В.И. ФОМИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I

♦ Издательство ТГТУ ♦

УДК 517(075)
ББК В16я73
Ф762

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии ТГУ им. Г.Р. Державина
А.И. Булгаков

Доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой прикладной математики и механики ТГТУ
Г.М. Куликов

Фомин, В.И.
Ф762 Математический анализ I : учебное пособие / В.И. Фомин. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 236 с. – 175 экз. – ISBN 978-5-8265-0753-7

Изложен теоретический материал по дисциплине "Математический анализ", предусмотренный Государственным образовательным стандартом для специальности 090105. Теоретические положения иллюстрируются конкретными примерами и рисунками. Представлен обширный справочный материал в виде четырех приложений.

Предназначено для студентов первого курса инженерных специальностей вузов.

УДК 517(075)
ББК В16я73

ISBN 978-5-8265-0753-7

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

В.И. Фомин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I

Утверждено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия для студентов
инженерных специальностей вузов

Тамбов
♦ Издательство ТГТУ ♦
2008

Учебное издание

ФОМИН Василий Ильич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
I

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано к печати 12.09.2008
Формат 60 × 84/16. 13,72 усл. печ. л. Тираж 175 экз. Заказ № 385

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

В данном учебном пособии изложен теоретический материал по дисциплине "Математический анализ", предусмотренный Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования для студентов инженерных специальностей вузов в первом учебном семестре.

В лекциях 1 – 4 излагается теория вещественных чисел по Дедекинду, в частности, изучаются свойства ограниченных множеств вещественных чисел.

В лекциях 5 – 8 рассматриваются свойства числовых последовательностей и их пределов.

В лекциях 9 – 12 изучаются свойства вещественных функций вещественного аргумента и их пределов.

В лекциях 13, 14 вводится понятие непрерывности функции, изучаются свойства непрерывных на отрезке функций, проводится классификация точек разрыва функции.

В лекциях 15 – 17 излагаются начала дифференциального исчисления, в частности, приводится доказательство теорем Ферма, Дарбу, Ролля, Лагранжа, Коши.

В учебное пособие включены три дополнения, материал которых предлагается для изучения на практических занятиях.

Учебное пособие снабжено необходимым справочным материалом, в частности, содержит четыре приложения и предметный указатель.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$::=$ – оператор определения ("это по определению")

☛ и ☚ – начало и окончание доказательства

⫪ – предположение противного ("предположим противное")

$\overline{⫪}$ – отрицание предположения противного ("предположение противного неверно")

$\Rightarrow$ – знак логического следования ("следует", "вытекает")

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности (эквивалентности) ("тогда и только тогда")

$\forall$ – квантор общности ("для любого", "для каждого", "для всякого")

$\exists$ – квантор существования ("существует", "найдётся")

$\in$ – знак принадлежности ("принадлежит")

$\overline{\in}$ или $\notin$ – знак непринадлежности ("не принадлежит")

$\wedge$ – конъюнкция ("и")

$\vee$ – дизъюнкция ("или")

$|$ (или $:$) – "такой (такая, такое), что"

$\varnothing$ – пустое множество

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ или $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ – конечное множество, состоящее из элементов $x_1, x_2, ..., x_n$

$\{x \,|\, P(x)\}$ – множество элементов x, удовлетворяющих условию $P(x)$

$A \subset B$ – множество A включено во множество B и $A \neq B$

$A \subseteq B$ – множество A включено во множество B (возможно, что $A = B$)

$A \cup B$ – объединение множеств A и B

$A \cap B$ – пересечение множеств A и B

$A \setminus B$ – разность множеств A и B

N – множество натуральных чисел

N_- – множество отрицательных целых чисел

Z – множество целых чисел

Q – множество рациональных чисел

W – множество иррациональных чисел

R – множество вещественных (действительных) чисел

L – множество простых чисел

$[a,b]$ – сегмент (замкнутый промежуток, отрезок)

(a,b) – интервал (открытый промежуток)

$[a,b)$ (или $(a,b]$) – полуинтервал (полуоткрытый промежуток, полусегмент)

$[a,+\infty)$ (или $(-\infty,b]$) – замкнутая полуось (замкнутая полупрямая, замкнутый луч)

$(a,+\infty)$ (или $(-\infty,b)$) – открытая полуось (открытая полупрямая, открытый луч)

$(-\infty,+\infty)$ – числовая ось (числовая прямая)

$p \mid q$ – "натуральное число p делит нацело натуральное число q"

$(p,q)=1$ – "наибольший общий делитель натуральных чисел p и q равен единице"

C_n^k – биномиальные коэффициенты

$A \mid A'$ – сечение в области рациональных чисел

$\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$ – сечение в области вещественных чисел

$\sup \Omega$ – точная верхняя грань множества Ω

$\inf \Omega$ – точная нижняя грань множества Ω

$O_\delta(x_0)$ – дельта-окрестность точки x_0

$\dot{O}_\delta(x_0)$ – проколотая дельта-окрестность точки x_0

$O_\delta^-(x_0)$ – левосторонняя дельта-полуокрестность точки x_0

$O_\delta^+(x_0)$ – правосторонняя дельта-полуокрестность точки x_0

$\dot{O}_\delta^-(x_0)$ – проколотая левосторонняя дельта-полуокрестность точки x_0

$\dot{O}_\delta^+(x_0)$ – проколотая правосторонняя дельта-полуокрестность точки x_0

$\{x_n\}$ – числовая последовательность с общим членом x_n

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ – предел последовательности $\{x_n\}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ – верхний предел последовательности $\{x_n\}$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ – нижний предел последовательности $\{x_n\}$

$y = f(x)$ – переменная y есть функция переменной x

$f(x_0)$ – значение функции $f(x)$ в точке x_0

$E(x)$ (или $[x]$) – целая часть числа x

$\operatorname{sgn} x$ – функция знака

$\eta(x)$ – функция Хевисайда

б.м.в. – бесконечно малая величина

б.м.п. – бесконечно малая последовательность

б.б.в. – бесконечно большая величина

$\alpha(x) \underset{x\to x_0}{=} O(\beta(x))$ – б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости при $x \to x_0$

$\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$ – б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны при $x \to x_0$

$\alpha(x) \underset{x\to x_0}{=} o(\beta(x))$ – $\alpha(x)$ является б.м.в. высшего порядка малости по сравнению с б.м.в. $\beta(x)$ при $x \to x_0$

$f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ – производная функции $y = f(x)$ в точке x_0

$dy(x_0)$, $df(x_0)$ – дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0

$f'(x)$, $y'(x)$, $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx}$ – производная функции $y = f(x)$

dx – дифференциал независимой переменной x

$dy(x)$, $df(x)$, dy, df – дифференциал функции $y = f(x)$

Л е к ц и я 1. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Множества натуральных, целых и рациональных чисел; пример задачи, решение которой нельзя выразить рациональным числом; сечение в области рациональных чисел, примеры сечений; определение иррационального числа; вещественные числа; упорядочение области вещественных чисел; бесконечность множества иррациональных чисел.

Из школьного курса математики известны следующие числовые множества:

1°. Множество натуральных (или положительных целых чисел):

$$\mathrm{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n,\ \dots\}. \tag{1.1}$$

Множество N бесконечно; в нём есть наименьшее число $a = 1$ и нет наибольшего числа (в записи (1.1) элементы множества N перечислены в возрастающем порядке). Краткая запись множества N: $\mathrm{N} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$.

2°. Множество отрицательных целых чисел:

$$\mathrm{N}_- = \{-1,\ -2,\ -3,\ \dots, -n,\ \dots\}. \tag{1.2}$$

Множество N_- бесконечно; в нём есть наибольшее число $b = -1$ и нет наименьшего числа (в записи (1.2) элементы множества N_- перечислены в убывающем порядке). Краткая запись множества N_-: $\mathrm{N}_- = \{-n\}_{n=1}^{\infty}$.

3°. Множество целых чисел:

$$\mathrm{Z} = \{\dots, -n,\ \dots, -3,\ -2,\ -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n,\ \dots\}, \tag{1.3}$$

или

$$\mathrm{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \dots,\ \pm n,\ \dots\}.$$

Множество Z бесконечно; в нём нет наименьшего и наибольшего чисел (в записи (1.3) элементы множества Z перечислены в возрастающем порядке). Краткая запись множества Z: $\mathrm{Z} = \{0, \pm n\}_{n=1}^{\infty}$. Заметим, что $\mathrm{Z} = \mathrm{N} \cup \mathrm{N}_- \cup \{0\}$ и $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$.

4°. Множество рациональных чисел:

$$\mathrm{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathrm{Z};\ q \neq 0 \right\}.$$

Заметим, что каждое рациональное число можно представить в виде отношения различных целых чисел, например, $\dfrac{2}{7} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{6}{21} = \dots$.

Имеется ряд задач, решения которых нельзя выразить рациональными числами.

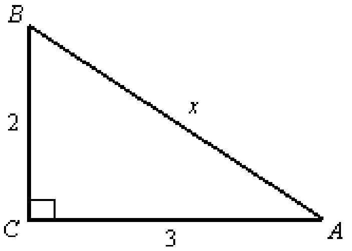

Рис. 1.1

Рассмотрим, например, задачу о вычислении длины гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 2 и 3 (рис. 1.1).

По теореме Пифагора $x^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Замечание 1.1. Не существует рационального числа, квадрат которого равен 13.

Действительно, $\Pi\!\!\Pi$: $\exists \dfrac{p}{q} \in \mathrm{Q} \mid \left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 13$. Без ограничения общности можно считать, что $(p, q) = 1$, т.е. p и q взаимно простые числа. Тогда $p^2 = 13q^2 \Rightarrow 13 \mid p^2 \Rightarrow 13 \mid p$, т.е $p = 13r$. Имеем: $(13r)^2 = 13q^2 \Rightarrow q^2 = 13r^2 \Rightarrow 13 \mid q^2 \Rightarrow 13 \mid q$. Получили: $13 \mid p$ и $13 \mid q$, что противоречит условию $(p, q) = 1$. $\overline{\Pi\!\!\Pi}$.

Таким образом, длина x гипотенузы AB не может быть выражена рациональным числом и для решения поставленной задачи необходимо ввести новые числа, которые в дальнейшем будем называть иррациональными числами.

Введём понятие иррационального числа. Для этого понадобится понятие сечения в области рациональных чисел.

Определение 1.1. *Сечением в области рациональных чисел* называется разбиение множества Q на два непустых множества A и A', удовлетворяющих следующим условиям:

1) $A \cap A' = \varnothing$;

2) для $\forall a \in A,\ \forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$,

при этом множество A называется *нижним классом сечения*, множество A' – *верхним классом сечения.*

Обозначение сечения: $A \mid A'$.

Замечание 1.2. Если $a \in A$, то для $\forall a_1 < a \;\Rightarrow\; a_1 \in A$.

Действительно, $\Pi\!\!\Pi$: $a_1 \notin A$, тогда $a_1 \in A'$. Имеем: $a \in A, a_1 \in A' \Rightarrow\; a < a_1$ по условию 2). Противоречие. $\overline{\Pi\!\!\Pi}$.

Замечание 1.3. Если $a' \in A'$, тогда $\forall a_1' > a' \Rightarrow a_1' \in A'$.

Действительно, $\Pi\!\!\Pi$: $a_1' \notin A'$, тогда $a_1' \in A$. Получили: $a_1' \in A$, $a' \in A' \Rightarrow a_1' < a'$ по условию 2). Противоречие. $\overline{\Pi\!\!\Pi}$.

Замечание 1.4. Не существует сечения в области рациональных чисел, для которого в нижнем классе имеется наибольшее число и в верхнем классе есть наименьшее число.

Действительно, $\Pi\!\!\Pi$: $\exists A \mid A' \mid a_0$ – наибольшее число в классе A, a_0' – наименьшее число в классе A'. Тогда $a_0 < a_0'$ в силу условия 2) из определения 1.1. В силу плотности области рациональных чисел $\exists r \in \mathrm{Q} \mid a_0 < r < a_0'$. Заметим, что $r \notin A$, ибо если бы $r \in A$, то a_0 не было бы наибольшим числом в классе A. Далее, $r \notin A'$, ибо если бы $r \in A'$, то a_0' не было бы наименьшим числом в классе A'. Получили: $r \notin A$, $r \notin A' \Rightarrow r \notin A \cup A'$, т.е. $r \notin \mathrm{Q}$ ибо $A \cup A' = \mathrm{Q}$ (см. определение 1.1). Противоречие. $\overline{\Pi\!\!\Pi}$.

Рассмотрим примеры сечений в области рациональных чисел.

Пример 1.1. Пусть $r \in \mathrm{Q}$, r фиксировано. Положим $A = \{a \in \mathrm{Q} \mid a < r\}$, $A' = \{a' \in \mathrm{Q} \mid a' \ge r\}$. Заметим, что $A \ne \varnothing$, $A' \ne \varnothing$, $A \cup A' = \mathrm{Q}$ и множества A, A' удовлетворяют условиям 1), 2). Следовательно, $A \mid A'$ – сечение в области рациональных чисел. Верхний класс A' содержит наименьшее число r, следовательно, в силу замечания 1.4, в нижнем классе A нет наибольшего числа, т.е. $\forall a \in A\ \exists a_2 \in A \mid a_2 > a$. Будем говорить, что построенное сечение $A \mid A'$ определяет рациональное число r (это число r является пограничным между классами A и A').

Пример 1.2. Пусть $r \in \mathrm{Q}$, r фиксировано. Положим $A = \{a \in \mathrm{Q} \mid a \le r\}$, $A' = \{a' \in \mathrm{Q} \mid a' > r\}$. Очевидно, что $A \mid A'$ является сечением в области рациональных чисел. Нижний класс A содержит наибольшее число r, следовательно, в силу замечания 1.4, в верхнем классе A' нет наименьшего числа, т.е. для $\forall a' \in A'\ \exists a_2' \in A' \mid a_2' < a'$. Построенное сечение $A \mid A'$ определяет рациональное число r, которое является пограничным между классами A и A'.

Итак, любое рациональное число r определяется либо сечением из примера 1.1, либо сечением из примера 1.2.

Замечание 1.5. В дальнейшем будем считать для определённости, что рациональное число r определяется сечением из примера 1.1, т.е. сечением, нижний класс которого не имеет наибольшего числа, а верхний класс имеет наименьшее число; другими словами, будем включать рациональное число r в верхний класс сечения, определяющего это число.

Пример 1.3. Пусть $A = \{a \in \mathrm{Q} \mid a \le 0\} \cup \{a \in \mathrm{Q} \mid a > 0,\ a^2 < 13\}$, $A' = \{a' \in \mathrm{Q} \mid a' > 0,\ a'^2 > 13\}$. Имеем: $A \ne \varnothing$, $A' \ne \varnothing$ и в силу замечания 1.1 $A \cup A' = \mathrm{Q}$. Множества A, A' удовлетворяют условиям 1), 2). Следовательно, $A \mid A'$ – сечение в области рациональных чисел.

Покажем, что в классе A нет наибольшего числа. Если $a \in A$ и $a \le 0$, то любое $a_2 \in A$, $a_2 > 0$, больше a. Возьмём произвольное фиксированное $a \in A$, $a > 0$ (это означает, что $a^2 < 13 \Rightarrow 13 - a^2 > 0$). Покажем, что при достаточно большом натуральном n число вида $a_2 = a + \dfrac{1}{n}$ удовлетворяет условию $a_2 \in A$, т.е. $a_2^2 < 13$:

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<13\,.$$

Имеем:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<13 \text{ или } \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<13-a^2\,. \qquad (1.4)$$

Так как $\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}\le\frac{2a}{n}+\frac{1}{n}$, $\forall n\in \mathrm{N}$, то для выполнения (1.4.) достаточно, чтобы $\frac{2a}{n}+\frac{1}{n}<13-a^2$ или

$$n>\frac{2a+1}{13-a^2}\,. \qquad (1.5)$$

Итак, если взять *n*, удовлетворяющее условию (1.5), то число $a_2=a+\frac{1}{n}\in A$. Мы указали $a_2\in A\,|\,a_2>a$. А это означает, что в классе A нет наибольшего числа.

Замечание 1.6. Существование натурального числа *n*, удовлетворяющего условию (1.5), следует из аксиомы Архимеда: для $\forall c\in \mathrm{Q}$, $c>0$ $\exists n\in \mathrm{N}\,|\,n>c$.

Покажем, что в классе A' нет наименьшего числа. Возьмём произвольное фиксированное $a'\in A'$, т.е. $a'>0$ и $a'^2>13\Rightarrow$ $a'^2-13>0$. Покажем, что число вида $a_1'=a'-\frac{1}{n}$ при достаточно большом $n\in \mathrm{N}$ удовлетворяет условию $a_1'\in A'$, т.е. $a_1'^2>13$:

$$\left(a'-\frac{1}{n}\right)^2>13\,.$$

Имеем:

$$a'^2-\frac{2a'}{n}+\frac{1}{n^2}>13 \text{ или } \frac{2a'}{n}-\frac{1}{n^2}<a'^2-13\,. \qquad (1.6)$$

Так как $\frac{2a'}{n}-\frac{1}{n^2}<\frac{2a'}{n}$, $\forall n\in \mathrm{N}$, то для выполнения (1.6) достаточно, чтобы $\frac{2a'}{n}<a'^2-13$ или

$$n>\frac{2a'}{a'^2-13}\,. \qquad (1.7)$$

Если взять *n*, удовлетворяющее условию (1.7), то $a_1'=a'-\frac{1}{n}\in A'$. Указано число $a_1'\in A'\,|\,a_1'<a'$, следовательно, в классе A' нет наименьшего числа.

Мы показали, что в A нет наибольшего числа, а в A' нет наименьшего числа, т.е. нет рационального числа, которое являлось бы пограничным между нижним и верхним классами сечения. В области рациональных чисел обнаруживается пробел, не позволяющий решить уравнение $x^2=13$ в рациональных числах, т.е. найти длину гипотенузы рассмотренного выше ΔABC. Чтобы устранить пробелы такого рода вводят новые объекты – иррациональные числа.

Определение 1.2. Будем говорить, что всякое сечение $A|\,A'$ в области рациональных чисел, для которого в нижнем классе нет наибольшего числа, а в верхнем классе нет наименьшего числа, определяет *иррациональное число* α.

Это число α является пограничным между классами A и A'. В примере 1.3 в качестве иррационального числа α выступает $\sqrt{13}$.

В дальнейшем мы будем связывать всякое иррациональное число α с тем сечением $A|\,A'$ в области рациональных чисел, которое его определяет:

$$A\,|\,A'\to\alpha\,.$$

Таким образом, существует только три вида сечений в области рациональных чисел:

а) в нижнем классе нет наибольшего числа, а в верхнем классе есть наименьшее число (пример 1.1);

б) в нижнем классе есть наибольшее число, а в верхнем классе нет наименьшего числа (пример 1.2);

в) в нижнем классе нет наибольшего числа, а в верхнем классе нет наименьшего числа (пример 1.3);

Замечание 1.7. С учётом замечания 1.5 будем рассматривать в дальнейшем только два вида сечений в области рациональных чисел, а именно, сечения вида а) и в).

Определение 1.3. *Вещественными* (*действительными*) *числами* называются рациональные и иррациональные числа.

Пусть R – множество вещественных чисел, W – множество иррациональных чисел. Тогда $\mathrm{R}=\mathrm{Q}\cup\mathrm{W}$. Заметим также, что $\mathrm{N}\subset\mathrm{Z}\subset\mathrm{Q}\subset\mathrm{R}$.

Укажем, как сравнивать по величине два вещественных числа. Пусть $\alpha,\beta\in \mathrm{R}$.

Определение 1.4. Будем считать, что $\alpha = \beta$, если сечения $A|A'$ и $B|B'$, определяющие числа α и β, совпадают, т.е. $A = B$ и $A' = B'$.

Замечание 1.8. В определении 1.4 достаточно потребовать, чтобы $A = B$ (или $A' = B'$).

Действительно, если $A = B$, то $A' = \mathrm{Q} \setminus A$ совпадает с $B' = \mathrm{Q} \setminus B$.

Как сравнивать по величине два рациональных числа, известно из школьного курса математики.

Пусть $\alpha \in \mathrm{W}$, $\beta \in \mathrm{Q}$, $A|A'$ – сечение, определяющее число α. Тогда, по определению, если $\beta \in A$, то $\alpha > \beta$, если $\beta \in A'$, то $\beta > \alpha$.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{W}$; $A|A'$ и $B|B'$ – сечения, определяющие числа α и β. Тогда по определению, $\alpha > \beta$, если $A \supset B$ и $A \neq B$ (другими словами, если $A' \subset B'$ и $A' \neq B'$).

Замечание 1.9. Для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha > \beta$, либо $\beta > \alpha$.

Действительно, пусть $A|A'$ и $B|B'$ – сечения, определяющие числа α и β. Тогда, если $A = B$, то $\alpha = \beta$; если $A \supset B$ и $A \neq B$, то $\alpha > \beta$; если A не содержит в себе B, то $\exists b_0 \in B \mid b_0 \notin A \Rightarrow b_0 \in A' \Rightarrow$ $a < b_0$ для $\forall a \in A$ (в силу условия 2) из определения 1.1); получили: $b_0 \in B$ и $a < b_0$ для $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ для $\forall a \in A$ (в силу замечания 1.2) $\Rightarrow B \supset A$ и $B \neq A$ (ибо $b_0 \notin A$) $\Rightarrow \beta > \alpha$.

Введём понятие знака <. Будем считать, что $\alpha < \beta$, если $\beta > \alpha$.

Вещественное число α называется положительным, если $\alpha > 0$; и отрицательным, если $\alpha < 0$.

Вещественные числа обладают свойством транзитивности: если $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$ и $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, то $\alpha > \gamma$.

Действительно, пусть $A|A'$, $B|B'$, $C|C'$ – сечения, определяющие числа α, β, γ. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \alpha > \beta \Rightarrow A \supset B,\ A \neq B \\ \beta > \gamma \Rightarrow B \supset C,\ B \neq C \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \supset C,\ A \neq C \Rightarrow \alpha > \gamma .$$

Возникает естественный вопрос: как много иррациональных чисел.

Рассмотрим множество простых чисел:

$$\mathrm{L} = \{2,\ 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}.$$

Замечание 1.10. Множество L бесконечно.

Действительно, : множество L конечно, т.е. $\mathrm{L} = \{l_1,\ l_2, \ldots, l_n\}$. Рассмотрим число $c = l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots \cdot l_n + 1$. Заметим, что $c > l_i$, $\forall\ 1 \le i \le n \Rightarrow c$ является составным числом $\Rightarrow \exists l_i \in \mathrm{L} \mid\ l_i \mid c \Rightarrow l_i \mid 1$. Противоречие.

Замечание 1.11. Для простого числа l не существует рационального числа, квадрат которого равен l.

Чтобы убедиться в справедливости замечания 1.11 достаточно в пояснении к замечанию 1.1 число 13 заменить на число l.

Теорема 1.1. Множество иррациональных чисел бесконечно.

Пусть $l \in \mathrm{L}$, l фиксировано. Положим $A = \{a \in \mathrm{Q} \mid a \le 0\} \cup\ \cup \{a \in \mathrm{Q} \mid a > 0,\ a^2 < l\}$, $A' = \{a' \in \mathrm{Q} \mid a' > 0,\ a'^2 > l\}$. Заметим, что $A \neq \varnothing$, $A' \neq \varnothing$ и в силу замечания 1.11 $A \cup A' = \mathrm{Q}$. Множества A, A' удовлетворяют условиям 1), 2) из определения 1.1, следовательно, $A|A'$ – сечение в области рациональных чисел. В нижнем классе A нет наибольшего числа, а в верхнем классе A' нет наименьшего числа (чтобы убедиться в этом, достаточно в рассуждениях из примера 1.3 число 13 заменить на число l). Следовательно, сечение $A|A'$ определяет иррациональное число $\alpha = \sqrt{l}$. Таким образом, для каждого простого числа l можно построить иррациональное число $\alpha = \sqrt{l}$, при этом, если $l_1, l_2 \in \mathrm{L}$, $l_1 \neq l_2$, то $\sqrt{l_1} \neq \sqrt{l_2}$, ибо сечения, определяющие числа $\sqrt{l_1}, \sqrt{l_2}$, не совпадают. Следовательно, в силу бесконечности множества L (см. замечание 1.10) множество W бесконечно.

Известно [10, с. 22], что иррациональных чисел "существенно больше", чем рациональных чисел.

Л е к ц и я 2. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА (продолжение)

Свойство усиленной плотности области вещественных чисел, сечение в области вещественных чисел, полнота области вещественных чисел, представление вещественного числа десятичной дробью; числовая ось, взаимно однозначное соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек числовой оси, основные виды числовых множеств: сегмент, интервал, полуинтервал, замкнутая полуось, открытая полуось.

Область рациональных чисел обладает свойством плотности: для каждой пары различных рациональных чисел найдётся рациональное число, которое заключено строго между ними. Аналогичное свойство присуще области вещественных чисел.

Теорема 2.1. Для каждой пары различных вещественных чисел найдётся рациональное число, которое заключено строго между ними.

Пусть $\alpha,\beta \in \mathrm{R}$; $\alpha \neq \beta$. Рассмотрим, например, случай $\alpha > \beta$. Покажем, что $\exists r \in \mathrm{Q} \mid \alpha > r > \beta$. Пусть $A \mid A'$ и $B \mid B'$ – сечения, определяющие числа α и β. По условию $\alpha > \beta$, т.е. $A \supset B$ и $A \neq B \Rightarrow \exists r_1 \in A \mid r_1 \notin B \Rightarrow r_1 \in B'$;

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \in A \Rightarrow \alpha > r_1 \\ r_1 \in B' \Rightarrow r_1 \geq \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha > r_1 \geq \beta \qquad (2.1)$$

(знак равенства может иметь место в случае $\beta \in \mathrm{Q}$, ибо если $\beta \in \mathrm{Q}$, то в силу замечания 1.5 $\beta \in B'$ и число r_1 может совпасть с β). В силу замечания 1.7 в классе *A* нет наибольшего числа $\Rightarrow \exists r \in A \mid r > r_1$. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} r \in A \Rightarrow \alpha > r \\ r > r_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha > r > r_1. \qquad (2.2)$$

Из (2.1), (2.2) следует, что $\alpha > r > \beta$.

Следствие 2.1. Для каждой пары различных вещественных чисел найдётся бесконечное множество рациональных чисел, каждое из которых заключено строго между данными вещественными числами.

Действительно, пусть $\alpha,\beta \in \mathrm{R}$, $\alpha \neq \beta$. Пусть, для определённости, $\alpha > \beta$. Тогда по теореме 2.1 $\exists r_1 \in \mathrm{Q} \mid \alpha > r_1 > \beta$; для пары чисел α, r_1 $\exists r_2 \in \mathrm{Q} \mid \alpha > r_2 > r_1$; для пары чисел α, r_2 $\exists r_3 \in \mathrm{Q} \mid \alpha > r_3 > r_2$ и т.д. Числа r_i, $1 \leq i < \infty$, удовлетворяют условию $\alpha > r_i > \beta$.

В теореме 2.1 доказано, что $\forall \alpha,\beta \in \mathrm{R}$, $\alpha \neq \beta$ $\exists$ вещественное число r, строго заключённое между α и β (т.е. доказано свойство плотности области вещественных чисел) и, кроме того, уточнена природа вещественного числа r, а именно, $r \in \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$. По этой причине доказанное свойство называется *свойством усиленной плотности области вещественных чисел.*

Исследуя при помощи аппарата сечений область рациональных чисел, мы обнаружили в ней пробелы, послужившие нам поводом для введения новых чисел. Введя иррациональные числа, мы заполнили эти пробелы. Возникает вопрос: используя аппарат сечений, можно ли в области вещественных чисел обнаружить пробелы (если бы такие пробелы обнаружились, то это послужило бы поводом для введения новых чисел).

Определение 2.1. *Сечением в области вещественных чисел* называется разбиение множества R на два непустые множества A и A', удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\mathrm{A} \cap \mathrm{A}' = \varnothing$;
2) для $\forall \alpha \in \mathrm{A}$, $\forall \alpha' \in \mathrm{A}' \Rightarrow \alpha < \alpha'$,

при этом множество A называется *нижним классом сечения*, множество A' – *верхним классом сечения.*

Обозначение сечения: $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$.

Замечание 2.1. Если $\alpha \in \mathrm{A}$, то для $\forall \alpha_1 < \alpha \Rightarrow \alpha_1 \in \mathrm{A}$.

Замечание 2.2. Если $\alpha' \in \mathrm{A}'$, то для $\forall \alpha_1' > \alpha' \Rightarrow \alpha_1' \in \mathrm{A}'$.

Замечание 2.3. Не существует сечения в области вещественных чисел, для которого в нижнем классе имеется наибольшее число и в верхнем классе есть наименьшее число.

Действительно, $\boxed{\Pi}$: $\exists\, \mathrm{A} \mid \mathrm{A}' \mid \alpha_0$ – наибольшее число в классе A, α_0' – наименьшее число в классе A'. Тогда $\alpha_0 < \alpha_0'$ в силу условия 2) из определения 2.1. В силу теоремы 2.1 $\exists r \in \mathrm{Q} \mid \alpha_0 < r < \alpha_0'$. Имеем: $r > \alpha_0 \Rightarrow r \notin \mathrm{A}$, ибо α_0 – наибольшее число в классе A; $r < \alpha_0' \Rightarrow r \notin \mathrm{A}'$, ибо α_0' – наименьшее число в классе A'. Получили: $r \notin \mathrm{A}$, $r \notin \mathrm{A}' \Rightarrow r \notin \mathrm{A} \cup \mathrm{A}'$, т.е. $r \notin \mathrm{R}$ ибо по определению 2.1 $\mathrm{A} \cup \mathrm{A}' = \mathrm{R}$. Противоречие. $\overline{\boxed{\Pi}}$.

Рассмотрим примеры сечений в области вещественных чисел.

Пример 2.1. Пусть $\gamma \in \mathrm{R}$, γ фиксировано. Положим $\mathrm{A} = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \alpha < \gamma\}$, $\mathrm{A}' = \{\alpha' \in \mathrm{R} \mid \alpha' \geq \gamma\}$. Заметим, что $\mathrm{A} \neq \varnothing$, $\mathrm{A}' \neq \varnothing$, ибо в R нет наименьшего числа и нет наибольшего числа (это следует из того, что в $\mathrm{Z} \subset \mathrm{R}$ нет наименьшего и наибольшего чисел). Далее, $\mathrm{A} \cup \mathrm{A}' = \mathrm{R}$ и множества A, A' удовлетворяют условиям 1), 2). Следовательно, $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$ – сечение в области вещественных чисел. Верхний класс A' содержит наименьшее число γ, следовательно, в силу замечания 2.3 в нижнем классе A нет наибольшего числа. Будем говорить, что построенное сечение $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$ определяет вещественное число γ (γ является пограничным числом между классами A и A').

Обозначение: $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}' \to \gamma$.

Пример 2.2. Пусть $\gamma \in \mathrm{R}$, γ фиксировано. Положим $\mathrm{A} = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \alpha \leq \gamma\}$, $\mathrm{A}' = \{\alpha' \in \mathrm{R} \mid \alpha' > \gamma\}$. Очевидно, что $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$ является сечением в области вещественных чисел. Нижний класс A содержит наибольшее число γ, следовательно, в силу замечания 2.3 в верхнем классе A' нет наименьшего числа. Построенное сечение $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$ определяет вещественное число γ, которое является пограничным между классами A и A'.

Мы видим, что любое вещественное число γ определяется либо сечением из примера 2.1, либо сечением из примера 2.2.

Покажем, что при рассмотрении сечений в области вещественных чисел пробелов не возникает.

Теорема 2.2 (*теорема Дедекинда*). Для всякого сечения $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$ в области вещественных чисел существует вещественное число γ, которое производит это сечение. Это число γ будет либо наибольшим в нижнем классе A, либо наименьшим в верхнем классе A'.

$\blacktriangleright$ Пусть $A = \mathrm{A} \cap \mathrm{Q}$ – множество всех рациональных чисел, принадлежащих классу A; $A' = \mathrm{A}' \cap \mathrm{Q}$ – множество всех рациональных чисел, принадлежащих классу A'. Тогда $A \mid A'$ является сечением в области рациональных чисел. Это сечение определяет некоторое вещественное число γ: $A \mid A' \to \gamma$. Так как $\mathrm{A} \cup \mathrm{A}' = \mathrm{R}$ и $\mathrm{A} \cap \mathrm{A}' = \varnothing$ (см. определение 2.1.), то либо $\gamma \in \mathrm{A}$, либо $\gamma \in \mathrm{A}'$.

Пусть $\gamma \in \mathrm{A}$. Покажем, что γ является наибольшим числом в классе A. : $\exists \alpha_1 \in \mathrm{A} \mid \alpha_1 > \gamma$. Тогда по теореме 2.1 $\exists r \in \mathrm{Q} \mid \alpha_1 > r > \gamma$. Имеем: $\alpha_1 \in \mathrm{A}$, $r < \alpha_1 \Rightarrow$ (в силу замечания 2.1) $\Rightarrow$ $r \in \mathrm{A} \Rightarrow r \in A$. Далее, $A \mid A' \to \gamma$, $r > \gamma \Rightarrow r \in A'$. Получили: $r \in A$ и $r \in A' \Rightarrow r \in A \cap A' = \varnothing$. Противоречие. . Итак, γ – наибольшее число в классе A и в силу замечания 2.3 в классе A' нет наименьшего числа $\Rightarrow \mathrm{A} \mid \mathrm{A}' \to \gamma$.

Пусть $\gamma \in \mathrm{A}'$. Покажем, что γ является наименьшим числом в классе A'. : $\exists \alpha_0' \in \mathrm{A}' \mid \alpha_0' < \gamma$. Тогда по теореме 2.1 $\exists r \in \mathrm{Q} \mid \alpha_0' < r < \gamma$. Имеем: $\alpha_0' \in \mathrm{A}'$, $r > \alpha_0' \Rightarrow$ (в силу замечания 2.2) $\Rightarrow$ $r \in \mathrm{A}' \Rightarrow r \in A'$. Далее, $A \mid A' \to \gamma$, $r < \gamma \Rightarrow r \in A$. Получили: $r \in A$ и $r \in A' \Rightarrow r \in A \cap A' = \varnothing$. Противоречие. . Итак, γ – наименьшее число в классе A' и в силу замечания 2.3 в классе A нет наибольшего числа $\Rightarrow \mathrm{A} \mid \mathrm{A}' \to \gamma$. $\blacktriangleleft$

Из теоремы Дедекинда следует, что не существует сечения в области вещественных чисел, для которого в нижнем классе нет наибольшего числа и в верхнем классе нет наименьшего числа, т.е. в области вещественных чисел пробелы отсутствуют и нет основания для введения новых чисел. По этой причине говорят, что область вещественных чисел обладает свойством *полноты* (*непрерывности или сплошности*).

Укажем, как представлять вещественные числа десятичными дробями. Напомним, что $\mathrm{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{W}$, где Q – множество рациональных чисел; W – множество иррациональных чисел.

Если $\alpha \in \mathrm{Q}$, то α представляется в виде конечной десятичной дроби, например, $\frac{1}{4} = 0,25$, или в виде бесконечной периодической десятичной дроби, например, $\frac{7}{3} = 2,(3)$.

Пусть $\alpha \in \mathrm{W}$. Рассмотрим сечение $A \mid A'$ в области рациональных чисел, определяющее число α. Пусть C_0 – наибольшее целое число в классе A, тогда $C_0 + 1$ будет наименьшим целым числом в классе A'. Следовательно,

$$C_0 < \alpha < C_0 + 1.$$

Рассмотрим конечные десятичные дроби вида

$$C_0,0;\ C_0,1;\ C_0,2;\ \ldots;\ C_0,9;\ C_0 + 1 \qquad (2.3)$$

(числа вида (2.3) являются рациональными числами). Тогда

$$C_0,c_1 < \alpha < C_0,c_1 + \frac{1}{10},$$

где c_1 – одна из цифр 0; 1; 2; … ; 9.

Рассмотрим конечные десятичные дроби вида

$$C_0,c_1 0;\ C_0,c_1 1;\ C_0,c_1 2;\ \ldots;\ C_0,c_1 9;\ C_0,c_1 9 + \frac{1}{10^2}.$$

Тогда

$$C_0,c_1c_2 < \alpha < C_0,c_1c_2 + \frac{1}{10^2},$$

где c_2 – одна из цифр 0; 1; 2; … ; 9.

Продолжая этот процесс, получим на *n*-ном шаге:

$$C_0,c_1c_2\ldots c_n < \alpha < C_0,c_1c_2\ldots c_n + \frac{1}{10^n} \qquad (2.4)$$

и т.д. В результате получаем бесконечную десятичную дробь вида

$$C_0,c_1c_2\ldots c_n\ldots, \qquad (2.5)$$

которую будем рассматривать как представление иррационального числа α. Эта дробь является непериодической, ибо любая бесконечная периодическая дробь представляет рациональное число, например,

$$5,3(2) = 5,3 + 0,02 + 0,002 + \ldots = \frac{53}{10} + \frac{0,02}{1 - 0,1} =$$

$$=\frac{53}{10}+\frac{0,02}{0,9}=\frac{53}{10}+\frac{2}{90}=\frac{479}{90}$$

(здесь использована формула $S=\frac{b_1}{1-q}$ для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Итак, каждое иррациональное число представимо в виде бесконечной, непериодической десятичной дроби.

Из (2.4) видно, что в качестве приближенного значения иррационального числа α по недостатку можно взять рациональное число $C_0,c_1c_2...c_n$, а по избытку – рациональное число $C_0,c_1c_2...c_n+\frac{1}{10^n}$:

$$\alpha\approx C_0,c_1c_2...c_n=r_*$$

или

$$\alpha\approx C_0,c_1c_2...c_n+\frac{1}{10^n}=r^*.$$

Заметим, что $r^*-r_*=\frac{1}{10^n}$, следовательно, разность между десятичными приближениями иррационального числа по недостатку и избытку можно сделать при увеличении n сколь угодно малой, ибо при достаточно больших n величина $\frac{1}{10^n}$ становится меньше наперёд заданного сколь угодно малого положительного числа δ.

Укажем геометрическую интерпретацию вещественных чисел.

Рассмотрим координатную ось Ox, т.е. прямую, на которой указаны точка O (начало отсчёта), масштабный отрезок OE (его величину мы считаем равной единице) и положительное направление от O к E (рис. 2.1).

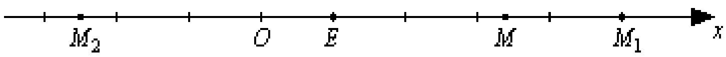

Рис. 2.1

Точка O делит координатную ось на две части: положительную полуось (часть, содержащая точку E) и отрицательную полуось. Рассмотрим точку $M\in Ox$.

Координатой точки M называется длина отрезка OM, взятая со знаком "+", если M принадлежит положительной полуоси, и со знаком "–", если M принадлежит отрицательной полуоси (координата точки O считается равной нулю).

Тот факт, что точка M имеет координату x, обозначают так: $M(x)$. Например, на рис. 2.1 $M_1(5)$, $M_2(-2,5)$.

Замечание 2.4. Между множеством вещественных чисел и множеством точек координатной оси Ox существует взаимно однозначное соответствие.

Действительно, каждому вещественному числу x можно поставить в соответствие точку $M(x)$ координатной оси Ox, т.е. точку, координата которой равна x; каждой точке $M(x)$ координатной оси Ox можно поставить в соответствие действительное число x, т.е. координату этой точки, при этом, если $x_1\neq x_2$, то $M_1(x_1)\neq M_2(x_2)$ и, наоборот, если $M_1(x_1)\neq M_2(x_2)$, то $x_1\neq x_2$.

В силу замечания 2.4 вещественные числа можно изображать точками на координатной оси, обозначая каждую такую точку тем вещественным числом, которое изображается данной точкой (рис. 2.2).

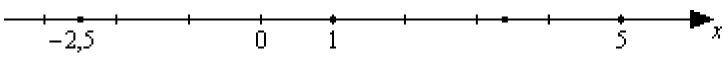

Рис. 2.2

Ось, изображённую на рис. 2.2, называют *числовой осью* (или *числовой прямой*). Числовая ось обозначается символом $(-\infty,\ +\infty)$. Таким образом, геометрической интерпретацией множества вещественных чисел служит числовая ось от минус бесконечности до плюс бесконечности (символы $-\infty,\ +\infty$ называются "несобственными числами").

Укажем основные виды числовых множеств:

1) *сегмент* (*замкнутый промежуток* или *отрезок*):

$$[a,b]=\{x\in \mathrm{R}\mid a\le x\le b\}$$

(предполагается, что $a<b$; a и b называются соответственно левым и правым концами сегмента или граничными точками сегмента; разность $b-a$ называется длиной сегмента; определение разности вещественных чисел см. в лекции 4). На числовой оси сегменту $[a,b]$ соответствует отрезок той же длины (рис. 2.3).

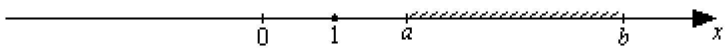

Рис. 2.3

2) *интервал* (*открытый промежуток*), рис. 2.4:

$$(a,b)=\{x\in \mathrm{R} \mid a<x<b\}.$$

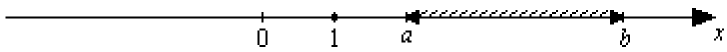

Рис. 2.4

3) *полуинтервал* (*полуоткрытый промежуток* или *полусегмент*) рис. 2.5 и 2.6:

$$[a,b)=\{x\in \mathrm{R} \mid a\le x<b\};$$

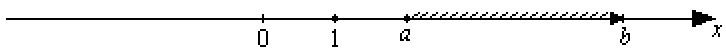

Рис. 2.5

$$(a,b]=\{x\in \mathrm{R} \mid a<x\le b\};$$

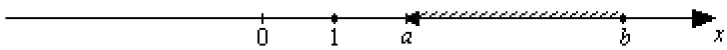

Рис. 2.6

4) *замкнутая полуось* (*замкнутая полупрямая* или *замкнутый луч*), рис. 2.7 и 2.8:

$$[a,+\infty)=\{x\in \mathrm{R} \mid x\ge a\};$$

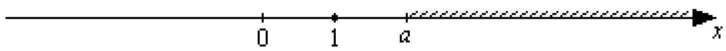

Рис. 2.7

$$(-\infty,b]=\{x\in \mathrm{R} \mid x\le b\};$$

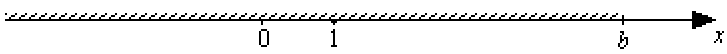

Рис. 2.8

5) *открытая полуось* (*открытая полупрямая* или *открытый луч*), рис. 2.9. и 2.10:

$$(a,+\infty)=\{x\in \mathrm{R} \mid x>a\};$$

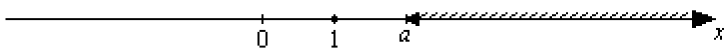

Рис. 2.9

$$(-\infty,b)=\{x\in \mathrm{R} \mid x<b\}.$$

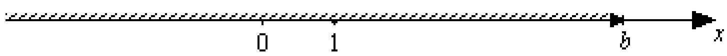

Рис. 2.10

Множества вида 1) – 3) называются *конечными промежутками*, при этом a и b называются *концами промежутка* (a – левый конец промежутка, b – правый конец промежутка), разность $b-a$ называется *длиной промежутка*. Множества 4), 5) называются *бесконечными промежутками* (числовую ось $(-\infty,\ +\infty)$ тоже можно назвать бесконечным промежутком). Конечные и бесконечные промежутки называются *промежутками*.

Л е к ц и я 3. ОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Ограниченные множества; точная верхняя и точная нижняя грани множества; теоремы о существовании точной верхней и точной нижней граней для ограниченного множества, некоторые вспомогательные утверждения.

В математическом анализе важную роль имеют ограниченные множества вещественных чисел.

Пусть $\Omega\subset \mathrm{R}$, $\Omega\ne\varnothing$.

Определение 3.1. Множество Ω называется *ограниченным сверху,* если

$$\exists M \in \mathrm{R} \mid x \le M \ \text{ для } \ \forall x \in \Omega, \tag{3.1}$$

при этом число M называется *верхней границей* (*верхней гранью*) *множества* Ω .

Замечание 3.1. Если множество Ω ограничено сверху, то множество U_Ω всех его верхних границ бесконечно.

Действительно, пусть множество Ω ограничено сверху, т.е. выполняется (3.1). Тогда для $\forall \beta \in \mathrm{R}, \beta > 0$ число $M_\beta = M + \beta$ тоже является верхней границей множества Ω , ибо $M < M_\beta$, следовательно, в силу (3.1) и свойства транзитивности вещественных чисел $x < M_\beta$ для $\forall x \in \Omega$. Получили: $U_\Omega \supset \left\{ M_\beta = M + \beta \mid \beta \in \mathrm{R}, \beta > 0 \right\}$, т.е. множество U_Ω содержит в себе бесконечное множество $\Rightarrow$ U_Ω бесконечно.

Естественный интерес представляет наименьшая из верхних границ ограниченного сверху множества (т.е. наименьшее число из множества U_Ω), если такая наименьшая граница существует (множество U_Ω бесконечно, а в бесконечном множестве может и не быть наименьшего числа, например, на открытой полуоси $(1; +\infty)$ нет наименьшего числа).

Определение 3.2. *Точной верхней гранью* (*точной верхней границей или супремумом*) ограниченного сверху *множества* Ω называется наименьшая верхняя граница этого множества, если она существует.

Обозначение: $\sup \Omega$ или $\sup\limits_{x \in \Omega} \{x\}$ (supremum (лат.) – наивысшее).

Замечание 3.2. Если в множестве Ω имеется наибольшее число, т.е. $\exists x^* \in \Omega \mid$

$$x \le x^*, \ \forall x \in \Omega, \tag{3.2}$$

то множество Ω ограничено сверху и $\sup \Omega = x^*$.

Действительно, в силу (3.2) множество Ω ограничено сверху и x^* – его верхняя граница. Пусть M – любая другая верхняя граница множества Ω , т.е. $x \le M$ для $\forall x \in \Omega$, в частности, $x^* \le M$, ибо $x^* \in \Omega \Rightarrow x^*$ – наименьшая из верхних границ множества Ω , т.е. $\sup \Omega = x^*$.

Теорема 3.1. Всякое ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет точную верхнюю грань.

▶ Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}$ ограничено сверху. Если среди всех чисел множества Ω найдётся наибольшее число x^* , то в силу замечания 3.2 $\exists \sup \Omega = x^*$.

Пусть среди чисел множества Ω нет наибольшего числа. Произведём сечение в области вещественных чисел следующим образом: к верхнему классу A' отнесём все верхние границы множества Ω , т.е. положим $\mathrm{A}' = U_\Omega$; в нижний класс A включим все остальные вещественные числа. Заметим, что $\mathrm{A}' \ne \varnothing$. По построению $\mathrm{A} \cup \mathrm{A}' = \mathrm{R}$ и $\mathrm{A} \cap \mathrm{A}' = \varnothing$. Далее, $\Omega \subset \mathrm{A}$. Действительно, ПП: $\exists x_1 \in \Omega \mid x_1 \,\overline{\in}\, \mathrm{A}$, т.е. $x_1 \in \mathrm{A}' \Rightarrow x_1$ – верхняя граница множества Ω , т.е. $x \le x_1$ для $\forall x \in \Omega \Rightarrow x_1$ – наибольшее число в Ω . Противоречие. $\overline{\text{ПП}}$. Имеем: $\Omega \subset \mathrm{A}$ и $\Omega \ne \varnothing \Rightarrow \mathrm{A} \ne \varnothing$. Покажем, что множества A, A' удовлетворяют условию 2) из определения 2.1: для $\forall \alpha \in \mathrm{A}$, $\forall \alpha' \in \mathrm{A}' \Rightarrow \alpha < \alpha'$. ПП: $\exists \alpha_1 \in \mathrm{A}$, $\exists \alpha'_0 \in \mathrm{A}' \mid \alpha_1 \ge \alpha'_0 \Rightarrow \alpha_1$ – верхняя граница множества Ω , т.е. $\alpha_1 \in \mathrm{A}'$, что противоречит условию $\alpha_1 \in \mathrm{A}$. $\overline{\text{ПП}}$. Итак, $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$ действительно является сечением в области вещественных чисел. По теореме Дедекинда существует вещественное число γ , которое производит построенное сечение $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$. Докажем, что $\gamma = \sup \Omega$. Имеем: $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}' \to \gamma \Rightarrow \alpha \le \gamma$ для $\forall \alpha \in \mathrm{A}$, в частности, $x \le \gamma$ для $\forall x \in \Omega \subset \mathrm{A} \Rightarrow \gamma$ – верхняя граница множества $\Omega \Rightarrow \gamma \in \mathrm{A}'$ и по теореме Дедекинда γ является наименьшим числом в $\mathrm{A}' = U_\Omega \Rightarrow \ \Rightarrow \gamma = \sup \Omega$. ◀

Пусть множество Ω ограничено сверху и $\sup \Omega = M^*$. Из определения точной верхней грани множества получаем:

3.1) $x \le M^*$ для $\forall x \in \Omega$;

3.2) для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in \Omega \mid x_0 > M^* - \varepsilon$.

Свойство 3.1) означает, что M^* является верхней границей множества Ω ; свойство 3.2) означает, что M^* является наименьшей из всех верхних границ, ибо если взять любое число $M_\varepsilon = M^* - \varepsilon$, которое меньше M^* , то M_ε уже не является верхней границей множества Ω .

Таким образом, точная верхняя грань M^* множества Ω вполне характеризуется свойствами 3.1) и 3.2). Поэтому 3.1) и 3.2) называются *характеристическими свойствами точной верхней грани множества.*

Определение 3.3. Множество Ω называется *ограниченным снизу,* если

$$\exists m \in \mathrm{R} \mid x \ge m \ \text{ для } \ \forall x \in \Omega, \tag{3.3}$$

при этом число m называется *нижней границей* (*нижней гранью*) *множества* Ω .

Замечание 3.3. Если множество Ω ограничено снизу, то множество L_Ω всех его нижних границ бесконечно.

Действительно, пусть множество Ω ограничено снизу, т.е. выполняется (3.3). Тогда $\forall \alpha \in \mathrm{R}$, $\alpha > 0$ число $m_\alpha = m - \alpha$ тоже является нижней границей множества Ω , ибо $m_\alpha < m$, следовательно, в силу (3.3) и свойства транзитивности вещественных чисел $x > m_\alpha$ для $\forall x \in \Omega$. Получили: $L_\Omega \supset \{m_\alpha = m - \alpha \mid \alpha \in \mathrm{R},\ \alpha > 0\}$, т.е. множество L_Ω содержит в себе бесконечное множество $\Rightarrow$ L_Ω бесконечно.

Естественный интерес вызывает наибольшая из всех нижних границ ограниченного снизу множества (т.е. наибольшее число из множества L_Ω), если такая наибольшая граница существует (множество L_Ω бесконечно, а в бесконечном множестве может и не быть наибольшего числа, например, на открытой полуоси $(-\infty; -3)$ нет наибольшего числа).

Определение 3.4. *Точной нижней гранью* (*точной нижней границей или инфимумом*) ограниченного снизу *множества* Ω называется наибольшая нижняя граница этого множества, если она существует.

Обозначение: $\inf \Omega$ или $\inf\limits_{x\in\Omega}\{x\}$ (infimum (лат.) – наинизшее).

Замечание 3.4. Если в множестве Ω имеется наименьшее число, т.е. $\exists x_* \in \Omega \mid$

$$x \geq x_*,\ \forall x \in \Omega, \tag{3.4}$$

то множество Ω ограничено снизу и $\inf \Omega = x_*$.

Действительно, в силу (3.4) множество Ω ограничено снизу и x_* – его нижняя граница. Пусть m – любая другая нижняя граница множества Ω, т.е. $x \geq m$ для $\forall x \in \Omega$, в частности, $x_* \geq m$, ибо $x_* \in \Omega \Rightarrow x_*$ – наибольшая из всех нижних границ множества Ω, т.е. $\inf \Omega = x_*$.

Теорема 3.2. Всякое ограниченное снизу множество вещественных чисел имеет точную нижнюю грань.

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}$ ограничено снизу. Если среди всех чисел множества Ω найдётся наименьшее число x_*, то в силу замечания 3.4 $\exists \inf \Omega = x_*$.

