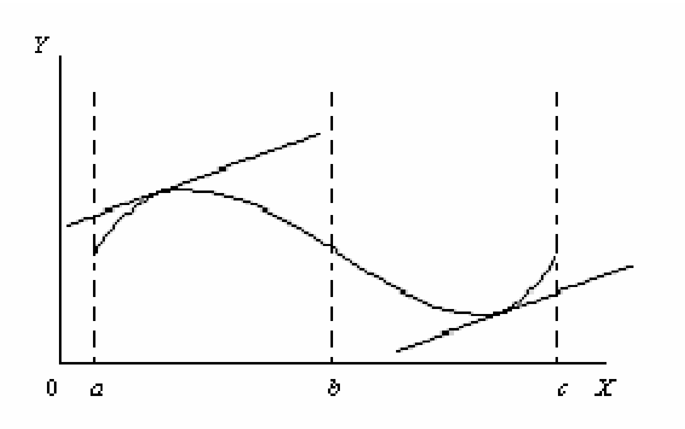
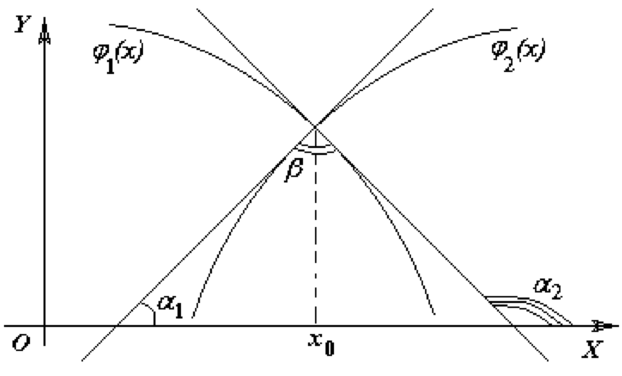
А.В. СОЛОПАХО

Высшая математика



КРАТКИЙ КУРС ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ



♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

А.В. СОЛОПАХО

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КРАТКИЙ КУРС ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Утверждено Ученым советом университета

в качестве учебного пособия
для студентов всех форм обучения
специальностей 080105, 080109, 080500

Тамбов
Издательство ТГТУ
2007

УДК 51:33(075)

ББК В11я73
С606

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук
Е.С. Жуковский

Доктор экономических наук
Л.В. Пархоменко

Солопахо, А.В.

С606 Высшая математика: краткий курс для экономистов : учебное пособие / А.В. Солопахо. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 112 с. – 130 экз. – ISBN 5-8265-0597-4 (978-5-8265-0597-7).

Содержит материал, соответствующий программе первого и второго семестров. Кратко, но достаточно полно излагаются сведения по разделам: «Матричная алгебра и системы линейных уравнений», «Модель межотраслевого баланса», «Математический анализ», «Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения». Рассматриваются примеры типовых задач и их решение.

Предназначено для студентов специальностей 080105, 080109, 080500 всех форм обучения.

УДК 51:33(075)
ББК В11я73

ISBN 5-8265-0597-4 (978-5-8265-0597-7)

Учебное издание

СОЛОПАХО Александр Владимирович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

КРАТКИЙ КУРС ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 28.05.2007.
Формат $60 \times 84/16$. 6,51 усл. печ. л. Тираж 130 экз. Заказ № 362.

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Математика как наука занимает особое место в системе общечеловеческих знаний. С одной стороны, она является одной из самых древних, а с другой – ни одно из современных технологических достижений не мыслимо без ее участия. Само начало взлета технического прогресса, произошедшее в первой половине XVIII столетия, не случайно совпало с открытием дифференциального исчисления Ньютоном и Лейбницем. И в наши дни математика находит все новые и новые применения в самых разных отраслях знаний. В частности, и современное экономическое образование не мыслимо без изучения важнейших математических моделей экономических процессов, а также математических методов анализа экономических данных и принятия соответствующих управленческих решений.

Можно сказать, что математика – это наука об абстрактных объектах и действиях над ними. Действительно, по сути, ни один из математических объектов не существует в реальности. В природе не встречается ни идеальных кругов, ни прямых, ни тем более рядов или функций. Тем не менее, эти абстрактные математические объекты с успехом могут быть использованы для моделирования реальных явлений, то есть отражения на их основе тех или иных, интересующих нас свойств этих явлений. При этом нельзя забывать, что любая (не только математическая) модель всегда лишь с той или иной степенью точности отражает свойства реального процесса, однако обычно и этого оказывается достаточно для того, чтобы можно было избежать длительных или дорогостоящих, а иногда и вообще неосуществимых, практических экспериментов.

В данной работе целью является изложить основополагающие математические факты в наиболее доступной форме, пренебрегая, зачастую достаточно запутанными, доказательствами многих из них, и обращая внимание на содержательный смысл этих фактов и эвристические иллюстрации их справедливости, основанные на геометрических, физических и иных соображениях.

1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Определение матрицы

Почти всегда курс высшей математики начинают изучать с линейной алгебры, это объясняется, с одной стороны, несложностью соответствующих вопросов, а с другой, – тем, что изучаемые в ней понятия являются типичными примерами чисто математических, абстрактных объектов. В частности, очень важным является следующее понятие [1, 2].

***Определение* 1.1.** Матрицей размерности $m \times n$ называется совокупность $m \times n$ чисел расположенных в виде таблицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эти числа называются элементами матрицы A.

По видимому, нельзя указать примера реального объекта, в полной мере соответствующего понятию матрицы. Иногда говорят, что такими примерами являются различные экономические таблицы. Однако они едва ли достаточно содержательны.

Матрицы обычно обозначают заглавными латинскими буквами, например A, B, C, а их элементы – соответствующими строчными буквами, с указанием в виде *нижних индексов* места расположения данного элемента в матрице. Важно запомнить, что, например, a_{ij} – элемент матрицы A, стоящий в ее i-й строке и j-ом столбце. Когда требуется, размерность матрицы также указывают в виде нижних индексов, например, B_{mk} – матрица B, имеющая m строк и k столбцов.

***Определение* 1.2.** Если число строк в матрице равно числу столбцов, то матрицу называют квадратной, иначе – прямоугольной.

Если матрица квадратная, то обычно говорят не о ее размерности, о ее порядке, и, соответственно, используют один нижний индекс, например, B_k – квадратная матрица k-го порядка.

***Определение* 1.3.** Если матрица имеет лишь одну строку, ее называют вектор-строкой, если имеет лишь один столбец, то – вектор-столбцом или просто вектором.

Иногда вектором называют и вектор-строки. Матрицы, являющиеся вектор-строкой или вектор-столбцом, обычно обозначают строчными латинскими буквами.

1.2. Сложение матриц и умножение на число

Над матрицами определятся следующие простейшие арифметические операции.

***Определение* 1.4.** Матрица C_{mn} называется суммой матриц A_{mn} и B_{mn}, если ее элементы связаны с элементами матриц A и B равенствами

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}.$$

При этом пишут

$$C = A + B.$$

Из этого определения следует, что
1) складывать можно только матрицы одинаковых размерностей;
2) сложение производится в любой последовательности, поэлементно.

***Определение* 1.5.** Матрица C_{mn} называется произведением матрицы A_{mn} на число α, если ее элементы связаны с элементами матрицы A равенством

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,,\ i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\,. \tag{1.1}$$

При этом пишут

$$C = \alpha\, A.$$

Как следствие введенных операций можно определить вычитание матриц. В качестве упражнения, сделайте это самостоятельно.

Имеют место следующие очевидные свойства введенных операций:

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $\alpha\,(A+B) = \alpha\, A + \alpha\, B$.
4. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta\, A)$.
5. $(\alpha+\beta)A = \alpha\, A + \beta\, A$.

***Определение* 1.6.** Пусть имеется некоторое множество Ψ каких-либо элементов, для которых определены операции сложения и умножения на число. Если результатом любой комбинации этих действий над элементами Ψ оказывается элемент, принадлежащий Ψ, то Ψ называется *линейным пространством*.

Введенное понятие является одним из центральных в высшей математике. Из вышесказанного следует, что множество всех матриц конкретной размерности $m \times n$ является линейным пространством.

1.3. Умножение матриц

Очень важной является следующая операция.

***Определение* 1.7 (произведение матриц).** Матрица $C_{m\times n}$ называется произведением матриц A_{mr} и B_{rn}, если ее элементы связаны с элементами матриц A и B равенством

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\, b_{kj}\,,\ i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\,.$$

Из этого определения произведения матриц следует, что:

1. Можно перемножать только матрицы соответствующих размерностей, а именно, необходимо, чтобы количество столбцов первого сомножителя было равно числу строк второго сомножителя.

2. Для того чтобы найти элемент этой матрицы – результат, стоящий в ее i-й строке и j-ом столбце, – нужно мысленно i-ю строку первого матричного сомножителя приложить к j-му столбцу второго сомножителя, оказавшиеся рядом элементы перемножить между собой и полученные произведения сложить. Таким образом должны быть вычислены по отдельности все элементы образующие матрицу C.

3. Если перемножаемые матрицы не являются квадратными, то сомножители невозможно поменять местами (будет нарушено соответствие размерностей).

4. Даже если сомножители являются квадратными (при этом, с точки зрения размерности, их можно было бы переставить) от перестановки мест сомножителей результат произведения матриц (в отличие от умножения чисел) может меняться.

Третье и четвертое замечания означают, что операция умножения матриц не является *коммутативной*.

Пример. Найти матрицу $B = A^2 - 3A+5E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix};\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 18 \\ -3 & 10 & -2 \\ 3 & -3 & 31 \end{pmatrix},$$

$$-3\,A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ -3 & 15 & -15 \\ 0 & -9 & -12 \end{pmatrix};\qquad 5\,E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B=\begin{pmatrix}4&9&18\\-3&10&-2\\3&-3&31\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&0&-9\\-3&15&-15\\0&-9&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9&9\\-6&60&-17\\3&-12&24\end{pmatrix}.$$

***Определение* 1.8.** Говорят, что элементы a_{ii}, $i=\overline{1,\min\{m,n\}}$, матрицы A_{mn} стоят на ее *главной диагонали*.

***Определение* 1.9.** Квадратная матрица порядка n, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные элементы – нулю, называется единичной матрицей порядка n.

Единичная матрица обычно обозначается через E_n или I_n. Таким образом, единичная матрица порядка n в общем случае имеет вид

$$E_n=\begin{pmatrix}1&0&.....&0\\0&1&.....&0\\.....&.....&.....&.....\\0&0&.....&1\end{pmatrix}.$$

Важнейшим свойством единичной матрицы является следующее: для любых матриц соответствующих размерностей имеет место

$$A_{mn}E_n=A_{mn}\,;\quad E_mA_{mn}=A_{mn}\,.$$

То есть единичная матрица для множества матриц играет ту же роль, что и единица для чисел.

Поскольку почти всегда в конкретных выражениях необходимый порядок единичной матрицы ясен, то его обычно не пишут. Таким образом, через E (или I) обозначается единичная матрица соответствующей размерности.

Свойства операции умножения:

1. $(AB)\,C=A\,(BC)$.
2. $A\,(B+C)=AB+AC$.
3. $(A+B)\,C=AC+BC$.
4. $AB\neq BC$ – некоммутативность.

1.4. Определители матриц. Вычисление определителей матриц второго и третьего порядков

***Определение* 1.10.** Определителем матрицы порядка 1 называется само это число.

***Определение* 1.11.** Определителем, или детерминантом, квадратной матрицы A порядка n называется число, которое обозначается и равно

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&....&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&....&a_{2n}\\....&....&....&....\\a_{n1}&a_{n2}&....&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\,a_{ik}\,M_{ik}\,,\tag{1.1}$$

где M_{ik} – так называемый *дополнительный минор* элемента a_{ik} матрицы A, то есть определитель квадратной матрицы, полученной из A вычеркиванием ее i-й строки и k-го столбца.

Из этого определения можно сделать несколько выводов:

1) понятие детерминанта определено только для квадратных матриц;

2) данное определение носит *рекурентный* характер (то есть ссылается на самого себя), а именно, в соответствии с ним, определитель n-го порядка определяется через n определителей n-1 порядка. Однако, в этом нет ни противоречия, ни замкнутого круга, так как снижая на каждом шаге порядок необходимых определителей на 1, мы дойдем до 1-го порядка и используем определение 1.10;

3) в определении не задано конкретного значения i – номера строки, по которой, как говорят, производится *разложение* определителя; оказывается он может быть любым, результат от этого не изменится. Более того, будет получен тот же результат, если разложение определителя провести и по любому столбцу.

Понятие определителя играет важную роль в изучаемой теории матриц и линейных систем уравнений.

***Определение* 1.12.** Матрица A называется *вырожденной* или *особенной*, если

$$\det A=0.$$

Рассмотрим, какой результат дает введенное определение для матриц второго и третьего порядков.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Раскладывая определитель этой матрицы по формуле (1.1), например, по 1-й строке получим

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11}\, a_{22} + (-1)^{1+2} a_{12}\, a_{21} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}\,.$$

Проверьте самостоятельно, что будет получено то же выражение, если разложить данный определитель, например, по второму столбцу.

Полученную формулу определителя 2-го порядка следует запомнить, что проще сделать, используя следующую ее геометрическую интерпретацию, представленную на рис. 1.1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Рис. 1.1

Рассмотрим расчет определителя матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по формуле (1.1), например, по 2-му столбцу получим

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Используя уже известную формулу определителя 2-го порядка, и после соответствующих преобразований, получаем

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}.$$

Полученную формулу определителя 3-го порядка следует запомнить, что проще сделать, используя следующую ее геометрическую интерпретацию, представленную на рис. 1.2.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Рис. 1.2

Пример. Рассчитать определители:

1) второго порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 15 = -29,$$

2) третьего порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 84 - 12 + 0 - 0 - 140 - 18 = 86.$$

1.5. Вычисление определителей высших порядков

Уже из сравнения формул определителей 2-го и 3-го порядков можно догадаться, насколько более громоздкими окажутся соответствующие формулы для определителей матриц более высоких порядков. Так, например, формула определителя 4-го порядка будет содержать 24 слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение четырех чисел. Ясно, что подобные формулы запомнить весьма сложно, к тому же они не имеют удобных геометрических интерпретаций. Поэтому, в действительности, для расчета определителей высших порядков используют совсем другую методику, основанную на следующем понятии.

***Определение* 1.13.** Элементарным преобразованием строк матрицы называют действие, заключающееся в прибавлении к некоторой строке этой матрицы любой другой ее строки, быть может, умноженной на некоторое число γ. Прибавляемая строка при этом не изменяется.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов матрицы. Следует четко запомнить, что при преобразованиях строк можно прибавлять только строки. А при преобразованиях столбцов – только столбцы.

Оказывается справедлива теорема.

***Теорема* 1.1.** При элементарных преобразованиях определитель матрицы не изменяется.

Попытаемся частично доказать справедливость этого утверждения. За основу при этом необходимо принять следующий факт.

***Лемма* 1.1.** Если в квадратной матрице поменять местами любые две строки, или любые два столбца, то ее определитель, сохранив абсолютное значение (то есть его модуль не изменится) изменит знак, на противоположный.

К сожалению, доказательство этого факта [2] достаточно громоздко и, к тому же, основано на использовании так называемого принципа математической индукции – приема недостаточно хорошо известного большинству выпускников средних школ. Поэтому примем эту важную лемму без доказательства.

Из этой леммы в частности получаем.

***Следствие* 1.** Если в некоторой квадратной матрице имеется две одинаковые строки, или два одинаковых столбца, то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Поменяем местами эти две строки, тогда, с одной стороны, определитель этой матрицы очевидно не изменится. А с другой, он должен изменить знак, в соответствии с леммой 1. Одновременно это возможно только, если он равен нулю.

Теперь докажем теорему 1.1.

Доказательство (*теоремы* 1.1). Прибавим к некоторой строке q матрицы A какую-нибудь другую ее строку p, умноженную на некоторое число γ. Обозначим преобразованную таким образом матрицу как $\widetilde{A}$. Тогда, раскладывая определитель $\det\left(\widetilde{A}\right)$, по преобразованной строке получаем

$$\det\left(\widetilde{A}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\left(q_k+\gamma\, p_k\right)M_{ik}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\, q_k\, M_{ik}+\gamma\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\, p_k\, M_{ik}=$$

$$=\det(A)+\gamma\det(A_p)\,,$$

где через A_p обозначена матрица, отличающаяся от A тем, что у нее вместо строки q стоит строка p. Но тогда ясно, что

$$\det(A_p)=0\,.$$

Что и доказывает теорему.

Из теоремы 1.1 вытекает следующая методика вычисления определителей высших порядков:

1) посредством элементарных преобразований строк и столбцов исходной матрицы следует добиться того, чтобы в какой-нибудь ее строке или столбце остался бы только один ненулевой элемент (если матрица невырожденная, то обнулить все элементы какой-либо строки или столбца не удастся);

2) после этого раскладывая определитель по этой строке (или столбцу), мы получим, что необходимо вычислить лишь один минор, так как значения всех других не играют роли, поскольку они все равно умножатся на нули;

3) то есть задача свелась к вычислению определителя, порядок которого на единицу меньше, чем у исходного. Можно и далее снижать порядок определителя подлежащего вычислению, и дойти, таким образом, до третьего или даже второго порядка, и тогда уже применить вышеуказанные формулы.

Ясно, что эта методика дает тем большую экономию в вычислениях, чем выше порядок искомого определителя. При ее использовании целесообразно придерживаться следующих рекомендаций:

1) желательно обнулять элементы той строки, или столбца, в которой уже имеется наибольшее количество нулей, – это уменьшит количество необходимых вычислений;

2) желательно, чтобы в качестве единственного ненулевого элемента обнуляемой строки (или столбца) оставалась бы единица, или минус единица, – это уменьшит количество возникающих дробей.

Пример. Рассмотрим вычисление определителя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Если бы мы непосредственно применяли формулу (1.1), то раскладывая соответствующий определитель, например по первой строке, мы бы получили:

$$\text{Det}\, A = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 8(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ 6(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 3 \end{vmatrix},$$

то есть необходимо вычислить четыре определителя третьего порядка. Проделав это, получим следующий результат:

$$\det A = -72 - 8\,(-63) - (-21) - 6\,(-150) = 1353.$$

Теперь произведем элементарные преобразования с целью получить нули, например в четвертом столбце. Для этого, например, вычтем из первой и второй строки третью строку умноженную соответственно на 6 и 2. Тогда раскладывая определитель по четвертому столбцу, получаем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -29 & -28 & -49 & 0 \\ -7 & -12 & -12 & 0 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -29 & -28 & -49 \\ -7 & -12 & -12 \\ 7 & 9 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{2+4}\,[(-29)\,(-12)\,3 + (-7)\,9\,(-49) + (-28)\,(-12)\,7 - (-49)\,(-12)\,7 -$$

$$- (-28)\,3\,(-7) - (-29)\,(-12)\,9)] = 1353.$$

Оказалось необходимым вычислить только один определитель третьего порядка. Хотя формально в разложении исходного определителя четвертого порядка входят еще три определителя третьего, но так как они умножаются при этом на нули, записывать и вычислять их не имеет смысла. Естественно, результат совпадает с полученным по первому способу.

Важнейшими свойствами определителей являются следующие:

1) $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$;
2) $\det(A\,B) = \det(A)\det(B)$.

1.6. Обратная матрица

Весьма важным является следующее понятие.

***Определение* 1.14.** Матрица, при умножении на которую матрицы A получается единичная, называется матрицей обратной матрице к A и обозначается A^{-1}. То есть, должно быть

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

***Теорема* 1.2.** Элементы обратной матрицы A^{-1} можно получить по формуле

$$a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A} M_{ji},$$

где M_{ji} – дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы A^{-1}.

На доказательстве этой теоремы не будем останавливаться, в частности потому, что убедиться в ее справедливости можно в ходе конкретных расчетов.

Пример. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Определитель этой матрицы $\det A = 10$. По введенной формуле находим элементы обратной матрицы:

$$a_{11}^{-1} = \frac{(-1)^{1+1}}{10} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{12}{10};$$

$$a_{12}^{-1} = \frac{(-1)^{1+2}}{10} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{9}{10} \qquad \text{и т.д.}$$

Отметим, что, например, в первом элементе не сделано сокращения дроби, поскольку так удобнее для необходимой последующей проверки. Итак, получаем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{32}{10} \\ \frac{22}{10} & \frac{14}{10} & -\frac{52}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$\begin{pmatrix} -\frac{12}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{32}{10} \\ \frac{22}{10} & \frac{14}{10} & -\frac{52}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = E \text{ – единичная матрица.}$$

Теперь можно окончательно записать

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{16}{5} \\ \frac{11}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{26}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

1.7. Транспонирование матриц

Введем еще одну необходимую операцию над матрицами.

Определение **1.15.** Результатом операции *транспонирования* матрицы A_{mn} называется матрица размерности $n\times m$, которая обозначается A^T, такая, что ее элементы a_{ij}^T соответствуют равенствам

$$a_{ji} = a_{ij}^T, \quad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,n}.$$

То есть, чтобы протранспонировать матрицу A, нужно поменять местами ее элементы симметричным образом относительно ее главной диагонали. Или, как говорят, перевернуть матрицу A относительно главной диагонали. При этом элементы, стоящие на главной диагонали, остаются на месте.

Определение **1.16.** Матрица, неменяющаяся при транспонировании, называется симметричной.

Например, единичная матрица любого порядка – симметрична.
Отметим следующие свойства:

1) $(A\,B)^T = B^T A^T$;
2) $\det(A) = \det(A^T)$ – то есть при транспонировании определитель матрицы не изменяется.

1.8. Системы линейных уравнений

Определение **1.17.** Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1\,; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2\,; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m\,, \end{cases} \tag{1.2}$$

где a_{ij}, b_i, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ – заданные числа, коэффициенты системы, называется системой m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$.

***Определение* 1.18.** Любая упорядоченная совокупность чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, при подстановке которых в систему (1.2) получаются верные тождества, называется *решением* этой системы.

СЛАУ встречаются в математических моделях очень многих процессов и объектов, особенно технических и экономических. Пример одной такой очень важной экономической модели будет рассмотрен в теме 2.

В качестве простейшего примера использования СЛАУ для моделирования экономических процессов рассмотрим следующую задачу, которая относится к общему типу задач экономического содержания, называемых задачами *оптимального распределения производственных ресурсов*.

