

Ю.Ю. ГРОМОВ, В.О. ДРАЧЁВ, О.Г. ИВАНОВА,  
Ю.С. СЕРБУЛОВ, К.А. НАБАТОВ

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

УДК 681.511(075)  
ББК В183.4я73  
О753

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор  
***В.Ф. Крапивин***

Доктор физико-математических наук, профессор  
***Е.Ф. Кустов***

О753 Основы теории управления : учеб. пособие /  
Ю.Ю. Громов, В.О. Драчёв, О.Г. Иванова, Ю.С.  
Сербулов, К.А. Набатов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос.  
техн. ун-та, 2008. – 240 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-  
8265-0748-3.

Рассмотрены основные понятия и определения современной теории управления: пространство состояний и его виды, критерии управляемости и наблюдаемости для непрерывных и дискретных систем, синтез законов оптимального управления непрерывными и дискретными системами по различным критериям качества, вопросы численного решения уравнения Ляпунова и построения адаптивных систем. Рассмотрены постановки основных задач оптимального управления, необходимые условия оптимальности управления и математический аппарат, позволяющий получить решения для различных классов задач с непрерывным и дискретным временем.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 230201 "Информационные системы и технологии".

УДК 681.511(075)  
ББК В183.4я73

ISBN 978-5-8265-0748-3 ГОУ ВПО "Тамбовский государ-  
ственный  
технический университет"  
(ТГТУ), 2008

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

Ю.Ю. Громов, В.О. Драчёв, О.Г. Иванова,  
Ю.С. Сербулов, К.А. Набатов

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов  
по университетскому политехническому образованию в качестве  
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению 230200 "Информационные системы" специальности 230201  
"Информационные системы и технологии"*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2008

**Учебное издание**

ГРОМОВ Юрий Юрьевич,  
ДРАЧЁВ Виталий Олегович,  
ИВАНОВА Ольга Геннадьевна,  
СЕРБУЛОВ Юрий Стефанович,  
НАБАТОВ Константин Александрович

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова

Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 12.11.2008

Формат 60 × 84/16. 13,95 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 542

Издательско-полиграфический центр ТГТУ  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

Переход к рыночной экономике неотъемлем от процессов планирования, регулирования, управления и прогнозирования производственных и технологических процессов. В этой связи актуальны разработка и применение экономико-математических методов и моделей для решения возникающих производственно-хозяйственных задач, определения и выбора вариантов экономического развития на перспективу, обеспечения оптимального распределения ресурсов для выполнения отдельных комплексов работ и т.п. Насущные производственно-хозяй-

ственные задачи не могут быть поставлены и решены без использования методов экономической кибернетики, включающей следующие разделы: системный анализ экономики, теорию экономической информации, теорию управляющих систем. Определение оптимального варианта текущего и перспективного развития, как правило, связано с решением динамических задач оптимизации (оптимального управления), имеющих большую размерность и множество разнообразных условий и ограничений, что обуславливает сложность решения из-за существенно многоэкстремального характера.

В учебном пособии последовательно рассматриваются основные вопросы теории управления: виды пространств состояния, структурное представление систем, управляемость и наблюдаемость, алгоритм оптимального управления, численные методы в теории управления, управление линейными системами по критерию обобщённой работы.

Изложение начинается с анализа этапов развития теории управления. Рассматриваются вопросы управляемости и наблюдаемости, излагается математическая теория оптимального управления (принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана). Эта теория является фундаментом для построения оптимальных систем. Она доставляет большой объём информации о структуре оптимального управления. Вместе с тем, практическое применение теории сталкивается с трудностями вычислительного характера. Дело в том, что математическая теория оптимального управления позволяет свести процесс построения оптимального управления к решению краевой задачи для дифференциальных уравнений (обыкновенных либо в частных производных). Трудности численного решения краевых задач приводят к тому, что построение оптимальных управлений для каждого класса объектов управления является самостоятельной творческой задачей, решение которой требует учёта специфических особенностей объекта, опыта и интуиции разработчика.

### Лекция 1

## ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

### 1.1. ПЕРИОДИЗАЦИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

До 50-х гг. XX столетия классическая теория автоматического управления (ТАУ) было принято называть базирующейся на рассмотрении обыкновенных, преимущественно линейных дифференциальных уравнений теории устойчивости и качества процессов в системе объектов-регуляторов. Основы теории были заложены Вишнеградским, Максвеллом; по существу она тесно соприкасалась с теорией устойчивости движения («в малом» Ляпуновым), но имела ярко выраженную направленность, инженерную. Под влиянием потребности автоматического управления технологическими и информационными процессами, а также подвижными объектами. В 60 – 70 гг. ТАУ интенсивно развивалась, она впитала методы теории связи, теории информации, теории колебаний и создала собственные методы анализа и синтеза систем с обратной связью (рис. 1.1).

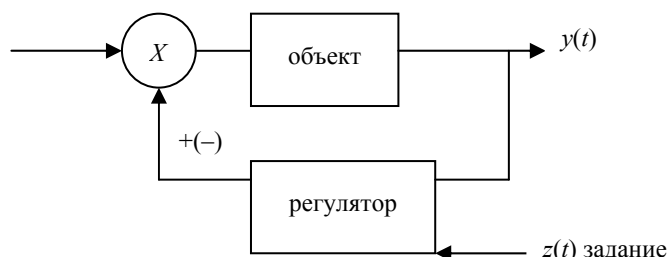


Рис. 1.1

Советская школа в области автоматики сыграла важную роль на этом этапе науки управления, признанием чего явилось проведение Первого международного конгресса в Москве в 1960 г. В инженерной теории управления (ТУ) с этого периода уже ставились и решались задачи оптимизации и адаптации в основном применительно к управлению «в малом». Это означает следующее: оптимальная программа изменения решения технологического или информационного процесса движения объекта, выраженное в задающих воздействиях и «уста-

новках» (заданиях) регуляторов, считалось известным; она определялась на стадии проектирования, с привлечением некоторых посторонних, по отношению к ТУ того времени, областей знаний или практического опыта. Задача управления заключалась в выполнении этой программы, т.е. в стабилизации программного движения.

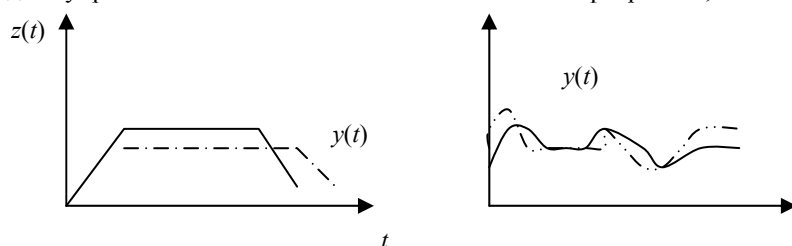


Рис. 1.2

При этом допускались лишь малые отклонения относительно заданного движения (рис. 1.2), переходные процессы «в малом» оптимизировать по тем или иным критериям. Предметом этой теории для сложных объектов явилось решение множества частных задач на каждом этапе развития технологического или информационного процесса, или движение подвижного объекта. Увязка всех задач для достижения конечной цели управления производится на стадии проектирования системы на основе априорной информации с помощью методов внешних по отношению к данной теории. Недостатки такого подхода к проблеме были ясны в 50-х гг. XX столетия, но в тот период иные постановки были непрактичными, так как отсутствовали аппаратно- и математические средства решения.

Второй этап развития ТАУ называется классическим. К концу 50-х началу 60-х гг. XX столетия появились работы Л.С. Понтрягина, Ричарда Бэлмана, Ричарда Калмана, в которых заложены современные ТАУ; в прочем многие идеи этой теории сформировались на инженерном уровне еще в классический период развития. В наше время не существует общего определения «современной ТАУ» (СТАУ) наиболее удовлетворительное определение получается, если в основу положить научно-технический прогресс современной и перспективной автоматизации. Важнейшим из требований является оптимальное использование на каждом этапе функции системы всех располагаемых ресурсов (энергетических, информационных вычислительных и др.) для достижения главной для этого этапа цели при соблюдении множества ограничений. В связи с этим оптимизация «в большом» осуществляется в реальном времени в процессе управления, становится центральной проблемой СТАУ. Оптимизация «в большом» в реальном масштабе времени требует полного использования имеющейся априорной информации в виде модели управляемого процесса или объекта заданного в той или иной форме. Использование математической модели не только на стадии проектирования, но и в процессе функционирования является одной из характерных черт СТАУ. Оптимальное управление возможно при оптимальной обработке информации. Поэтому теория оптимального оценивания (фильтрации) динамического процесса является составной частью СТАУ, важнейшим разделом которой является идентификация. Центральной частью СТАУ является собственно теория оптимального или субоптимального управления «в большом», а также вопросы, связанные с использованием и моделированием теории неопределённости и вопросы реконфигурации. Прикладная СТАУ должна учитывать информационные и энергетические закономерности и ограничения при создании реальных систем управления. Информационные ограничения имеют место не только в отношении объектов априорной и текущей информации в обычном смысле этого термина, но и отношении статистических характеристик, различных шумов, возмущений и параметров. При разработке большинства СТАУ большое значение имеют энергетические ограничения.

## 1.2. ПОНЯТИЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЯ

Математическая модель (ММ) системы или процессы в этой или иной мере отображают свойства реальной системы, в том числе и ограничения, существующие в реальных условиях. ММ составляется в математических терминах и имеет количественное описание, поэтому состояние ММ системы или процесса может быть представлено в виде элемента  $x$  множества возможного состояния  $X$ . Весьма важным является то, что элемент множества  $X$  характеризует состояния рассматриваемой модели системы или процессы полностью, т.е. однозначно. Множество  $X$  можно рассматривать как пространство состояний систем и процессов. Но пространством называется множество, в котором задано соотношение между любыми его элементами, характеризующие «близость» между ними. Так, метрическое пространство, в котором задано расстояние между двумя элементами в виде действительной функции, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) расстояние  $\rho$  между  $x$  и  $y = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  расстояние всегда положительно;
- 3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$  сумма двух сторон треугольника больше или равна другой стороне.

Пространство состояний в теории динамической системы и в ТАУ в частности используется для исследования вопросов, связанных с определением устойчивости, управляемости, наблюдаемости и т.д. *Пространством состояний* называется пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы. Обратим внимание на то, что состояние

везде понимается как мгновенное (в точке), т.е. состояние в текущей или заданный момент времени. Процесс, протекающий во времени, отражается как движение элемента в пространстве состояний. Пространство состояний применяется, как при описании замкнутых (автономных) системах и процессах (т.е. систем и процессов, не взаимодействующих с другими системами и процессами), для которых эти взаимодействия существуют. В последнем случае необходимо ввести в рассмотрение дополнительно два множества, которые называются множеством управлений  $u \in U$  и множеством возмущающих воздействий  $\omega \in \Omega$ . Структура данных множеств определяется спецификой решаемой задачи. Эти множества  $u$  и  $\omega$  могут представлять собой метрические пространства. Метрики этих пространств разные – возможно в частном случае могут быть и одинаковые. Пространство состояний  $X$  может быть представлено в виде суммы субпространств, что можно записать так:  $x \in X = x_{(1)} \cup x_{(2)} \cup \dots \cup x_{(n)}$ . Элементы  $x$  могут быть конечные упорядоченные совокупности действительных чисел:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.1)$$

которые называются *конечномерным вектором состояния* (конечномерный, потому что есть  $n$ )

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad (1.2)$$

называемые *бесконечномерным (счетным) вектором состояния*; имеет место при описании дискретных математических моделей непрерывных в физическом пространстве систем.

**Пример:**  $x = x$

$$\frac{dx}{dt} = x; \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = x_n; \quad x_{n+1} = x_n \Delta t + x_n.$$

Для непрерывного времени и конечномерного вектора состояния задания во все моменты времени означает определение векторной функции вида

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \quad (1.3)$$

В теории динамических систем (1.3) называлось *фазовым пространством*, а для двухмерного случая ( $n = 2$ ) – *фазовой плоскостью*. В значительной части литературы понятие фазового пространства используется как синоним пространства состояний.