Пусть среди чисел множества Ω нет наименьшего числа. Произведём сечение в области вещественных чисел следующим образом: в нижний класс A включим все нижние границы множества Ω, т.е. положим $\mathrm{A} = L_\Omega$; к верхнему классу A' отнесём все остальные вещественные числа. Заметим, что $\mathrm{A} \neq \varnothing$. По построению $\mathrm{A} \cup \mathrm{A}' = \mathrm{R}$ и $\mathrm{A} \cap \mathrm{A}' = \varnothing$. Далее, $\Omega \subset \mathrm{A}'$. Действительно, : $\exists x_0 \in \Omega \mid x_0 \overline{\in} \mathrm{A}'$, т.е. $x_0 \in \mathrm{A} \Rightarrow x_0$ – нижняя граница множества Ω, т.е. $x \geq x_0$ для $\forall x \in \Omega \Rightarrow x_0$ – наименьшее число в Ω. Противоречие. . Имеем: $\Omega \subset \mathrm{A}'$ и $\Omega \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{A}' \neq \varnothing$. Покажем, что множества A, A' удовлетворяют условию 2) из определения 2.1: для $\forall \alpha \in \mathrm{A}$, $\forall \alpha' \in \mathrm{A}' \Rightarrow \alpha < \alpha'$. : $\exists \alpha_1 \in \mathrm{A}$, $\exists \alpha'_0 \in \mathrm{A}' \mid \alpha_1 \geq \alpha'_0 \Rightarrow \alpha'_0$ – нижняя граница множества Ω, т.е. $\alpha'_0 \in \mathrm{A}$, что противоречит условию $\alpha'_0 \in \mathrm{A}'$. . Итак, $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$ действительно является сечением в области вещественных чисел. По теореме Дедекинда построенное сечение $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}'$ определяет вещественное число μ. Покажем, что $\mu = \inf \Omega$. Имеем: $\mathrm{A} \mid \mathrm{A}' \to \mu \Rightarrow \alpha' \geq \mu$ для $\forall \alpha' \in \mathrm{A}'$, в частности, $x \geq \mu$ для $\forall x \in \Omega \subset \mathrm{A}' \Rightarrow \mu$ – нижняя граница множества $\Omega \Rightarrow \mu \in \mathrm{A}$ и по теореме Дедекинда μ является наибольшим числом в $\mathrm{A} = L_\Omega \Rightarrow\ \Rightarrow \mu = \inf \Omega$.

Пусть множество Ω ограничено снизу и $\inf \Omega = m_*$. Из определения точной нижней грани множества получаем:

3.а) $x \geq m_*$ для $\forall x \in \Omega$;

3.б) для $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 \in \Omega \mid x_1 < m_* + \varepsilon$.

Свойство 3.а) означает, что m_* является нижней границей множества Ω; свойство 3.б) означает, что m_* является наибольшей из всех нижних границ, ибо если взять любое число $m_\varepsilon = m_* + \varepsilon$, которое больше m_*, то m_ε уже не является нижней границей множества Ω.

Итак, точная нижняя грань m_* множества Ω вполне характеризуется свойствами 3.а), 3.б). По этой причине 3.а), 3.б) называются *характеристическими свойствами точной нижней грани множества.*

Определение 3.5. Множество Ω называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и ограничено снизу, т.е.

$$\exists m, M \in \mathrm{R} \mid m \leq x \leq M \ \text{ для } \forall x \in \Omega. \tag{3.5}$$

Замечание 3.5. Условие ограниченности множества Ω можно записать в следующем виде:

$$\exists C \in \mathrm{R},\ C > 0 \mid |x| \leq C \ \text{ для } \forall x \in \Omega. \tag{3.6}$$

Действительно, пусть множество Ω ограничено, т.е. выполняется (3.5), рис. 3.1.

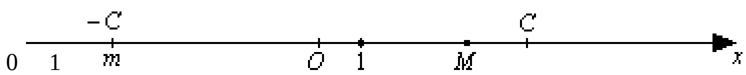

Рис. 3.1

Положим $C = \max\{|M|, |m|\}$. Тогда $-C \leq x \leq C$, $\forall x \in \Omega$, т.е. $|x| \leq C$ для $\forall x \in \Omega$. Обратно, пусть выполняется (3.6). Неравенство $|x| \leq C$, $\forall x \in \Omega$ равносильно двойному неравенству $-C \leq x \leq C$, $\forall x \in \Omega$ и это означает, что выполняется (3.5) с $m = -C$, $M = C$, т.е. множество Ω ограничено.

Множество Ω называется *неограниченным*, если для $\forall\ C>0\ \exists x\in\Omega \mid \ |x|>C$.

Теорема 3.3. Всякое ограниченное множество вещественных чисел имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани.
Теорема 3.3 справедлива в силу теорем 3.1 и 3.2.

Замечание 3.6. Если множество Ω ограничено сверху, то множество U_Ω всех его верхних границ ограничено снизу и

$$\sup\Omega=\inf U_\Omega. \tag{3.7}$$

Действительно, в ходе доказательства теоремы 3.1 было показано, что в множестве U_Ω имеется наименьшее число и $\sup\Omega$ равен этому числу. В силу замечания 3.4 $\inf U_\Omega$ тоже равен этому числу. Следовательно, справедливо равенство (3.7).

Замечание 3.7. Если множество Ω ограничено снизу, то множество L_Ω всех его нижних границ ограничено сверху и

$$\inf\Omega=\sup L_\Omega. \tag{3.8}$$

Действительно, в ходе доказательства теоремы 3.2 было установлено, что в множестве L_Ω есть наибольшее число и $\inf\Omega$ равен этому числу. В силу замечания 3.2 $\sup L_\Omega$ тоже равен этому числу. Следовательно, справедливо равенство (3.8).

Если множество Ω ограничено, то для него выполняются оба равенства (3.7) и (3.8).

Пример 3.1. $\Omega=(-\infty;5]$. Множество Ω ограничено сверху и неограниченно снизу; $M^*=\sup\Omega=5$, $M^*\in\Omega$.

Пример 3.2. $\Omega=(-\infty;5)$. Множество Ω ограничено сверху и неограниченно снизу; $M^*=5$, $M^*\overline{\in}\,\Omega$.

Пример 3.3. $\Omega=[2;+\infty)$. Множество Ω ограничено снизу и неограниченно сверху; $m_*=\inf\Omega=2$, $m_*\in\Omega$.

Пример 3.4. $\Omega=(2;+\infty)$. Множество Ω ограничено снизу и неограниченно сверху; $m_*=2$, $m_*\overline{\in}\,\Omega$.

Пример 3.5. $\Omega=[-3;\ 7]$. Множество Ω ограничено; $M^*=7$, $m_*=-3$, $M^*\in\Omega$, $m_*\in\Omega$.

Пример 3.6. $\Omega=(-3;\ 7]$. Множество Ω ограничено; $M^*=7$, $m_*=-3$, $M^*\in\Omega$, $m_*\overline{\in}\,\Omega$.

Пример 3.7. $\Omega=[-3;\ 7)$. Множество Ω ограничено; $M^*=7$, $m_*=-3$, $M^*\overline{\in}\,\Omega$, $m_*\in\Omega$.

Пример 3.8. $\Omega=(-3;\ 7)$. Множество Ω ограничено; $M^*=7$, $m_*=-3$, $M^*\overline{\in}\,\Omega$, $m_*\overline{\in}\,\Omega$.

Пример 3.9. $\Omega=\mathrm{Z}$. Множество Ω не ограничено ни сверху, ни снизу.

Замечание 3.7. Всякое конечное множество вещественных чисел ограничено.

Действительно, пусть множество Ω конечно. Тогда в нём найдётся наибольшее число x^*, следовательно, в силу замечания 3.2, множество Ω ограничено сверху и $\sup\Omega=x^*$. В множестве Ω найдётся также наименьшее число x_*, следовательно, в силу замечания 3.4, множество Ω ограничено снизу и $\inf\Omega=x_*$.

В дальнейшем окажется полезным следующее утверждение.

Теорема 3.4. Пусть $X\subset\mathrm{R}$, $Y\subset\mathrm{R}$, $X\neq\varnothing$, $Y\neq\varnothing$ и выполняется условие

$$x\le y,\quad \forall x\in X,\ \forall y\in Y. \tag{3.9}$$

Тогда множество X ограничено сверху, множество Y ограничено снизу и $\sup X\le\inf Y$.

Зафиксируем произвольное число $y\in Y$. Тогда в силу (3.9) множество X ограничено сверху. Следовательно, в силу теоремы 3.1 $\exists\sup X$. Из (3.9) видно, что каждое число $y\in Y$ является верхней границей множества X. По определению, $\sup X$ – наименьшая из всех верхних границ множества X. Следовательно,

$$\sup X\le y,\ \forall y\in Y. \tag{3.10}$$

В силу (3.10) множество Y ограничено снизу. Следовательно, в силу теоремы 3.2 $\exists\inf Y$. Из (3.10) видно, что $\sup X$ является одной из нижних границ множества Y. По определению, $\inf Y$ – наибольшая из всех нижних границ множества Y. Следовательно, $\sup X\le\inf Y$.

Докажем ещё одно утверждение, которое потребуется в дальнейшем.

Лемма 3.1. Пусть $\alpha\in\mathrm{R}$; $A|A'$ – сечение в области рациональных чисел, определяющее число α. Тогда для $\forall r\in\mathrm{Q},\ r>0\quad \exists\tilde a\in A,\ \tilde a'\in A' \mid \tilde a'-\tilde a<r$.

Зафиксируем произвольное положительное число $r\in\mathrm{Q}$. Возьмём некоторые $a_0\in A$ и $a_0'\in A'$. В силу условия 2) из определения 1.1 $a_0<a_0'\Rightarrow a_0'-a_0=l_0>0$. Если окажется, что $l_0<r$, то лемма доказана. Пусть $l_0>r$. Рассмотрим рациональное число $r_0=\dfrac{a_0+a_0'}{2}$ (точка $\dfrac{a_0+a_0'}{2}$ является серединой отрезка $[a_0,a_0']$). Если окажется, что $r_0\in A$, то положим $a_1=r_0$, $a_1'=a_0'$; если $r_0\in A'$, то положим $a_1=a_0$, $a_1'=r_0$. В результате получим отрезок $[a_1,a_1']$ длины $l_1=\dfrac{l_0}{2}$, причём

$a_1 \in A$, $a_1' \in A'$. Если окажется, что $l_1 < r$, то лемма доказана. Пусть $l_1 > r$. Рассмотрим точку $r_1 = \dfrac{a_1 + a_1'}{2}$. Если окажется, что $r_1 \in A$, то положим $a_2 = r_1$, $a_2' = a_1'$; если $r_1 \in A'$, то положим $a_2 = a_1$, $a_2' = r_1$. В результате получим отрезок $[a_2, a_2']$ длины $l_2 = \dfrac{l_0}{2^2}$, причём $a_2 \in A$, $a_2' \in A'$. Продолжая при необходимости этот процесс, получим на *n*-ном шаге отрезок $[a_n, a_n']$ длины $l_n = \dfrac{l_0}{2^n}$ причём $a_n \in A$, $a_n' \in A'$. Подберём натуральное число *n* таким образом, чтобы

$$a_n' - a_n = \frac{l_0}{2^n} < r .$$

Такой подбор *n* осуществим, ибо лишь для конечного числа номеров *n* может выполниться неравенство $2^n \le \dfrac{l_0}{r}$ (в наших рассуждениях $\dfrac{l_0}{r}$ – фиксированное положительное рациональное число). Для всех остальных *n* справедливо неравенство $2^n > \dfrac{l_0}{r}$, т.е. $\dfrac{l_0}{2^n} < r$. Итак, $\exists \tilde{a} = a_n \in A,\ \tilde{a}' = a_n' \in A' \mid \tilde{a}' - \tilde{a} < r$. ◄

Заметим, что $\tilde{a} < \alpha \le \tilde{a}'$, ибо если $A \mid A' \to \alpha$, то, по определению,

$$a < \alpha \le a',\ \forall a \in A,\ \forall a' \in A' \tag{3.11}$$

(знак равенства в (3.11) имеет место в случае $\alpha \in \mathrm{Q}$, ибо согласно замечанию 1.5 рациональное число включается в верхний класс сечения, определяющего это число). Следовательно, любое из чисел $\tilde{a}$, $\tilde{a}'$ можно взять в качестве рационального приближения вещественного числа α, при этом, в силу леммы 3.1, рациональное приближение числа α можно выбрать таким образом, чтобы погрешность была меньше наперёд заданного сколь угодно малого положительного рационального числа δ.

Л е к ц и я 4. АРИФМЕТИЧЕКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

Сумма вещественных чисел, свойства операции сложения; понятие противоположного числа; модуль вещественного числа; произведение вещественных чисел; понятие обратного числа; свойства операции умножения; свойства модулей.

Введём в области вещественных чисел операцию сложения.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$; $A \mid A'$ и $B \mid B'$ – сечения в области рациональных чисел, определяющие числа α и β. Тогда, по определению

$$a < \alpha \le a',\ \forall a \in A,\ \forall a' \in A'; \tag{4.1}$$

$$b < \beta \le b',\ \forall b \in B,\ \forall b' \in B' \tag{4.2}$$

(знак равенства имеет место в (4.1) в случае $\alpha \in \mathrm{Q}$, в (4.2) в случае $\beta \in \mathrm{Q}$, ибо согласно замечанию 1.5 рациональное число включается в верхний класс сечения, определяющего это число).

Рассмотрим множества вида

$$\Omega_1 = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\};$$

$$\Omega_2 = \{a' + b' \mid a' \in A',\ b' \in B'\}.$$

В силу условия 2) из определения 1.1 $a < a'$ для $\forall a \in A, \forall a' \in A'$ и $b < b'$ для $\forall b \in B, \forall b' \in B'$. Следовательно,

$$a + b < a' + b',\ \forall a + b \in \Omega_1,\ \forall a' + b' \in \Omega_2 . \tag{4.3}$$

Замечание 4.1. Для $\forall r \in \mathrm{Q}$, $r > 0$ $\exists a + b \in \Omega_1$, $\exists a' + b' \in \Omega_2 \mid (a' + b') - (a + b) < r$.

Действительно, в силу леммы 3.1 для числа $\dfrac{r}{2}$ $\exists a \in A, a' \in A' \mid$ $a' - a < \dfrac{r}{2}$; $\exists b \in B, b' \in B' \mid$ $b' - b < \dfrac{r}{2} \Rightarrow (a' + b') - (a + b) < r$.

Естественно, что в качестве суммы вещественных чисел α и β нужно взять вещественное число γ, которое удовлетворяет условию

$$a + b \le \gamma \le a' + b',\quad \forall a + b \in \Omega_1,\quad \forall a' + b' \in \Omega_2 . \tag{4.4}$$

Оказывается, что такое число γ существует и определяется однозначно.

Теорема 4.1. Существует единственное вещественное число γ, удовлетворяющее условию (4.4).

В силу (4.3) и теоремы 3.4 множество Ω_1 ограничено сверху, множество Ω_2 ограничено снизу и

$$\sup\Omega_1 \le \inf\Omega_2 . \tag{4.5}$$

В силу характеристического свойства 3.1) точной верхней грани множества

$$a+b \le \sup\Omega_1 , \forall a+b \in \Omega_1 . \tag{4.6}$$

В силу характеристического свойства 3.а) точной нижней грани множества

$$\inf\Omega_2 \le a'+b' , \forall a'+b' \in \Omega_2 . \tag{4.7}$$

В силу (4.5) – (4.7)

$$a+b \le \sup\Omega_1 \le \inf\Omega_2 \le a'+b', \quad \forall a+b \in \Omega_1, \quad \forall a'+b' \in \Omega_2 . \tag{4.8}$$

Из (4.8) видно, что в качестве вещественного числа γ, удовлетворяющего условию (4.4), можно взять любое из чисел $\sup\Omega_1$ или $\inf\Omega_2$, т.е. множество $\Gamma = \{\gamma \in \mathrm{R} \mid \text{выполняется (4.4)}\}$ непусто.

Пусть $\gamma \in \Gamma$, γ фиксировано. Тогда из левого неравенства в (4.4) видно, что γ – верхняя граница множества Ω_1 $\Rightarrow$ $\sup\Omega_1 \le \gamma$, ибо $\sup\Omega_1$ – наименьшая из всех верхних границ множества Ω_1; из правого неравенства в (4.4) видно, что γ – нижняя граница множества $\Omega_2 \Rightarrow \gamma \le \inf\Omega_2$, ибо $\inf\Omega_2$ – наибольшая из всех нижних границ множества Ω_2. Получили:

$$\sup\Omega_1 \le \gamma \le \inf\Omega_2 . \tag{4.9}$$

В силу (4.8), (4.9) для $\forall \gamma \in \Gamma$

$$a+b \le \sup\Omega_1 \le \gamma \le \inf\Omega_2 \le a'+b', \forall a+b \in \Omega_1, \forall a'+b' \in \Omega_2 . \tag{4.10}$$

Из (4.10) видно, что для доказательства теоремы осталось показать, что

$$\sup\Omega_1 = \inf\Omega_2 , \tag{4.11}$$

ибо при наличии равенства (4.11) вещественное число γ, удовлетворяющее условию (4.4), определяется единственным образом и можно положить

$$\gamma = \sup\Omega_1 \tag{4.12}$$

или

$$\gamma = \inf\Omega_2 . \tag{4.13}$$

: $\sup\Omega_1 \ne \inf\Omega_2$, т.е. в силу (4.5) $\sup\Omega_1 < \inf\Omega_2$. Тогда в силу теоремы 2.1 $\exists r_1, r_2 \in \mathrm{Q} \mid \sup\Omega_1 < r_1 < r_2 < \inf\Omega_2$. Следовательно, в силу (4.8)

$$a+b \le \sup\Omega_1 < r_1 < r_2 < \inf\Omega_2 \le a'+b', \forall a+b \in \Omega_1, \forall a'+b' \in \Omega_2 . \tag{4.14}$$

На числовой оси рис. 4.1

0 1

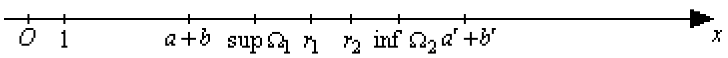

Рис. 4.1

Положим $r = r_2 - r_1$. Тогда из (4.14) получаем:

$$\left(a'+b'\right) - \left(a+b\right) > r , \forall a+b \in \Omega_1, \forall a'+b' \in \Omega_2 ,$$

что противоречит утверждению из замечания 4.1. .

Определение 4.1. *Суммой вещественных чисел* α и β называется вещественное число γ, удовлетворяющее условию (4.4).

Обозначение: $\alpha + \beta = \gamma$.

Определение 4.1 корректно в силу теоремы 4.1.

Из школьного курса математики известно, что для $\forall r \in \mathrm{Q}$ $\exists -r \in \mathrm{Q} \mid r + (-r) = 0$, при этом число $-r$ называется противоположным числом по отношению к числу r.

Введём аналогичное понятие для иррационального числа α. Пусть $A \mid A'$ – сечение в области рациональных чисел, определяющее число α. Положим

$$B = \left\{-a' \mid a' \in A'\right\} ; \tag{4.15}$$

$$B' = \{-a \mid a \in A\}. \tag{4.16}$$

На числовой оси рис. 4.2

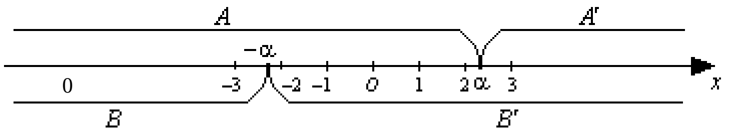

Рис. 4.2

Покажем, что $B \mid B'$ – сечение в области рациональных чисел. По определению 1.1 $A \neq \varnothing$, $A' \neq \varnothing \Rightarrow B \neq \varnothing$, $B' \neq \varnothing$. Покажем, что $B \cup B' = \mathrm{Q}$, т.е. для $\forall r \in \mathrm{Q}$ либо $r \in B$, либо $r \in B'$. Имеем: $r \in \mathrm{Q} \Rightarrow \Rightarrow -r \in \mathrm{Q} \Rightarrow$ либо $-r \in A$, либо $-r \in A'$. Если $-r \in A$, то в силу (4.16) $-(-r) \in B'$, т.е. $r \in B'$. Если $-r \in A'$, то в силу (4.15) $-(-r) \in B$, т.е. $r \in B$. Покажем, что множества B, B' удовлетворяют условиям 1), 2) из определения 1.1. Установим, что $B \cap B' = \varnothing$. : $\exists r \in B \cap B'$. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} r \in B \Rightarrow -r \in A' \\ r \in B' \Rightarrow -r \in A \end{array}\right\} \Rightarrow -r \in A \cap A' = \varnothing .$$

Противоречие. .

Покажем, что для $\forall b \in B,\ \forall b' \in B' \Rightarrow b < b'$. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} b \in B \Rightarrow -b \in A' \\ b' \in B' \Rightarrow -b' \in A \end{array}\right\} \Rightarrow -b' < -b \Rightarrow b < b' .$$

Итак, $B \mid B'$ – сечение в области рациональных чисел, при этом в классе B нет наибольшего числа и в классе B' нет наименьшего числа (это следует из того, что в классе A нет наибольшего числа и в классе A' нет наименьшего числа). Следовательно, сечение $B \mid B'$ определяет иррациональное число β: $B \mid B' \to \beta$.

Определение 4.2. *Числом, противоположным иррациональному числу* α, порождаемому сечением $A \mid A'$, называется иррациональное число β, порождаемое сечением $B \mid B'$ вида (4.15), (4.16).

Обозначение: $\beta = -\alpha$.

Из определения видно, что противоположное число $-\alpha$ единственно.

Укажем характеристическое свойство противоположного числа:

$$\alpha + (-\alpha) = 0 . \tag{4.17}$$

Действительно, пусть $\alpha + (-\alpha) = \gamma$. Согласно определению 4.1

$$a + b \le \gamma \le a' + b',\ \ \forall a \in A,\ \ b \in B,\ \ a' \in A',\ b' \in B',$$

или в силу (4.15), (4.16)

$$a - a' \le \gamma \le a' - a,\ \forall a \in A,\ a' \in A' . \tag{4.18}$$

По условию 2) из определения 1.1 $a < a'$ для $\forall a \in A$, $a' \in A' \Rightarrow \ \Rightarrow a - a' < 0$, $a' - a > 0$. В силу этого число 0 тоже удовлетворяет условию (4.18):

$$a - a' \le 0 \le a' - a,\ \forall a \in A,\ a' \in A' .$$

В силу единственности суммы $\gamma = 0$, т.е. $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Из определения противоположного числа вытекают следующие свойства для $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$:

$$\alpha > 0 \ \Rightarrow\ -\alpha < 0; \tag{4.19}$$

$$\alpha < 0 \ \Rightarrow\ -\alpha > 0; \tag{4.20}$$

$$\alpha < \beta \ \Rightarrow\ -\alpha > -\beta . \tag{4.21}$$

Из определения 4.2 следует, что числом, противоположным числу $-\alpha$, является число α. Поэтому α и $-\alpha$ можно называть *взаимно противоположными числами.*

Операция сложения обладает следующими свойствами:

1°. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$ (коммутативность или переместительное свойство сложения);

2°. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$ (ассоциативность или сочетательное свойство сложения);

3°. $\alpha + 0 = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathrm{R}$ (особая роль нуля);

4°. $\alpha + (-\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \mathrm{R}$.

Свойство 4° доказано выше (см. (4.17)). Справедливость свойств 1°–3° непосредственно вытекает из определения 4.1 и справедливости соответствующих свойств для рациональных чисел.

В силу свойства 2° допустима запись $\alpha+\beta+\gamma$.

Вычитание вещественных чисел определяется как операция, обратная сложению.

Определение 4.3. *Разностью* $\alpha-\beta$ *вещественных чисел* α *и* β называется такое вещественное число γ, что $\gamma+\beta=\alpha$.

Покажем, что определение 4.3 корректно, т.е. что такое γ существует и определяется единственным образом: $\gamma=\alpha+(-\beta)$.

Действительно, положим $\gamma=\alpha+(-\beta)$. Тогда, используя свойства 1° – 4°, получаем:

$$\gamma+\beta=\left[\alpha+(-\beta)\right]+\beta=\alpha+\left[(-\beta)+\beta\right]=\alpha+\left[\beta+(-\beta)\right]=\alpha+0=\alpha .$$

Покажем, что разность вещественных чисел определяется однозначно. Пусть γ_1 – любое другое вещественное число, удовлетворяющее условию $\gamma_1+\beta=\alpha$. Тогда

$$\left.\begin{array}{c}(\gamma_1+\beta)+(-\beta)=\alpha+(-\beta)=\gamma\\ (\gamma_1+\beta)+(-\beta)=\gamma_1+\left[\beta+(-\beta)\right]=\gamma_1+0=\gamma_1\end{array}\right\}\Rightarrow\gamma_1=\gamma$$

в силу единственности суммы.

Справедливо следующее свойство, связывающее знак > со знаком суммы [7, с. 54]:

5°. Если $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$ и $\alpha>\beta$, то $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$ для $\forall\gamma\in\mathrm{R}$.

Из свойства 5° вытекает следующее свойство, позволяющее почленно складывать неравенства одного знака:

6°. Если $\alpha,\beta,\mu,\nu\in\mathrm{R}$ и $\alpha>\beta$, $\mu>\nu$, то $\alpha+\mu>\beta+\nu$.

Действительно, используя свойства 1°, 5°, получаем:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha+\mu>\beta+\mu\\ \beta+\mu=\mu+\beta>\nu+\beta=\beta+\nu\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha+\mu>\beta+\nu$$

в силу свойства транзитивности знака > (см. лекцию 1).

Введём понятие модуля вещественного числа.

Определение 4.4. *Модулем* (*абсолютной величиной*) *вещественного числа* α называется вещественное число $|\alpha|$, определяемое следующим образом:

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{если } \alpha>0;\\ -\alpha, & \text{если } \alpha<0;\\ 0, & \text{если } \alpha=0.\end{cases}\tag{4.22}$$

Из (4.22) виден геометрический смысл модуля вещественного числа: модуль вещественного числа α равен расстоянию от точки M_α, изображающей число α на числовой оси, до точки 0 (до начала координат):

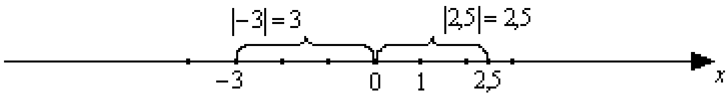

Рис. 4.3

Следовательно,

$$|\alpha|\geq 0,\ \forall\alpha\in\mathrm{R};\tag{4.23}$$

$$|-\alpha|=|\alpha|,\ \forall\alpha\in\mathrm{R};\tag{4.24}$$

$$\alpha\leq|\alpha|,\ \forall\alpha\in\mathrm{R}.\tag{4.25}$$

Далее, если $c\in\mathrm{R}$, $c>0$, то

;
;

$$|x|=c\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-c\\ x=c\end{array}\right.\tag{4.26}$$

$$|x|<c\Leftrightarrow -c<x<c\ ;\tag{4.27}$$

$$|x|\leq c\Leftrightarrow -c\leq x\leq c\ ;\tag{4.28}$$

;
;

$$|x|>c\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-c\\ x>c\end{array}\right.\tag{4.29}$$

;
.

$$|x|\geq c\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq -c\\ x\geq c\end{array}\right.\tag{4.30}$$

Следовательно,

$$\{x\in \mathrm{R} : |x| = c\} = \{-c, c\};$$

$$\{x\in \mathrm{R} : |x| < c\} = (-c, c);$$

$$\{x\in \mathrm{R} : |x| \le c\} = [-c, c];$$

$$\{x\in \mathrm{R} : |x| > c\} = (-\infty, -c)\cup(c, +\infty);$$

$$\{x\in \mathrm{R} : |x| \ge c\} = (-\infty, -c]\cup[c, +\infty).$$

Введём в области вещественных чисел операцию умножения.

Пусть $\alpha,\beta\in \mathrm{R}$, $\alpha>0$, $\beta>0$; $A|A'$ и $B|B'$ – сечения в области рациональных чисел, определяющие числа α и β. Тогда выполняются неравенства (4.1), (4.2).

Рассмотрим множества вида

$$\Phi_1 = \{ab \mid a\in A,\ b\in B,\ a>0,\ b>0\};$$

$$\Phi_2 = \{a'b' \mid a'\in A',\ b'\in B',\ a'>0,\ b'>0\}.$$

Определение 4.5. *Произведением положительных вещественных чисел* α и β называется вещественное число γ, которое удовлетворяет условию

$$ab \le \gamma \le a'b',\ \forall ab\in \Phi_1,\ \forall a'b'\in \Phi_2. \tag{4.31}$$

Обозначение: $\alpha\beta=\gamma$.

Определение 4.5 корректно в силу следующего утверждения, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 4.1.

Теорема 4.2. Существует единственное вещественное число γ, удовлетворяющее условию (4.31):

$$\gamma = \sup \Phi_1 = \inf \Phi_2.$$

Произведение произвольных вещественных чисел α *и* β определяется по следующему правилу: $\forall\alpha\in \mathrm{R}$ $\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0$, в частности, $0\cdot 0 = 0$; $\forall\alpha,\beta\in \mathrm{R}$, $\alpha\ne 0$, $\beta\ne 0$ полагают

если α и β одного знака;
если α и β разных знаков.

$$\alpha\cdot\beta = \begin{cases} |\alpha|\cdot|\beta|, & \text{åñëè } \alpha \text{ è } \beta \text{ îäíîãî çíàêà,} \\ -|\alpha|\cdot|\beta|, & \text{åñëè } \alpha \text{ è } \beta \text{ ðàçíûõ çíàêîâ.} \end{cases} \tag{4.32}$$

Из школьного курса математики известно, что $\forall r\in \mathrm{Q},\ r\ne 0$ $\exists \frac{1}{r}\in \mathrm{Q} \mid r\cdot\frac{1}{r} = 1$, при этом число $\frac{1}{r}$ называется обратным числом по отношению к числу r.

Введём аналогичное понятие для иррационального числа α. Рассмотрим вначале случай $\alpha>0$. Пусть $A|A'$ – сечение в области рациональных чисел, определяющее число α. Положим

$$C = \{r\in \mathrm{Q} \mid r\le 0\}\cup\left\{\frac{1}{a'} \mid a'\in A'\right\}; \tag{4.33}$$

$$C' = \left\{\frac{1}{a} \mid a\in A,\ a>0\right\}. \tag{4.34}$$

Проведя рассуждения, аналогичные тем, что изложены на стр. 33, приходим к выводу, что $C|C'$ – сечение в области рациональных чисел, при этом в классе C нет наибольшего числа и в классе C' нет наименьшего числа. Следовательно, сечение $C|C'$ определяет иррациональное число ν: $C|C'\to\nu$.

Определение 4.6. *Числом, обратным положительному иррациональному числу* α*,* порождаемому сечением $A|A'$, называется иррациональное число ν, порождаемое сечением $C|C'$ вида (4.33), (4.34).

Обозначение: $\nu = \dfrac{1}{\alpha}$ или $\nu = \alpha^{-1}$.

Обратное число обладает следующим характеристическим свойством:

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha} = 1. \tag{4.35}$$

Действительно, пусть $\mu = \alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}$. Согласно определению 4.5

$$ac \le \mu \le a'c',\ \forall a \in A,\ c \in C,\ a' \in A',\ c' \in C',\ a, c, a', c' > 0,$$

или в силу (4.33), (4.34)

$$\frac{a}{a'} \le \mu \le \frac{a'}{a},\ \forall a \in A,\ a' \in A',\ a > 0,\ a' > 0. \quad (4.36)$$

По условию 2) из определения 1.1 $a < a'$ для $\forall a \in A,\ \forall a' \in A' \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{a}{a'} < 1,\ \frac{a'}{a} > 1$ для $\forall a \in A$, $a > 0$, $\forall a' \in A'$, $a' > 0$. В силу этого число 1 тоже удовлетворяет условию (4.36):

$$\frac{a}{a'} \le 1 \le \frac{a'}{a},\ \forall a \in A,\ a' \in A',\ a > 0,\ a' > 0.$$

В силу единственности произведения $\mu = 1$, т.е. $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$.

Если $\alpha < 0$, то обратное ему число определяется по формуле

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}.$$

Тогда числа α и $\frac{1}{\alpha}$ имеют одинаковые знаки, следовательно, в силу (4.32)

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|} = 1.$$

Операция умножения обладает следующими свойствами ([11, с. 32]):

7°. $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$ (коммутативность или переместительное свойство умножения);

8°. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$ (ассоциативность или сочетательное свойство умножения);

9°. $\alpha \cdot 1 = \alpha$ $\forall \alpha \in \mathrm{R}$ (особая роль единицы);

10°. $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ $\forall \alpha \in \mathrm{R}$, $\alpha \ne 0$.

Деление вещественных чисел определяется как операция, обратная умножению.

Определение 4.7. *Частным* $\frac{\alpha}{\beta}$ *вещественных чисел* α *и* β ($\beta \ne 0$) называется такое вещественное число γ, что $\gamma\beta = \alpha$.

Определение 4.7 корректно, т.е. такое число γ определяется единственным образом ([11, с. 34]).

Справедливы следующие свойства ([11, с. 34]):

11°. Если $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$ и $\alpha > \beta$, $\gamma > 0$, то $\alpha\gamma > \beta\gamma$;

12°. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$ (дистрибутивность или распределительное свойство умножения относительно суммы).

В дальнейшем будут полезны следующие свойства модулей [11, с. 35]: $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$

$$|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|; \quad (4.37)$$

$$|\alpha - \beta| \le |\alpha| + |\beta|; \quad (4.38)$$

$$|\alpha - \beta| \ge |\alpha| - |\beta|; \quad (4.39)$$

$$|\alpha - \beta| \ge \big||\alpha| - |\beta|\big|; \quad (4.40)$$

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|; \quad (4.41)$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|},\ \beta \ne 0; \quad (4.42)$$

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n,\ n \in \mathrm{N}; \quad (4.43)$$

$$|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|. \quad (4.44)$$

В последующих лекциях мы будем рассматривать только вещественные числа и в целях краткости называть их числами.

Л е к ц и я 5. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Понятие числовой последовательности; ограниченные и неограниченные последовательности; предел последовательности; бесконечно большие последовательности; сходящиеся и расходящиеся последовательности; теорема о единственности предела; предельный переход в равенстве; теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

В математическом анализе важную роль имеют числовые последовательности. В частности, с их помощью удобно описывать различные объекты или процессы, для которых переход из одного возможного состояния в другое может совершаться лишь в дискретные моменты времени $t_1,\ t_2,\ \dots,t_n,\ \dots$ (другими словами, поэтапно).

Определение 5.1. Если каждому натуральному числу *n* ставится в соответствие по заданному закону (правилу) f некоторое число $x_n \in \mathrm{R}$, то говорят, что задана *числовая последовательность* (ч.п.)

$$x_1,\ x_2,\ \dots,x_n,\ \dots, \tag{5.1}$$

при этом числа $x_n, n\in \mathrm{N}$ называются членами (или элементами) ч.п. (x_1 – первый член ч.п., x_2 – второй член ч.п., …, x_n – *n*-й (или общий) член ч.п., …).

Можно рассматривать последовательности, членами которых являются функции (такие последовательности называются функциональными). Однако в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением числовых последовательностей и будем называть их в целях краткости последовательностями.

Краткое обозначение последовательности (5.1): $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{x_n\}$.

Последовательность $\{x_n\}$ считается заданной, если указан закон f, по которому можно найти любой её элемент x_n.

Последовательность можно задать, указав явную формулу для её общего члена:

$$x_n = f(n),\ n\in \mathrm{N}.$$

Пример 5.1. $x_n = \dfrac{1}{n^3}$, $n\in \mathrm{N}$. Это последовательность вида

$$1,\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{3^3},\ \frac{1}{4^3},\ \dots,\ \frac{1}{n^3},\ \dots\ . \tag{5.2}$$

Последовательность можно задать, указав рекуррентную формулу для её общего члена, т.е. формулу, выражающую x_n через предшествующие члены $x_1,\ x_2,\ \dots,x_{n-1}$ (или через часть предшествующих членов).

Пример 5.2. $x_1 = b_1$ ($b_1\in \mathrm{R},\ b_1\neq 0$), $x_n = x_{n-1}\cdot q$, $n\in \mathrm{N}$, $n\geq 2$, ($q\in \mathrm{R},\ q\neq 0$). Это последовательность вида

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\dots,\ b_1q^{n-1},\ \dots\ . \tag{5.3}$$

Из школьного курса математики известно, что последовательность (5.3) – это, по определению, геометрическая прогрессия с первым членом b_1 и знаменателем q.

Если $x_n = c$, $\forall n\in \mathrm{N}$, где $c = \mathrm{const}$, то такая последовательность

$$c,\ c,\ c,\ \dots,\ c,\ \dots$$

называется постоянной (или стационарной).

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$. Совокупность всех её элементов образует некоторое множество вещественных чисел. Исходя из понятий ограниченного сверху, ограниченного снизу и ограниченного множества вещественных чисел (см. лекцию 3), приходим к следующим определениям.

Определение 5.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists M\in \mathrm{R}\mid x_n\leq M \text{ для } \forall n\in \mathrm{N}, \tag{5.4}$$

при этом число M называется *верхней границей* (*верхней гранью*) *последовательности* $\{x_n\}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то множество всех её верхних границ бесконечно (см. замечание 3.1).

Определение 5.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если

$$\exists m\in \mathrm{R}\mid x_n\geq m \text{ для } \forall n\in \mathrm{N}, \tag{5.5}$$

при этом число m называется *нижней границей* (или *нижней гранью*) *последовательности* $\{x_n\}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, то множество всех её нижних границ бесконечно (см. замечание 3.3).

Определение 5.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и ограничена снизу, т.е.

$$\exists m, M \in \mathrm{R} \mid m \le x_n \le M \text{ , для } \forall n \in \mathrm{N} . \tag{5.6}$$

Замечание 5.1. В силу замечания 3.5 условие ограниченности последовательности $\{x_n\}$ можно записать в виде:

$$\exists C \in \mathrm{R}, C > 0 \mid |x_n| \le C ,\ \forall n \in \mathrm{N} . \tag{5.7}$$

Исходя из замечания 5.1, приходим к понятию неограниченной последовательности.

Определение 5.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если

$$\text{для } \forall C \in \mathrm{R}, C > 0\ \exists n = n(C) \mid |x_n| > C \tag{5.8}$$

(запись $n = n(C)$ означает, что в общем случае номер n определяется в зависимости от взятого числа C, т.е. для каждого C найдётся свой номер).

В примере 5.1 последовательность $\{x_n\}$ ограничена (для неё в качестве верхней границы можно взять любое число $M \ge 1$, в качестве нижнее границы – любое число $m \le 0$).

Последовательность из примера 5.2 при $b_1 = -3, q = 2$:

$$-3,\ -6,\ -12,\ \ldots,\ -3 \cdot 2^{n-1},\ \ldots$$

является неограниченной (она ограничена сверху любым числом $M \ge -3$, но не ограничена снизу).

Последовательность из примера 5.2 при $b_1 = 3, q = 2$:

$$3,\ 6,\ 12,\ \ldots,\ 3 \cdot 2^{n-1},\ \ldots$$

является неограниченной (она ограничена снизу любым числом $m \le 3$, но не ограничена сверху).

Последовательность из примера 5.2 при $b_1 = 3, q = -2$:

$$3,\ -6,\ 12,\ -24,\ \ldots,\ 3 \cdot (-2)^{n-1},\ \ldots$$

является неограниченной (она не ограничена сверху и не ограничена снизу).

При изучении последовательности важно знать, каково поведение её членов при неограниченном увеличении их номеров. В связи с этим введём понятие предела последовательности.

Определение 5.6. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся номер N, определяемый в зависимости от взятого числа ε, такой, что для любого номера $n > N$ соответствующий член последовательности x_n отличается от числа a по модулю на величину, меньшую взятого числа ε.

Обозначение:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a , \tag{5.9}$$

или $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$, или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ (lim есть сокращение латинского слова limes, означающего "предел").

Итак, запись (5.9) означает, по определению, следующее:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon . \tag{5.10}$$

Сформулируем определение предела последовательности на геометрическом языке. В силу (4.27)

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon . \tag{5.11}$$

В силу свойства 5° из лекции 4

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon . \tag{5.12}$$

В силу (5.11), (5.12)

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff x_n \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon) . \tag{5.13}$$

Определение 5.7. ε-*окрестностью точки* a называется интервал с центром в точке a радиуса ε.

Обозначение: $O_\varepsilon(a)$. По определению

$$O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon) . \tag{5.14}$$

В силу (5.13), (5.14)

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff x_n \in O_\varepsilon(a) .$$

Определение 5.8. Точка a называется *пределом последовательности точек* $\{x_n\}$, если для любой сколь угодно малой ε-окрестности точки a найдётся номер *N*, определяемый в зависимости от ε, такой, что для любого номера $n > N$ соответствующая точка x_n попадает во взятую ε-окрестность точки a.

Итак, запись (5.9) означает по определению следующее:

$$\forall O_\varepsilon(a)\ \exists N = N(\varepsilon) \,|\, \forall n > N \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(a)\,. \tag{5.15}$$

Геометрическая иллюстрация показана на рис. 5.1.

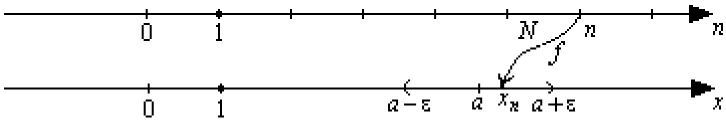

Рис. 5.1

Замечание 5.2. Из определения 5.8 видно, что вне взятой ε-окрестности точки a может оказаться лишь конечное число элементов последовательности (а именно, элементы $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_N$).

Замечание 5.3. Из замечания 5.2 видно, что если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a и из неё удалить конечное число членов или к ней добавить конечное число новых членов, то вновь полученная последовательность тоже сходится к числу a.

Пример 5.3. Предел последовательности $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$ равен 1.

Действительно, зафиксируем произвольное сколь угодно малое положительное число ε. Чтобы показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, нам нужно в силу (5.10) подобрать номер $N = N(\varepsilon) \,|\, \forall n > N \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$. Имеем: $x_n - 1 = \dfrac{n+1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n}$, $|x_n - 1| = \left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ и для выполнения неравенства $|x_n - 1| < \varepsilon$, $\forall n > N$, т.е. неравенства $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ или равносильного ему неравенства $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ достаточно взять в качестве N целую часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$: $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

Определение 5.9. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* $+\infty$ (*имеет предел* $+\infty$), если для любого сколь угодно большого положительного числа E найдётся номер *N*, определяемый в зависимости от взятого числа E, такой, что для любого номера $n > N$ соответствующий член последовательности x_n больше взятого числа E.

Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\,. \tag{5.16}$$

Запись (5.16) означает, по определению, следующее:

$$\forall E > 0\ \exists N = N(E) \,|\, \forall n > N \Rightarrow x_n > E\,. \tag{5.17}$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рис. 5.2.

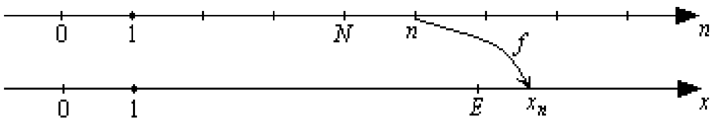

Рис. 5.2

Пример 5.4. Последовательность $x_n = 2n+1$, $n \in \mathrm{N}$ сходится к $+\infty$.

Действительно, зафиксируем произвольное сколь угодно большое положительное число E. Чтобы показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, нам нужно в силу (5.17) подобрать номер $N = N(E) \,|\, \forall n > N \Rightarrow x_n > E$, т.е. $2n+1 > E$, а для этого достаточно взять $n > \dfrac{E-1}{2}$, т.е. положить $N = \left[\dfrac{E-1}{2}\right]$.

Определение 5.10. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* $-\infty$ (*имеет предел* $-\infty$), если для любого сколь угодно большого по модулю отрицательного числа E найдётся номер *N*, определяемый в зависимости от взятого числа E, такой, что для любого номера $n > N$ соответствующий член последовательности меньше взятого числа E.

Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\,. \tag{5.18}$$

Запись (5.18) означает, по определению, следующее:

$$\forall E<0\ \exists N=N(E)\,|\,\forall n>N \Rightarrow x_n<E\,. \qquad (5.19)$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рис. 5.3.

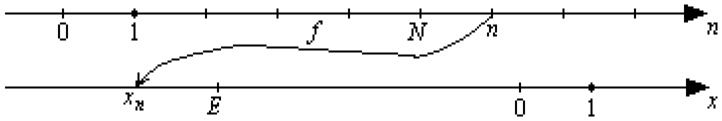

Рис. 5.3

Пример 5.5. Последовательность $x_n=-2n$, $n\in \mathrm{N}$ сходится к $-\infty$.

Действительно, для произвольно взятого $E<0$ достаточно положить $N=\left[\frac{|E|}{2}\right]$. Тогда $\forall n>N \Rightarrow x_n<E$, а это означает, по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.

Замечание 5.4. Существуют последовательности, у которых нет ни конечного, ни бесконечного предела.

Пример 5.6. Ограниченная последовательность $x_n=(-1)^{n+1}$, $n\in \mathrm{N}$:

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ \ldots \qquad (5.20)$$

не имеет ни конечного, ни бесконечного предела, ибо для неё не выполняется ни одно из условий (5.10), (5.17), (5.19).

Пример 5.7. Неограниченная последовательность $x_n=(-1)^{n+1}n$, $n\in \mathrm{N}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела, ибо для неё не выполняется ни одно из условий (5.10), (5.17), (5.19).

Определение 5.11. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=+\infty\,, \qquad (5.21)$$

т.е. в силу (5.17), если выполняется

$$\forall E>0\ \exists N=N(E)\,|\,\forall n>N \Rightarrow |x_n|>E\,. \qquad (5.22)$$

Замечание 5.5. Если выполняется (5.21), то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к ∞ (или имеет предел ∞).

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

Любая последовательность $\{x_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, есть бесконечно большая последовательность (б.б.п.).

Действительно, для такой последовательности выполняется (5.17). Имеем: $x_n>E$, $E>0$ $\Rightarrow x_n>0 \Rightarrow x_n=|x_n|$ и (5.17) принимает вид (5.22), а это означает, по определению, что $\{x_n\}$ – б.б.п.

Например, последовательность $\{x_n\}$ из примера 5.4 является б.б.п.

Аналогично, любая последовательность $\{x_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$, есть б.б.п.

Действительно, для такой последовательности выполняется (5.19). Имеем:

$$x_n<E, E<0 \Rightarrow \begin{cases} -x_n>-E,\ -E>0 \\ x_n<0 \Rightarrow -x_n=|x_n| \end{cases} \Rightarrow |x_n|>-E\,,$$

т.е. выполняется (5.22), где в качестве E выступает $-E>0$, а это означает, по определению, что $\{x_n\}$ – б.б.п.

Последовательность x_n из примера 5.7 является б.б.п, ибо $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$.

Заметим, что всякая б.б.п. является неограниченной, что видно из (5.8), (5.21).

Однако, не всякая неограниченная последовательность является б.б.п. Например, неограниченная последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ 2k-1,\ \frac{1}{2k},\ \ldots,\ k\in \mathrm{N}\,,$$

не является б.б.п., ибо для членов последовательности с чётными номерами не выполняется (5.22).

Теорема 5.1. Если для последовательности $\{x_n\}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\neq 0$ и $\{y_n\}$ – б.б.п., то $\{x_n y_n\}$ – б.б.п.

◄ Пусть, для определённости, $a>0$ (случай $a<0$ рассматривается аналогично). Выберем $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы $O_\varepsilon(a)\subset(0,\ +\infty)$. Положим, например, $\varepsilon=\frac{a}{2}$ (рис. 5.4).

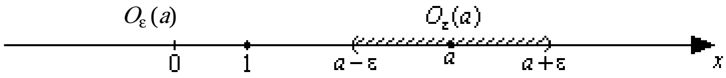

Рис. 5.4

Тогда в силу (5.15) для $O_\varepsilon(a)$ $\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \mid \forall n > N_1 \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(a)$, т.е. $x_n > a - \varepsilon = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} > 0$. Возьмём $E > 0$. По условию, $\{y_n\}$ – б.б.п., следовательно, в силу (5.22) для числа $\dfrac{2E}{a}$ $\exists N_2 = N_2\left(\dfrac{2E}{a}\right) = \; = N_2(E) \mid \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n| > \dfrac{2E}{a}$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Заметим, что $N = N(E)$, ибо $N_2 = N_2(E)$. Тогда для $\forall n > N$ $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| > \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2E}{a} = E$. Получили: $\forall E > 0 \; \exists N = N(E) \mid \forall n > N \Rightarrow \Rightarrow |x_n y_n| > E$, а это означает, по определению, что $\{x_n y_n\}$ – б.б.п. ◀

Следствие 5.1. Если $\{y_n\}$ – б.б.п., то $\forall c \in \mathrm{R}$, $c \neq 0$ $c \cdot \{y_n\} = \{c y_n\}$ – б.б.п.

Определение 5.12. Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет конечный предел.

Последовательность из примера 5.3 является сходящейся.

Определение 5.13. Последовательность называется *расходящейся*, если она не имеет конечного предела.

Последовательности из примеров 5.4 – 5.7 являются расходящимися.

Теорема 5.2. Всякая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

▶ ПП: $\exists$ сходящаяся последовательность $\{x_n\} \mid$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a; \tag{5.23}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \tag{5.24}$$

и $a \neq b$. Пусть, для определённости, $a < b \;\Rightarrow b - a > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \varnothing$. Положим, например, $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ (рис. (рис. 5.5).

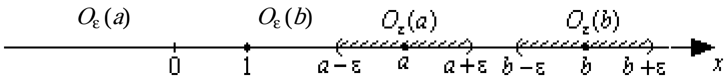

Рис. 5.5

Из (5.23) следует в силу (5.15): для взятой $O_\varepsilon(a)$ $\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \mid$ $\forall n > N_1 \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(a)$. Аналогично, из (5.24) следует, что для взятой $O_\varepsilon(b)$ $\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \mid \forall n > N_2 \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(b)$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $\forall n > N$ $x_n \in O_\varepsilon(a)$ и $x_n \in O_\varepsilon(b) \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \varnothing$. Противоречие. $\overline{\text{ПП}}$. ◀

Пусть даны две последовательности $x_n = \varphi(n)$, $n \in \mathrm{N}$, $y_n = \psi(n)$, $n \in \mathrm{N}$; $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \psi(n)$ и выполняется условие

$$\varphi(n) = \psi(n), \; \forall n \in \mathrm{N}. \tag{5.25}$$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \lim_{n\to\infty} \psi(n). \tag{5.26}$$

Действительно, в силу условия (5.25) речь идёт об одной последовательности $z_n = x_n = y_n$, $n \in \mathrm{N}$, а в силу теоремы 5.2 предел этой последовательности единственен.

Переход от (5.25) к (5.26) называется предельным переходом в равенстве.

Укажем *необходимый признак сходимости последовательности.*

Теорема 5.3. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

▶ Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность, т.е.

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{5.27}$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т.е. выполняется (5.7). Возьмём фиксированное $\varepsilon > 0$. Тогда из (5.27) следует в силу (5.10), (5.12), что $\exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow \;\Rightarrow |x_n| \leq \max\{|a-\varepsilon|, \; |a+\varepsilon|\} \overset{def}{=} C_1$, $\forall n \in \mathrm{N}$. Положим $C_2 = \max\{|x_1|, \; |x_2|, ..., \; |x_N|\}$, $C = \max\{C_1, C_2\}$. Тогда $|x_n| \leq C$, $\forall n \in \mathrm{N}$. ◀

Замечание 5.6. Не всякая ограниченная последовательность является сходящейся.

Например, последовательность (5.20) ограничена (ибо $|x_n| \le 1$ для $\forall n \in \mathrm{N}$), но не является сходящейся.

Лекция 6. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Арифметические операции над последовательностями; бесконечно малые последовательности, их свойства; связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями; простейший признак сходимости последовательности; основная теорема о пределах последовательностей; неопределённые выражения.

Введём понятия арифметических операций над последовательностями. Пусть даны две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Определение 6.1. *Суммой последовательностей* $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность вида $\{x_n + y_n\}$; *разностью* – последовательность вида $\{x_n - y_n\}$; *произведением* – последовательность вида $\{x_n y_n\}$; *частным* – последовательность вида $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ (в случае частного предполагается, что $y_n \ne 0$ для $\forall n \in \mathrm{N}$).

Замечание 6.1. Из определения произведения последовательностей видно, что произведение последовательности $\{x_n\}$ на постоянную последовательность $\{y_n\} = \{c\}$ есть последовательность вида $\{cx_n\}$. Последовательность $\{cx_n\}$ будем называть также произведением последовательности $\{x_n\}$ на число c и обозначать $c\{x_n\}$.

Определение 6.2. *Линейной комбинацией последовательностей* $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$, ..., $\{x_n^{(s)}\}$ называется выражение вида

$$\alpha_1\{x_n^{(1)}\} + \alpha_2\{x_n^{(2)}\} + \ldots + \alpha_s\{x_n^{(s)}\}, \qquad (6.1)$$

где α_1, α_2, ..., α_s – некоторые числа, называемые *коэффициентами линейной комбинации.*

Краткое обозначение (6.1): $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i \{x_n^{(i)}\}$.