Пример. Для изготовления трех видов изделий A, B и C предприятие использует три вида станочного оборудования. Нормо-затраты станко-часов каждого вида на обработку единицы изделия A, B или C, цена одного изделия, а также общее имеющееся количество станко-часов приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Вид оборудования	Нормы затрат станко-часов на одно изделие			Общее количество станко-часов
	A	*B*	*C*	
Фрезерное	8	5	2	390
Токарное	6	4	8	560
Шлифовальное	5	3	3	310

Составить план производства изделий, при котором все ресурсы будут полностью использованы.

Решение. Постановка вопроса в данной задаче является несколько искусственной, но сейчас важнее проиллюстрировать применение СЛАУ.

Составим математическую модель задачи. Обозначим планируемое к выпуску количество изделий вида А через x_1, изделий В – через x_2, изделий С – через x_3. Ясно, что искомые переменные должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 390; \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 560; \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 310. \end{cases}$$

Осталось найти решение этой системы, что будет сделано позже.

Коэффициенты левой части системы уравнений (1.2) можно записать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую так и называют – матрицей системы. Числа b_i, стоящие в правых частях уравнений, образуют вектор

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

называемый столбцом правой части (системы), или вектором свободных членов.

***Определение* 1.19.** Если свободные члены всех уравнений равны нулю, то система называется *однородной*.

Теперь, если ввести обозначение для вектора искомых неизвестных

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то систему (1.2) можно записать в гораздо более компактной, так называемой, *матричной* форме:

$$A\,x = b\,.$$

В общем случае СЛАУ может не иметь ни одного решения, иметь единственное решение или бесконечное множество решений. По ряду причин, наиболее важным является случай единственного решения. Укажем уже сейчас, что он имеет место тогда и только тогда, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных и матрица системы не вырожденна, то есть ее определитель не равен нулю. Рассмотрим несколько классических методов, позволяющих находить это единственное решение СЛАУ.

1.9. Метод Крамера

***Теорема* 1.3**. Система n линейных уравнений c n переменными и невырожденной матрицей имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$x_i = \Delta_i / \Delta, \qquad i = \overline{1,n},$$

где Δ – детерминант матрицы A системы; Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы системы A заменой ее i-го столбца столбцом правой части этой системы.

Пример. Решить методом Крамера систему из предыдущего примера

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 390; \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 560; \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 310. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы и вспомогательные матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 390 & 5 & 2 \\ 560 & 4 & 8 \\ 310 & 3 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 390 & 2 \\ 6 & 560 & 8 \\ 5 & 310 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 390 \\ 6 & 4 & 560 \\ 5 & 3 & 310 \end{pmatrix},$$

их определители соответственно равны

$$\Delta = 10;\ \Delta_1 = 200;\ \Delta_2 = 300;\ \Delta_3 = 400;$$

тогда по формулам Крамера имеем

$$x_1 = 20; \quad x_2 = 30; \quad x_3 = 40.$$

То есть для того чтобы полностью израсходовать (задействовать) все ресурсы, необходимо произвести 20 изделий вида A, 30 изделий вида B, 40 изделий вида C. Подставив эти числа в уравнения, убеждаемся в правильности решения. Вообще, всегда, когда возможно, следует делать проверку.

Достоинством метода Крамера является простота формул, которые обычно легко запоминаются. Недостатком – большое количество необходимых вычислений, что особенно проявляется при большой размерности систем. Практически системы порядка выше третьего этим методом не решают.

1.10. Матричный способ

Запишем СЛАУ в матричной форме:

$$A\,x = b, \tag{1.3}$$

где A – матрица системы; x – вектор неизвестных переменных; b – столбец свободных членов.

Мы уже знаем, что, если A квадратная невырожденная матрица, то можно найти обратную ей A^{-1}. Тогда, умножив систему (1.3) слева (следует не забывать, что операция умножения матриц не коммутативна, то есть в матричной алгебре всегда важно, с какой стороны производится умножение) на A^{-1}, получим:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\,b,$$

то есть

$$Ex = A^{-1}\,b,$$

где E – единичная матрица соответствующей размерности; отсюда

$$x = A^{-1}\,b.$$

Эту формулу следует запомнить. Стоящее в ней справа произведение $A^{-1}\,b$ имеет размерность вектора. Тем самым найден искомый вектор неизвестных x.

Пример. Решить матричным способом все ту же систему

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 390 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 560 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 310 \end{cases}.$$

Решение. Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

обратная ей была найдена в примере п. 1.6. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{16}{5} \\ \frac{11}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{26}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 390 \\ 560 \\ 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Посредством проверки несложно убедиться в правильности результата.

Матричный способ, хотя и экономичнее метода Крамера, также является достаточно трудоемким. Иногда бывает необходимо решить сразу несколько систем уравнений, с одинаковой матрицей и различными правыми частями. В таких ситуациях матричный способ наиболее выгоден.

1.11. Метод Гаусса

Наиболее экономичным и распространенным на практике методом решения систем является метод Гаусса. Введем следующее понятие.

***Определение* 1.20.** Элементарным преобразованием уравнений системы будем называть действие, заключающееся в прибавлении к некоторому уравнению этой системы любого другого ее уравнения, быть может, умноженного на некоторое число γ. Прибавляемое уравнение при этом не изменяется.

Метод Гаусса основан на следующем факте.

***Теорема* 1.4**. При элементарных преобразованиях, множество решений системы не изменяется.

Доказательство. Выделим в некоторой СЛАУ любые два уравнения

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = b; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \end{cases}$$

Прибавив к первому из них второе, умноженное на γ, получим систему

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_1 + \gamma b_1)x_1 + (a_2 + \gamma b_2)x_2 + \dots + (a_n + \gamma b_n)x_n = a + \gamma b; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = b; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Пусть x_1, x_2, ..., x_n – некоторое решение первой системы. Но из простых арифметических соображений, не сложно понять, что те же числа являются и решением второй, и наоборот, то есть теорема верна.

Важно заметить, что хотя раньше рассматривался случай только единственного решения, эта теорема носит более общий характер. Каким бы не было множество решений исходной системы (бесконечным, или единственное решение, или ни одного), после преобразований оно останется тем же.

Метод Гаусса – это итерационный (шаговый) алгоритм:

1) на первом шаге которого с помощью элементарных преобразований уравнений системы добиваются того, чтобы все коэффициенты при x_1 во всех уравнениях, стоящих ниже первого, стали бы равны нулю;
2) на втором – чтобы при x_2 во всех, стоящих ниже второго;
3) на i-ом – чтобы при x_i во всех, стоящих ниже i-го;

4) таким образом, после (n-1)-го шага система окажется приведенной к следующему, так называемому, верхнетреугольному виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)(n-1)} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

5) на последнем n-ом шаге, который часто называют *обратной прогонкой*, последовательно, в обратном порядке, начиная с x_n и до x_1, рассчитывают значения искомых переменных.

Метод Гаусса является весьма экономичным методом, с точки зрения количества необходимых вычислений. И это проявляется тем ощутимей, чем выше размерность решаемой системы.

При использовании метода Гаусса необходимо учитывать, что:

1) если на i-ом шаге коэффициент a_{ii} при x_i оказался равным нулю, то необходимо переставить местами уравнения, а именно, поставить на место i–го уравнения одно из расположенных ниже, а именно такое, в котором коэффициент при x_i не равен нулю;

2) желательно, чтобы перед i-м шагом коэффициент a_{ii} при x_i в i-ом уравнении был бы равен единице, это уменьшит количество возникающих дробей. Для этого рекомендуется перед i-ым шагом делить i-е уравнение на a_{ii}. Или иногда удается переставить нужным образом уравнения.

***Определение* 1.21.** Пусть имеется СЛАУ с прямоугольной матрицей размерности $m \times n$, тогда матрица

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

размерности $m \times (n + 1)$, называется *расширенной матрицей* этой системы.

Преобразования метода Гаусса будут записаны более компактно, если на каждом шаге переписывать не саму систему, а только ее расширенную матрицу. При этом принято комментировать осуществляемые преобразования, указывая стрелочками, будучи умноженными на какие именно коэффициенты, складываются те или иные уравнения.

***Пример*.** Для примера решим методом Гаусса предыдущую систему. Ее расширенная матрица имеет вид

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 5 & 2 & 390 \\ 6 & 4 & 8 & 520 \\ 5 & 3 & 3 & 310 \end{array}\right)$$

(1/8)

(–6)

(–5)

Стрелочки справа от нее поясняют, какие именно действия следует осуществить на первом шаге.

Шаг 1. После первого шага получаем матрицу, где справа опять стре-лочками указаны необходимые на следующем шаге действия.

$$A1^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{195}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{2} & \frac{535}{2} \\ 0 & \frac{-1}{8} & \frac{7}{4} & \frac{265}{4} \end{bmatrix}$$

(1/2)

Шаг 2. После второго шага получаем матрицу

$$A2^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{195}{4} \\ 0 & 1 & 26 & 1070 \\ 0 & 0 & 5 & 200 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3. Теперь осталось найти решение

$$\begin{cases} x_3 = 200/5 \\ x_2 = 1070 - 26x_3 \\ x_1 = \dfrac{195}{4} - \dfrac{x_3}{4} - \dfrac{5}{8}x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Результат совпадает с предыдущим.

1.12. Множество решений СЛАУ

Теперь можно сформулировать общие результаты, касающиеся систем любой размерности, а не только с квадратной невырожденной матрицей. Для этого понадобятся некоторые вспомогательные понятия.

***Определение* 1.22.** *Минором* данной матрицы называется определитель любой ее подматрицы, получаемый вычеркиванием некоторого (быть может, нулевого) количества ее строк и столбцов. Порядок соответствующей подматрицы называют порядком этого минора.

***Определение* 1.23.** В матрице A_{mn} минор порядка r называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r + 1$ равны нулю, или их не может быть ($r = n$ или $r = m$). Столбцы и строки подматрицы, соответствующей базисному минору, называют *базисными*.

***Определение* 1.24.** Рангом матрицы A_{mn} называют порядок базисного минора. Используют обозначение rank(A).

***Теорема* 1.5.** Пусть имеется СЛАУ

$$Ax = b\,, \tag{1.4}$$

и ее матрица A имеет размерность $m \times n$, тогда:

1. Если ранг $q = \mathrm{rank}(A^*)$ расширенной матрицы системы (1.4) больше ранга $r = \mathrm{rank}(A)$ матрицы системы (что может быть только на единицу), то система (1.4) не имеет ни одного решения, ее уравнения противоречивы.
2. Если $q = r = n$, то система имеет единственное решение.
3. Если $q = r < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Поясним сформулированные в теореме утверждения:

1. В этом случае, то есть когда $q = r + 1$, какова бы не была размерность матрицы системы, с помощью элементарных преобразований уравнений ее можно привести к виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1r}x_r = a_{1(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n + b_1\,; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2r}x_r = a_{2(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n + b_2\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{rr}x_r = a_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n + b_r\,; \\ 0 = b_{r+1}\,; \\ 0 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = 0, \end{cases}$$

где переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ переставлены так, чтобы $x_1, x_2, ..., x_r$ соответствовали базисным столбцам. Поскольку, в соответствии с условием, имеет место $b_{r+1} \neq 0$, то ясно, что преобразованная система не может иметь решений.

2. Если $r = n$, то с помощью элементарных преобразований уравнений, систему (1.4) можно привести к виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1\,; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n\,; \\ 0 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = 0, \end{cases}$$

в котором система первых n уравнений имеет единственное решение, а значит и вся исходная система целиком.

3. Если $r < n$, то систему (1.4) можно привести к виду

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1r}x_r = a_{1(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n + b_1\,; \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2r}x_r = a_{2(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n + b_2\,; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{rr}x_r = a_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n + b_r\,; \\
0 = 0\,; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = 0.
\end{cases} \qquad (1.5)
$$

В левой части (1.5) находятся переменные называемые *базисными*, в правой части – называемые *параметрическими*. Задаваясь любыми значениями параметрических переменных, получаем соответствующие значения базисных. Любой такой набор будет удовлетворять системе и тем самым являться решением.

При этом необходимо решить систему с квадратной невырожденной матрицей, что еще раз доказывает важность этого случая. Практически обычно поступают так. Преобразуют СЛАУ к виду

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1r}x_r = a_{1(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n + b_1\,; \\
\qquad a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2r}x_r = a_{2(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n + b_2\,; \\
\qquad\qquad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad a_{rr}x_r = a_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n + b_r\,; \\
0 = 0; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = 0
\end{cases}
$$

и выражают явно базисные переменные через параметрические. Соответствующие преобразования почти полностью повторяют метод Гаусса.

Пример. Найти множество решений системы:

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 0\,; \\
2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 + 9x_5 = 0\,; \\
-x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0\,.
\end{cases}
$$

Решение. Последовательно получаем

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 0 \\
x_2 - 2x_3 - 13x_4 + 7x_5 = 0 \\
3x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 8x_5 = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 0 \\
x_2 - 6x_3 - 13x_4 + 7x_5 = 0 \\
10x_3 + 48x_4 - 13x_5 = 0
\end{cases}
\Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 = -6x_4 - x_5 \\
x_2 - 2x_3 = 13x_4 - 7x_5 \\
10x_3 = -48x_4 + 13x_5
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 = -x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5\,; \\
x_2 = 2x_3 + 13x_4 - 7x_5\,; \\
10x_3 = -48x_4 + 13x_5\,.
\end{cases}
$$

Из последней системы видим, что если принять переменные x_4, x_5 за параметрические, то базисные переменные x_1, x_2, x_3 можно выразить следующим образом:

$$
\begin{cases}
x_1 = -14{,}2x_4 + 4{,}7x_5\,; \\
x_2 = 3{,}4x_4 - 4{,}4x_5\,; \\
x_3 = -4{,}8x_4 + 1{,}3x_5\,.
\end{cases}
$$

Проделав необходимые преобразования, можно записать ответ:

$(-14{,}2x_4 + 4{,}7x_5;\ 3{,}4x_4 - 4{,}4x_5;\ -4{,}8x_4 + 1{,}3x_5;\ x_4;\ x_5)$ – множество решений исходной системы.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример экономической таблицы как матрицы.
2. Приведите пример таблиц, для которых применима операция сложения.
3. Приведите пример таблиц, для которых применима операция умножения на число.
4. В чем сходство и в чем отличие определителя матрицы от модуля числа?
5. Что такое вырожденная матрица? Приведите пример.
6. Дайте геометрическую иллюстрацию формуле определителя четвертого порядка?
7. Что такое элементарное преобразование столбцов матрицы?
8. В чем преимущество использования элементарных преобразований при расчете определителей?
9. Для решения каких систем метод Крамера не используется?
10. Для решения каких систем метод обратной матрицы наиболее эффективен?
11. Чем метод Гаусса лучше остальных методов?
12. Когда система уравнений не имеет решений? Приведите пример.

2.1. Основные понятия и соотношения моделей межотраслевого баланса

Модель межотраслевого баланса (МОБ) можно охарактеризовать, как прекрасный пример:

1) использования математических методов для анализа экономических процессов, то есть пример экономико-математической модели;

2) практического использования матричной алгебры.

Впервые серьезные исследования подобного типа, с разбиением производственной сферы экономики государства на ряд отраслей ($n = 12$), были проведены в России в начале XX в. Они уходят корнями в еще более старые исследования европейских ученых. В 20-х гг. в РСФСР эти исследования получили значительное развитие, в том числе с участием В. Леонтьева и др. Позднее на западе балансовые модели производственных отраслей экономики получили название *модели Леонтьева* (в работах для Японии $n = 2500$). В Советском Союзе также постоянно шли исследования и разрабатывались государственные планы с использованием аналогичной модели, получившей название *модели межотраслевого баланса* [1, 3].

Пусть производственная сфера экономики некоторого крупного экономического субъекта (государства, или региона, или достаточно крупной фирмы) условно разбита на n отраслей. Пусть за некоторый отчетный период времени (год, квартал, месяц) известны следующие данные:

1) вектор *валового выпуска продукции* по отраслям

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

где X_i, $i = \overline{1,n}$, – валовый выпуск продукции i-ой отрасли в денежном выражении;

2) *матрица прямых затрат*

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix},$$

где X_{ij} – количество продукции i-ой отрасли, которое было использовано при производстве в j-ой отрасли за тот же период.

Из этих данных, прежде всего, вычисляют:

1) вектор *конечного продукта*

$$Y = X - \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} X_{1j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} X_{nj} \end{pmatrix} = X - \widetilde{X} \cdot \bar{1},$$

где $\bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ – n-мерный вектор из единиц. В соответствии с экономическим смыслом элементов этого вектора, его часто также называют *вектором потребления*, или *вектором накопления*;

2) вектор чистого продукта

$$Z = X^T - \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} X_{i1} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} X_{in} \end{pmatrix} = X^T - \overline{1^T} \cdot \widetilde{X}.$$

Несложно понять, что $\sum\limits_{i=1}^{n} X_{ij}$ выражает суммарную стоимость продукции других отраслей, затраченной при производстве в j-ой отрасли за этот период. Таким образом, Z_j – это добавленная стоимость j-ой отрасли. Часто Z_j называют также амортизацией.

Некоторые из величин Z_j могут оказаться отрицательными. Это означает, что соответствующие отрасли являются убыточными.

Несложно доказать следующее балансовое соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j ,$$

которое не имеет особенного экономического смысла, однако, часто используется для проверки правильности предшествующих расчетов.

Рассмотренные величины принято записывать в виде табл. 2.1, которую называют *таблицей межотраслевого баланса*.

Таблица 2.1

Отрасли	1 2 ……. N	Конечная продукция	Валовая продукция
1 2 : n	X_{11} X_{12} …. X_{1n} X_{21} X_{22} …. X_{2n} : : : : X_{n1} X_{n2} …. X_{nn}	Y_1 Y_2 : Y_n	X_1 X_2 : X_n
Чистая продукция	Z_1 Z_2 …. Z_n	$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$	
Валовая продукция	X_1 X_2 …. X_n		

Основным балансовым соотношением МОБ называют следующее

$$\widetilde{X} \cdot \bar{1} + Y = X . \tag{2.1}$$

2.2. Матричная форма записи модели межотраслевого баланса

Примем следующую гипотезу: прямые затраты пропорциональны валовому выпуску. То есть если, например, для выпуска 1000 автомобилей требуется 600 т стали, 400 МВт/ч электроэнергии, 5 т резины и т.д., то для выпуска 2000 автомобилей всего этого понадобится в два раза больше.

В этой гипотезе имеется некоторый элемент идеализации, однако, очевидно, что она достаточно точно соответствует действительности, что-бы ее можно было использовать для составления модели.

В качестве *оценок* коэффициентов этой пропорциональности, очевидно, можно взять величины

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}, \; i, j = \overline{1, n} . \tag{2.2}$$

То есть использовать имеющиеся отчетные данные. Величины (2.2) так и называют – коэффициенты прямых затрат. А матрицу, составленную из них

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называют *матрицей коэффициентов прямых затрат*, или чаще *производственной*, или *технологической* матрицей, так как фактически она выражает сложившуюся структуру производственных взаимосвязей экономики.

Используя производственную матрицу МОБ, можно записать в следующей матричной форме:

$$AX + Y = X . \tag{2.3}$$

Это соотношение называют *основным балансовым соотношением МОБ в матричной форме*.

Из (2.3) получаем

$$Y = X - AX = (E - A)\, X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = (E - A)\, X} \tag{2.4}$$

Последнее соотношение позволяет ответить на следующий очень важный вопрос: каким должен быть запланирован вектор валового выпуска X, чтобы получить заданный желаемый вектор конечного продукта Y? Отметим, что ответить на этот вопрос без использования описываемой матричной модели практически невозможно.

Производственная матрица A играет очень важную роль в рассматриваемой теории. В частности, используется следующее понятие.

***Определение* 2.1.** Производственная матрица называется продуктивной, если любому неотрицательному вектору Y по соотношению (2.4) будет соответствовать неотрицательный вектор X.

Не отрицательность векторов в данном случае, очевидно, означает их физическую реализуемость. То есть экономика является продуктивной, если она может реализовать любой физически реализуемый вектор конечного продукта. Считается, что если производственная матрица некоторой экономики является непродуктивной, то такая экономика неустойчива к кризисам, не имеет хороших перспектив поступательного развития и т.д.

Очевидно, справедлив следующий признак продуктивности производственной матрицы.

***Теорема* 2.1.** Для того чтобы матрица A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $B = (E - A)^{-1}$, причем все ее элементы были бы положительны.

Справедлива и следующая теорема, дающая, однако, только *достаточное* условие продуктивности.

***Теорема* 2.2.** Для того чтобы матрица A была продуктивной, достаточно, чтобы сумма элементов любого ее столбца была бы меньше единицы.

Производственная матрица может оказаться продуктивной и если не выполняется указанное здесь условие. То есть оно не так однозначно, как предыдущее. Однако ясно, что проверка продуктивности по этому условию проще, поскольку не требуется обращения матрицы.

2.3. Матрица полных затрат

Уже из сказанного следует, что большое значение в анализе балансовых моделей имеет также матрица

$$B = (E - A)^{-1},$$

называемая *матрицей полных затрат*. Попытаемся пояснить это ее название.

Во-первых, вспомним известную формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$a + a\,q + a\,q^2 + a\,q^3 + \dots = \frac{a}{1-q}.$$

Оказывается, что при определенных условиях, аналогичная формула справедлива и для матриц

$$Y + AY + A^2 Y + \dots = \frac{Y}{E - A} = (E - A)^{-1} Y.$$

А тогда видим, что

$$X = (E - A)^{-1} Y = Y + AY + A^2 Y + \dots$$

То есть валовой продукт X, соответствующий некоторому вектору конечного продукта Y, может быть представлен в виде суммы следующих составляющих:

1) Y – собственно конечный продукт;
2) AY – так называемые прямые затраты на изготовление продукции в количестве Y;
3) A^2Y – так называемые косвенные затраты первого порядка. Например, при производстве автомобилей, непосредственно на заводе расходуется электричество, сталь, стекло и т.д. – это прямые затраты. Но при производстве этой стали, стекла, электричества также использовалось, например, электричество – это косвенные затраты первого порядка;
4) A^3Y – косвенные затраты второго порядка;
5) и т.д., и т.д.

Это и поясняет указанное название.

По аналогии с затратами продукции можно говорить и о прямых, косвенных и полных затратах, например, труда. Обозначим через t_j – прямые затраты труда (в чел. /ч) на выпуск продукции на 1 р. в j-ой отрасли, а через T_j – соответствующие полные затраты труда, включающие косвенные. Тогда должно иметь место соотношение

$$T_j = t_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i,$$

которое, в матричной форме, запишется в виде

$$T = t + A^T T,$$

где

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix};$$

отсюда

$$T = (E - A^T)^{-1} t = [(E - A)^{-1}]^T t = B^T t.$$

Это соотношение позволяет, зная вектор *прямых затрат труда*, вычислить вектор *полной трудоемкости продукции* отраслей. Ясно, что это весьма важный показатель для анализа состояния экономики. Считается, что в хорошо сбалансированной экономике этот показатель не должен сильно различаться по отраслям.