*Дискретное время* представляет собой упорядоченную последовательность следующего вида:

$$t_1, t_2, \dots, t_k, \quad (1.4)$$

$$x[k] = (x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k]). \quad (1.5)$$

Тогда состояние определяется в соответствии с выражением (1.5). В (1.4), как правило, это  $t_k - t_{k-1} = \tau = \text{const}$ , тогда при  $t_0 = 0$   $t_k = k\tau$ . [ ] – дискретное значение, ( ) – непрерывное время.

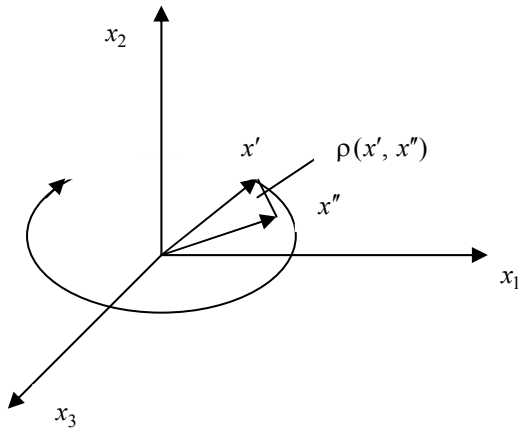
Однако цифровые управляющие вычислительной системы часто работают с различными интервалами повторения для различных групп переменных (быстроменяющихся, медленноменяющихся). В этом случае структура пространств состояний с дискретным временем усложняется, так как оно делится на субпространства. Помимо дискретности по времени может иметь место дискретность по уровню, что характерно для систем управления с микропроцессами, имеющими небольшое число разрядов.

### 1.2.1. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ НЕПРЕРЫВНОЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

Элементами  $R^n$  является вектор (1.1). Метрика определяется следующим образом:

$$x' \in R^n; \quad x'' \in R^n; \quad \rho(x', x'') = ((x'_1 - x''_1)^2 + \dots + (x'_n - x''_n)^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} ((x'_1 - x''_1)^T (x'_1 - x''_1))^{\frac{1}{2}}; \\ ((x'_1 - x''_1)(x'_1 - x''_1)^T)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Иллюстрация пространства состояния и траектория движения в нём представлена на (рис. 1.3).

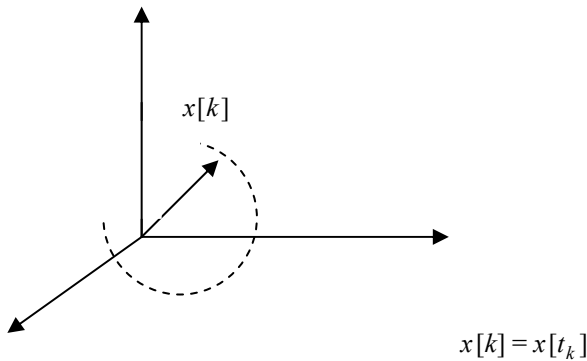


**Рис. 1.3**

Конец вектора  $x(t)$  называется *изображающей точкой*. Время – величина непрерывная, значит, конец вектора образует непрерывную фазовую траекторию.

### 1.2.2. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО. СОСТОЯНИЕ КОНЕЧНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Поведение конечномерной системы с дискретным временем можно представить в Евклидовом пространстве состояний как показано на рис. 1.4.



**Рис. 1.4**

### 1.2.3. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ $R^n$ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ С ДРУГИМИ МЕТРИКАМИ

Исследование устойчивости, управляемости, оптимизации процессов движения часто требуют введения метрик отличных от Евклидовых, например имеющих вид (1.6):

$$\rho(x', x'') = \sum_{i=1}^n \beta_i |x'_i - x''_i|. \quad (1.7)$$

Часто рассматривается метрика более общего вида:

$$\rho(x', x'') = \left( \sum_{i=1}^n (\beta_i |x'_i - x''_i|^p) \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1; \quad (1.8)$$

при  $p = 1$  (1.7) и (1.6) совпадают;

при  $p \rightarrow \infty$   $\rho$  приобретает характер «функции Штрафа».

Метрики (1.7) и (1.8) удобны для формирования минимизирующих функционалов и для выражения ограничений.

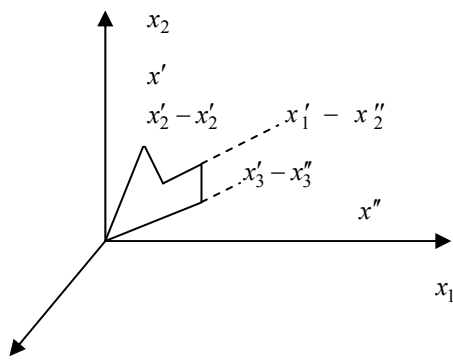




Рис. 1.5

Графическая иллюстрация метрики (1.7) представлена на рис. 1.5.

### Вопросы для самопроверки

1. Расскажите о периодизации развития теории управления.
2. Дайте определение понятию пространства состояний.
3. Функциональные пространства.
4. Что вы знаете о Евклидовом пространстве?
5. Пространство состояний  $R^n$  непрерывной системы.

## Лекция 2

# РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ПРОСТРАНСТВ СОСТОЯНИЙ

### 2.1. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ

#### 2.1.1. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПО УРОВНЮ И ВРЕМЕНИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Для систем, в которых осуществляется квантование по уровню и времени, например, чисто цифровых систем, пространство состояний представляет собой дискретное множество элементов. Графическая иллюстрация имеет вид, представленный на рис. 2.1.

Чаще всего на практике приходится иметь дело с сочетаниями непрерывных и дискретных систем, строгое описание процессов в таких системах может осуществляться в пространствах состояний, составленных на непрерывных и дискретных субпространствах. Однако наиболее простые решения задач получаются при приведении

субпро-

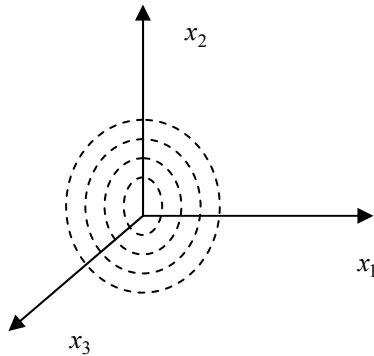


Рис. 2.1

пространств к одинаковой категории (непрерывных с непрерывным временем, непрерывных с дискретным временем, дискретных с непрерывным временем, дискретных с дискретным временем). Способы приближённого или точного преобразования категории пространств состояний рассмотрим ниже.

#### 2.1.2. ПРОСТРАНСТВО R-БЕСКОНЕЧНОСТЬ, БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

При рассмотрении дискретных моделей распределенных систем нередко возникает потребность в рассмотрении бесконечномерных векторов состояний и соответствующих метрических пространств. Пример бесконечномерного пространства состояний может служить Гильбертово пространство.

Гильбертовым пространством называется множество всех последовательностей действительных чисел (бесконечномерных векторов), таких что  $x^T x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ , сходится, а метрика  $i = 1$  определяется

$$\rho(x', x'') = \left( \sum_{i=1}^n (x_i' - x_i'')^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 2.1.3. ОДНОМЕСТНАЯ И МНОГОМЕСТНАЯ ФАЗОВАЯ ПЛОТНОСТЬ

В задачах анализа процессов в динамической системе на основе пространства состояний важную роль играют геометрические и топологические представления множества траектории. При этом построение наглядного образа семейства фазовых траекторий для  $n = 3$  составляет во многих случаях довольно трудную задачу, поэтому каждый новый случай исчерпывающего исследования движения нелинейных систем оценивается как научное достижение. Наиболее общие результаты были получены для  $n = 2$ , когда пространство состояний превращалось в плоскость состояний, которое также называется фазовой плоскостью.

## 2.2. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Метрика пространств состояний начинает фигурировать на стадии решения конкретных задач, поэтому при записи уравнения в пространстве состояний можно указывать лишь размерность пространства, полагая при этом метрику, например, Евклидовой или вообще не задавать метрики.

### Детерминированные системы

Если возмущающее воздействие является детерминированным, то его можно представить в виде функций времени и уравнение системы можно записать:  $\dot{x} = f(x, u, t)$  (1.1) – вектор-функция.  $x \in R^n$ ;  $u \in R^r$ . Точка обозначает полную производную по времени

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x, u, t); \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, u, t); \\ \dot{x}_n &= f_n(x, u, t). \end{aligned}$$

Вектор-функция  $f$  векторных аргументов  $x, u$ , и скалярного аргумента  $t$  считается заданной и принадлежащей некоторому классу функций, допускающему существование решения уравнения (1.1) при заданных  $x(t_0)$  и  $u(t_0)$  во всем пространстве состояний либо в его областях, охватывающих интересующую часть пространства состояний. В более сложном и общем случае рассматриваемая область пространства состояний разделена на подобласти, для каждой из которых задана своя непрерывная функция  $f$ , удовлетворяющая указанному условию в области определения. Поведение системы на границах подобластей доопределяется, т.е. определяется дополнительными условиями, например непрерывности.

Наряду с понятием системы будем использовать понятие *процесса*. Если система описывается уравнением (1.1), то процесс в этой системе описывается решением уравнения (1.1) при начальном условии  $x(t_0) = x_0$  и определённом управлении  $u(t)$ , вместо одного процесса может рассматриваться множество процессов, соответствующих множеству начальных условий и управляющих воздействий.

Процесс непрерывного пространства состояний, описываемый уравнением (1.1) и другими дифференциальными уравнениями, является непрерывным процессом при обычных условиях существования решений дифференциальных уравнений, т.е. процесс  $x(t)$  – действительная непрерывная функция времени. В тех случаях, когда  $f(t_x)$  содержит  $\Delta n$  или состоит из нескольких непрерывных функций, определённых в подобластях пространства состояний без условий непрерывности решения, возможны разрывы непрерывности процесса  $x(t)$ .

### Вопросы для самопроверки

1. Формула определения метрики Гильбертова пространства.
2. Как обозначают полную производную по времени?
3. Одноместная и многоместная фазовая плотность.
4. Чем доопределяется поведение системы на границах подобластей?
5. Нарисуйте график пространства состояний дискретных по уровню и времени конечномерных систем.

## Лекция 3

# МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## 3.1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Широкий класс систем допускает при описании пользоваться линейным по вектору управлением, при этом ММ имеет вид

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u; \quad x \in R^n, u \in R^r, \quad (3.1)$$

где  $f(x, t)$  – вектор-функция векторного аргумента  $x$  и скалярного аргумента  $t$ ;  $\varphi(x, t)$  – матричная функция векторного аргумента  $x$  и скалярного  $t$  (размер этой матрицы).

В общем случае  $f$  и  $\varphi$  – нелинейные.

## 3.2. ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ЛИНЕЙНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^n, u \in R^r; \quad (3.2)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, u \in R^r, \quad (3.3)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов (в общем случае функция времени, размера  $n \times n$ );  $B$  – матрица коэффициентов размера  $n \times r$ .

Если  $A$  и  $B$  являются матричными функциями времени, то нелинейная система называется *нестационарной*. Если коэффициенты матриц  $A$  и  $B = \text{const}$ , то линейная система называется *стационарной*. Уравнения (3.2) и (3.3) описывают поведение линейных систем. Общее решение уравнения (3.2) может быть представлено в виде

$$x(t) = k(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} k(t, O) B(O) u(O) dO,$$

где  $k(t, t')$  – матрица Коши системы (3.2), которая удовлетворяет, т.е. определяется из матричного уравнения следующего вида:

$$\frac{d}{dt} k(t, t') = A(t) k(t, t')$$

с начальным условием  $k(t, t') = E$  – единичная матрица.

