ………………….. 83

Задача 3.3 ………………………………………………………… 84

3.4. Производная функции ………………………………………... 86

Задача 3.4 ………………………………………………………… 89

3.5. Производные высших порядков …………………………….. 90

Задача 3.5 ………………………………………………………… 91

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ……………………….. 92

ПРИЛОЖЕНИЯ ………………………………………………………… 94