Весьма важно отметить, что рассчитать этот показатель точно без использования методики межотраслевого баланса фактически невозможно.

Аналогично вычисляются такие важные показатели как:

- полная фондоемкость продукции отрасли – $\overline{\Phi} = B^T \Phi$, где Ф – вектор фондоемкости по отраслям;
- полная зарплатоемкость – $\overline{З} = B^T З$, где З – вектор прямых затрат на оплату труда в отраслях;
- полная энергоемкость, материалоемкость, и т.д., и т.д.

Важным является следующее, поскольку

$$X_i = b_{i1}Y_1 + b_{i2}Y_2 + ... + b_{in}Y_n\,,\ i = \overline{1,n}\,,$$

где b_{ij} – элементы матрицы B , то

$$\frac{\partial X_i}{\partial Y_j} = b_{ij} \approx \frac{\Delta X_i}{1}\,,$$

т.е. b_{ij} приближенно показывает, на сколько должно возрасти (или уменьшится) производство продукции i-ой отрасли, для изменения конечной продукции j-ой отрасли на единицу. Это экономически важный и практически интересный показатель. Часто отмечают, что в этом состоит экономический смысл элементов матрицы полных затрат.

В частности, если задано желаемое изменение вектора конечного продукта $\Delta Y = (\Delta Y_1, \Delta Y_2, \ldots, \Delta Y_n)$, то соответствующее необходимое изменение вектора валового выпуска продукции можно найти по выражению

$$\Delta X = B \times \Delta Y\,.$$

В качестве развития рассматриваемой модели, имеются ее динамические варианты, которые также приводят к ряду очень интересных результатов.

Модели межотраслевых производственных связей позволяют, таким образом, количественно определить соответствие между действующими ценами и трудовыми затратами на производство продукции. Так, если коэффициент полных затрат на рубль продукции в некоторой отрасли значительно отклоняется от среднего уровня, то это свидетельствует о больших отклонениях цены от реальной полной трудоемкости ее продукции. Используя такую информацию, органы государственного управления могут и должны влиять на рост или снижение цен на продукцию соответствующих отраслей.

2.4. Пример использования МОБ

Пусть экономика некоторого субъекта укрупненно представлена тремя отраслями (например, промышленное производство, сельское хозяйство и экспорт-импорт). Матрица прямых затрат в денежном выражении $\widetilde{X}$ и вектор валового выпуска X имеют вид:

$$XX = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 30 \\ 5 & 15 & 70 \\ 25 & 40 & 40 \end{bmatrix}; \qquad X = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 135 \end{bmatrix}.$$

Выполнить следующее:

1. Кратко описать сущность модели межотраслевого баланса.
2. Вычислить вектор-столбец конечного продукта Y и вектор-строку Z условно-чистого продукта, проверить выполнение балансового соотношения между ними, составить таблицу межотраслевого баланса.
3. Построить производственную матрицу A и записать систему балансовых соотношений в матричной форме (проверить ее выполнение).
4. Вычислить матрицу полных потребностей продукции отраслей $B = (E - A)^{-1}$, выяснить продуктивна ли производственная матрица.
5. Пусть даны:

- вектор-столбец прямых затрат по оплате труда на 1 р. продукции

$$h = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}35 \\ 0{,}35 \end{pmatrix};$$

- вектор-столбец прямых затрат (в чел. /ч) труда на 1 р. продукции

$$t = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}23 \end{pmatrix};$$

- вычислить полную трудоемкость и зарплатоемкость продукции по отраслям.

6. Пусть известно, что на следующий год планируется изменить вектор конечного продукта на величину

$$\Delta Y = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Как должен быть изменен вектор валового выпуска?

Решение.

1. Модель межотраслевого баланса является классическим примером макроэкономической модели. Первые ее варианты появились еще в 10 – 20-х гг. XX в., и далее имело место их развитие и весьма плодотворное использование на протяжении всего последующего периода как за рубежом, так и в СССР и в социалистических странах.

Основная идея этой модели – разбиение экономики некоторой достаточно крупной экономической системы (государства, региона или крупного концерна) на n взаимосвязанных отраслей, которые в ходе производства используют продукцию друг друга. Соответствующие балансовые соотношения, составляемые на основе статистики предшествующих периодов, позволяют решать такие задачи, как:

– планировать необходимый валовой выпуск продукции при заданном объеме конечной продукции отраслей;

– рассчитывать такие важные экономические показатели, как полная зарплатоемкость, полная трудоемкость, фондоемкость и т.д.;

– проводить общий анализ структуры экономики, необходимый для оценки ее устойчивости, перспектив развития и т.д.;

– ставить и решать различные оптимизационные задачи промышленного производства.

2. Вычисляем вектор-столбец конечного продукта Y

$$Y := X - XX\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15\\10\\30\end{bmatrix},$$

вектор-строку Z условно-чистого продукта

$$Z = X^T - \overline{1^T}\,\widetilde{X} = \begin{pmatrix}30 & 30 & -5\end{pmatrix}.$$

Проверяем выполнение баланса между ними

$$\sum_{i=0}^{2} Y_i = 55\ ; \qquad \sum_{i=0}^{2} Z_i = 55.$$

Видим, что баланс выполняется.

3. Строим производственную матрицу

$$A = \begin{bmatrix}0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}222\\ 0{,}063 & 0{,}15 & 0{,}519\\ 0{,}313 & 0{,}4 & 0{,}296\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{20} & \frac{2}{9}\\ \frac{1}{16} & \frac{3}{20} & \frac{14}{27}\\ \frac{5}{16} & \frac{2}{5} & \frac{8}{27}\end{bmatrix}.$$

Проверяем выполнение баланса

$$X - A\,X - Y = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

4. Вычисляем матрицу полных потребностей продукции отраслей $B = (E - A)^{-1}$. Получаем

$$B = \begin{bmatrix}1{,}978 & 0{,}984 & 1{,}35\\ 1{,}043 & 2{,}32 & 2{,}039\\ 1{,}471 & 1{,}756 & 3{,}179\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3376}{1707} & \frac{560}{569} & \frac{768}{569}\\ \frac{1780}{1707} & \frac{1320}{569} & \frac{1160}{569}\\ \frac{837}{569} & \frac{999}{569} & \frac{1809}{569}\end{bmatrix}.$$

Сделаем проверку. Действительно,

$$B\left(E - A\right) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Видим, что все элементы матрицы B положительны, следовательно, рассматриваемая производственная матрица A является продуктивной. Это считается необходимым условием структурной устойчивости рассматриваемой экономики.

5. Далее находим:

– вектор полной трудоемкости

$$T := B^T t = \begin{bmatrix}0{,}745\\ 0{,}966\\ 1{,}274\end{bmatrix};$$

– вектор полной зарплатоемкости

$$Z := B^T h = \begin{bmatrix}1{,}374\\ 1{,}672\\ 2{,}164\end{bmatrix}.$$

6. Если известно, что на следующий год планируется изменить вектор конечного продукта на

$$dY = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix},$$

то вектор валового выпуска должен измениться на

$$dX := B\,dY = \begin{bmatrix} 10{,}414 \\ 13{,}784 \\ 14{,}591 \end{bmatrix}.$$

Задача решена.

Вопросы для самопроверки

1. Какие экономические данные являются исходными для составления межотраслевого баланса?
2. Что выражают элементы матрицы прямых затрат?
3. Что выражают элементы матрицы коэффициентов прямых затрат?
4. Что означает непродуктивность производственной матрицы?
5. Что такое косвенные затраты? Приведите пример.
6. Как связаны элементы матрицы полных затрат и производственной матрицы?
7. Можно ли, зная матрицу полных затрат, найти производственную матрицу?
8. В чем состоит экономический смысл элементов матрицы полных затрат?

3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ПРЕДЕЛЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Так называемый, *математический анализ* – это центральный раздел курса высшей математики. При этом подразумевается математический анализ поведения каких-либо функций. Дело в том, что именно на основе функций чаще всего строятся математические модели различных процессов и явлений. И выявление имеющихся у функций такой модели свойств дает информацию и о свойствах самого изучаемого процесса.

Прежде чем изучать основные методы математического анализа, необходимо усвоить целый ряд вспомогательных понятий, чему и посвящена данная тема [1, 4].

3.1. Понятие числовой последовательности и их классификация

Важную роль в некоторых разделах математики играет следующее понятие.

***Определение* 3.1**. Если каждому числу из бесконечного ряда чисел, называемого *натуральным рядом*: 1, 2, 3, … , n, …, поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n, то упорядоченная совокупность таких чисел x_1, x_2, …, x_n, …, называется *числовой последовательностью*, или просто последовательностью. Числа $x_i, i = 1,...,\infty$ называются *элементами* этой последовательности.

***Определение* 3.2.** Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее i-го элемента.

Условно последовательность из элементов $x_i, i = 1,...,\infty$ обозначают так: $\{x_i\}$. Важно отметить, что в последовательности элементы являются упорядоченными, их нельзя произвольно менять местами.

Примером числовой последовательности может являться любой ряд каких-либо данных. Например, экономических, упорядоченных, например, по времени. Пусть 23,5 тыс. р., 25,3 тыс. р., 29,0 тыс. р., 22,4 тыс. р. … – объемы продаж некоторого товара, начиная с первого числа какого-то месяца. Реальные примеры последовательностей имеют тот недостаток, что фактически могут быть известными лишь конечное количество элементов. Однако формально это не противоречит определению 3.2, если способ определения элементов все же определен.

В математике обычно изучаются последовательности, элементы которых можно задать в виде формулы, зависящей от номера этого элемента, то есть от n. Например,

$$x_n = \frac{5}{n+2}, \quad n = 1, 2, ..., \infty, \quad \text{то есть} \quad x: \frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ 1,\ \frac{5}{6},\ ... \ .$$

Эту же последовательность можно записать так: $\{x_n\} = \left\{\frac{5}{n+2}\right\}$. Такой способ определения последовательностей можно считать упрощенным, но он вполне достаточен для целей математического анализа.

Важными являются следующие определения, вводящие различные свойства (характеристики) числовых последовательностей. Соответственно эти свойства порождают классификацию последовательностей.

***Определение* 3.3.** Последовательность $\{x_i\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует такое число M, что все ее элементы удовлетворяют неравенству

$$x_n \le M \ \ (x_n \ge M).$$

В высшей математике, особенно в математическом анализе, широко используются так называемые *предикаты*, или *кванторы*, – это специальные символы, заменяющие часто встречающиеся слова и выражения. Например,

$\exists$ – читается, как *существует*, или *найдется*;
$\forall$ – *любой*, или *для любого*;
! – *единственный*;
$\Rightarrow$ – *следовательно*, или *тогда выполняется*;
: – – *такой, что*;
$\Leftrightarrow$ – *равносильно*, или *тогда и только тогда, когда*.

Предикаты позволяют резко сократить формулировки различных теорем и их доказательств. И упрощают (а не усложняют!) их восприятие. Например, используя язык кванторов, предыдущее определение можно записать так.

***Определение* 3.3а.** $\{x_i\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists\ M > 0\ :\forall\ n\ \Rightarrow x_n \le M\ .$$

***Определение* 3.4.** Последовательность $\{x_i\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу.

Пример.
а) $\{-n\}$ – ограничена сверху, но не ограничена снизу, и поэтому не является ограниченной;

б) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – ограничена;

в) $\{(-1)^n n\}$ – не ограничена ни сверху, ни снизу.

***Определение* 3.5.** Последовательность называется *бесконечно малой* (*бесконечно большой*), если для любого сколь угодно малого число $\varepsilon > 0$ (сколь угодно большого $M > 0$), найдется такой номер N, что все последующие элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| \le \varepsilon$ ($|x_n| \ge M$).

Например, последовательность из пункта а) предыдущего примера является *бесконечно большой*, из пункта б) – бесконечно малой.

Аналогичным образом можно ввести строгие математические определения *монотонно возрастающей*, *монотонно убывающей*, *невозрастающей* и *неубывающей* последовательностей, однако, мы не будем этого делать, так как эти свойства достаточно очевидны. Проделайте это самостоятельно, в качестве упражнения.

3.2. Арифметические действия над числовыми последовательностями

Над множеством числовых последовательностей определяются некоторые операции, а именно:

***Определение* 3.6.** Последовательность $\{z_i\}$ называется суммой числовых последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, если

$$z_i = x_i + y_i,\ i = 1, 2, ..., \infty .$$

При этом пишут

$$\{z_i\} = \{x_i\} + \{y_i\} .$$

***Определение* 3.7.** Последовательность $\{z_i\}$ называется разностью числовых последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, если

$$z_i = x_i - y_i,\ i = 1, 2, ..., \infty .$$

При этом пишут

$$\{z_i\} = \{x_i\} - \{y_i\} .$$

***Определение* 3.8.** Последовательность $\{z_i\}$ называется произведением числовых последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, если

$$z_i = x_i\, y_i,\ i = 1, 2, ..., \infty .$$

При этом пишут

$$\{z_i\} = \{x_i\}\{y_i\} .$$

***Определение* 3.9.** Последовательность $\{z_i\}$ называется частным числовых последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, если

$$z_i = x_i / y_i,\ \ i = 1, 2, ..., \infty .$$

При этом пишут

$$\{z_i\} = \{x_i\} / \{y_i\} .$$

***Определение* 3.10**. Последовательность $\{z_i\}$ называется результатом возведения последовательности $\{x_i\}$ в степень $\{y_i\}$, если

$$z_i = x_i^{\,y_i},\ i = 1, 2, ..., \infty .$$

При этом пишут

$$\{z_i\} = \{x_i\}^{\{y_i\}} .$$

Важными для понимания введенных понятий являются следующие несложные теоремы, доказательства которых можно найти в учебниках [Красс].

***Теорема* 3.1.** Сумма или разность двух бесконечно малых последовательностей (б.м.п.) является бесконечно малой последовательностью (б.м.п.).

***Теорема* 3.2.** Пусть $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$– б.м.п., тогда $\{z_i\} = \{x_i\}\{y_i\}$ – б.м.п.

***Теорема* 3.3.** Произведение б.м.п. и ограниченной последовательности есть б.м.п.

Доказательство:

Пусть $\{x_i\}$ – ограниченная, то есть $\exists\ M > 0\ : \forall\ n\ \Rightarrow x_n \le M$. Пусть $\{y_i\}$ – б.м.п., тогда $\forall \varepsilon > 0, M > 0\ \ \exists N : \forall n \ge N \Rightarrow \left| x_n \right| \le \dfrac{\varepsilon}{M}$. Но тогда, начиная с этого же номера N, выполняется

$$\forall n \ge N \Rightarrow \left| z_n \right| = \left| x_n\, y_n \right| \le \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon .$$

То есть $\{z_n\} = \{x_n\}\{y_n\}$ – б.м.п. Что и требовалось доказать.

3.3. Предел последовательности

Важнейшим понятием математики является понятие *предела*. Введем определение *предела последовательности*.

***Определение* 3.11.** Конечное число a называется пределом последовательности $\{x_i\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\quad \exists N :\quad \forall n \ge N ,\quad \text{выполняется}\ \left| a - x_n \right| < \varepsilon .$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, иначе *расходящейся*.

Если a есть предел последовательности $\{x_i\}$, то это символически записывают так

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a .$$

При этом говорят, что последовательность $\{x_i\}$ сходится к a, или стремится к a, при n стремящемся к бесконечности. Это записывают следующим образом

$$x_n \to a\ ,\ \text{при}\ \ n \to \infty .$$

Пример. Достаточно очевидно, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0, \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2.$$

Иногда используют другую, полностью эквивалентную первой, форму определения предела последовательности, которая дает данному понятию весьма хорошую геометрическую иллюстрацию.

***Определение* 3.12.** Назовем ε – окрестностью (читается: «эпсилон-окрестность») точки a, принадлежащей действительной числовой оси – $a \in R^1$, интервал вида

$$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon).$$

***Определение* 3.13. (второе определение предела последовательности).** Конечное число a называется пределом последовательности $\{x_i\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, начиная с которого все последующие элементы последовательности будут находиться в ε-окрест-ности точки a.

Очевидно, что неограниченная последовательность не имеет предела. Однако часто для простоты и сокращения формулировок *формально* говорят, что неограниченная последовательность имеет бесконечный предел, и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Например,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$

Следует запомнить, что в строгом смысле, под пределом всегда подразумевается конечное число. То есть если, например, говорят, что последовательность имеет предел, то это означает, что данный предел конечен.

Справедливы теоремы.

***Теорема* 3.4.** Если последовательность имеет предел, то он единственен.

Доказательство. Предположим, имеется два предела, то есть одновременно $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. Тогда, по определению

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N: \quad \forall n \geq N,$$

выполняется

$$\left|a-x_n\right|<\varepsilon/2 \ \text{ и } \left|b-x_n\right|<\varepsilon/2.$$

Используя свойства модулей, отсюда получаем

$$\left|a-b\right|=\left|a-x_n+x_n-b\right|<\left|a-x_n\right|+\left|b-x_n\right|=\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

То есть неравенство $\left|a-b\right|<\varepsilon$ выполняется для любого $\varepsilon > 0$, а следовательно $a = b$. Что и требовалось доказать.

***Теорема* 3.5.** Сходящаяся последовательность ограничена.

***Теорема* 3.6.** Монотонно возрастающая или монотонно убывающая ограниченная последовательность сходится.

3.4. Теоремы о пределах последовательностей

Большинство задач по теории числовых последовательностей представляют собой задачи на нахождение пределов этих последовательностей. Как следует из примера предыдущего пункта, часто пределы (если они существуют) находятся весьма просто. Однако если элементы последовательности заданы достаточно сложными выражениями, то для формально строгого построения соответствующих выкладок, очень важна следующая теорема. Эта теорема фактически содержит в себе несколько утверждений, поэтому мы будем называть ее теоремами о пределах последовательностей.

***Теорема* 3.7. (теоремы о пределах последовательностей).** Пусть имеются пределы

$$x_n \to a \ \text{ и } \ y_n \to b \quad \text{при } n \to \infty.$$

Тогда при соответствующих условиях предел суммы этих последовательностей равен сумме их пределов, предел разности – разности пределов, предел частного – частному пределов, предел произведения – произведению пределов и т.д. То есть, при $n \to \infty$:

а) $z_n = x_n \pm y_n \to a \pm b$;

б) $z_n = x_n \times y_n \to ab$;

в) $z_n = x_n / y_n \to a/b$, если только $b \neq 0$;

г) $z_n = {x_n}^{y_n} \to a^b$, исключая случай $a = b = 0$.

Не будем останавливаться на строгом доказательстве этого интуитивно понятного утверждения, оно рутинно и полностью основано на определении предела числовой последовательности.

Укажем еще раз, что a и b в теореме 3.7 считаются конечными.

***Пример*.** Найти предел, если он существует:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2-3}-\left(3+\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{n^3}-2}\right)=\ldots$$

видим, что пределы всех составляющих этого выражения существуют и конечны, тогда по теоремам о пределах, получаем

$$... = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2-3}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^3}-2\right)} = 0 - 3^{-2} = -\frac{1}{9}.$$

3.5. Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы

В некоторых случаях, и при нарушении условий теорем о пределах, результат предельного перехода в том или ином выражении вполне ясен. Например, вполне очевидно, что

$$\infty + \infty = \infty,\ \ \infty \cdot \infty = \infty,\ \ \frac{a}{0} = \infty,\ \ a^{\infty} = \infty,\ \ \sqrt{\infty} = \infty.$$

Отметим, что эти выражения носят лишь формальный смысл, позволяя только коротко записать (обозначить, выразить) соответствующий факт. Однако, их вполне допустимо использовать в записях решения соответствующих задач.

В некоторых же подобных случаях результат не ясен. Такие случаи называют *неопределенностями*, и выделяют следующие основные виды неопределенностей:

$$\infty - \infty,\ \ \infty \cdot 0,\ \ \frac{0}{0},\ \ \frac{\infty}{\infty},\ \ 1^{\infty},\ \ 0^{0}.$$

Оказывается во многих случаях этих неопределенностей, на самом деле существует вполне конкретный конечный предел. Его нахождение, или выявление того, что конечного предела нет, называют *раскрытием неопределенности*. Именно задачи на раскрытие неопределенностей и являются наиболее интересными и содержательными в теории пределов последовательностей.

Раскрытие неопределенностей обычно возможно на основе использования:

1. Подходящих алгебраических преобразований исходного выражения, например:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3} = a$.

Видим, что это неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применим очень часто используемый прием – деления числителя и знаменателя на старшую степень, в данном случае на n^2, получаем

$$a = \lim_{n\to\infty}\frac{3+2/n+4/n^2}{4+1/n-3/n^2}.$$

Видим, что теперь можно использовать теоремы о пределах, то есть – записать искомый предел в виде

$$a = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+2/n+4/n^2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+1/n-3/n^2\right)} = \frac{3+0+0}{4+0-0} = \frac{3}{4};$$

б) $a = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n-2}\right)$.

Видим, что это неопределенность вида $\infty - \infty$. Применим другой часто используемый прием – умножения и деления на сопряженный множитель, в данном случае на $\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n-2}\right)$, получаем

$$a = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n-2}\right)}{\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n-2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n-2}} = ...,$$

теперь аналогично предыдущему пункту, делим числитель и знаменатель на n, тогда

$$... = \lim_{n\to\infty}\frac{1+3/n}{\sqrt{2/n+1/n^2}+\sqrt{1/n-2/n^2}} = \frac{1}{0} = \infty,$$

последние два равенства следует понимать условно. Отметим, что в этом примере мы не получили выражения, для которого применимы теоремы о пределах. Однако неопределенность раскрыта, в том смысле, что результат в итоге преобразований сделался ясным.

2. Так называемых *замечательных пределов*. Так называют несколько известных пределов, формально являющихся неопределенностями, которые тем не менее раскрываются, в результате соответствующих, достаточно не простых, построений. К ним относятся пределы.

***Теорема* 3.8 (первый замечательный предел).**

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

***Теорема* 3.9 (второй замечательный предел).**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e,$$

где $e \approx 2{,}7182818284...$ – известная, часто встречающаяся, иррациональная константа, называемая *экспонентой* [щип].