Матрица Коши является частным видом функциональной матрицы системы (3.2), которой называют любую невырожденную матрицу, удовлетворяющую дифференциальному уравнению следующего вида:

$$\frac{dW(t, t')}{dt} = A(t) W(t, t').$$

Матрица называется невырожденной, если её определитель не обращается в ноль при любых  $t$ .

При анализе систем вида (3.2) широко используется матрица вида

$$\phi(t, t') = k(t, t') B(t'),$$

которая называется *импульсной переходной матрицей* или *весовой матрицей*. Столбцы этой матрицы можно рассматривать как реакцию системы (3.2) на входные воздействия в виде  $\Delta$ -импульсов, подаваемые на каждые из входов (входы в моделях 1, 2, 3 являются компонентами вектора  $u$ ) при нулевых начальных условиях. Наиболее часто используются следующие функции: ступенчатая единичная (Хевисайда) рис. 3.1 и  $\delta$ -функция рис. 3.2 и рис. 3.3.

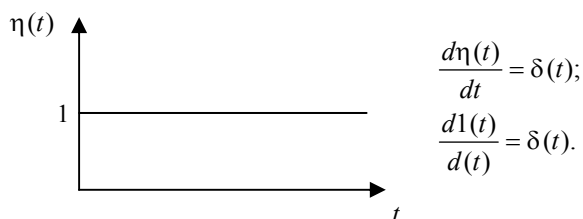


Рис. 3.1

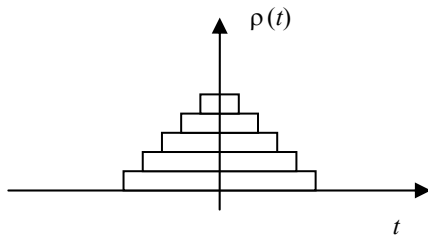


Рис. 3.2

Сравнительно реже используется переходная матрица, определяемая соотношением вида

$$H(t, t') = \int_{t_0}^t \phi(t, O) dO,$$

столбцы которой являются реакцией на единичные входные воздействия, подаваемые на каждый из входов при нулевых начальных условиях.

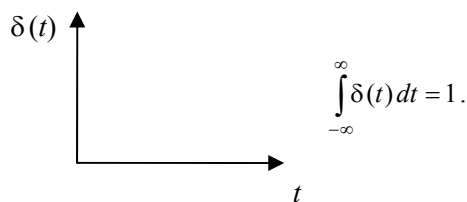


Рис. 3.3

Для стационарной системы (3.3) матрица Коши, весовая и переходная матрицы являются функциями только относительного времени, которые определяются следующим образом:  $\tau = t - t'$ .

### 3.3. ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Система с дискретным временем описывается разностными уравнениями для непрерывных нелинейных систем, описываемых уравнением вида (3.1). Как и для других нелинейных систем с непрерывным описанием, в подавляющем большинстве случаев могут быть получены лишь приближённые разностные модели (схемы). Исключение составляет случай, когда на каждом интервале дискретизации при известном законе изменения и на данном интервале (при постоянстве  $u$  в пределах интервала) уравнение (3.1) интегрируется в общем виде. Действительно общее решение задачи Коши (задачей Коши называется задача, когда неизвестные константы в общем решении уравнения находятся из начальных условий, число которых равно порядку дифференциального уравнения, которое накладывается на функцию, первую производную и т.д. до  $n - 1$  производной) при  $x(t_k) = x[k]$  имеет вид

$$u(t_k) = u[k];$$

$$t_k \leq t \leq t_{k+1};$$

$$x_{[k+1]} = F(x[k], u[k], k).$$

Если общее решение уравнения (3.1) неизвестно, могут быть построены разностные уравнения (схемы) приближенно эквивалентные (3.1), т.е. приближённо выражающие зависимость  $x_{[k+1]}$  от значений  $x$  и в предшествующий момент времени  $t_k$  и, вообще говоря,  $t_{k-1}, t_{k-2}, \dots$  для так называемых многошаговых методов. Различные разностные схемы уравнения типа (3.1) и других дифференциальных уравнений рассматриваются в обширной литературе, посвящённой численному интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Одна из простейших разностных схем, которая называется схемой Эйлера, имеет вид

$$x_{[k+1]} = x[k] + \tau f(x[k], u[k], k);$$

$$\tau = t_k - t_{k+1},$$

где  $\tau$  – называется шагом дискретизации, который не изменяется в процессе решения.

Правая часть в разностном уравнении часто обозначается, как и в обыкновенном дифференциальном уравнении, через  $f$ , и детерминированная нелинейная управляемая система с дискретным временем будет представлена в виде

$$x_{[k+1]} = f(x[k], u[k], k).$$

### 3.4. ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ЛИНЕЙНАЯ УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Данные системы описываются разностными уравнениями вида

$$x_{[k+1]} = A[k] x[k], B[k] u[k]. \quad (3.4)$$

При постоянстве управления  $u[k]$  на каждом интервале  $(t_k, t_{k+1})$  и ступенчатым его изменением в указанные моменты времени (рис. 3.4) можно получить соотношения

$$A[k] = k[t_k, t_{k+1}]; \quad B[k] = \int_{t_k}^{t_{k+1}} k(t_{k+1}, \tau) B(\tau) d\tau.$$

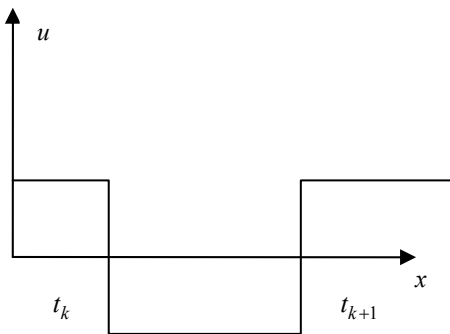


Рис. 3.4

Обозначения  $B[k]$  и  $B[\tau]$  соответствуют разным функциям.  $B[\tau]$  берётся из описания системы с непрерывным временем (3.2). Матрица Коши – дискретная во времени система  $k[k, j]$  при  $k > j$  однозначно определяется из решения уравнения вида

$$K[k+1, j] = A[k] K[k, j].$$

При условии, что в некоторый момент времени

$$K[j, j] = E,$$

справедливо соотношение вида

$$K[k, j] = A[k-1] A[k-2], \dots, A[j].$$

Решение разностного уравнения (3.4) имеет вид

$$x[k] = k[k, j] x[j] + \sum_{v=j}^{k-1} k[k, v+1] B[v] u[v], \quad k > j.$$

#### Вопросы для самопроверки

1. Какая система называется нестационарной?
2. Какая система называется стационарной?
3. Что такое весовая матрица?
4. Что такое переходная матрица? Напишите формулу для её определения.
5. Дайте определение задачи Коши.
6. Как выглядит схема Эйлера?
7. Как выглядит разностное уравнение для детерминированной линейной управляемой системы с дискретным временем?

## Лекция 4

# СТРУКТУРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

### 4.1. СКАЛЯРНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

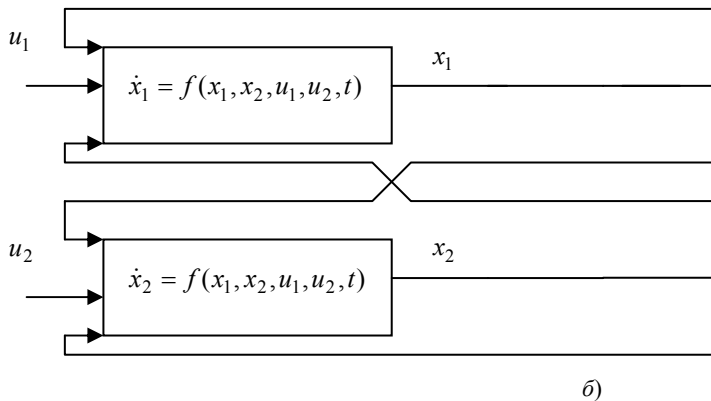
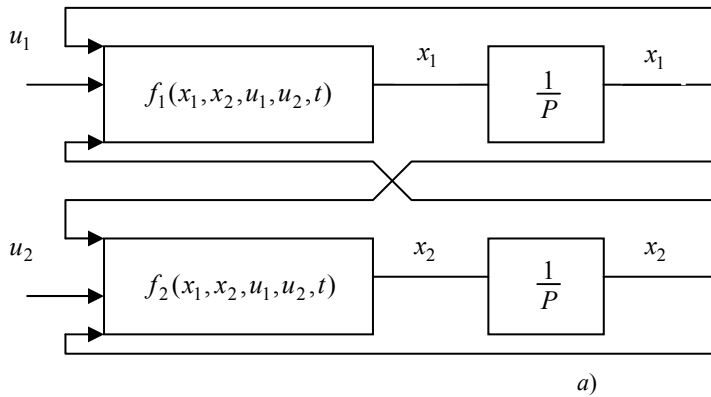
В классической теории управления большое значение имеет структурный анализ. В современной прикладной теории управления структурные представления имеют определённые значения в системе наглядного восприятия алгоритмов и обнаружение некоторых закономерностей. Для двухмерного случая, когда  $n = 2$ ,  $R = 2$ , уравнение (3.1) эквивалентно двум скалярным уравнениям:

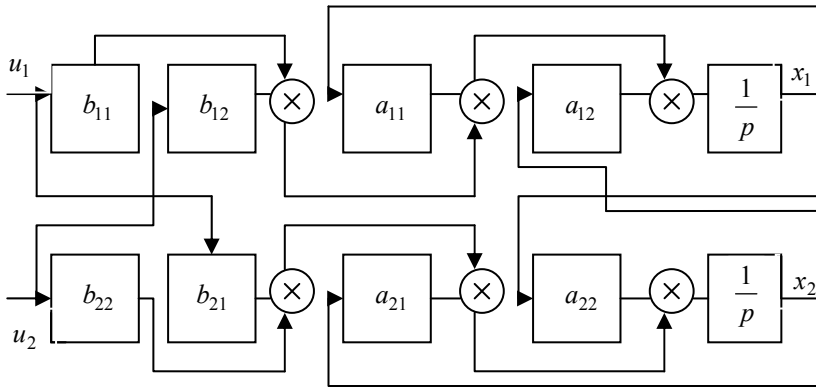
$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u_1, u_2, t);$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2, t).$$

Два варианта структурной схемы этой системы представлены на (рис. 4.1, а, б). В варианте а) выделены операции интегрирования, обозначенные  $\frac{1}{P}$ , где  $P = \frac{d}{dt}$  (\*) – дифференциальный оператор следующего вида (\*).

Допускается также на структурных схемах для обозначения операции интегрирования использовать символ  $\int$ . В варианте б) операции интегрирования не выделены и указаны только связи между двумя подсистемами (двумя дифференциальными уравнениями). Отметим, что на структурных схемах всегда обозначают однопараметрические связи. Двусторонние связи представляют в совокупности двух однопараметрических связей. Если имеется развёрнутое (конкретное) выражение для функции  $f_1 f_2$ , то могут быть изображены скалярные структурные схемы.





в)

**Рис. 4.1**

Для линейной системы второго порядка при  $n = 2$  эквивалентная система двух скалярных уравнений имеет вид:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 ;$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 .$$

Соответствующая структурная схема представлена на рис. 4.1, в. Кружками обозначены операции суммирования, «прохождение» величины через звено с коэффициентами  $a_{ij}, b_{ij}$ , эквивалентно умножению данной величины на коэффициенты.

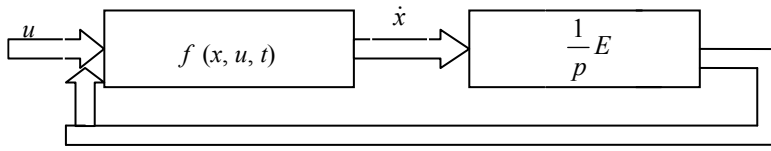
При высокой размерности систем и большом количестве перекрестных связей скалярных структурных схем, описываемых в пространстве состояний, становятся громоздкими, теряют наглядность и эффективность. Некоторые упрощения получаются при обозначении входов и выходов без детализации самих связей между подсистемами. В целом, для многомерных систем, описанных в пространстве состояний, применяются векторные структурные схемы.