Итак, по определению, (6.1) – это последовательность вида

$$\{\alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)} + \ldots + \alpha_s x_n^{(s)}\}. \qquad (6.2)$$

Краткое обозначение (6.2): $\left\{\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i x_n^{(i)}\right\}$.

Замечание 6.2. Если лишь конечное число членов последовательности $\{y_n\}$ обращается в нуль, то частное $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ можно определить с того номера, начиная с которого все $y_n \ne 0$.

Среди сходящихся последовательностей выделяется класс бесконечно малых последовательностей (бесконечно малых величин). Члены таких последовательностей принято обозначать строчными буквами греческого алфавита.

Определение 6.3. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если её предел равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad (6.3)$$

т.е., согласно определению предела, если для

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon, \qquad (6.4.)$$

или в силу (5.15), если для

$$\forall O_\varepsilon(0)\ \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow \alpha_n \in O_\varepsilon(0). \qquad (6.5)$$

Пример 6.1. Последовательность $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathrm{N}$ является бесконечно малой.

Действительно, для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ положим $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Тогда $\forall n > N \Rightarrow |\alpha_n| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ (см. пример 5.3), а это означает в силу (6.4), что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Укажем основные свойства бесконечно малых последовательностей.

Теорема 6.1. Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Покажем, что их сумма $\{\alpha_n+\beta_n\}$ тоже бесконечно малая последовательность. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу (6.4) для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N_1=N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=N_1(\varepsilon)\,|\,\forall n>N_1\Rightarrow|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, в силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N_2=N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=N_2(\varepsilon)\,|$ $\forall n>N_2\Rightarrow|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Положим $N=\max\{N_1,N_2\}$. Заметим, что $N=N(\varepsilon)$, ибо $N_1=N_1(\varepsilon)$, $N_2=N_2(\varepsilon)$. Тогда для $\forall n>N$ $\Rightarrow|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, следовательно, $\forall n>N\Rightarrow|\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Итак, для

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\,|\,\forall n>N\Rightarrow|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon,$$

а это означает, по определению, что $\{\alpha_n+\beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Теорема 6.2. Сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность (б.м.п.).

Пусть $\left\{\alpha_n^{(1)}\right\}$, $\left\{\alpha_n^{(2)}\right\}$, ..., $\left\{\alpha_n^{(s)}\right\}$ – б.м.п. Покажем, что $\left\{\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_n^{(i)}\right\}$ – б.м.п. Применим метод математической индукции. При $s=2$ теорема верна в силу теоремы 6.1. Пусть теорема верна при $s=k$, т.е. $\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_n^{(i)}\right\}$ – б.м.п. Покажем, что теорема верна при $s=k+1$, т.е. что $\left\{\sum\limits_{i=1}^{k+1}\alpha_n^{(i)}\right\}$ есть б.м.п. Имеем:

$$\left\{\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_n^{(i)}\right\}=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_n^{(i)}\right\}+\left\{\alpha_n^{(k+1)}\right\}. \qquad (6.6)$$

В правой части (6.6) записана сумма двух последовательностей, каждая из которых является б.м.п. Следовательно, в силу справедливости теоремы при $s=2$ их сумма тоже есть б.м.п.

Теорема 6.3. Произведение ограниченной последовательности и бесконечно малой последовательности есть бесконечно малая последовательность.

Пусть $\{x_n\}$– ограниченная последовательность, т.е. $\exists C>0:|x_n|<C$, $\forall n\in\mathrm{N}$; $\{\alpha_n\}$ – б.м.п., т.е. для неё выполняется (6.4). Покажем, что произведение $\{x_n\alpha_n\}$ есть б.м.п. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу (6.4) для числа $\frac{\varepsilon}{C}$ $\exists N=N\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)=N(\varepsilon)\,|\ \forall n>N\Rightarrow|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{C}$. Тогда для $\forall n>N\Rightarrow|x_n\alpha_n|=|x_n|\cdot|\alpha_n|<C\cdot\frac{\varepsilon}{C}=\varepsilon$. Итак, для

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\,|\,\forall n>N\Rightarrow|x_n\alpha_n|<\varepsilon,$$

а это означает, по определению, что $\{x_n\alpha_n\}$ – б.м.п.

Следствие 6.1. Если $\{\alpha_n\}$ – б.м.п., то для $\forall c\in\mathrm{R}$ $c\{\alpha_n\}=\{c\alpha_n\}$ тоже б.м.п.

Действительно, $\{c\alpha_n\}$ представляет собой произведение стационарной последовательности $\{x_n\}=\{c\}$, которая является ограниченной ($|x_n|\le|c|$, $\forall n\in\mathrm{N}$) и б.м.п. $\{\alpha_n\}$, следовательно, по теореме 6.3 $\{c\alpha_n\}$ – б.м.п.

Следствие 6.2. Линейная комбинация любого конечного числа б.м.п. есть б.м.п., в частности, разность двух б.м.п. есть б.м.п.

Следствие 6.2 вытекает из следствия 6.1 и теоремы 6.2.

Следствие 6.3. Произведение двух б.м.п. есть б.м.п.

Действительно, пусть $\{\alpha_n\}$ – б.м.п., $\{\beta_n\}$ – б.м.п. В силу теоремы 5.3 любая сходящаяся последовательность ограничена, в частности, любая б.м.п. ограничена. Тогда $\{\alpha_n\beta_n\}$ можно рассматривать как произведение ограниченной последовательности $\{\alpha_n\}$ и б.м.п. $\{\beta_n\}$, следовательно, в силу теоремы 6.3 $\{\alpha_n\beta_n\}$ – б.м.п.

Теорема 6.4. Произведение любого конечного числа б.м.п. есть б.м.п.

Теорема 6.4 доказывается методом математической индукции (см. доказательство теоремы 6.2).

Установим связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями.

Теорема 6.5. Если $\{x_n\}$ – б.б.п., то обратная ей последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ (рассматриваемая с того номера, начиная с которого все $x_n\ne0$) есть б.м.п.

► В силу (5.22) для числа $E=1$ $\exists N^* \mid \forall n > N^* \Rightarrow |x_n| > 1 \;\Rightarrow\; \Rightarrow x_n \neq 0$, $\forall n \geq N^*+1$, т.е. последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ определена, например, начиная с номера $n = N^*+1$. Возьмем произвольное сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (5.22) для числа $E = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ $\exists N = N(E) = N\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\dfrac{1}{|x_n|} = \left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$. Получили: для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, а это означает, по определению (см. (6.4)), что $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – б.м.п. ◄

В силу теоремы 6.5 последовательности $y_n = \dfrac{1}{2n+1}$, $n \in \mathrm{N}$; $y_n = \dfrac{1}{-2n}$, $n \in \mathrm{N}$; $y_n = \dfrac{1}{(-1)^{n+1} n}$, $n \in \mathrm{N}$, обратные к последовательностям из примеров 5.4, 5.5, 5.7, являются б.м.п.

Теорема 6.6. Если $\{\alpha_n\}$ – б.м.п. и $\alpha_n \neq 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$, то обратная ей последовательность $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ есть б.б.п.

► Возьмём произвольное сколь угодно большое $E > 0$. Тогда в силу (6.4) для числа $\varepsilon = \dfrac{1}{E} > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) = N\left(\dfrac{1}{E}\right) = N(E) \mid$ $\forall n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \dfrac{1}{E}$, т.е. $\dfrac{1}{|\alpha_n|} = \left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right| > E$. Получили: для $\forall E > 0\ \exists N = N(E) \mid \forall n > N \Rightarrow \left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right| > E$, а это означает, по определению (см. (5.22)), что $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ – б.б.п. ◄

Например, в силу теоремы 6.6 последовательность $y_n = n$, $n \in \mathrm{N}$, обратная к последовательности из примера 6.1, является б.б.п.

Укажем *простейший признак сходимости последовательности.*

Теорема 6.7. Для последовательности $\{x_n\}$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ где $\Leftrightarrow$ λ– б.м.п.x_n, $n \in \mathrm{N}$, ãäå $\{\alpha_n\}$-á.ì .ï .

(*) (**)

► Необходимость: (*) $\Rightarrow$ (**). Пусть выполняется (*). Это означает, по определению, что для

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \tag{6.7}$$

Положим $x_n - a = \alpha_n$, $n \in \mathrm{N}$, тогда (6.7) принимает вид (6.4), а это означает, по определению, что $\{\alpha_n\}$ – б.м.п. Получили: $x_n = a + \alpha_n$, $n \in \mathrm{N}$, где $\{\alpha_n\}$ – б.м.п.

Достаточность: (**) $\Rightarrow$ (*). Пусть выполняется (**). Тогда имеет место (6.4). Из равенства $x_n = a + \alpha_n$ следует, что $\alpha_n = x_n - a$. Подставляя в (6.4) $x_n - a$ вместо α_n, получаем (6.7), а это означает, по определению, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ◄

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6.1. Пусть для последовательности $\{y_n\}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $b \neq 0$. Тогда, начиная с некоторого номера, определена последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ и $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ ограничена.

► По определению предела, для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid$ $\forall n > N \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$. В частности, для числа $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2} > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \mid$

$$|y_n - b| < \frac{|b|}{2},\ \forall n > N. \tag{6.8}$$

Используя (4.38), (6.8), получаем $\forall n > N$:

$$|b| = |y_n - (y_n - b)| \leq |y_n| + |y_n - b| < |y_n| + \frac{|b|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |b| < |y_n| + \frac{|b|}{2} \Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2} \Rightarrow y_n \neq 0,\ \forall n > N,$$

т.е. начиная с номера $n = N+1$ определена последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$. Далее, для $\forall n \geq N+1$

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| = \frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{\frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|}.$$

Получили: $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$, $\forall n \geq N+1$, т.е. последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограничена. ◄

Докажем *основную теорему о пределах последовательностей*, согласно которой в результате арифметических операций над сходящимися последовательностями получаются последовательности, которые тоже сходятся.

Теорема 6.8. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \tag{6.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b. \tag{6.10}$$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное, т.е. последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ тоже сходятся и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{6.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{6.12}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{6.13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \tag{6.14}$$

при этом, в случае частного предполагается, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

► Из (6.9), (6.10) получаем в силу теоремы (6.7)

$$x_n = a + \alpha_n,\ n \in \mathrm{N}, \text{ где } \{\alpha_n\} - \text{б.м.п.}; \tag{6.15}$$

$$y_n = b + \beta_n,\ n \in \mathrm{N}, \text{ где } \{\beta_n\} - \text{б.м.п.}. \tag{6.16}$$

Тогда $x_n + y_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$, $n \in \mathrm{N}$. Положим $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$, $n \in \mathrm{N}$. В силу теоремы 6.1 $\{\gamma_n\}$ – б.м.п. Получили: $x_n + y_n = (a+b) + \gamma_n$, $n \in \mathrm{N}$, где $\{\gamma_n\}$ – б.м.п. Следовательно, в силу теоремы 6.7 $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$, т.е. в силу (6.9), (6.10) справедлива формула (6.11).

В силу (6.15), (6.16) $x_n - y_n = (a-b) + (\alpha_n - \beta_n)$, $n \in \mathrm{N}$. Положим $\mu_n = \alpha_n - \beta_n$, $n \in \mathrm{N}$. В силу следствия 6.2 $\{\mu_n\}$ – б.м.п. Получили: $x_n - y_n = (a-b) + \mu_n$, $n \in \mathrm{N}$, где $\{\mu_n\}$ – б.м.п. Следовательно, в силу теоремы 6.7 $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$, т.е. в силу (6.9), (6.10) справедлива формула (6.12).

В силу (6.15), (6.16) $x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$, $n \in \mathrm{N}$. Положим $\nu_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$, $n \in \mathrm{N}$. В силу следствия 6.3 $\{\alpha_n\beta_n\}$ – б.м.п. Тогда в силу следствия 6.2 $\{\nu_n\}$ – б.м.п. Получили: $x_n y_n = ab + \nu_n$, $n \in \mathrm{N}$, где $\{\nu_n\}$ – б.м.п. Следовательно, в силу теоремы 6.7 $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$, т.е. в силу (6.9), (6.10) справедлива формула (6.13).

В силу условия $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ и леммы 6.1 $\exists N \mid$ начиная с номера $n = N+1$ определена последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограничена. Тогда, начиная с номера $n = N+1$, определена последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. Используя (6.15), (6.16), получаем при $n \geq N+1$:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right). \tag{6.17}$$

Положим $\sigma_n = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)$, $n \ge N+1$. В силу следствия 6.2 и теоремы 6.3 $\{\sigma_n\}$ – б.м.п. В силу (6.17) $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \sigma_n$, $n \ge N+1$, где $\{\sigma_n\}$ – б.м.п. Следовательно, в силу теоремы 6.7 $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, т.е. в силу (6.9), (6.10) справедлива формула (6.14). ◄

Наряду с правилами (6.11) – (6.14) отметим ещё два свойства, используемые при нахождении пределов последовательностей.

Замечание 6.3. Постоянная последовательность $\{x_n\} = \{c\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} c = c\,. \tag{6.18}$$

Действительно, для $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$ $|x_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$, т.е. в качестве номера N в определении (5.10) можно взять любое натуральное число.

Замечание 6.4. Если последовательность сходится к числу a, то для $\forall c \in \mathrm{R}$ последовательность $c\{x_n\} = \{cx_n\}$ сходится к числу ca:

$$\lim_{n\to\infty} (cx_n) = c \lim_{n\to\infty} x_n\,, \tag{6.19}$$

т.е. постоянную можно выносить за знак предела.

Действительно, последовательность $\{cx_n\}$ представляет собой произведение сходящихся последовательностей $\{c\}$ и $\{x_n\}$, следовательно, в силу теоремы 6.8 является сходящейся последовательностью и в силу формул (6.13), (6.18)

$$\lim_{n\to\infty} (cx_n) = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Заметим, что свойство (6.19) можно доказать, не прибегая к свойству (6.13).

Действительно, если $c = 0$, то $\{cx_n\} = 0$ и в силу свойства (6.18) $\lim\limits_{n\to\infty} (cx_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, но $0 = 0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (0 \cdot x_n) = 0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Пусть $c \ne 0 \Rightarrow |c| \ne 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (6.7) для числа $\frac{\varepsilon}{|c|}$ $\exists N = N\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right) = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Тогда для $\forall n > N$ $|cx_n - ca| = |c(x_n - a)| = |c| \cdot |x_n - a| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$. Получили: для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |cx_n - ca| < \varepsilon$, а это означает по определению, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (cx_n) = ca$.

Теорема 6.9. Сумма любого конечного числа сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, и её предел равен сумме пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{s} x_n^{(i)}\right] = \sum_{i=1}^{s} \lim_{n\to\infty} x_n^{(i)}\,. \tag{6.20}$$

Теорема 6.9 доказывается методом математической индукции (её справедливость при $s = 2$ установлена в теореме 6.8.).

Следствие 6.4. Линейная комбинация любого конечного числа сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность и её предел равен линейной комбинации пределов этих последовательностей с теми же коэффициентами.

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{s} c_i x_n^{(i)}\right] = \sum_{i=1}^{s} c_i \lim_{n\to\infty} x_n^{(i)}\,. \tag{6.21}$$

Следствие 6.4 вытекает из замечания 6.4 и теоремы 6.9.

Теорема 6.9 и следствие 6.4 позволяют находить пределы последовательностей, получаемых в результате арифметических операций над сходящимися последовательностями.

Возможна ситуация, когда при вычислении предела суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей предел хотя бы одной из них равен $+\infty$ (или $-\infty$), а в случае частного предел знаменателя равен нулю.

В простейших случаях такая ситуация разрешается непосредственно.

Пример 6.2. Пусть $x_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$; $y_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ (см пример 5.3), $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ (см. пример 6.1). Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left(\frac{1}{0}\right) = +\infty\,, \tag{6.22}$$

ибо в силу теоремы 6.6 $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – б.б.п., следовательно, в силу теоремы 5.1 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}=\{x_n\}\cdot\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – б.б.п. (знак "+" в правой части (6.22) взят по той причине, что при $n\to\infty$ $x_n\to 1>0$, $y_n\to 0+0$ ($y_n\to +0$); запись $y_n\to 0+0$ ($y_n\to +0$) означает, что y_n сходится к нулю справа, т.е. y_n сходится к нулю, оставаясь больше нуля).

Запись $\left(\frac{1}{0}\right)$ в (6.22) носит условный характер: она означает лишь то, что при $n\to\infty$ предел числителя равен 1, а предел знаменателя равен 0.

Пример 6.3. Пусть $x_n=\frac{n+1}{n}$, $n\in \mathrm{N}$; $y_n=n$, $n\in \mathrm{N}$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0,$$

ибо в силу теоремы 5.3 последовательность $\{x_n\}$ ограничена и в силу теоремы 6.5 $\frac{1}{\{y_n\}}$ – б.м.п., следовательно, в силу теоремы 6.3 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}=\{x_n\}\cdot\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – б.м.п.

В примерах 6.2, 6.3 нам удалось, зная пределы делимого и делителя, найти предел частного. Иначе обстоит дело, когда, например, пределы делимого и делителя равны $+\infty$ (или $-\infty$).

Пример 6.4. $x_n=5n^2+3n-1$, $n\in \mathrm{N}$; $y_n=4n^2+n+2$, $n\in \mathrm{N}$. Используя теорему 5.1, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(5n^2+3n-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left[n^2\left(5+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right]=+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(4n^2+n+2\right)=\lim_{n\to\infty}\left[n^2\left(4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\right]=+\infty.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(5+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{5+0-0}{4+0+0}=\frac{5}{4}.$$

Получили: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{5}{4}$.

Пример 6.5. Пусть $x_n=2n+1$, $n\in \mathrm{N}$; $y_n=n^2+6n+1$, $n\in \mathrm{N}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\left(\frac{2}{+\infty}\right)=0.$$

Получили: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$.

Пример 6.6. Пусть $x_n=3n^2+4n+3$, $n\in \mathrm{N}$; $y_n=2n+5$, $n\in \mathrm{N}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+3}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{2+\frac{5}{n}}=\left(\frac{+\infty}{2}\right)=+\infty.$$

Получили: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$.

Пример 6.7. Пусть $x_n=\left[2+(-1)^{n+1}\right]n$, $n\in\mathrm{N}$; $y_n=n$, $n\in\mathrm{N}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[2+(-1)^{n+1}\right]n}{n}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[2+(-1)^{n+1}\right]\text{ – не существует.}$$

Из примеров 6.4 – 6.7 видно: даже зная, что делимое и делитель сходятся к $+\infty$, нельзя в общем случае сделать вывод о том, чему будет равен предел частного. В связи с этим вводят понятие неопределённости.

Определение 6.4. Говорят, что частное $\dfrac{x_n}{y_n}$, $n\in\mathrm{N}$ представляет собой при $n\to\infty$ *неопределённость* типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ (или $-\infty$) и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ (или $-\infty$).

Аналогичная картина наблюдается, когда при нахождении пределов мы приходим к условным записям вида $\dfrac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$. В этом случае тоже нельзя заранее сказать, чему будет равен предел соответствующего выражения ([11, с. 60]); для нахождения такого предела нужно учесть конкретный вид последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и характер их поведения при $n\to\infty$, или, как принято говорить, раскрыть неопределённость.

Итак, при вычислении пределов последовательностей, получаемых в результате арифметических операций над другими последовательностями, могут возникать неопределённости четырёх типов:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty. \tag{6.23}$$

Неопределённость типа $0\cdot\infty$ сводится с помощью теорем 6.5 и 6.6 к неопределённости типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ или $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=(0\cdot\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\frac{1}{x_n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=(0\cdot\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\frac{1}{y_n}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Неопределённость типа $\infty-\infty$ сводится к неопределённости типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ и, возможно, в дальнейшем к неопределённости типа $0\cdot\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\left[x_n\left(1-\frac{y_n}{x_n}\right)\right]=\left(\infty\left(1-\frac{\infty}{\infty}\right)\right).$$

Л е к ц и я 7. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЛЕММА О ВЛОЖЕННЫХ ПРОМЕЖУТКАХ

Предельный переход в неравенстве; теорема о пределе промежуточной последовательности; понятие монотонной последовательности; теорема о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности; второй замечательный предел; лемма о вложенных промежутках.

В некоторых случаях соответствующие члены двух сходящихся последовательностей связаны между собой знаком неравенства. Возникает вопрос: связаны ли тем же знаком неравенства пределы этих последовательностей.

Теорема 7.1. Пусть $\{x_n\},\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности и

$$x_n\le y_n,\ \forall n\in\mathrm{N}. \tag{7.1}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}x_n\le\lim_{n\to\infty}y_n. \tag{7.2}$$

◀ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$. Нужно доказать, что $a\le b$.

Π: $a > b$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \varnothing$. Положим, например, $\varepsilon = \dfrac{a-b}{3}$ (рис. 7.1).

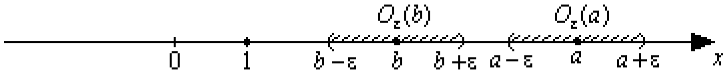

Рис. 7.1

По определению предела, для $O_\varepsilon(a)$ $\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \mid \forall n > N_1 \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(a)$; для $O_\varepsilon(b)$ $\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \mid \forall n > N_2 \Rightarrow y_n \in O_\varepsilon(b)$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $\forall n > N$ $x_n \in O_\varepsilon(a)$ и $y_n \in O_\varepsilon(b) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_n > y_n$, ибо $b+\varepsilon < a-\varepsilon$, так как $a-\varepsilon-(b+\varepsilon) = a-b-2\varepsilon = = a-b-\dfrac{2}{3}(a-b) = \dfrac{1}{3}(a-b) > 0$. Получили: $x_n > y_n$ для $n > N$, что противоречит условию (7.1). $\overline{\Pi}$. ◄

Переход от (7.1) к (7.2) называется предельным переходом в неравенстве.

Замечание 7.1. Если в условии (7.1) имеет место строгое неравенство, т.е. $x_n < y_n$ для $\forall n \in \mathrm{N}$, то в (7.2) строгое неравенство не обязательно.

Например, пусть $x_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $n \in \mathrm{N}$; $y_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$. Тогда $x_n < y_n$, $\forall n \in \mathrm{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Замечание 7.2. В силу замечания 5.3 теорема 7.1 сохраняет силу, если условие (7.1) выполняется, начиная с некоторого номера $n = N_*$.

Следствие 7.1. Если $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность, $c \in \mathrm{R}$ и $x_n \le c$, $\forall n \in \mathrm{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le c$.

Следствие 7.1 вытекает из теоремы 7.1 (в качестве $\{y_n\}$ выступает стационарная последовательность $\{c\}$) и того, что $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Следствие 7.2. Если $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность, $c \in \mathrm{R}$ и $x_n \ge c$, $\forall n \in \mathrm{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge c$.

Следствие 7.3. Если $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность; $a, b \in \mathrm{R}$, $a < b$ и $a \le x_n \le b$, $\forall n \in \mathrm{N}$, то $a \le \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le b$.

Замечание 7.3. В силу замечания 5.3 следствие 7.3 можно обобщить: если начиная с некоторого номера все члены сходящейся последовательности принадлежат сегменту $[a, b]$, то её предел тоже принадлежит этому сегменту.

Теорема 7.2. Пусть $\{x_n\}, \{z_n\}$ – сходящиеся последовательности, имеющие общий предел a, а члены последовательности $\{y_n\}$, удовлетворяют условию

$$x_n \le y_n \le z_n,\ \forall n \in \mathrm{N}. \qquad (7.3)$$

Тогда последовательность $\{y_n\}$ тоже сходится, и её предел равен a.

► Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела для $O_\varepsilon(a)$ $\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \mid \forall n > N_1 \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(a)$; для $O_\varepsilon(a)$ $\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \mid$ $\forall n > N_2 \Rightarrow z_n \in O_\varepsilon(a)$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Заметим, что $N = N(\varepsilon)$, ибо $N_1 = N_1(\varepsilon)$, $N_2 = N_2(\varepsilon)$. Тогда для $\forall n > N$ $x_n \in O_\varepsilon(a)$ и $z_n \in O_\varepsilon(a)$, следовательно, в силу условия (7.3) $y_n \in O_\varepsilon(a)$ (рис. 7.2).

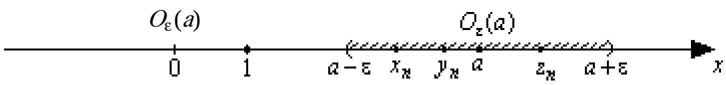

Рис. 7.2

Получили: $\forall O_\varepsilon(a)$ $\exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow y_n \in O_\varepsilon(a)$, а это означает, по определению, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ◄

Замечание 7.4. В силу замечания 5.3 теорема 7.2 сохраняет силу, если условие (7.3) выполняется, начиная с некоторого номера $n = N_*$.

В теоремах 6.8 и 7.2 мы, исходя из сходимости двух последовательностей, доказали сходимость третьей последовательности, связанной тем или иным образом с исходными последовательностями. Возникает вопрос: как по виду самой последовательности определить, является ли она сходящейся.

Определение 7.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется:

- *неубывающей*, если

$$x_n \le x_{n+1},\ \forall n \in \mathrm{N}; \qquad (7.4)$$

- *невозрастающей*, если

$$x_n \geq x_{n+1}, \ \forall n \in \mathrm{N}; \qquad (7.5)$$

- *монотонной*, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.

Среди монотонных последовательностей выделяют строго монотонные последовательности.

Определение 7.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется:

- *возрастающей*, если

$$x_n < x_{n+1}, \ \forall n \in \mathrm{N}; \qquad (7.6)$$

- *убывающей*, если

$$x_n > x_{n+1}, \ \forall n \in \mathrm{N}; \qquad (7.7)$$

- *строго монотонной*, если она является либо возрастающей, либо убывающей.

Замечание 7.5. Неубывающая последовательность ограничена снизу своим первым членом, следовательно, достаточным условием ограниченности неубывающей последовательности является её ограниченность сверху.

Замечание 7.6. Невозрастающая последовательность ограничена сверху своим первым членом, следовательно, достаточным условием ограниченности невозрастающей последовательности является её ограниченность снизу.

Пример 7.1. Последовательность $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n-1,\ n,\ n,\ \ n+1,\ n+1,\ \ldots$ – неубывающая.

Пример 7.2. Последовательность $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n+1},\ \ldots$ – невозрастающая.

Пример 7.3. Последовательность $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$ – возрастающая.

Пример 7.4. Последовательность $x_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$ – убывающая.

Пример 7.5. Последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathrm{N}$, не является монотонной, ибо знаки её членов чередуются.

Теорема 7.3. Всякая ограниченная сверху неубывающая последовательность сходится.

► Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная сверху неубывающая последовательность, т.е. выполняется условие (7.4) и

$$\exists M \in \mathrm{R} \mid x_n \leq M, \ \forall n \in \mathrm{N}. \qquad (7.8)$$

Условие (7.8) означает, что множество всех элементов последовательности $\{x_n\}$ ограничено сверху, следовательно, по теореме 3.1 $\exists \sup\{x_n\} = M^*$. Покажем, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = M^*. \qquad (7.9)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу характеристических свойств 3.1) и 3.2) точной верхней грани множества

$$x_n \leq M^*, \ \forall n \in \mathrm{N}; \qquad (7.10)$$

$$\exists N = N(\varepsilon) \mid x_N > M^* - \varepsilon. \qquad (7.11)$$

В силу условия (7.4)

$$x_n \geq x_N, \ \forall n > N; \qquad (7.12)$$

В силу (7.10) – (7.12)

$$M^* - \varepsilon < x_n \leq M^*, \ \forall n > N.$$

На числовой оси:

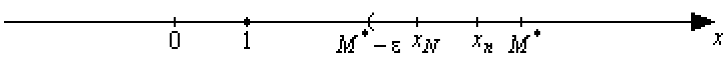

Рис. 7.3

Получили: для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow \left|x_n - M^*\right| < \varepsilon$, а это означает, по определению, справедливость (7.9). ◄

Следствие 7.4. Все члены ограниченной сверху неубывающей последовательности не больше её предела.

Теорема 7.4. Всякая ограниченная снизу невозрастающая последовательность сходится.

► Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная снизу невозрастающая последовательность, т.е. выполняется условие (7.5) и

$$\exists m \in \mathrm{R} \mid x_n \geq m, \ \forall n \in \mathrm{N}. \qquad (7.13)$$

Условие (7.13) означает, что множество всех элементов последовательности $\{x_n\}$ ограничено снизу, следовательно, по теореме 3.2 $\exists \inf\{x_n\} = m_*$. Покажем, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = m_* . \tag{7.14}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу характеристических свойств 3.а) и 3.б) точной нижней грани множества

$$x_n \ge m_* ,\ \forall n \in \mathrm{N} ; \tag{7.15}$$

$$\exists N = N(\varepsilon) \mid x_N < m_* + \varepsilon . \tag{7.16}$$

В силу условия (7.5)

$$x_n \le x_N ,\ \forall n > N ; \tag{7.17}$$

В силу (7.15) – (7.17)

$$m_* \le x_n < m_* + \varepsilon ,\ \forall n > N .$$

На числовой оси:

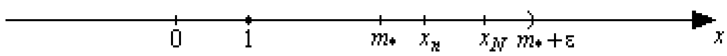

Рис. 7.4

Получили: для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |x_n - m_*| < \varepsilon$, а это означает, по определению, справедливость (7.14).

Следствие 7.5. Все члены ограниченной снизу невозрастающей последовательности не меньше её предела.

С учётом замечаний 7.5, 7.6 теоремы 7.3 и 7.4 можно сформулировать в виде одной теоремы.

Теорема 7.5. Всякая ограниченная монотонная последовательность сходится.

В силу теорем 5.3, 7.5 получаем следующий *критерий сходимости монотонной последовательности.*

Теорема 7.6. Для сходимости монотонной последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена.

Замечание 7.7. Не всякая сходящаяся последовательность монотонна.

Например, последовательность $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathrm{N}$, сходится к нулю, но не является монотонной.

Замечание 7.8. Если неубывающая последовательность не ограничена сверху, то её предел равен $+\infty$.

Действительно, пусть неубывающая последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху. Зафиксируем произвольное $E > 0$. Тогда

$$\exists N = N(E) \mid x_N > E . \tag{7.18}$$

В силу условия (7.4)

$$x_n \ge x_N ,\ \forall n > N . \tag{7.19}$$

В силу (7.18), (7.19) $x_n > E$ для $\forall n > N$. Получили: для $\forall E > 0\ \exists N = N(E) \mid \forall n > N \Rightarrow x_n > E$, а это означает, по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Замечание 7.9. Если невозрастающая последовательность не ограничена снизу, то её предел равен $-\infty$.

Действительно, пусть невозрастающая последовательность $\{x_n\}$ не ограничена снизу. Зафиксируем произвольное $E < 0$. Тогда

$$\exists N = N(E) \mid x_N < E . \tag{7.20}$$

В силу условия (7.5)

$$x_n \le x_N ,\ \forall n > N . \tag{7.21}$$

В силу (7.20), (7.21) $x_n < E$ для $\forall n > N$. Получили: для $\forall E < 0\ \exists N = N(E) \mid \forall n > N \Rightarrow x_n < E$, а это означает, по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,\ n \in \mathrm{N} . \tag{7.22}$$

Теорема 7.7. Последовательность (7.22) является сходящейся.

Используем при доказательстве теоремы бином Ньютона [9, с. 86]:

$$\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\ , \tag{7.23}$$

где

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!},\ \ 0\le k\le n \tag{7.24}$$

($m!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m\,,\forall m\in\mathrm{N}$; $0!\overset{def}{=}1$; величины (7.24) называются биномиальными коэффициентами). Заметим, что C_n^k можно записать в виде

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!},\ \ 2\le k\le n\,. \tag{7.25}$$

В силу (7.23), (7.25)

$$\left(a+b\right)^n=a^n+na^{n-1}b+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}b^k\ . \tag{7.26}$$

В силу (7.26)

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\frac{1}{n^k}$$

или

$$x_n=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \tag{7.27}$$

Аналогично,

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=$$

$$=2+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(n+1)((n+1)-1)((n+1)-2)\cdot\ldots\cdot((n+1)-(k-1))}{k!}\frac{1}{(n+1)^k}$$

или

$$x_{n+1}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\,. \tag{7.28}$$

Заметим, что

$$1-\frac{s}{n}<1-\frac{s}{n+1},\ 1\le s\le n-1\,. \tag{7.29}$$

Из (7.27), (7.28) следует в силу (7.29), что $x_n<x_{n+1}$, т.е. $\left\{x_n\right\}$ – возрастающая последовательность.

Из (7.27) видно, что

$$2<x_n<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\,. \tag{7.30}$$

Заметим, что $k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\ge 2^{k-1}\,,\forall k\ge 2$.

Следовательно,

$$\frac{1}{k!}\le\frac{1}{2^{k-1}}\,,\ \ 2\le k\le n\,. \tag{7.31}$$

В силу (7.30), (7.31) и того, что $x_1=2$,

$$2\le x_n<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\,. \tag{7.32}$$

Используя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии

$$S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\,,$$

получаем:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}} < 1 . \qquad (7.33)$$

В силу (7.32), (7.33)

$$2 \le x_n < 3 . \qquad (7.34)$$

Итак, последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху. Следовательно, в силу теоремы 7.3 $\{x_n\}$ является сходящейся последовательностью.

В силу (7.34) и следствия 7.2

$$2 \le \lim_{n\to\infty} x_n \le 3 .$$

Предел последовательности (7.22) принято обозначать латинской буквой *e*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e . \qquad (7.35)$$

Предел (7.35) называется *вторым замечательным пределом.*

Известно [11, с. 81], что e – иррациональное число, т.е. бесконечная непериодическая десятичная дробь:

$$e = 2,718281... \ .$$

Число e используется в качестве основания для системы логарифмов. Логарифмы по основанию e называются *натуральными* и обозначаются знаком $\ln$ без указания основания, например $\ln 5$ (по определению, $\ln 5 = \log_e 5$).

Из формулы перехода от одного основания логарифма к другому

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

получаем формулу, связывающую десятичные и натуральные логарифмы:

$$\lg b = \frac{1}{\ln 10} \ln b .$$

Число

$$M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e = 0,434294...$$

называется модулем перехода от десятичных логарифмов к натуральным.

Докажем утверждение, известное как лемма о вложенных промежутках [11, с. 82].

Определение 7.3. Замкнутый промежуток $[\mu,\nu]$ называется вложенным в замкнутый промежуток $[\alpha,\beta]$, если $\forall a \in [\mu,\nu] \Rightarrow a \in [\alpha,\beta]$ (т.е. если $\alpha \le \mu < \nu \le \beta$), (см. рис. 7.5).

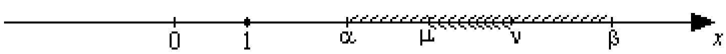

Рис. 7.5

Лемма 7.1. Пусть дана бесконечная последовательность вложенных друг в друга замкнутых промежутков

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset ... \supset [a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}] \supset ... \qquad (7.36)$$

и длины этих промежутков при $n \to \infty$ стремятся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 . \qquad (7.37)$$

Тогда концы a_n и b_n промежутков стремятся к общему пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ и c является единственной точкой, принадлежащей всем этим промежуткам:

$$c \in [a_n,b_n], \ \forall n \in \mathrm{N} . \qquad (7.38)$$

В силу (7.36) последовательность $\{a_n\}$ не убывает и ограничена сверху числом b_1. Следовательно, по теореме 7.3 $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c_1$ и в силу следствия 7.4

$$a_n \le c_1,\ \forall n \in \mathrm{N}. \tag{7.39}$$

В силу (7.36) последовательность $\{b_n\}$ не возрастает и ограничена снизу числом a_1. Следовательно, по теореме 7.4 $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c_2$ и в силу следствия 7.5

$$b_n \ge c_2,\ \forall n \in \mathrm{N}. \tag{7.40}$$

В силу основной теоремы о пределах (см. теорему 6.8)

$$\exists \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = c_2 - c_1. \tag{7.41}$$

В силу (7.37), (7.41) $c_2 - c_1 = 0$, т.е. $c_2 = c_1 = c$. В силу (7.39), (7.40) $a_n \le c \le b_n$, $\forall n \in \mathrm{N}$, т.е. выполняется (7.38). Покажем, что другой точки, удовлетворяющей условию (7.38), нет. : $\exists c_* \ne c \mid c_* \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathrm{N}$. Пусть для определённости $c_* > c$. Тогда $\forall n \in \mathrm{N}$ $b_n - a_n \ge c_* - c > 0$, а значит, в силу следствия 7.2 $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) \ge c_* - c > 0$, что противоречит условию (7.37).

Л е к ц и я 8. ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИТЕРИЙ КОШИ

Подпоследовательности; частичные пределы последовательности; теорема Больцано-Вейерштрасса; предельные точки последовательности, их связь с частичными пределами последовательности; теорема о существовании верхнего и нижнего пределов ограниченной последовательности; признак существования предела последовательности в терминах её верхнего и нижнего пределов; фундаментальные последовательности, их свойства; критерий Коши.

Введём понятие частичных пределов последовательности.

Определение 8.1. *Подпоследовательностью* (*частичной последовательностью*) последовательности $\{x_n\}$ называется последовательность вида $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая заданная возрастающая последовательность натуральных чисел: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$.

Из определения 8.1 видно, что данная последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечное множество подпоследовательностей.

Определение 8.2. *Частичными пределами последовательности* $\{x_n\}$ называются пределы её подпоследовательностей.

Пример 8.1. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ вида

$$1^3,\ \frac{1}{2},\ 3^3,\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ (2n-1)^3,\ \frac{1}{2n},\ \ldots\ . \tag{8.1}$$

Если положить $n_k = 2k-1$, $k \in \mathrm{N}$, то получим последовательность вида $x_{n_k} = (2k-1)^3$, $k \in \mathrm{N}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. Если положить $n_k = 2k$, $k \in \mathrm{N}$, то получим последовательность вида $x_{n_k} = \dfrac{1}{2k}$, $k \in \mathrm{N}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = 0$. Таким образом, несобственное число $+\infty$ и число 0 являются частичными пределами последовательности (8.1). Заметим, что сама последовательность (8.1) не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Определение 8.3. *Верхним пределом последовательности* $\{x_n\}$ называется наибольший частичный предел этой последовательности.

Обозначение: $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Определение 8.4. *Нижним пределом последовательности* $\{x_n\}$ называется наименьший частичный предел этой последовательности.

Обозначение: $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 8.1. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и сама последовательность.

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,, \tag{8.2}$$

$\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$.

Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a\,. \tag{8.3}$$

Возьмём сколь угодно малое положительное число ε. В силу (8.2) для числа ε

$$\exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\,. \tag{8.4}$$

Заметим, что

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty\,. \tag{8.5}$$

В силу (8.5) для номера N $\exists K = K(N) \mid \forall k > K \Rightarrow n_k > N$. Следовательно, в силу (8.4) , для $\forall k > K$ $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Заметим,

что $K = K(\varepsilon)$, ибо $K = K(N)$, $N = N(\varepsilon)$. Получили: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K = K(\varepsilon) \mid \forall k > K \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon$, а это означает, по определению предела, что справедливо (8.3). ◄

Пусть Ω – множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}$.

Следствие 8.1. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\Omega = \{a\}$.

Следствие 8.2. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a\,. \tag{8.6}$$

Покажем, что для любой ограниченной последовательности множество её частичных пределов непусто.

Теорема 8.2 (*теорема Больцано-Вейерштрасса*).

У всякой ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

► Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, т.е.

$$\exists m, M \in \mathrm{R} \mid m \le x_n \le M\,,\ \forall n \in \mathrm{N}\,. \tag{8.7}$$

Разделим промежуток $[m, M]$ пополам и обозначим через $[a_1, b_1]$ ту половину промежутка $[m, M]$, которая содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$ (такая половина найдётся, ибо число всех членов последовательности бесконечно а число частей разбиения равно двум; если каждая из половин содержит бесконечное число членов последовательности, то в качестве $[a_1, b_1]$ берём любую из них).

Затем разделим промежуток $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ ту из полученных половин, которая содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Продолжая этот процесс, приходим к бесконечной последовательности вложенных друг в друга промежутков:

$$[m, M] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}] \supset \ldots,$$

при этом, длина *k*-го промежутка выражается формулой

$$b_k - a_k = \frac{M - m}{2^k}\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0\,.$$

Мы оказались в условиях леммы о вложенных промежутках, в силу которой

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c\,. \tag{8.8}$$

Учитывая, что каждый из промежутков $[a_k, b_k]$, $k \in \mathrm{N}$, содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, построим подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ следующим образом: в качестве x_{n_1} возьмём любой из членов последовательности $\{x_n\}$, содержащихся в $[a_1, b_1]$; в качестве x_{n_2} – любой из членов последовательности $\{x_n\}$, следующих за x_{n_1} и содержащихся в $[a_2, b_2]$; … ; в качестве x_{n_k} – любой из членов последовательности $\{x_n\}$, следующих за взятыми $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ и содержащихся в $[a_k, b_k]$ и т.д. В результате получаем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, для которой

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k \,,\ \forall k \in \mathrm{N}\,. \tag{8.9}$$

В силу (8.8), (8.9) и теоремы о пределе промежуточной последовательности (см. теорему 7.2) $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

В силу теоремы 8.2 $c \in \Omega$, т.е. $\Omega \ne \varnothing$ для ограниченной последовательности.

В некоторых учебных пособиях (см., например, [11, с. 87]) теорема 8.2 называется леммой Больцано-Вейерштрасса.

Докажем, что у любой ограниченной последовательности существуют её верхний и нижний пределы. Для этого уточним вначале природу частичных пределов последовательности.

Определение 8.5. Точка b числовой прямой $(-\infty,+\infty)$ называется *предельной точкой последовательности* $\{x_n\}$, если в любой сколь угодно малой ε – окрестности этой точки имеется бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 8.3. Для того чтобы данная точка числовой прямой была частичным пределом последовательности, необходимо и достаточно, чтобы она была предельной точкой этой последовательности.

Необходимость. Пусть b – частичный предел последовательности $\{x_n\}$, т.е. $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \mid \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = b$. По определению предела, $\forall O_\varepsilon(b)\ \exists K = K(\varepsilon) \mid \forall k > K \Rightarrow x_{n_k} \in O_\varepsilon(b)$, т.е. в любой ε – окрестности точки b содержится бесконечное число членов последовательности $\{x_{n_k}\}$ и, тем самым, бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, ибо $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$. А это означает, по определению, что b – предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

Достаточность. Пусть b – предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Рассмотрим систему окрестностей точки b следующего вида:

$$O_1(b),\ O_{\frac{1}{2}}(b),\ O_{\frac{1}{3}}(b)\ ,...,\ O_{\frac{1}{k}}(b),\ O_{\frac{1}{k+1}}(b),\ \ldots\ . \tag{8.10}$$

Из определения предельной точки следует, что каждая из окрестностей вида (8.10) содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Построим подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ следующим образом: в качестве x_{n_1} возьмём любой из членов последовательности $\{x_n\}$, содержащихся в $O_1(b)$; в качестве x_{n_2} – любой из членов последовательности $\{x_n\}$, следующих за x_{n_1} и содержащихся в $O_{\frac{1}{2}}(b)$; … ; в качестве x_{n_k} – любой из членов последовательности $\{x_n\}$, следующих за уже взятыми $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_{k-1}}$ и содержащихся в $O_{\frac{1}{k}}(b)$ и т.д. В результате получаем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, для которой

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} < b + \frac{1}{k}\,,\ \forall k \in \mathrm{N}\,. \tag{8.11}$$

Заметим, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(b - \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(b + \frac{1}{k}\right) = b\,. \tag{8.12}$$

В силу (8.11), (8.12) и теоремы о пределе промежуточной последовательности $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = b$, т.е. b – частичный предел последовательности $\{x_n\}$.

Замечание 8.1. Если некоторый интервал числовой прямой содержит не более конечного числа членов последовательности, то в этом интервале нет предельных точек данной последовательности.

Действительно, пусть интервал (μ,ν) содержит не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}$. П: $\exists b \in (\mu,\nu) \mid b$ – предельная точка последовательности $\{x_n\}$, рис. 8.1.

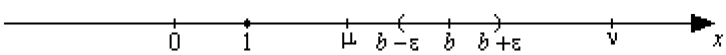

Рис. 8.1

Возьмём положительное число ε, удовлетворяющее условию $\varepsilon < \min\{b-\mu, \nu-b\}$. Тогда $O_\varepsilon(b) \subset (\mu,\nu)$. В $O_\varepsilon(b)$ и, следовательно, в интервале (μ,ν) найдётся бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Противоречие. $\overline{\text{П}}$.

Замечание 8.2. Если некоторый отрезок числовой прямой не содержит предельных точек последовательности, то на этом отрезке имеется не более конечного числа членов данной последовательности.

Действительно, пусть отрезок $[\mu,\nu]$ не содержит предельных точек последовательности $\{x_n\}$. П: на отрезке $[\mu,\nu]$ найдётся бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, т.е. $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \mid \{x_{n_k}\} \subset [\mu,\nu]$. Имеем: последовательность

$\{y_k\}=\{x_{n_k}\}$ ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists\{y_{k_m}\}\subset\{y_k\}\,|\,\lim\limits_{m\to\infty} y_{k_m}=b$, где $b\in[\mu,\nu]$. Получили: b – частичный предел последовательности $\{x_n\}$, следовательно, по теореме 8.3 b – предельная точка последовательности $\{x_n\}$; кроме того, $b\in[\mu,\nu]$. Противоречие.

Теорема 8.4. У всякой ограниченной последовательности существуют её верхний и нижний пределы.

Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, т.е. выполняется (8.7); Ω – множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}$; H – множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$. В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса $\Omega\neq 0$. В силу теоремы 8.3

$$\Omega=H. \tag{8.13}$$

Покажем, что множество Ω ограничено. Пусть $b\in\Omega$. Это означает, что существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}\,|\,\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=b$. В силу (8.7)

$$m\le x_{n_k}\le M,\ \forall k\in \mathrm{N}. \tag{8.14}$$

Из (8.14) получаем в силу следствия 7.3, что $m\le b\le M$. Итак, $m\le b\le M$ для $\forall b\in\Omega$, т.е. множество Ω ограничено. По теореме 3.3 множество Ω имеет точную верхнюю грань M^* и точную нижнюю грань m_*. Покажем, что $M^*\in\Omega$. : $M^*\,\overline{\in}\,\Omega$, следовательно, в силу (8.13) $M^*\,\overline{\in}\,H$, т.е. $\exists O_\varepsilon(M^*)$, в которой содержится не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}$. Тогда в силу замечания 8.1 $O_\varepsilon(M^*)\cap H=\varnothing$, следовательно, в силу (8.13)

$$O_\varepsilon(M^*)\cap\Omega=\varnothing. \tag{8.15}$$

С другой стороны, $M^*=\sup\Omega\Rightarrow\exists b_0\in\Omega\,|\,b_0\in(M^*-\varepsilon,M^*)\subset\ \subset O_\varepsilon(M^*)\Rightarrow\ O_\varepsilon(M^*)\cap\Omega\neq\varnothing$, что противоречит (8.15). Итак, $M^*\in\Omega$ и $M^*=\sup\Omega\Rightarrow\exists\overline{x}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=M^*$. Покажем, что $m_*\in\Omega$. : $m_*\,\overline{\in}\,\Omega$, следовательно, в силу (8.13) $m_*\,\overline{\in}\,H$, т.е. $\exists O_{\varepsilon_1}(m_*)$, в которой содержится не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}$. Тогда в силу замечания 8.1 $O_{\varepsilon_1}(m_*)\cap H=\varnothing$, следовательно, в силу (8.13)

$$O_{\varepsilon_1}(m_*)\cap\Omega=\varnothing. \tag{8.16}$$

С другой стороны, $m_*=\inf\Omega\Rightarrow\exists b_1\in\Omega\,|\,b_1\in(m_*,m_*+\varepsilon_1)\subset\ \subset O_{\varepsilon_1}(m_*)\Rightarrow\ O_{\varepsilon_1}(m_*)\cap\Omega\neq\varnothing$, что противоречит (8.16).

Итак, $m_*\in\Omega$ и $m_*=\inf\Omega\Rightarrow\ \exists\underline{x}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=m_*$.

В силу (8.13)

$$H\subset[\underline{x},\,\overline{x}]. \tag{8.17}$$

Следствие 8.3. Для любого сколь угодно малого положительного числа ε вне интервала $(\underline{x}-\varepsilon,\,\overline{x}+\varepsilon)$ содержится не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}$.

Действительно, в силу (8.7) левее точки m и правее точки M нет членов последовательности $\{x_n\}$; в силу (8.17) отрезки $[m,\,\underline{x}-\varepsilon]$, $[\overline{x}+\varepsilon,\,M]$ не содержат предельных точек последовательности $\{x_n\}$, следовательно, в силу замечания 8.2 на каждом из них имеется не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}\Rightarrow$ вне интервала $(\underline{x}-\varepsilon,\,\overline{x}+\varepsilon)$ содержится не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}$.

Укажем признак существования предела последовательности в терминах её верхнего и нижнего пределов.

Теорема 8.5. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к числу a, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и чтобы её верхний и нижний пределы совпадали и равнялись числу a.

Необходимость. Пусть $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Тогда в силу необходимого признака сходимости (см. теорему 5.3) последовательность $\{x_n\}$ ограничена и в силу следствия 8.2 $\overline{x}=\underline{x}=a$.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность и $\overline{x} = \underline{x} = a$. Тогда в силу следствия 8.3 для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid\ \forall n > N \Rightarrow x_n \in \left(\underline{x} - \varepsilon,\ \overline{x} + \varepsilon\right)$ или, в силу равенства $\overline{x} = \underline{x} = a$, $x_n \in \left(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon\right) = O_\varepsilon(a)$, а это означает, по определению предела, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ◄

Докажем общий признак сходимости последовательности, называемый *критерием Коши*.

Определение 8.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε $\exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Фундаментальная последовательность называется также последовательностью Коши.

Из определения 8.6 следует, что последовательность $\{x_n\}$ не является фундаментальной, если

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall N\ \exists n, m > N : |x_n - x_m| \ge \varepsilon. \tag{8.18}$$

Определение 8.6 можно сформулировать в следующем виде: последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N, \forall p \in \mathrm{N} \Rightarrow \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon. \tag{8.19}$$

Пример 8.2. Последовательность $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$ фундаментальна.

Действительно,

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|x_n - x_{n+p}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{n}. \tag{8.20}$$

Возьмём $\varepsilon > 0$. Тогда для выполнения неравенства

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon. \tag{8.21}$$

достаточно в силу (8.20), чтобы $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ или $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. можно положить $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ – целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда для $\forall n > N, \forall p \in \mathrm{N}$ выполняется (8.21). Итак, для последовательности $\{x_n\}$ выполняется (8.19), а это означает, что она фундаментальна.

Пример 8.3. Последовательность $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, $n \in \mathrm{N}$ не является фундаментальной.

Действительно, возьмём любой номер N; рассмотрим некоторый номер $n > N$ и положим $m = 2n$. Тогда

$$x_m - x_n = x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $|x_m - x_n| = x_m - x_n \ge \dfrac{1}{2}$, т.е. для последовательности $\{x_n\}$ выполняется (8.18) с $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, а это означает, что она не является фундаментальной.

Теорема 8.6. Любая фундаментальная последовательность ограничена.

► Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда для числа ε $\exists N \mid \forall n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$, в частности, при $n = N + 1$ $|x_{N+1} - x_m| < \varepsilon$ для $\forall m > N$, т.е.

$$x_{N+1} - \varepsilon < x_m < x_{N+1} + \varepsilon,\ \forall m > N. \tag{8.22}$$

Положим $M_1 = \max\left\{|x_{N+1} - \varepsilon|, |x_{N+1} + \varepsilon|\right\}$, $M_2 = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\right\}$, $M = \max\{M_1, M_2\}$. Тогда, учитывая (8.22), получаем: $|x_n| \le M$, $\forall n \in \mathrm{N}$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ◄

Теорема 8.7. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

► Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность, т.е.

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{8.23}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу (8.23) для числа $\dfrac{\varepsilon}{2}$ $\exists N = N\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) = N(\varepsilon) \mid\ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall n, m > N$

$$|x_n - x_m| = \left|(x_n - a) - (x_m - a)\right| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\ |\ \forall n,m>N \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon$, а это означает, по определению, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. ◀

Теорема 8.8. Любая фундаментальная последовательность сходится.