***Следствие* 3.1 (третий замечательный предел).**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 .$$

***Следствие* 3.2 (четвертый замечательный предел).**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{\alpha^{n}}=0 \text{ , если } \alpha>1 .$$

Использование замечательных пределов при решении задач состоит в том, что исходные выражения с помощью алгебраических преобразований приводят к виду, соответствующему одному из них. И используя этот предел, находят результат.

Пример.

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{7}{n}\right)^{n/2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n/7}\right)^{\frac{-n}{7}\frac{7}{-n}n/2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n/7}\right)^{\frac{-n}{7}(-7/2)}=e^{(-7/2)}\ -$$

использован второй замечательный предел;

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{2^{n}}\right)^{2/n}=....$ – в соответствии с четвертым замечательным пределом, видим, что это неопределенность вида 0^0. Преобразуя, получаем

$$...=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)^2}}{2^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n+1}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} .$$

3.6. Понятие функции и способы ее задания. Элементарные и сложные функции

Одним из важнейших понятий высшей математики является следующее.

***Определение* 3.14.** *Функцией f одного аргумента x* называется *закон*, по которому однозначно сопоставляется каждому числу x из некоторого допустимого множества $D(f)\in R^1$, называемого *областью определения* этой функции, некоторое число $y\in R^1$, называемое *значением* функции. При этом пишут

$$y=f(x).$$

Функции их значения и аргументы, как правило, обозначают строчными буквами латинского алфавита, например, обозначение $y=f(x)$ читается как «ИГРЕК равно функция ЭФ от ИКС». Здесь y – значение функции, f – сама функция, x – ее аргумент. Говорят также, что функция *f зависит* от аргумента x.

***Определение* 3.15.** Множество всех возможных значений функции называется *областью значений* этой функции, и обычно обозначается $V(f)$.

Задать, или как говорят определить, функцию можно по-разному:

- *таблично*, когда перечисляются все возможные значения аргумента и рядом записываются соответствующие значения функции. Ясно, что такой способ практивозможен только, если множество определения функции состоит из *конечного количества* значений аргумента, и притом небольшого количества. Примерами могут служить различные таблицы, используемые, в частности, в экономике. Вроде соответствия процента перевыполнения плана и величины премии, и т.д.
- *графически*, то есть с помощью изображения на чертеже соответствия между точками $D(f)$ и точками $V(f)$. Это изображение называется графиком функции, и говорят, что функция задана графически. Ясно, что такой способ возможен только, если множество определения $D(f)$ функции является ограниченным. К тому же графическое задание является приближенным. Тем не менее, оно широко используется, особенно в инженерной практике (различные справочные кривые и т.д.).
- *аналитически*, то есть помощью формул. Например, $y=x^2$, $y=\sin^{3,5}(x-17)$, или

$$f(x)=\begin{cases}x^3-7 & \text{при} \quad x<-5;\\ 1/(x+10) & \text{при} \quad 10\ge x>-5;\\ 3 & \text{при} \quad x>10,\end{cases}$$

и т.д.

Аналитическое определение наиболее универсально, и поэтому в высшей математике почти всегда изучаются функции, заданные именно таким образом.

Важным в теории функций является понятие *элементарных* функций. Основными элементарными функциями являются следующие:

1. *Линейная*: $y=ax+b$, где a, b – некоторые действительные числа.
2. *Степенная*: $y=x^{\alpha}$, где α – некоторое действительное число.
3. *Показательная*: $y=a^{x}$, где a – некоторое положительное число.
4. *Логарифмическая*: $y=\log_a x$, где так называемое основание логарифма a – положительное число, не равное единице. В частности, при $a=e$, получается, так называемый, натуральный логарифм $y=\ln x$.
5. *Тригонометрические*:

$$y = \sin(x); \quad y = \mathrm{tg}(x); \quad y = \sec(x);$$
$$y = \cos(x); \quad y = \mathrm{ctg}(x); \quad y = \mathrm{cosec}(x).$$

6. *Обратные тригонометрические*:

$$y = \arcsin(x); \quad y = \mathrm{arctg}(x); \quad y = \mathrm{arcsec}(x);$$
$$y = \arccos(x); \quad y = \mathrm{arcctg}(x); \quad y = \mathrm{arccosec}(x).$$

Существуют и другие функции, относящиеся к элементарным, которые, однако, встречаются весьма редко.

***Определение* 3.16.** Функция $f(x)$ называется суперпозицией функций $g(z)$ и $q(x)$, если $f(x) = g(q(x))$.

Аналитически заданные функции, не являющиеся элементарными, называются *сложными* и могут рассматриваться, как результат суперпозиций и арифметических действий над элементарными функциями.

3.7. Предел функции в точке

Понятие предела функции в точке является одним из фундаментальных понятий математического анализа. На этом понятии основаны самые важные определения, в частности, центрального понятия дифференциального исчисления – понятия *производной функции*. Поэтому мы приведем сразу два эквивалентных [иль] определения предела, поясняющих его с различных сторон.

***Определение* 3.17 (предела функции по Гейне).** Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности значений аргумента сходящейся к x_0, соответствующая последовательность значений функции сходится к a.

***Определение* 3.18 (предела функции по Коши).** Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in D(f)$ удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

При этом пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

или

$$f(x) \to a, \text{ при } x \to x_0.$$

Используя математическую символику, это же определение можно записать так: a – предел $f(x)$ в точке $x = x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x: |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Во всех этих определениях два обстоятельства являются самыми важными:

1) то, что значение x_0 может и не принадлежать области определения функции. То есть в самой этой точке значения функции может и не существовать, а предел может существовать, – в этом заключена большая гибкость введенного понятия, дающая возможность решать задачи неразрешимые нематематическими методами. В понятии предельного перехода заключена вся суть дифференциального исчисления функций;

2) то, что аргумент x может, стремясь к x_0, каким угодно образом «приближаться» к этому значению. И если независимо от способа приближения аргумента к x_0 результат остается тем же самым, то предел действительно существует.

Как и в случае предела последовательности, в строгом смысле, под пределом функции в точке подразумевается конечное число. Однако часто, для упрощения, пользуются понятием *бесконечного предела*, и соответствующими обозначениями:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

Как и в случае предела последовательности, часто нахождение пределов значений функции в точке не вызывает затруднений.

Пример.

$$1.\ \lim_{x \to 2}(x^2 + 1) = 5; \qquad 2.\ \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 1}{2} = 5.$$

Для пределов функций справедливы теоремы, абсолютно аналогичные теоремам о пределах последовательностей. Они также используются для формально строгого решения задач на нахождение пределов, в случае достаточно сложных выражений.

***Теорема* 3.10 (теоремы о пределах функций).** Пусть существуют пределы

$$f(x) \to a \text{ и } g(x) \to b \quad \text{при } x \to x_0.$$

Тогда при соответствующих условиях, предел суммы этих функций равен сумме их пределов, предел разности – разности пределов, предел частного – частному пределов, предел произведения – произведению пределов и т.д., то есть, при $x \to x_0$:

а) $q(x) = f(x) \pm g(x) \to a \pm b$;

б) $q(x) = f(x) \times g(x) \to a \times b$;

в) $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b}$, если только $b \neq 0$;

г) $q(x)=f(x)^{g(x)}\to a^b$, исключая случай $a=b=0$.

Аналогично, некоторые случаи, когда не выполняются условия теорем о пределах, приводят к неопределенностям, которые, если это возможно, раскрываются с помощью преобразований и замечательных пределов. Последние же в случае функций записываются в виде.

***Теорема* 3.11 (первый замечательный предел)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

***Теорема* 3.12 (второй замечательный предел)**

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Пример.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\ldots$,

используем известную тригонометрическую формулу

$$\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\ldots;$$

теперь, по теореме о произведении пределов функций и первому замечательному пределу

$$\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=1\cdot 0=0.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x=\ldots$,

сделаем замену переменных $t=\dfrac{3}{x}$, тогда

$$\ldots=\lim_{x\to 0}(1-t)^{3/t}=\left(\lim_{x\to 0}(1-t)^{1/t}\right)^3=e^3.$$

3.8. Односторонние пределы и непрерывность функции

Можно рассмотреть предел функции, когда считается, что аргумент x стремясь к x_0, все время остается больше, или наоборот – меньше, этого значения. Тогда говорят, что рассматривается *односторонний предел*. Их соответственно так и называют: правосторонний и левосторонний пределы: функции в точке, и используют обозначение

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=a,$$

или соответственно,

$$\lim_{x\to x_0-}f(x)=a.$$

Формально, определение, например, левостороннего предела формулируется так. Будем использовать подход Коши, так как он является стандартным для математического анализа.

***Определение* 3.19 (предела функции слева).** Число a называется пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0 слева, если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\quad\forall x:\ x-x_0<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x)-a|<\varepsilon.$$

Вычисление односторонних пределов функций мало отличается от вычисления обычных.

Пример. Найдем односторонние пределы функции

$$y=\begin{cases}x+10 & \text{при } x\le -5;\\ \dfrac{x^2-10}{3} & \text{при } -5<x\le 3;,\\ \ln(x)+2 & \text{при } 3<x\end{cases}$$

в точках $x=-5$ и $x=3$. Находим

$$\lim_{x\to -5-0}(x+10)=-5+10=5;\qquad \lim_{x\to -5+0}\left(\frac{x^2-10}{3}\right)=\frac{25-10}{3}=5;$$

$$\lim_{x\to 3-0}\left(\frac{x^2-10}{3}\right)=\frac{9-10}{3}=-\frac{1}{3}; \qquad \lim_{x\to 3+0}\left(\ln(x)+2\right)=\ln(3)+2\approx 3{,}098.$$

Для наглядности построим график этой функции на интервале $x \in [-10, 10]$ (рис. 3.1).

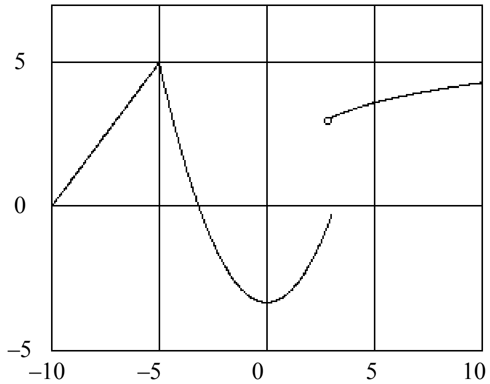


Рис. 3.1

Выколотая точка на этом графике необходима, чтобы подчеркнуть необходимый факт, следующий из определения понятия функции. А именно, что функция есть *однозначное* сопоставление значению аргумента – значения функции. Задача решена.

С односторонним пределом связано следующее важнейшее понятие.

Определение **3.20 (непрерывность функции).** Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в т. x_0, если оба ее односторонних предела в этой точке равны, то есть

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{x\to x_0-} f(x)\ .$$

Точку x_0 при этом называют точкой непрерывности функции $f(x)$.

Определение **3.21 (точек разрыва функции).** Если $x_0 \in D(f)$ и не является точкой непрерывности функции $f(x)$, то ее называют точкой разрыва этой функции. Причем, если оба односторонних предела функции в этой точке не равны и конечны, то она называется точкой разрыва I-го рода. Если хотя бы один из этих односторонних пределов бесконечен, то – точкой разрыва II-го рода.

Функция, график которой приведен на рис. 3.2, является разрывной в точке x_0 и является непрерывной, например, в точке x_1. На рис. 3.3 приведен пример графика функции, имеющей разрыв II-го рода. Это обычная гипербола.

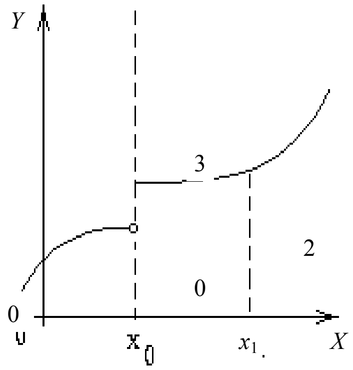


Рис. 3.2

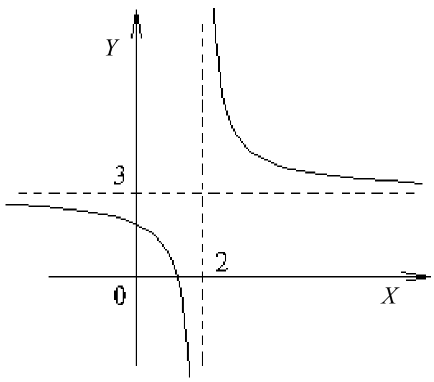


Рис. 3.3

Пример. Функция, рассмотренная в предыдущем примере, непрерывна в точке $x=-5$ и имеет разрыв I-го рода в точке $x=3$.

3.9. Определение производной функции

Перейдем к определению одного из важнейших в высшей математике понятий.

Определение **3.22.** Производной функции $f(x)$ в точке $x_0 \in D(f)$ называется предел, если он существует:

$$a=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ ,$$

где Δx называют приращением аргумента.

Иными словами, производная функции в точке – это предел отношения приращения значения функции в этой точке к приращению аргумента Δx, при стремлении последнего к нулю.

Несложно понять, что значение производной функции $f(x)$ зависит от точки x_0, в которой она рассчитывается, то есть производная сама является функцией аргумента x, и как функцию аргумента x, ее обозначают $f'(x)$. В случае, когда имеется необходимость указать, по какому именно аргументу ведется дифференцирование, – пишут $f'_x(x)$ или y'_x.

***Определение* 3.23.** Нахождение производной функции называется *операцией дифференцирования*, или просто *дифференцированием*.

***Определение* 3.24.** Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если она имеет в этой точке производную. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на отрезке* $[a,b]\in R^1$, если она имеет производную в любой точке этого отрезка.

***Теорема* 3.13**. (Необходимое условие дифференцируемости функции.) Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Очевидно, что дробь может стремиться к конечному числу, при стремящемся к нулю знаменателе, только если и числитель стремится к нулю.

Важно заметить, что предел в определении производной содержит неопределенность и именно вида $\frac{0}{0}$. Однако, как мы знаем, часто такие неопределенности в действительности являются вполне конкретным конечным числом. Таким образом, для нахождения производной некоторой функции $f(x)$ следует раскрыть соответствующую неопределенность. Если функция $f(x)$ задана сколько-нибудь сложным выражением, то необходимые преобразования могут оказаться трудновыполнимыми, или совсем невыполнимыми. Однако, если $f(x)$ достаточно простая функция, то они вполне осуществимы. И соответствующие задачи являются очень полезными для усвоения этого важнейшего, только что определенного, понятия производной функции.

Пример. Найти $f'(x)$, если:

1. $f(x)=x^2+2x$. По определению производной, необходимо найти предел

$$a=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-(x^2+2x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+2\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+2+\Delta x)=2x+2.$$

Таким образом, $f'(x)=2x+2$.

2. Найти производную функции $f(x) = \sin(x)$.

Находим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x)\cos(\Delta x)+\cos(x)\sin(\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=$$

$$=\sin(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}+\cos(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}=0+\cos(x).$$

Таким образом, $(\sin(x))'=\cos(x)$.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры числовых последовательностей реальных данных, для которых применимы операции сложения, вычитания, умножения на число и возведения в степень.
2. Приведите пример числовой последовательности реальных данных, которая является бесконечно малой последовательностью.
3. Приведите пример числовой последовательности реальных данных, которая является бесконечно большой последовательностью.
4. Приведите пример числовой последовательности реальных данных, которая является сходящейся последовательностью.
5. Дайте формально строгое определение знакочередующейся, не возрастающей последовательностей. Приведите примеры.
6. Какие вы знаете случаи неопределенностей? Сколько их?
7. Какие вы знаете случаи нарушения условий теорем о пределах, которые не являются неопределенностями?
8. Чем отличаются и в чем схожи определения пределов последовательностей и функций?
9. Приведите примеры функций из практики.
10. Какие вы знаете замечательные пределы?
11. Неопределенность, какого типа содержится в определении производной функции?

4. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

4.1. Физический и геометрический смысл производной

Физический смысл производной функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что она выражает *скорость роста* функции в этой точке. Действительно, отношение приращения значения функции приращению аргумента можно уподобить отношению пройденного расстояния к промежутку времени, за которое это было сделано, то есть – скорости.

Заметим, однако, что при рассмотрении движения некоторого материального тела, путем деления расстояния на время можно найти лишь «среднюю» скорость за этот промежуток времени. В то время как производная дает «мгновенную» скорость, то есть скорость в каждой точке. Например, для линейной функции

$$f(x) = ax + b,$$

где a – некоторая постоянная, скорость роста которой очевидна постоянна; с помощью определения производной несложно установить, что

$$f'(x) = a.$$

Геометрический смысл производной функции $f(x)$ в точке x_0 заключается в том, что она численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этой точке, относительно положительного направления оси абсцисс. Геометрический смысл производной напрямую следует из определения производной и основных тригонометрических соотношений.

Действительно, рассмотрим чертеж (рис. 4.1). В соответствии с известным тригонометрическим соотношением имеем

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{|AC|}{|BC|} \quad \text{или} \quad \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Ясно, что при $\Delta x \to 0$ секущая переходит в касательную, а значит

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{tg}(\beta),$$

а это и значит, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \mathrm{tg}(\beta).$$

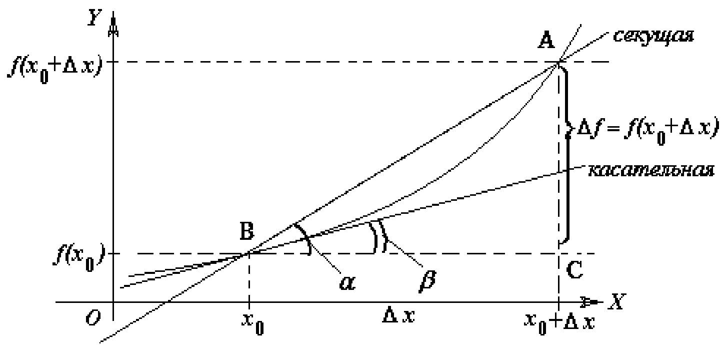


Рис. 4.1

Физический и геометрический смысл производной чрезвычайно важны как для общего понимания производной, так и для понимания и обоснования целого ряда важнейших фактов дифференциального исчисления.

Например, отталкиваясь от геометрического смысла производной, можно прийти к следующему важному утверждению.

***Теорема* 4.1 (достаточное условие дифференцируемости функции в точке).** Если $f(x)$ в точке x_0 ограничена и имеет определяемую единственным образом касательную к своему графику в этой точке, то она дифференцируема в x_0.

Например, к графику функции модуля $y = |x|$ в точке $x = 0$ можно провести сколько угодно касательных, поэтому в этой точке данная функция не дифференцируема, хотя и непрерывна. Дифференцируемые функции очень часто называют гладкими, что полностью соотносится со сказанным.

Следующие две теоремы, которые относятся к основным теоремам дифференциального исчисления, также связаны с геометрическим смыслом производной и хорошо иллюстрируют это понятие.

***Теорема* 4.2 (Лагранжа).** Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и дифференцируема на (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

***Теорема* 4.3 (Коши).** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b), и пусть, кроме того, на этом интервале $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.1}$$

Доказательства этих теорем можно найти в любом учебнике по математическому анализу. Формулу (4.1) называют *формулой Коши*.

4.2. Использование геометрического смысла производной при решении задач

С геометрическим смыслом производной связан целый спектр задач геометрического содержания. Например, требуется определить, под каким углом пересекаются в заданной точке графики двух заданных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ (рис. 4.2).

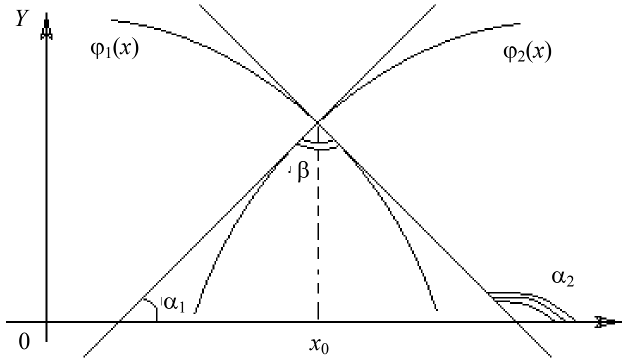


Рис. 4.2

Угол же между графиками в точке их пересечения, очевидно, равен углу между касательными к этим кривым, то есть

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1 .$$

Значит нужно найти значения производных функций в точке их пересечения, тем самым будут найдены тангенсы углов наклона касательных. А, зная тангенсы, находим и сами углы. Отметим, что решить эту задачу точно, без дифференциального исчисления, невозможно.

Почти всегда, когда речь идет о задачах геометрического содержания, невозможно указать общую схему их постановки, а значит, и предложить общий алгоритм решения. И в данном случае встречаются задачи, весьма различного содержания. Однако можно указать ряд соотношений и фактов, наиболее часто использующихся [1, 4]:

1) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ – уравнение касательной к графику функции в точке x_0;
2) $y = -\dfrac{(x - x_0)}{f'(x_0)} + f(x_0)$ – уравнение нормали, то есть прямой перпендикулярной, к графику функции в точке x_0;
3) $\mathrm{tg}(\varphi) = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ – тангенс угла между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$;
4) $k_1 = k_2$ – условие параллельности двух прямых;
5) $k_1 k_2 = -1$ – условие перпендикулярности двух прямых.

Пример. Найти в какой точке касательная к графику функции

$$y = x^3 - 2x + 3$$

перпендикулярна прямой

$$3y - 6x + 9 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение прямой в виде

$$y = 2x - 3.$$

Теперь мы видим, что необходимо найти точки, в которых касательная к графику заданной функции имеет угловой коэффициент, равный –1/2. Для этого нужно решить уравнение

$$y' = 3x^2 - 2 = \frac{1}{2}.$$

Находим два его решения

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Координаты по оси *OX* искомых точек найдены. Чтобы найти координаты по оси *OY*, найдем соответствующие значения функции. Получаем, что искомыми являются точки

$$\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{5}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}+3\right) \quad \text{и} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}+3\right).$$

4.3. Методика дифференцирования сложной функции

Как уже указывалось в предыдущей теме, находить производные сложных функций, используя только определение, крайне затруднительно. Поэтому на самом деле для этого используется совсем другая, специальная методика, основанная на следующих трех моментах:

1. Использование так называемых *табличных производных* [5], в основном это производные элементарных функций. К табличным относят, например, производные функций:

1) $(c)' = 0$, где c – некоторая постоянная константа (c = const);

2) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$;

3) $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$;

4) $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln(x)$, в частности $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;

5) $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x\ln(a)}$, в частности $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$;

6) $(\mathrm{tg}(x))' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\mathrm{ctg}(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7) $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, при $|x| < 1$;

8) $(\mathrm{arctg}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arcctg}(x))' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. Использование *свойств операции дифференцирования*:

1) $(U \pm V)' = U' \pm V'$, где $U(x), V(x)$ – дифференцируемые на некотором множестве функции;

2) $(U\,V)' = U'\,V + V'\,U$ – правило дифференцирования произведения двух функций, в частности $(C\,V)' = C\,V'$, где C – любая константа;

3) $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'\,V - V'\,U}{V^2}$ – правило дифференцирования отношения двух функций, в частности $\left(\dfrac{1}{V}\right)' = -\dfrac{V'}{V^2}$.