#### 4.2. ВЕКТОРНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

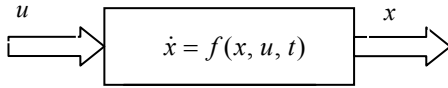
В векторных структурных схемах имеются те же обозначения, что и в уравнениях о «передаче» или «воздействии» векторных величин, т.е. векторные связи обозначают двойными линиями, как и в скалярных структурных схемах; обозначаемая связь считается однонаправленной и имеет стрелку. Двусторонняя связь изображается посредством двух однонаправленных связей с противоположным направлением стрелок. Для варианта векторной структурной схемы соответствующие уравнения представлены на рис. 4.2, а, б.

В схеме а) выделена операция интегрирования вектора  $\dot{x}$ , обозначенная звеном с оператором  $\frac{1}{p}E$ ; эту операцию можно обозначить знаком интеграла. В данной схеме фигурирует обратная связь по  $x$ .

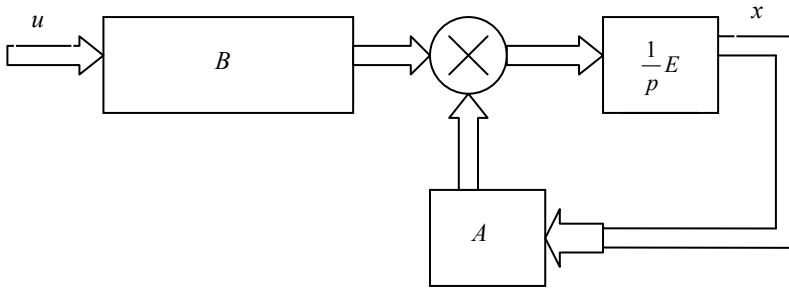
В схеме б) уравнение записано внутри прямоугольника и стрелками указано, что следует рассматривать  $u$  – как входной сигнал, а  $x$  – как выходную векторную величину данного звена.



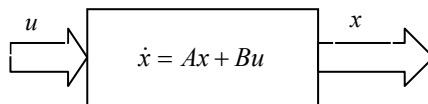
a)



б)



в)



г)

Рис. 4.2

#### 4.3. ВЕКТОРНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Умножение вектора на матрицу  $A$  на векторной структурной схеме обозначается в виде «прохождения» вектора  $x$  через звено с матрицей передаточных коэффициентов (чисел  $A$ ), в соответствии с этим структурная схема системы соответствующей уравнению (3.2) может быть представлена в виде 4.2, в. Здесь, как и в скалярной схеме (4.2, б), фигурирует как бы обратная положительная связь; это представление связано с выбранным перед  $Ax$  знаком в исходном уравнении. В общем говорить о знаке векторной обратной связи некорректно. Некоторые скалярные связи, образующие векторную связь, могут быть отрицательными, а остальные – положительными.

На рисунке 4.2, г изображен вариант структурной схемы системы (3.3) которая отличается от исходного уравнения только указанными входной и выходной величинами.



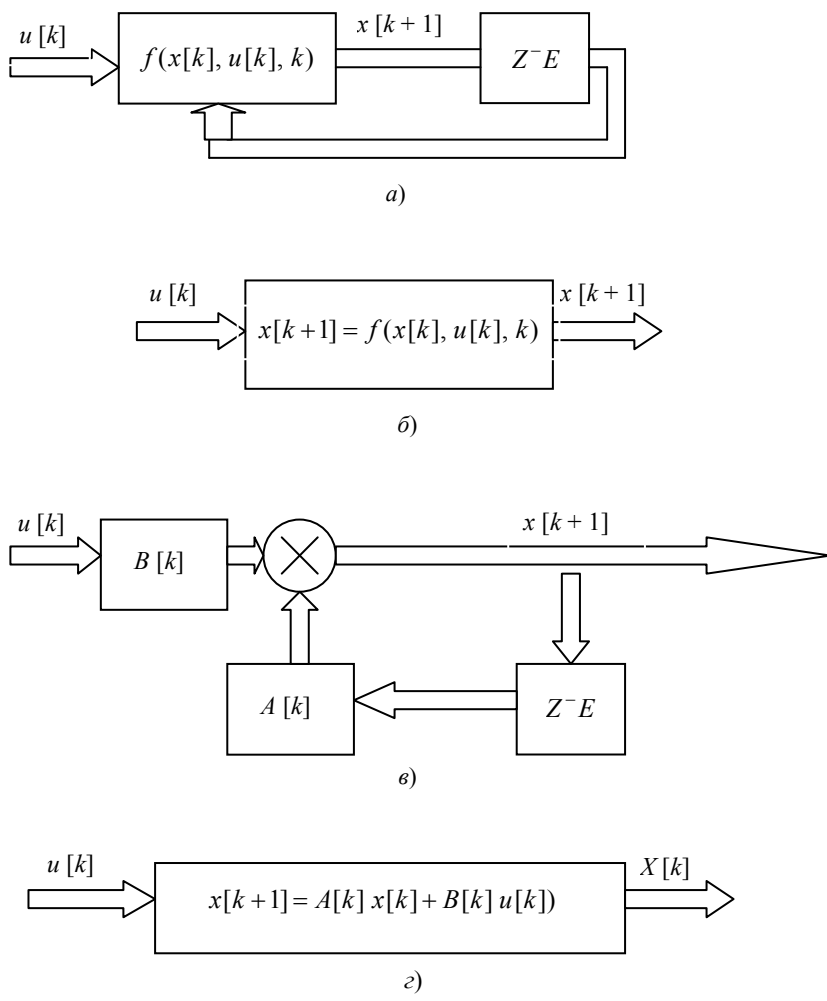


Рис. 4.3

#### 4.4. ВЕКТОРНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Структурные схемы систем с дискретным временем могут быть аналогичными схемам непрерывных систем, представленных на рис. 4.2 при условии замены оператора  $\frac{1}{p}$  на оператор задержки во времени на один интервал (рис. 4.3). Подобная задержка обозначается прямоугольником с оператором  $Z^{-1}E$  или прямоугольником с надписью «запаздывание», «задержка». В дальнейшем будем использовать первый способ описания.

#### 4.5. НАБЛЮДАЕМОСТЬ САУ

Прежде чем синтезировать алгоритм автоматизирования или управления, надо рассмотреть принципиальные возможности этих процессов для заданного объекта или системы. Эти возможности в значительной степени выявляются при изучении свойств системы, которые принято называть *наблюдаемостью* и *управляемостью*; так как основной целью изучения этих свойств является выявление принципиальных возможностей управления, они обычно определяются в идеальных условиях (в системе отсутствуют шумы и не действуют возмущения). Измерение, наблюдение являются необходимой составной частью процесса управления даже тогда, когда формируется программное управление (функция времени, но не координат) определённая на стадии проектирования. Исходным является измерение, доставляющее необходимую информацию об управляемом объекте. Связь управления с информацией, получаемой посредством измерения, является органической и может быть положена в основу определения понятия управления. При автоматическом управлении предполагается, что наблюдение заключается в измерении координат, параметров и в понятие «наблюдения» и «измерения» вкладывают практически одинаковый смысл.

##### 4.5.1. ВИДЫ ОБЩЕЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Общая постановка задачи получена через наблюдение множества  $Z$ , связанного известным оператором с множеством  $X$ , принадлежащим пространству состояний системы с заданной ММ. Требуется определить множе-

ство  $X$  или некоторое его подмножество ( $X_n$  СХ). Техническая интерпретация: известно множество выходных величин (без шумов) измерителей с заданной функцией состояния контролируемого процесса, подчиняющееся точно известному уравнению. Требуется определить множество или подмножество состояний процессов, которое соответствует указанному множеству выходных величин, т.е. получить множество  $Z$ , связанное с множеством  $X$  следующим образом  $z(x)$ . В зависимости от множеств  $Z$  и  $X$  связи  $z(x)$ ,  $x \in X$ ,  $z \in Z$  и уравнения наблюдаемого процесса возможно большое число вариантов конкретных постановок задач наблюдения.

1. Покомпонентное мгновенное измерение (рис. 4.4). Случай для решения не интересен.

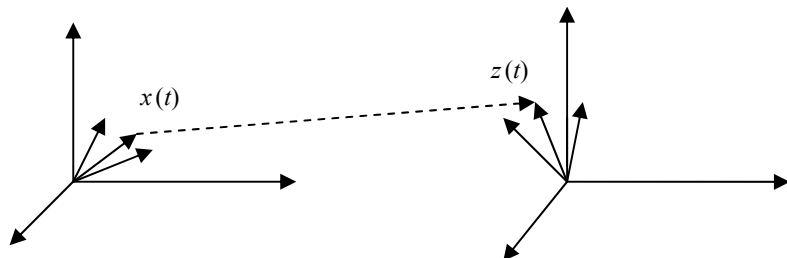


Рис. 4.4

2. Практически мгновенное скалярное наблюдение с вычислением производных (рис. 4.5).

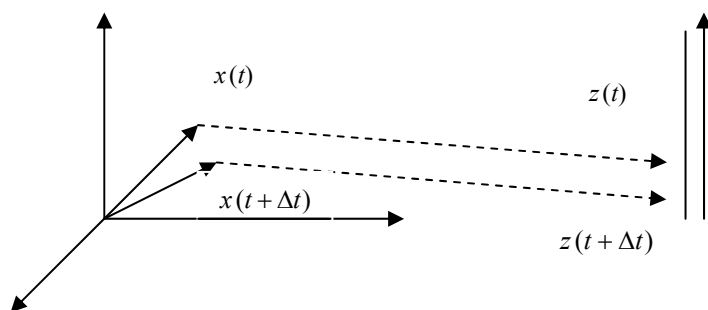


Рис. 4.5

Данная задача имеет невысокое практическое значение, так как при наличии шумов измерения возникают трудности с вычислением производных за необходимое время, следует использовать алгоритмы сглаживания и фильтрации, а это, в свою очередь, приводит к существенным затратам машинного времени.

3. Самая распространённая постановка задачи наблюдения такая, при которой элементами  $X$  является вектор-состояния в некоторый начальный момент времени  $x(t_0)$ , известно уравнение детерминированного процесса  $x(t)$ , задана функция наблюдения  $z = h(x(t), t)$ , измеренная на конечном интервале времени  $(t_0, t_1)$  и имеющая размерность меньше размерности вектора  $X$  (рис. 4.6).

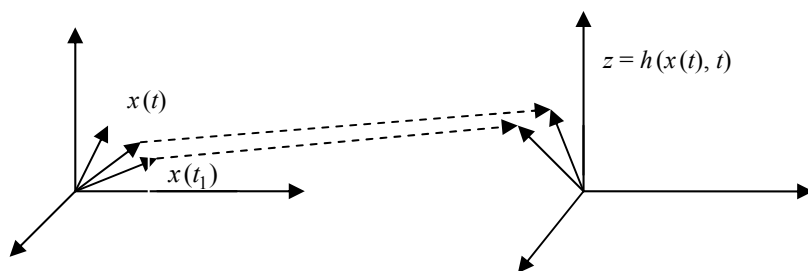


Рис. 4.6

Ясно, что задача определения  $x(t_0)$  в этой постановке разрешима только за счёт использования априорной информации об  $x(t)$ , т.е. уравнения, описывающего процесс.

*Полная наблюдаемость* соответствует случаю, когда можно восстановить весь вектор состояния.

*Неполная наблюдаемость* соответствует случаю, когда можно восстановить часть компонентов вектора состояния.

Когда находят часть, вводится новая индексация для упорядочивания (1, 5, 10 → 1, 2, 3).

При полной непосредственной наблюдаемости функция наблюдения  $z = h(x(t), t)$  имеет вид  $z = x$ ; их размерность совпадает, так как измерения непосредственные без комбинаций  $z = h(x(t), t) = x$ .