▶ Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Зададим произвольное сколь угодно малое положительное число ε. Тогда для числа $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists N_1=N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=N_1(\varepsilon)\ |\ \forall n,m>N_1 \Rightarrow |x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8.24)$$

По теореме 8.6 последовательность $\{x_n\}$ ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}\ |$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=a. \qquad (8.25)$$

В силу (8.25) для числа $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists n_K=n_K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=n_K(\varepsilon)\ |\ \forall n_k>n_K \Rightarrow \left|x_{n_k}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8.26)$$

Положим $N_2=n_K$. Заметим, что $N_2=N_2(\varepsilon)$, ибо $n_K=n_K(\varepsilon)$. Пусть $N=\max\{N_1,N_2\}$. Заметим, что $N=N(\varepsilon)$, ибо $N_1=N_1(\varepsilon)$, $N_2=N_2(\varepsilon)$. Возьмём некоторое $n_k>N$, тогда $n_k>N_2=n_K$ и в силу (8.26)

$$\left|x_{n_k}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8.27)$$

Учитывая (8.24) получаем для $\forall n>N$:

$$\left.\begin{array}{r} n>N\Rightarrow n>N_1 \\ n_k>N\Rightarrow n_k>N_1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left|x_n-x_{n_k}\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8.28)$$

В силу (8.27), (8.28) для $\forall n>N$

$$|x_n-a|=\left|\left(x_n-x_{n_k}\right)+\left(x_{n_k}-a\right)\right|\le\left|x_n-x_{n_k}\right|+\left|x_{n_k}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Итак, для $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\ |\ \forall n>N \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$, а это означает, по определению предела, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. ◀

Теоремы 8.7, 8.8 приводят к следующему утверждению.

Теорема 8.9. (*критерий Коши*). Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

В силу критерия Коши последовательность из примера 8.2 сходится, а последовательность из примера 8.3 не является сходящейся.

Заметим, что теорема 8.9 справедлива только для числовых последовательностей. Если рассматривать последовательности, членами которых являются элементы произвольного метрического пространства, то теоремы 8.6, 8.7 сохраняют свою силу, однако теорема 8.9 в общем случае неверна, т.е. существуют метрические пространства, в которых не всякая фундаментальная последовательность сходится (см. например, [9, с. 315]). В связи этим среди метрических пространств выделяют полные пространства, а именно, пространства, в которых каждая фундаментальная последовательность сходится.

Лекция 9. ПОНЯТИЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Переменная величина, область изменения переменной величины, понятие функции, график функции, обратная функция, монотонные и строго монотонные функции, теорема об обратимости строго монотонной функции, график обратной функции, основные способы задания функции: непосредственный, табличный, графический, алгоритмический, аналитический, некоторые свойства функций: ограниченность, чётность, нечётность, периодичность.

При изучении различных явлений и процессов реального мира требуется находить количественные взаимосвязи между различными переменными величинами, характеризующими эти явления и процессы. Например, а) при изучении движения некоторого объекта нужно установить зависимость пройденного объектом пути s от времени t, то есть нужно найти закон движения $s=s(t)$; б) при определении высоты места h над уровнем моря полезно знать зависимость величины h от давления воздуха p в этом месте, т.е. зависимость вида $h=h(p)$.

В математике отвлекаются от физического смысла рассматриваемых переменных величин, т.е. рассматривают абстрактные переменные величины, характеризующиеся только числовыми значениями, которые они могут принимать.

В целях краткости вместо словосочетания "абстрактная переменная величина" используются также термины "переменная величина" или "переменная".

Множество $\{x\}$ всех значений, которые может принимать переменная величина x, называется *областью изменения этой переменной.*

Для описания взаимосвязи между двумя переменными величинами вводится понятие функции.

Пусть даны две переменные x и y с областями изменения $X \subseteq \mathrm{R}$ и $Y \subseteq \mathrm{R}$.

Определение 9.1. Говорят, что на множестве X задана *функция* со значениями во множестве Y, если каждому значению переменной x из множества X ставится в соответствие по заданному закону f одно определённое значение переменной y из множества Y, при этом x называется *независимой переменной* или *аргументом*; y – *зависимой переменной*, множество X – *областью определения* (или *областью существования*, или *областью задания*) *функции* (обозначение: $D(f)$ или $D(y)$); множество Y – *областью допустимых значений* функции; множество $E(f)=\{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$ – *областью значений* (или *областью изменения*) функции.

Заметим, что $E(f) \subseteq Y$.

Обозначение функции: $y = f(x)$ ("игрек равно эф от икс") или $y = y(x)$.

Если взять конкретное значение $x_0 \in X$ независимой переменной x, то ему соответствует конкретное значение $y_0 = f(x_0)$ зависимой переменной y, называемое *значением* (или *частным значением*) *функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0.

Если прибегнуть к геометрической интерпретации вещественных чисел (см. лекцию 2), то понятие функции можно сформулировать на геометрическом языке.

Определение 9.2. Говорят, что на множестве точек X числовой прямой $(-\infty,+\infty)$ задано *отображение* со значениями во множестве точек $Y \subseteq (-\infty,+\infty)$, если каждой точке x из множества X ставится в соответствие по заданному закону f одна определённая точка из множества Y.

Обозначения: $y = f(x)$, $f : X \to Y$, $x \xrightarrow{f} y$, $x \xrightarrow{f} f(x)$.

Если взять конкретную точку $x_0 \in X$, то ей соответствует конкретная точка $y_0 = f(x_0) \in Y$, называемая *образом точки* x_0 при отображении f, при этом точка x_0 называется *прообразом точки* y_0 при отображении f, множество вида $\sigma(y_0)=\{x \in X \mid f(x) = y_0\}$ называется *полным прообразом* точки y_0 при отображении f, множество $f(X)=\{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\} = E(f)$ – *образом множества* X при отображении f, множество X – *прообразом множества* $E(f)$ при отображении f.

Заметим, что числовую последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ можно рассматривать как бесконечный набор значений функции $y = f(n)$, натурального аргумента n:

$$y_1 = f(1),\ y_2 = f(2), \ldots,\ y_n = f(n), \ldots .$$

В силу определений 9.1, 9.2 термины "функция", "отображение" можно использовать как синонимы.

При исследовании свойств функции полезно использовать график этой функции.

Определение 9.3. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество точек плоскости R^2 вида

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}.$$

Во многих случаях график функции представляет собой некоторую линию (кривую) или совокупность линий (кривых) на плоскости (примеры графиков функций см. ниже). Однако имеются функции, графики которых невозможно изобразить на чертеже. Рассмотрим, например, функцию Дирихле

$$y = \begin{cases} 0, \text{ если } x - \text{иррациональное число;} \\ 1, \text{ если } x - \text{рациональное число,} \end{cases}$$

График этой функции представляет собой объединение всех точек оси Ox с иррациональными абсциссами и всех точек прямой $y = 1$ с рациональными абсциссами. Изобразить его на чертеже невозможно, хотя отдельные точки этого графика можно указать на чертеже, например, точку $\left(\frac{7}{4};\ 1\right)$.

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \tag{9.1}$$

т.е. образы различных точек при отображении f различны. В силу (9.1) полный прообраз каждой точки $y \in E(f)$ при отображении f состоит из одного элемента. Тогда можно рассмотреть функцию f^{-1}: $E(f) \to D(f)$, которая каждой точке $y \in E(f)$ ставит в соответствие её полный прообраз: $\forall y \in E(f)$

$$f^{-1}(y) = x \mid f(x) = y .$$

Функция $x = f^{-1}(y)$ называется *обратной функцией* для функции (или к функции) $y = f(x)$. Заметим, что $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$. Из определения обратной функции следует, что

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x\,,\ \forall x \in D(f)\,;$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y\,,\ \forall y \in E(f)\,.$$

Функция $y = f(x)$, имеющая обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, называется *обратимой*.

Для функции $x = f^{-1}(y)$ обратной функцией будет функция $y = f(x)$. Поэтому функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются *взаимно обратными*.

Укажем один класс обратимых функций.

Определение 9.4. Функция $y = f(x)$ называется на множестве $\Omega \subseteq D(f)$:

- *неубывающей*, если

$$f(x_1) \le f(x_2)\,,\ \forall x_1, x_2 \in \Omega,\ x_1 < x_2\,;$$

- *невозрастающей*, если

$$f(x_1) \ge f(x_2)\,,\ \forall x_1, x_2 \in \Omega,\ x_1 < x_2\,;$$

- *монотонной*, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей на этом множестве Ω.

Определение 9.5. Функция $y = f(x)$ называется на множестве $\Omega \subseteq D(f)$:

- *возрастающей*, если

$$f(x_1) < f(x_2)\,,\ \forall x_1, x_2 \in \Omega,\ x_1 < x_2\,;$$

- *убывающей*, если

$$f(x_1) > f(x_2)\,,\ \forall x_1, x_2 \in \Omega,\ x_1 < x_2\,;$$

- *строго монотонной*, если она является либо возрастающей, либо убывающей на этом множестве Ω.

Теорема 9.1. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на $D(f)$, то для неё существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если $y = f(x)$ – возрастающая функция, то $x = f^{-1}(y)$ тоже возрастающая функция; если $y = f(x)$ – убывающая функция, то $x = f^{-1}(y)$ тоже убывающая функция.

► Пусть для определённости $y = f(x)$ – возрастающая функция (случай, когда $y = f(x)$ – убывающая функция, рассматривается аналогично). Тогда для неё выполняется условие (9.1), ибо если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$; если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$. Следовательно, $\exists x = f^{-1}(y)$. Покажем, что $x = f^{-1}(y)$ – возрастающая функция. Пусть $y_1, y_2 \in D\left(f^{-1}\right) = E(f),\ y_1 < y_2$; $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Покажем, что $x_1 < x_2$. ПП: $x_1 \ge x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, т.е. $y_1 \ge y_2$. Противоречие. ПП. ◄

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ возрастает на отрезке $[a,b]$. Из рисунка 9.1 видно, что график обратной функции $x = f^{-1}(y)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$.

Если у обратной функции $x = f^{-1}(y)$ аргумент y обозначить через x, а зависимую переменную x – через y, т.е. поменять местами x и y, то обратная функция принимает вид $y = f^{-1}(x)$. Тогда, если точка $M(x,y) \in \Gamma_f$, то точка $M_1(y,x) \in \Gamma_{f^{-1}}$. Из рис 9.1 видно, что точка $M_1(y,x)$ симметрична точке $M(x,y)$ относительно прямой $y = x$. Следовательно, в этом случае график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$ (которая является биссектрисой первой и третьей четверти координатной плоскости).

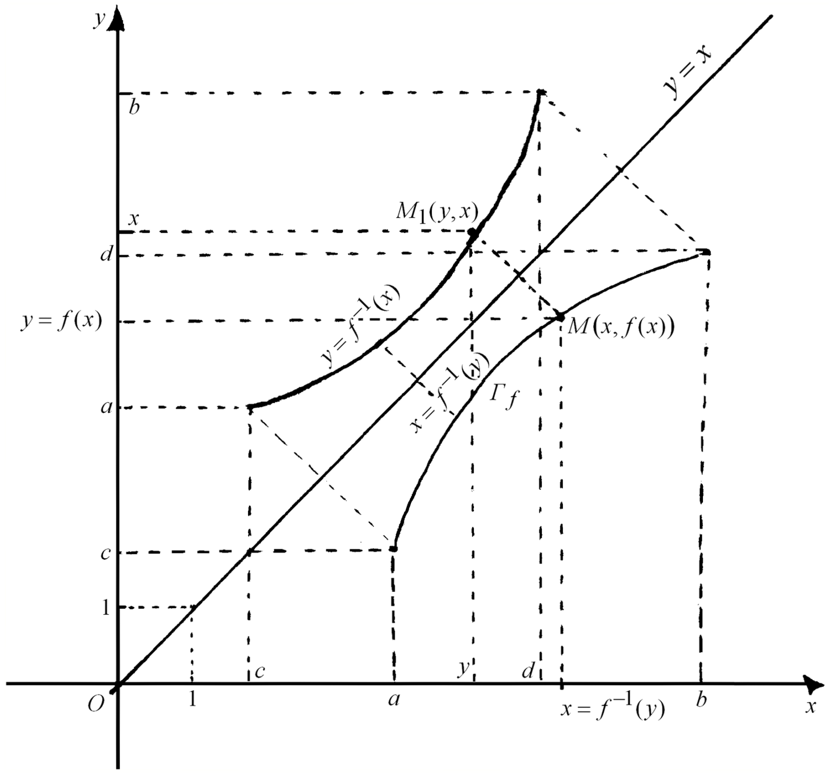

Рис. 9.1

Пусть дана функция $y = f(x)$. Природа закона f, по которому каждому значению переменной x ставится в соответствие одно определённое значение переменной y, может быть различной, т.е. существуют различные способы задания функций. Укажем основные из них.

1. *Непосредственный* (или *описательный*, или *словесный*) способ задания функции: функция задаётся с помощью словесного описания закона, позволяющего по заданному значению аргумента x получить соответствующее ему значение функции y.

Например, функция $y = E(x)$ (другое обозначение: $y = [x]$) определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x (читается: "игрек равно целой части (или антье) икс"; от французского слова entier – целый). Для неё $D(y) = \mathrm{R}$, $E(y) = \mathrm{Z}$. График функции $y = E(x)$ имеет вид, показанный на рис. 9.2.

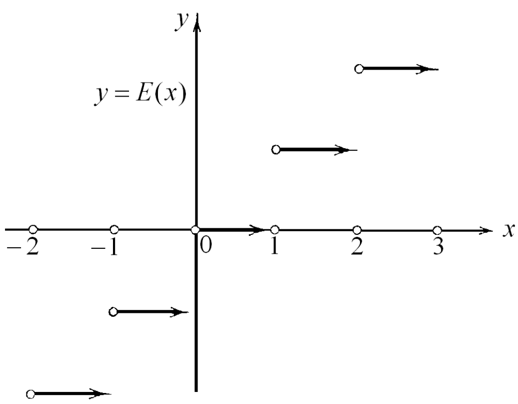

Рис. 9.2

2. *Табличный* способ задания функции: функция задаётся таблицей вида табл. 9.1. В первой строке указываются отдельные значения аргумента, во второй строке – соответствующие им значения функции.

Таблица 9.1

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Табличный способ задания функций широко используется при изучении различных физических процессов, при этом зачастую в качестве значений независимой переменной выступают определённые моменты времени $t_1,\ t_2,...,\ t_n$ а в качестве значений функции – значения какой-либо количественной характеристики изучаемого процесса в эти моменты времени.

Преимуществом табличного способа задания функции является то, что для рассматриваемых значений аргумента $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$ соответствующие значения функции заданы непосредственно, т.е. нет необходимости проводить дополнительные вычисления.

К недостаткам этого способа относятся:

а) отсутствие информации о значениях функции для значений аргумента, отсутствующих в таблице;

б) отсутствие наглядности о характере поведения таблично заданной функции;

в) определённые трудности, возникающие при изучении таблично заданной функции методами математики.

3. *Графический* способ задания функции: зависимость переменной y от переменной x задаётся линией (кривой) на плоскости, снабжённой декартовой прямоугольной системой координат (или какой-либо другой системой координат), при этом каждому $x \in \{x\}$ ставится в соответствие ордината точки линии, имеющей абсциссу x (рис. 9.3).

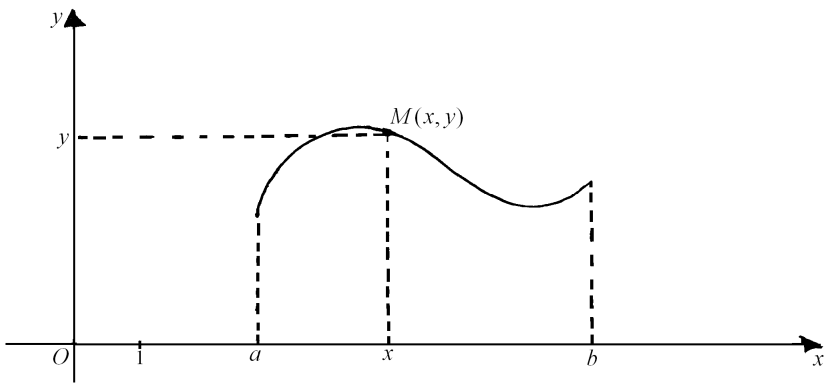

Рис. 9.3

4. *Программный* (или *алгоритмический*) способ задания функции: функция задаётся с помощью программы на машинном языке ЭВМ.

5. *Аналитический* способ задания функции: функция задаётся с помощью формулы (аналитического выражения), позволяющей по заданному значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции y.

Пример аналитически заданной функции:

$$y = \frac{5x^4 - 1}{x^2 + 1}. \qquad (9.2)$$

Взяв любое конкретное значение $x_* \in D(y) = \mathrm{R}$ и подставив его в формулу (9.2), получим соответствующее ему значение функции. Например,

$$y(1) = \frac{5 \cdot 1^4 - 1}{1^2 + 1} = 2.$$

К аналитически заданным функциям относятся также функции, которые на разных участках своей области определения задаются различными формулами. Такие функции называются *составными*.

Пример составной функции: функция знака

;

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \forall x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & \forall x > 0. \end{cases}$$

;

(читается: "игрек равно сигнум икс"; от латинского signum – знак). Для неё $D(y) = \mathrm{R}$, $E(y) = \{-1;\ 0;\ 1\}$. График функции $y = \operatorname{sgn} x$ имеет вид, показанный на рис. 9.4.

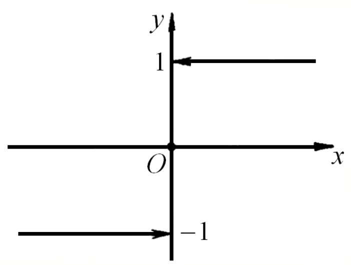

Рис. 9.4

Если функция $y = f(x)$ задана аналитически, но не указана её область определения, то в этом случае в качестве $D(y)$ рассматривается её *естественная область определения*, а именно, совокупность всех значений x, для каждого из которых функция имеет смысл, т.е. принимает одно конкретное значение.

Если аналитически заданная функция описывает конкретный физический процесс, то область определения этой функции может быть у́же её естественной области определения (в этом случае область изменения независимой переменной определяется её физической природой и условиями, при которых рассматривается данный процесс).

Аналитически заданные функции, которые часто используются в приложениях, табулированы, т.е. для них построены таблицы значений.

Если функция задана таблично: (x_i, y_i), $1 \le i \le n$, то для нахождения её приближенных значений при значениях аргумента, не входящих в таблицу, эту функцию можно приближённо заменить (интерполировать) аналитически заданной функцией, например, заменить её кусочно-линейной функцией, график которой представляет собой ломаную, соединяющую точки (x_i, y_i), $1 \le i \le n$ (такая замена называется *линейной интерполяцией*).

Предметом математического анализа является изучение свойств аналитически заданных функций, в частности, выяснение наличия у функций таких свойств, как монотонность, ограниченность, чётность, нечётность, периодичность.

Понятия монотонной и строго монотонной функции даны выше. Выделим среди функций класс ограниченных функций.

Определение 9.6. Функция $y = f(x)$ называется на множестве $\Omega \subseteq D(f)$:

- *ограниченной сверху*, если

$$\exists M \in \mathrm{R} \mid f(x) \le M \ , \ \forall x \in \Omega ,$$

при этом число M называется *верхней границей* (*верхней гранью*) функции $f(x)$ на множестве Ω;

- *ограниченной снизу*, если

$$\exists m \in \mathrm{R} \mid f(x) \ge m \ , \ \forall x \in \Omega ,$$

при этом число m называется *нижней границей* (*нижней гранью*) функции $f(x)$ на множестве Ω;

- *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е.

$$\exists M, m \in \mathrm{R} \mid m \le f(x) \le M \ , \ \forall x \in \Omega .$$

Из определения 9.6 видно, что ограниченность функции $y = f(x)$ на множестве Ω означает ограниченность множества

$$f(\Omega) = \{ y \in \mathrm{R} \mid y = f(x), x \in \Omega \} .$$

В случае, когда функция $y = f(x)$ ограничена сверху на всей области определения $D(f)$, она называется *ограниченной сверху*; когда функция ограничена снизу на $D(f)$ – *ограниченной снизу*; когда функция ограничена на $D(f)$ – *ограниченной*.

В силу замечания 3.5 условие ограниченности функции $y = f(x)$ на множестве $\Omega \subseteq D(f)$ можно записать в виде:

$$\exists C \in \mathrm{R}, C > 0 : |f(x)| \le C \ , \ \forall x \in \Omega .$$

Функция $y = f(x)$ называется *неограниченной* на множестве $\Omega \subseteq D(f)$, если для $\forall C > 0 \ \exists x \in \Omega \mid |f(x)| > C$.

Определение 9.7. Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если:

1) её область определения $D(f)$ симметрична относительно точки O, т.е. для $\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$;
2) $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Из определения 9.7 видно, что график чётной функции симметричен относительно оси Oy. Поэтому при построении графика чётной функции достаточно построить её график для неотрицательных значений аргумента, а затем полученную линию отобразить симметрично относительно оси ординат.

Определение 9.8. Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если:

1) её область определения $D(f)$ симметрична относительно точки O;
2) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Из определения 9.8. видно, что график нечётной функции симметричен относительно начала координат. Поэтому при построении графика нечётной функции достаточно построить её график для неотрицательных значений аргумента, а затем полученную линию отобразить симметрично относительно начала координат.

Функцию, не обладающую свойством чётности или нечётности, называют *функцией общего вида*.

Определение 9.9. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если $\exists T \in \mathrm{R}, T > 0 \mid$ выполняются следующие условия:

1) $\forall x \in D(f) \Rightarrow x - T,\ x + T \in D(f)$;
2) $f(x-T) = f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$,

при этом число T называется периодом функции.

Замечание 9.1. Если T – период функции $f(x)$, то для $\forall n \in \mathrm{N}$ число $\tilde{T} = nT$ тоже является периодом функции $f(x)$.

Наименьший из всех периодов функции называется её *основным периодом*. В дальнейшем под периодом функции понимается её основной период.

Для построения графика периодической функции $y = f(x)$ с периодом T достаточно построить её график на каком-либо участке длиной T, а затем произвести параллельный перенос полученной линии вдоль оси Ox на $\pm T$, $\pm 2T$ и т.д.

Замечание 9.2. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $\varphi(x) = f(ax+b)$, где a, b – постоянные и $a > 0$, имеет период T/a.

Действительно,

$$\varphi(x + T/a) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f(ax + b + T) = f(ax+b) = \varphi(x) .$$

Примеры функций, обладающих теми или иными из перечисленных выше свойств, см. в прил. 1.

Лекция 10. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Основные элементарные функции; сложная функция; элементарные функции; предел функции на бесконечности; предел функции в точке; бесконечно большие величины.

В ходе развития математики были выявлены функции, которые наиболее часто используются в приложениях. Такие функции называются *основными элементарными функциями*. К ним относятся:

1) степенная функция: $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathrm{R}$;
2) показательная функция: $y = a^x$, $a \in \mathrm{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$;
3) логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a \in \mathrm{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (частный случай: $y = \ln x$);
4) тригонометрический функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$;
5) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$;
6) гиперболические функции: $y = \mathrm{sh}\, x$ (гиперболический синус), $y = \mathrm{ch}\, x$ (гиперболический косинус), $y = \mathrm{th}\, x$ (гиперболический тангенс), $y = \mathrm{cth}\, x$ (гиперболический котангенс); по определению,

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x},\ \mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} .$$

Основные элементарные функции 1) – 5) изучались в школьном курсе математики. Более подробная информация об основных элементарных функциях приведена в прил. 1.

Исходя из запаса основных элементарных функций, введём понятие элементарной функции. Для этого нам понадобится понятие сложной функции.

Пусть задана функция $u = \varphi(x)$, $x \in D(\varphi) \subseteq \mathrm{R}$, а на множестве $E(\varphi) = \{u \mid u = \varphi(x), x \in D(\varphi)\}$ задана функция $y = f(u)$. Тогда можно рассмотреть функцию $F : D(\varphi) \to E(f) = \{y \mid y = f(u), u \in E(\varphi)\}$, которая каждому $x \in D(\varphi)$ ставит в соответствие $y = f(\varphi(x))$. Полученная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ представляет собой функцию от функции и называется *сложной функцией* (*суперпозицией* или *композицией* функций f и φ; обозначение: $f \circ \varphi$; по определению, $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$), при этом функция $u = \varphi(x)$ называется *промежуточным аргументом*; x – *внутренним аргументом* (или независимой переменной):

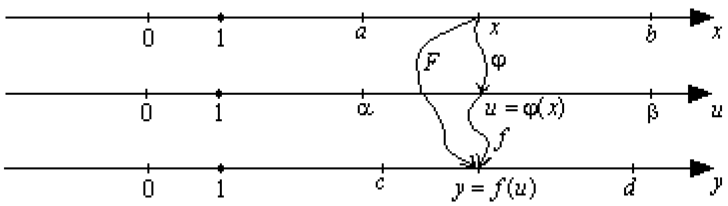

Рис. 10.1

Другое обозначение сложной функции: $y = y(u(x))$.

Сложную функцию $y = f(\varphi(x))$ можно записать в виде отдельных звеньев (в виде цепочки равенств): $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Например, сложную функцию $y = \sin^3 x$ можно представить в виде $y = u^3$, $u = \sin x$.

Сложная функция может состоять более чем из двух звеньев, в частности, может иметь вид: $y = y(w(u(x)))$. Например, сложная функция $y = e^{\mathrm{tg}^2 x}$ состоит из трёх звеньев: $y = e^w$, $w = u^2$, $u = \mathrm{tg}\, x$.

Определение 10.1. *Элементарной функцией* называется любая функция, получаемая из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень) и конечного числа операций взятия функции от функции (конечного числа суперпозиций).

В частности, любая сложная функция, каждое звено которой является основной элементарной функцией, есть элементарная функция. Например, сложные функции $y=\sin^3 x$, $y=e^{\operatorname{tg}^2 x}$, рассмотренные выше, являются элементарными функциями.

Другие примеры элементарных функций:

$$y=x^3+5\log_2 x\,;\quad y=\frac{3-\operatorname{arctg} x}{\ln^4 x}\,;\quad y=\left(\sqrt{x\cos x}+\arcsin x\right)^{10}.$$

Составные функции не являются элементарными. Например, единичная функция Хевисайда

;
$$\eta(x)=\begin{cases}0, & \forall x<0,\\ 1, & \forall x\ge 0\end{cases}$$

не является элементарной.

Используется классификация элементарных функций [3, с. 50], представленная на рис. 10.2.

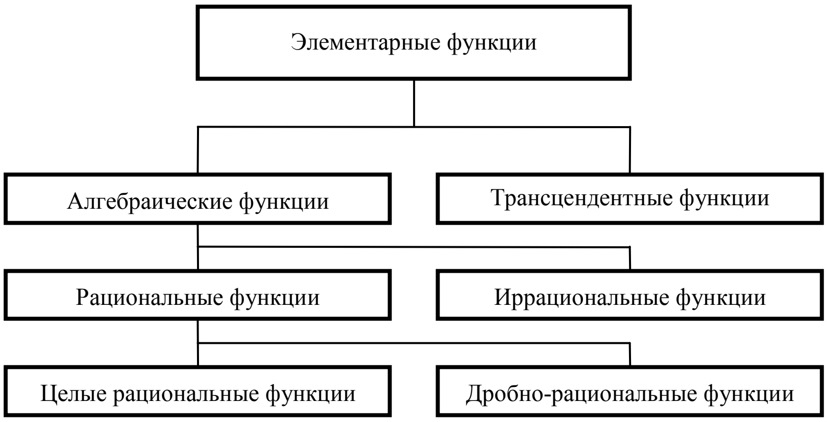

Рис. 10.2

Целая рациональная функция ::= функция вида $y=P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n: $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$; $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\in\mathrm{R}$, $a_0\ne 0$. Числа a_i, $0\le i\le n$, называются *коэффициентами многочлена* $P_n(x)$.

Частные случаи целой рациональной функции: *линейная функция* $y=ax+b$; $a,b\in\mathrm{R}$, $a\ne 0$; *квадратичная функция* $y=ax^2+bx+c$; $a,b,c\in\mathrm{R}$, $a\ne 0$.

Дробно-рациональная функция ::= функция вида $y=P_n(x)/Q_m(x)$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ многочлены степени n и m соответственно.

Частный случай дробно-рациональной функции: *дробно-линейная функция*

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},\ a,b,c,d\in\mathrm{R},\ c\ne 0.$$

Рациональная функция ::= целая рациональная функция или дробно-рациональная функция.

Иррациональная функция ::= функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и конечного числа арифметических операций над степенными функциями, не являющаяся рациональной функцией. (пример иррациональной функции: $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2x^3+\sqrt[5]{x}}$).

Алгебраическая функция ::= рациональная функция или иррациональная функция.

Трансцендентная функция ::= любая элементарная функция, не являющаяся алгебраической (пример трансцендентной функции: $y=5\cos^3 x-\ln^2 x$).

В частности, к трансцендентным функциям относятся все основные элементарные функции, кроме степенной функции с рациональными показателями.

В математическом анализе основное внимание уделяется изучению свойств элементарных функций, ибо элементарные функции имеют важное значение при решении различных задач естествознания.

Пусть дана некоторая функция $y=f(x)$, $x\in[a,+\infty)$. Ставится вопрос о поведении этой функции при $x\to+\infty$.

Определение 10.2. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to+\infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся положительное число Δ, определяемое в зависимости от взятого числа ε, такое что для любого $x>\Delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A\,. \tag{10.1}$$

Итак, запись (10.1) означает, по определению, следующее:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x > \Delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon\,. \tag{10.2}$$

Геометрическая иллюстрация (10.2) представлена на рис. 10.3.

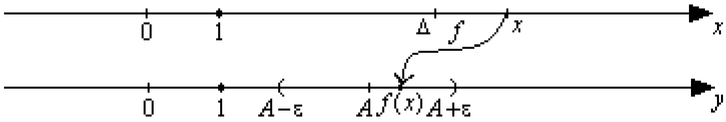

Рис. 10.3

Для характеристики поведения графика функции при его удалении в бесконечность в том или ином направлении используется понятие асимптоты.

Определение 10.3. Прямая d называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если при удалении графика в бесконечность расстояние $\rho = \rho(M,d)$ от точек графика до прямой d стремится к нулю: $\rho(M,d) \to 0$.

Заметим, что в (10.2) величина $\left| f(x) - A \right|$ равна расстоянию от точки $M(x, f(x))$ до прямой $d : y = A$, т.е. $\rho(M,d) = \left| f(x) - A \right|$. Следовательно, в силу (10.2) $\rho(M,d) \to 0$ при $x \to +\infty$. А это означает, по определению, что прямая $d : y = A$ есть асимптота графика функции $y = f(x)$. Её называют *правосторонней горизонтальной асимптотой* графика функции.

Вывод 10.1. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, то прямая $d : y = A$ есть *правосто- ронняя горизонтальная асимптота* графика функции $y = f(x)$ (рис. 10.4).

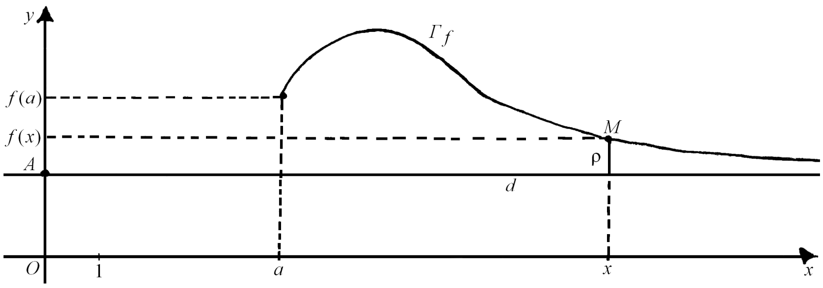

Рис. 10.4

Пусть функция $y = f(x)$ задана на замкнутой полуоси $(-\infty, b]$.

Определение 10.4. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta = \Delta(\varepsilon) < 0 \mid \forall x < \Delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon\,.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Вывод 10.2. Если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, то прямая $d : y = A$ есть *левосторонняя горизонтальная асимптота* графика функции $y = f(x)$.

Вывод 10.3. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, то прямая $d : y = A$ есть *двусторонняя горизонтальная асимптота* графика функции $y = f(x)$ (рис. 10.5).

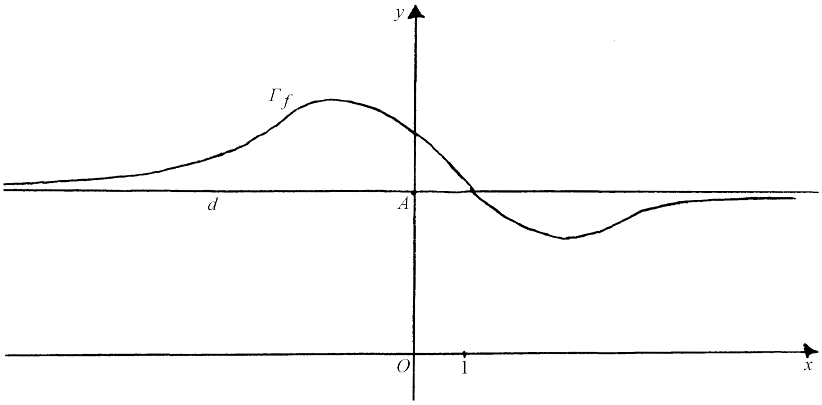

Рис. 10.5

Определение 10.5. Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in [a, +\infty)$ при $x \to +\infty$ сходится к $+\infty$ (или имеет предел $+\infty$), если для любого сколь угодно большого положительного числа E найдётся положительное число Δ, определяемое в зависимости от взятого числа E, такое что для любого $x > \Delta$ выполняется неравенство $f(x) > E$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty . \qquad (10.3)$$

Итак, запись (10.3) означает, по определению, следующее:

$$\forall E > 0 \ \exists \Delta = \Delta(E) > 0 \mid \forall x > \Delta \Rightarrow f(x) > E .$$

Определение 10.6. Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in [a, +\infty)$ при $x \to +\infty$ сходится к $-\infty$ (или имеет предел $-\infty$), если

$$\forall E < 0 \ \exists \Delta = \Delta(E) > 0 \mid \forall x > \Delta \Rightarrow f(x) < E .$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Определение 10.7. Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in (-\infty, b]$ при $x \to -\infty$ сходится к $+\infty$ (или имеет предел $+\infty$), если

$$\forall E > 0 \ \exists \Delta = \Delta(E) < 0 \mid \forall x < \Delta \Rightarrow f(x) > E .$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Определение 10.8. Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in (-\infty, b]$ при $x \to -\infty$ сходится к $-\infty$ (или имеет предел $-\infty$), если

$$\forall E < 0 \ \exists \Delta = \Delta(E) < 0 \mid \forall x < \Delta \Rightarrow f(x) < E .$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Введём понятие предела функции в точке. Пусть $x_0 \in \mathrm{R}$, δ – некоторое положительное число.

Определение 10.9. *Проколотой* δ*-окрестностью точки* x_0 называется множество вида

$$\dot{O}_\delta(x_0) = O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathrm{R} :: 0 < |x - x_0| < \delta\} .$$

Рассмотрим некоторое множество $\Omega \subset \mathrm{R}$.

Определение 10.10. Точка $x_0 \in \mathrm{R}$ называется *предельной точкой множества* Ω, если в любой её сколь угодно малой δ – окрестности найдётся хотя бы одна точка множества Ω, отличная от точки x_0:

$$\forall O_\delta(x_0) \ \exists x \in \dot{O}_\delta(x_0) \mid x \in \Omega .$$

Пример 10.1. Пусть $\Omega = [2;\ 5)$ (рис. 10.6):

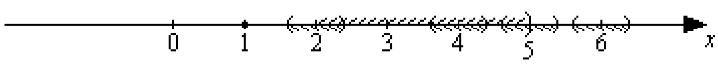

Рис. 10.6

Например, $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$ – предельные точки множества Ω, при этом $x_1, x_2 \in \Omega$, но $x_3 \overline{\in} \Omega$; $x_4 = 6$ не является предельной точкой множества Ω.

Замечание 10.1. Если x_0 – предельная точка множества Ω, то в любой сколь угодно малой δ – окрестности этой точки найдётся бесконечное число точек, отличных от точки x_0, принадлежащих множеству Ω (рис. 10.7).

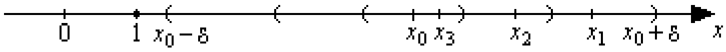

Рис. 10.7

Из примера 10.1 видно, что у множества Ω могут быть предельные точки, принадлежащие ему, и предельные точки, не принадлежащие ему.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Пусть x_0 – предельная точка множества $D(f)$.

Определение 10.11. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 (или при x, стремящемся к x_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся положительное число δ, определяемое в зависимости от взятого числа ε, такое что для любого $x \in D(f)$, не равного x_0 и отличного от x_0 по модулю на величину, меньшую δ, соответствующее значение функции $f(x)$ отличается от числа A по модулю на величину, меньшую взятого числа ε.

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \tag{10.4}$$

или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$ (или $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} A$).

Запись (10.4) означает, по определению, следующее:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{10.5}$$

Условие $0 < |x - x_0| < \delta$ означает, что $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$; а условие $|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что $f(x) \in O_\varepsilon(A)$. Следовательно, определение предела функции в точке можно сформулировать на геометрическом языке.

Определение 10.12. Точка A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если

$$\forall O_\varepsilon(A)\ \exists O_\delta(x_0), \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A). \tag{10.6}$$

Геометрическая иллюстрация (10.6) представлена на рис. 10.8.

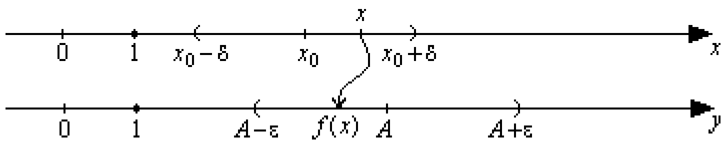

Рис. 10.8

Пример 10.2. Предел функции $f(x) = 5x + 4$ при $x \to 1$ равен 9 (заметим, что $D(f) = \mathrm{R}$).

Действительно, зафиксируем произвольное сколь угодно малое положительное число ε. Чтобы показать, что $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 9$, нам нужно в силу (10.5) подобрать положительное число $\delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x:\ 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 9| < \varepsilon$. Имеем: $f(x) - 9 = 5x + 4 - 9 = 5(x - 1)$, $|f(x) - 9| = 5|x - 1|$ и для выполнения неравенства $|f(x) - 9| < \varepsilon$, т.е. $5|x - 1| < \varepsilon$ или равносильного ему неравенства $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ достаточно взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Замечание 10.2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $A > 0$, то $\exists O_\delta(x_0) \mid\ \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$.

Действительно, достаточно в (10.6) взять $\varepsilon = A/2$.

Замечание 10.3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $A < 0$, то $\exists O_\delta(x_0) \mid\ \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$.

Действительно, достаточно в (10.6) взять $\varepsilon = |A|/2$.

В силу замечаний 10.2, 10.3 функция сохраняет знак своего предела в достаточно малой проколотой окрестности предельной точки.

Определение 10.13. Говорят, что функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ сходится к $+\infty$ (или имеет предел $+\infty$), если

$$\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0 \mid \forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E. \tag{10.7}$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Пример 10.3. Предел функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ равен $+\infty$ (заметим, что $D(f) = \mathrm{R} \setminus \{0\}$).

Действительно, зафиксируем произвольное сколь угодно большое положительное число E. Положим $\delta = 1/\left(\sqrt{E}\right)$. Тогда для $\forall x : 0 < |x| < \delta$ имеем:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{|x|^2} > \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\left(1/\sqrt{E}\right)^2} = E .$$

Получили: $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0 \mid \forall x : 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow f(x) > E$, а это означает по определению 10.13, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Определение 10.14. Говорят, что функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ сходится к $-\infty$ (или имеет предел $-\infty$), если

$$\forall E < 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0 \mid \forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < E . \quad (10.8)$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Определение 10.15. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно *большой в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty . \quad (10.9)$$

Согласно определению 10.13 запись (10.9) означает следующее:

$$\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0 \mid \forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E . \quad (10.10)$$

Функцию, бесконечно большую в данной точке, называют также бесконечно большой величиной (б.б.в.) в этой точке.

Замечание 10.4. В определении 10.15 в качестве предельной точки x_0 может выступать $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание 10.5. Если выполняется (10.9), то говорят, что функция $f(x)$ при $x \to x_0$ сходится к ∞ (или имеет предел ∞).

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Замечание 10.6. Любая функция $f(x)$, для которой $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, есть б.б.в. при $x \to x_0$.

Действительно, для такой функции выполняется (10.7). Имеем: $f(x) > E$, $E > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = |f(x)|$ и (10.7) принимает вид (10.10), а это означает, по определению, что $f(x)$ – б.б.в. при $x \to x_0$.

Например, функция из примера 10.3 является б.б.в. при $x \to 0$.

Замечание 10.7. Любая функция $f(x)$, для которой $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, есть б.б.в. при $x \to x_0$.

Действительно, для такой функции выполняется (10.8). Имеем:

$$f(x) < E,\ E < 0 \Rightarrow \begin{cases} -f(x) > -E, & -E > 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow -f(x) = |f(x)| \end{cases} \Rightarrow |f(x)| > -E ,$$

т.е. выполняется (10.10), где в качестве E выступает $-E > 0$, а это означает, по определению, что $f(x)$ – б.б.в. при $x \to x_0$.

Пример 10.4. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ есть бесконечно большая при $x \to 0$ (заметим, что $D(f) = \mathrm{R} \setminus \{0\}$).

Действительно, возьмём $E > 0$. Положим $\delta = 1/E$. Тогда $\forall x : 0 < |x| < \delta$ имеем:

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{1/E} = E .$$

Получили: $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0 \mid \forall x : 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E$, а это означает по определению 10.15, что $f(x)$ – б.б.в. при $x \to 0$.

В силу замечания 10.5 допустима запись

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty . \quad (10.11)$$

Особо подчеркнём, что запись (10.11) носит условный характер, ибо она обозначает лишь тот факт, что

$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty . \quad (10.12)$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рис. 10.9.

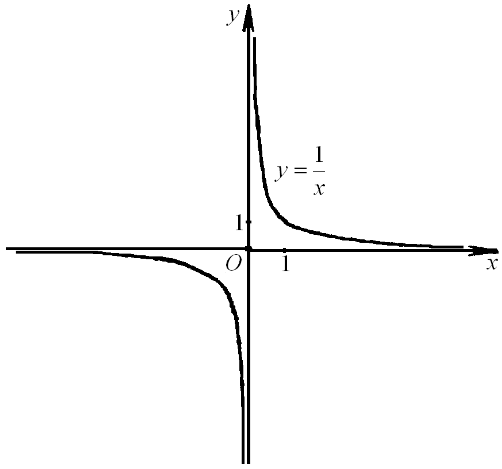

Рис. 10.9

Более детальный анализ поведения функции $f(x)$ показывает, что

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty\,. \tag{10.13}$$

Естественно, что в (10.13) содержится больше информации, нежели в (10.11) (рис. 10.9).

Замечание 10.8. Если функция $f(x)$ – б.б.в. при $x\to x_0$, то $f(x)$ есть неограниченная функция в любой сколь угодно малой δ – окрестности точки x_0.

Замечание 10.8 вытекает из (10.10).

Л е к ц и я 11. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

Теорема о единственности предела; предельный переход в равенстве; необходимый признак существования конечного предела функции в точке; предельный переход в неравенстве; теорема о пределе промежуточной функции; первый замечательный предел; бесконечно малые величины, их свойства; связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами.

Рассмотрим основные свойства пределов функций.

Теорема 11.1. Функция не может иметь в точке двух различных пределов.

► П: $\exists f(x),\ \exists x_0\ |$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\,; \tag{11.1}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=B \tag{11.2}$$

и $A\neq B$. Пусть для определённости, $A<B\ \Rightarrow B-A>0$.

Выберем $\varepsilon>0$ таким, чтобы $O_\varepsilon(A)\cap O_\varepsilon(B)=\varnothing$. Положим, например, $\varepsilon=(B-A)/3$ (рис. 11.1).

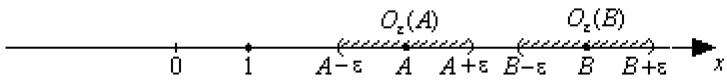

Рис. 11.1

Из (11.1) следует в силу (10.6): для взятой $O_\varepsilon(A)\ \exists O_{\delta_1}(x_0)$, $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)\,|\,\forall x\in D(f)\cap\dot O_{\delta_1}(x_0)\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A)$. Аналогично, из (11.2) следует, что для взятой $O_\varepsilon(B)\ \ \exists O_{\delta_2}(x_0)$, $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)\,|\ \ \forall x\in D(f)\cap\dot O_{\delta_2}(x_0)\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(B)$. Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда для $\forall x\in D(f)\cap\dot O_\delta(x_0)\ \Rightarrow\ \ f(x)\in O_\varepsilon(A)\cap O_\varepsilon(B)=\varnothing$. Противоречие. П. ◄

Рассмотрим две функции $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$. Пусть x_0 – предельная точка множества $D(\varphi)\cap D(\psi)$, существует $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$ и в некоторой $\dot O_\delta(x_0)$ выполняется условие

$$\varphi(x)=\psi(x)\,,\ \forall x\in\dot O_\delta(x_0)\,. \tag{11.3}$$

Тогда $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ и

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)\,. \tag{11.4}$$

Действительно, в силу условия (11.3) речь идёт об одной функции $f(x)=\varphi(x)=\psi(x)$ в $\dot{O}_\delta(x_0)$, а в силу теоремы 11.1 предел этой функции единственен.

Переход от (11.3) к (11.4) называется предельным переходом в равенстве.

Укажем *необходимый признак существования конечного предела функции в точке.*

Теорема 11.2. Функция, имеющая конечный предел в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

▶ Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Возьмём какое-либо конкретное число $\varepsilon>0$. Тогда в силу (10.6) $\exists O_\delta(x_0)$ $|\,\forall x\in D(f)\cap \dot{O}_\delta(x_0)\Rightarrow\ \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A)$, т.е. $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, а это и означает ограниченность функции $f(x)$ в $O_\delta(x_0)$ в случае, когда $x_0\ \overline{\in}\ D(f)$. Если $x_0\in D(f)$, то функция $f(x)$ тоже ограничена в $O_\delta(x_0)$, ибо $m\le f(x)\le M$, $\forall x\in D(f)\cap O_\delta(x_0)$, где $m=\min\{A-\varepsilon, f(x_0)\}$, $M=\max\{A+\varepsilon, f(x_0)\}$. ◀

Свойство функции, доказанное в теореме 11.2, называется *локальной ограниченностью функции*, имеющей конечный предел (ибо из ограниченности функции в некоторой окрестности отдельной точки вовсе не следует её ограниченность на других участках изменения аргумента).

Для функций имеет место предельный переход в неравенстве.

Теорема 11.3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определённые в некоторой $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, имеют в точке x_0 конечные пределы и

$$f(x)\le g(x),\ \forall x\in \dot{O}_{\delta_*}(x_0). \tag{11.5}$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x). \tag{11.6}$$

▶ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Нужно доказать, что $A\le B$. ПП: $A>B$. Выберем $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы $O_\varepsilon(A)\cap O_\varepsilon(B)=\varnothing$. Положим, например, $\varepsilon=\dfrac{A-B}{3}$ (рис. 11.2).

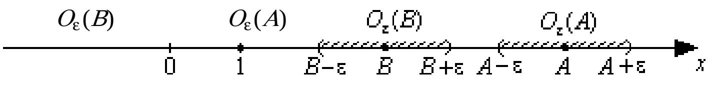

Рис. 11.2

По определению предела, для $O_\varepsilon(A)$ $\exists O_{\delta_1}(x_0)$, $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)\,|\,\forall x\in \dot{O}_{\delta_1}(x_0)\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A)$; для $O_\varepsilon(B)$ $\exists O_{\delta_2}(x_0)$, $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)\,|$ $\forall x\in \dot{O}_{\delta_2}(x_0)\Rightarrow g(x)\in O_\varepsilon(B)$. Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда для $\forall x\in \dot{O}_\delta(x_0)$ $f(x)\in O_\varepsilon(A)$ и $g(x)\in O_\varepsilon(B)\Rightarrow f(x)>g(x)$, ибо $B+\varepsilon<A-\varepsilon$. Получили: $f(x)>g(x)$ для $\forall x\in \dot{O}_\delta(x_0)$, что противоречит условию (11.5). $\overline{\text{ПП}}$. ◀

Переход от (11.5) к (11.6) называется предельным переходом в неравенстве.

Замечание 11.1. Если в условии (11.5) имеет место строгое неравенство, т.е. $f(x)<g(x)$ для $\forall x\in \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, то в (11.6) строгое неравенство не обязательно.

Например, пусть $f(x)=(x-1)^2$, $g(x)=2(x-1)^2$. Тогда $f(x)<g(x)$ для $\forall x\in \dot{O}_{\delta_*}(1)$, но $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$ (в чём можно убедиться, построив графики функций $f(x)$ и $g(x)$).

Замечание 11.2. Если $f(x)=c=\text{const}$ в некоторой $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} c=c. \tag{11.7}$$

Действительно, для $\forall\varepsilon>0$ в качестве δ можно взять любое положительное число, удовлетворяющее условию $\delta\le\delta_*$. Тогда $\forall x: 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow |f(x)-c|=|c-c|=|0|=0<\varepsilon$. А это означает, по определению предела, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$.

Следствие 11.1. Если функция $f(x)$, определённая в некоторой $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, имеет в точке x_0 конечный предел и $f(x)\le c$, $\forall x\in \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, где $c\in \mathrm{R}, c=\text{const}$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le c$.

Следствие 11.1 вытекает из теоремы 11.3 (в качестве $g(x)$ выступает функция $g(x)=c$, $\forall x\in \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, для которой $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=c$ в силу замечания 11.2).

Следствие 11.2. Если функция $f(x)$, определённая в некоторой $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, имеет в точке x_0 конечный предел и $f(x)\ge c$, $\forall x\in \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, где $c\in \mathrm{R}, c=\text{const}$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge c$.

Следствие 11.3. Если функция $f(x)$, определённая в некоторой $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, имеет в точке x_0 конечный предел и $c \le f(x) \le d$, $\forall x \in \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, где $c, d \in \mathrm{R}$, $c = \mathrm{const}$, $d = \mathrm{const}$, то $c \le \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le d$.

Теорема 11.4. Пусть функции $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$ и

$$f(x) \le h(x) \le g(x),\ \forall x \in \dot{O}_{\delta_*}(x_0). \tag{11.8}$$

Тогда, если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 одинаковый предел, равный A, то функция $h(x)$ тоже имеет предел в точке x_0, равный A.

► По условию теоремы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A; \tag{11.9}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A. \tag{11.10}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (11.9) для $O_\varepsilon(A)$ $\exists O_{\delta_1}(x_0)$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \mid \forall x \in \dot{O}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A)$. В силу (11.10) для $O_\varepsilon(A)$ $\exists O_{\delta_2}(x_0)$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \mid$ $\forall x \in \dot{O}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow g(x) \in O_\varepsilon(A)$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (заметим, что $\delta = \delta(\varepsilon)$, ибо $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$). Тогда для $\forall x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ $f(x) \in O_\varepsilon(A)$ и $g(x) \in O_\varepsilon(A)$, следовательно, в силу условия (11.8) $h(x) \in O_\varepsilon(A)$. Получили: для $\forall O_\varepsilon(A)$ $\exists O_\delta(x_0)$, $\delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow h(x) \in O_\varepsilon(A)$, а это означает, по определению предела, что $\exists \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$. ◄

Теорема 11.4 называется *теоремой о пределе промежуточной функции.*

Теорема 11.5. Функция $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ конечный предел, равный единице:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{11.11}$$

► Покажем, что

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\ \forall x \in \dot{O}_{\frac{\pi}{2}}(0). \tag{11.12}$$

Установим вначале справедливость неравенств (11.12) на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Пусть $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим дугу P_0P_x единичной тригонометрической окружности, соответствующую центральному углу, радианная мера которого равна x (рис. 11.3).