Все эти свойства весьма несложно выводятся из определения производной.

3. *Правило дифференцирования сложной функции*. Справедлива теорема.

***Теорема* 4.4 (правило дифференцирования сложной функции).** Пусть $f(\cdot)$ суперпозиция дифференцируемых функций $g(\cdot)$ и $u(\cdot)$, то есть

$$f(x) = g(u(x)),$$

тогда

$$f'_x = g'_u\ u'_x .$$

Напомним, что с помощью нижних индексов обозначают переменную, по которой ведется дифференцирование.

***Следствие* 4.1.** Пусть $f(x) = g(u(q(z(p(x)))))$, тогда

$$f'_x = g'_u\, u'_q\, q'_z\, z'_p\, p'_x .$$

Иначе говоря, сколько бы не было, как их называют, вложенных функций, всегда можно найти производную функции по ее аргументу.

Дифференцирование сложных функций вначале требует правильно установить порядок вложенности элементарных функций. На первых порах полезным может оказаться даже использование скобок, для выражения структуры этой вложенности. Впоследствии навык дифференцирования позволит отказаться от этого и легко находить производные самых сложных выражений.

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin^4\left(x^3\right) - 7\,tg^{-6.5}(\ln 5x).$$

Решение. Формульное выражение этой функции достаточно сложно. Однако, как и всегда, она состоит из известных элементарных функций. Действительно, например, первое слагаемое представляет собой четвертую степень синуса, взятого от переменной величины x, возведенной в третью степень. Второе же слагаемое есть тангенс, возведенный в степень (–6,5), от логарифма пяти x, и умноженный на (–7). Найдем производную этой функции.

Пользуясь теоремой 4.4 и таблицей производных можно записать

$$f'_x(x) = \left(\left(\sin(x^3)\right)^4\right)'_{\sin(x^3)} \left(\sin(x^3)\right)'_{x^3} \left(x^3\right)'_x -$$

$$-7\left(\mathrm{tg}^{6,5}\left(\ln(5x)\right)\right)'_{\mathrm{tg}(\ln(5x))}\left(\mathrm{tg}\left(\ln(5x)\right)\right)'_{\ln(5x)}\left(\ln(5x)\right)'_{5x}\left(5x\right)'_x =$$

$$= 4\sin^3\left(x^3\right)\cos\left(x^3\right)3x^2 - 7(-6{,}5)\,\mathrm{tg}^{-7,5}(\ln 5x)\frac{1}{\cos^2(\ln(5x))}\frac{1}{5x}5\,.$$

Остается провести упрощающие преобразования.

4.4. Дифференциал функции в точке и его свойства

В соответствии с определением производной несложно видеть, что если в точке x_0 существует $f'(x_0)$, то приращение значения функции в этой точке представимо в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x\,, \tag{4.2}$$

где функция $\alpha(\Delta x)$ такова, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0\,.$$

Такие величины называют бесконечно малыми порядка Δx.

***Определение* 4.1.** Первое слагаемое в правой части равенства (4.2) называют главной линейной частью приращения функции, или *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Дифференциал функции $y = f(x)$ есть функция двух аргументов x и Δx. Его обозначают df или dy. Таким образом, дифференциал функции в точке x это величина

$$df = f'(x)\Delta x\,.$$

Используя дифференциал аргумента, который очевидно равен $dx = \Delta x$, получаем, что

$$\frac{df}{dx} = f'(x)\,,$$

это отношение часто используют как еще одно обозначение производной функции $f(x)$.

Из свойств операции дифференцирования легко следуют совершенно аналогичные *свойства дифференциалов*:

1) $d\left(fg)\right) = df + dg$;
2) $d(\alpha f) = \alpha\, df$, где $\alpha - \forall$ const ;
3) $d\left(fg\right) = dfg + fdg$;
4) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{dfg - fdg}{g^2}$, в частности $d\left(\dfrac{1}{g}\right) = -\dfrac{dg}{g^2}$.

4.5. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

***Теорема* 4.5 (правило Лопиталя).** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой ε – окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{и} \quad g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем выполняется

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Пример. Рассмотрим уже известный первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$

его доказательство из соответствующих геометрических построений весьма объемно. Применяя же правило Лопиталя, легко получаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin'(x)}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\frac{1}{1}=1\,.$$

Правило Лопиталя, таким образом, оказывается очень эффективным средством раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя также справедливо и если

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty\,,$$

то есть может использоваться и для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\,.$

4.6. Монотонность функции. Достаточное условие монотонности

***Определение* 4.2.** Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей (монотонно убывающей) на отрезке $[a, b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$f(x_1)\le f(x_2),\quad \text{если}\quad x_1\le x_2;\qquad (f(x_1)\ge f(x_2),\quad \text{если}\quad x_1\ge x_2).$$

При решении задач исследования различных зависимостей бывает необходимо установить, на каких интервалах числовой прямой функция возрастает, а на каких убывает. Сделать это, анализируя формульную запись функции, бывает затруднительно или даже, практически, невозможно. Следующая простая теорема позволяет установить искомые интервалы, анализируя лишь знак производной исследуемой функции.

***Теорема* 4.6 (достаточное условие монотонности)**. Функция монотонно возрастает (монотонно убывает) на отрезке $[a, b]$, если

$$f'(x)>0\ (\ f'(x)<0),$$

для любого $x_1 \in [a, b]$.

Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно вспомнить физический смысл производной (рис. 4.3).

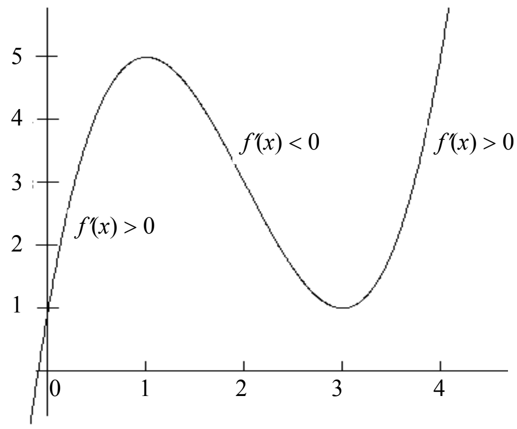


Рис. 4.3

Пример. Найдем интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1\,.$$

Находим ее производную и приравниваем ее к нулю

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1\,,$$

корни этого уравнения $x_1=1,\ \ x_2=3$.

Несложно видеть, что:

- $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ – функция возрастает;
- $f'(x)<0$ при $x\in(1,3)$ – функция убывает.

График именно этой функции показан на рис. 4.3.

4.7. Экстремумы функций. Необходимое условие экстремума

Основной задачей прикладной математики является построение, так называемых, *математических моделей* различных процессов и объектов. Как правило, математическая модель представляет собой функцию, выражающую некоторый наиболее важный показатель качества протекания процесса через значения каких-то других его параметров. Причем, эти параметры являются обычно управляемыми, то есть их значения могут выбираться по желанию. Основными целями построения математических моделей являются:

1) *прогноз* поведения процесса при тех или иных значениях его управляемых параметров;

2) *оптимизация* процесса, то есть нахождение таких значений этих параметров, при которых показатель качества достигает наилучшего возможного значения, то есть максимально возможного или минимально возможного.

Важнейшее значение в математике, в частности в связи с оптимизацией процессов, имеет следующее понятие.

***Определение* 4.3**. Точка $x_0 \in D(f)$ называется точкой *максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует ε-окрестность этой точки, такая что для любого лежащего в ней значения x выполняется

$$f(x) < f(x_0); \qquad (f(x) > f(x_0)).$$

***Определение* 4.4.** Точки максимума и минимума функции называются точками *экстремума* этой функции.

В общем случае такие зависимости являются функциями нескольких переменных. Сейчас мы рассматриваем только более простой случай функции одной переменной.

Следующая теорема является одной из важнейших теорем математики, так как дает эффективный способ нахождения точек экстремума функции.

***Теорема* 4.7 (необходимое условие экстремума функции – теорема Ферма).** Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, то производная этой функции в этой точке равна нулю, то есть

$$f'(x_0) = 0. \tag{4.3}$$

***Определение* 4.5.** Точки, в которых выполняется условие

$$f'(x_0) = 0,$$

называются *критическими* точками функции $f(x)$.

Для того чтобы убедиться в справедливости утверждения 4.7, рассмотрим рис. 4.4.

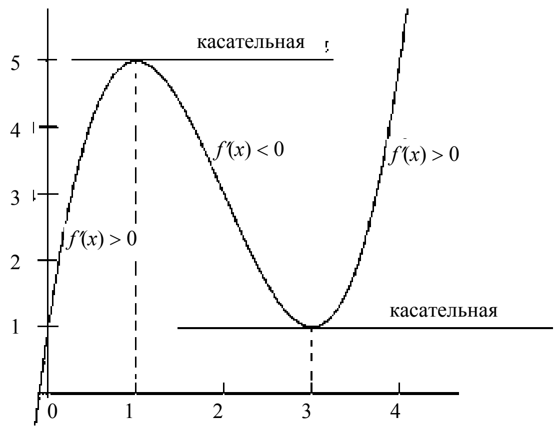


Рис. 4.4

Исходя из физического смысла производной, можно понять, что поскольку при переходе через точку экстремума производная функции меняет знак, то в самой этой точке она должна быть равна нулю. В точке экстремума функция как бы останавливается, и мгновенная скорость ее роста равна нулю. Поэтому критические точки часто называют также *стационарными*.

Далее очевидно, что касательные к графику функции в точках экстремума будут параллельны оси *OX*. Вспомнив геометрический смысл производной, вновь убеждаемся в справедливости этой теоремы.

Итак, для того чтобы найти все стационарные точки некоторой функции $f(x)$, необходимо найти все корни уравнения

$$f'(x) = 0.$$

Пример.

1. В предыдущем примере были найдены критические (стационарные) точки функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

2. Рассмотрим параболу

$$y = (x-2)^2 + 1.$$

Находим ее производную

$$y' = 2(x-2) = 2x - 4.$$

Видим, что $y' = 0$ при $x = 2$, то есть $x = 2$ – стационарная точка. На рис. 4.5 приведен график этой параболы, из которого видим, что $x = 2$ действительно точка экстремума, конкретно – точка минимума.

Очень важно понять, что теорема 4.7 дает только *необходимое*, но не *достаточное* условие экстремума.

***Определение* 4.6.** Критические точки функции $f(x)$, не являющиеся точками экстремума, называются ее *точками перегиба*.

То есть некоторая точка x_0 может быть стационарной, но не быть экстремумом. Например, на рис. 4.6 приведен график функции

$$y=(x-1)^3+1,$$

производная которой в точке $x=1$ равна нулю, поскольку

$$y'=3(x-1)^2.$$

Однако видим, что при $x=1$ никакого экстремума нет, то есть это точка перегиба.

Название – точка перегиба, легко объясняется характером поведения графика функции в окрестности такой точки.

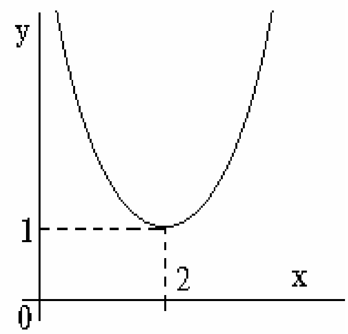


Рис. 4.5

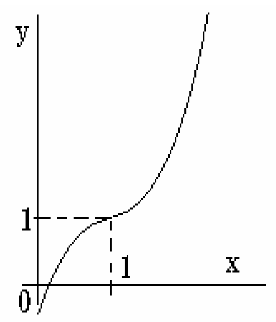


Рис. 4.6

4.8. Выпуклость, вогнутость. Условие выпуклости и вогнутости

Задача исследования поведения функции подразумевает выявление различных особенностей ее поведения на тех или иных интервалах числовой оси.

***Определение* 4.7.** Говорят, что функция $f(x)$ выпукла (вогнута) на интервале $(a,b)\in D(f)$, если все точки графика функции на этом интервале лежат ниже (выше) любой касательной, проведенной к этому графику на этом интервале.

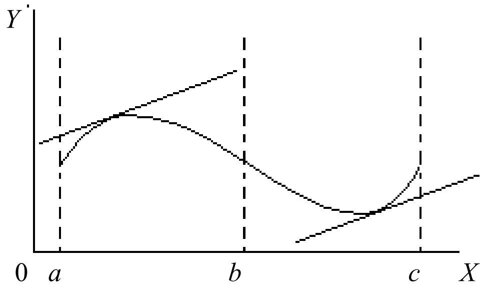


Рис. 4.7

Определение 4.7 иллюстрируется на рис. 4.7. На интервале (a,b) функция выпукла, на интервале (b,c) вогнута. Это показывают две проведенные к графику касательные.

***Определение* 4.8.** Второй производной функции называется производная ее первой производной.

Вторая производная функции $f(x)$ обозначается $f''(x)$.

В соответствии с физическим смыслом первой производной, можно заметить, что вторая производная выражает скорость изменения скорости роста функции, то есть – ускорение. Говорят, что в этом состоит физический смысл второй производной.

Справедлива теорема.

***Теорема* 4.8 (достаточное условие выпуклости, вогнутости)**. Если на интервале (a, b) имеет место условие

$$f''(x)<0 \ (f''(x)>0),$$

то функция $f(x)$ выпукла (вогнута) на этом отрезке.

Таким образом, для того, чтобы установить, на каких интервалах числовой оси функция выпукла, а на каких вогнута, следует установить интервалы знакопостоянства второй производной этой функции.

***Пример*.** Найдем интервалы выпуклости и вогнутости функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

Находим ее вторую производную и приравниваем ее к нулю

$$f''(x) = 6x - 12 = 0,$$

единственный корень этого уравнения $x_1 = 2$.

Несложно видеть, что:

- $f''(x) < 0$ при $x \in (-\infty, 2)$ – функция выпукла;
- $f''(x) > 0$ при $x \in (2, +\infty)$ – функция вогнута.

График этой функции показан на рис. 4.3.

4.9. Достаточные условия экстремума

Из вышесказанного следует, что если требуется найти все точки экстремума некоторой функции, то недостаточно только определить все ее критические точки. Необходимо еще исследовать их на действительное наличие в них экстремума. Для этого используются определенные признаки, которые называют *достаточными условиями экстремума*.

Теорема **4.9 (первое достаточное условие экстремума).** Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак, то это точка экстремума. Причем, если знак меняется с минуса на плюс, то это минимум; если с плюса на минимум, то максимум.

В параграфе 4.7 мы уже фактически использовали это интуитивно ясное условие. Действительно, например, до точки максимума функция растет, и значит, – производная положительна. После же перехода через максимум, функция убывает и – производная отрицательна. При переходе же через точку перегиба знак производной не меняется.

Иногда более удобным может оказаться другой признак.

Теорема **4.10 (второе достаточное условие экстремума)**. Если в некоторой окрестности критической точки вторая производная функции не меняет знак, то это экстремум. Причем, если она в этой окрестности неотрицательна, то это минимум; если не положительна, то – максимум.

Справедливость этого признака также вполне очевидна и следует из условий выпуклости и вогнутости функции.

Пример. Применим второе достаточное условие к исследованию критических точек функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

В примере параграфа 4.6 эти точки уже были найдены: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Находим вторую поизводную функции

$$f''(x) = 6x - 12 = 0.$$

Видим, что

$$f''(1) = -6 < 0 \text{ значит } x_1 = 1 \text{ – максимум;}$$
$$f''(3) = 6 > 0 \text{ значит } x_2 = 3 \text{ – минимум.}$$

Мы установили знак второй производной только в самих критических точках, но дело в том, что поскольку исследуемая производная является непрерывной, то знак сохраняется и в некоторой окрестности этих точек.

Определение **4.9.** Точки, при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак, также называются точками перегиба.

4.10. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Мы ознакомились с рядом важнейших понятий и фактов математического анализа. Рассмотрим теперь их использование, для начала, на примере следующей классической задачи. Имеется функция $f(x)$, требуется найти наибольшее и наименьшее значения, которые она достигает на некотором отрезке $[a,b] \in R^1$. Можно отметить, что это простейшая задача *условной оптимизации*.

Решение можно выстраивать по следующей схеме:

1. Найти критические точки и точки разрыва II-го рода функции $f(x)$, и выделить из них те, которые принадлежат данному отрезку.
2. Если имеются точки разрыва II-го рода, принадлежащие отрезку, то следует найти соответствующие односторонние пределы. Если хотя бы один из них равен $+\infty$, то говорят, что функция *не имеет на этом отрезке наибольшего значения*. Заметьте, не говорят, что наибольшее значение функции равно $+\infty$, это некорректно, так как нет такого числа – $+\infty$. Далее, если хотя бы один из них равен $-\infty$, то говорят, что функция не имеет на этом отрезке наименьшего значения.
3. С помощью достаточных условий проверить являются ли выделенные критические точки экстремумами и какими именно. Однако можно перейти сразу к следующему этапу.
4. Найти значения функции $f(x)$ в выделенных критических точках и в концах отрезка $[a, b]$, то есть в точках a и b.

5. Среди всех найденных значений, с учетом возможного наличия точек разрыва II-го рода, выделить искомые наибольшее и наименьшее значения.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=(x-2)^2+3$, на отрезке [–2, 5].

Решение.

1. Решив уравнение $f'(x)=2(x-2)=0$, получаем, что единственной критической точкой является $x=2$. Точек разрыва функция не имеет.
2. Поскольку $f''(2)=2$, то есть вторая производная исследуемой функции положительна на всей числовой прямой, то в найденной критической точке имеется *локальный* минимум $f(2)=3$.
3. Находим значения функции в концах отрезка $f(-2)=19$, $f(5)=12$.
4. Таким образом, получаем, что наименьшее значение достигается в точке $x=2$ и оно равно 3, а наибольшее в точке $x=-2$ и оно равно 19. Это можно записать следующим образом:

$$\min_{x\in[-2,5]} f(x)=3\,; \qquad \max_{x\in[-2,5]} f(x)=19\,.$$

4.11. Асимптоты функции

Одной из характеристик поведения функции является наличие у нее так называемых *асимптот*. Асимптота – это прямая, которая приближается как угодно близко к графику функции, либо при неограниченном возрастании значения функции, либо при неограниченном возрастании аргумента. Различают следующие три вида асимптот.

***Определение* 4.10.** Прямая $y=a$ называется *горизонтальной* асимптотой функции $f(x)$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a\,.$$

***Определение* 4.11.** Прямая $x=x_0$ называется *вертикальной* асимптотой функции $f(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty\,.$$

***Определение* 4.12.** Прямая $y=ax+b$ называется *наклонной* асимптотой функции $f(x)$, если

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{ax+b}\right]=0\,.$$

В этих определениях подразумевается наличие хотя бы одного соответствующего предела, либо при $-\infty$, либо при $+\infty$. Отметим еще, что:

1) вертикальные асимптоты фактически соответствуют точкам разрыва II-го рода;
2) если имеется наклонная асимптота, то ее угловой коэффициент наклона определяется пределом

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=a\,,$$

если этого предела не существует, или он равен нулю, то наклонной асимптоты нет. Далее неизвестный коэффициент b находится как предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b\,;$$

3) горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной.

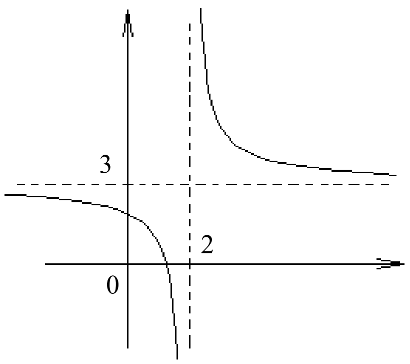


Рис. 4.8

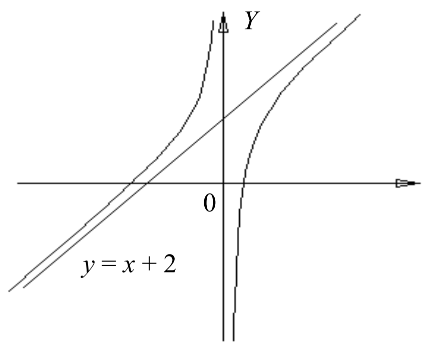


Рис. 4.9

Пример. Найти асимптоты функций:

1. $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}+3$, ее график приведен на рис. 4.8, видим что

   а) $x=2$ – точка разрыва II-го рода и соответственно вертикальная асимптота;

   б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}+3\right)=0$, то есть прямая $y=3$ – горизонтальная асимптота;

   в) наклонных асимптот нет;

2. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$, ее график приведен на рис. 4.9, видим что:

   а) $x=0$ – точка разрыва II-го рода и соответственно вертикальная асимптота;

   б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{x}=\pm\infty$, то есть горизонтальных асимптот нет;

   в) находим

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\frac{x^2+2x-1}{x}}{x}\right]=a=1; \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1}{x}-1x\right]=b=2,$$

то есть $y=x+2$ – наклонная асимптота.

4.12. Общий план исследования функции и построение ее графика

Задача исследования поведения аналитически заданной функции на всей числовой оси R^1 является классической задачей математического анализа. Такое исследование принято проводить в соответствии с некоторой стандартной схемой. В различных учебниках перечень этапов этой схемы может несколько различаться, однако, как правило, он включает следующие пункты.

Общий план исследования функции:

1. Нахождение области определения функции и точек разрыва I-го и II-го рода.
2. Определение является ли функция четной или нечетной.

***Определение* 4.13.** Функция $f(x)$ называется четной (нечетной), если для любого $x\in D(f)$ имеет место равенство

$$f(-x)=f(x); \qquad \bigl(f(-x)=-f(x)\bigr).$$

3. Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат.
4. Нахождение интервалов возрастания и убывания функции, точек экстремума, а также экстремальных значений функции.
5. Нахождение интервалов вогнутости и выпуклости функции.
6. Нахождение асимптот функции.
7. Построение графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$ и построить ее график.