При неполной наблюдаемости функция  $z = h(x(t), t)$  имеет вид

$$h(t) = Hx,$$

где  $H = \begin{vmatrix} E_v & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ ,  $H$  – диагональная матрица;  $E_v$  – единичная матрица.

Размер  $\dim(E_v) = v \times v$ ;  $\dim(x) = n$ ;  $v < n$ . Отношение  $\frac{v}{n}$  называется *степенью непосредственной наблюдаемости*.

### Вопросы для самопроверки

1. Какой вид имеет эквивалентная система двух скалярных уравнений линейной системы второго порядка при  $n = 2$ ?
2. Наблюдаемость САУ.
3. Нарисуйте графики для каждой из задач наблюдения.
  - покомпонентное мгновенное измерение;
  - практически мгновенное скалярное наблюдение с вычислением производных;
  - использование априорной информации об  $x(t)$ , т.е. уравнение, описывающее процесс.
4. Что такое полная наблюдаемость?
5. Что такое неполная наблюдаемость?
6. Что называется степенью непосредственной наблюдаемости?

## Лекция 5

### УСЛОВИЯ НАБЛЮДАЕМОСТИ

#### 5.1. ЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ, БЛАГОПРИЯТСТВУЮЩИЕ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ДЛЯ ПОЛНОКОМПОНЕНТНОГО МГНОВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Как известно, нет общих условий однозначной разрешимости СЛАУ

$$z = h(x); \quad (5.1)$$

– векторный вид

$$x \in R^n, \quad z \in Z^n; \quad (5.2)$$

– координатный способ

$$z_i = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}.$$

Но необходимое и достаточное локальное условие для гладкой функции (дифференцируемость) имеет вид

$$\text{rank} = \frac{\partial h}{\partial x} = n,$$

или матрица Якоби

$$\det \frac{\partial h}{\partial x} \neq 0. \quad (5.3)$$

Если условие (5.3) выполняется в некоторой точке  $x_0$ ,  $z_0 = h(x_0)$ , то при  $z$  близких к  $z_0$  уравнение (5.2) имеет единственное решение в окрестности  $x_0$ . Кроме того, в окрестности  $x_0$  малым приращением  $z$  соответствуют малые приращения  $x$ , т.е. система наблюдений является «грубой» по отношению к ошибкам измерения.

Если выражение (5.2) при заданном  $z_i$  рассматривать как поверхность положения в пространстве состояний, то соотношение определяется как точка пересечения  $n$  таких поверхностей и из условия (5.1) следует единственность такой точки. Условие (5.3) означает, что в окрестности  $x$  все поверхности положения различны в том смысле, что нормали к ним не коллинеарны. Как уже отмечалось, свойственная данному случаю полнота наблюдений ( $n$ -измеренных величин, связанных с  $n$ -мерным вектором состояния), редко имеет место в системе со сложными ММ, поэтому данный вариант в ТАУ часто не рассматривается.

#### 5.2. ЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ (ИЗМЕРЕНИИ) ПРОИЗВОДНЫХ ПО ВРЕМЕНИ

Уравнение детерминированного процесса имеет вид

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (5.4)$$

где  $u(t)$  – известная дифференцируемая нужное число раз функция времени.

$$x \in R^n.$$

Уравнение наблюдения запишем в более общей форме, чем раньше:

$$z = h(x, u, t), \quad (5.5)$$

где  $z$  – векторная наблюдаемая величина размерности  $m$  ( $m < n$ ).

Заданные функции  $f$  и  $h$  считаются дифференцируемые по всем аргументам необходимое число раз.

Введём линейный оператор дифференцирования в силу уравнения (5.4), которое называется оператором Ляпунова, который имеет следующий вид:

$$L[*] = \frac{\partial[*]}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial[*]}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial[*]}{\partial t};$$

$$L[*] = \frac{\partial[*]}{\partial x} f + \frac{\partial[*]}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial[*]}{\partial t}, \quad (5.6)$$

где  $[*]$  – функции столбцы.

Дифференцируя (5.5)  $n - 1$  раз по времени с учётом (5.6), получается набор соотношений следующего вида:

$$z = h; \quad \dot{z} = L[h], \quad \ddot{z} = L^2[h] = (L[L[h]]); \quad (5.7)$$

$$z^{(n-1)} = L^{(n-1)}[h],$$

т.е.

$$\dot{z} = \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Уравнение (5.7) рассматриваем как уравнение относительно  $x$  при заданных (измеренных или вычисленных) на  $z(t)$  левых частях. Вследствие самого способа получения данных соотношений вектор состояний  $x(t)$  системы (5.4) является решением этих уравнений, причём именно тем решением, которое необходимо найти по смыслу задачи наблюдения.

Для однозначного определения  $x(t)$  в этих условиях необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие следующего вида:

$$\text{rank} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^T \left( \frac{\partial}{\partial x} L[h] \right)^T \dots \left( \frac{\partial}{\partial x} L^{(n-1)}[h] \right)^T \right] = n, \quad (5.8)$$

где все матрицы Якоби вычислены на решение  $x(t)$  при известном управлении  $u(t)$ .

### 5.3. ЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ НЕПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Повторя приведённые преобразования, можно показать, что если измеряется (вычисляется) как и выше  $n - 1$  производная  $z$ , то

$$\text{rank} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^T \left( \frac{\partial}{\partial x} L[h] \right)^T \dots \left( \frac{\partial}{\partial x} L^{(n-1)}[h] \right)^T \right] = d, \quad d < n, \quad (5.9)$$

и имеет место неполная наблюдаемость в том смысле, что по результатам измерения (вычисления) производных могут быть определены не все компоненты вектора состояния, а степень наблюдаемости определяется как

$$\frac{d}{n}.$$

Допустим  $h = x$ . Это означает, что имеет место полная измеримость или *полная непосредственная наблюдаемость*. В этом случае  $\frac{\partial h}{\partial x}$  (матрица Якоби) =  $E(n \times n)$ . Rank матрицы в левой части (5.8) равна  $n$  и имеет место полная наблюдаемость, которая имеет место и при выполнении (5.3).

### 5.4. УСЛОВИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Для нелинейной системы следует говорить о наблюдаемости того или иного процесса (движения), происходящего в этой системе. Для линейной системы и линейных условий наблюдения, все процессы имеют одинаковую степень наблюдаемости. Условие наблюдаемости линейной стационарной системы было получено Калманом, который одновременно ввёл наиболее распространённое понятие наблюдаемости и управляемости.

Пусть уравнение процесса и уравнение наблюдаемости имеют вид

$$\dot{x} = Ax + Bu ; \quad (5.10)$$

$$z = Hx + Cu , \quad (5.11)$$

$A, B, C, H$  – постоянные матрицы соответствующей размерности.

Тогда оператор Ляпунова имеет вид

$$L[*] = \frac{\partial[*]}{\partial x} \dot{x}(Ax + Bu) + \frac{\partial[*]}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial[*]}{\partial t} . \quad (5.12)$$

Функция  $h$  в данном случае равна правой части (5.11). Тогда критерий (5.8) примет следующий вид:

$$\text{rank}(H^T : A^T H^T : (A^T)^2 H^T : \dots : (A^T)^{n-1} H^T) = n . \quad (5.13)$$

Это широко известное и необходимое достаточное условие полной наблюдаемости Калмана. Матрица в левой части (5.13) строится из матриц-блоков размера  $(n \times m)$ . Иногда эти блоки определяют штриховыми линиями как (5.13).

Для случая неполной наблюдаемости в (5.13) вместо  $n$  подставляем  $d$

$$(d < n) . \quad (5.14)$$

Степень наблюдаемости в этом случае равна  $\frac{d}{n}$  и не меняется при линейном не особом преобразовании координат. Действительно, если выполнить преобразование  $x = \alpha y$  ( $\alpha$  – невырожденная квадратная матрица), то условие (5.14), применённое к системе с вектором состояния  $Y$ , примет вид

$$\text{rank}(\alpha^T H^T : \alpha^T A^T H^T : \alpha^T (A^T)^2 H^T : \dots : \alpha^T (A^T)^{n-1} H^T) = d , \quad (5.15)$$

Rank останется таким же.

### 5.5. УСЛОВИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Уравнение процесса и наблюдения имеет следующий вид:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u;$$

$$z(t) = H(t)x + C(t)u,$$

где матрицы  $A, H, B, C$  дифференцируемы необходимое количество раз и является матричной функцией времени.

В данном случае

$$\frac{\partial h}{\partial x} = H(t) = \Pi_0(t) ;$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} L[h] = H(t)A(t) + H(t) = \Pi_0 A + \Pi_0 = \Pi_1 ;$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} L^2[h] = \Pi_1 A + \Pi_1 = \Pi_2 ;$$

...

$$\frac{\partial h}{\partial x} L^{n-1}[h] = \Pi_{n-2} A + \Pi_{n-2} = \Pi_{n-1} .$$

В данном случае уравнения (5.8) и (5.9) примут следующий вид:

$$\text{rank}[\Pi_0^T \Pi_1^T \Pi_2^T, \dots, \Pi_{n-1}^T] = n ; \quad (5.16)$$

$$\text{rank}[\Pi_0^T \Pi_1^T \Pi_2^T, \dots, \Pi_{n-1}^T] = d , \quad (5.17)$$

где  $\Pi_0 = H(t)$  ,

$$\Pi_k(t) = \Pi_{k-1}(t) + \Pi_{k-1}(t)A(t), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

### 5.6. УСЛОВИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ МАТРИЦУ КОШИ

Если известна матрица Коши  $K(t'', t')$ , но условия полной наблюдаемости на интервале  $[t_0, t_1]$  заключены в невыраженности матрицы

$$\int_0^t K^T(t_1, t_0)H^T(t)H(t)K(t, t_0)dt.$$

### 5.7. ЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ НАБЛЮДАЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОЦЕССА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИ $n$ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Уравнение процесса с дискретным временем запишем в компактную форму, обозначая функцию как оператор

$$\begin{aligned} x[k+1] &= f[x[k], u[k], k] = F_k x[k]; \\ x[k+2] &= f[[x[k], u[k], k], u[k+1], k+1] = F_{k+1} x[k] \cdot F_k. \end{aligned}$$

Тогда, продолжая этот процесс дальше,

$$x[k+n-1] = F_{k+n-2} F_{k+n-1}, \dots, F_k x[k].$$

Уравнение наблюдения может быть представлено в виде

$$z[k] = h[x[k], u[k], k] = h_k[x[k]].$$

Следующий член уравнения наблюдения:

$$\begin{aligned} z[k+1] &= h[x[k], u[k+1], k+1] = h[F_k x[k], u[k+1], k+1] = h_{k+1} F_k x[k]; \\ z[k+n-1] &= h[F_{k+n-2} F_{k+n-3}, \dots, F_k x[k], u[k+1], k+1] = \\ &= h_{k+n-1} [F_{k+n-2} F_{k+n-3}, \dots, F_k x[k]]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Уравнение (5.18) в соответствии с самой постановкой задачи рассматриваем как уравнение относительно  $x[k]$  при заданных левых частях, т.е.  $z[k], z[k+1]$  и т.д.

Локальное условие разрешимости этих уравнений эквивалентно условию полной наблюдаемости, некоторое в данном случае будет иметь вид

$$\text{rank} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x[k]} h_k[x_k] \\ \frac{\partial}{\partial x[k]} h_{k+1}[F_k x_k[k]] \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x[k]} h_{k+n-1}[F_{k+n-1} F_{k+n-2}, \dots, F_k x_k[k]] \end{bmatrix} = n. \quad (5.19)$$

Степень наблюдаемости  $\frac{d}{n} < 1$  имеет место в том случае, если

$$\text{rank} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x[k]} h_k[x_k] \\ \frac{\partial}{\partial x[k]} h_{k+1}[F_k x_k[k]] \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x[k]} h_{k+n-1}[F_{k+n-1} F_{k+n-2}, \dots, F_k x_k[k]] \end{bmatrix} = d. \quad (5.20)$$

Матрицы в (5.19), (5.20) имеют размерность  $(m \times n)$ . Иногда, чтобы было удобнее использовать данные соотношения, их транспонируют.