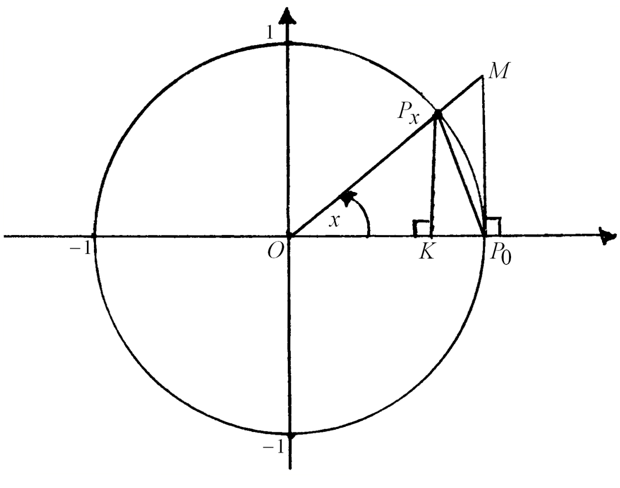

Рис. 11.3

Из рис. 11.3 видно, что

$$S_{\Delta OP_0P_x} < S_{\text{кр.с.}OP_0P_x} < S_{\Delta OP_0M}. \tag{11.13}$$

Имеем:

$$S_{\Delta OP_0P_x} = \frac{1}{2} OP_0 \cdot P_xK = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$S_{\text{кр.с.}OP_0P_x} = \frac{S_{\text{круга}}}{2\pi}\cdot x = \frac{\pi\cdot 1^2}{2\pi}\cdot x = \frac{x}{2},$$

$$S_{\Delta OP_0M} = \frac{1}{2}OP_0\cdot MP_0 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x .$$

Неравенства (11.13) принимают вид:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x ,$$

т.е.

$$\begin{cases}\sin x < x\\ \operatorname{tg} x > x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} < 1\\ \dfrac{\sin x}{x} > \cos x\end{cases} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

Справедливость (11.12) для $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ установлена. В силу чётности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ это двойное неравенство выполняется также для $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$. Неравенства (11.12) доказаны. Покажем, что

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 . \qquad (11.14)$$

Заметим, что

$$|\sin x| < |x| ,\ \forall x\in \dot{O}_{\frac{\pi}{2}}(0) . \qquad (11.15)$$

Действительно, выше было показано, что $\sin x < x$ для $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $|\sin x|<|x|$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ибо $\sin x>0$, $x>0$ $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $-x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, тогда $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| < |x| = |-x|$, т.е. $|\sin(-x)|<|-x|$. Справедливость (11.15) установлена. Зададим $\varepsilon>0$. Положим $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$. Тогда, используя (11.15) получаем для $\forall x: 0<|x-0|<\delta$:

$$|\cos x - 1| = \left|-2\sin^2\frac{x}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right| < 2\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|x|^2 < \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon .$$

Показано, что для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 \mid \forall x: 0<|x-0|<\delta \Rightarrow |\cos x-1|<\varepsilon$, а это означает, по определению предела, что $\exists\lim_{x\to 0}\cos x = 1$. Из (11.12), (11.14) и того, что $\lim_{x\to 0}1 = 1$, следует в силу теоремы 11.4 равенство (11.11). ◀

Предел (11.11) называется *первым замечательным пределом.* Его используют для раскрытия некоторых неопределённостей типа $\frac{0}{0}$.

Среди функций, имеющих конечный предел в данной точке x_0, выделяется класс бесконечно малых функций (бесконечно малых величин) в этой точке. Бесконечно малые функции принято обозначать строчными буквами греческого алфавита.

Определение 11.1. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в точке* x_0 (или *при* $x\to x_0$), если

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0 , \qquad (11.16)$$

т.е., согласно определению предела, если для

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 \mid \forall x\in D(\alpha): 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon , \qquad (11.17)$$

или в силу (10.6), если для

$$\forall O_\varepsilon(0)\ \exists O_\delta(x_0), \delta=\delta(\varepsilon) \mid \forall x\in D(\alpha)\cap\dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow \alpha(x)\in O_\varepsilon(0) . \qquad (11.18)$$

Пример 11.1. Функция $\alpha(x) = 3x-3$ является бесконечно малой при $x\to 1$ (заметим, что $D(\alpha)=\mathrm{R}$).

Действительно, зафиксируем произвольное сколь угодно малое положительное число ε. Чтобы показать, что $\lim_{x\to 1}\alpha(x) = 0$, нам нужно в силу (11.17) подобрать положительное число $\delta=\delta(\varepsilon) \mid \ \forall x: 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon$. Имеем:

$|\alpha(x)|=3|x-1|$ и для выполнения неравенства $|\alpha(x)|<\varepsilon$, т.е. неравенства $3|x-1|<\varepsilon$ или равносильного ему неравенства $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ достаточно взять $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Теорема 11.6. Сумма двух бесконечно малых величин в данной точке есть бесконечно малая величина в этой точке.

► Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые величины в точке x_0. Покажем, что их сумма $\alpha(x)+\beta(x)$ тоже бесконечно малая величина в точке x_0. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу (11.17) для числа $\dfrac{\varepsilon}{2}$ $\exists\delta_1=\delta_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=\delta_1(\varepsilon)>0\,|\,\forall x\in D(\alpha):0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, в силу того, что $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, для числа $\dfrac{\varepsilon}{2}$ $\exists\delta_2=\delta_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=\delta_2(\varepsilon)>0\,|\,\forall x\in D(\beta):0<|x-x_0|<\delta_2\Rightarrow|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Заметим, что $\delta=\delta(\varepsilon)$, ибо $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$. Тогда $\forall x\in D(\alpha)\cap D(\beta)\,|\,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, следовательно, $|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Итак, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\,|\,\forall x\in D(\alpha)\cap D(\beta):0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)+\beta(x)|<\varepsilon$, а это означает по определению предела, что $\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha(x)+\beta(x)]=0$, т.е. $\alpha(x)+\beta(x)$ – бесконечно малая величина в точке x_0. ◄

Теорема 11.7. Сумма любого конечного числа бесконечно малых величин в данной точке есть бесконечно малая величина в этой точке.

Теорема 11.7 доказывается методом математической индукции (см. доказательство теоремы 6.2).

Теорема 11.8. Произведение бесконечно малой величины в данной точке и функции, ограниченной в некоторой проколотой окрестности этой точки, есть бесконечно малая величина в данной точке.

► Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина (б.м.в.) в точке x_0, т.е. выполняется (11.16); $g(x)$ – функция, ограниченная в некоторой $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, т.е. $\exists C\in\mathrm{R}, C>0,$ такое что

$$|g(x)|\le C,\ \forall x\in D(g)\cap\dot{O}_{\delta_*}(x_0).$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу (11.17) для числа $\dfrac{\varepsilon}{C}$ $\exists\delta_1=\delta_1\left(\dfrac{\varepsilon}{C}\right)=\delta_1(\varepsilon)>0\,|\,\forall x\in D(\alpha):0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{C}$. Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_*\}$. Заметим, что $\delta=\delta(\varepsilon)$, ибо $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$. Тогда $\forall x\in D(\alpha)\cap D(g):0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{C}$ и $|g(x)|\le C$, следовательно, $|\alpha(x)g(x)|=|\alpha(x)|\cdot|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{C}\cdot C=\varepsilon$. Итак, для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\,|\,\forall x\in D(\alpha)\cap D(g):0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)g(x)|<\varepsilon$, а это означает в силу (11.17), что $\alpha(x)g(x)$ – б.м.в. в точке x_0. ◄

Следствие 11.4. Если $\alpha(x)$ – б.м.в. в точке x_0, то для $\forall c\in\mathrm{R}$ функция $c\alpha(x)$ есть б.м.в. в точке x_0.

Действительно, $c\alpha(x)$ представляет собой произведение б.м.в. $\alpha(x)$ в точке x_0 и функции $g(x)\equiv c$, $\forall x\in\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, ограниченной в $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, ибо $|g(x)|=|c|=\mathrm{const}$, $\forall x\in\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$. Следовательно, по теореме 11.8 $c\alpha(x)$ – б.м.в. в точке x_0.

Следствие 11.5. Если $\alpha_1(x),\alpha_2(x),...,\alpha_s(x)$ – б.м.в. в точке x_0, то для $\forall\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\in\mathrm{R}$ функция

$$\lambda_1\alpha_1(x)+\lambda_2\alpha_2(x)+...+\lambda_s\alpha_s(x)\tag{11.19}$$

есть б.м.в. в точке x_0.

Следствие 11.5 вытекает из следствия 11.4 и теоремы 11.7.

Выражение (11.19) называется линейной комбинацией функций $\alpha_1(x),\alpha_2(x),...,\alpha_s(x)$ с коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$. Поэтому следствие 11.5 можно сформулировать в виде: линейная комбинация любого конечного числа бесконечно малых величин в данной точке есть бесконечно малая величина в этой точке.

Следствие 11.6. Произведение двух бесконечно малых величин в данной точке есть бесконечно малая величина в этой точке.

Действительно, пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые величины в точке x_0. По условию, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. Следовательно, в силу теоремы 11.2 функция $\beta(x)$ ограничена в некоторой $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$. Тогда $\alpha(x)\beta(x)$ можно рассматривать как произведение б.м.в. $\alpha(x)$ в точке x_0 и функции $\beta(x)$, ограниченной в $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$. Следовательно, по теореме 11.8 $\alpha(x)\beta(x)$ – б.м.в. в точке x_0.

Теорема 11.9. Произведение любого конечного числа бесконечно малых величин в данной точке есть бесконечно малая величина в этой точке.

Теорема 11.9 доказывается методом математической индукции (см. доказательство теоремы 6.2).

Бесконечно малые и бесконечно большие величины связаны между собой следующим образом.

Теорема 11.10. Если $f(x)$ – б.б.в. при $x \to x_0$, то $1/f(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$.

Выберем произвольное сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. По условию $f(x)$ – б.б.в. при $x \to x_0$. Тогда в силу (10.10) для числа $E = 1/\varepsilon$ $\exists\delta = \delta(E) = \delta\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E$, следовательно, $|1/f(x)| = 1/|f(x)| < 1/E = 1/(1/\varepsilon) = \varepsilon$. Получили: $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |1/f(x)| < \varepsilon$, а это означает в силу (11.17), что $1/f(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$.

Теорема 11.11. Если $\alpha(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$ и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой $\dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, то $1/\alpha(x)$ – б.б.в. при $x \to x_0$.

Выберем произвольное сколь угодно большое $E > 0$. По условию $\alpha(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$. Тогда в силу (11.17) для числа $\varepsilon = 1/E$ $\exists O_\delta(x_0), \delta = \delta(\varepsilon) = \delta(1/E) = \delta(E) > 0 \mid$ $\forall x \in D(\alpha) \cap \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow$ $\Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$, следовательно, для $\forall x \in D(\alpha) \cap \dot{O}_\delta(x_0) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0) \Rightarrow$ $|1/\alpha(x)| = 1/|\alpha(x)| > 1/\varepsilon = 1/(1/E) = E$. Положим $\tilde{\delta} = \min\{\delta, \delta_*\}$. Заметим, что $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(E)$, ибо $\delta = \delta(E)$. Получили: $\forall E > 0\ \exists\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(E) > 0 \mid$ $\forall x \in D(\alpha) \cap \dot{O}_{\tilde{\delta}}(x_0) \Rightarrow$ $|1/\alpha(x)| > E$, а это означает в силу (10.10), что $1/\alpha(x)$ – б.б.в. при $x \to x_0$.

Например, в силу теоремы 11.11 функция $f(x) = 1/(3x - 3)$ есть б.б.в. при $x \to 1$, ибо функция $\alpha(x) = 3x - 3$ есть б.м.в. при $x \to 1$ (см. пример 11.1). Таким образом, в силу замечания 10.5 допустима запись

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{3x-3} = \infty\,. \tag{11.20}$$

Особо подчеркнём, что запись (11.20) носит условный характер, ибо она означает лишь тот факт, что

$$\lim_{x\to 1} \left|\frac{1}{3x-3}\right| = +\infty\,.$$

Более детальный анализ поведения функции $f(x)$ показывает, что

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{3x-3} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{3x-3} = +\infty\,. \tag{11.21}$$

Естественно, что в (11.21) содержится больше информации, нежели в (11.20).

Лекция 12. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

Свойства бесконечно больших величин; первый признак существования конечного предела функции в точке; лемма о существовании и ограниченности функции вида $1/v(x)$; *основная теорема о пределах функций; неопределённые выражения; предел сложной функции; второй замечательный предел.*

Укажем некоторые свойства бесконечно больших величин (б.б.в.), полезные при нахождении пределов.

1°. Произведение двух б.б.в. в данной точке есть б.б.в. в этой точке.

Действительно, пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.б.в. в точке x_0. Тогда по теореме 11.10 $1/f(x)$ и $1/g(x)$ – б.м.в. в точке x_0. По следствию 11.6 $[1/f(x)]\cdot[1/g(x)] = 1/[f(x)g(x)]$ – б.м.в. в точке x_0. По теореме 11.11 $1/\big[1/[f(x)g(x)]\big] = f(x)g(x)$ – б.б.в. в точке x_0.

2°. Произведение любого числа б.б.в. в данной точке есть б.б.в. в этой точке.

Свойство 2° доказывается методом математической индукции, при этом используется свойство 1°.

3°. Произведение б.б.в. в данной точке и функции, модуль которой ограничен снизу положительным числом в некоторой проколотой окрестности этой точки, есть б.б.в. в данной точке.

Действительно, пусть $f(x)$ – б.б.в. в точке x_0 и функция $g(x)$ такова, что $|g(x)| \geq m$, $\forall x \in \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, где $m = \text{const}$, $m > 0$. Пусть $E > 0$. Тогда в силу (10.10) для числа E/m $\exists\delta_1 = \delta_1(E/m) = \delta_1(E) > 0 \mid$ $\forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| > (E/m)$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_*\}$. Заметим, что $\delta = \delta(E)$, ибо $\delta_1 = \delta_1(E)$. Тогда для $\forall x \in D(f) \cap D(g)$: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > (E/m)$ и $|g(x)| \geq m$, следовательно, $|f(x)g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| > \dfrac{E}{m}\cdot m = E$. Итак, для $\forall E{>}0\ \exists\delta = \delta(E) > 0 \mid$ $\forall x \in D(f) \cap D(g): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x)| > E$, а это означает, по определению, что $f(x)g(x)$ – б.б.в. в точке x_0.

4°. Произведение б.б.в. в данной точке и функции, имеющей конечный ненулевой предел в этой точке, есть б.б.в. в данной точке.

Действительно, пусть $f(x)$ – б.б.в. в точке x_0 и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $B \neq 0$. В силу замечаний 10.2, 10.3 $\exists \dot{O}_{\delta_*}(x_0) \,|\, |g(x)| \geq m$, $m = \text{const}$, $m > 0$, следовательно, в силу свойства 3° $f(x)g(x)$ – б.б.в. в точке x_0.

5°. Сумма б.б.в. в данной точке и функции, ограниченной в некоторой проколотой окрестности этой точки , есть б.б.в. в данной точке.

Действительно, пусть $f(x)$ – б.б.в. в точке x_0 и функция $g(x)$ такова, что $|g(x)| \leq C$, $\forall x \in O_{\delta_*}(x_0)$, где $C = \text{const},\ C > 0$. Пусть $E > 0$. Тогда в силу (10.10) для числа $E + C$ $\exists \delta_1 = \delta_1(E+C) = \delta_1(E) > 0 \,|$ $\forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| > E + C$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_*\}$. Заметим, что $\delta = \delta(E)$, ибо $\delta_1 = \delta_1(E)$. Тогда для $\forall x \in D(f) \cap D(g)$: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E + C$ и $|g(x)| \leq C$, следовательно, $|f(x) + g(x)| \geq |f(x)| - |g(x)| > E + C - C = E$. Итак, для $\forall E>0$ $\exists \delta = \delta(E) > 0 \,|\, \forall x \in D(f) \cap D(g): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$ $|f(x) + g(x)| > E$, а это означает, по определению, что $f(x) + g(x)$ – б.б.в. в точке x_0.

При доказательстве основной теоремы о пределах функций будет использован следующий критерий.

Теорема 12.1.

$$\underbrace{\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A}_{(*)} \Leftrightarrow \underbrace{f(x) = A + \alpha(x)}_{(**)}, \tag{12.1}$$

где $\alpha(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$.

Необходимость: (*)$\Rightarrow$(**). Пусть выполняется условие (*). Положим $\alpha(x) = f(x) - A$, тогда $f(x) = A + \alpha(x)$. В силу (*)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, \forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

т.е. $|\alpha(x)| < \varepsilon$, а это означает, по определению, что $\alpha(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$. Получили: $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$.

Достаточность: (**)$\Rightarrow$(*). Пусть выполняется условие (**). Тогда

$$\alpha(x) = f(x) - A. \tag{12.2}$$

По условию $\alpha(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$, т.е. для

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, \forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

или в силу (12.2) $|f(x) - A| < \varepsilon$, а это означает по определению предела, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Назовём теорему 12.1 *первым признаком существования конечного предела функции в точке.*

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 12.1. Пусть для функции $v(x)$ $\exists \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = B$ и $B \neq 0$. Тогда найдётся некоторая $\dot{O}_{\delta_*}(x_0) \,|$ функция $\dfrac{1}{v(x)}$ определена и ограничена на множестве $D(v) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$.

По определению предела, для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,|$ $\forall x \in D(v) \cap \dot{O}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |v(x) - B| < \varepsilon$. В частности для числа $\varepsilon = \dfrac{|B|}{2} > 0$ $\exists O_{\delta_*}(x_0) \,|$

$$|v(x) - B| < \frac{|B|}{2},\ \forall x \in D(v) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0). \tag{12.3}$$

Используя (12.3), получаем для $\forall x \in D(v) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$:

$$|B| = |v(x) - (v(x) - B)| \leq |v(x)| + |v(x) - B| < |v(x)| + \frac{|B|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B| < |v(x)| + \frac{|B|}{2} \Rightarrow |v(x)| > \frac{|B|}{2} \Rightarrow v(x) \neq 0,$$

следовательно, функция $\dfrac{1}{v(x)}$ определена на множестве $D(v) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$. Далее, используя полученное неравенство

$$|v(x)| > \frac{|B|}{2}, \forall x \in D(v) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0),$$

имеем для $\forall x \in D(v) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$:

$$\left|\frac{1}{v(x)}\right| = \frac{1}{|v(x)|} < \frac{1}{\frac{|B|}{2}} = \frac{2}{|B|}, \text{ т.е. } \left|\frac{1}{v(x)}\right| < \frac{2}{|B|},$$

а это означает ограниченность функции $\frac{1}{v(x)}$ на множестве $D(v) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$. ◄

Докажем *основную теорему о пределах функций*, согласно которой в результате арифметических операций над функциями, имеющими конечный предел в данной точке, получаются функции, которые тоже имеют конечный предел в этой точке.

Теорема 12.2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0:

$$\exists \lim_{x \to x_0} u(x) = A; \tag{12.4}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} v(x) = B. \tag{12.5}$$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное, т.е. функции $u(x)+v(x)$, $u(x)-v(x)$, $u(x)v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ тоже имеют конечные пределы в точке x_0 и

$$\lim_{x \to x_0}\left[u(x)+v(x)\right] = \lim_{x \to x_0} u(x) + \lim_{x \to x_0} v(x); \tag{12.6}$$

$$\lim_{x \to x_0}\left[u(x)-v(x)\right] = \lim_{x \to x_0} u(x) - \lim_{x \to x_0} v(x); \tag{12.7}$$

$$\lim_{x \to x_0}\left[u(x)v(x)\right] = \lim_{x \to x_0} u(x) \cdot \lim_{x \to x_0} v(x); \tag{12.8}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)}; \tag{12.9}$$

при этом в случае частного предполагается, что $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) \neq 0$.

► Из (12.4), (12.5) получаем в силу теоремы 12.1:

$$u(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ – б.м.в. при } x \to x_0; \tag{12.10}$$

$$v(x) = B + \beta(x), \text{ где } \beta(x) \text{ – б.м.в. при } x \to x_0. \tag{12.11}$$

Тогда $u(x)+v(x) = (A+B) + [\alpha(x)+\beta(x)]$. Положим $\gamma(x) = \alpha(x)+\beta(x)$. В силу теоремы 11.6 $\gamma(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$. Получили: $u(x)+v(x) = (A+B)+\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$. Следовательно, в силу теоремы 12.1 $\exists \lim\limits_{x \to x_0}\left[u(x)+v(x)\right] = A+B$, т.е. в силу (12.4), (12.5) справедлива формула (12.6).

В силу (12.10), (12.11) $u(x)-v(x) = (A-B)+[\alpha(x)-\beta(x)]$. Положим $\mu(x) = \alpha(x)-\beta(x)$. В силу следствия 11.5 $\mu(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$. Получили: $u(x)-v(x) = (A-B)+\mu(x)$, где $\mu(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$. Следовательно, в силу теоремы 12.1 $\exists \lim\limits_{x \to x_0}\left[u(x)-v(x)\right] = A-B$, т.е. в силу (12.4), (12.5) справедлива формула (12.7).

В силу (12.10), (12.11) $u(x)v(x) = AB + [A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)]$. Положим $\nu(x) = A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$. В силу следствия 11.6 $\alpha(x)\beta(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$. Тогда в силу следствия 11.5 $\nu(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$ Получили: $u(x)v(x) = AB+\nu(x)$, где $\nu(x)$ – б.м.в. при $x \to x_0$. Следовательно, в силу теоремы 12.1 $\exists \lim\limits_{x \to x_0}\left[u(x)v(x)\right] = AB$, т.е. в силу (12.4), (12.5) справедлива формула (12.8).

В силу условия $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) \neq 0$ и леммы 12.1 $\exists O_{\delta_*}(x_0) \,|$ функция $\frac{1}{v(x)}$ определена и ограничена на множестве $D(v) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$, следовательно, функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ определена на множестве $F = D(u) \cap D(v) \cap \dot{O}_{\delta_*}(x_0)$. Используя (12.10), (12.11), получаем при $\forall x \in F$:

$$\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B\left[B+\beta(x)\right]} = \frac{1}{v(x)}\left[\alpha(x) - \frac{A}{B}\beta(x)\right]. \tag{12.12}$$

Положим $\sigma(x)=\frac{1}{v(x)}\left[\alpha(x)-\frac{A}{B}\beta(x)\right]$. В силу следствия 11.5 и теоремы 11.8 $\sigma(x)$ – б.м.в. при $x\to x_0$. В силу (12.12) $\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{A}{B}+\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ – б.м.в. при $x\to x_0$. Следовательно, в силу теоремы 12.1 $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{A}{B}$, т.е. в силу (12.4), (12.5) справедлива формула (12.9). ◄

Замечание 12.1. Теорема 12.2 сохраняет силу, если в качестве предельной точки x_0 выступает $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание 12.2. Если $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то для $\forall c\in \mathrm{R}$ $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\left[cf(x)\right]$ и

$$\lim_{x\to x_0}\left[cf(x)\right]=c\lim_{x\to x_0} f(x). \tag{12.13}$$

Действительно, в силу (12.8), (11.7)

$$\lim_{x\to x_0}\left[cf(x)\right]=\lim_{x\to x_0} c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=c\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Используя теорему 12.2 и метод математической индукции, приходим к следующему утверждению.

Теорема 12.3. Сумма любого конечного числа функций $u_1(x),u_2(x),...,u_s(x)$, имеющих конечный предел в точке x_0, есть функция, имеющая конечный предел в точке x_0, и

$$\lim_{x\to x_0}\left[\sum_{i=1}^{s}u_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{s}\lim_{x\to x_0}u_i(x).$$

Следствие 12.1. Если функции $u_1(x),u_2(x),...,u_s(x)$ имеют конечный предел в точке x_0, то их *линейная комбинация* $\lambda_1u_1(x)+\lambda_2u_2(x)+...+\lambda_su_s(x)$ с любыми коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\in \mathrm{R}$ имеет конечный предел в точке x_0 и

$$\lim_{x\to x_0}\left[\sum_{i=1}^{s}\lambda_iu_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\lim_{x\to x_0}u_i(x).$$

Следствие 12.1 вытекает из замечания 12.2 и теоремы 12.3.

Теорема 12.2 и следствие 12.1 позволяют находить пределы функций в данной точке, получаемых в результате арифметических операций над функциями, имеющими конечный предел в этой точке.

Возможна ситуация, когда при вычислении предела суммы, разности, произведения и частного двух функций в данной точке предел хотя бы одной из них в этой точке равен $+\infty$ (или $-\infty$), а в случае частного предел знаменателя равен нулю.

В простейших случаях такая ситуация разрешается непосредственно.

Пример 12.1. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $A\in \mathrm{R}$, $A\neq 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Тогда

$$B=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{A}{0}\right)=\infty, \tag{12.14}$$

ибо в силу теоремы 11.11 $1/g(x)$ – б.б.в. в точке x_0, следовательно, в силу свойства 4° $f(x)/g(x)=f(x)\cdot\left[1/g(x)\right]$ – б.б.в. в точке x_0.

Запись $\left(\frac{A}{0}\right)$ имеет условный характер: она означает лишь то, что при $x\to x_0$ предел числителя равен A, а предел знаменателя равен нулю.

Замечание 12.3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конкретный вид, то природу предела B надо уточнить, а именно, найти

$$B_1=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)}{g(x)},\quad B_2=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Если $B_1=+\infty$ и $B_2=+\infty$, то $B=+\infty$. Если $B_1=-\infty$ и $B_2=-\infty$, то $B=-\infty$. Если $B_1=+\infty$ и $B_2=-\infty$, либо $B_1=-\infty$ и $B_2=+\infty$, то запись (12.14) надо понимать в следующем смысле:

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=+\infty.$$

Пример 12.2. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $A\in \mathrm{R}$, $A\neq 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$. Тогда

$$B=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{A}{\infty}\right)=0,$$

ибо в силу теоремы 11.10 $1/g(x)$ – б.м.в. в точке x_0, а в силу теоремы 11.2 функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0, следовательно, в силу теоремы 11.8 $f(x)/g(x)=f(x)\cdot[1/g(x)]$ – б.м.в. в точке x_0.

В примерах 12.1, 12.2 нам удалось, зная пределы делимого и делителя, найти предел частного. Иначе обстоит дело, когда, например, пределы делимого и делителя равны нулю.

Пример 12.3. Пусть $f(x)=x-1$, $g(x)=5x-5$. Заметим, что $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$. Используя (12.13), получаем:

$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}(5x-5)=\lim_{x\to1}\left[5(x-1)\right]=5\lim_{x\to1}(x-1)=5\cdot0=0 .$$

Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{5x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{5(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

($x\to1$, но $x\neq1 \Rightarrow x-1\neq0$ и на $x-1$ можно сократить).

Получили: $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)/g(x)\right]=\dfrac{1}{5}$.

Пример 12.4. Пусть $f(x)=x-1$, $g(x)=(x-1)^2$. Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty .$$

Получили: $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)/g(x)\right]=\infty$.

Пример 12.5. $f(x)=(x-1)^2$, $g(x)=x-1$. Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}(x-1)=0 .$$

Получили: $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)/g(x)\right]=0$.

Из примеров 12.3 – 12.5 видно: зная, что пределы делимого и делителя равны нулю, нельзя в общем случае сделать вывод о том, чему равен предел частного. В связи с этим вводят понятие неопределённости.

Определение 12.1. Говорят, что частное $f(x)/g(x)$ представляет собой при $x\to x_0$ (или в точке x_0) *неопределённость типа* $\dfrac{0}{0}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Аналогичная картина наблюдается, когда при нахождении пределов мы приходим к условным записям вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$. В этих случаях тоже нельзя заранее сказать, чему будет равен предел соответствующего выражения; для нахождения такого предела нужно учесть конкретный вид функций $f(x)$ и $g(x)$ и характер их поведения при $x\to x_0$, или, как принято говорить, раскрыть неопределённость.

Итак, при вычислении пределов функций, получаемых в результате арифметических операций над другими функциями, могут возникать неопределённости четырёх типов:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty. \tag{12.15}$$

Неопределённость типа $0\cdot\infty$ сводится с помощью теорем 11.10, 11.11 к неопределённости типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{1/f(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Неопределённости типа $\infty-\infty$ сводятся к неопределённости типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ и, возможно в дальнейшем, к неопределённости типа $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=(\infty-\infty)=\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)\right]=\left(\infty\cdot\left(1-\frac{\infty}{\infty}\right)\right).$$

Докажем *теорему о пределе сложной функции.*

Теорема 12.4. Пусть для сложной функции $y=f\left(\varphi(x)\right)$ выполняются следующие условия:

$$\exists\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=u_*\ , \tag{12.16}$$

$$\exists O_{\delta_1}(x_0)\,|\,\varphi(x)\neq u_*\ ,\forall x\in\dot{O}_{\delta_1}(x_0)\ , \tag{12.17}$$

$$\exists\lim_{u\to u_*}f(u)=A\,. \tag{12.18}$$

Тогда

$$\exists\lim_{x\to x_0}f\left(\varphi(x)\right)=A\,. \tag{12.19}$$

► Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу (12.18) для $O_\varepsilon(A)$

$$\exists O_{\delta_2}(u_*),\delta_2=\delta_2(\varepsilon)\,|\,\forall u\in D(f)\cap\dot{O}_{\delta_2}(u_0)\Rightarrow f(u)\in O_\varepsilon(A)\,. \tag{12.20}$$

В силу (12.16) для $O_{\delta_2}(u_*)$

$$\exists O_{\delta_3}(x_0),\delta_3=\delta_3(\delta_2)\,|\,\forall x\in D(\varphi)\cap\dot{O}_{\delta_3}(x_0)\Rightarrow\varphi(x)\in O_{\delta_2}(u_*)\,. \tag{12.21}$$

Заметим, что $\delta_3=\delta_3(\varepsilon)$, ибо $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$. Положим $\delta=\min\{\delta_3,\delta_1\}$ ($\delta=\delta(\varepsilon)$, ибо $\delta_3=\delta_3(\varepsilon)$). Тогда в силу (12.17), (12.21) $\forall x\in D(\varphi)\cap\dot{O}_\delta(x_0)$ выполняется $\varphi(x)\in\dot{O}_{\delta_2}(u_*)$, следовательно, в силу (12.20) $f\left(\varphi(x)\right)\in O_\varepsilon(A)$. Получили: $\forall O_\varepsilon(A)$ $\exists O_\delta(x_0),\delta=\delta(\varepsilon)\,|\ \forall x\in D(\varphi)\cap\dot{O}_\delta(x_0)\Rightarrow f\left(\varphi(x)\right)\in O_\varepsilon(A)$, а это означает по определению предела, что выполняется (12.19). ◄

Геометрическая иллюстрация к доказательству теоремы 12.4 представлена на рис. 12.1:

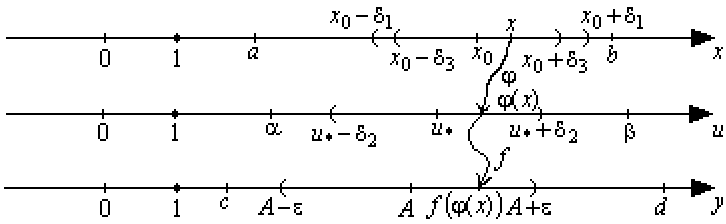

Рис. 12.1

В силу теоремы 12.4 при вычислении пределов сложных функций можно использовать замену переменных.

Пример 12.6. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\cos(x-1)$.

Решение.

$$A=\lim_{x\to 1}\cos(x-1)=\begin{vmatrix}u=x-1\\ u_*=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0\end{vmatrix}=\lim_{u\to 0}\cos u=1\,,$$

ибо $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ (см. (11.14)).

Ранее было доказано (см. (7.35)), что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,. \tag{12.22}$$

Оказывается (см. [9, с. 285]), что при замене в (12.22) переменной $n\in\mathrm{N}$ на переменную $x\in\mathrm{R}$ значение предела не изменится, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ , \tag{12.23}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ . \tag{12.24}$$

Обычно (12.23), (12.24) объединяют в одну формулу

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (12.25)$$

и называют *вторым замечательным пределом.*

Второй замечательный предел можно записать в следующем виде:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e\,. \qquad (12.26)$$

Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left|\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{1}{x},\ x=\dfrac{1}{\alpha}\\ x\to\infty,\ \alpha\to 0\end{array}\right| = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (12.27)$$

и (12.26) следует из (12.25), (12.27).

Второй замечательный предел применяется при раскрытии некоторых неопределённостей типа 1^∞.

Неопределённость типа 1^∞ может возникнуть при нахождении предела функции

$$y = [\varphi(x)]^{\psi(x)},$$

которую называют *показательно-степенной* (или *степенно-показательной*) функцией при условии, что $\varphi(x) > 0$.

Л е к ц и я 13. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Односторонние пределы функции в точке; признак существования предела функции в терминах её односторонних пределов; непрерывность функции в точке; признак непрерывности функции в точке; непрерывность функции на множестве; пример непрерывной функции; основная теорема о непрерывных функциях, следствия из неё; теорема о непрерывности сложной функции; теорема о непрерывности обратной функции; непрерывность основных элементарных функций; непрерывность элементарных функций.

Пусть $x_0 \in \mathrm{R}$, $\delta > 0$.

Определение 13.1. *Левосторонней* δ-*полуокрестностью точки* x_0 называется множество вида $O_\delta^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0]$.

Определение 13.2. *Проколотой левосторонней* δ-*полуокрестностью точки* x_0 называется множество вида $\dot{O}_\delta^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0)$.

Определение 13.3. *Правосторонней* δ-*полуокрестностью точки* x_0 называется множество вида $O_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0+\delta)$.

Определение 13.4. *Проколотой правосторонней* δ-*полуокрестностью точки* x_0 называется множество вида $\dot{O}_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0+\delta)$.

Заметим, что $\dot{O}_\delta^-(x_0) \cap \dot{O}_\delta^+(x_0) = \varnothing$,

$$\dot{O}_\delta^-(x_0) \subset \dot{O}_\delta(x_0), \qquad (13.1)$$

$$\dot{O}_\delta^+(x_0) \subset \dot{O}_\delta(x_0), \qquad (13.2)$$

$$\dot{O}_\delta^-(x_0) \cup \dot{O}_\delta^+(x_0) = \dot{O}_\delta(x_0). \qquad (13.3)$$

Графическая иллюстрация представлена на рис. 13.1.

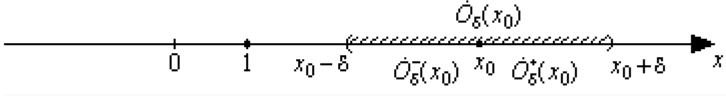

Рис. 13.1

Рассмотрим некоторое множество $\Omega \subset \mathrm{R}$.

Определение 13.5. Точка $x_0 \in \mathrm{R}$ *называется левосторонней предельной точкой множества* Ω, если для

$$\forall \dot{O}_\delta^-(x_0)\ \exists x \in \dot{O}_\delta^-(x_0) \mid x \in \Omega\,. \qquad (13.4)$$

Определение 13.6. Точка $x_0 \in \mathrm{R}$ *называется правосторонней предельной точкой множества* Ω, если для

$$\forall \dot{O}_\delta^+(x_0)\ \exists x \in \dot{O}_\delta^+(x_0) \mid x \in \Omega\,. \qquad (13.5)$$

Точка $x_0 \in \mathrm{R}$, для которой выполняются оба условия (13.4) и (13.5), называется *двусторонней предельной точкой множества* Ω.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Пусть x_0 – левосторонняя предельная точка множества $D(f)$.

Определение 13.7. Точка A называется *левосторонним пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для

$$\forall O_\varepsilon(A)\ \exists \dot{O}_\delta^-(x_0), \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta^-(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A). \quad (13.6)$$

Обозначение: $f(x_0 - 0)$. По определению,

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

(запись $x \to x_0 - 0$ означает, что x стремится к x_0 слева, т.е. x стремится к x_0, оставаясь меньше x_0).

Пусть x_0 – правосторонняя предельная точка множества $D(f)$.

Определение 13.8. Точка A называется *правосторонним пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для

$$\forall O_\varepsilon(A)\ \exists \dot{O}_\delta^+(x_0), \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta^+(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A). \quad (13.7)$$

Обозначение: $f(x_0 + 0)$. По определению,

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

(запись $x \to x_0 + 0$ означает, что x стремится к x_0 справа, т.е. x стремится к x_0, оставаясь больше x_0).

Определение 13.9. Левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке называются *односторонними пределами функции в* этой *точке*.

Замечание 13.1. Если в качестве x_0 выступает число 0, то вместо записей $f(0-0) = \lim\limits_{x \to 0-0} f(x)$, $f(0+0) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$ можно использовать более короткие записи: $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} f(x)$, $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} f(x)$.

Пусть x_0 – двусторонняя предельная точка множества $D(f)$. Тогда можно говорить как об односторонних пределах функции $f(x)$ в точке x_0, так и о пределе функции $f(x)$ в точке x_0 в обычном смысле (чтобы отличать $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ от односторонних пределов, его называют двусторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0).

Установим связь между существованием предела функции в данной точке и существованием её односторонних пределов в этой точке.

Теорема 13.1.

$$\underbrace{\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A}_{(*)} \Leftrightarrow \underbrace{\exists \text{ конечные } f(x_0-0),\ f(x_0+0) \text{ и } f(x_0-0) = f(x_0+0) = A}_{(**)}, \quad (13.8)$$

Необходимость: (*) $\Rightarrow$ (**). Пусть выполняется условие (*). Это означает по определению предела, что для

$$\forall O_\varepsilon(A)\ \exists O_\delta(x_0), \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A),$$

следовательно, в силу включений (13.1), (13.2) для $\forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta^-(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A)$ и для $\forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta^+(x_0) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A)$. Получили:

$$\forall O_\varepsilon(A)\ \exists \dot{O}_\delta^-(x_0), \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta^-(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A),$$

а это означает по определению, что $\exists f(x_0 - 0) = A$. Имеем также:

$$\forall O_\varepsilon(A)\ \exists \dot{O}_\delta^+(x_0), \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta^+(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A),$$

а это означает по определению, что $\exists f(x_0 + 0) = A$.

Достаточность: (**) $\Rightarrow$ (*). Пусть выполняются условия (**). Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. В силу условия $f(x_0 - 0) = A$ получаем: для

$$O_\varepsilon(A)\ \exists \dot{O}_{\delta_1}^-(x_0), \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \mid \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_{\delta_1}^-(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A).$$

В силу условия $f(x_0 + 0) = A$ имеем: для

$$O_\varepsilon(A)\ \exists \dot{O}^{+}_{\delta_2}(x_0), \delta_2=\delta_2(\varepsilon) \mid \forall x\in D(f)\cap \dot{O}^{+}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A).$$

Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ (заметим, что $\delta=\delta(\varepsilon)$, ибо $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$). Тогда $\forall x\in D(f)\cap \dot{O}^{-}_{\delta}(x_0)$ и для $\forall x\in D(f)\cap \dot{O}^{+}_{\delta}(x_0)$, т.е. в силу (13.3) $\forall x\in D(f)\cap \dot{O}_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A)$. Получили:

$$\forall O_\varepsilon(A)\ \exists O_\delta(x_0), \delta=\delta(\varepsilon) \mid \forall x\in D(f)\cap \dot{O}_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A),$$

а это означает по определению, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. ◄

Назовём теорему 13.1 *вторым признаком существования конечного предела функции в точке* (первым признаком существования конечного предела функции в точке была названа теорема 12.1)

К важнейшим понятиям математического анализа относится понятие непрерывности функции.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, $x\in D(f)$. Пусть x_0 – предельная точка множества $D(f)$ и $x_0\in D(f)$.

Определение 13.10. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0, равный значению функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{13.9}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то x_0 называется *точкой непрерывности функции* $f(x)$.

Согласно определению предела функции в точке (см. определение 10.11) непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает следующее:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 \mid \forall x\in D(f): |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{13.10}$$

Запись (13.10) получена из (10.5) заменой A на $f(x_0)$, при этом условие $|x-x_0|>0$, т.е. $x\neq x_0$ из (10.5) опущено, ибо при $x=x_0$ разность $f(x)-f(x_0)$ равна нулю и, следовательно, удовлетворяет неравенству $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$.

Заметим, что при определении предела функции $f(x)$ в точке x_0 её значение в данной точке не рассматривалось (предельная точка x_0 множества $D(f)$ не обязательно принадлежит этому множеству (см. пример 10.1), в этом случае $f(x)$ не определена в точке x_0; но и в случае $x_0\in D(f)$ значение $f(x_0)$ в определении предела функции $f(x)$ в точке x_0 не учитывалось). А при определении непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 значение $f(x_0)$ имеет важное значение.

Согласно геометрическому определению предела функции в точке (см. определение 10.12) непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает следующее: $\forall O_\varepsilon(f(x_0))$

$$\exists O_\delta(x_0), \delta=\delta(\varepsilon) \mid \forall x\in D(f)\cap O_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(f(x_0)). \tag{13.11}$$

Используя (13.9) и теорему 12.1, приходим к *первому признаку непрерывности функции в точке*:

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \ \Leftrightarrow\ f(x)=f(x_0)+\alpha(x), \tag{13.12}$$

где $\alpha(x)$ – б.м.в. в точке x_0.

Используя (13.9) и теорему 13.1, приходим ко *второму признаку непрерывности функции в точке*:

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \ \Leftrightarrow$$
$$\exists \text{ конечные } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ и } f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0). \tag{13.13}$$

Определение 13.11. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *слева*, если $\exists f(x_0-0)=f(x_0)$.

Определение 13.12. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *справа*, если $\exists f(x_0+0)=f(x_0)$.

В силу (13.13) получаем *третий признак непрерывности функции в точке*:

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \ \Leftrightarrow$$
$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \text{ слева и справа.} \tag{13.14}$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. выполняется (13.10). Положим $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$. Величина Δx называется приращением аргумента в точке x_0, а величина Δy – приращением функции в точке x_0 (обозначения Δx, Δy нужно рассматривать как цельные символы, не отделяя Δ от x и y). Соотношение (13.10) принимает следующий вид

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 \mid \forall x\in D(f): |\Delta x|<\delta \Rightarrow |\Delta y|<\varepsilon,$$

а это означает, по определению предела, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 . \qquad (13.15)$$

Следовательно, определение непрерывности функции в точке можно сформулировать в следующем виде.

Определение 13.13. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если приращение Δy этой функции в данной точке, соответствующее приращению аргумента Δx, является б.м.в. при $\Delta x \to 0$, другими словами, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 13.1. Пусть $f(x) = \sin x$, $D(f) = \mathrm{R}$. Покажем, что функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathrm{R}$. При доказательстве первого замечательного предела было установлено (см. (11.15)), что $|\sin x| \le |x|$, $\forall x \in \dot{O}_{\frac{\pi}{2}}(0)$, следовательно, $|\sin x| \le |x|$, $\forall x \in O_{\frac{\pi}{2}}(0)$, ибо $\sin 0 = 0$. Но тогда

$$|\sin x| \le |x|, \ \forall x \in \mathrm{R}, \qquad (13.16)$$

ибо $|\sin x| \le 1$, $\forall x \in \mathrm{R}$ и $|x| \ge \frac{\pi}{2} > 1$, $\forall x \in \mathrm{R} \setminus O_{\frac{\pi}{2}}(0)$.

Используя формулу

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

получаем:

$$f(x) - f(x_0) = \sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}.$$

Возьмём $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \varepsilon$. Тогда, используя (13.16) и неравенство $|\cos x| \le 1$, $\forall x \in \mathrm{R}$, имеем для $\forall x : |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| = 2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le$$

$$\le 2\cdot\left|\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot 1 = |x - x_0| < \delta = \varepsilon .$$

Получили:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

а это означает по определению предела, что $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в произвольно взятой точке $x_0 \in \mathrm{R}$.

Определение 13.14. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на* некотором *множестве* $D_1 \subseteq D(f)$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

В частности, если функция $f(x)$ задана на интервале (a,b), то эта функция называется непрерывной на данном интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала; если функция $f(x)$ задана на сегменте $[a,b]$, то эта функция называется непрерывной на данном сегменте, если она непрерывна в каждой внутренней точке сегмента $[a,b]$ и, кроме того, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Пример 13.1 показывает, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на всей области определения $D(f) = \mathrm{R}$.

Докажем *основную теорему о непрерывных функциях*, согласно которой в результате арифметических операций над функциями, непрерывными в данной точке, получаются функции, которые тоже непрерывны в этой точке.

Теорема 13.2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны в точке x_0, т.е.

$$\exists \lim_{x \to x_0} u(x) = u(x_0), \qquad (13.17)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} v(x) = v(x_0). \qquad (13.18)$$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное, т.е. функции $u(x)+v(x)$, $u(x)-v(x)$, $u(x)v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ тоже непрерывны в точке x_0, при этом, в случае частного предполагается, что $v(x_0) \ne 0$.

► Докажем, например, что функция $w(x) = u(x) + v(x)$ непрерывна в точке x_0 (оставшаяся часть теоремы доказывается аналогично). Используя (13.17), (13.18) и основную теорему о пределах функций (см. теорему 12.2), имеем:

$$\lim_{x \to x_0} w(x) = \lim_{x \to x_0}\left[u(x) + v(x)\right] = \lim_{x \to x_0} u(x) + \lim_{x \to x_0} v(x) =$$

$= u(x_0) + v(x_0) = w(x_0)$.

Получили: $\lim\limits_{x\to x_0} w(x) = w(x_0)$, а это означает по определению, что функция $w(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Следствие 13.1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на множестве $D_1 \subseteq D(u)\cap D(v)$, то их сумма, разность, произведение и частное непрерывны на множестве D_1 , при этом, в случае частного предполагается, что $v(x)\neq 0$, $\forall x\in D_1$.

Используя теорему 13.2 и метод математической индукции, приходим к следующему утверждению.

Теорема 13.3. Сумма и произведение любого конечного числа функций $u_1(x), u_2(x),..., u_s(x)$, непрерывных в точке x_0 , есть функции, непрерывные в точке x_0 .

Следствие 13.2. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то для $\forall n\in \mathrm{N}$, $n\geq 2$ функция $\left[f(x)\right]^n$ непрерывна в точке x_0 .

Замечание 13.2. Функция $f(x) = x$ непрерывна в каждой точке $x_0\in \mathrm{R}$.

Действительно, $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$ и $\lim\limits_{\Delta x\to o}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to o}\Delta x = 0$, что означает, согласно определению 13.13, непрерывность функции $f(x) = x$ в точке x_0 .

Замечание 13.3. Степенная функция $f(x) = x^n$, $n\in \mathrm{N}$, $n\geq 2$ непрерывна на множестве R .

Замечание 13.4. Функция $f(x) = c = \mathrm{const}$ непрерывна в каждой точке $x_0\in \mathrm{R}$.

Действительно, для этой функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \; = c - c = 0$, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to o}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to o} 0 = 0$. Получили: $\lim\limits_{\Delta x\to o}\Delta y = 0$, а это означает согласно определению 13.13, что функция $f(x) = c$ непрерывна в точке x_0 .

Следствие 13.3. Если функции $u_1(x), u_2(x),..., u_s(x)$ непрерывны в точке x_0, то их линейная комбинация $\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + ... + \lambda_s u_s(x)$ с любыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_s\in \mathrm{R}$ непрерывна в точке x_0 .

Следствие 13.3 вытекает из замечания 13.4 и теорем 13.2, 13.3.

Следствие 13.4. Если функции $u_1(x), u_2(x),..., u_s(x)$ непрерывны на множестве $D_1 \subseteq \bigcap\limits_{k=1}^{s} D(u_k)$, то их линейная комбинация $\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + ... + \lambda_s u_s(x)$ с любыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_s\in \mathrm{R}$ непрерывна на множестве D_1 .

Докажем теорему о непрерывности суперпозиции двух непрерывных функций.

Теорема 13.4. Пусть для сложной функции $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ выполняются следующие условия:

а) функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , т.е.

$$\exists \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0)\,; \qquad (13.19)$$

б) функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, т.е.

$$\exists \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)\,. \qquad (13.20)$$

Тогда сложная функция $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ непрерывна в точке x_0 , т.е.

$$\exists \lim_{x\to x_0} f\left(\varphi(x)\right) = f\left(\varphi(x_0)\right). \qquad (13.21)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (13.20) для числа ε

$$\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \mid \forall u\in D(f): \left|u - u_0\right| < \delta_1 \Rightarrow \left|f(u) - f(u_0)\right| < \varepsilon\,. \qquad (13.22)$$

В силу (13.19) для числа $\delta_1 > 0$ $\exists \delta = \delta(\delta_1) > 0 \mid$ $\forall x\in D(\varphi): \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|\varphi(x) - \varphi(x_0)\right| < \delta_1$, т.е. $\left|u - u_0\right| < \delta_1$, следовательно, в силу (13.22) $\left|f(u) - f(u_0)\right| < \varepsilon$. Заметим, что $\delta = \delta(\varepsilon)$, ибо $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$; $D(F) = D(\varphi)$. Получили:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x\in D(F): \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f\left(\varphi(x)\right) - f\left(\varphi(x_0)\right)\right| < \varepsilon\,,$$

а это означает по определению предела, что имеет место (13.21).

Следствие 13.5. Пусть для сложной функции $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ выполняются следующие условия:

1) функция $u = \varphi(x)$ непрерывна на множестве $D_1 \subseteq D(\varphi)$;

2) функция $y = f(u)$ непрерывна на множестве $\Omega_1 = \varphi(D_1)$ (Ω_1 – образ множества D_1 при отображении φ).

Тогда сложная функция $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ непрерывна на множестве D_1.

Следствие 13.6. Суперпозиция любого числа непрерывных в точке (на множестве) функций есть непрерывная в этой точке (на этом множестве) функция.

Следствие 13.6 получается из теоремы 13.4 с помощью метода математической индукции.

Соотношение (13.21) можно записать в силу (13.19) в виде

$$\lim_{x \to x_0} f\left(\varphi(x)\right) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right), \qquad (13.22)$$

в частности, в случае $\varphi(x) = x$

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right). \qquad (13.23)$$

(функция $\varphi(x) = x$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathrm{R}$ (см. замечание 13.2)).

Соотношения (13.22), (13.23) показывают, что знак предела и знак непрерывной функции можно менять местами.

Пример 13.2. Найти предел функции $F(x) = \sin^5 x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Функция $y = \sin^5 x$ является сложной функцией, ибо её можно записать в виде суперпозиции двух функций $y = u^5$, $u = \sin x$, каждая из которых непрерывна на R (см. замечание 13.3 и пример 13.1), в частности, непрерывна в точке $x_0 = 0$. Следовательно, по теореме 13.4 сложная функция $y = \sin^5 x$ непрерывна в точке $x_0 = 0$. Тогда

$$\lim_{x \to 0} \sin^5 x = \left(\lim_{x \to 0} \sin x\right)^5 = \left(\sin 0\right)^5 = 0^5 = 0.$$

Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна на $D(f)$. Тогда согласно теореме 9.1 для этой функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая тоже строго монотонна на $D(f^{-1}) = E(f)$.

Справедливо следующее утверждение [11, с. 172].

Теорема 13.5. Если строго монотонная на $D(f)$ функция $y = f(x)$ непрерывна на $D(f)$, то обратная для неё функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна на $D(f^{-1}) = E(f)$.

Теоремы 13.2, 13.4, 13.5 позволяют доказать непрерывность основных элементарных функций.

Теорема 13.6. Каждая из основных элементарных функций непрерывна на своей области определения.

► При доказательстве ограничимся случаем тригонометрических и обратных тригонометрических функций. В примере 13.1 было показано, что функция $y = \sin x$ непрерывна на $D(y) = \mathrm{R}$. Используя формулу $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\forall\alpha \in \mathrm{R}$, функцию $y = \cos x$ можно записать в виде $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, т.е. в виде суперпозиции двух функций $y = \sin u$, $u = x + \dfrac{\pi}{2}$, каждая из которых непрерывна на R (см. пример 13.1, замечания 13.2, 13.4 и следствие 13.3). Следовательно, в силу теоремы 13.4 функция $y = \cos x$ непрерывна на $D(y) = \mathrm{R}$. В силу теоремы 13.2 функция $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна на $D(y) = \mathrm{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathrm{Z}\right\}$, а функция $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна на $D(y) = \mathrm{R} \setminus \left\{\pi k, k \in \mathrm{Z}\right\}$. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывны на своих областях определения в силу теоремы 13.5. ◄

Непрерывность степенной функции $y = x^\alpha$ в случае $\alpha = n$, $n \in \mathrm{N}$, показана выше (см. замечания 13.2, 13.3). Доказательство непрерывности степенной функции в общем случае см. в [11, с.156].

Доказательство непрерывности показательной функции $y = a^x$ см. в [9, с. 327].

Непрерывность логарифмической функции $y = \log_a x$ следует из непрерывности показательной функции в силу теоремы 13.5, ибо логарифмическая функция является обратной для показательной функции.

Гиперболические функции $y = \operatorname{sh} x,\ y = \operatorname{ch} x,\ y = \operatorname{th} x,\ y = \operatorname{cth} x$ непрерывны в силу непрерывности показательной функции $y = e^x$ и теорем 13.2, 13.4.

Следствие 13.7. Предел любой основной элементарной функции в произвольной точке из её области определения равен значению этой функции в данной точке.

Например,

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Исходя из определения элементарной функции (см. определение 10.1) и используя теоремы 13.2, 13.4 и следствия к ним, приходим к следующему утверждению.

Теорема 13.7. Каждая элементарная функция непрерывна на своей области определения.

Следствие 13.8. Предел любой элементарной функции в произвольной точке из её области определения равен значению этой функции в данной точке.

Например,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^4 x-\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^4\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{2\cdot 1^4-0}{1}=2\,.$$

Лекция 14. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Точки разрыва функции, их классификация; вертикальные асимптоты графика функции; определение предела функции по Гейне; первая и вторая теоремы Больцано–Коши; первая теорема Вейерштрасса; точная верхняя и точная нижняя грани функции на отрезке; вторая теорема Вейерштрасса.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, $x\in D(f)$. Пусть x_0 – предельная точка множества $D(f)$. Заметим (см. лекцию 10), что возможны как случай $x_0\in D(f)$, так и случай $x_0 \overline{\in} D(f)$.