1. Функция существует на всей числовой оси, кроме точки $x=2$, где она имеет разрыв II-го рода, так как

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\pm\infty.$$

2. Функция не является четной или нечетной.
3. Находим точки пересечения графика функции с осями:

- при $x=0$ получаем $y=-\dfrac{1}{2}$, то есть точка $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ – точка пересечения с осью OY;
- при $y=0$ получаем $x=-1$, то есть точка $(-1, 0)$ – точка пересечения с осью OX.

4. Для нахождения интервалов возрастания (убывания) функции и точек экстремума находим первую производную функции

$$y'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Сразу видим, что $x=-1$ и $x=5$ – критические точки. Результаты исследования знака производной и соответствующие выводы занесем в табл. 4.1.

Таблица 4.1

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;2)$	2	$(2;5)$	5	$(5;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не существует	–	0	+
$f(x)$	возрас- тает	max	убывает	не существует	убывает	min	возрас- тает

5. Находим вторую производную

$$y''=\frac{18}{(x-2)^3}.$$

Видим, что

- $f''(x)<0$ при $x\in(-\infty,2)$, то есть функция $f(x)$ выпукла;
- $f''(x)>0$ при $x\in(2,+\infty)$, то есть функция $f(x)$ вогнута.

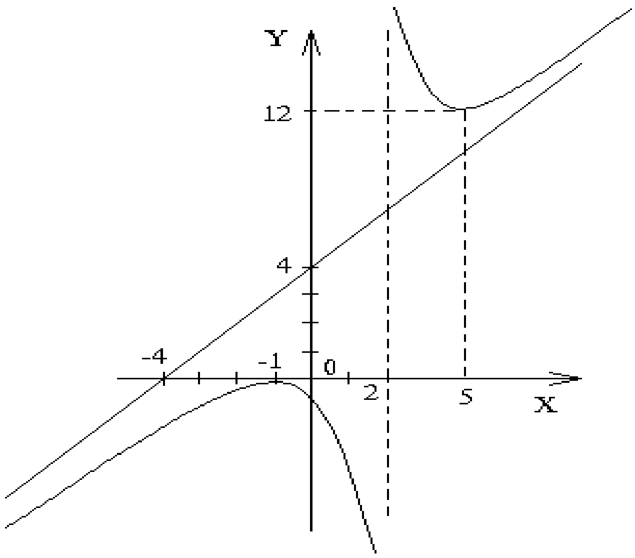


Рис 4.10

6. Находим асимптоты функции.

Вертикальная асимптота $x=2$.

Горизонтальных асимптот нет, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\pm\infty$.

Находим наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{(x-2)\cdot x}=1;\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x-2}-x\right)=4,$$

то есть $y=x+4$ – единственная наклонная асимптота данной функции.

7. Для окончательного построения графика исследуемой функции обычно бывает необходимо вычислить ее значение в нескольких (10 – 15) конкретных точках. Соответствующие результаты указаны в табл. 4.2.

Таблица 4.2

x	–8	–4	–3	0	1	2	5
$f(x)$	–0,49	–1,5	–0,8	–0,5	–4	$\pm\infty$	12

На рис. 4.10 приведен график исследуемой функции.

4.13. Функции нескольких переменных

Как уже говорилось, могут рассматриваться функции не с одним, а с несколькими аргументами. Для реальных математических моделей это имеет место почти всегда. Например, из данных наблюдений построена зависимость

$$V=f(p,\alpha),$$

где V– объем чистой прибыли от продажи некоторого товара; p – цена единицы товара; α – расходы на рекламу.

***Определение* 4.14**. Функцией f от n переменных называется *закон*, по которому однозначно сопоставляется каждому вектору $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, из некоторого допустимого множества $D(f) \subset R^n$, называемого *областью определения* этой функции, некоторое число $y \in R^1$, называемое *значением* функции. При этом пишут

$$y = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right).$$

Как видим, принципиальных отличий это определение от определения функции одной переменной не имеет. Часто, для уменьшения использования индексов, каждую координату многомерного аргумента обозначают отдельной буквой. Например, $f(x, y, z)$ – функция трех аргументов. Однако такой способ удобен, если аргументов не слишком много.

Формально, существуют те же способы задания (определения) функции нескольких переменных, что были указаны и ранее. Однако возможности применения табличного и графического способов еще более ограничены. Действительно, например, графический способ совсем не применим при числе аргументов три и более. Для двух переменных – можно изобразить лишь «плоский портрет» соответствующей поверхности, что, впрочем, довольно часто используется.

Дополнительных ограничений в применении аналитического способа задания не существует. При этом могут использоваться те же элементарные функции, что были перечислены выше. Например,

$$y = 5\frac{\sin\sqrt{x z^2}}{z-8} + \operatorname{tg}\left(\frac{u\sqrt[3]{x}}{x z - u + 2}\right)$$

и так далее.

Вообще, с точки зрения математической теории фактически нет разницы между функциями двух и более переменных. Но все же смысл ряда фактов оказывается более четко выражен, когда они сформулированы для случая функций трех или более переменных. Поэтому ниже все основные определения и теоремы мы будем рассматривать на примере функции трех переменных $f(x, y, z)$.

4.14. Производная функции нескольких переменных

Для функций от нескольких переменных требуется соответствующим образом переписать определение производной.

***Определение* 4.15.** Производной функции $u = f(x, y, z)$ по переменной x в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ $D(f) \subset R^n$ называется предел (если он существует)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

где Δx – по-прежнему называется приращением аргумента.

Аналогично вводятся определения производных $f(x, y, z)$ по y и z.

Таким образом, функция многих переменных может иметь производные (если она дифференцируема) по каждой из переменных по отдельности. При этом их называют *частными производными*.

Поскольку теперь имеется необходимость указывать, по какому именно аргументу ведется дифференцирование, то всегда пишут – $f'_x(x, y, z)$, или u'_x, или f'_z. И, как отношение дифференциалов, частная производная обозначается несколько иначе:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y, z).$$

Важнейшим следствием из определения 4.15 является то, что при нахождении частной производной, по какой-либо переменной, остальные переменные должны считаться *не изменяющимися постоянными* (то есть они рассматриваются, как константы). Отсюда становится понятной процедура нахождения частных производных, в основе которой лежат совершенно те же приемы, что и в случае одной переменной.

Пример. Найти все частные производные первого порядка функции

$$f(x, y, z) = x^2 y^3 + z\ln(y) + \frac{z^2}{y}\cos(x-2).$$

Решение. *Находим, что* $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - \frac{z^2}{y}\sin(x-2)$***;***

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 + \frac{z}{y} - \frac{z^2}{y^2}\cos(x-2); \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \ln(y) + 2\frac{z}{y}\cos(x-2).$$

Поскольку любая частная производная, сама является функцией тех же нескольких переменных, то ее также можно дифференцировать. При этом будут получаться, так называемые, частные производные *высших порядков*. Например, частная производная второго порядка по x обозначается как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y, z).$$

Если дифференцирование ведется по различным переменным, то соответствующие производные называются *смешанными частными производными*. Смешанная производная второго порядка по x и y обозначается, как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y, z).$$

Большое значение имеет следующая теорема.

***Теорема* 4.11 (*о равенстве смешанных производных*).** Если функция $u = f(x, y, z)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке $f''_{xy} = f''_{yx}$ или, что то же самое,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Эта теорема означает, что при нахождении смешанных производных последовательность дифференцирования по отдельным переменным не имеет значения.

Пример. Найти все частные производные второго порядка функции из предыдущего примера.

Решение. Находим, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 - \frac{z^2}{y}\cos(x-2); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 + \frac{z^2}{y^2}\sin(x-2);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -2\frac{z}{y}\sin(x-2); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 y - \frac{z}{y^2} + 2\frac{z^2}{y^3}\cos(x-2); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{1}{y} - 2\frac{z}{y^2}\cos(x-2); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\frac{\cos(x-2)}{y}.$$

В качестве упражнения проверьте, что действительно

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

и т.д.

4.15. Дифференцируемость. Геометрический смысл частных производных. Необходимое условие экстремума

Определение *4.16.* ***Функция $u = f(x, y, z)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, если она имеет в этой точке частные производные первого порядка, по всем своим аргументам, причем все эти производные непрерывны в данной точке.***

То есть дифференцируемость $u = f(x, y, z)$ определяется ее дифференцируемостью по отдельным аргументам.

Функция $u = f(x, y, z)$ определяет в четырехмерном пространстве переменных u, x, y, z некоторую поверхность. Действительно, каждому возможному значению ее аргументов соответствует некоторое значение u. Если, например, $u = f(x, y, z)$ удовлетворяет условиям непрерывности (которые аналогичны вышерассматривавшимся), то эти значения и составят непрерывную поверхность.

Геометрический смысл, например, частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ состоит в том, что она численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности $u = f(x, y, z)$ плоскостью, параллельной плоскости zOu и проходящей через эту точку. Конечно представить это себе геометрически гораздо сложнее, чем в случае одной переменной.

По аналогии со случаем одной переменной ясно, что, чтобы точка являлась экстремумом, необходимо (но недостаточно), чтобы все касательные к поверхности в этой точке были бы перпендикулярны оси Ou, то есть, справедлива теорема.

***Теорема* 4.12 (необходимое условие экстремума).** Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ и достигает в ней экстремума, то все ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю.

То есть теперь необходимое условие будет иметь вид не одного, а целой системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Как и раньше, точки, координаты которых удовлетворяют системе необходимых условий экстремума, называются *критическими* или *стационарными*.

В общем случае такая система является нелинейной. А мы знаем, что регулярных методов решения нелинейных систем уравнений не существует. Однако в частных случаях такие системы решаются иногда даже аналитически. И всегда весьма эффективны численные методы.

Пример. Найти критические точки функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z .$$

Решение. Имеем систему необходимых условий экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - x = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

В данном случае эта система получается линейной, поэтому легко решается. Ее единственное решение

$$x = -\frac{2}{3}; \quad y = -\frac{1}{3}; \quad z = 1 .$$

При этом значение функции

$$u\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = -\frac{4}{3}.$$

Как и ранее, полученные тем или иным образом критические точки еще необходимо проверить на действительное наличие в них экстремума. Чтобы сформулировать и обосновать соответствующее достаточное условие, ознакомимся с некоторыми вспомогательными фактами.

4.16. Формула Тейлора

Весьма значим, особенно для технических приложений, следующий факт.

***Теорема* 4.13 (теорема Тейлора).** Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a и некоторой ее окрестности все производные до порядка $n + 1$ включительно. Пусть x – любое значение аргумента из указанной окрестности, $x \neq a$. Тогда между точками a и x найдется такая точка ξ, что справедлива следующая формула (формула Тейлора)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$
$$.... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Последнее слагаемое в этом равенстве, называемое *остаточным членом* разложения Тейлора, при $\Delta x = x - a \to 0$, очень быстро убывает до нуля. Таким образом, формула Тейлора говорит о том, что в окрестности любой точки любую функцию (удовлетворяющую соответствующим условиям) можно приближенно заменить некоторым многочленом по степеням Δx. В действительности оказывается, что если в окрестности некоторой точки a функция является *аналитической* (то есть бесконечное количество раз непрерывно дифференцируемой), то она в этой окрестности раскладывается в бесконечный сходящийся ряд по степеням $\Delta x = x - a$, называемый рядом Тейлора. В справочниках по высшей математике можно найти много разложений в ряд Тейлора часто встречающихся функций.

Это разложение можно сопоставить с разложением вектора по некоторому базису. Элементами базиса здесь являются степени $(x-a)^n$. Однако, количество элементов базиса при этом, как мы понимаем, оказывается бесконечным. Это свидетельствует о важном, известном в математике, факте, что пространство функций является бесконечномерным пространством.

Аналогично, справедлива формула Тейлора и для функции нескольких переменных. В нижеследующей формулировке использованы символы оператора дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и т.д. Этот символ означает, например, следующее:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m f = \frac{\partial^m f}{\partial x^m},$$

аналогично и для смешанных производных.

***Теорема* 4.14 (формула Тейлора для функции нескольких переменных).** Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $a = (x_0, y_0, z_0)$, и некоторой ее окрестности, все производные до порядка $m+1$ включительно. Пусть (x, y, z) – любое значение аргумента из указанной окрестности, $(x, y, z) \neq a$. Тогда найдется такое значение $0 \le \theta < 1$, что

$$f(x,y,z)=f(a)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial}{\partial z}(z-z_0)\right)f(a)+....$$

$$...+\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial}{\partial z}(z-z_0)\right)^m f(a)+$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial}{\partial z}(z-z_0)\right)^{m+1} f(a+\theta\Delta a),$$

где $\Delta a=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$.

Как видим, формула достаточно схожа с той, которая имела место в случае одной переменной. Эта формула означает, что при выполнении соответствующих условий можно построить многомерную полиномиальную поверхность, которая с заданной желаемой точностью приближает исходную функцию в окрестности заданной точки a. Это имеет важное значение, в частности, для следующего вопроса.

4.17. Достаточное условие экстремума функции многих переменных

Введем сначала одно понятие из алгебры матриц.

***Определение* 4.17**. Квадратная матрица A называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любого вектора x соответствующей размерности выполняется

$$xAx^T>0\ (\,xAx^T<0\,).$$

***Определение* 4.18.** Главными минорами матрицы A называют определители ее подматриц расположенных в ее правом верхнем углу, размерности этих подматриц называют порядком соответствующего минора. Определитель самой матрицы A_n, таким образом, тоже является главным минором порядка n.

Очевидно, у матрицы A_n имеется n главных миноров, начиная с первого порядка, каковым является элемент a_{11}.

***Теорема* 4.15 (критерий Сильвестра).** Матрица A положительно определена $\Leftrightarrow$ все ее главные миноры положительны. Матрица A отрицательно определена $\Leftrightarrow$ $a_{11}<0$, и при переходе от любого главного минора матрицы к главному минору следующего порядка знак значения минора меняется.

Заметим теперь, что если в разложении Тейлора ограничиться только членами не выше второй степени, то это разложение можно записать в виде

$$f(x,y,z)-f(a)=(\Delta x\ \ \Delta y\ \ \Delta z)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}+R_3, \qquad (4.4)$$

где R_3 – остаточный член ряда Тейлора. В соответствие с формулой для любого вектора $(\Delta x\ \Delta y\ \Delta z)$, выполняется

$$\lim_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\to 0}\left(\frac{R_3}{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\right)=0,$$

то есть чем ближе точка (x,y,z) к a, тем слагаемое R_3 менее значимо относительно первого слагаемого из правой части (4.4). Иначе говоря, для любой наперед заданной точности, можно указать окрестность точки a, в которой приращение функции $f(x,y,z)$ будет с этой точностью аппроксимировано поверхностью определяемой только первым слагаемым разложения (4.4).

Этот факт можно использовать для того, чтобы исследовать на экстремум найденную критическую точку, так как теперь достаточно исследовать указанную аппроксимирующую поверхность в окрестности этой точки.

***Теорема* 4.16 (достаточное условие экстремума функции трех переменных).** Если матрица из разложения (4.4) положительно определена, то точка a – есть точка минимума функции $f(x, y, z)$, если отрицательно определена, то – максимума. Если не имеет место ни то ни другое и все главные миноры отличны от нуля, то найденная точка является точкой перегиба.

Пример. Исследуем с помощью рассматриваемого признака критическую точку, найденную в предыдущем примере. Рассчитаем для функции

$$u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$$

матрицу ее частных производных второго порядка, ее называют *гессиан*,

$$\Delta^2 f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В данном случае получилась матрица из постоянных чисел. В общем случае, элементы гессиана могли бы зависеть от аргументов функции, и тогда следовало бы для их нахождения подставлять значения, соответствующие координатам исследуемой точки. Итак, в нашем случае, матрица, как мы видим по критерию Сильвестра, положительно определена. То есть найденная в предыдущем примере критическая точка является точкой минимума.

4.18. Непосредственное исследование критической точки

Как мы видим из формулировки теоремы 4.16, если хотя бы один из главных миноров гессиана равен нулю, то признак не дает однозначного ответа. В этом имеется отличие рассматриваемого случая от случая функции одной переменной. И такая ситуация неоднозначности встречается достаточно часто.

Тогда единственным выходом является непосредственное исследование значений функции в окрестности рассматриваемой критической точки. Для этого необходимо произвести довольно значительное количество расчетов. Например, если хотя бы рассчитать значения функции на гранях, серединах ребер и вершинах n-мерного куба с центром в исследуемой точке, то функцию необходимо рассчитать 3^n раз. К тому же, теоретически, такой подход также не гарантирует корректности окончательных выводов, при любом конечном количестве точек из окрестности критической.

Однако на практике зачастую количество переменных в моделях не столь уж и велико. Как правило, например, в эконометрических моделях их не больше чем 3-4. И тогда с использованием компьютера такие расчеты отнюдь не являются слишком сложными.

Пример. Для заданной функции найти все частные производные первого и второго порядков

$$f(x,y,z) = y\,x - (z+2)^2 + (x+2)^2 (z+2).$$

Записать систему уравнений, выражающую необходимые условия экстремума этой функции. Решить эту систему и исследовать полученные решения.

Решение. Необходимые условия имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x+2)(z+2) = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -2(z+2) + (x+2)^2 = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему, находим, что единственной стационарной точкой является

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \\ z = -2. \end{cases}$$

Для того чтобы выяснить является ли эта точка экстремумом, находим гессиан данной функции:

$$(H) = \begin{pmatrix} 2(z+2) & 1 & 2(x+2) \\ 1 & 0 & 0 \\ 2(x+2) & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Его главные миноры в исследуемой стационарной точке равны:

$$\Delta_1 = 2(z+2) = 2(-2+2) = 0\,;\ \Delta_2 = -2\,;\ \Delta_3 = 4\,.$$

Видим, что условия теоремы о достаточных условиях экстремума не выполняются, и нельзя однозначно указать, чем является рассматриваемая точка.

Рассчитаем значения функции на гранях, серединах ребер и в вершинах трехмерного куба с центром в исследуемой точке. Длину грани куба возьмем 0,02. Значения записаны в табл. 4.3.

Жирным подчеркнутым курсивом выделена исследуемая точка и соответствующее ей значение функции. Как видим, в окрестности имеются значения как большие, так и меньшие выделенного. Это означает, что данная критическая точка является точкой перегиба.

Таблица 4.3

x_i	y_i	z_i	f_i	x_i	y_i	z_i	f_i	x_i	y_i	z_i	f_i
–0,01	–0,01	–2,01	–0,0396	0	–0,01	–2,01	–0,0401	0,01	–0,01	–2,01	–0,0406
–0,01	–0,01	–2	0,0001	0	–0,01	–2	0	0,01	–0,01	–2	–0,0001
–0,01	–0,01	–1,99	0,039601	0	–0,01	–1,99	0,0399	0,01	–0,01	–1,99	0,040201
–0,01	0	–2,01	–0,03971	0	0	–2,01	–0,0401	0,01	0	–2,01	–0,0405
–0,01	0	–2	0	***0***	***0***	***–2***	***0***	0,01	0	–2	0
–0,01	0	–1,99	0,039501	0	0	–1,99	0,0399	0,01	0	–1,99	0,040301
–0,01	0,01	–2,01	–0,0398	0	0,01	–2,01	–0,0401	0,01	0,01	–2,01	–0,0404
–0,01	0,01	–2	–0,0001	0	0,01	–2	0	0,01	0,01	–2	0,0001
–0,01	0,01	–1,99	0,039401	0	0,01	–1,99	0,0399	0,01	0,01	–1,99	0,040401

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит физический смысл производной функции?
2. В чем состоит геометрический смысл производной функции?
3. Что такое дифференцируемость функции, и каково достаточное условие дифференцируемости?
4. Приведите пример недифференцируемой в каких либо точках функции.
5. Производные каких функций называются табличными?
6. Докажите свойства операции дифференцирования.
7. Как можно использовать дифференциал для приближенного расчета значений функций?
8. В чем теоретическая и практическая важность необходимого условия экстремума?
9. Поясните необходимое условие экстремума, основываясь на физическом и геометрическом смысле производной?
10. Зачем нужны достаточные условия экстремума?
11. В чем преимущества и недостатки каждого из двух достаточных условий экстремума?
12. Какие еще пункты вы могли бы предложить для схемы исследования функции?
13. В чем сходство, а в чем различие между обычными и частными производными?

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Понятия интеграла и первообразной функции [1, 4] теснейшим образом связаны с понятием производной, начиная с самых первых основополагающих работ первооткрывателей дифференциального исчисления И. Ньютона и Г. Лейбница.

***Определение* 5.1**. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на промежутке $(a, b) \in R^1$, если функция $F(x)$ дифференцируема на этом промежутке и $F'(x) = f(x)$.

Несложно заметить, что если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то и $F(x) + C$ также будет первообразной для $f(x)$, при C – любая константа. То есть первообразная для функции может быть найдена только с точностью до неопределенного постоянного слагаемого.

***Определение* 5.2**. Говорят, что множество всех функций $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, C – любая константа, образует семейство первообразных функции $f(x)$.

***Определение* 5.3.** Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке $(a, b) \in R^1$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

В этом обозначении знак $\int$ – называется знаком интеграла, $f(x)$ - подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования.

***Определение* 5.4**. Операция нахождения первообразной функции называется *интегрированием*.

Часто отмечают, что интегрирование является операцией, в некотором смысле, обратной дифференцированию.

Свойства операции интегрирования:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ и $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$.
2. $\int dF(x) = F(x) + C$.
3. $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$.
4. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

5.2. Табличные интегралы. Непосредственное интегрирование

Аналогично дифференцированию, при интегрировании используют уже известные интегралы от наиболее распространенных, в частности элементарных, функций. Их называют *табличными интегралами*. Более или менее полный список таких интегралов представлен в любом справочнике по высшей математике [5].

К наиболее важным из них можно отнести следующие:

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln(x) + C$.
3. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x) + C$.
4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$.
5. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$.
6. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$.

Иногда для нахождения неопределенного интеграла от заданной функции достаточно использования табличных интегралов и свойств линейности этой операции (свойства 3, 4). В этом случае говорят, что интеграл найден *непосредственным интегрированием* подынтегральной функции.

Пример.

1. $\int \left(2\sin(x) + 6 - 3x^2\right)dx = 2\int \sin(x)dx + 6\int dx - 3\int x^2dx =$
$= -2\cos(x) + 6x - x^3 + C$.

2. $\int \dfrac{3x^4 - x^3 + x + 2}{x^2}dx = \int \left(3x^2 - x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)dx =$
$= 3\int x^2dx - \int xdx + \int \dfrac{1}{x}dx + \int \dfrac{2}{x^2}dx = x^3 - \dfrac{x^2}{2} + \ln(x) - \dfrac{2}{x} + C$.