### 5.8. УСЛОВИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Для данного случая, модель системы в пространстве состояний и уравнение наблюдения соответственно имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k]; \\z[k] &= Hx[k] + Cu[k],\end{aligned}$$

(5.19) после транспонирования примет вид

$$\text{rank}(H^T : A^T H^T : (A^T)^2 H^T : \dots : (A^T)^{n-1} H^T) = n, \quad (5.21)$$

т.е. совпадает с условием полной наблюдаемости (5.12) непрерывной линейной стационарной системы. Так же как и (5.12) (5.21) является необходимым и достаточным условием полной наблюдаемости.

Условие неполной наблюдаемости при дискретном времени в стационарной системе также совпадает с условием (5.13) для непрерывной системы  $\text{rank} = d$ .

### 5.9. УСЛОВИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Для нестационарной линейной системы с дискретным временем математическое описание пространств состояний и уравнение наблюдения соответственно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A[k] x[k] + B[k] u[k]; \\z[k] &= H[k] x[k] + C[k] u[k].\end{aligned}$$

В данном случае (5.19) примет вид

$$\text{rank} = \begin{bmatrix} H[k] \\ H[k+1] A[k] \\ \vdots \\ H[k+n-1] A[k+n-2] \dots A[k] \end{bmatrix} = n. \quad (5.22)$$

Условие неполной наблюдаемости со степенью  $\frac{d}{n} < 1$  будет иметь вид

$$\text{rank} = \begin{bmatrix} H[k] \\ H[k+1] A[k] \\ \vdots \\ H[k+n-1] A[k+n-2] \dots A[k] \end{bmatrix} = d. \quad (5.23)$$

Условие наблюдаемости процесса с дискретным временем при  $q < n$  легко получается из условий наблюдаемости (5.19) – (5.23) заменой  $n$  на  $q$ .

### 5.10. СТРУКТУРНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Разобьём вектор  $x$  на два субвектора, тогда (5.4), (5.5) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}x(t) &= \{x_{(1)}(t), x_{(2)}(t)\}; \\ \dim(x) &= \dim(x_{(1)}(t)) + \dim(x_{(2)}(t)).\end{aligned}$$

Тогда (5.4) и (5.5) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_{(1)}(x_{(1)}(t), x_{(2)}(t), u(t), t); \\ \ddot{x}_2(t) &= f_{(2)}(x_{(1)}(t), x_{(2)}(t), u(t), t); \\ z(t) &= h(x_{(1)}(t), x_{(2)}(t), u(t), t).\end{aligned}$$

Структурная схема, соответствующая этим уравнениям, представлена на рис. 5.1.

Процесс, отвечающий этой схеме, может быть как вполне наблюдаемым, так и не вполне наблюдаемым. Полная или неполная наблюдаемость в локальном смысле может быть установлена посредством критериев, которые были рассмотрены ранее. Допустим, что уравнение, описывающее поведение рассмотренной системы, имеет следующий вид:

$$\dot{x}_1 = f_{(1)}(x_{(1)}(t), u, t);$$

$$\dot{x}_2 = f_{(2)}(x_{(1)}(t), x_{(2)}(t), u, t);$$

$$z = h(x_{(1)}(t), u, t).$$

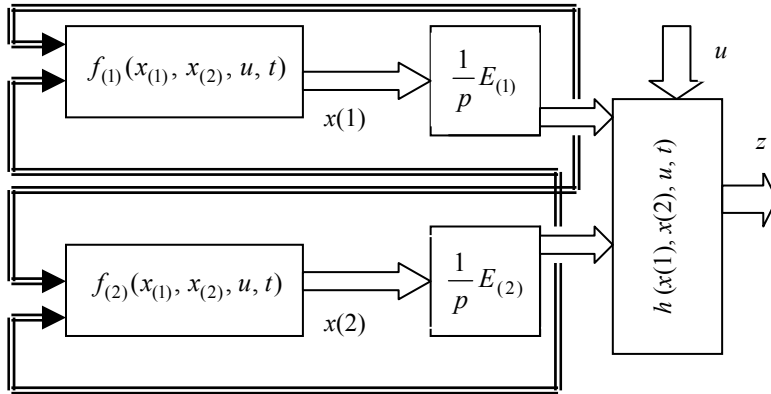


Рис. 5.1

Соответственно структурная схема примет вид, представленный на рис. 5.2.

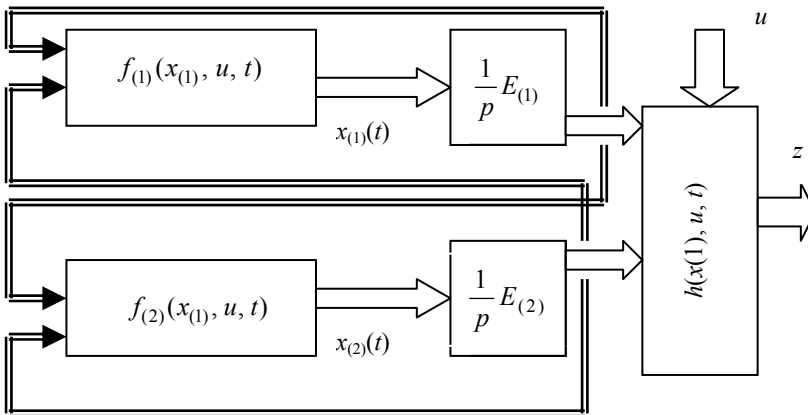


Рис. 5.2

На основе результатов анализа структурной схемы (на рис. 5.2) можно делать вывод о том, что процесс представленный вектором  $x_{(2)}(t)$  не наблюдаем, так как  $x_{(2)}(t)$  никак не воздействует на выход системы  $z$ . Если размер  $\dim(x_{(1)}(t)) = d$ , а  $\dim(x_{(2)}(t)) = n - d$ , то степень наблюдаемости  $\leq \frac{d}{n}$ , это вытекает из (5.9). Матрица

$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^T$  имеет в данном случае блочную структуру  $\left(\frac{\partial h}{\partial x_{(1)}} \quad 0\right)^T$ , размер нулевой матрицы блока  $(n - d) \times m$ ; все

другие матрицы имеют такую же структуру с нулевыми блоками того же размера. Ранг матрицы в левой части (5.9) не может превышать  $d$ .

### Вопросы для самопроверки

1. Что означает условие  $\det \frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$ ?
2. Запишите уравнение детерминированного процесса.
3. Что такое полная непосредственная наблюдаемость? Как она ещё называется?



4. Как выглядит достаточное условие полной наблюдаемости Калмана?
5. Как выглядит условие наблюдаемости линейной нестационарной системы?
6. Условие наблюдаемости линейной нестационарной системы, выраженной через матрицу Коши.
7. Локальные условия наблюдаемости нелинейного процесса с дискретным временем при  $n$  последовательных измерениях.
8. Как выглядят модель системы в пространстве состояний и уравнение наблюдения для линейной стационарной системы с дискретным временем?
9. Как выглядят модель системы в пространстве состояний и уравнение наблюдения для линейной нестационарной системы с дискретным временем?

## Лекция 6

### УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Понятие управляемости связано с переводом (переходом) системы посредством управления из одного состояния в другое. Этому понятию придаётся либо структурно-качественный, либо количественный смысл.

При рассмотрении структурно-качественной стороны управляемости интересуются принципиальной возможностью перехода управляемой системы из одного заданного множества состояний в другое за конечное время.

При количественном изучении управляемости используют те или иные характеристики переходных процессов при простейших типовых управляющих воздействиях.

Управляемость обычно рассматривают применительно к детерминированным процессам, хотя возможно построение стохастических аналогов задач управляемости.

Можно анализировать управляемость как динамичность объектов, оснащенных регуляторами, так и систем, содержащих множество замкнутых контуров управления. В большой системе с иерархической структурой можно изучать управляемость каждого уровня, начиная от низшего и кончая высшим. В любом случае управляемость зависит от структуры систем, состава органов управления, значений параметров, располагаемой энергией управления.

Может применяться и применяется целая группа понятий управляемости различаемых как условиями перехода систем, так и ограничениями, накладываемыми на управление. Классификация видов управляемости по этим признакам представлена в табл. 6.1, указанные в таблице виды переходов представлены на рис. 6.1.

I: Рассмотрен переход из произвольной точки  $n$ -мерного пространства в произвольную точку этого пространства. Никаких ограничений на характер движения, кроме конечного времени перехода  $t_1 - t_0$  не накладывается.

II: Задана замкнутая область  $G$  и должен обеспечиваться переход из этой области в произвольную её точку без выхода за пределы области  $G$ . Это случай существования ограничений типа неравенств в пространстве состояний.

III: Соответствует переходу из заданной области пространств состояний, полной размерности  $n$  в заданную область меньшей размерности. Например, управление должно обеспечить переход из любой точки пространств состояний напрямую проходящее через начало координат.

IV: Является как бы противоположным предыдущему. Управление должно обеспечивать перевод системы из любой точки области меньшей размерности в любую точку полноразмерной области.

V: Соответствует управляемости «в малом». Управление должно обеспечивать переход из любой точки пространств состояний  $x^0$  в любую точку малой  $n$ -мерной окрестности  $\epsilon$  точки  $x^0$ . Порядок малости окрестности может быть связан со временем перехода.

#### 6.1. Виды управляемости

Вид перехода	Ограничение на управление и № варианта				
Формулировка	№ варианта	не ограничено	ограничено $\ u\  \leq u_{\max}$	принимает дискретные значения $u_j = \pm U_j^{\max}$	имеет импульсный характер
		1	2	3	4
Из произвольной точки пространства состояний $R^n$ в произволь-	I	I.1	I.2	I.3	I.4

ную точку $R^n$					
Из произвольной точки замкнутой области размерности $n$ пространства $R^n$ в произвольную точку этой области	II	II.1	II.2	II.3	II.4
Из произвольной точки области размерности $n$ пространства $R^n$ в произвольную точку области меньшей размерности этого пространства	III	III.1	III.2	III.3	III.4
Из заданной области размерности $m < n$ пространства $R^n$ в заданную область размерности $n$	IV	IV.1	IV.2	IV.3	IV.4
Из произвольной точки $x_0$ пространства состояний $R^n$ в любую точку малой окрестности $\ x - x^n\  \leq E$ этой точки	V	V.1	V.2	V.3	V.4
Из произвольной точки заданной области подпространства $/ R^n$ ( $m < n$ ) в произвольную точку другой заданной области этого подпространства	VI	VI.1	VI.2	VI.3	VI.4
Из заданной точки пространства состояний $R^n$ в другую заданную точку по заданной программной траектории	VII	VII.1	VII.2	VII.3	VII.4