Определение 14.1. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Если x_0 – точка разрыва функции $f(x)$, то говорят, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 или имеет (терпит) разрыв в точке x_0.

Используя второй признак непрерывности функции в точке (см. лекцию 13):

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \iff$$
$$\exists \text{ конечные } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ и } f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0), \quad (14.1)$$

приходим к следующему выводу: точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда нарушается хотя бы одно из условий в соотношении (14.1) после знака равносильности.

Возможные следующие ситуации.

1. Существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0), f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, но не определено $f(x_0)$, т.е. $x_0 \overline{\in} D(f)$.

В этом случае точка x_0 называется *устранимой точкой разрыва функции* $f(x)$. Такое название объясняется тем, что можно рассмотреть "расширенную" функцию вида

$$;\qquad \tilde f(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in D(f),\\ A,\ x=x_0,\end{cases}$$

где A$=f(x_0-0)=f(x_0+0)$. Функция $\tilde f(x)$ непрерывна в точке x_0, ибо $\tilde f(x_0-0)=\tilde f(x_0+0)=\tilde f(x_0)=A$, т.е. доопределив функцию $f(x)$ в точке x_0, мы устранили её разрыв в данной точке.

Пример 14.1. Рассмотрим функцию $f(x)=(\sin x)/x$, $D(f)=\mathrm{R}\setminus\{0\}$. Точка $x_0=0$ – предельная точка множества $D(f)$, $x_0 \overline{\in} D(f)$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left[(\sin x)/x\right]=1$ (см. (11.11)), то в силу теоремы 13.1 $\exists f(0-0), f(0+0)$ и $f(0-0)=f(0+0)=1$. Следовательно, $x_0=0$ – устранимая точка разрыва функции $f(x)$. "Расширенная" функция

$$;\ \tilde f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x},\ x\in \mathrm{R}, x\neq 0,\\ 1,\ x=0\end{cases}$$

непрерывна в точке $x_0=0$ (рис. 14.1).

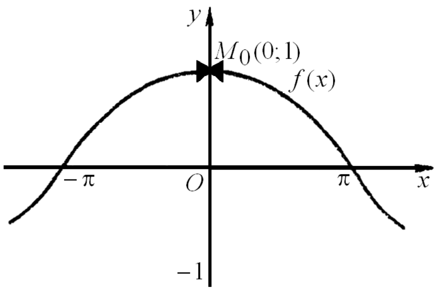

Рис. 14.1

Заметим, что $M_0 \overline{\in} \Gamma_f$, но $M_0\in \Gamma_{\tilde f}$.

2. Существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, но $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$.

В этом случае точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* (или *точкой конечного разрыва*) *функции* $f(x)$, а величина $h = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ *– скачком функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

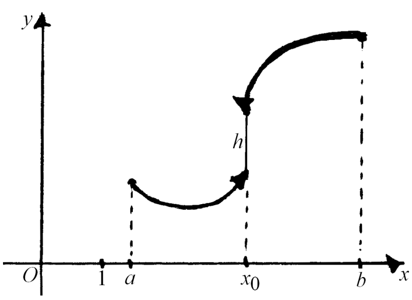

Рис 14.2

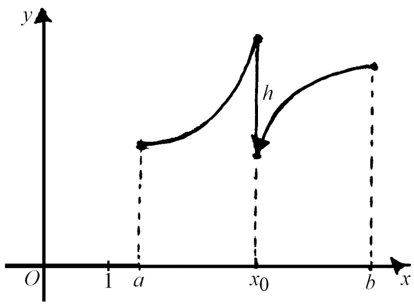

Рис. 14.3

Заметим, что на рис. 14.2 $x_0 \notin D(f)$, $h > 0$; на рис. 14.3 $x_0 \in D(f)$, $h < 0$.

3. Хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ равен бесконечности (неважно какого знака) или не существует (рис. 14.4).

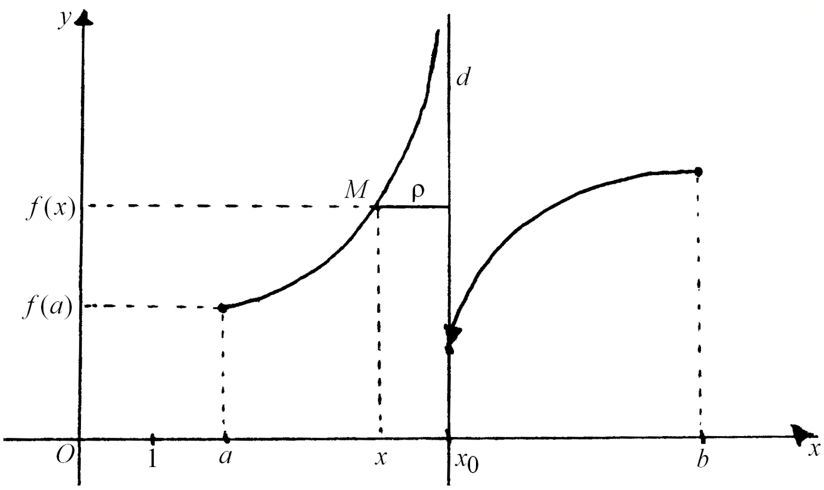

Рис. 14.4

В этом случае точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* (или в случае, когда хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ равен бесконечности, *точкой бесконечного разрыва*) *функции* $f(x)$.

Пусть, например, $f(x_0-0) = +\infty$ (рис. 14.4).

Заметим, что расстояние $\rho = \rho(M,d)$ от точки $M(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$ до прямой $d : x = x_0$ равно $|x - x_0|$, следовательно, $\rho(M,d) \to 0$ при $x \to x_0 - 0$. А это означает, согласно определению 10.3, что прямая $d : x = x_0$ есть асимптота графика функции $y = f(x)$. Её называют *левосторонней вертикальной асимптотой* графика функции.

Вывод 14.1. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$), то прямая $d : x = x_0$ есть левосторонняя вертикальная асимптота графика функции $y = f(x)$.

Вывод 14.2. Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$), то прямая $d : x = x_0$ есть *правосторонняя вертикальная асимптота* графика функции $y = f(x)$.

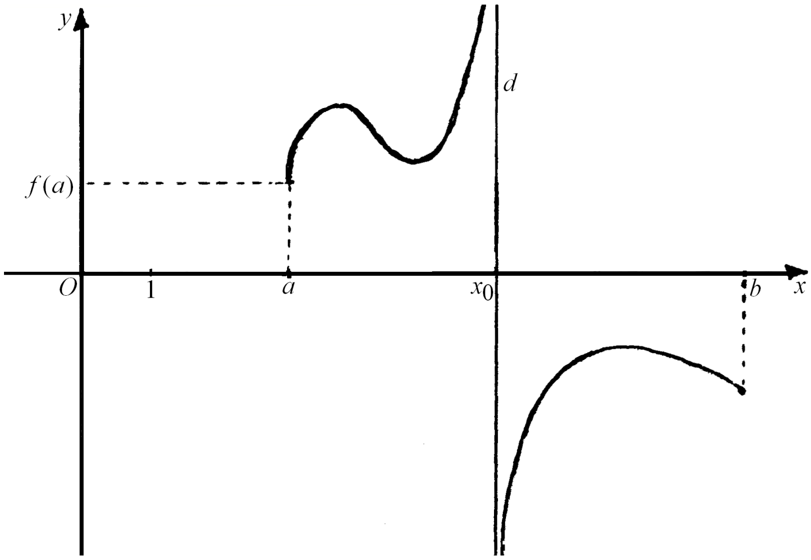

Рис. 14.5

Вывод 14.3. Если оба односторонних предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 равны бесконечности (неважно каких знаков), то прямая $d: x = x_0$ есть *двусторонняя вертикальная асимптота* графика функции $f(x)$ (рис. 14.5).

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset D(f)$ значений аргумента x, такую что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, и соответствующую последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функций $f(x)$. Ставится вопрос о поведении последовательности $\{f(x_n)\}$ в смысле сходимости.

Замечание 14.1. Необходимо предположить, что $x_n \ne x_0$, $\forall n \in \mathrm{N}$, ибо: а) возможно, что $x_0 \overline{\in} D(f)$ и соответствующее значение $f(x_n)$ в точке $x_n = x_0$ не существует; б) даже если $x_0 \in D(f)$, то значение $f(x_0)$ не участвует в определении предела функции (см. определение 10.9).

Теорема 14.1. Если

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A, \tag{14.2}$$

то для $\forall\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \ne x_0$, $\forall n \in \mathrm{N}$, такой что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \tag{14.3}$$

выполняется:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{14.4}$$

◀ Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (14.2) для

$$O_\varepsilon(A)\ \exists O_\delta(x_0), \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D(f) \cap \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A). \tag{14.5}$$

В силу (14.3) для

$$O_\delta(x_0)\ \exists N = N(\delta) \mid \forall n > N \Rightarrow x_n \in O_\delta(x_0).$$

Заметим, что $N = N(\varepsilon)$, ибо $\delta = \delta(\varepsilon)$. По условию теоремы $x_n \in D(f)$, $x_n \ne x_0$, $\forall n \in \mathrm{N}$. Имеем: для

$$O_\delta(x_0)\ \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow x_n \in D(f) \cap \dot{O}_\delta(x_0),$$

следовательно, в силу (14.5) $f(x_n) \in O_\varepsilon(A)$. Итак, для $\forall O_\varepsilon(A)$ $\exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow f(x_n) \in O_\varepsilon(A)$, а это означает, по определению предела, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. ▶

Оказывается, что верно и обратное утверждение (см. [9, с. 265]).

Теорема 14.2. Пусть для $\forall\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \ne x_0$, $\forall n \in \mathrm{N} \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, где $A = \mathrm{const}$, не зависящая от выбора последовательности $\{x_n\}$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

В силу теорем 14.1, 14.2 можно дать следующее определение предела функции в точке, равносильное определению 10.11.

Определение 14.2. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (или при x, стремящемся к x_0), если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, сходящейся к x_0 и состоящей из чисел x_n, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции $f(x)$ сходится к числу A.

Определение 10.11 называют определением предела функции по Коши, а определение 14.2 – определением предела функции по Гейне.

Определение 14.2 удобно использовать, когда исследуется вопрос о существовании предела функции $f(x)$ в точке x_0. Действительно, если удаётся построить хотя бы одну последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0, такую, что последовательность $\{f(x_n)\}$ не имеет предела, то функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0; или если удаётся построить две различные последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, сходящиеся к x_0, такие, что последовательности $\{f(x_n')\}$, $\{f(x_n'')\}$ имеют различные пределы, то функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0.

Рассмотрим свойства непрерывных на отрезке функций.

Теорема 14.3 (*первая теорема Больцано-Коши*).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in (a,b) \mid f(c) = 0$.

◤ Пусть, для определённости, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (случай $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ исследуется аналогично). Рассмотрим середину отрезка $[a,b]$, т.е. точку $d = (a+b)/2$. Может оказаться, что $f(d) = 0$. Тогда теорема доказана, ибо в качестве c можно взять d. Пусть $f(d) \neq 0$. Разобьём отрезок $[a,b]$ пополам: $[a,d]$, $[d,b]$. Выберем из полученных отрезков тот, для которого на левом конце функция принимает отрицательное значение, а на правом конце – положительное значение (если $f(d) > 0$, то в качестве такого отрезка выступает $[a,d]$; если $f(d) < 0$, то в качестве такого отрезка выступает $[d,b]$). Обозначим его через $[a_1,b_1]$. По условию $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Рассмотрим середину отрезка $[a_1,b_1]$, т.е. точку $d_1 = (a_1+b_1)/2$. Если окажется, что $f(d_1) = 0$, то теорема будет доказана (при $c = d_1$). Пусть $f(d_1) \neq 0$. Разобьём отрезок $[a_1,b_1]$ на два отрезка $[a_1,d_1]$ и $[d_1,b_1]$ и обозначим через $[a_2,b_2]$ тот из них, для которого $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$. Продолжая этот процесс далее, мы либо через конечное число шагов укажем середину очередного отрезка, в которой функция обращается в нуль, тогда теорема будет доказана; либо получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга замкнутых промежутков:

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_{n-1},b_{n-1}] \supset [a_n,b_n] \supset \ldots,$$

при этом

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \ \forall n \in \mathrm{N},$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Мы оказались в условиях леммы о вложенных промежутках (см. лемму 7.1), в силу которой существу-
ет единственная точка c, принадлежащая всем этим промежуткам, причём

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c, \ \lim_{n\to\infty} b_n = c. \tag{14.6}$$

По построению, выполняются условия

$$f(a_n) < 0, \ f(b_n) > 0, \ \forall n \in \mathrm{N}. \tag{14.7}$$

По условию теоремы функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, в частности, она непрерывна в точке c, т.е. $\exists \lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$. Следовательно, в силу (14.6) и теоремы 14.1

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c), \ \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c). \tag{14.8}$$

Переходя к пределу в неравенствах (14.7) и используя (14.8), получаем в силу теоремы о предельном переходе в неравенстве (см. теорему 7.1), что $f(c) \le 0$ и $f(c) \ge 0$, следовательно, $f(c) = 0$. Заметим, что $c \in (a,b)$, ибо $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.
◢

Условимся называть теорему 14.3 *теоремой о существовании нуля функции* (значение $x_* \in D(f)$ называется *нулём функции* $f(x)$, если $f(x_*) = 0$).

Геометрическая иллюстрация теоремы 14.3 представлена на рис. 14.6.

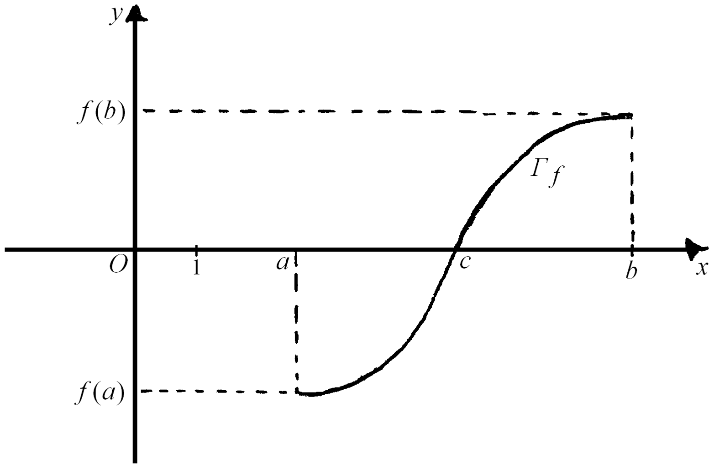

Рис. 14.6

Теорема 14.4 (*вторая теорема Больцано-Коши*).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения: $f(a) = A$, $f(b) = B$ и $A \neq B$. Тогда для любого числа C, лежащего между A и B, найдётся такая точка $c \in (a,b)$, что $f(c) = C$.

Пусть, для определённости, $A < B$ (случай $A > B$ рассматривается аналогично). Пусть $A < C < B$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - C$, $x \in [a,b]$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, как разность двух непрерывных на $[a,b]$ функций. Далее, $\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$, $\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$, т.е. функция $\varphi(x)$ принимает на концах отрезка $[a,b]$ значения разных знаков. Следовательно, по первой теореме Больцано-Коши $\exists c \in (a,b) \mid \varphi(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$, откуда $f(c) = C$.

Теорему 14.4 называют *теоремой о промежуточном значении непрерывной функции.*

Геометрическая иллюстрация теоремы 14.4 представлена на рис. 14.7.

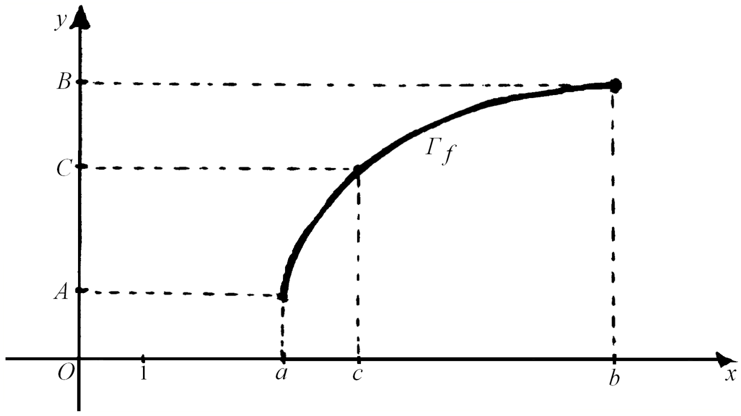

Рис. 14.7

В силу теоремы 14.4 непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$, переходя от одного значения к другому, принимает (хотя бы один раз) каждое промежуточное между ними значение. Иными словами, все значения непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ сплошь заполняют некоторый отрезок $[\alpha,\beta]$ (на рис. 14.7 в качестве $[\alpha,\beta]$ выступает отрезок $[A,B]$).

Замечание 14.1. Пусть для последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ выполняется условие

$$u_n \geq v_n, \ \forall n \in \mathrm{N}. \tag{14.9}$$

Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Действительно, имеем: для $\forall E > 0 \ \exists N = N(E) \mid \ \forall n > N \Rightarrow v_n > E$, следовательно, в силу (14.9) $u_n > E$, а это означает, по определению предела, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Замечание 14.2. Пусть для последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ выполняется условие

$$u_n \le v_n \,, \ \forall n \in \mathrm{N} \,. \qquad (14.10)$$

Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Действительно, имеем: для $\forall E < 0 \ \exists N = N(E) \mid \ \forall n > N \Rightarrow v_n < E$, следовательно, в силу (14.10) $u_n < E$, а это означает, по определению предела, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Теорема 14.5 (*первая теорема Вейерштрасса*).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке, т.е.

$$\exists M, m \in \mathrm{R} \mid m \le f(x) \le M \ , \ \forall x \in [a,b] \,. \qquad (14.11)$$

Докажем, что функция $f(x)$ ограничена сверху на отрезке $[a,b]$ (ограниченность снизу доказывается аналогично).

: функция $f(x)$ не является ограниченной сверху на отрезке $[a,b]$. Тогда для

$$\forall n \in \mathrm{N} \ \ \exists x_n \in [a,b] \mid f(x_n) \ge n \,. \qquad (14.12)$$

Полученная последовательность $\{x_n\}$ ограничена, ибо $a \le x_n \le b$, $\forall n \in \mathrm{N}$. Следовательно, в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса (см. теорему 8.2) из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность: $\exists \left\{x_{n_k}\right\} \subset \{x_n\} \mid$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \,, \qquad (14.13)$$

при этом, в силу следствия 7.3, $x_0 \in [a,b]$. По условию теоремы функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, в частности, она непрерывна в точке x_0 , т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Следовательно, в силу (14.13) и теоремы 14.1

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0) \,. \qquad (14.14)$$

С другой стороны, в силу (14.12) $f\left(x_{n_k}\right) \ge n_k \ \ \forall k \in \mathrm{N}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то в силу замечания 14.1

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = +\infty \,,$$

что противоречит (14.14). .

Теорему 14.5 называют *теоремой об ограниченности непрерывной функции.*

Замечание 14.3. Из непрерывности функции на интервале (или полуинтервале) не вытекает её ограниченность на этом интервале (полуинтервале).

Пример 14.2. Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на интервале $(0;1)$, но не является ограниченной на нём, ибо $\lim\limits_{x\to 0+0} (1/x) = +\infty$ (см. (10.13)).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда в силу первой теоремы Вейерштрасса её область значений

$$E(f) = \left\{ y \in \mathrm{R} \mid y = f(x), x \in [a,b] \right\}$$

является ограниченным множеством. Следовательно, в силу теорем 3.1, 3.2 множество $E(f)$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани:

$$M^* = \sup E(f) \,, \ m_* = \inf E(f) \,. \qquad (14.15)$$

Равенства (14.15) удобно записывать в виде

$$M^* = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \,, \ m_* = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

или в виде

$$M^* = \sup_{a\le x\le b} f(x) \,, \ m_* = \inf_{a\le x\le b} f(x) \,.$$

Определение 14.3. *Точной верхней гранью функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ называется точная верхняя грань множества всех значений этой функции на данном отрезке (т.е. число M^*).

Определение 14.4. *Точной нижней гранью функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ называется точная нижняя грань множества всех значений этой функции на данном отрезке (т.е. число m_*).

Теорема 14.6. (*вторая теорема Вейерштрасса*).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда она достигает на этом отрезке своих точной верхней и точной нижней граней, т.е.

$$\exists x^*, x_* \in [a,b] \mid f(x^*) = \sup_{x\in[a,b]} f(x),\ f(x_*) = \inf_{x\in[a,b]} f(x). \qquad (14.16)$$

► Докажем, что функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a,b]$ своей точной верхней грани M^*. ПП: M^* не достигается, т.е.

$$f(x) < M^*,\ \forall x \in [a,b]. \qquad (14.17)$$

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{M^* - f(x)}.$$

Заметим, что в силу (14.17) $\varphi(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$ и в силу замечания 13.4 и следствия 13.1 $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда по первой теореме Вейерштрасса функция $\varphi(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, в частности, ограничена сверху на $[a,b]$, т.е. $\exists \nu > 0 \mid \varphi(x) \le \nu$, $\forall x \in [a,b]$. Для $\forall x \in [a,b]$ имеем:

$$\frac{1}{M^* - f(x)} \le \nu \Rightarrow M^* - f(x) \ge \frac{1}{\nu} \Rightarrow f(x) \le M^* - \frac{1}{\nu}.$$

Получили: $f(x) \le M^* - \dfrac{1}{\nu}$, $\forall x \in [a,b]$, т.е. число $M_1 = M^* - \dfrac{1}{\nu} < M^*$ является верхней границей функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а это противоречит тому, что M^* есть точная верхняя грань (т.е. наименьшая из всех верхних границ) функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. $\overline{\text{ПП}}$.

Докажем, что функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a,b]$ своей точной нижней грани m_*. ПП: m_* не достигается, т.е.

$$f(x) > m_*,\ \forall x \in [a,b]. \qquad (14.18)$$

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ вспомогательную функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{f(x) - m_*}.$$

Заметим, что в силу (14.18) $\psi(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$ и $\psi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Следовательно, по первой теореме Вейерштрасса функция $\psi(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, в частности, ограничена сверху на $[a,b]$, т.е. $\exists \mu > 0 \mid \psi(x) \le \mu$, $\forall x \in [a,b]$. Для $\forall x \in [a,b]$ имеем:

$$\frac{1}{f(x) - m_*} \le \mu \Rightarrow f(x) - m_* \ge \frac{1}{\mu} \Rightarrow f(x) \ge m_* + \frac{1}{\mu}.$$

Получили: $f(x) \ge m_* + \dfrac{1}{\mu}$, $\forall x \in [a,b]$, т.е. число $m_1 = m_* + \dfrac{1}{\mu} > m_*$ является нижней границей функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а это противоречит тому, что m_* есть точная нижняя грань (т.е. наибольшая из всех нижних границ) функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. $\overline{\text{ПП}}$. ◄

Так как непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ достигает на нём своих точной верхней и точной нижней граней, то оправдана следующая терминология: числа

$$M^* = \sup_{x\in[a,b]} f(x),\ m_* = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

называются соответственно *наибольшим* (*максимальным*) и *наименьшим* (*минимальным*) значениями функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Обозначение:

$$M^* = \max_{x\in[a,b]} f(x),\ m_* = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Тогда теорему 14.6 можно сформулировать в виде: непрерывная на отрезке функция достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений.

Замечание 14.4. В силу теорем 14.4, 14.6 множество значений непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ сплошь заполняет отрезок $\left[m_*, M^*\right]$, т.е. $E(f)=\left[m_*, M^*\right]$.

Геометрическая иллюстрация теоремы 14.6 представлена на рис. 14.8.

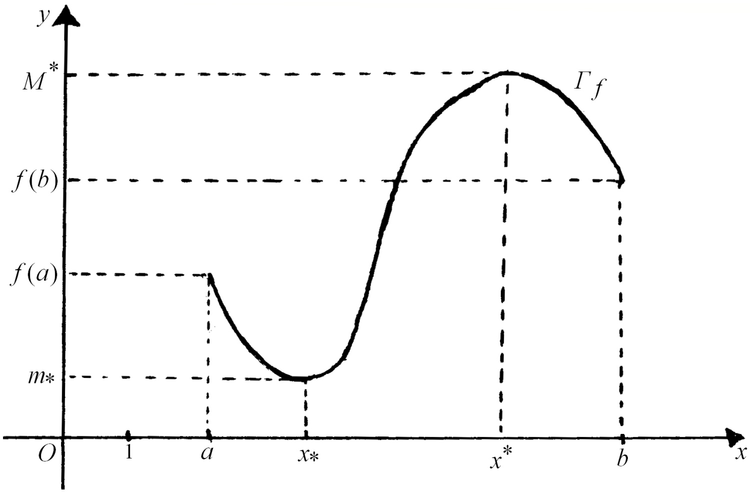

Рис. 14.8

Замечание 14.5. Для функции, непрерывной на интервале (или полуинтервале), утверждение, аналогичное теореме 14.6, неверно.

Например, функция $f(x)=1/x$ непрерывна на интервале $(0;1)$. Для неё $m_* = \inf\limits_{x\in(0;1)} f(x)=1$, но m_* не достигается; точная верхняя грань на интервале $(0;1)$ не существует, ибо $f(x)$ является неограниченной на интервале $(0;1)$ (см. пример 14.2).

Лекция 15. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Производная функции в точке, её механический смысл; односторонние производные функции в точке; признак существования производной функции в точке в терминах её односторонних производных в этой точке; геометрический смысл производной функции в точке; уравнения касательной и нормали к графику функции в данной точке; дифференцируемость функции в точке, дифференциал функции в точке; связь между дифференцируемостью и существованием производной функции в данной точке; геометрический смысл дифференциала функции в точке; связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в данной точке; дифференцируемость функции на множестве; примеры вычисления производных.

При изучении различных процессов окружающего нас мира необходимо знать скорость течения таких процессов, т.е. скорость изменения функций, описывающих эти процессы. В связи с этим вводится одно из фундаментальных понятий математического анализа – понятие производной функции.

Рассмотрим некоторое множество $\Omega \subset \mathrm{R}$.

Определение 15.1. Точка $x_0 \in \Omega$ называется *внутренней точкой множества* Ω, если существует δ – окрестность этой точки, целиком содержащаяся в Ω.

Определение 15.2. Множество Ω называется *открытым множеством*, если каждая его точка является внутренней точкой этого множества, т.е. для $\forall x \in \Omega \; \exists\, O_\delta(x), \delta = \delta(x) \,|\, O_\delta(x) \subset \Omega$.

Пусть дана функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$ и x_0 – внутренняя точка множества $D(f)$, т.е. $\exists\, O_\delta(x_0) \,|\, O_\delta(x_0) \subset D(f)$.

Придадим x_0 приращение Δx, т.е. рассмотрим точку $x_0 + \Delta x$ (приращение Δx должно быть достаточно малым, а именно, таким, чтобы $x_0 + \Delta x \in O_\delta(x_0)$; приращение Δx может быть как положительным, так и отрицательным). Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Число Δy называется *приращением функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0, *соответствующим приращению аргумента* Δx.

Величина Δy показывает насколько изменилось значение функции при переходе из точки x_0 в точку $x_0 + \Delta x$. Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – это средняя скорость изменения функции $y = f(x)$ при изменении её аргумента на участке от x_0 до $x_0 + \Delta x$, а величина

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{15.1}$$

равна мгновенной скорости изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0. В различных прикладных задачах функция $y = f(x)$ описывает некоторый процесс, и важно знать скорость течения этого процесса, т.е. возникает необходимость рассматривать величины вида (15.1). В связи с этим введём следующее определение.

Определение 15.3. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется конечный предел отношения приращения этой функции в данной точке к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно использовать любой из символов:

$$f'(x_0),\; y'(x_0),\; \frac{df(x_0)}{dx},\; \frac{dy(x_0)}{dx},\; \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0},\; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, Df(x_0),\; Dy(x_0).$$

Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{15.2}$$

Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна мгновенной скорости изменения этой функции в данной точке. В этом заключается механический смысл производной (в широком смысле).

Пусть, например, $s = s(t)$ – закон неравномерного прямолинейного движения материальной точки ($s(t)$ – путь, пройденный точкой к моменту времени t). Требуется определить мгновенную скорость движения материальной точки в фиксированный момент времени t_0. Придадим t_0 приращение Δt, тогда $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ – путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$:

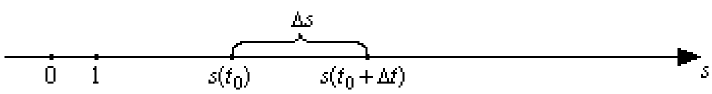

Рис. 15.1

Средняя скорость движения материальной точки на временном промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ равна $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, а её мгновенная скорость $v(t_0)$ выражается формулой

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

если такой предел существует. По определению производной

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0),$$

следовательно,

$$v(t_0) = s'(t_0), \tag{15.3}$$

т.е. мгновенная скорость движения материальной точки в момент времени t_0 равна производной закона движения этой точки в момент времени t_0.

Отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

называется *разностным отношением функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0. Это отношение при фиксированном x_0 представляет собой функцию аргумента Δx:

$$\varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $\varphi(\Delta x)$ определена для $\forall \Delta x \in \dot{O}_\delta(0)$, ибо $x_0 + \Delta x \in O_\delta(x_0) \subset D(f)$ при любом $\Delta x \in \dot{O}_\delta(0)$. Точка $\Delta x = 0$ есть предельная точка множества $\dot{O}_\delta(0)$, следовательно, мы имеем право говорить о пределе функции $\varphi(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Соотношение (15.2) принимает вид

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x). \tag{15.4}$$

В силу (15.4) определение производной функции в точке можно сформулировать в следующем виде.

Определение 15.3. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется конечный предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения $\varphi(\Delta x)$ этой функции в данной точке, если такой предел существует.

Левосторонняя и правосторонняя производные функции $y = f(x)$ в точке x_0 определяются следующим образом:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \varphi(\Delta x),$$
$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \varphi(\Delta x)$$

(если такие пределы существуют).

Левосторонняя и правосторонняя производные функции $y = f(x)$ в точке x_0 называются односторонними производными этой функции в данной точке.

В силу второго признака существования конечного предела функции в точке (см. теорему 13.1) приходим к следующему *признаку существования производной*:

$$\exists f'(x_0) = H \iff \exists f'(x_0 - 0), \exists f'(x_0 + 0) \text{ и } f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = H. \tag{15.5}$$

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = +\infty \ (-\infty)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную положительную (отрицательную) производную.

Выясним геометрический смысл производной функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$. Придадим x_0 приращение $\Delta x \mid x_0 + \Delta x \in [a,b]$. Рассмотрим точки $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \in \Gamma_f$. Прямая, проходящая через точки M_0 и M, называется *секущей*. Если $\Delta x \to 0$, то $M \to M_0$, при этом, секущая $S = (M_0 M)$ изменяет своё положение, вращаясь вокруг точки M_0. Возможна ситуация, когда существует прямая, которая является предельным положением секущей $(M_0 M)$ при $\Delta x \to 0$. В связи с этим вводится понятие касательной к графику функции.

Определение 15.4. *Касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $M_0(x_0, f(x_0))$ называется прямая $K = (M_0 T)$, которая является предельным положением секущей $S = (M_0 M)$ при $M \to M_0$ (т.е. при $\Delta x \to 0$), если такое предельное положение секущей существует.

Геометрическая иллюстрация показана на рис. 15.2.

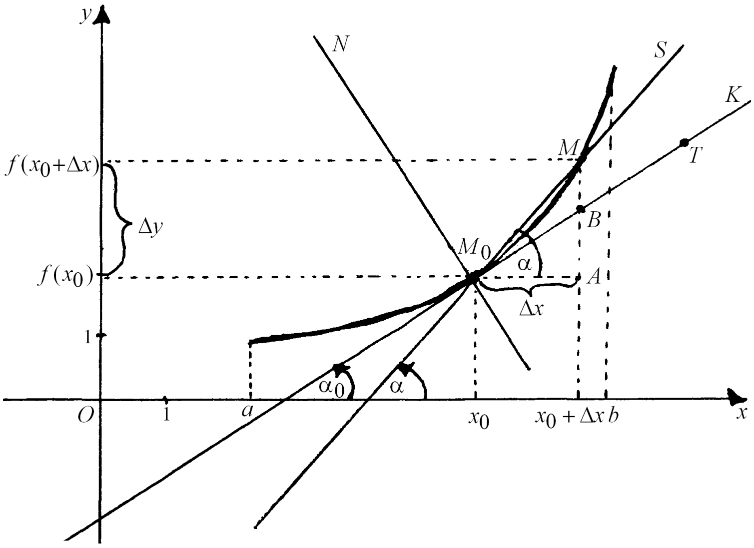

Рис. 15.2

Теорема 15.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$. Тогда существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ и угловой коэффициент этой касательной (т.е. тангенс угла её наклона к положительному направлению оси Ox) равен производной $f'(x_0)$:

$$k_K = f'(x_0). \tag{15.6}$$

▶ Пусть α – угол наклона секущей $\left(M_0M\right)$ к положительному направлению оси Ox (заметим, что $\alpha = \alpha(\Delta x)$, ибо положение точки M на графике Γ_f зависит от величины Δx). Проведём перпендикуляр M_0A к прямой $x = x_0 + \Delta x$. Из прямоугольного ΔM_0AM получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

следовательно,

$$\alpha(\Delta x) = \operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

По условию теоремы

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Значит, в силу непрерывности функции $\operatorname{arctg} x$

$$\exists\alpha_0 = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \operatorname{arctg} f'(x_0),$$

т.е. существует предельное значение

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} f'(x_0) \tag{15.7}$$

угла наклона $\alpha = \alpha(\Delta x)$ секущей $\left(M_0M\right)$ при $\Delta x \to 0$. А это означает, что существует касательная K к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ с углом наклона α_0 к положительному направлению оси Ox. В силу (15.7) $\operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0)$. По определению углового коэффициента прямой, $\operatorname{tg}\alpha_0 = k_K$. Получаем: $k_K = f'(x_0)$. ◀

В силу теоремы 15.1

$$f'(x_0) = k_K, \tag{15.8}$$

т.е. производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$. В этом заключается геометрический смысл производной функции в точке.

Найдём уравнение касательной K. Из аналитической геометрии известно [4, с. 63], что уравнение прямой d, проходящей через дан- ную точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ с заданным угловым коэффициентом k имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{15.9}$$

Касательная K проходит через точку $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ и $k_K = f'(x_0)$, следовательно, в силу (15.9) уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{15.10}$$

Другая форма записи уравнения (15.10):

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Определение 15.5. *Нормалью к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ называется прямая N, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

Найдём уравнение нормали N. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$ и $f'(x_0) \neq 0$. По определению, $N \perp K$. Из аналитической геометрии известно [4, с. 66]: если прямые d_1 и d_2 перпендикулярны, то их угловые коэффициенты k_1 и k_2 связаны соотношением $k_1 = -\left(1/k_2\right)$. Следовательно, $k_N = -\left(1/k_K\right)$ или в силу (15.6) $k_N = -\left(1/f'(x_0)\right)$. Имеем: нормаль N проходит через точку $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ и для неё $k_N = -\left(1/f'(x_0)\right)$. Следовательно, в силу (15.9) уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ имеет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,. \tag{15.11}$$

Другая форма записи уравнения (15.11):

$$y - y(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

Если $f'(x_0) = 0$, то касательная K к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ задаётся уравнением $y = f(x_0)$, т.е. $K \parallel Ox$. Следовательно, нормаль N к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ перпендикулярна оси Ox и её уравнение имеет вид $x = x_0$.

Пусть дана функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$ и x_0 – внутренняя точка множества $D(f)$, т.е. $\exists\, O_\delta(x_0) \mid O_\delta(x_0) \subset D(f)$. Придадим x_0 приращение Δx, такое что $x_0 + \Delta x \in O_\delta(x_0)$. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Если функция $f(x)$ непреАрывна в точке x_0, то согласно определению 13.13 приращение Δy функции $f(x)$ в точке x_0 является бесконечно малой величиной при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. При решении некоторых задач необходима более подробная информация о природе б.м.в. Δy при $\Delta x \to 0$. В связи с этим вводится понятие дифференцируемости функции в точке.

Определение 15.6. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если приращение Δy этой функции в данной точке, отвечающее приращению аргумента Δx, представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)\,, \tag{15.12}$$

где A – некоторая константа, не зависящая от Δx; $o(\Delta x)$ – б.м.в. высшего порядка по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0\,; \tag{15.13}$$

при этом выражение $A\Delta x$ называется *дифференциалом функции* $f(x)$ в точке x_0 и обозначается символом $dy(x_0)$ (или $df(x_0)$):

$$dy(x_0) = A \cdot \Delta x\,. \tag{15.14}$$

По определению, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 является линейной однородной функцией аргумента Δx (линейной функцией аргумента t называется функция вида $y = at + b$, где a, b – некоторые постоянные; в случае $b = 0$ линейная функция называется однородной).

Используя понятие дифференциала функции, запишем формулу (15.12) в виде

$$\Delta y = dy(x_0) + o(\Delta x)\,. \tag{15.15}$$

Пусть $A \neq 0$, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A = A \neq 0\,,$$

а это означает, по определению, что б.м.в. $A\cdot\Delta x = dy(x_0)$ имеет одинаковый порядок малости с б.м.в. Δx при $\Delta x \to 0$. Второе слагаемое в правой части (15.15) является б.м.в. высшего порядка по сравнению с б.м.в. Δx при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, в случае $A \neq 0$ дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой главную часть приращения этой функции в данной точке. Если $A = 0$, то $dy(x_0) = 0\cdot\Delta x = 0$ перестаёт быть главной частью приращения Δy, ибо слагаемое $o(\Delta x)$ в правой части (15.15) не обязано быть равным нулю.

Связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием конечной производной этой функции в данной точке устанавливается следующим утверждением.

Теорема 15.2. Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. выполняется условие (15.12) тогда и только тогда, когда она имеет в точке x_0 конечную производную, равную числу A:

$$\exists f'(x_0) = A. \tag{15.16}$$

Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. её приращение в этой точке, соответствующее приращению аргумента Δx, представимо в виде (15.12). Тогда при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Учитывая (15.13), получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x\to 0} A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Получили:

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

а это означает, по определению, что выполняется (15.16).

Достаточность. Пусть выполняется (15.16), т.е.

$$\exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

Тогда в силу первого признака существования конечного предела функции в точке (см. теорему 12.1), справедливо представление

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \tag{15.17}$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.в. при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0. \tag{15.18}$$

Из (15.17) следует, что

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x. \tag{15.19}$$

Положим $\gamma(\Delta x) = \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Заметим, что $\gamma(\Delta x)$ является б.м.в. высшего порядка по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$, ибо, учитывая, (15.18), получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\gamma(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0.$$

Итак, $\gamma(\Delta x) = o(\Delta x)$, при $\Delta x \to 0$ и формула (15.19) принимает вид

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x),$$

т.е. выполняется (15.12).

В силу теоремы 15.2 определение дифференцируемости функции в точке можно сформулировать в следующем виде.

Определение 15.7. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если она имеет конечную производную в этой точке.

В силу (15.16) соотношения (15.12), (15.14) принимают вид

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \tag{15.20}$$

$$dy(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \tag{15.21}$$

В силу того, что первое слагаемое в правой части равенства (15.20) является главной частью приращения функции, а второе слагаемое $o(\Delta x)$ – б.м.в. высшего порядка по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$, можно считать при достаточно малых Δx, что $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$, т.е. $\Delta y \approx dy(x_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x . \qquad (15.22)$$

Формула (15.22) используется для приближенного вычисления значений функции при "плохих" значениях аргумента.

Выясним геометрический смысл дифференциала функции в точке. Из прямоугольного треугольника $\Delta M_0 AB$ на рис. 15.2 видно, что $AB = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0$. Учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0)$, $f'(x_0)\Delta x = dy(x_0)$, получаем равенство $dy(x_0) = AB$, т.е. дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 при данном приращении аргумента Δx равен соответствующему приращению ординаты касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$.

Установим связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в данной точке.

Теорема 15.3. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. имеет место представление (15.12). Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[A \cdot \Delta x + o(\Delta x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A \cdot \Delta x\right) + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0 + 0 = 0 .$$

Получили:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 ,$$

а это означает, согласно определению 13.13, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание 15.1. Утверждение, обратное теореме 15.3, неверно, т.е. из непрерывности функции в точке не следует её дифференцируемость в этой точке.

Например, функция

$$; \qquad y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $x_0 = 0$, но не является дифференцируемой в этой точке, что следует из (15.5), ибо

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} (-1) = -1 ,$$

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} 1 = 1 ,$$

т.е. $f'(0-0) \ne f'(0+0)$.

Определение 15.8. *Функция* $y = f(x)$ *называется дифференцируемой на множестве* $D \subseteq D(f)$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $D \subseteq D(f)$. Тогда каждой точке $x \in D$ можно поставить в соответствие производную $f'(x)$ функции $f(x)$ во взятой точке x. Тем самым на множестве D задана функция $y' = f'(x)$, называемая *производной функции* $f(x)$. Производную $y' = f'(x)$ обозначают так же символом $\dfrac{dy}{dx}$. Операция нахождения производной $f'(x)$ функции $f(x)$ называется *дифференцированием.*

Пример 15.1. Найдём производную функции $y = x^2,\ x \in \mathrm{R}$. Зафиксируем произвольное $x \in \mathrm{R}$. Тогда

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 ,$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x\right) = 2x .$$

Итак, $\left(x^2\right)' = 2x$.

Пример 15.2. Найдём производную функции $y = \sin x,\ x \in \mathrm{R}$. Зафиксируем произвольное $x \in \mathrm{R}$. Тогда

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \sin\left(x + \Delta x\right) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Используя первый замечательный предел и непрерывность функции $y = \cos x$, получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$
$$= 1\cdot\cos x = \cos x .$$

Итак, $(\sin x)' = \cos x$.

Из теоремы 15.3 вытекает

Следствие 15.1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $D \subseteq D(f)$, то она непрерывна на этом множестве.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $D \subseteq D(f)$, то в каждой точке $x \in D$ можно рассмотреть дифференциал функции $f(x)$:

$$dy(x) = f'(x)\Delta x$$

или в более краткой форме

$$dy = y'\cdot\Delta x . \tag{15.23}$$

Рассмотрим функцию $y = x$ и её приращение Δy в точке x, вызванное приращением аргумента Δx:

$$\Delta y = (x+\Delta x) - x = \Delta x = 1\cdot\Delta x + 0 .$$

Получили представление (15.12) с $A = 1$, $o(\Delta x) = 0$. Следовательно, $dy = 1\cdot\Delta x$, но $y = x$. Значит,

$$dx = \Delta x , \tag{15.24}$$

т.е. дифференциал независимой переменной x равен приращению Δx этой переменной. Формула (15.23) принимает вид

$$dy = y'dx , \tag{15.25}$$

следовательно,

$$y' = \frac{dy}{dx} , \tag{15.26}$$

т.е. производная $y'(x)$ функции $y(x)$ равна отношению дифференциала функции $dy(x)$ к дифференциалу аргумента dx (ранее символ $\frac{dy}{dx}$ был использован как цельный символ для обозначения производной $y' = f'(x)$).

Так как в представлении (15.12) для функции $y = x$ число A равно единице, то

$$(x)' = 1 . \tag{15.27}$$

Лекция 16. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Основная теорема о производных функций; теорема о производной обратной функции; теорема о производной сложной функции; свойство инвариантности формы дифференциала; производные основных элементарных функций.

При дифференцировании функций применяется следующее утверждение, *называемое основной теоремой о производных функций.*

Теорема 16.1. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на множестве $D \subseteq D(u) \cap D(v)$. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций тоже дифференцируемы на множестве D (в случае частного предполагается, что $v(x) \neq 0$, $\forall x \in D$) и справедливы формулы

$$[u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x) , \tag{16.1}$$

$$[u(x)-v(x)]' = u'(x)-v'(x) , \tag{16.2}$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) , \tag{16.3}$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} . \tag{16.4}$$

▶ Зафиксируем произвольное $x \in D$. Рассмотрим любое $\Delta x \neq 0 \mid x+\Delta x \in D$. Пусть $w(x) = u(x)+v(x)$. Тогда

$$\Delta w = w(x+\Delta x)-w(x)=\left[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\right]-\left[u(x)+v(x)\right]=$$

$$=\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]+\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]=\Delta u+\Delta v .$$

Итак, $w(x)=\Delta u+\Delta v$, следовательно,

$$\frac{\Delta w}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x} . \tag{16.5}$$

По условию теоремы функции u и v дифференцируемы в точке x , т.е.

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x) ,\ \exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x) . \tag{16.6}$$

Тогда в силу основной теоремы о пределах функций (см. теорему 12.2)

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)+v'(x) ,$$

т.е. в силу (16.5)

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}=u'(x)+v'(x) ,$$

а это означает, по определению производной, что $\exists w'(x)=u'(x)+v'(x)$, т.е. $\exists\left[u(x)+v(x)\right]'=u'(x)+v'(x)$.

Аналогично показывается, что $\left[u(x)-v(x)\right]'=u'(x)-v'(x)$.

Пусть $w(x)=u(x)v(x)$. Тогда

$$\Delta w = w(x+\Delta x)-w(x)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)=$$

$$=\left[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)\right]+\left[u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\right]=$$

$$=\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]v(x+\Delta x)+u(x)\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]=$$

$$=\Delta u\ \ v(x+\Delta x)+u(x)\ \ \Delta v .$$

Итак, $\Delta w=\Delta u\ \ v(x+\Delta x)+u(x)\ \ \Delta v$, следовательно,

$$\frac{\Delta w}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} . \tag{16.7}$$

По условию теоремы функция v дифференцируема в точке x , следовательно, в силу теоремы 15.3 она непрерывна в точке x , в силу чего

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)=v(x) . \tag{16.8}$$

Тогда в силу (16.6), (16.8), теоремы 12.2 и замечания 12.2

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}=\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)\right]+\lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) ,$$

т.е. в силу (16.7)

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) ,$$

а это означает, по определению производной, что $\exists w'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, т.е. $\exists\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

Пусть $w(x)=\left(u(x)\right)/\left(v(x)\right)$. В силу (16.8) и условия $v(x)\neq 0$ $\exists O_\delta(0)\,|\,\forall\Delta x\in\dot{O}_\delta(0)\Rightarrow v(x+\Delta x)\neq 0$. Так как мы интересуемся пределом $\left(\Delta w\right)/\left(\Delta x\right)$ при $\Delta x\to 0$, то можно считать, что $\Delta x\in\dot{O}_\delta(0)$, т.е. что $v(x+\Delta x)\neq 0$. Тогда

$$\Delta w = w(x+\Delta x) - w(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)} =$$

$$= \frac{\left[u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)\right] - \left[u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)\right]}{v(x+\Delta x)v(x)} =$$

$$= \frac{\left[u(x+\Delta x) - u(x)\right]v(x) - u(x)\left[v(x+\Delta x) - v(x)\right]}{v(x+\Delta x)v(x)} = \frac{\Delta u \;\; v(x) - u(x) \;\; \Delta v}{v(x+\Delta x)v(x)} .$$

Итак,

$$\Delta w = \frac{\Delta u \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{v(x+\Delta x)v(x)} ,$$

следовательно,

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)} . \tag{16.9}$$

Тогда в силу (16.6), (16.8), теоремы 12.2 и замечания 12.2

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \;\; v(x) - u(x) \;\; \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right]}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[v(x+\Delta x)v(x)\right]} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} ,$$

т.е. в силу (16.9)

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} ,$$

а это означает, по определению производной, что функция $w(x) = \left(u(x)\right)/\left(v(x)\right)$ дифференцируема в точке x и её производная выражается формулой (16.4).

Пример 16.1. Рассмотрим функцию $f(x) = c = \text{const}$, $\forall x \in D \subseteq \mathrm{R}$, где D – открытое множество. Производная такой функции равна нулю: $(c)' = 0$. Действительно, зафиксируем произвольное $x \in D$. Тогда в силу открытости множества D $\exists O_\delta(x) \,|\, O_\delta(x) \subset D$. Рассмотрим $\Delta x \neq 0 \,|\; x + \Delta x \in O_\delta(x) \subset D$. Тогда $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \; = c - c = 0$. Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 .$$

Замечание 16.1. Если функция $u = u(x)$ дифференцируема на множестве $D \subseteq D(u)$, то для $\forall c \in \mathrm{R}$ функция $cu(x)$ тоже дифференцируема на множестве D и справедлива формула

$$\left[cu(x)\right]' = cu'(x) , \tag{16.10}$$

т.е. постоянную можно выносить за знак производной.

Действительно, зафиксируем произвольное $x \in D$. Рассмотрим любое $\Delta x \neq 0 \,|\; x + \Delta x \in D$. Пусть $w(x) = \alpha u(x)$. Тогда

$$cu \quad \Delta w = w(x\, \overset{cu}{cu\Delta x}) - c(x) = \alpha u(x+\Delta x) - \alpha\, c(x) = \alpha\left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] = \alpha \Delta u ,$$

$$w'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\Delta u}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = cu'(x) .$$

Используя теорему 16.1 и метод математической индукции, приходим к следующему утверждению.

Теорема 16.2. Сумма любого конечного числа функций $u_1(x), u_2(x), ..., u_s(x)$, дифференцируемых на множестве $D \subseteq \mathrm{R}$, есть функция, дифференцируемая на множестве D и

$$\left[\sum_{i=1}^{s} u_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{s} u_i'(x) .$$

Следствие 16.1. Если функции $u_1(x), u_2(x), ..., u_s(x)$ дифференцируемы на множестве $D \subseteq \mathrm{R}$, то их линейная комбинация $\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + ... + \lambda_s u_s(x)$ с любыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \in \mathrm{R}$ дифференцируема на множестве D и

$$\left[\sum_{i=1}^{s}\lambda_i u_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i u_i'(x) .$$

Следствие 16.1. вытекает из замечания 16.1 и теоремы 16.2.

Теорема 16.1 и следствие 16.1 позволяют находить производные функций, получаемых в результате арифметических операций над дифференцируемыми функциями.

Докажем теорему о производной обратной функции.

Теорема 16.3. Если строго монотонная на $D(f)$ функция $y = f(x)$ дифференцируема на $D(f)$ и $y'(x) \neq 0$, $\forall x \in D(f)$, то обратная для неё функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема на $D(f^{-1}) = E(f)$ и

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} . \tag{16.11}$$

Напомним, что существование строго монотонной обратной функции $x = f^{-1}(y)$ следует из теоремы 9.1. Зафиксируем произвольное $y \in D(f^{-1})$. Придадим y любое приращение $\Delta y \neq 0 \mid \; y + \Delta y \in D(f^{-1})$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ получит соответствующее приращение $\Delta x = x(y + \Delta y) - x(y)$, причём $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности обратной функции. В силу следствия 15.1 из дифференцируемости функции $y = f(x)$ на $D(f)$ вытекает её непрерывность на $D(f)$. Тогда в силу теоремы 13.5 обратная функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывная на $D(f^{-1})$, т.е. согласно определению 13.13 $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Имеем:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)} .$$

Итак, $\exists \lim\limits_{\Delta y\to 0}\left[(\Delta x)/(\Delta y)\right] = 1/\left(y'(x)\right)$, а это означает, по определению производной, что $\exists x'(y) = 1/\left(y'(x)\right)$.

Пример 16.2. Рассмотрим функцию $y = \sin x$ с областью определения $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right)$. Для неё $E(f) = (-1;1)$. Эта функция возрастает на $D(f)$, дифференцируема на $D(f)$ и $y' = (\sin x)' = \cos x$ (см. пример 15.2). Заметим, что $y' = \cos x \neq 0$, $\forall x \in D(f)$. Таким образом, функция $y = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right)$ удовлетворяет условиям теоремы 16.3, в силу которой обратная для неё функция $x = \arcsin y$, $D(f^{-1}) = (-1;1)$, $E(f^{-1}) = \left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right)$ дифференцируема на $D(f^{-1})$ и по формуле (16.11)

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

(использована формула $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, ибо $\alpha = \; = \arcsin y \in \left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha > 0$). Итак, для функции $x = \arcsin y$

$$\left(\arcsin y\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

Заменяя в обратной функции обозначения аргумента y и функции x на привычные обозначения x и y, получаем формулу для вычисления производной функции $y = \arcsin x$:

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ,\; -1 < x < 1 . \tag{16.12}$$

Укажем правило дифференцирования сложной функции.

Теорема 16.4. Пусть для сложной функции $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ ($y = f(u)$, $u = \varphi(x)$) выполняются следующие условия:

а) функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е.