Укажем уже сейчас следующий важный факт, в отличие от дифференцирования, не всегда можно проинтегрировать заданную функцию. То есть не все функции имеют первообразную. Обычно достаточно рассмотреть любое сложное выражение, и мы столкнемся с невозможностью его проинтегрировать. Примером вполне простого выражения, неопределенный интеграл от которого не существует, является очень важный в некоторых разделах математики интеграл (интеграл Лапласса)

$$I = \int e^{-x^2} dx .$$

5.3. Основные методы интегрирования. Метод замены переменных

Из приведенных примеров ясно, что с помощью непосредственного интегрирования первообразную удается найти весьма редко. В действительности обычно приходится применять известные специальные приемы, называемые *методами интегрирования*. Фактически, все эти методы являются методами преобразования исходного подынтегрального выражения к виду, когда уже удается применить непосредственное интегрирование.

Почти всегда при интегрировании, так или иначе, приходится использовать прием, называемый методом замены переменных, и основанный на следующей теореме.

***Теорема* 5.1. (формула замены переменных)** Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на некотором промежутке, а функция $f(x)$ имеет первообразную на этом промежутке, тогда справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f\,[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Пример.

1. $I = \int \cos(2x)dx = ...$, делаем простейшую замену

$$t = 2x \;\Rightarrow\; dt = 2dx ,$$

тогда

$$... = \int \cos(t)\frac{dt}{2} = -\frac{\sin(t)}{2} + C = -\frac{\sin(2x)}{2} + C .$$

2. $I = \int \frac{xdx}{1+x^2}$. Замечаем, что множитель x является «почти производной» от оставшейся части выражения. Делаем замену

$$t = 1 + x^2 \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = 2x \;\Rightarrow\; dt = 2xdx .$$

Подставляем эти выражения в исходный интеграл, получаем

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\ln(t) + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C ;$$

3. $I = \int \frac{x^3 dx}{(2-x)^3}$. Сделаем замену $t = 2 - x \;\Rightarrow\; x = 2 - t$ и $dt = -dx$.

Подставляя, получаем

$$I = -\int \frac{(2-t)^3}{t^3}dt = -\int \left(8t^{-3} - 12t^{-2} + 6t^{-1} - 1\right)dt + C =$$

$$= 4t^{-2} - 12t^{-1} - 6\ln(t) + t + C = \frac{4}{(2-x)^2} - \frac{12}{2-x} - 6\ln(2-x) + (2-x) + C .$$

Следует помнить, что в окончательном ответе *все должно быть выражено через первоначальную переменную*, сколько бы промежуточных замен переменных в ходе преобразований не проводилось.

5.4. Основные методы интегрирования. Метод интегрирования по частям

Весьма часто оказывается полезным следующее равенство, справедливое для двух дифференцируемых на интересующем нас промежутке функций $u(x)$ и $v(x)$, –

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx ,$$

которое называется *формулой интегрирования по частям*. В дифференциалах она записывается несколько компактнее:

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

Эта формула несложно выводится из правила дифференцирования произведения двух функций (предлагается вывести ее в качестве упражнения самостоятельно).

Формула интегрирования по частям чаще всего применяется тогда, когда подынтегральное выражение представляет собой произведение двух блоков, являющихся функциями различных типов. Например, степенной и логарифмической, или степенной и показательной и т.д.

Пример.

1. $I = \int xe^x dx$. В этом случае принимаем

$$u = x, \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad v = e^x$$

и по рассматриваемой формуле

$$I = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

отметим, что если бы в этом интеграле степень x была бы второй, то формулу интегрирования по частям следовало бы применить дважды, если третьей, то трижды и т.д.;

2. $I = \int \ln(x)dx$. Принимаем

$$u = \ln(x), \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

и получаем

$$I = \int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{dx}{x} = x\ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C .$$

Следует еще раз отметить, что не существует *регулярного* метода интегрирования, то есть единого алгоритма, позволяющего или найти интеграл от заданной функции, или убедиться в невозможности этого. А есть лишь методы позволяющие попытаться найти первообразную. Этим интегрирование качественно отличается от дифференцирования.

Для того чтобы научиться интегрировать, необходимо внимательно изучить достаточное количество примеров, которые можно найти в учебниках и задачниках по высшей математике.

5.5. Некоторые специальные виды замены переменных

В математике известен целый спектр различных видов подынтегральных выражений, для которых часто оказываются эффективны те или иные конкретные замены переменных. Эти виды выражений и соответствующие замены приводятся в справочниках по высшей математике [5].

Например, если в подынтегральном выражении имеется блок вида $\sqrt[n]{ax+b}$, и с этим блоком и аргументом x выполняются лишь арифметические действия, то полезной (позволяющей сразу найти интеграл или преобразовать подынтегральное выражение к более простому виду) является следующая замена переменных $t = \sqrt[n]{ax+b}$. При этом следует выразить x через t и отсюда найти dx, то есть

$$t = \sqrt[n]{ax+b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^n - b}{a} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{n\,t^{n-1}}{a}dt .$$

Если в подынтегральном выражении имеются блоки вида $\sqrt[n]{ax+b}$ и $\sqrt[m]{ax+b}$, то следует использовать замену $t = \sqrt[N]{ax+b}$, где N – наименьшее общее кратное чисел n и m. Далее отсюда также следует выразить x, найти dx и подставить все в подынтегральную функцию.

Пример.

1. $$\int x\sqrt{x-1}dx = \left| \begin{array}{c} \text{делаем замену} \\ t = \sqrt{x-1}, \ \text{отсюда} \\ x = t^2 + 1 \ \text{и} \ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \left(t^2+1\right)t2tdt = 2\int \left(t^4 + t^2\right)dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C ,$$

2. $$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{c} \text{делаем замену} \\ t = \sqrt[4]{x}, \ \text{отсюда} \\ x = t^4 \ \text{и} \ dx = 4t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt[4]{t^4}\ 4t^3dt}{1+\sqrt{t^4}} = 4\int \frac{t^4dt}{1+t^2} =$$

$$= 4\int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 4\left(\frac{1}{3}t^3 - t - \operatorname{arctg}(t) + C\right) =$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} - arctg\left(\sqrt[4]{x}\right) + C\right).$$

Если подынтегральная функция содержит только арифметические действия над x и $\sqrt{a^2 - x^2}$, то следует попытаться использовать замену $x = a\cos(t)$ (или $x = a\sin(t)$), откуда $\sqrt{a^2 - x^2} = \pm a\sin(t)$, $dx = -a\sin(t)dt$.

Если – над x и $\sqrt{x^2 - a^2}$, то – замену $x = \dfrac{a}{\cos(t)}$ (или $x = \dfrac{a}{\sin(t)}$), откуда

$$\sqrt{x^2-a^2}=\pm a\,\mathrm{tg}(x),\ dx=a\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}dt\ .$$

В случае x и $\sqrt{x^2+a^2}$ – замену $x=a\,\mathrm{tg}(x)$ (или $x=a\,\mathrm{ctg}(x)$), откуда

$$\sqrt{x^2+a^2}=\pm\frac{a}{\cos(t)},\ dx=\frac{a}{\cos^2(t)}dt\ .$$

Указанные замены называют *тригонометрическими заменами*.

Пример.

$$\int x\sqrt{9-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c}\text{делаем замену}\\ t=3\cos(t),\ \text{отсюда}\\ \sqrt{9-x^2}=3\sin(t)\ \text{и}\ dx=-3\sin(t)dt\end{array}\right|=$$

$$=-27\int\cos(t)\sin(t)\sin(t)dt=-27\int\sin^2(t)d(\sin(t))=-9\sin^3(t)+C=$$

$$=-9\left(\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}\right)^3=C-\frac{1}{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3.$$

Если подынтегральная функция содержит только арифметические действия над $\cos(x)$ и $\sin(x)$, то применяется так называемая *универсальная тригонометрическая подстановка*

$$t=\mathrm{tg}\frac{x}{2};\ \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\ .$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{1+\sin(x)}=\left|\begin{array}{c}\text{делаем замену}\ t=\mathrm{tg}\frac{x}{2},\\ \text{отсюда по вышеприведенным формулам}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}dt=\int\frac{2dt}{1+2t+t^2}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2}=2\frac{(t+1)^{-1}}{-1}+C=C-\frac{2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\ .$$

Существует и еще целый ряд видов «стандартных» замен переменных и приемов интегрирования, которые можно найти в справочниках.

5.6. Определенный интеграл

Важнейшее практическое значение имеет следующее понятие.

***Определение* 5.5.** Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]\in R^1$ называется число, равное приращению первообразной этой функции $F(x)$ на этом отрезке; это число обозначают так:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx\ . \qquad (5.1)$$

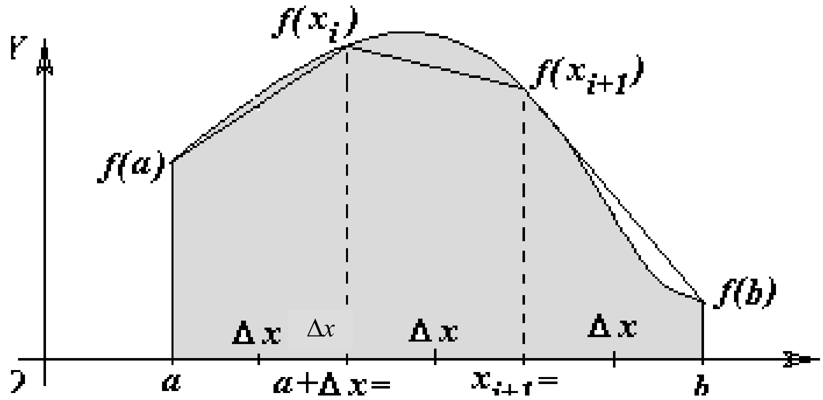


Рис. 5.1

Равенство (5.1) называют *формулой Ньютона-Лейбница*. Приращение первообразной кратко обозначают так:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b .$$

Попытаемся понять смысл равенства (5.1). Разобьем отрезок [a, b], лежащий в области определения функции $f(x)$ на N равных частей длиной $\Delta x=\dfrac{b-a}{N}$, как показано на рис. 5.1.

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ на отрезке [a, b] и осью OX, выделена цветом. Эту площадь можно приближенно рассчитать, рассчитав площадь под ломанной, также показанной на рисунке, по выражению

$$S\approx\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)+f(x_i+\Delta x)}{2}\Delta x=\frac{f(a)+f(a+\Delta x)}{2}\Delta x+\ldots+$$

$$+\frac{f(b-\Delta x)+f(b)}{2}\Delta x, \tag{5.2}$$

где $x_1 = a$. Очевидно, что это приближение будет тем точнее, чем меньше интервал разбиения $\Delta x=\dfrac{b-a}{N}$, то есть больше N. Более того, ясно, что предел суммы (5.2), при $\Delta x\to 0$ и $N\to\infty$, в точности равен величине S:

$$S=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)+f(x_i+\Delta x)}{2}\Delta x\right).$$

Заменяя теперь в этой сумме значение функции $f(x)$ значением производной от ее первообразной, то есть в соответствие с известным нам равенством $f(x)=F'(x)$, получаем

$$S=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{F'(x_i)+F'(x_i+\Delta x)}{2}\Delta x\right).$$

Также при $\Delta x\to 0$ и $N\to\infty$, в соответствие с определением производной, выполняется

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{F'(x_i)+F'(x_i+\Delta x)}{2}\Delta x=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\dfrac{F(x_i+\Delta x)-F(x_i)}{\Delta x}+\dfrac{F(x_i+2\Delta x)-F(x_i+\Delta x)}{\Delta x}}{2}\Delta x\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{F(x_i+2\Delta x)-F(x_i)}{2}\right).$$

Видим, что в последнюю сумму входят одинаковые величины с противоположными знаками; после их взаимного уничтожения получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{F(x_i+2\Delta x)-F(x_i)}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{F(b+\Delta x)+F(b)-F(a+\Delta x)-F(a)}{2}\right)=$$

$$=F(b)-F(a).$$

Таким образом мы видим, что

$$S=F(b)-F(a)\,;$$

это означает, что определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равен площади криволинейной трапеции ограниченной графиком этой функции на отрезке и осью OX с учетом знака функции. Говорят, что в этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла*.

Ясно, что точное нахождение значения определенного интеграла требует нахождения первообразной, а это, как мы знаем, не всегда возможно. С другой стороны, пользуясь формулой (5.2), которая называется *интегральной суммой*, можно приближенно, но с любой заранее заданной точностью, рассчитать определенный интеграл от любой функции. Этот подход называется *численным интегрированием*.

Имеются различные варианты формул для такого расчета, характеризующиеся той или иной степенью сложности и точности расчетов, в частности, *формула прямоугольников*, *формула Симпсона* и т.д. Указанная выше формула (5.2) называется *формулой трапеций*.

Пример. Найти определенный интеграл

$$\int_0^{1,2} x\sin(6x)\,dx\ .$$

Построить график подынтегральной функции на интервале интегрирования. Рассчитать интеграл численно, с помощью метода трапеций, разбив интервал интегрирования на 15 частей.

Решение. Найдем сначала этот интеграл аналитически. Интегрируя по частям получаем

$$\int_0^{1,2} x\sin(6x)dx = \left(-\frac{x\cos(6x)}{6}\right)\Bigg|_0^{1,2} + \int_0^{1,2}\frac{\cos(6x)}{6}dx = \left(-\frac{x\cos(6x)}{6}+\frac{\sin(6x)}{36}\right)\Bigg|_0^{1,2} =$$

$$= -0,1 - 0 = -0,1.$$

Теперь построим график рассматриваемой функции на отрезке $[0;1,2]$ (рис. 5.2).

Разобьем этот отрезок на 15 одинаковых интервалов и рассчитаем значения подынтегральной функции в концах x_i, $i=\overline{0,15}$. Результаты расчетов занесем в табл. 5.1.

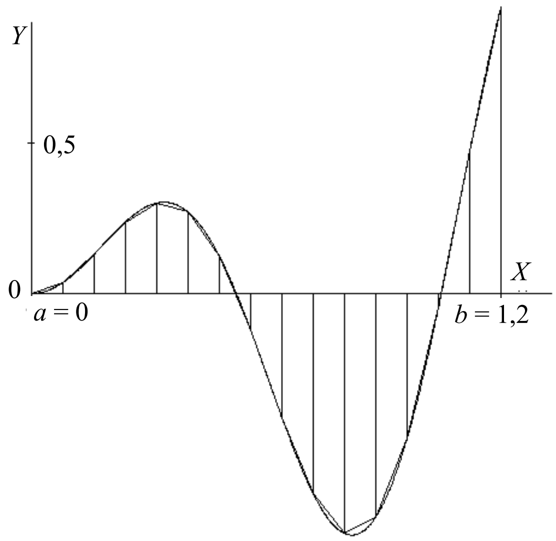


Рис. 5.2

Таблица 5.1

x_i	$f(x_i)$	x_i	$f(x_i)$
0,0000	0,0000	0,6400	–0,4115
0,0800	0,0369	0,7200	–0,6653
0,1600	0,1311	0,8000	–0,7969
0,2400	0,2380	0,8800	–0,7420
0,3200	0,3007	0,9600	–0,4797
0,4000	0,2702	1,0400	–0,0449
0,4800	0,1241	1,1200	0,4738
0,5600	–0,1213	1,2000	0,9524

Эти значения используем для расчета площадей S_i трапеций, по формуле

$$S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x ,$$

где $\Delta x = \dfrac{b-a}{15}$ – длина интервала разбиения. Результаты расчетов занесем в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Номер трапеции	Ее площадь, S_i	Номер трапеции	Ее площадь, S_i	Номер трапеции	Ее площадь, S_i
1	0,0015	6	0,0158	11	–0,0616
2	0,0067	7	0,0001	12	–0,0489
3	0,0148	8	–0,0213	13	–0,0210
4	0,0215	9	–0,0431	14	0,0172
5	0,0228	10	–0,0585	15	0,0570

Сумма площадей этих трапеций равна

$$S = \sum_{i=1}^{15} S_i = -0{,}0969.$$

Эта величина и является искомым приближенным значением определенного интеграла. Как видим, ошибка по сравнению с точным результатом составляет

$$\Delta = -0{,}1 - (-0{,}0969) = 0{,}0031,$$

что в процентах составляет

$$\frac{0{,}0031}{0{,}1} 100\% \approx 3{,}1\% .$$

5.7. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Свойства определенного интеграла

Рассмотрим некоторые факты, важные для более глубокого понимания определенного интеграла (ИО) как математического понятия и одного из важнейших инструментов моделирования и анализа реальных процессов.

Мы уже видели, что точно вычислить площадь криволинейной трапеции без использования интеграла невозможно. Заметим теперь, что вместо интегральной суммы (5.2), для приближенного расчета S, можно использовать и сумму вида

$$S \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \Delta x .$$

Такая сумма соответствует приближению криволинейной трапеции N прямоугольниками высоты $f(x_i)$, $i = \overline{1, N}$, и с одинаковой длиной основания Δx. Эта формула и называется *формулой прямоугольников*. Очевидно, что и эта сумма, в приделе при $\Delta x \to 0$ и $N \to \infty$, в точности равна величине S, то есть:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \Delta x \right) = \int_a^b f(x) dx . \tag{5.3}$$

Очень важно отметить схожесть структур левой и правой частей этого равенства. Сам символ интеграла представляет собой вытянутую букву S, и это не случайно, так как именно с этой буквы начинаются слова «сумма» и «площадь» в латинском языке.

Таким образом, мы пришли к тому, что определение ОИ можно было бы дать иначе, чем это было сделано ранее, а именно: ОИ – это *предел соответствующей интегральной суммы.* Иногда говорят, что ОИ это *бесконечная сумма бесконечно малых*.

Этот принцип легко распространяется от площади криволинейной трапеции еще на много случаев. Например, с помощью ОИ (и только так) мы легко можем построить формулу для вычисления длины кривой на плоскости. Пусть необходимо рассчитать L-длину части кривой, соответствующей графику функции $f(x)$ на отрезке $[a,b] \in D(f) \subset R^1$. Используя тот же рис. 5.1 для иллюстрации, можно видеть, что приближенно эту длину можно рассчитать как длину той же ломаной. Длину же ломаной l, используя геометрический смысл производной, можно записать через формулу

$$l = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\Delta x^2 + \left(f'(x_i) \Delta x \right)^2} = \sum_{i=1}^{N} \left(\sqrt{1 + f'(x_i)^2} \, \Delta x \right).$$

По аналогии с (5.3), то есть используя определение ОИ как предела интегральной суммы, можно записать

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ N\to\infty}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sqrt{1+f'(x_i)^2}\,\Delta x\right)\right)=L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\,.$$

Рассуждая аналогичным образом, можно прийти к понятию *многомерного определенного интеграла*, то есть определенного интеграла от функции нескольких переменных. Например, тройной интеграл записывают в виде

$$W=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{или} \quad W=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{z_1}^{z_2}f(x,y,z)\,dz\,.$$

Интервалы $[x_1,x_2]$, $[y_1,y_2]$, $[z_1,z_2]$ очевидно определяют некоторый соответствующий параллепипед в трехмерном пространстве. Физический смысл этого интеграла – это вес этого параллепипеда, если плотность материала, из которого он сделан, в каждой точке определяется функцией $f(x,y,z)$. Интегрирование проводится по каждой переменной по отдельности, при этом другие переменные считаются за константы, и порядок чередования переменных не меняет результата. Полезно отметить, что эти правила полностью аналогичны правилам дифференцирования функций нескольких переменных, что конечно же связано с определенным соответствием между интегрированием и дифференцированием как операциями.

Имеется и целый ряд других разновидностей определенных интегралов и вариантов их использования.

Используя геометрический смысл определенного интеграла, а также его понимание как предела интегральной суммы, несложно прийти к следующим основным его свойствам.

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^a f(x)dx=0$, если $f(x)$ ограничена в точке $x=a$.

2. $\int_a^b f(x)dx\ge 0$, если $f(x)\ge 0$ на интервале $[a,b]$, и

   $\int_a^b f(x)dx\le 0$, если $f(x)\le 0$ на интервале $[a,b]$.

3. $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$.

4. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$, если $c\in[a,b]$.

5.8. Определение дифференциального уравнения и его решения

Наряду со многими другими понятиями высшей математики, *дифференциальные уравнения* (ДУ) являются одним из основных инструментов моделирования различных процессов в природе и обществе [1, 4, 6]. Если только какой-нибудь процесс носит динамический характер, то есть протекает во времени и характеризуется изменяющимися во времени параметрами, то при его моделировании всегда возникает необходимость использования ДУ.

***Определение* 5.6.** Выражение вида

$$F(t,y,y')=0\,, \tag{5.4}$$

где $y(t)$ – некоторая неизвестная функция аргумента t, $F(\cdot)$ – некоторая известная функция трех аргументов, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка*. Любая функция $y(t)$, при подстановке которой в выражение (5.4) получается тождество, называется *решением этого дифференциального уравнения*.

Если выражение, определяющее ДУ, включает производные функции $y(t)$ более высокого порядка, чем первый, то это выражение является дифференциальным уравнением соответствующего порядка.

Если ДУ имеет такой вид, что старшая производная $y(t)$ явно выражена через t, $y(t)$ и остальные производные $y(t)$, то такое уравнение называется *приведенным относительно старшей производной*.

Пример.

1) $t\,y'-(4+y^2)\ln(t)=0$ – ДУ первого порядка;

2) $t\,y+t\,y''=\dfrac{\cos(t)}{y-1}$ – ДУ второго порядка, соответствующая приведенная форма этого уравнения имеет вид $y''=\dfrac{\cos(t)}{(y-1)t}-y$.

Аргумент t во многих случаях целесообразно рассматривать как время. Поскольку, как уже было сказано, ДУ прежде всего служат для описания динамических процессов. В данном случае – процесса изменения значения величины y во времени.

Процесс решения ДУ называют *интегрированием* этого уравнения. Это связано с тем, что на каких-то этапах приходится находить неопределенные интегралы от соответствующих выражений. Отсюда несложно понять, из определения интеграла, что найденное решение ДУ будет содержать неопределенную постоянную.

***Определение* 5.7.** Функция $y(t,C)$, являющаяся решением некоторого ДУ при любом значении неопределенной постоянной C, называется *общим решением* этого ДУ. При любом конкретном значении C, соответствующая функция называется *частным* решением этого уравнения.