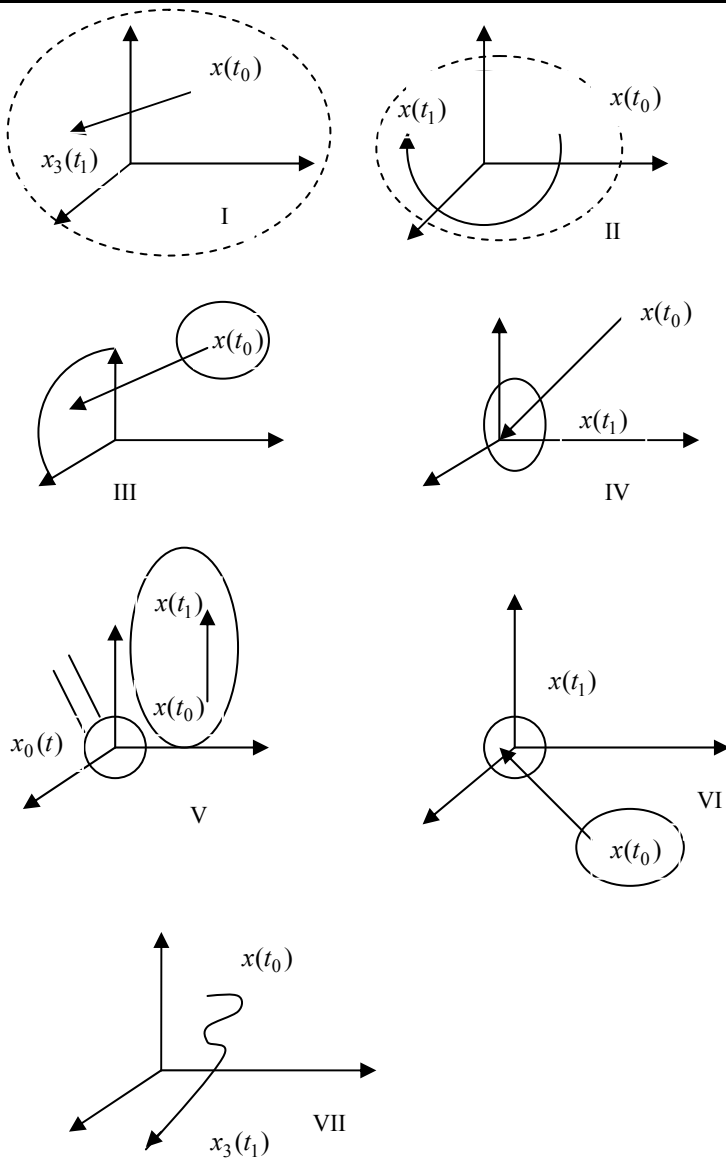


Рис. 6.1

Управляемости в малом может быть дано другое определение: пусть при управлении  $u^0(t)$  и начальном условии  $x_0^0 = x(t_0)$  имеет место процесс  $x^0(t)$ .

При управлении  $u = u^0(t) + \Delta u(t)$  процесс описывается функцией  $x(t) = x^0(t) + \Delta x(t)$ .

Пусть каждая точка траектории  $x^0(t)$  служит центром сферы, радиусом  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – бесконечно малая величина. Огибающая указанных сфер образует  $\varepsilon$ -трубку траекторий. Если можно указать управление  $\Delta u(t)$ , обеспечивающее прохождение траектории  $x^0(t) + \Delta x(t)$  через любую точку  $\varepsilon$ -трубки, то система обладает управляемостью «в малом».

VI: Соответствует переходу из заданной области подпространства  $m < n$  в заданную область того же подпространства. По отношению к определению I это может быть случаем неполной управляемости.

VII: Важное практическое значение имеет понятие управляемости (VII). Здесь задается множество программных траекторий  $x_3(t)$  перехода из одной точки  $x_3(t_0)$  в другую  $x_3(t_1)$ . Система считается управляемой, если существуют управления, обеспечивающие движение по заданным траекториям при условиях

$$x(t_0) = x_3(t_0) ;$$

$$x(t_1) = x_3(t_1) .$$

Все эти понятия могут рассматриваться при различных условиях, накладываемых на управление. Четыре варианта таких условий представлены в табл. 6.1.

В случае I никаких ограничений на вектор управляющих воздействий  $u(t)$  не накладывается, так как управления принадлежат открытой области пространства  $R^n$ .

В случае II управление ограничено, т.е. принадлежит замкнутой области пространства  $R^n$ .

В случае III управление все время (за исключением счётного множества моментов времени) имеет предельное значение, т.е. находится на границе области в пространстве  $R^r$  (счётное множество значений времени имеет меру 0).

В случае IV управление не ограничено по величине, но носит импульсный характер (типа векторной  $\delta$ -функции). Переход в этом случае осуществляется мгновенно, таким образом, существует большое число видов управляемости (в рассмотренной таблице их содержится 28). Эти виды применительно к линейно-стационарным, линейно-нестационарным, нелинейным системам, изучены в различной степени.

Самым сильным в теоретическом и практическом смысле исследованием управляемости является необходимый и достаточный аналитический и структурный критерий управляемости того или иного вида. Они получены пока для основных видов управляемости линейных систем. Во многих случаях приходится довольствоваться лишь необходимыми или достаточными критериями управляемости, а в ряде случаев лишь условиями, способствующими управляемости, подобно тому, как это имеет место при изучении наблюдаемости.

Во многих практических задачах аналитические и структурные подходы анализа управляемости оказываются неприменимыми, так как они громоздки и не разработаны. Приходится прибегать к численному эмпирическому изучению путём моделирования.

### Вопросы для самопроверки

1. Понятие управляемости.
2. Охарактеризуйте типы переходов при различных видах управляемости.

## Лекция 7

### ВИДЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

#### 7.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Для линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu , \tag{7.1}$$

где  $A$  – матрица размером  $(n \times n)$ , а  $B$  –  $(n \times r)$ , постоянны при отсутствии ограничений в пространстве состояния и пространстве управления, управление зависит только от матриц  $A$  и  $B$ . Поэтому вместо управляемости системы в этих случаях можно говорить об управляемости пары  $(A, B)$ .

## 7.2. КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПО КАЛМАНУ

Если для произвольно заданных двух точек  $x_0, x^1$  существует управление  $u(t)$ , переводящее систему (7.1) за конечное время  $t_1 - t_0$  из  $x_0$  в  $x^1$  (I.1), то система (7.1) или пара  $(A : B)$  называется *вполне управляемой по Калману*.

Необходимое и достаточное условие полной управляемости имеет вид

$$\text{rank}[B : AB : A^2B : \dots : A^{n^*-1}B] = n,$$

где  $n^* \leq n$  и является степенью минимального полинома матрицы  $A$ .

Для матрицы, имеющей простые корни характеристического полинома степени  $n$ , т.е. если  $\det(A - \lambda E) = 0$ , корни простые  $n^* = n$ . Известно также, что ранг расширенной матрицы

$$\text{rank}[B : AB : A^{n^*-1}B : A^{n^*}B : \dots] = \text{rank}[B : AB : \dots : A^{n^*-1}B],$$

поэтому  $n^*$  в критерии можно заменить на  $n$  и в дальнейшем пользоваться критерием

$$\text{rank}[B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] = n. \quad (7.2)$$

Пунктирными линиями в (7.2) отделены матрицы блоки, размера  $n \times m$ .

Вся матрица (7.2) имеет размер  $n \times (n \times r)$ . Если условие (7.2) не выполняется, то говорят, что система не вполне управляема по Калману, причем  $q$  может быть названо степенью неуправляемости, которая вычисляется:

$$n - \text{rank}[B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] = q > 0. \quad (7.3)$$

Рассмотрим структурные условия полной и неполной управляемости по Калману. Пусть имеется только одно скалярное управление, воздействующее непосредственно только на одну координату. Тогда можно принять  $B^T = [100\dots 0]$  и следующую структуру:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

т.е. считать, что все элементы первого столбца, кроме верхнего, – нулевые. Тогда

$$AB = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2B = a_{11}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A^{n-1}B = a_{11}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

и выражение (7.3) примет вид

$$n - \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^2 & \dots & a_{11}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = n - 1 = q \geq 0.$$

Таким образом, данная система при  $n > 1$  не вполне управляема, причём степень неуправляемости составляет  $n - 1$ .

Структура данной системы представлена на рис. 7.1. Причина, по которой здесь лишь одна управляемая координата  $x_1$ , а остальные  $n - 1$  координат  $x_2, x_3, \dots, x_n$  неуправляемы, вполне ясна: нижний блок уравнений размерности  $n - 1$  не имеет воздействий со стороны верхнего управляемого блока, воздействия же со стороны нижнего блока на верхний не влияют на управляемость.

Рассмотрим второй случай, когда матрица  $B$  имеет тот же вид, а матрица  $A$  обладает следующей структурой:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ причём } a_{21} \neq 0.$$

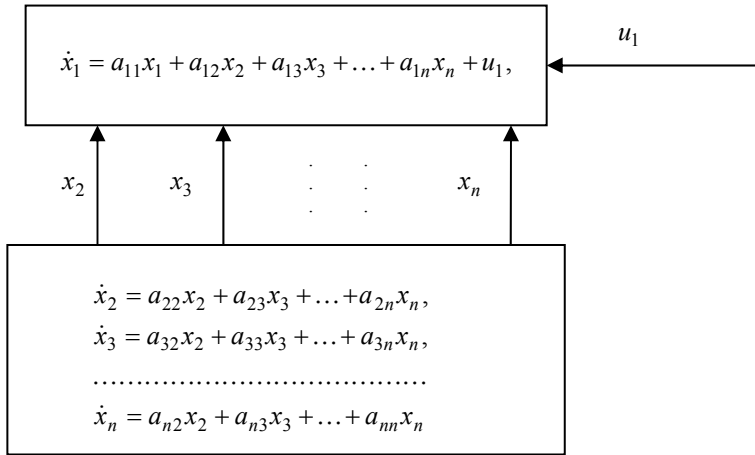


Рис. 7.1

В этом случае степень неуправляемости составляет  $n - 2$ . Действительно,

$$\text{rank } [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^2 + a_{12}a_{22} & \dots \\ 0 & a_{21} & a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Структура данной системы представлена на рис. 7.2.

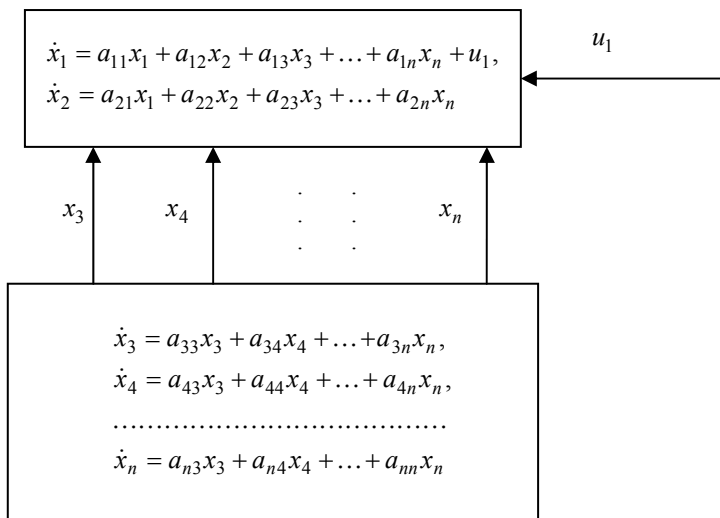


Рис. 7.2

В общем случае стационарной линейной системы структурные условия управляемости и неуправляемости по Калману заключаются в следующем. Представим матрицы  $A$ ,  $B$  и матрицы столбцы  $x$ ,  $u$  в блочном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{(1)} \\ \dot{x}_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(11)} & A_{(12)} \\ A_{(21)} & A_{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{(11)} & B_{(12)} \\ B_{(21)} & B_{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{aligned}\dot{x}_{(1)} &= A_{(11)}x_{(1)} + A_{(12)}x_{(2)} + B_{(11)}u_{(1)} + B_{(12)}u_{(2)}; \\ \dot{x}_{(2)} &= A_{(21)}x_{(1)} + A_{(22)}x_{(2)} + B_{(21)}u_{(1)} + B_{(22)}u_{(2)}.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Это разбиение на блоки осуществляется произвольно с соблюдением, разумеется, согласованности соответствующих размеров.

Если среди всех возможных разбиений на блоки существует такое, при котором

$$A_{(21)} = 0, \quad B_{(21)} = 0, \quad B_{(22)} = 0 \quad (7.5)$$

или

$$A_{(12)} = 0, \quad B_{(11)} = 0, \quad B_{(12)} = 0, \quad (7.6)$$

то система не вполне управляема по Калману. Действительно, при (7.5)

$$\text{rank} [B \ AB \ \dots] = \text{rank} \begin{bmatrix} B_{(11)} & B_{(12)} & A_{(11)}B_{(11)} & A_{(11)}B_{(12)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} < n$$

и аналогично при (7.6.) Таким образом, если структура линейной стационарной системы может быть представлена в виде рис. 7.3, а или б, то такая система не вполне управляема по Калману. Ясно, что случаи, представленные на рис 7.3, а и б, отличаются только обозначениями и полностью эквивалентны.