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x_0) ; \tag{16.13}$$

б) функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$, т.е.

$$\exists \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)\,. \tag{16.14}$$

Тогда сложная функция $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)\,. \tag{16.15}$$

► Придадим x_0 произвольное приращение $\Delta x \neq 0 \,|\; x_0 + \Delta x \in D(\varphi)$. Тогда функция $u = \varphi(x)$ получит соответствующее приращение $\Delta u = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$. Следовательно, $\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = u_0 + \Delta u$. Приращение функции $F(x)$ в точке x_0, вызванное приращением аргумента Δx, принимает вид:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = f\left(\varphi(x_0 + \Delta x)\right) - f\left(\varphi(x_0)\right) =$$

$$= f\left(u_0 + \Delta u\right) - f\left(u_0\right) = \Delta y\,,$$

т.е.

$$\Delta F = \Delta y\,. \tag{16.16}$$

Из (16.14) следует в силу теоремы 12.1, что

$$\Delta y = f'(u_0) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u\,, \tag{16.17}$$

где $\alpha(\Delta u)$ – б.м.в. при $\Delta u \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0\,. \tag{16.18}$$

В силу (16.16), (16.17)

$$\Delta F = f'(u_0) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u\,.$$

Тогда

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\,.$$

По условию теоремы функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, следовательно, в силу теоремы 15.3 она непрерывна в точке x_0, т.е., согласно определению 13.13, $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Используя теорему 12.2, замечание 12.2 и учитывая соотношения (16.13), (16.18), получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0}\left[\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] =$$

$$= f'(u_0) \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta u \to 0}} \alpha(\Delta u) \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) \cdot \varphi'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0) + 0 \cdot \varphi'(x_0) =$$

$$= f'(u_0)\varphi'(x_0)\,.$$

Показано, что

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f'(u_0)\varphi'(x_0)\,,$$

а это означает, по определению производной, что $\exists F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$. ◄

Следствие 16.2. Пусть для сложной функции $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ выполняются следующие условия:

1) функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема на множестве $D_1 \subseteq D(\varphi)$;
2) функция $y = f(u)$ дифференцируема на множестве $\Omega_1 = \varphi(D_1)$ (Ω_1 – образ множества D_1 при отображении φ).

Тогда сложная функция $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ дифференцируема на множестве D_1 и справедлива формула

$$F'(x) = f'(u)\varphi'(x)\,, \tag{16.19}$$

т.е. производная сложной функции $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ по независимой переменной x равна произведению производной функции $y = f(u)$ по промежуточному аргументу u и производной промежуточного аргумента $u = \varphi(x)$ по переменной x.

Если сложную функцию записать в виде $y = y\left(u(x)\right)$, то правило дифференцирования сложной функции принимает вид

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x\,. \tag{16.20}$$

Пример 16.3. Найдём производную сложной функции $y=\sin^2 x$. Эту функцию можно записать в виде $y=u^2$, $u=\sin x$. Тогда согласно формуле (16.20) $y'=y'_u\cdot u'_x$. Заметим, что $y'_u=\left(u^2\right)'=2u$ (см. при- мер 15.1), $u'_x=\left(\sin x\right)'=\cos x$ (см. пример 15.2). Учитывая, что $u=\sin x$, получаем:

$$y'=\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

Замечание 16.2. Теорема 16.4 и следствие 16.2 сохраняют силу для сложной функции, являющейся суперпозицией любого конечного числа функций.

Например, если $y=y\left(w\left(u(x)\right)\right)$ и соответствующие функции $u=u(x)$, $w=w(u)$, $y=y(w)$ дифференцируемы на соответствующих множествах, то сложная функция $y=y\left(w\left(u(x)\right)\right)$ дифференцируема на соответствующем множестве и справедлива формула

$$y'_x=y'_w\cdot w'_u\cdot u'_x. \tag{16.21}$$

Пример 16.4. Найдём производную сложной функции $y=\arcsin\left(\sin^2 x\right)$. Эту функцию можно записать в виде $y=\arcsin w$, $w=u^2$, $u=\sin x$. Тогда согласно формуле (16.21) $y'_x=y'_w\cdot w'_u\cdot u'_x$. Заметим, что $y'_w=1/\sqrt{1-w^2}$ (см. пример 16.2), $w'_u=2u$ (см. пример 15.1), $u'_x=\cos x$ (см. пример 15.2). Учитывая, что $w=u^2$, а $u=\sin x$, полу- чаем:

$$y'=\left[\arcsin\left(\sin^2 x\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin^2 x\right)^2}}\cdot 2\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}.$$

Если функция $y=y(x)$ независимой переменной x дифференцируема на некотором множестве $D\subseteq D(f)$, то

$$dy=y'(x)dx, \tag{16.22}$$

т.е. дифференциал функции равен произведению производной этой функции и дифференциала независимой переменной x (см. (15.25)).

Рассмотрим сложную функцию $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Пусть выполняются условия 1), 2) из следствия 16.2. Тогда $dy=\left[f\left(\varphi(x)\right)\right]'dx$. В силу (16.19) $\left[f\left(\varphi(x)\right)\right]'=f'(u)\varphi'(x)$. Следовательно, $dy=f'(u)\varphi'(x)dx$. Заметим, что $\varphi'(x)dx=du$. Имеем:

$$dy=f'(u)du, \tag{16.23}$$

т.е. дифференциал функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу u и дифференциала промежуточного аргумента u.

Из вышесказанного следует, что форма дифференциала функции не зависит от того, является ли аргумент этой функции независимой переменной или дифференцируемой функцией другого аргумента. В этом заключается *свойство инвариантности* (*неизменности*) *формы дифференциала.*

В силу (16.22), (16.23)

$$y'(x)=\frac{dy}{dx},$$

$$f'(u)=\frac{dy}{du},$$

т.е. производная дифференцируемой функции равна отношению дифференциала этой функции к дифференциалу её аргумента как в случае, когда аргумент функции является независимой переменной, так и в случае, когда аргумент функции является дифференцируемой функ- цией другого аргумента.

Теоремы 16.1, 16.3, 16.4 позволяют доказать дифференцируемость основных элементарных функций и найти формулы для их произ- водных.

Теорема 16.5. Основные элементарные функции a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ дифференцируемы на своей области определения. Степенная функция x^α при $\alpha\geq 1$ дифференцируема на $D(y)$, при $\alpha<1$ дифференцируема на $D(y)\setminus\{0\}$. Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$ дифференцируемы на множестве $(-1;1)$. Производные основных элементарных функций находятся по формулам из прил. 3.

При доказательстве ограничимся случаем тригонометрических и обратных тригонометрических функций. В примере 15.2 было показано, что функция $y=\sin x$ дифференцируема на R и $(\sin x)'=\cos x$. Используя формулу $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall\alpha\in$ R, функцию $y=\cos x$ можно записать в виде $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, т.е. в виде суперпозиции двух функций $y=\sin u$, $u=x+\frac{\pi}{2}$, каждая из которых дифференцируема на R. Тогда в силу следствия 16.2 функция $\cos x$ дифференцируема на R и по правилу дифференцирования сложной функции

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

(использована формула приведения $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha, \forall\alpha\in$ R). В силу теоремы 16.1 функция $y=\operatorname{tg}x=(\sin x)/(\cos x)$ дифференцируема на $D(y)=\mathrm{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in \mathrm{Z}\right\}$ и по формуле (16.4)

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

(использовано основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \forall\alpha\in$ R). Аналогично показывается, что функция $y=\operatorname{ctg}x$ дифференцируема на $D(y)=\mathrm{R}\setminus\{\pi k, k\in\mathrm{Z}\}$ и $(\operatorname{ctg}x)'=-1/\left(\sin^2 x\right)$. В примере 16.2 было показано, что функция $y=\arcsin x$ дифференцируема на $(-1;1)$ и $(\arcsin x)'=1/\sqrt{1-x^2}$. Аналогично показывается, что функция $y=\arccos x$ дифференцируема на $(-1;1)$ а функции $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$ дифференцируемы на R и для их производных справедливы формулы из прил. 3.

Дифференцируемость степенной функции $y=x^\alpha$ в случае $\alpha=1$, $\alpha=2$ показана выше (см. пример 15.2 и формулу (15.27)). Доказательство дифференцируемости степенной функции в общем случае см. в [8, с. 210] .

Доказательство дифференцируемости логарифмической функции $y=\log_a x$ см. в [8, с. 207].

Доказательство дифференцируемости показательной функции $y=a^x$ см. в [8, с. 208].

Гиперболические функции $y=\operatorname{sh}x$, $y=\operatorname{ch}x$, $y=\operatorname{th}x$, $y=\operatorname{cth}x$ дифференцируемы в силу дифференцируемости показательной функции $y=e^x$ и теорем 16.1, 16.4.

Лекция 17. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Возрастание функции в точке; убывание функции в точке; достаточный признак возрастания функции в точке; достаточный признак убывания функции в точке; теорема Ферма, теорема Дарбу, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коши.

Пусть дана функция $y=f(x)$, $x\in D(f)$ и x_0 – внутренняя точка множества $D(f)$.

Определение 17.1. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если

$$\exists O_\delta(x_0)\,|\,\forall x\in \dot{O}_\delta^-(x_0)\Rightarrow f(x)<f(x_0);\ \forall x\in \dot{O}_\delta^+(x_0)\Rightarrow f(x)>f(x_0).$$

Определение 17.2. Функция $f(x)$ называется *убывающей в точке* x_0, если

$$\exists O_\delta(x_0)\,|\,\forall x\in \dot{O}_\delta^-(x_0)\Rightarrow f(x)>f(x_0);\ \forall x\in \dot{O}_\delta^+(x_0)\Rightarrow f(x)<f(x_0).$$

Геометрическая иллюстрация определений 17.1, 17.2 представлена на рис. 17.1.

x_1

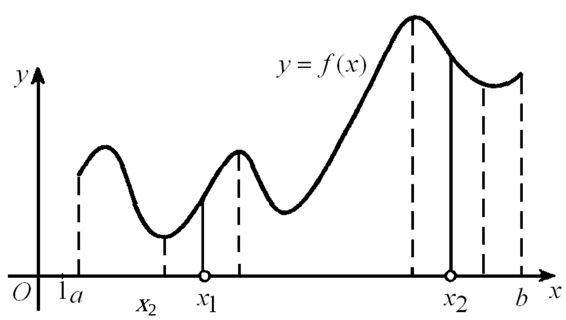

Рис. 17.1

Функция $y = f(x)$, график которой изображён на рис. 17.1, возрастает, например, в точке x_1 и убывает в точке x_2.

Теорема 17.1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$. Тогда $f(x)$ возрастает в точке x_0.

▶ По определению производной функции в точке

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (17.1)$$

Положим $x_0 + \Delta x = x$, тогда $\Delta x = x - x_0$, $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$ и соотношение (17.1) принимает вид

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (17.2)$$

В силу (17.2) и условия $f'(x_0) > 0$

$$\exists O_\delta(x_0) \mid \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0. \qquad (17.3)$$

Пусть $x \in \dot{O}_\delta^-(x_0)$, тогда $x - x_0 < 0$ и из (17.3) следует, что $f(x) - f(x_0) < 0$, т.е. $f(x) < f(x_0)$. Пусть $x \in \dot{O}_\delta^+(x_0)$, тогда $x - x_0 > 0$ и из (17.3) следует, что $f(x) - f(x_0) > 0$, т.е. $f(x) > f(x_0)$. ◀

Теорема 17.2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) < 0$. Тогда $f(x)$ убывает в точке x_0.

Доказательство теоремы 17.2 аналогично доказательству теоре- мы 17.1.

Докажем несколько теорем, имеющих важное значение при исследовании поведения функций с помощью производных и называемых основными теоремами дифференциального исчисления.

Теорема 17.3 (*теорема Ферма*). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и в некоторой внутренней точке c этого отрезка принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если $f(x)$ дифференцируема в точке c, то $f'(c) = 0$.

▶ Пусть, для определённости, функция $f(x)$ достигает в точке c своего наибольшего значения (случай, когда $f(x)$ достигает в точке c своего наименьшего значения, рассматривается аналогично). : $f'(c) \neq 0$. Тогда либо $f'(c) > 0$, либо $f'(c) < 0$. Пусть $f'(c) > 0$. По теореме 17.1 $f(x)$ возрастает в точке c, а это означает, в частности, что $\exists O_\delta(c) \mid \forall x \in \dot{O}_\delta^+(c) \Rightarrow f(x) > f(c)$, что противоречит предположению о том, что в точке c функция $f(x)$ принимает своё наибольшее значение. Пусть $f'(c) < 0$. Тогда по теореме 17.2 $f(x)$ убывает в точке c, а это означает, в частности, что $\exists O_\delta(c) \mid \forall x \in \dot{O}_\delta^-(c) \Rightarrow f(x) > f(c)$. Противоречие. . Следовательно, $f'(c) = 0$. ◀

В силу теоремы 15.1 $f'(c) = k_K$, где K – касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(c, f(c))$. При выполнении условий теоремы Ферма $f'(c) = 0$, следовательно, $k_K = 0$, а это означает, что $K \parallel Ox$. Графическая иллюстрация представлена на рис. 17.2.

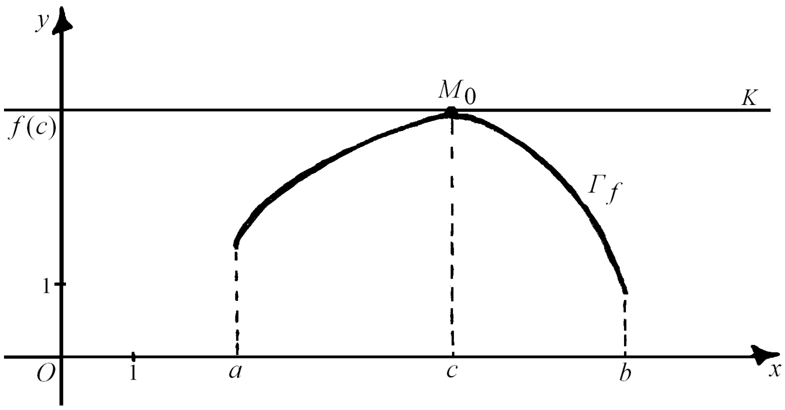

Рис. 17.2

Теорема 17.4 (*теорема Дарбу* или *теорема о промежуточном значении производной дифференцируемой функции*). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда её производная $f'(x)$ принимает в качестве значения каждое промежуточное число между $f'(a)$ и $f'(b)$ (здесь $f'(a) = f'(a+0)$, $f'(b) = f'(b-0)$).

▶ Рассмотрим вначале случай, когда $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки. Докажем, что $\exists c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$. Пусть, для определённости, $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$ (случай $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$ рассматривается аналогично). Тогда в силу теоремы 17.1 функция $f(x)$ возрастает в точке a справа, т.е.

$$\exists \dot{O}^{+}_{\delta_1}(a) \mid \forall x \in \dot{O}^{+}_{\delta_1}(a) \Rightarrow f(x) > f(a); \qquad (17.4)$$

в силу теоремы 17.2 функция $f(x)$ убывает в точке b слева, т.е.

$$\exists \dot{O}^{-}_{\delta_2}(b) \mid \forall x \in \dot{O}^{-}_{\delta_2}(b) \Rightarrow f(x) > f(b); \qquad (17.5)$$

По условию теоремы функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, следовательно, $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ (см. следствие 15.1). Тогда по второй теореме Вейерштрасса (см. теорему 14.6) функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения на отрезке $[a,b]$ в некоторой точке $c \in [a,b]$. В силу (17.4), (17.5) $c \neq a,\ c \neq b$, т.е. $c \in (a,b)$. Мы оказались в условиях теоремы Ферма, в силу которой $f'(c) = 0$.

Рассмотрим общий случай. Пусть, для определённости, $f'(a) > f'(b)$ (случай $f'(a) < f'(b)$ рассматривается аналогично). Зафиксируем произвольное число $K \mid f'(a) > K > f'(b)$. Покажем, что $\exists c \in (a,b) \mid f'(c) = K$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - Kx$. Функция $\varphi(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, как разность двух дифференцируемых функций и $\varphi'(x) = f'(x) - K$. Далее, $\varphi'(a) = f'(a) - K > 0$, $\varphi'(b) = f'(b) - K < 0$. Следовательно, по доказанному ранее $\exists c \in (a,b) \mid \varphi'(c) = 0$. Но $\varphi'(c) = f'(c) - K$. Получили: $f'(c) - K = 0$, т.е. $f'(c) = K$.

Теорема 17.5 (*теорема Ролля* или *теорема о существовании нуля производной*). Пусть функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b);
3) $f(x)$ принимает равные значения на концах отрезка $[a,b]$, т.е. $f(a) = f(b)$.

Тогда $\exists c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$.

Из условия 1) следует в силу второй теоремы Вейерштрасса, что функция $f(x)$ достигает на $[a,b]$ своих наибольшего и наименьшего значений M^* и m_*. Возможны два случая: $M^* = m_*$ и $M^* > m_*$. Пусть $M^* = m_*$, тогда $f(x) = c = \text{const}$, $\forall x \in [a,b]$. Следовательно (см. пример 16.1), $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$ и в качестве c из утверждения теоремы можно взять любую точку из интервала (a,b). Пусть $M^* > m_*$. Тогда из условия 3) следует, что хотя бы одно из значений M^*, m_* достигается в некоторой точке $c \in (a,b)$. Кроме того, в силу условия 2) функция $f(x)$ дифференцируема в точке c. Следовательно, по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Геометрическая трактовка теоремы Ролля: если ординаты крайних точек графика функции $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ равны, то на графике найдётся точка $M_0(c, f(c))$, в которой касательная K к графику параллельна оси абсцисс (рис. 17.3).

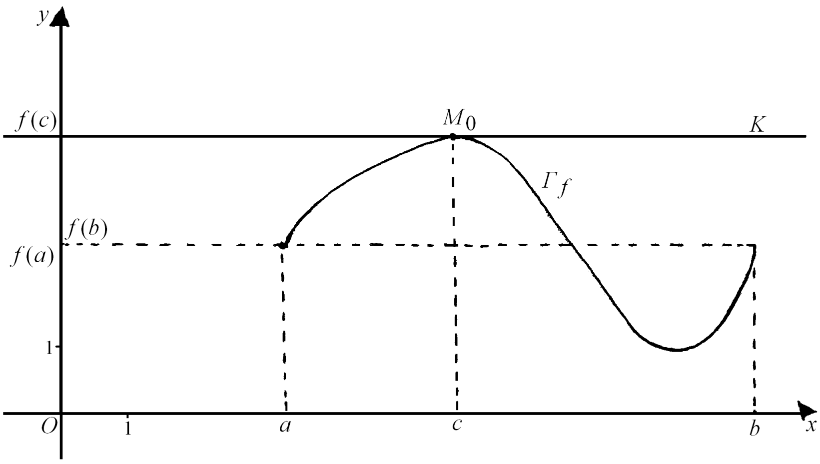

Рис. 17.3

Теорема 17.6 (*теорема Лагранжа* или *теорема о конечных приращениях*). Пусть функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b).

Тогда $\exists c \in (a,b) \mid$

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)\,. \tag{17.6}$$

▶ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)\,,$$

определённую на отрезке $[a,b]$. Заметим, что $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Действительно, во-первых, $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ как линейная комбинация непрерывных на этом отрезке функций (см. следствие 13.4); во-вторых, $F(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) как линейная комбинация дифференцируемых на этом интервале функций (см. следствие 16.1); в-третьих, $F(a) = 0,\ F(b) = 0 \Rightarrow\ F(a) = F(b)$. По теореме Ролля $\exists c \in (a,b) \mid F'(c) = 0$. Но

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,,$$

следовательно,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.$$

Получили:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0\,,$$

откуда следует формула (17.6). ◀

Формула (17.6) называется *формулой Лагранжа.*

Если в качестве $[a,b]$ рассмотреть отрезок $[x_0, x_0 + \Delta x]$, то формула (17.6) принимает вид

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x\,, \tag{17.7}$$

где $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$. Формула (17.7) связывает приращения аргумента и функции, поэтому её называют *формулой конечных приращений.*

Выясним геометрический смысл теоремы Лагранжа (рис. 17.4).

Запишем формулу Лагранжа в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)\,. \tag{17.8}$$

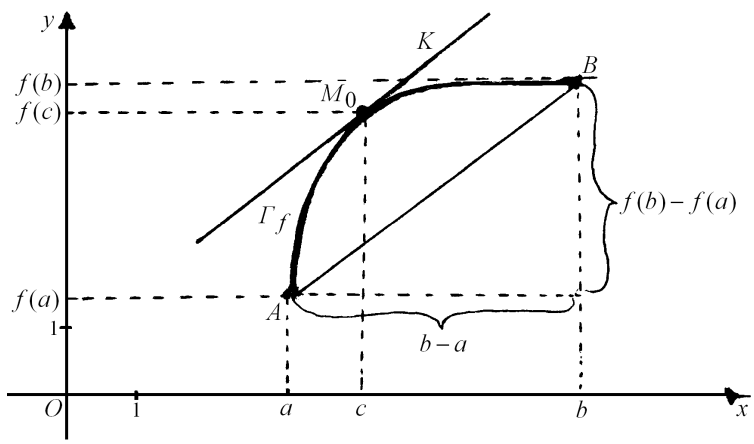

Рис. 17.4

Из рис. 17.4 видно, что величина $(f(b) - f(a))/(b-a)$ есть угловой коэффициент хорды, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$; $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной K к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\,(c, f(c))$. Таким образом, в силу (17.8) теорема Лагранжа утверждает следующее: на графике функции между точками A и B найдётся точка M_0, такая что касательная к графику функции в этой точке параллельна хорде AB.

Следствие 17.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), при этом $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$, то $f(x) = c = \text{const}$, $\forall x \in [a,b]$.

Действительно, зафиксируем произвольную точку $x_1 \in [a,b]$. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[a,x_1] \subset [a,b]$. Следовательно, $\exists c \in (a,x_1) \mid f(x_1) - f(a) = f'(c)(x_1 - a)$. По условию $f'(c) = 0$. Следовательно, $f(x_1) - f(a) = 0$, т.е. $f(x_1) = f(a) = c = \text{const}$. Итак, $f(x) = c = \text{const}$, $\forall x \in [a,b]$.

Учитывая пример 16.1 и следствие 17.1, приходим к следующему признаку постоянства функции.

Теорема 17.7. Пусть функция $y = f(x)$, определённая на отрезке $[a,b]$, непрерывна на этом отрезке и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда

$$f(x) = c = \text{const},\ \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow f'(x) = 0,\ \forall x \in (a,b). \qquad (17.9)$$

Теорема 17.8 (*теорема Коши*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определённые на отрезке $[a,b]$, удовлетворяют следующим условиям:

1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b), причём $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Тогда $\exists c \in (a,b) \mid$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (17.10)$$

Заметим, прежде всего, что запись в левой части (17.10) корректна, т.е. что $g(b) \neq g(a)$. Действительно, если бы $g(b) = g(a)$, то для функции $g(x)$ выполнялись бы все условия теоремы Ролля, в силу которой $\exists c \in (a,b) \mid g'(c) = 0$, а это противоречило бы условию теоремы $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left[g(x) - g(a)\right],$$

определённую на отрезке $[a,b]$. Заметим, что $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Действительно, $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ как линейная комбинация непрерывных на этом отрезке функций; $F(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) как линейная комбинация дифференцируемых на этом интервале функций; $F(a) = 0,\ F(b) = 0 \Rightarrow\ \Rightarrow\ F(a) = F(b)$. По теореме Ролля $\exists c \in (a,b) \mid\ F'(c) = 0$, но

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

следовательно, $$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Получили: $$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

откуда следует формула (17.10).

Замечание 17.1. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$.

Дополнение 1. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые величины (б.м.в.) в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0,\ \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0.$$

Ставится вопрос: как сравнить характер приближения этих величин к нулю, т.е. какая из величин стремится к нулю быстрее, какая медленнее. Такое сравнение можно провести с помощью исследования поведения отношения этих величин при $x \to x_0$.

Пусть $\exists O_\delta(x_0) \mid \beta(x) \neq 0, \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0)$. Тогда в $\dot{O}_\delta(x_0)$ определено отношение $\alpha(x)/\beta(x)$.

Определение Д.1.1. Б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми* при $x \to x_0$, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения.

Пример Д.1.1. Пусть $\alpha(x) = x\sin(1/x)$, $\beta(x) = x$. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть б.м.в. в точке $x_0 = 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ и в силу теоремы 11.8 $\lim\limits_{x \to 0}\left[x\sin(1/x)\right] = 0$. Б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются несравнимыми при $x \to 0$, так как их отношение

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{x\sin(1/x)}{x} = \sin(1/x),$$

рассматриваемое в $\dot{O}_\delta(0)$, не имеет предела при $x \to 0$ (рис. Д.1.1).

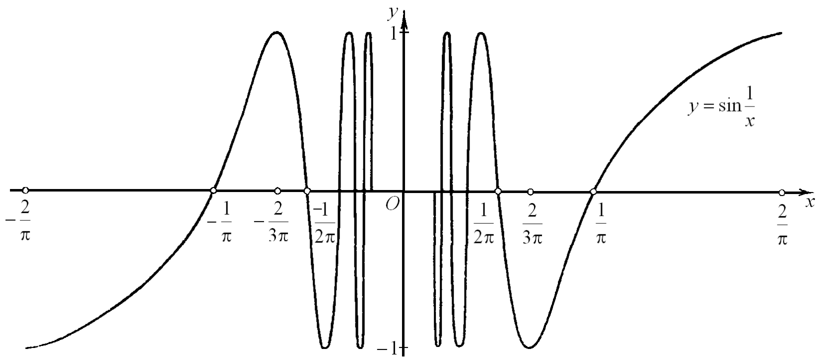

Рис. Д.1.1

Определение Д.1.2. Б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *б.м.в. одного порядка малости* при $x \to x_0$, если

$$\exists \text{ конечный } \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A,\ A \neq 0,$$

в частности, б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными б.м.в. при $x \to x_0$, если

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Обозначение б.м.в. одного порядка малости: $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{=} O(\beta(x))$ (читается: $\alpha(x)$ равна O большое от $\beta(x)$ при $x \to x_0$).

Обозначение эквивалентных б.м.в. : $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$ (читается: $\alpha(x)$ эквивалентна $\beta(x)$ при $x \to x_0$).

Замечание Д.1.1. Если $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$, то $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha(x)$.

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\alpha(x)/\beta(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\left[\alpha(x)/\beta(x)\right]} = \frac{1}{1} = 1,$$

а это означает, по определению, что $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha(x)$.

Пример Д.1.2. Функции $\alpha(x) = 5(x-1)^2$, $\beta(x) = x^2 - 2x + 1$ есть б.м.в. в точке $x_0 = 1$. Заметим, что $\alpha(x) \underset{x\to 1}{=} O(\beta(x))$, ибо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} 5 = 5 \neq 0.$$

Пример Д.1.3. Функции $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = x$ есть б.м.в. в точке $x_0 = 0$. Заметим, что $\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} \beta(x)$, ибо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Определение Д.1.3. Б.м.в. $\alpha(x)$ называется б.м.в. *высшего* (или *более высокого*) *порядка малости* по сравнению с б.м.в. $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Обозначение: $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{=} o(\beta(x))$ (читается: $\alpha(x)$ равна o малое от $\beta(x)$ при $x \to x_0$).

Пример Д.1.4. Функции $\alpha(x) = (x+2)^5$, $\beta(x) = (x+2)^3$ есть б.м.в. в точке $x_0 = -2$. Заметим, что $\alpha(x) \underset{x\to -2}{=} o(\beta(x))$, ибо

$$\lim_{x\to -2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^5}{(x+2)^3} = \lim_{x\to -2}(x+2)^2 = 0.$$

Определение Д.1.4. Б.м.в. $\alpha(x)$ называется б.м.в. *низшего* (или *более низкого*) *порядка малости* по сравнению с б.м.в. $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty .$$

Пример Д.1.5. Функции $\alpha(x) = (x-3)^2$, $\beta(x) = (x-3)^4$ есть б.м.в. в точке $x_0 = 3$. Заметим, что $\alpha(x)$ является б.м.в. низшего порядка малости по сравнению с б.м.в. $\beta(x)$ при $x \to 3$, ибо

$$\lim_{x\to 3} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)^4} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty .$$

Пусть $k \in \mathrm{R}$, $k > 0$.

Определение Д.1.5. Б.м.в. $\alpha(x)$ называется б.м.в. *k-го порядка малости по* сравнению с б.м.в. $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если б.м.в. $\alpha(x)$ и $[\beta(x)]^k$ являются б.м.в. одного порядка малости при $x \to x_0$, т.е.

$$\exists \text{ конечный } \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = B,\ B \neq 0 .$$

Пример Д.1.6. Функции $\alpha(x) = x^4 + 7x^3$, $\beta(x) = x^2$ есть б.м.в. в точке $x_0 = 0$. Заметим, что $\alpha(x)$ является б.м.в. порядка малости $k = \dfrac{3}{2}$ по сравнению с б.м.в. $\beta(x)$ при $x \to 0$, ибо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 7x^3}{\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 7x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} (x+7) = 7 \neq 0 .$$

Теорема Д.1.1. Если б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке x_0 удовлетворяют условию $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$, то

$$\alpha(x) - \beta(x) \underset{x\to x_0}{=} o(\alpha(x)), \tag{Д.1.1}$$

$$\alpha(x) - \beta(x) \underset{x\to x_0}{=} o(\beta(x)), \tag{Д.1.2}$$

Имеем:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to x_0} \left[1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right] = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0 ,$$

а это означает, по определению Д.1.3, что выполняется (Д.1.1). Аналогично показывается справедливость (Д.1.2).

Верно и обратное утверждение.

Теорема Д.1.2. Если б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке x_0 удовлетворяют условию (Д.1.1) или (Д.1.2), то $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$.

Пусть, например, выполняется условие (Д.1.2). Это означает, согласно определению Д.1.3, что

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} = 0 .$$

Следовательно,

$$\exists \lim_{x\to x_0} \left[\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} + 1\right] = 0 + 1 = 1 , \tag{Д.1.3}$$

с другой стороны

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} + 1\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)+\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} . \tag{Д.1.4}$$

В силу (Д.1.3), (Д.1.4)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 ,$$

а это означает, по определению Д.1.2, что $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$.

Объединяя теоремы Д.1.1 и Д.1.2, приходим к следующему признаку эквивалентности двух б.м.в.:

$$\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x) \Leftrightarrow \alpha(x)-\beta(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(\alpha(x)\big),\ \alpha(x)-\beta(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(\beta(x)\big).$$

Замечание Д.1.2. При отыскании предела отношения двух б.м.в. $\alpha(x)$, $\beta(x)$ в точке x_0, т.е. при раскрытии неопределённости типа $\frac{0}{0}$, каждую из этих величин можно заменить эквивалентной ей б.м.в. при $x \to x_0$, ибо такая замена не влияет на существование и величину исходного предела.

Действительно, пусть $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha_1(x)$, $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta_1(x)$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=1,\ \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1. \tag{Д.1.5}$$

Тогда из представления

$$\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}$$

и условия (Д.1.5) видно, что если не существует предел отношения $\alpha_1(x)/\beta_1(x)$ в точке x_0, то не существует предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$ в этой точке. Из представления

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$$

видно, что если

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A,$$

то

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=1\cdot A\cdot 1=A.$$

Пример Д.1.7. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x^3+6x^2+3x}.$$

Решение. Функции $\alpha(x)=\sin 5x$, $\beta(x)=x^3+6x^2+3x$ есть б.м.в. в точке $x_0=0$, ибо

$$\lim_{x\to 0}\sin 5x=0,\ \lim_{x\to 0}\left(x^3+6x^2+3x\right)=0.$$

Заметим, что $\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$, $\beta(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$, ибо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\left|\begin{array}{l} u=5x \\ x\to 0, u\to 0\end{array}\right|=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3+6x^2+3x\right)}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{3}+2x+1\right)=1.$$

Тогда согласно замечанию Д.1.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x^3+6x^2+3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{3}=\frac{5}{3}.$$

Дополнение 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ, НЕЯВНЫХ И ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть заданы две функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ одной независимой переменной $t\in T$, где $T\subseteq \mathrm{R}$. Пусть функция $x=\varphi(t)$ строго монотонна на T. Тогда в силу теоремы 9.1 существует обратная для неё функция $t=\varphi^{-1}(x)$, определённая и строго монотонная на $D\left(\varphi^{-1}\right)=\varphi(T)$ ($\varphi(T)$ – образ множества T при отображении φ). Функция $y=\psi(t)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ представляет собой сложную функцию, задающую зависимость переменной y от переменной x посредством промежуточной переменной t (переменная t называется параметром). В этом случае функцию $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ называют *параметрически заданной функцией* и обозначают

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in T\ .$$

Геометрическая иллюстрация параметрически заданной функции представлены на рис. Д.2.1.

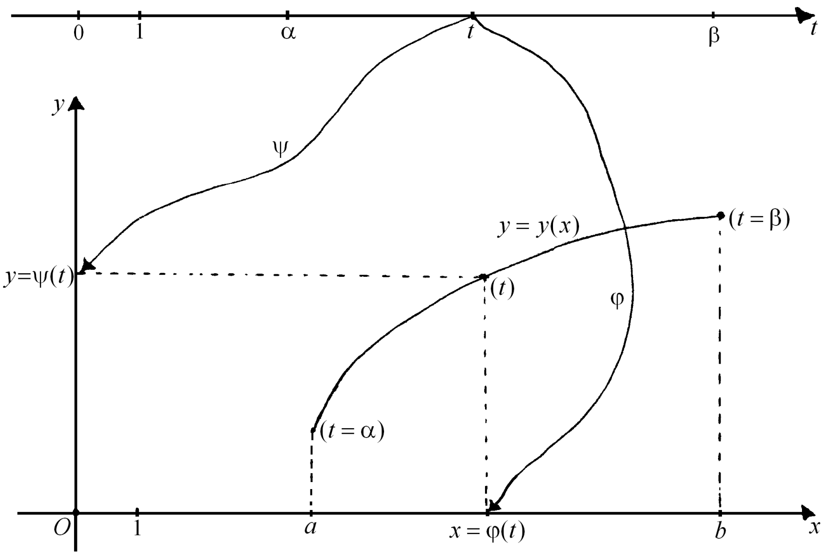

Рис. Д.2.1

Пусть функция $x=\varphi(t)$, будучи строго монотонной на T, дифференцируема на T и $\varphi'(t)\neq 0$, $\forall t\in T$. Тогда в силу теоремы 16.3 обратная для неё функция $t=\varphi^{-1}(x)$ дифференцируема на $D\left(\varphi^{-1}\right)=\varphi\left(T\right)$ и

$$\left[\varphi^{-1}(x)\right]'=\frac{1}{\varphi'\left(t\right)}.$$

Пусть функция $y=\psi(t)$ дифференцируема на T. Тогда, в силу следствия 16.2, сложная функция $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ дифференцируема на $D\left(\varphi^{-1}\right)=\varphi\left(T\right)$ и по правилу дифференцирования сложной функции

$$y'_x=\psi'(t)\left[\varphi^{-1}(x)\right]'=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Получили:

$$\begin{cases} y'_x=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \\ x=\varphi(t), \end{cases} \quad t\in T\ , \qquad (Д.2.1)$$

т.е. производная параметрически заданной функции является параметрически заданной функцией.

Соотношения (Д.2.1) можно записать в виде

$$\begin{cases} y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x=\varphi(t), \end{cases} \quad t\in T\ . \qquad (Д.2.2)$$

Пример Д.2.1. Пусть

$$\begin{cases} x=5t^3+7t, \\ y=12t^2+t, \end{cases} \quad t\in \mathrm{R}\ .$$

Функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ дифференцируемы на R, при этом функция $x=x(t)$ возрастает на R и $\varphi'(t)=15t^2+7\neq 0$, $\forall t\in \mathrm{R}$. Следовательно, применима формула (Д.2.2), в силу которой

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left(12t^2+t\right)'}{\left(5t^3+7t\right)'}=\frac{24t+1}{15t^2+7}.$$

Получили:

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{24t+1}{15t^2+7}, \\ x = 5t^3+7t, \end{cases} \quad t \in \mathrm{R}.$$

Пусть переменные x, y связаны соотношением

$$F(x,y) = 0. \qquad (Д.2.3)$$

Пусть для любого $x \in D$, где $D \subseteq \mathrm{R}$, соотношение (Д.2.3) однозначно разрешимо относительно y. Тогда можно рассмотреть функцию $y = y(x)$, которая каждому $x \in D$ ставит в соответствие корень y уравнения (Д.2.3). В этом случае говорят, что соотношение (Д.2.3) задаёт *неявную функцию* $y = y(x)$.

Геометрическая иллюстрация неявной функции представлена на рис. Д.2.2.

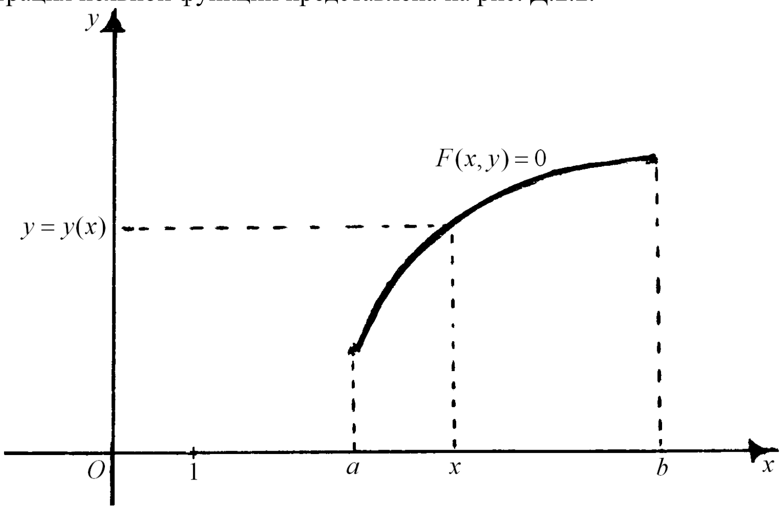

Рис. Д.2.2

Заменяя в (Д.2.3) y на $y(x)$, получаем тождество относительно $x \in D$:

$$F\left(x, y(x)\right) = 0. \qquad (Д.2.4)$$

Пусть функция $y = y(x)$ дифференцируема на D. Тогда для нахождения её производной y' надо обе части тождества (Д.2.4) продифференцировать по x (применяя при этом правило дифференцирования сложной функции) и из полученного уравнения найти y'.

Пример Д.2.2. Пусть неявная функция $y = y(x)$ задана соотношением

$$x^2y^5 + 7y^2 - x^3 = 0. \qquad (Д.2.5)$$

Дифференцируя обе части (Д.2.5) по x, считая при этом y функцией аргумента x, получаем:

$$2xy^5 + x^2 \cdot 5y^4y' + 7 \cdot 2yy' - 3x^2 = 0,$$

$$y'\left(5x^2y^4 + 14y\right) = 3x^2 - 2xy^5,$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy^5}{5x^2y^4 + 14y}$$

при условии, что $5x^2y^4 + 14y \neq 0$.

Рассмотрим показательно-степенную функцию

$$y = \left[\varphi(x)\right]^{\psi(x)}, \qquad (Д.2.6)$$

$x \in D(y) \subseteq \mathrm{R}$ (предполагается, что $\varphi(x) > 0$, $\forall x \in D(y)$). Эту функцию можно записать в виде

$$y = e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}. \qquad (Д.2.7)$$

Замечание Д.2.1. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на некотором множестве $D \subseteq D(y)$, то функция (Д.2.6) непрерывна на D.

Действительно, в силу теоремы 13.6 логарифмическая функция непрерывна на своей области определения. Тогда в силу следствия 13.5 сложная функция $\ln\varphi(x)$ непрерывна на D. Значит, в силу следст- вия 13.1 функция $\psi(x)\ln\varphi(x)$ непрерывна на D, следовательно, в силу непрерывности показательной функции, функция (Д.2.7) (и тем самым, функция (Д.2.6)) непрерывна на D.

Замечание Д.2.2. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы на некотором множестве $D \subseteq D(y)$, то функция (Д.2.6) дифференцируема на *D*.

Действительно, в силу теоремы 16.5 логарифмическая функция дифференцируема на своей области определения. Тогда в силу следствия 16.2 сложная функция $\ln\varphi(x)$ дифференцируема на D и

$$[\ln\varphi(x)]' = \frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x). \tag{Д.2.8}$$

Значит, в силу теоремы 16.1 функция $\psi(x)\ln\varphi(x)$ дифференцируема на D и

$$[\psi(x)\ln\varphi(x)]' = \psi'(x)\ln\varphi(x) + \psi(x)\cdot[\ln\varphi(x)]'$$

или, учитывая (Д.2.8),

$$[\psi(x)\ln\varphi(x)]' = \psi'(x)\ln\varphi(x) + \psi(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}. \tag{Д.2.9}$$

Применяя формулу $\left(e^u\right)' = e^u\cdot u'$, получаем из (Д.2.7), (Д.2.9)

$$y' = e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}\cdot\left[\psi'(x)\ln\varphi(x) + \psi(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]$$

или

$$\left([\varphi(x)]^{\psi(x)}\right)' = [\varphi(x)]^{\psi(x)}\left[\psi'(x)\ln\varphi(x) + \psi(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]. \tag{Д.2.10}$$

или

$$\left([\varphi(x)]^{\psi(x)}\right)' = [\varphi(x)]^{\psi(x)}\ln\varphi(x)\cdot\psi'(x) + \psi(x)[\varphi(x)]^{\psi(x)-1}\cdot\varphi'(x). \tag{Д.2.11}$$

Получена формула для нахождения производной показательно-степенной функции. Заметим, что $\psi(x)\ln\varphi(x) = \ln y$ и формулу (Д.2.10) можно записать в виде

$$y' = y\cdot(\ln y)'. \tag{Д.2.12}$$

Производную от натурального логарифма заданной функции называют *логарифмической производной* этой функции. Нахождение логарифмической производной функции называется *логарифмическим дифференцированием*.

Итак, если функция $y = y(x)$ положительна и дифференцируема на $D \subseteq D(y)$, то её производную можно находить по формуле (Д.2.12).

Из формулы (Д.2.11) видно, что производная показательно-степенной функции равна сумме двух слагаемых, первое из которых получено по правилу дифференцирования показательной функции: $\left(a^u\right)' = a^u\ln a\cdot u'$, а второе – по правилу дифференцирования степенной функции: $\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$.

Пример Д.2.3. Найти производную функции

$$y = (\cos x)^{\sin x}.$$

Решение.

$$\ln y = \ln(\cos x)^{\sin x},$$

$$\ln y = \sin x\cdot\ln(\cos x),$$

$$(\ln y)' = [\sin x\cdot\ln(\cos x)]',$$

$$\frac{1}{y}y' = (\sin x)'\ln(\cos x) + \sin x\cdot(\ln(\cos x))',$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x\cdot\ln(\cos x) + \sin x\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x),$$

$$y' = y[\cos x\cdot\ln(\cos x) - \sin x\,\mathrm{tg}\,x],$$

$$y' = (\cos x)^{\sin x}[\cos x\cdot\ln(\cos x) - \sin x\,\mathrm{tg}\,x].$$

Формулу (Д.2.12) удобно применять при нахождении производных функций, содержащих большое число сомножителей.

Пример Д.2.4. Найти производную функции

$$y=\frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}\,.$$

Решение.

$$y=(x-1)^{\frac{5}{6}}(x+2)^{-4}(x-5)^{-7}\,,$$

$$\ln y=\frac{5}{6}\ln(x-1)-4\ln(x+2)-7\ln(x-5)\,,$$

$$\left(\ln y\right)'=\left[\frac{5}{6}\ln(x-1)-4\ln(x+2)-7\ln(x-5)\right]',$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x-1}-4\cdot\frac{1}{x+2}-7\cdot\frac{1}{x-5}\,,$$

$$y'=y\left[\frac{5}{6(x-1)}-\frac{4}{x+2}-\frac{7}{x-5}\right],$$

$$y'=\frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}\left[\frac{5}{6(x-1)}-\frac{4}{x+2}-\frac{7}{x-5}\right].$$

Д о п о л н е н и е 3. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ ТИПА 1^{∞}, $0^0, \infty^0$

При вычислении пределов вида

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{Д.3.1}$$

могут возникать неопределённости типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ (см. лекцию 12). Для раскрытия таких неопределённостей используется правило Лопиталя, выражаемое следующими утверждениями.

Теорема Д.3.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой $\dot{O}_\delta(x_0)$;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;
3) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in \dot{O}_\delta(x_0)$;
4) существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\,. \tag{Д.3.2}$$

Тогда существует предел вида (Д.3.1) и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\,. \tag{Д.3.3}$$

Заметим, прежде всего, что отношение $f(x)/g(x)$ определено в $\dot{O}_\delta(x_0)$, ибо из условия 3) следует, что

$$g(x)\neq 0\,,\ \forall x\in \dot{O}_\delta(x_0)\,. \tag{Д.3.4}$$

Действительно, : $\exists x_*\in \dot{O}_\delta(x_0)\mid g(x_*)=0$. Пусть, для определённости, $x_*>x_0$. Рассмотрим функцию вида

;

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases} g(x), & x\in \dot{O}_\delta(x_0),\\ 0, & x=x_0.\end{cases} \tag{Д.3.5}$$

Функция $\tilde{g}(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\tilde{g}(x)=\tilde{g}(x_0)$, ибо $\lim\limits_{x\to x_0}\tilde{g}(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ в силу условия 2) и $\tilde{g}(x_0)=0$ по определению. Таким образом, функция $\tilde{g}(x)$ непрерывна в $O_\delta(x_0)$ (её непрерывность в $\dot{O}_\delta(x_0)$ вытекает из условия 1) в силу следствия 15.1). Значит, $\tilde{g}(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_*] \subset O_\delta(x_0)$, дифференцируема на интервале $(x_0, x_*) \subset \dot{O}_\delta(x_0)$ (в силу условия 1)) и $\tilde{g}(x_0) = \tilde{g}(x_*) = 0$, ибо $\tilde{g}(x_*) = g(x_*) = 0$. Мы оказались в условиях теоремы Ролля (см. теорему 17.5), в силу которой $\exists c \in (x_0, x_*) \,|\, \tilde{g}'(c) = 0$. Но $\tilde{g}'(c) = g'(c)$. Получили: $g'(c) = 0$, а это противоречит условию 3). Справедливость соотношения (Д.3.4) установлена.

Зафиксируем произвольное $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$. Пусть, для определённости, $x > x_0$ (случай $x < x_0$ рассматривается аналогично). Рассмотрим функцию вида

;

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \dot{O}_\delta(x_0), \\ 0, & x = x_0. \end{cases} \tag{Д.3.6}$$

В силу условий 1), 2) функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна в $O_\delta(x_0)$, в частности, она непрерывна на отрезке $[x_0, x] \subset O_\delta(x_0)$. В силу условия 2) функция $\tilde{f}(x)$ дифференцируема на интервале $(x_0, x) \subset \dot{O}_\delta(x_0)$. Этим же условиям удовлетворяет функция $\tilde{g}(x)$, и, кроме того, в силу условия 3) $\tilde{g}'(x) = g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (x_0, x)$. Итак, функции $\tilde{f}(x)$, $\tilde{g}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши (см. теорему 17.8), в силу которой $\exists c \in (x_0, x) \,|$

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)} = \frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)}$$

или в силу (Д.3.5), (Д.3.6)

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Получили:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \ \forall x \in O_\delta(x_0), \tag{Д.3.7}$$

где $x_0 < c < x$ ($x < c < x_0$ в случае $x < x_0$). Заметим, что $c \to x_0$ при $x \to x_0$. Используя условие 4) и совершая предельный переход в равенстве (Д.3.7) при $x \to x_0$, получаем (Д.3.3). ◄

Теорема 1 сохраняет силу, если в качестве предельной точки выступает $+\infty$ или $-\infty$ [6, с. 135]. Пусть, например, в качестве предельной точки выступает $+\infty$.

Теорема Д.3.2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на открытой полуоси $(a, +\infty)$;
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$;
3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, +\infty)$;
4) существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)/g(x)]$ и

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \tag{Д.3.8}$$

Утверждения, аналогичные теоремам Д.3.1 и Д.3.2, имеют место в случае, когда отношение $f(x)/g(x)$ представляет собой при $x \to x_0$ ($x \to +\infty$ или $x \to -\infty$) неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$ [6, с. 137].

Теорема Д.3.3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям 1), 3), 4) теоремы Д.3.1 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ (здесь под символом ∞ понимается $+\infty$ или $-\infty$). Тогда справедлива формула (Д.3.3).

Теорема Д.3.4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям 1), 3), 4) теоремы Д.3.2 и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \infty$. Тогда справедлива формула (Д.3.8).

Замечание Д.3.1. Если при раскрытии неопределенности типа $\frac{0}{0}$ (или $\frac{\infty}{\infty}$) по правилу Лопиталя полученное отношение производных $f'(x)/g'(x)$ тоже представляет неопределённость указанного типа и производные $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют тем же условиям теоремы, что и исходные функции $f(x)$, $g(x)$, то правило Лопиталя нужно применить ещё раз (правило Лопиталя применяют до тех пор, пока не удастся избавиться от неопределённости указанного типа).

Замечание Д.3.2. В некоторых случаях применение правила Лопиталя не приводит к желаемому результату.

Пример Д.3.1. Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\operatorname{ch}x}{e^x}.$$

Решение.

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\operatorname{ch}x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\operatorname{ch}x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\operatorname{sh}x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\operatorname{sh}x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\operatorname{ch}x}{e^x}=\ldots.$$

Данный предел можно вычислить непосредственно:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\operatorname{ch}x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)=1+0=1.$$

Замечание Д.3.3. При применении правила Лопиталя вопросы о дифференцируемости соответствующих функций и существовании предела отношения их производных решаются непосредственно в ходе вычислений.

Замечание Д.3.4. После применения правила Лопиталя целесообразно упростить полученное отношение производных. В частности, если в отношении производных удаётся выделить множитель, имеющий конечный ненулевой предел в рассматриваемой предельной точке, то следует применить теорему о пределе произведения функций (см. теорему 12.2).

Пример Д.3.2. Найти

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x)}{\ln(\cos3x)}.$$

Решение.

$$A=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x)}{\ln(\cos3x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{[\ln(\cos2x)]'}{[\ln(\cos3x)]'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos2x}(-\sin2x)\cdot2}{\frac{1}{\cos3x}(-\sin3x)\cdot3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\left[\frac{\cos3x}{\cos2x}\cdot\frac{\sin2x}{\sin3x}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\cos3x}{\cos2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin3x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{(\sin2x)'}{(\sin3x)'}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\cos2x\cdot2}{\cos3x\cdot3}=\frac{4}{9}\lim_{x\to0}\frac{\cos2x}{\cos3x}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1}=\frac{4}{9};$$

$A=\frac{4}{9}$.

Замечание Д.2.5. Если в ходе применения правила Лопиталя выясняется, что предел отношения производных функций не существует, то это вовсе не означает, что предел отношения самих функций тоже не существует (в этом случае правило Лопиталя нельзя применять из-за невыполнимости условия 4) соответствующей теоремы).

Пример Д.3.3. Вычислить

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}.$$

Решение. Отношение $(x+\sin x)/x$ представляет собой при $x\to+\infty$ неопределённости типа $\frac{\infty}{\infty}$, но правило Лопиталя применять нельзя, ибо предел отношения производных

$$\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x$$

при $x\to+\infty$ не существует. Данный предел можно найти непосредственно:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1.$$

При вычислении предела показательно-степенной функции, т.е. предела вида

$$\lim_{x\to x_0}\left[\varphi(x)\right]^{\psi(x)} \tag{Д.3.9}$$

(предполагается, что $\varphi(x)>0$; в качестве предельной точки может выступать $+\infty$ или $-\infty$) могут возникать неопределённости следующих типов:

$$1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}. \tag{Д.3.10}$$

(неопределённость типа 1^{∞} в некоторых случаях может быть раскрыта с помощью второго замечательного предела).

Каждая из неопределённостей типа (Д.3.10) сводится к неопределённости типа $0\cdot\infty$, которая, в свою очередь, сводится к неопределённости типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ (см. лекцию 12), а последние две неопределённости можно раскрыть с помощью правила Лопиталя:

$$1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}\longrightarrow 0\cdot\infty \begin{matrix}\dfrac{0}{0}\\ \dfrac{\infty}{\infty}\end{matrix}. \tag{Д.3.11}$$

Действительно, пусть

$$y=\left[\varphi(x)\right]^{\psi(x)}. \tag{Д.3.12}$$

Тогда в силу равенства $\ln b^{m}=m\ln b$

$$\ln y=\psi(x)\ln\varphi(x). \tag{Д.3.13}$$

В силу основного логарифмического тождества $e^{\ln b}=b$ получаем:

$$\lim_{x\to x_0} y=e^{\ln\lim\limits_{x\to x_0} y}. \tag{Д.3.14}$$

В силу непрерывности логарифмической функции

$$\ln\lim_{x\to x_0} y=\lim_{x\to x_0}\ln y. \tag{Д.3.15}$$

Из (Д.3.14) и (Д.3.15) следует, что

$$\lim_{x\to x_0} y=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\ln y}. \tag{Д.3.16}$$

Из (Д.3.16) видно, что для нахождения предела показательно-степенной функции достаточно найти предел логарифма этой функции.