Если на искомую функцию $y(t,C)$ наложить какое-либо дополнительное условие (или несколько), например, задано ее значение при заданном значении аргумента t (в некоторый момент времени), то таким образом из общего решения будет выделено некоторое соответствующее частное решение. Такая постановка задачи, когда с помощью заданного дополнительного условия, из общего решения выделяется частное, называется *задачей Коши*. Например, задача о нахождении функции удовлетворяющей условиям

$$\begin{cases} y' = f(y,t); \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

является задачей Коши.

Проинтегрировать аналитически ДУ, то есть аналитически решить его, удается далеко не всегда. В этом также имеется аналогия между решением ДУ и операцией интегрирования. Укажем несколько наиболее известных и простых видов ДУ, поддающихся решению.

5.9. Уравнения с разделяющимися переменными

Простейшим типом ДУ, поддающимся интегрированию, является следующий. Если ДУ можно привести к виду

$$y' = f(t)\,g(y),$$

где $f(t)$ и $g(y)$ – некоторые функции, то такое ДУ называется *ДУ с разделяющимися переменными*. Для нахождения решения достаточно перейти от указанного вида к эквивалентному

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t)\,g(y) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{g(y)} = f(t)\,dt$$

и затем попытаться проинтегрировать обе части полученного равенства

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)dt\,.$$

Пример.

1. $t\,y' - (4+y^2)\ln(t) = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; y' = \frac{(4+y^2)\ln(t)}{t} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = \frac{(4+y^2)\ln(t)}{t} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{dy}{(4+y^2)} = \frac{\ln(t)}{t}dt \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{(4+y^2)} = \int\frac{\ln(t)}{t}dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{\ln^2(t)}{2} + C\,,$$

как правило, после интегрирования явно выражать y через t считается необязательным, или же часто это невозможно, однако когда возможно, желательно это делать

$$y = 2\operatorname{tg}\left(\ln^2(t) + 2C\right).$$

2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \left(2xy + x\right)dx - (x^2+1)dy = 0; \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

здесь y является неизвестной функцией аргумента x. Разделяя переменные в дифференциальном уравнении и интегрируя полученное равенство, находим, что

$$\int \frac{x}{(x^2+1)}dx = \int\frac{dy}{2y+1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\ln(2y+1) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2y+1 = e^{2C}\left(x^2+1\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}C_1\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\,.$$

Найдем теперь из дополнительного условия частное решение, которое задано для нулевого значения аргумента (в этом случае его обычно называют начальным условием); подставляя, получаем

$$1 = \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 3 = C_1 .$$

Итак, искомым решением задачи Коши является функция

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 1 .$$

5.10. Однородные ДУ

Если исходное ДУ можно привести к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right), \tag{5.5}$$

то оно называется *однородным ДУ*. Его можно попытаться проинтегрировать, сделав замену переменных $x = \frac{y}{t}$, которой соответствует равенство

$$y'_t = x + x'_t t \;,$$

и подставив полученное в (5.5) приходим к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример.

1. $ty' - y + t\cos^2\frac{y}{t} = 0 \;\Rightarrow\; y' - \frac{y}{t} + \cos^2\frac{y}{t} = 0$,

полученное уравнение является однородным; делая указанную замену, имеем

$$x + t\frac{dx}{dt} - x + \cos^2 x = 0 ,$$

получили ДУ с разделяющимися переменными

$$-\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{dt}{t} \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}(x) + \ln(cx) = 0 ;$$

возвращаясь к исходной переменной, имеем

$$\mathrm{tg}\left(\frac{y}{t}\right) + \ln\left(\frac{cy}{t}\right) = 0 .$$

Отсюда можно выразить y явным образом, однако не будем этого делать, поскольку получится достаточно громоздкое выражение.

2. $y' = \dfrac{y}{x+y}$ – решить самостоятельно.

5.11. Линейные ДУ

Если уравнение можно привести к виду

$$y' + p(x)y = g(x) ,$$

то его называют *линейным ДУ первого порядка*. Такие уравнения, в частности, когда $p(x)$ и $g(x)$ являются постоянными коэффициентами, имеют большое практическое применение.

Это уравнение можно попытаться решить следующим образом. Будем искать решение в виде

$$y(x) = u(x)\,v(x) ,$$

тогда (аргумент x в дальнейшем опускается)

$$y' = u'v + uv'$$

и исходное уравнением переписывается в виде

$$u'v + u(v' + pv) = q ,$$

и если теперь подобрать $v(x)$ так, чтобы

$$(v' + pv) = 0 ,$$

то исходное уравнение будет упрощено до хорошо известного ДУ с разделяющимися переменными. Заметим, что ни возможность этого упрощения, ни последующее его успешное использование не гарантированы.

Пример.

$$y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} ,$$

видим уравнение относится к линейным; используя указанный выше вид искомого решения $y(x) = u(x)v(x)$, получаем эквивалентное ДУ

$$u'v + uv' - \frac{uv}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{2\sqrt{x}}\right) = 2e^{\sqrt{x}} ,$$

находим решение уравнения

$$v' - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0 .$$

Это функция

$$v(x) = e^{\sqrt{x}} .$$

После этого, из соответствующего упрощенного уравнения для $u(x)$, находим, что

$$u = x^2 + C .$$

Таким образом, получаем

$$y(x) = e^{\sqrt{x}}\left(x^2 + C\right).$$

5.12. Численное решение ДУ

Существуют и некоторые другие типы ДУ, для которых разработаны достаточно эффективные методы их аналитического решения. Однако такие типы составляют, вообще говоря, лишь небольшую часть всех возможных видов ДУ, и, в частности, – лишь небольшую часть ДУ, встречающихся в тех или иных практических задачах.

Вполне эффективным и простым путем выхода из этой проблемы является использование *численных методов решения ДУ*. Этот подход основан на очень простой идее замены встречающихся в ДУ производных – их разностным приближением, то есть по формуле, соответствующей определению производной

$$y'(t) \approx \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} .$$

Отсюда, можно найти не аналитическую формулу, определяющую искомую функцию $y(t)$, а лишь последовательность ее значений в дискретные моменты времени

$$t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, t_0 + 3\Delta t, \ldots ,$$

что зачастую является вполне достаточным для практических приложений.
То есть пусть имеется ДУ общего вида

$$y'(t) = f(y, t)$$

и задано начальное условие

$$y(t_0) = y_0 ,$$

тогда можно искать приближенные значения функции $y(t)$, в соответствующие моменты времени, по формуле

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + \Delta t \times f(y(t_i), t_i) , \tag{5.6}$$

где $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ – моменты времени; t_0 – заданный начальный момент времени.

Ясно, что результат будет тем точнее, то есть ближе к истинным значениям неизвестной функции $y(t)$, чем меньше будет принята величина Δt, называемая *шагом интегрирования*. Само соотношение (5.6) называют *разностным уравнением*.

Аналогично производной первого порядка, аппроксимирующую разностную формулу можно записать и для производной любого порядка. Например, для второй производной имеем

$$y''(t) \approx \frac{y(t+\Delta t) - 2y(t) + y(t-\Delta t)}{\Delta t^2} .$$

Подобным образом, численно могут решаться дифференциальные уравнения любого порядка.

Пример. Решим численно задачу Коши, рассматривавшуюся в предыдущих примерах

$$\begin{cases} (2xy + x)dx - (x^2 + 1)dy = 0; \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

по рассмотренной формуле.

Решение. Результаты расчетов показаны на рис. 5.3 и 5.4. Причем, на рис. 5.3 показаны результаты для случая, когда было принято $N = 50$, а на рис. 5.4 для $N = 15$.

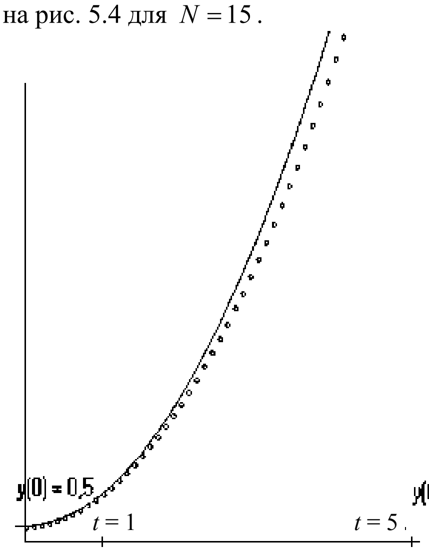


Рис. 5.3

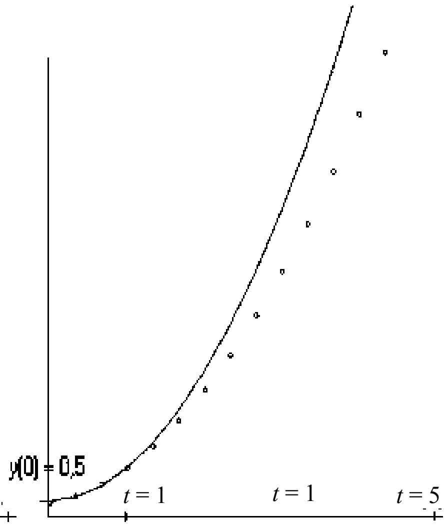


Рис. 5.4

На этих рисунках, для сравнения, показан также график функции аналитического решения. По ним можно судить о мере точности для данного случая. Не стоит забывать, что с помощью компьютера не представляет труда решить численно задачу при любом, гораздо большем N.

Приведенная численная формула (5.6) является простейшей, имеются и более сложные, которые, как правило, характеризуются и большей точностью.

5.13. Системы ДУ

Кроме отдельных ДУ, рассматриваются также системы ДУ. На практике они возникают тогда, когда моделируемый объект (или процесс) характеризуется несколькими меняющимися во времени параметрами, которые взаимно влияют друг на друга. Ясно, что такая ситуация является весьма распространенной.

Например, *система двух ДУ с двумя неизвестными функциями* $y(t)$ и $z(t)$, в простейшем случае может иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f_1(y,z,t); \\ \dfrac{dz}{dt} = f_2(y,z,t). \end{cases} \tag{5.7}$$

Аналогично случаю одного уравнения, ее общее решение представляет собой целое параметрическое семейство кривых $y(t,C_1,C_2)$, $z(t,C_1,C_2)$, которое зависит уже от двух неопределенных параметров.

Далее, могут быть заданы дополнительные условия на значения функций при заданных значениях аргумента t. Например, начальные условия $y(t_0) = y_0$ и $z(t_0) = z_0$. Такие дополнительные условия позволяют из семейства решений системы ДУ (5.7) выделить единственным образом искомые функции $y(t)$ и $z(t)$.

Из всего многообразия систем ДУ регулярные методы решения разработаны только для *линейных систем ДУ с постоянными коэффициентами*, то есть для систем вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_1; \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Достаточно ясно, что это весьма частный случай системы ДУ. Однако в прикладной математике, и в частности в экономическом моделировании, такие системы играют значительную роль.

Несмотря на сложности, в общем случае, с нахождением решения аналитически, численное решение систем ДУ не вызывает принципиальных осложнений. По аналогии с вышесказанным, от системы (5.7) можно перейти к системе разностных уравнений вида

$$\begin{cases} y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + \Delta t \times f_1(y(t_i), z(t_i), t_i); \\ z(t_{i+1}) \approx z(t_i) + \Delta t \times f_2(y(t_i), z(t_i), t_i). \end{cases}$$

Как и ранее, возможны варианты схем разностных уравнений. Например, так называемые, *неявные схемы*, которые могут дать большую точность, чем приводившаяся ранее *явная разностная схема*.

5.14. Использование ДУ при моделировании экономических процессов

В последние годы в образовательные программы экономических специальностей входят весьма сложные математические модели экономических процессов. Обычно их изучают в завершающих частях дисциплины «Экономическая теория». Большая часть этих моделей основана на использовании ДУ.

Рассмотрим в качестве простейшего примера, так называемую, односекторную модель экономического роста – модель Солоу [6].

Состояние экономики в модели Солоу задается следующими пятью переменными: X – внутренний валовый продукт (ВВП); C – фонд непроизводственного потребления; I – инвестиции в основные фонды, L – число занятых; K – производственные (основные) фонды. Кроме того в модели, в качестве параметров, используются следующие показатели: ν – годовой темп прироста числа занятых; μ – доля выбывших за год основных производственных фондов; p – доля валовых инвестиций в ВВП (норма накопления).

Предполагается, что годовой выпуск продукции в каждый момент времени определяется производственной функцией Кобба-Дугласа

$$X = \gamma K^{\alpha} L^{\beta} ,$$

где α, β, γ – известные постоянные, найденные из анализа статистических данных о функционирования экономики в предыдущие периоды.

Износ и инвестиции в производственные фонды за время Δt соответственно составят $\mu K\Delta t$ и $I\Delta t$, поэтому прирост фондов за это время

$$\Delta K = -\mu K\Delta t + I\Delta t ,$$

переходя к пределу при $\Delta t \to \infty$, получаем ДУ

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\mu K + I$$

с начальным условием

$$K(0) = K_0 .$$

Принимая, как это обычно делается, что число занятых растет во времени по экспоненциальному закону, модель Солоу может быть записана в виде следующей совокупности алгебраических и дифференциальных уравнений:

$$L(t) = L_0\, e^{\nu t} ;$$

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} = -\mu\, K(t) + I(t) ,\ K(0) = K_0 ;$$

$$X(t) = \gamma \left[K(t)\right]^{\alpha} \left[L(t)\right]^{\beta} ;$$

$$I(t) = p\, X(t) ;$$

$$C(t) = (1-p)\, X(t) .$$

Посредством подстановки нужных равенств в ДУ можно перейти от этой системы к единственному ДУ, однако в этом нет практического смысла, так как будет потеряна ясность структуры этой модели.

В качестве примера модели, представляющей собой систему ДУ, можно привести модель Солоу с учетом запаздывания во вводе фондов $V(t)$. Это запаздывание в простейшем случае можно выразить следующим образом:

$$V(t) = I(t-\tau) ,$$

где τ – некоторый фиксированный лаг запаздывания. Однако более точно, имеющий место на практике процесс выражается через, так называемый, *распределенный во времени* лаг. Ко времени t, от начала рассмотрения процесса накопления инвестиций, они будут накоплены в объеме

$$V(t) = \int_{-\infty}^{t} N(t-\tau) I(\tau) d\tau , \qquad (5.8)$$

где функция $N(t-\tau)$ выражает эту распределенность. Часто ее принимают, например, экспоненциальной

$$N(t-\tau) = \lambda\, e^{-\lambda(t-\tau)} .$$

В этом случае после дифференцирования (5.8) мы получим следующее ДУ

$$\frac{dV(t)}{dt} = \left(\int_{-\infty}^{t} \lambda\, e^{-\lambda(t-\tau)}\, I(\tau) d\tau \right)' = \left(\lambda\, e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda\tau}\, I(\tau) d\tau \right)' =$$

$$= \lambda\, e^{-\lambda t} \left(\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda\tau}\, I(\tau) d\tau \right)' + \left(\lambda\, e^{-\lambda t}\right)' \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda\tau}\, I(\tau) d\tau = \lambda\, I(t) - \lambda\, V(t).$$

Которое, в совокупности с предыдущими соотношениями, дает следующую модель, представляющую собой систему дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$L(t) = L_0\, e^{\nu t};$$

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} = -\mu\, K(t) + V(t),\ K(0) = K_0;$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \lambda\, I(t) - \lambda V(t),\ V(0) = V_0;$$

$$X(t) = \gamma \left[K(t)\right]^{\alpha} \left[L(t)\right]^{\beta};$$

$$I(t) = p\, X(t);$$

$$C(t) = (1-p)\, X(t).$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое первообразная? Почему она не всегда существует?
2. Приведите пример функции, у которой первообразной не существует.
3. Почему говорят, что интегрирование является операцией обратной дифференцированию?
4. Интегралы от каких функций считаются табличными? Как они могут быть найдены?
5. Какие вы знаете методы интегрирования?
6. Почему замена переменных так часто используется?
7. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла? Для решения каких задач он может быть использован?
8. Для чего используются дифференциальные уравнения?
9. Почему процесс решения дифференциального уравнения часто называют интегрированием?
10. Приведите пример дифференциального уравнения, у которого нет аналитического решения.
11. Какие вы знаете виды дифференциальных уравнений, которые часто поддаются аналитическому решению?
12. В чем недостатки численного решения дифференциальных уравнений?

Заключение

Рассмотренные вопросы относятся к основополагающим вопросам фундаментальной (теоретической) математики. Для студентов нематематических специальностей, в частности экономистов, изучение этих вопросов не должно считаться самоцелью, а должно рассматриваться (и преподавателями, и студентами) лишь как необходимый этап формирования математической базы, необходимой для изучения многочисленных моделей прикладной математики. Зачастую недостаточно хорошее понимание основных фактов и неумение мыслить абстрактно (математически) делает затруднительным четкое понимание и прикладных математических моделей и соответствующих методов анализа данных и принятия решений. А это, в свою очередь, ведет к существенным пробелам в собственно специальном (экономическом) образовании учащихся.

В современных условиях все выше ценится профессионализм, который означает умение четко, основываясь на знаниях, а не на эвристических оценках, ориентироваться в ситуациях и принимать конкретные управленческие действия. При этом и в образовательных программах все сильнее прослеживается стремление представить материал, описать соответствующие процессы и ситуации, как можно более четко и структурировано. Это касается практически всех дисциплин, например, экономических специальностей. Не последнюю роль, а зачастую роль возрастающую, играют при этом математические (или математизированные) формы описания, то есть математические модели. Прогнозирование развития экономических процессов, правильная оценка последствий тех или иных вариантов решений и выбор из них оптимального, невозможны без соответствующих математических методов. Это особенно важно при анализе инвестиций в финансовой и страховой деятельности.

Изучение соответствующих математических моделей и методов является следующим этапом подготовки студентов.

1. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей : учебник / М.С. Красс. – М. : ИНФРА-М, 1999. – 464 с.
2. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д.В. Беклемишев. – М. : Физматлит, 2004. – 304 с.
3. Коссов, В.В. Межотраслевые модели: Теория и практика использования / В.В. Коссов. – М. : Экономика, 1973. – 279 с.
4. Шипачев, В.С. Высшая математика : учебник для вузов. – 5-е изд., стер. / В.С. Шипачев. – М. : Высшая школа. 2001. – 479 с. : ил.
5. Воднев, В.Т. Основные математические формулы / В.Т. Воднев, А.Ф. Наумович, Н.Ф. Наумович; под ред. Ю.С. Богданова. – Мн. : Высшая школа, 1980. – 336 с., ил.
6. Колемаев, В.А. Математическая экономика : учебник для вузов / В.А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

содержание

Введение ………………………………………………………………. 3

1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ……………..………………………..…. 4
   - 1.1. Определение матрицы ………………………………………… 4
   - 1.2. Сложение матриц и умножение на число ……………………. 5
   - 1.3. Умножение матриц ……………………………………………. 6
   - 1.4. Определители матриц. Вычисление определителей матриц второго и третьего порядков ………………………………. 8
   - 1.5. Вычисление определителей высших порядков ……………… 10
   - 1.6. Обратная матрица ……………………………………………... 13
   - 1.7. Транспонирование матриц ……………………………………. 15
   - 1.8. Системы линейных уравнений ……………………………….. 15
   - 1.9. Метод Крамера ………………………………………………… 18
   - 1.10. Матричный способ …………………………………………….. 18
   - 1.11. Метод Гаусса …………………………………………………... 20
   - 1.12. Множество решений СЛАУ …………………………………... 23
2. МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА ……………………... 27
   - 2.1. Основные понятия и соотношения моделей межотраслевого баланса ……………………………………………….……... 27
   - 2.2. Матричная форма записи модели межотраслевого баланса ... 29
   - 2.3. Матрица полных затрат ……………………………………….. 31
   - 2.4. Пример использования МОБ ………………………………….. 33
3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ПРЕДЕЛЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ …………………... 37
   - 3.1. Понятие числовой последовательности и их классификация ... 37
   - 3.2. Арифметические действия над числовыми последовательностями …………………………………………………… 39
   - 3.3. Предел последовательности …………………………………... 40
   - 3.4. Теоремы о пределах последовательностей …………………... 42
   - 3.5. Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы …... 42
   - 3.6. Понятие функции и способы ее задания. Элементарные и сложные функции ……………………………………………... 45
   - 3.7. Предел функции в точке ………………………………………. 46
   - 3.8. Односторонние пределы и непрерывность функции ……….. 49
   - 3.9. Определение производной функции …………………………. 51
4. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ……..……. 54
   - 4.1. Физический и геометрический смысл производной ………… 54
   - 4.2. Использование геометрического смысла производной при решении задач ………………………………………………… 56
   - 4.3. Методика дифференцирования сложной функции ………….. [illegible]
   - 4.4. Дифференциал функции в точке и его свойства …………….. 59
   - 4.5. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя ………… 60
   - 4.6. Монотонность функции. Достаточное условие монотонности ... 61
   - 4.7. Экстремумы функций. Необходимое условие экстремума … 62
   - 4.8. Выпуклость, вогнутость. Условие выпуклости и вогнутости ... 65
   - 4.9. Достаточные условия экстремума ……………………………. 66
   - 4.10. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке …. 67
   - 4.11. Асимптоты функции …………………………………………... 68
   - 4.12. Общий план исследования функции и построение ее графика ... 70
   - 4.13. Функции нескольких переменных ……………………………. 73
   - 4.14. Производная функции нескольких переменных …………….. 74
   - 4.15. Дифференцируемость. Геометрический смысл частных производных. Необходимое условие экстремума …………… 76
   - 4.16. Формула Тейлора ……………………………………………… 78
   - 4.17. Достаточное условие экстремума функции многих переменных …………………………………………………….. 79
   - 4.18. Непосредственное исследование критической точки ……… 81
5. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВ- 85

НЕНИЯ ………………………………………………………...
5.1. Первообразная и неопределенный интеграл ………………… 85
5.2. Табличные интегралы. Непосредственное интегрирование ... 86
5.3. Основные методы интегрирования. Метод замены переменных ……………………………………………………. 87
5.4. Основные методы интегрирования. Метод интегрирования по частям ……………………………………………………... 88
5.5. Некоторые специальные виды замены переменных …………. 89
5.6. Определенный интеграл …………………………………….. 91
5.7. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Свойства определенного интеграла …………………………... 95
5.8. Определение дифференциального уравнения и его решения … 97
5.9. Уравнения с разделяющимися переменными ………………... 99
5.10. Однородные ДУ ……………………………………………….. 100
5.11. Линейные ДУ …………………………………………………... 101
5.12. Численное решение ДУ …………………………………….. 102
5.13. Системы ДУ …………………………………………………. 104
5.14. Использование ДУ при моделировании экономических процессов ……………………………………………………. 105
Заключение ……………………………………………………... 109
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ………………………………………..… 110