Если функция (Д.3.12) представляет собой при $x\to x_0$ любую из неопределённостей типа (Д.3.10), то функция (Д.3.13) представляет собой в этой точке x_0 неопределённость типа $0\cdot\infty$.

Пример Д.3.4. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\sin x}.$$

Решение.

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\sin x}=\left(\infty^{0}\right)\boxed{=}$$

$$y=\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\sin x},\ \ln y=\sin x\cdot\ln\left(\operatorname{ctg}x\right),$$

$$B=\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\left[\sin x\cdot\ln\left(\operatorname{ctg}x\right)\right]=\left(0\cdot\infty\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\operatorname{ctg}x\right)}{1/\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln\left(\operatorname{ctg}x\right)\right]'}{\left[1/\sin x\right]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\operatorname{ctg}x\right)\left(-1/\sin^{2}x\right)}{\left(-1/\sin^{2}x\right)\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^{2}x}=\frac{0}{1^{2}}=0,$$

$$B = \lim_{x \to 0} \ln y = 0,$$

$$\boxed{=}\ e^{\lim\limits_{x \to 0} \ln y} = e^0 = 1;$$

$A = 1$.

Приложение 1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ

1. Степенная функция: $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathrm{R}$ (рис. П.1.1 и П.1.2).

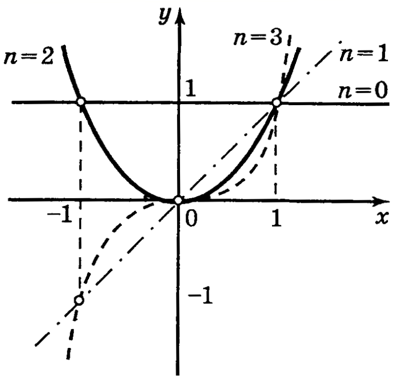

Рис. П.1.1

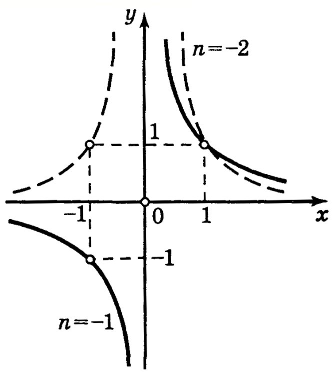

Рис. П.1.2

2. Показательная функция: $y = a^x$, $a \in \mathrm{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. П.1.3).

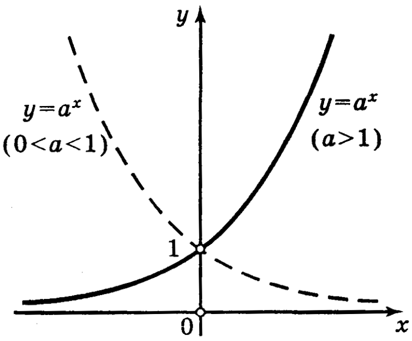

Рис. П.1.3

3. Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a \in \mathrm{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ($y = \log_a x ::= x = a^y$) (рис. П.1.4).

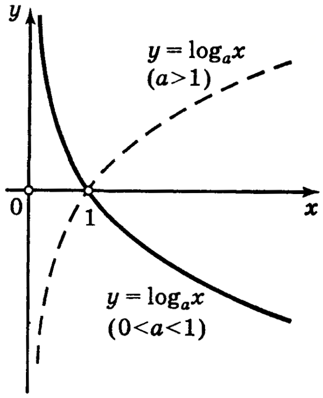

Рис. П.1.4

4. Тригонометрический функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ ($\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$) (рис. П.1.5 и П.1.6).

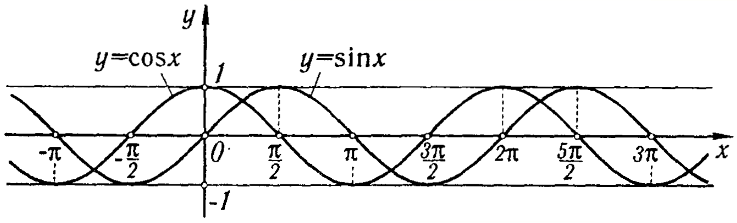

Рис. П.1.5

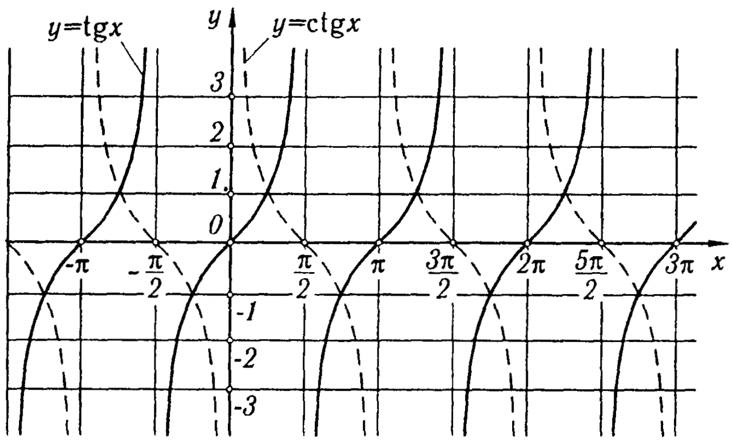

Рис. П.1.6

5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. П.1.7 – П.1.10):

$$y = \arcsin x \ ::= \left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \wedge (\sin y = x),$$

$$y = \arccos x \ ::= \left(y \in [0; \pi] \right) \wedge (\cos y = x),$$

$$y = \operatorname{arctg} x \ ::= \left(y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \wedge (\operatorname{tg} y = x),$$

$$y = \operatorname{arcctg} x \ ::= \left(y \in (0; \pi) \right) \wedge (\operatorname{ctg} y = x).$$

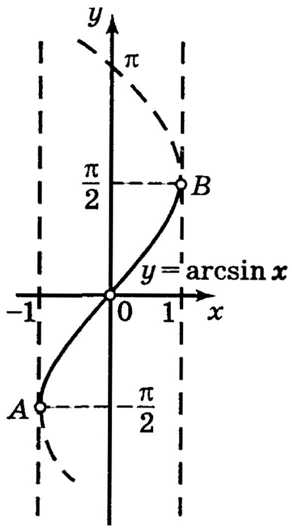

Рис. П.1.7

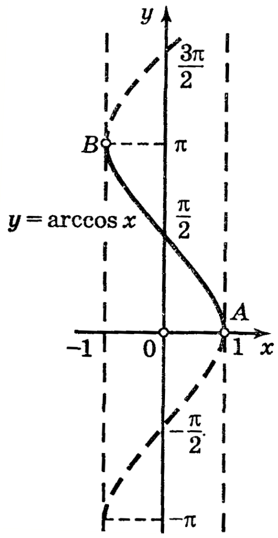

Рис. П.1.8

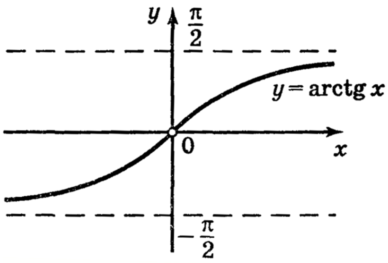

Рис. П.1.9

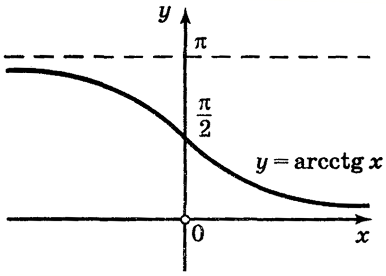

Рис. П.1.10

6. Гиперболические функции: $y=\operatorname{sh}x$, $y=\operatorname{ch}x$, $y=\operatorname{th}x$, $y=\operatorname{cth}x$ (рис. П.1.11 и П.1.12):

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\ \operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},\ \operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}.$$

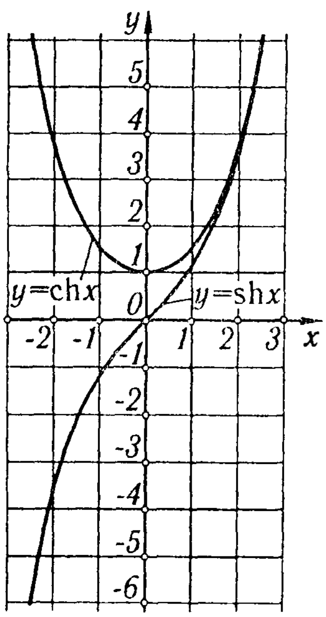

Рис. П.1.11

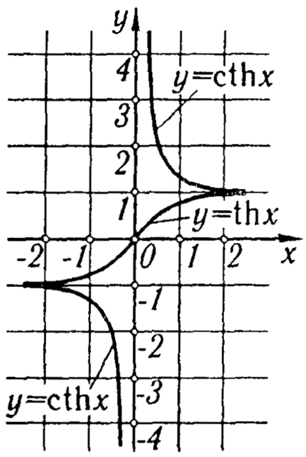

Рис. П.1.12

П р и л о ж е н и е 2. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1. *Рациональная функция*: $y = P_n(x)$, где $P_n(x)$ − многочлен степени *n*:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n;$$

$$a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathrm{R}; \quad a_0 \neq 0 .$$

Частные случаи:

- *линейная функция*:

$$y = ax + b; \quad a, b \in \mathrm{R}; \quad a \neq 0;$$

- *квадратичная функция*:

$$y = ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathrm{R}; \quad a \neq 0.$$

2. *Дробно-рациональная функция*:

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ − многочлены степени *n* и *m*, соответственно.

Частные случаи:

- *дробно-линейная функция*:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}; \quad a, b, c, d \in \mathrm{R}; \quad c \neq 0.$$

П р и л о ж е н и е 3. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$y = f(x)$	$y = f(u(x))$
1. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$	2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	3. $(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a}\cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$
4. $(\sin x)' = \cos x$	4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5. $(\cos x)' = -\sin x$	5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
6. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	6. $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
7. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	7. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

Продолжение прил. 3

$y = f(x)$	$y = f(u(x))$
9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	9. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
10. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	10. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
11. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	11. $(\mathrm{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
12. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$	12. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$
13. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$	13. $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$

$14.\ (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$14.\ (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$
$15.\ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$15.\ (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

П р и л о ж е н и е 4. БИОГРАФИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

АРХИМЕД (ок. 287 – 212 до н.э.) – древнегреческий математик, физик и механик. Род. в Сиракузах. Предполагают, что его отцом был астроном Фидий. Часть науч. работ А. дошла до нас в форме писем к *Эратосфену*, *Конону*, *Досифею*. А. – автор многочисленных открытий и изобретений: машины для орошения полей, водоподъёмного механизма (архимедова винта), системы рычагов, блоков для поднятия больших тяжестей, военных метательных машин и т.п. Во время II Пунической войны А. возглавлял оборону Сиракуз. Его метательные машины вынудили римлян отказаться от попытки взять город штурмом и заставили перейти к осаде.

Известны такие соч. А.: "О квадратуре параболы", "Послание к Эратосфену о некоторых теоремах механики", "О спиралях", "Об измерении круга", "О числе песчинок", "Книга лемм", "Построение правильного семиугольника". Центр. тема матем. работ А. – задачи на нахождение площадей поверхностей и объёмов посредством разработанных им методов, к-рые через два тысячелетия развились в интегральное исчисление. В основоположных работах по статике и гидростатике А. систематически применяет математику к задачам естествознания и техники. В одном из ранних матем. соч. "О квадратуре параболы" А. дважды выводит формулу площади параболического сегмента – механически и геометрически; находит сумму геом. прогрессии. В более позднем соч. "О шаре и цилиндре" А. вычисляет поверхности и объёмы шара, шарового сегмента и цилиндра, используя для этого поверхности и объёмы тел, образованных вращением (вокруг диаметра), мн-ков, вписанных в круг и описанных вокруг него, а шар рассматривает как предел объёмов этих тел вращения. В этом же соч. дано геом. решение куб. ур-ния и сформулирована аксиома А.: если A и B – два значения одной и той же величины, причём $A < B$, то всегда можно найти такое целое число m, что $Am > B$. На этой аксиоме основан процесс последовательного деления в арифметике и геометрии. В 1906 было найдено "Послание к Эратосфену о некоторых теоремах механики", или, как ещё называют это соч., "Метод", где до нек-рой степени освещены приёмы, с помощью к-рых А. доказывал осн. теоремы. В работе "О спиралях" А. рассматривает спираль с ур-нием $\rho = a\varphi$ (архимедова спираль), здесь же он выполняет суммирование квадратов последовательных натуральных чисел. В соч. "О коноидах и сфероидах" А. определяет объёмы тел, получаемых от вращения параболы, гиперболы, эллипса и их сегментов. В соч. "Об измерении круга" путём сопоставления периметров вписанного и описанного 96-угольников доказывает, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$; здесь впервые в науке даны оценка погрешности и способ определения степени точности полученного результата. Введённое А. для π приближенное значение $\frac{22}{7} \approx 3{,}14$ оказалось вполне удовлетворительным для практики того времени; оно применяется и сейчас. В соч. "О числе песчинок" А. даёт систему наименований целых чисел, позволяющую выражать сколь угодно большие числа, и опровергает распространённое мнение о существовании "самых больших чисел".

Для более позднего творчества А. характерен его интерес к точным вычислениям и астрономии. Крупнейшим его достижением в астрономии было построение планетария – полой вращающейся сферы, на к-рой можно было наблюдать движение Солнца и пяти планет, фазы Луны, солнечные и лунные затмения. Из последних работ А. особенно важно соч. "О плавающих телах", содержащее закон, названный его именем. Соч. А. изданы на мн. яз., в т.ч. и на рус. (1962). Именем А. назван кратер на видимой стороне Луны.

БОЛЬЦАНО Бернард (5.10.1781 – 18.12.1848) – чешский математик, философ и логик. Род. в Праге. В 1800 окончил философский и 1805 – теологический факультеты Пражского ун-та с присвоением учёной степени д-ра философии. В 1805 – 20 занимал кафедру истории религии в Пражском ун-те. За выступления против австр. пр-ва отстранён от работы (1820), отдан под тайный надзор полиции и лишён права публ. выступлений. При жизни Б. напечатал (анонимно) только пять небольших матем. соч. и ряд философских трудов. Осн. часть большого рукописного наследства Б. чешские учёные исследовали после его смерти. Большой матем. труд Б. "Учение о функциях", написанной в 1830, увидел свет только через сто лет. В нём, в частности, Б. (за 30 лет до К.Т. Вейерштрасса) строит непрерывную кривую, не имеющую касательной ни в одной точке. Б. установил совр. понятие сходимости рядов и за неск. лет до выхода в свет "Алгебраического анализа" О.Л. Коши пользовался критерием сходимости, именуемым обычно критерием Коши. Теорему о том, что всякое бесконечное множество чисел, заключённых в замкнутом интервале, имеет в нём по меньшей мере одну предельную точку, Б. упоминает за много лет до того, как её сформулировал К.Т. Вейерштрасс. Уточнив понятия предела и непрерывности, Б. впервые строго доказал теорему о том, что непрерывная функция принимает любое промежуточное значение, лежащее между двумя её разными значениями. В "Парадоксах бесконечного" (изд. в 1851), написанных Б. в последний год жизни, содержится определение бесконечного множества как равномощного своей правильной части; здесь Б. явился предшественником Г. Кантора – творца теории множеств. Б. опубл. обширный труд по логике – "Наукознание" (1837), в к-ром развил положения, предвосхитившие идеи матем. логики. В начале 30-х гг. XIX в. Б. сделал попытку построения теории действительных чисел, к-рая после нек-рых уточнений совпадает с теорией Г. Кантора. Приоритет способа обоснования арифметики натуральных чисел методом матем. индукции, к-рый связывают с именем Г.Г. Грасмана, принадлежит Б. В классическом анализе и теории функций известен принцип выбора Б., лемма Б.–Вейерштрасса об ограниченной последовательности и др.

В 1861 учреждён фонд имени Б. в Карловом ун-те. В 1923 Чешское об-во наук создало комиссию по изданию наследия Б. Список изд. трудов Б. содержит 83 назв. В философии Б. стоял на позициях объективного идеализма. Разделяя взгляды социалистов-утопистов, Б. выступал с резкой критикой реакционных общественных порядков. Свои взгляды по соц.-полит. вопросам Б. изложил в труде "О наилучшем государстве" (1830, впервые опубл. в 1932). Учреждена медаль им. Б. Больцано.

ВЕЙЕРШТРАСС Карл Теодор Вильгельм (31.10.1815 – 19.2.1897) – немецкий математик, чл. Берлин. АН (1856). Род. в Остенфельде. Спец. высшего образования не имел. Изучал юридические науки в Бонне, но, увлекшись математикой, оставил юридический ф-т. В 1841 сдал экзамены на звание учителя. В 1842 – 55 – преподаватель математики в католических ср. уч. заведениях Дейч-Кронса и Броунберга. С 1856 – экстраординарный, с 1865 – ординарный проф. Берлин, ун-та. Большинство работ напечатано после его смерти, а при жизни идеи В. распространяли многочисленные слушатели его лекций из разных стран. Лекции В. имели огромное значение для развития математики. В них впервые с достаточной строгостью рассматривался ряд осн. матем. понятий. Лекции и науч. статьи В. посвящены матем. анализу, теории аналитических функции, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре. Большое значение для математики имеет разрабатывавшаяся В. система логического обоснования матем. анализа, основанная на построенной им теории действительных чисел. Значительны результаты В. в области матем. анализа: систематическое использование понятий верхней и нижней граней числовых множеств, учение о предельных точках, строгое обоснование свойств непрерывных функций, построение примера непрерывной функции, нигде не имеющей производной (во всем этом предшественником В. был чеш. математик *Б. Больцано*), доказательство теоремы о возможности разложения любой непрерывной на отрезке функции в равномерно сходящийся ряд многочленов, науч. критика тех доказательств, к-рые основываются на допущении существования функции, реализующей экстремум нек-рого функционала, и др. Именем В. названы апроксимационная теорема, признак равномерной сходимости, функция; есть также функция *В.–Стоуна.* Значительное место в работах В. занимает теория аналитических функций. Ему принадлежат: теорема о том, что функцию, аналитическую в круговом кольце, можно разложить в степенной ряд по целым положительным и отрицательным степеням переменной (эту теорему независимо от В. доказал франц. математик *П. Лоран*, его именем она и названа), построение теорем об аналитическом продолжении, теорема об аналитичности суммы равномерно сходящегося в нек-рой области ряда аналитических функций, разложение целых функций в бесконечные произведения (обобщение разложения многочленов на множители), новое построение теории эллиптических функций (на основе введенных им функций $\sigma(z)$, $\xi(z)$ и $\gamma(z)$, создание основ теории аналитических функций мн. переменных, работы по теории алгебр. функций и абелевых интегралов. К вариационному исчислению относятся: исследование достаточных условий экстремума интеграла (условие В.), построение вариационного исчисления для случая параметрического задания функций, когда все ф-лы приобретают особенно симметричный вид и вместе с тем достигают наибольшей общности, изучение "разрывных" решений в задачах вариационного исчисления и др. В дифференциальной геометрии В. изучал геодезические линии и минимальные поверхности. В линейной алгебре В. принадлежит построение теории элементарных делителей, относящейся к приведению матриц к каноническому виду и имеющей большое значение для теории систем линейных, в том числе дифференциальных, ур-ний. В. доказал теорему о том, что комплексные числа образуют над полем действительных чисел единственную коммутативную алгебру без делителей нуля (1872). В. занимался приложениями математики к механике и физике и поощрял своих многочисленных учеников работать в этом направлении. Учениками В. были: С. *В. Ковалевская*, *Г. Миттаг-Леффлер*, *К. Шварц*, *И. Фукс*, Ф. *Шоттки*, *Л. Кёнигсбергер* и др. В. – почётный чл. Петерб. АН (1895), чл. Париж. АН (1868). В 1967 были изданы его труды (т. I – VII). Именем В. назван кратер на обратной стороне Луны.

ГЕЙНЕ Генрих Эдуард (16.3.1821 – 21.10.1881) – немецкий математик. Чл.-кор. Прусской АН и Гёттингенской АН. Род. в Берлине. Учился в Берлине и Гёттингене, затем работал в ун-тах в Бонне и Галле Осн. труды по матем. физике (теории потенциала), теории дифференциальных ур-ний в частных производных и особенно теории функций, где Г., в частности, развил далее теорию функций Ламе, гамма-функций и цилиндрических функций; термин "цилиндрическая функция" был предложен Г. Одна из теорем теории функций, утверждающая, что любая числовая функция, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале, будет на нём равномерно непрерывна, носит название теоремы *Г.–Бореля.* Ряд работ Г. посвящён проблеме единственности тригонометрических рядов.

ДАРБУ Жан Гастон (13.8.1842 – 23.2.1917) – французский математик. Чл. Париж АН (1884), ее секретарь (с 1900). Род. в Ниме. Окончил Высшую норм. школу в Париже (1864). Проф. Математики в Коллеж де Франс, с 1873 – в Сорбонне. Многочисленные иссл. Д. касаются почти всех отраслей физико-матем. знаний, но осн. труды посвящены дифференциальной геометрии и дифференциальным ур-ниям. В дифференциальной геометрии Д. получил много важных результатов, относящихся к теории поверхностей и теории криволинейных координат (в частности, ввел т.н. тетрациклические и пентасферичеcкне координаты). Систематическое изложение полученных результатов Д. дал в многотомных "Лекциях по общей теории поверхностей" (1887 – 96) и в "Лекциях об ортогональных системах и криволинейных координатах" (1898). В этих трудах, кроме собств. результатов, он изложил и результаты иссл. по дифференциальной геометрии кривых и поверхностей за 100 лет. Геом. исследования привели Д. к рассмотрению разл. вопросов интегрирования дифференциальных ур-ний. В частности, он обобщил каскадный метод *П. Лапласа*, распространил его на все ур-ния с частными производными 2-го порядка, а также уточнил метод *Г. Монжа* для нелинейных ур-ний (ур-ние Д.). В теории обыкновенных дифференциальных ур-ний изучил ур-ния 1-го порядка, ур-ния, интегрируемые с помощью найденных в достаточном кол-ве частных решений, и ур-ния, интегрируемые алгебраически. В теории определённых интегралов имя Д. носят т.н. верхний и нижний интегралы, верхняя и нижняя суммы и др. Важные результаты Д. получил в теории аналитических функций; занимался разложением функций по шаровым функциям и по ортогональным функциям, в частности по полиномам *Якоби*; написал работы о решении ур-ний 4-й степени, по алгебр. теории квадратичных форм. Плодотворно занимался разл. вопросами кинематики, равновесия, малых колебаний систем точек и др. Именем Д. названы: вектор, тензор, линии, поверхность, пучок, квадрика, трехгранник и др. Чл.-кор. Петерб. АН (1895), чл. мн. академий наук и науч. об-в.

ДЕДЕКИНД Рихард Юлиус Вильгельм (6.10.1831 –12.2.1916) – немецкий математик, чл. Берлин. АН (1880). Род. в Брауншвейге, учился у *К. Гаусса* и *П. Дирихле* в Гёттингенском ун-те. Работал там же и в Цюрихском ун-те, с 1862 – проф. Высшей технической школы в Брауншвейге. Осн. труды по теории алгебр. чисел. Изложил их в "Одиннадцатом дополнении" к "Лекциям по теории чисел" Дирихле. В трудах Д. заложены основы совр. алгебры, изучающей произвольные поля, кольца, группы, структуры и модули. В частности, ввёл понятие кольца и (независимо от *Е.И. Золотарева*) дал совр. общее определение идеала. В ходе работ по теории идеалов Д. пришел к рассмотрению понятия упорядоченного множества в более общей форме, чем у *Г. Кантора.* Одним из первых дал теоретико-множественное обоснование теории действительных чисел. Сформулировал (1888) систему аксиом арифметики (её обычно называют аксиомами *Пеано*), содержащую, в частности, точную формулировку принципа полной матем. индукции. Ввёл в математику в самом общем виде теоретико-множественное понятие отображения. В конце XIX в. в ряде мемуаров Д. разработал основу теории структур, к-рая лишь в 30-е гг. XX в. стала восприниматься как один из центр. разделов совр. алгебры. С именем Д. связаны многочисленные матем. утверждения и термины: кольцо, поле, структуры, сечения, функции, теоремы, принцип взаимности и др. Д. издал лекции Дирихле по теории чисел, а также (совместно с *Г. Вебером*) полное собр. соч. *Б. Римана.* Чл. Париж. АН, Нац. академии деи Линчеи и др.

ДИРИХЛЕ Петер Густав Лежен (13.2.1805 – 5.5.1859) – немецкий математик. Род. в Дюрене. В 1822 – 27 был домашним учителем в Париже. Входил в кружок молодых учёных, к-рые группировались вокруг *Ж. Фурье.* В 1827 занял место доц. в Бреславе; с 1829 работал в Берлине. В 1831 – 55 – проф. Берлин, ун-та, после смерти *К. Гаусса* (1855) – Гёттингенского ун-та. Сделал ряд крупных открытий в теории чисел; установил ф-лы для числа классов бинарных квадратичных форм с заданным определителем и доказал теорему о бесконечности кол-ва простых чисел в арифметической прогрессии из целых чисел, первый чл. и разность к-рой взаимно просты. К решению этих задач применил аналитические функции, названные функциями (рядами) Д. Создал общую теорию алгебр. единиц в алгебр. числовом поле. В области матем. анализа впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций, что послужило обоснованием для мн. дальнейших исследований. Значительны труды Д. в механике и матем. физике, в частности в теории потенциала. С именем Д. связаны задача, интеграл (ввел интеграл с ядром Д.), принцип, характер, ряды и мн. др. Лекции Д. имели огромное, влияние на выдающихся математиков более позднего времени, в т.ч. на *Г. Римана*, *Ф. Эйзенштейна*, *Л. Кронекера*, *Ю. Дедекинда* и др. На рус. яз. перев. кн. Д. "Лекции по теории чисел" (М., 1936). Иностр. чл.-кор. Петерб. АН (1837), чл. Париж. АН (1854).

КОШИ Огюстен Луи (21.8.1789 – 23.5.1857) – французский математик. Чл. Париж. АН (1816). Род. в Париже. Окончил Политехн. школу (1807) и Школу мостов и дорог (1810) в Париже. Нек-рое время работал инженером путей сообщения, с 1813 занялся наукой и преподаванием. Его назначили чл. АН вместо Г. *Монжа.* В 1816 мемуар К. по теории волн на поверхности тяжёлой жидкости на конкурсе Париж. АН получил первую премию; после этого К. приглашают в Политехн. школу, Сорбонну и Коллеж де Франс. В 1830 – 38 К. путешествовал по Европе. Возвратившись в Париж, из-за неприятия нового режима отказался от разл. учёных должностей, не желая приносить присягу, пока ему не предложили кафедру "без условий". Труды относятся к разл. областям математики. Были периоды, когда К. каждую неделю представлял в Париж. АН новый мемуар. Всего же он опубл. свыше 800 работ по арифметике и теории чисел, алгебре, матем. анализу, дифференциальным ур-ниям, теоретической и небесной механике, матем. физике. Быстрота, с к-рой К. переходил от одного предмета к другому, отчасти дала ему возможность проложить в математике множество новых путей. Его "Курс анализа" (1821), "Резюме лекций по исчислению бесконечно малых" (1823), "Лекции по приложениям анализа к геометрии" (1826 – 28), основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. В них К. дал определение понятия непрерывности функции, чёткое построение теории сходящихся рядов (в частности, впервые установил точные условия сходимости ряда *Тейлора* к данной функции и провел отчетливое различие между сходимостью этого ряда вообще и сходимостью к данной функции; ввёл понятие радиуса сходимости, доказал теорему о произведении двух абсолютно сходящихся рядов), определение интеграла как предела сумм и доказательство существования интегралов от непрерывной функции. Большой заслугой К. является то, что он развил основы теории аналитических функций комплексного переменного, заложенные еще в XVIII в. *Л. Эйлером* и Ж. *Д'Аламбером.* Особенно важное значение имеют такие результаты, полученные К.: геом. представление комплексного переменного как точки, перемещающейся в плоскости по тому или иному пути интегрирования (эту мысль ещё раньше высказали *К. Гаусс* и др.); выражение аналитической функции в виде интеграла (интеграл К.), а отсюда разложение функции в степенной ряд; разработка теории вычетов и её приложений к разл. вопросам анализа и др. В теории дифференциальных ур-ний К. принадлежат: постановка одной из важнейших общих задач теории дифференциальных ур-ний (задача К.), осн. теоремы существования решений для случая действительных и комплексных переменных (для последних К. развил метод мажорант) и метод интегрирования ур-ний с частными производными 1-го порядка (метод К. – метод характеристических полос). В геометрии К. обобщил теорию многогранников, разработал новый способ иссл. поверхности 2-го порядка, исследовал касание, спрямление и квадратуру кривых, установил правила приложения анализа к геометрии, а также вывел ур-ния плоскости и параметрическое представление прямой в пространстве. Доказал (1813), что два выпуклых многогранника с соотв. конгруэнтными и одинаково расположенными гранями имеют равные двугранные углы между соотв. гранями. В алгебре К. по-иному доказал осн. теорему теории симметрических многочленов, развил теорию определителей, найдя все гл. их свойства, в частности доказал теорему умножения (причем К. исходил из понятия знакопеременной функции); эту теорему он распространил на матрицы. Ввел термины "модуль" комплексного числа, "сопряженные" комплексные числа и др. Распространил теорему *Штурма* на комплексные корни. В теории чисел К. принадлежат: доказательство теоремы *Ферма* о многоугольных числах, одно из доказательств закона взаимности, иссл. по теории целых алгебр. чисел (при этом К. получил ряд результатов, позднее в более общей форме установленных нем. математиком *Э. Куммером*). К. первый изучил общее неопределённое тернарное куб. ур-ние и сформулировал теоремы о неопределённых тернарных кв. ур-ниях и сравнениях с одинаковым модулем и общим решением. Занимался также иссл. по тригонометрии, механике, теории упругости, оптике, астрономии. Был чл. Лондон, королевского об-ва и почти всех академий наук мира. Полное собр. соч. К. изд. Париж. АН. Кавалер ордена Почётного легиона. Именем К. назван кратер на видимой стороне Луны.

ЛАГРАНЖ Жозеф Луи (25.1.1736 – 10.4.1813) – французский математик, механик и астроном. Чл. Берлин. АН (1759) и её президент (1766 – 87), чл. Париж. АН (1787). Род. в Турине (Италия). Высшее образование получил в арт. уч-ще в Турине. Еще до оконч. уч-ща начал преподавать в нем математику. С 1795 – проф. Высшей норм. школы, с 1797 – Политехн. школы в Париже. Осн. труды по матем. анализу, вариационному исчислению, алгебре, теории чисел, дифференциальным ур-ниям и механике. Под влиянием кн. *Э. Галлея* "О преимуществах аналитического метода" начал иссл. в области матем. анализа (1753). Был организатором науч. об-ва, к-рое позже превратилось в Туринскую АН. Все ст., опубл. на протяжении ряда лет в ж. этого об-ва, принадлежали Л. или его ученикам. В соч. "О распространении звука" (1759) Л. правильно решил проблему, над к-рой работали *И. Ньютон, Б. Тейлор, Л. Эйлер, Ж. Д'Аламбер* и *И.Бернулли.* Ознакомившись с соч. Л. "О способах нахождения наибольших и наименьших величин интегралов" еще до выхода его в свет, Л. Эйлер признал преимущества метода Л. над своим и рекомендовал 23-летнего автора в члены Берлин. АН. Это соч. Л. вместе с работой Эйлера "Методы нахождения кривых линий, имеющих свойство максимума или минимума" (1774; рус. перевод вышел в 1934), легло в основу нового раздела матем. анализа – вариационного исчисления. Л. получил важные результаты в диофантовом анализе, теории алгебр. ур-ний, вариационном исчислении, аналитической и небесной механике (применение метода вариации произвольных постоянных, задача трёх тел и др.), интегрировании ур-ний с частными производными, сферической астрономии, картографии и т.д. В 1787 опубл. работа Л. "Аналитическая механика" (рус. перевод вышел в 1950), в к-рой Л. подытожил достижения в этой области за прошлое столетие и создал классическую аналитическую механику в виде учения об общих дифференциальных ур-ниях движения произвольных материальных систем. После открытия Ин-та и Бюро долгот Л. становится его чл. и в 1792 вместе с *П. Лапласом, Г. Монжем* и др. разрабатывает метрическую систему мер. Принимает участие в организации и работе Высшей норм. и Политехн. школ в Париже, читает там курсы элементарной математики и матем. анализа. В 1798 Л. опубл. "Трактат о решении численных уравнений всех степеней". Курс матем. анализа был издан в 2-х частях под названиями "Теория аналитических функций" (1797) и "Лекции по исчислению функций" (1801 – 06). Соч. Л. по математике, астрономии и механике составляют 14 т. В матем. анализе Л. дал ф-лу остаточного члена ряда Тейлора, ф-лу конечных приращений и интерполяционную ф-лу; ввёл способ множителей для решения задачи отыскания условных экстремумов. В области дифференциальных ур-ний создал теорию особых решений и разработал метод вариации произвольных постоянных. В алгебре построил теорию ур-ний, обобщением к-рой является теория *Галуа,* нашёл способ приближённого вычисления корней алгебр. ур-ния с помощью непрерывных дробей, метод отделения корней алгебр. ур-ний, метод исключения переменных из системы ур-ний (составление результанта), разложение корней ур-ний в т.н. ряд Лагранжа. В теории чисел с помощью непрерывных дробей Л. решил неопределённые ур-ния 2-й степени с двумя неизвестными, доказал периодичность разложений квадратичных иррациональностей в непрерывные дроби и т.д. Исходя из общих законов динамики, Л. указал две осн. формы дифференциальных ур-ний движения несвободной системы, к-рые теперь называются ур-ниями Л. 1-го рода, и вывел ур-ния в обобщённых координатах – ур-ния Л. 2-го рода. Основу совр. теории колебаний составляют задачи, объединённые в кн. Л. "О малых колебаниях любой системы тел". Париж. АН 5 раз отмечала деятельность Л. Премиями. Кавалер ордена Почётного легиона. Именем Л. назван кратер на видимой стороне Луны.

ЛОПИТАЛЬ де Гийом Франсуа (1661 – 2.2.1704) – французский математик. Чл. Париж. АН. Род. в Париже. Изучал математику под руководством *И. Бернулли.* Издал первый печатный учебник по дифференциальному исчислению – "Анализ бесконечно малых" (1696); в нём есть т.н. правило Л. – о нахождении предела дроби, числитель и знаменатель к-рой стремятся к нулю. Написал курс аналитической геометрии конических сечений. Л. принадлежит иссл. и решение с помощью матем. анализа неск. трудных задач по геометрии и механике, в частности одного из ур-ний известной задачи о брахистохроне. Именем Л. назван кратер на обратной стороне Луны.

НЬЮТОН Исаак (4.1.1643 – 31. 3. 1727) – английский физик, механик, астроном и математик, заложивший основы естествознания. Член Лондон, королевского об-ва (1672) и его президент (1703). Род. в Вулсторпе. Окончил Кембридж. ун-т (1665). В 1668 получил степень магистра, в 1669 его учитель *И. Барроу* уступил ему кафедру в Кембридж. ун-те, где Н. работал до 1701. Науч. интересы Н. сформировались в 1661 – 69. Работая в ун-те, он написал свои важнейшие труды. С 1695 – смотритель, с 1699 – гл. директор Монетного двора в Лондоне. Работая здесь, Н. занимался упорядочением англ. монетного дела и подготовкой к публикации своих работ за предыдущие годы. Значительная часть этих работ погибла во время пожара. Заслуга Н. в том, что, одноврем. с *Г. Лейбницем,* но независимо от него, он создал дифференциальное и интегральное исчисления, к-рые стали могучим средством решения новых задач, возникших в XVII в. перед естествознанием. Концепции Н. и Г. Лейбница были разными. Лейбниц придерживался абстрактной концепции, к-рая стала исходной для развития чистого анализа; Н. же рассматривал математику, или, как тогда говорили, геометрию, только как способ для физических иссл. Эта связь матем. и физических иссл. ярко проявилась в его методе флюксий. Уже в 1665–66 Н. выработал для нужд механики осн. идеи этого метода, исходя преим. из работ *Б. Кавальеры, Ж. Роберваля, П. Ферма, Дж. Валлиса* и своего учителя И. Барроу. В это же время он открыл взаимно обратный характер операций дифференцирования и интегрирования, а также сделал фундаментальные открытия в области бесконечных рядов, в частности индуктивное обобщение т.н. теоремы о биноме Н. на случай любого действительного показателя. Уже в первой работе по анализу ("Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов"), написанной в 1669, а опубл. только в 1711, Н. дал метод вычислений и изучения функций (приближение бесконечными рядами), к-рый имел впоследствии огромное значение для развития анализа. На этой основе Н. почленным интегрированием получил ряды для $y = \ln(1+x)$ и $y = \arcsin x$ и, применяя обращение рядов, т.е. представляя x через y, нашёл разложение в ряды показательной функции, синуса, косинуса и т.д. В 1670–71 Н. изложил созданные им дифференциальное и интегральное исчисления в соч. "Метод флюксий" (опубл. в 1736), чётко сформулировав в механических и матем. выражениях обе взаимно обратные задачи анализа и применив метод флюксий к большому кол-ву геом. задач (на касательные, кривизну, экстремумы, квадратуры, спрямления и др.), а также представив в элементарных функциях ряд интегралов от функций, к-рые содержат кв. корень из кв. трёхчлена. Большое внимание уделено интегрированию обыкновенных дифференциальных ур-ний, решены нек-рые задачи вариационного исчисления. Г.В. Лейбниц на 28 лет раньше Н. опубл. своё открытие анализа бесконечно малых, но Н. на 10 лет раньше его установил наличие двух больших взаимно связанных исчислений, полностью понял их значение для изучения природы и пользовался ими в своих науч. достижениях. Работа Н. "Математические начала натуральной философии", создававшаяся в течение 20 лет и вышедшая через три года после публикации Г. Лейбница, проникнута духом новых исчислений, выявляет всё могущество этих исчислений в изучении природы и умение Н. их применять. Вклад Н. в математику не исчерпывается созданием дифференциального и интегрального исчислений. В алгебре ему принадлежат: метод численного решения алгебр. ур-ний (метод Н.), важные теоремы о симметричных функциях корней алгебр. ур-ний, об отделении корней, о приводимости ур-ний и т.д. Алгебра у Н. имеет геом. форму. Его определение числа не как совокупности единиц, а как отношения длины любого отрезка к отрезку, принятому за единицу, сыграло важную роль в развитии учения о числе. "Математические начала натуральной философии" (1678) Н. содержат развитую теорию конических сечений, необходимую для иссл. движения планет и комет. В "Перечислении кривых третьего порядка" (1704) Н. дал классификацию этих кривых, обобщил понятия диаметра и центра, указал способы построения кривых 2-го и 3-го порядков по разл. условиям. Эта работа сыграла важную роль в развитии аналитической геометрии и частично проективной геометрии. В "Методе разностей" (1711) Н. решил задачу о проведении через $n+1$ данную точку с равноудалёнными или неравноудалёнными абсциссами параболической кривой n-го порядка и предложил интерполяционную ф-лу, названную его именем.

Достижения Н. в механике были подготовлены работами *Г. Галилея*, *Х. Гюйгенса* и др. учёных. В "Математических началах натуральной философии" Н. свёл все известные до него и все найденные им самим сведения о движении и силе в одну дедуктивную систему. Установив неск. осн. законов механики (закон инерции, закон независимого действия сил, закон о равенстве действия и противодействия), Н. вывел из них все др. теоремы механики. Открыв закон всемирного тяготения, Н. назвал ту общую силу, к-рая служит первопричиной таких разнообразных явлений, как падение тел, вращение Луны вокруг Земли и планет вокруг Солнца, движение комет, морские приливы и отливы и др. И в области небесной механики у Н. были предшественники (*Дж. Борелли*, *Р. Гук* и др.), но ему удалось найти самую совершенную формулировку закона всемирного тяготения. Он обосновал справедливость этого закона всеми известными в то время астр. фактами и вычислил на его основе траектории тел, движущихся в разл. условиях в поле тяготения. Н. исследовал движение тел в среде, оказывающей сопротивление. Сделал фундаментальные открытия в оптике, в частности выяснил причину рассеивания света; показал, что белый свет раскладывается на цвета радуги вследствие разл. преломления лучей разных цветов при прохождении через призму, и заложил основы правильной теории цветов. Эти иссл. привели Н. к изобретению первого зеркального телескопа (1688). Н. исследовал также интерференцию света. Несмотря на то, что его опыты подтверждали волновую теорию света, Н. решительно выступал против неё и отстаивал гипотезу вытекания, согласно к-рой источник света выбрасывает мельчайшие материальные частицы – корпускулы. Эту теорию нек-рое время полностью отрицали, но теперь она снова возрождается (в изменённой форме). В честь Н. названа единица силы в Междунар. системе единиц – ньютон. Иностр. чл. Париж. АН (1699). Именем Н. названы кратер на видимой стороне Луны и кратер на Марсе.

ПИФАГОР Самосский (ок. 580 – 500 до н.э.) – древнегреческий математик, философ-идеалист. Род. на о-ве Самос. По преданию, П. якобы прожил в Египте 22 года и, овладев всеми науками египтян, в том числе и математикой, переехал в Вавилон, где в течение 12 лет знакомился с науч. знаниями вавилонских жрецов. Предания приписывают П. и посещение Индии. Возвратившись на родину (ок. 530 до н.э.), П. поселился в Кротоне (греч. колония на юге Италии), где организовал школу, действовавшую почти 30 лет. Школа Пифагора была одновременно философской школой, и политической партией, и религиозным братством. Статут ее был очень суровым. По философским взглядам П. был идеалистом, защитником интересов рабовладельческой аристократии. Согласно учению П., числа являются сущностью вещей, матем. абстракции таинственно руководят миром, устанавливая в нём определённый порядок. Числа – не просто выражение закономерного порядка, но и основа материального мира. В общественных вопросах под "порядком" пифагорейцы понимали господство аристократов.

В конце V в. до н.э. в Греции и ее колониях прокатилась волна демократического движения. Победила демократия и в Кротоне. П. вместе с учениками оставляет Кротон и уезжает в Тарент, затем в Ме-тапонт. Прибытие пифагорейцев в Метапонт совпало со вспышкой народного восстания. В одной из ночных стычек почти 90-летний П. погиб. Его школа прекратила свое существование. Ученики П. расселились по Греции и её колониям, где организовывали школы, в к-рых преподавали гл. обр. арифметику и геометрию. Сведения об их достижениях содержатся в соч. позднейших учёных – *Платона*, *Аристотеля* и др.

Учение П. и *его* учеников охватывало гармонию, геометрию, теорию чисел, астрономию. Но более всего пифагорейцы ценили результаты, полученные в теории гармонии, т.к. они подтверждали их идею, что числа определяют всё. Нек-рые др. учёные считали, что понятие о зол. сечении $A:H=P:B$, где H и P – гармоническая и арифметическая средняя между A и B, П. позаимствовал у вавилонян. Теорема о соотношении между сторонами прямоугольного треугольника, открытие к-рой приписывают П., была известна и грекам, а еще раньше египтянам, вавилонянам, китайцам, по крайней мере для частных случаев. Вероятнее всего П. нашел доказательство этой теоремы, к-рое до нас не дошло. Пифагорейцам также приписывают ф-лы для трёх натуральных чисел $x=kl$, $2y=k^2-l^2$, $2z=k^2+l^2$, к-рые удовлетворяют равенству $x^2+y^2=z^2$, т.е. определяют длины сторон целочисленного прямоугольного треугольника. Открытие того факта, что между стороной и диагональю квадрата не существует общей меры, было самой большой заслугой пифагорейцев. Это открытие вызвало первый кризис в истории математики. Пифагорейское учение о целочисленной основе всего сущего больше невозможно было признавать истинным. Поэтому пифагорейцы пытались сохранить свое открытие в тайне и создали легенду о *Гиппасе Метапонитском*, якобы погибшем при попытке разгласить эту тайну. П. приписывают также теорему о сумме внутренних углов треугольника и задачу о делении плоскости на правильные многоугольники (треугольники, квадраты и шестиугольники). Есть сведения, что П. построил "космические" фигуры, т.е. пять правильных многогранников. Но вероятнее, что он знал только три простейших правильных многогранника; куб, четырехгранник, восьмигранник.

Школа П. много сделала, чтобы придать геометрии характер науки. Осн. особенностью метода П. было объединение геометрии с арифметикой. П. принадлежат: геом. способ решения задач, к-рые теперь сводятся к кв. ур-ниям; геом. доказательство того, что суммы последовательных нечётных чисел, начиная с 1, являются точными квадратами ($1+3=2^2$ и т.д.) и всякое нечетное число является разностью двух последовательных квадратов ($2^2-1^2=3$, $3^2-2^2=5$,...). П. много занимался пропорциями и прогрессиями и, вероятно, подобием фигур, так как ему приписывают решение задачи: "По двум данным фигурам построить третью, равновеликую одной из данных и подобную второй". П. и его ученики ввели понятие о многоугольных, дружественных, совершенных и др. числах и изучали их свойства. Арифметика как практика вычислений не интересовала П., и он с гордостью заявлял, что "поставил арифметику выше интересов торговца". П. одним из первых пришел к выводу, что Земля имеет форму шара и является центром Вселенной, что Солнце, Луна и планеты имеют собственное движение, отличное от суточного движения неподвижных звёзд. Именем П. назван кратер на видимой стороне Луны.

РОЛЛЬ Мишель (21.4.1652 – 8.11.1719) – французский математик. Чл. Париж. АН (1685). Род. в Амбере (Нижняя Оверна). Образование получил самостоятельно. В 23 года решил одну из неопределённых задач, к-рую не смог до конца решить известный в то время математик *Ж. Озанам.* В "Трактате по алгебре" (1690) Р. развил метод отделения действительных корней алгебр. ур-ний, основанный на отд. случае т.н. теоремы Р., доказанной им для целого алгебр. многочлена чисто алгебр. средствами. Сформулировал правило нахождения верхней границы действительных корней алгебр. ур-ния (известное под названием правила *Маклорена*). Исследовал возможности решения в целых числах неопределённых линейных ур-ний с двумя неизвестными. Р. долгое время критиковал анализ *Р. Декарта* и исчисление бесконечно малых *Г. Лейбница;* хотя эта критика в большинстве случаев была бездоказательной, она заставила Г. Лейбница внимательнее отнестись к обоснованию основ анализа.

ФЕРМА Пьер (17.8.1601 – 12.1.1665) – французский юрист и математик. Род. в Бомон-де-Ломани. Изучал право в Тулузском ун-те. С 1631 работал советником парламента в Тулузе. На досуге изучал математику, занимался иссл. в области теории чисел, геометрии, алгебры, теории вероятностей. Мн. матем. открытия Ф. стали известны из его писем к *Б. Паскалю, Р. Декарту, Дж. Валлису, Ф. де Бесси* и др. математикам. Нек-рые открытия Ф. из теории чисел дошли до нас в виде надписей на полях "Арифметики" *Диофанта.* Ф., как правило, не разъяснял методов, к-рыми он пользовался, решая задачи или доказывая теоремы. Позже большинство сформулированных Ф. теорем строго доказали *Л. Эйлер, О. Коши* и др. математики XVIII–XIX вв.

В теории чисел Ф. разработал способ систематического нахождении всех делителей произвольного числа, поставил проблему нахождения целочисленных решений ур-ний $ax^2+1=y^2$, где a – данное неквадратное число; сформулировал теорему о возможности представления произвольного числа суммой не более четырех квадратов. С именем Ф. связаны две знаменитые теоремы – большая (иногда её называют последней) и малая. Большая теорема Ф.: "Уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет целых положительных решений при любых значениях $n>2$". Малая теорема Ф.: "$a^{p-1}-1$ делится на p, если p – простое число" (эта теорема играет фундаментальную роль в теории чисел),

Ф. и Р. Декарт – основоположники аналитической геометрии. Кроме того, Ф. раньше Декарта и более систематизировано ввёл прямолинейные координаты, изложил метод координат и применил его к геометрии, выведя ур-ние прямой и кривых 2-го порядка. В работе "Введение к теории плоских и пространственных мест", ставшей известной в 1636, Ф. показал, что прямым соответствуют ур-ния 1-й степени, а коническим сечениям – ур-ния 2-й степени. Ф исследовал общие виды ур-ний 1-й и 2-й степени преобразованием координат (перенесением начала координат и поворотом осей). Важное место в истории дифференциального и интегрального исчисления заняла работа Ф. "Метод отыскания наибольших и наименьших значений", опубл. лишь в 1679. В ней Ф. фактически осуществил операцию, называемую теперь дифференцированием, и применил ее для нахождения не только максимумов и минимумов, но и касательных к кривым. Сформулировал общий закон дифференцирования дробных степеней. Распространил ф-лу интегрирования степени на случаи дробных и отрицательных показателей. Определённый вклад внёс Ф. и в теорию вероятностей. Работал также над нек-рыми вопросами физики, напр. сформулировал т.н. принцип Ф. – осн. принцип геом. оптики, из которого выводятся законы отражения и преломления света. Науч. работы Ф. стали известны лишь в 1669, когда его сын опубл. сб. "Разные сочинения". Учреждена медаль им. П. Ферма (Тулуза). Лицей в Тулузе переименован в Лицей Пьера Ферма.

ХЕВИСАЙД Оливер (18.5.1850 – 3.2.1925) – английский инженер и физик. Чл. Лондон. королевского об-ва (1891). Род. в Лондоне. Самостоятельно изучил математику и физику. Работал инженером. Науч. исследования проводил в собственной лаборатории. В 1892 опубл. работы, посвящённые применению метода символического (или операционного) исчисления к решению задач теории распространении электрических колебаний в проводах. Эти работы положили начало систематическому применению операционного исчисления как одного из методов прикладного анализа, дающего возможность в ряде случаев очень просто решать сложные матем. задачи механики, электротехники, автоматики. Разработанное Х. операционное исчисление не имело у него надлежащего матем. обоснования, мн. его результаты оставались недоказанными. Х. – один из создателей векторного исчисления и совр. теории связи. Именем Х. названы кратеры на обратной стороне Луны и на Марсе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данного учебного пособия является формирование у студентов инженерных специальностей вузов высокой математической культуры, которая позволит им в дальнейшем успешно изучать другие разделы математического анализа (функции нескольких переменных, неопределённые и определённые интегралы, числовые и функциональные ряды, несобственные интегралы и т.д.), а также другие математические дисциплины (дифференциальные уравнения, теорию функций комплексного переменного, теорию вероятностей, математическую статистику и т.д.). В итоге студенты будут овладевать математическими знаниями, которые необходимы им для успешного освоения специальных дисциплин, использующих математический аппарат. Всё это будет способствовать подготовке высококвалифицированных инженерных кадров для различных отраслей промышленности и сельского хозяйства.

СПИСОК ЛИТ Ы

1. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу : учеб. для вузов / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004. – 640 с. – (Высшее образование: Современный учебник).
2. Бородин, А.И. Выдающиеся математики : биогр. слов.-справ. / А.И. Бородин, А.С. Бугай. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев : Рад. шк., 1987. – 656 с.
3. Герасимович, А.И. Математический анализ : справ. пособие / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – В 2-х ч. – Мн. : Выш. шк., 1989. – Ч. I. – 287 с.
4. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. – 10-е изд., стереотип. – М. : Наука, 1969. – 272 с.
5. Зорич, В.А. Математический анализ. – В 2-х ч. / В.А. Зорич. – 5-е изд. – М. : МЦНМО, 2007. – Ч. I. – 664 с.
6. Иванова, Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного : учеб. для вузов / Е.Е. Иванова. – 2-е изд. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 408 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. II).
7. Ильин, В.А. Основы математического анализа : учебник. – В 2-х ч. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стереотип. – М. : Физматлит, 2002. – Ч. I. – 648 с.
8. Ильин, В.А. Математический анализ : учебник. – В 2-х ч. / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ТК Велби, Изд-во Проспект, 2007. – Ч. I. – 672 с.
9. Морозова, В.Д. Введение в анализ : учеб. для вузов / В.Д. Морозова. – 3-е изд., стереотип.– М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 408 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. I).
10. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – 3-е изд., стереотип. – М. : Наука, 1974. – 480 с.
11. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – 7-е изд., стереотип. – М. : Физматлит, 1970. – Т. I. – 608 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

П

Т

У

Ф

ОГЛАВЛЕНИЕ