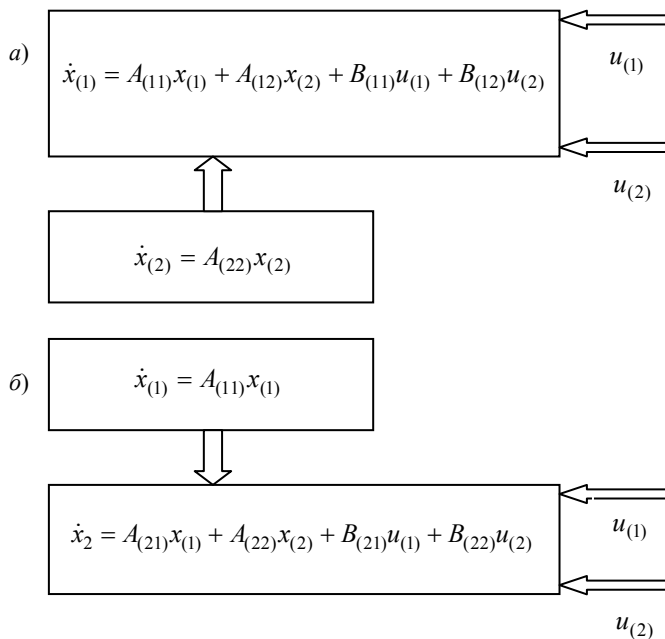


Рис. 7.3

### 7.3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА II.1

Необходимым и достаточным условием управляемости II.1 для линейной системы совпадает с условием полной управляемости (7.2).

### 7.4. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА III.1

Задана плоскость

$$Dx = \text{const} = d, \quad (7.7)$$

где  $D$  постоянная матрица  $p \times n$ ,  $p \leq n$ , если постоянная  $d$  фиксирована и осуществляется переход из любой точки пространства в производную точку плоскости (7.7), то имеет место управляемость вида III.1. Если постоянная  $d$  не фиксирована, то необходимое и достаточное условие возможности перевода за конечное время системы (7.1), из любой точки пространства состояний на указанную плоскость имеет вид

$$\text{rank}[DB : DAB : DA^2B : DA^{n-1}B] = p. \quad (7.8)$$

Этот вид управляемости часто называют *управляемостью по выходу*, потому что  $y = Dx$ .

В том случае, если  $p = n$  и  $D$  – невырожденная матрица, ( $\Delta \neq 0$ ) (плоскость в  $n$ -мерном пространстве называется гиперплоскостью) гиперплоскость (7.6) вырождается в точку, а задача в этом случае становится аналогичной рассмотренной ранее. Критерий (7.8) в этом случае преобразуется в (7.2). Таким образом, не особое линейное преобразование пространства состояний не меняет управляемости по Калману, т.е. полная управляемость по  $x$  эквивалентна в этом случае полной управляемости по  $u$ .

### 7.5. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА IV.1 И V.1

Для системы (7.1) без ограничений задача перехода из любой точки области размерности  $< n$ , в любую точку области размерности  $n$  (IV.1) решается при полной управляемости по Калману. При такой управляемости решается и V.1 перехода из любой точки, близкой к окрестности начального состояния. Таким образом, полная управляемость по Калману для линейной системы достаточна для полной управляемости в IV.1 и V.1. Что касается необходимости, то при достаточной произвольности области в указанных задачах она также имеет место, т.е. (7.2.) сохраняет силу необходимого и достаточного.

### 7.6. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА VI.1

Задача перевода системы (7.1) из произвольной точки подпространства состояний  $R^m$  ( $m < n$ ) в произвольную точку этого подпространства может быть решена при выполнении условия вида

$$\text{rank}[B:AB:A^2B:\dots:A^{n-1}B] = m \quad (7.9)$$

и такой структуре матриц  $A$  и  $B$ , при которой  $R^m$  соответствует управляемой части системы, т.е. полная управляемость в смысле VI.1 сводится к неполной управляемости по Калману.

### 7.7. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА VII.1

Заданная программная траектория  $x_3(t)$  предполагается дифференцируемой, переход по этой траектории означает выполнение равенства

$$\dot{x}_3(t) - Ax_3(t) = Bu(t),$$

чтобы это соотношение обращалось в тождество  $[t_0, t_1]$  при произвольной функции  $x_3(t)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank } B = n \quad r \geq n. \quad (7.10)$$

Таким образом, размерность  $u$  не должна быть  $\geq n$ , т.е. число независимых управляющих воздействий для осуществления полного в  $n$ -мерном пространстве состояний управлений должно быть  $\geq n$ . Если  $r = n$ , то задача имеет однозначное решение, которое имеет вид

$$u(t) = u_3(t) = B^{-1}[\dot{x}_3(t) - Ax_3(t)].$$

Если ставится задача программного перевода системы лишь в отношении части координат состояния, то условия данного состояния вида управляемости могут быть упрощены. Пусть вектор  $x$  представлен в виде совокупности двух субвекторов  $x_{(1)}, x_{(2)}$  размерности  $n_1, n_2$  при условии  $n_1 + n_2 = n$  и уравнения системы записаны в виде (7.4). Пусть также

$$\text{rank } A_{(12)} = n_1, \quad \text{rank } B_{(22)} = n_2. \quad (7.11)$$

Тогда даже при

$$B_{(11)} = 0, \quad B_{(12)} = 0 \quad B_{(21)} = 0 \quad (7.12)$$

система вполне программно управляема в отношении  $x_{(1)}(t) = x_{(1)3}(t)$ , где  $x_{(1)3}(t)$  — дважды дифференцируемая заданная функция. Действительно, если в уравнении

$$\dot{x}_{(1)} = A_{(11)}x_{(1)} + A_{(12)}x_{(2)} + A_{(12)}x_{(2)} \quad (7.13)$$

рассматривать  $x_{(2)}$  как управление, то на основе (7.10), (7.11) заключаем, что всегда можно указать такое  $x_{(2)} = x_{(2)}^*(t)$ , при котором

$$\dot{x}_{(1)3}(t) - A_{(11)}x_{(1)3} = A_{(12)}x_{(2)}. \quad (7.14)$$

Если матрица  $A_{(12)}$  квадратная, то  $x_2^*(t)$  определяется однозначно:

$$x_{(2)}^* = A_{(12)}^{-1}(x_{(1)3} - A_{(11)}x_{(1)3}).$$

Если  $A_{(12)}$  – прямоугольная, то, задавая соответствующее число компонент  $x_2^*(t)$  произвольным образом (например равным нулю), остальные компоненты определяем из (7.14). Подставляя  $x_{(1)3}(t)$ ,  $x_2^*(t)$  в нижнее уравнение (7.4), получаем уравнение

$$x_{(2)}^* - A_{(22)}x_{(2)}^* - A_{(21)}x_{(1)3} = B_{(22)}u_{(2)}, \quad (7.15)$$

которое, согласно (7.10), (7.11), может быть обращено в тождество соответствующим подбором  $u_{(2)}(t)$ .

## 7.8. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА I.2 – VII.2

Вопросы управляемости при ограничениях на управление в виде неравенств были разработаны в самое последнее время. Большое значение они приобрели, в частности, для биологических задач, где знак допустимых управлений фиксирован. В простейшем случае имеется только одно управление, т.е.  $B$  – это вектор, а  $0 \leq u < +\infty$ . Условие управляемости I.2. В этом случае имеет место тогда и только тогда, когда выполняется условие (7.2) и, кроме того, матрица  $A$  системы (7.1) не имеет вещественных собственных значений (или корней характеристического уравнения). Таким образом системы нечётного порядка неуправляемы знакоопределёнными управлениями. Более важное практическое значение при знакоопределённых управлениях имеет управляемость III.2. Пусть задана плоскость  $Dx = \text{const}$ , управляемость III.2 при  $0 \leq u < +\infty$ , имеет место тогда, когда выполнено условие (7.8) и инвариантное подпространство соответствующее вещественной части спектра системы (7.1), принадлежит плоскости  $Dx = 0$ . Подобная ситуация возникает в задачах биологии, экономики, в том случае, когда матрица  $A$  имеет вид

$$A = A_0 - QC^T,$$

где  $A_0$  – матрица с неотрицательными поддиагональными элементами и собственными числами, не имеющими положительных вещественных частей;  $Q$  и  $C$  – соответствующие вектора с нулевыми компонентами.

У таких матриц все вещественные соответствующие значения лежат в левой полуплоскости. Задача управления биологическими, экономическими системами состоит в переводе процесса из произвольной точки фазового пространства  $R^n$  на устойчивое подпространство матрицы  $A$ .

**Решение задачи:** Пусть собственные значения матрицы  $A$  различны и  $V_1, V_2, \dots, V_p$ ,  $p \leq n$ , соответствующие собственным значениям, собственные векторы матрицы  $A$ . Если для комплексной матрицы  $V = [V_1, V_2, \dots, V_p]$ , выполнено условие (7), то система управляема в смысле III.2. В общем, критерий управляемости III.2 имеет вид: пусть  $B$  – матрица размера  $n \times n$  и  $U$  – вектор размерности  $r$ ; вектор, который принимает значение из множества  $\Omega$ . Обозначим через  $\text{CH}(\Omega)$  – выпуклую оболочку множества  $\Omega$ . Предположим, существует  $u \in \Omega$ , при которой  $Bu = 0$  и  $\text{CH}(\Omega)$  имеет не пустую внутренность в  $R^n$ . Управляемость вида III.1 имеет место, если выполнено условие (2) и матрица не имеет собственных вещественных векторов  $V_i$ , для которого выполняется неравенство

$$V_i^T Bu \leq 0; \quad \forall u \in \Omega.$$

## 7.9. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА I.4

Если в линейной стационарной системе (7.1) вектор управляемости задан в виде

$$u = u_0 \delta(t - t_0),$$

где  $\delta(t - t_0)$  – функция Дирака, состояние изменится скачком, причем вектор  $x$  получит приращение  $x(t_0 + 0) = Bu$ .

Необходимым и достаточным условием возможностей перевода системы в произвольное состояние является условие

$$r \geq n \text{ и } \text{rank } B = n. \quad (7.16)$$

Таким образом, условие мгновенного произвольного перехода по произвольно заданной траектории (7.10). Это условие можно назвать *условием полной непосредственной управляемости*. При его выполнении можно непосредственно (без запаздывания) влиять на все компоненты скорости изменения  $x$  вектора состояния. Если



матрица  $B$  квадратная, диагональная, то каждая компонента управления  $u_i$  непосредственно влияет на компоненту  $\dot{x}_j$  – производный вектор состояния.

### Вопросы для самопроверки

1. Уравнение линейной стационарной системы.
2. Какая система называется вполне управляемой по Калману?
3. Необходимое и достаточное условие полной управляемости по Калману.
4. Необходимые и достаточные условия управляемости вида:
  - II.1;
  - III.1;
  - IV.1 и V.1;
  - VI.1;
  - VII.1;
  - I.2 – VII.2;
  - I.4.

## Лекция 8

### ВИДЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

#### 8.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В уравнении линейной стационарной системы с дискретным временем

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (8.1)$$

матрицы  $B$  и  $A$  постоянны. Из (8.1) следует

$$x[n] = A^n x[0] + Bu[n-1] + ABu[n-2] + \dots + A^{n-1}Bu[0].$$

При рассмотрении управляемости вида I.1 (управляемости по Калману) без ограничения общности можно считать  $x[0] = 0$  и

$$x[n] = Bu[n-1] + ABu[n-2] + \dots + A^{n-1}Bu[0]. \quad (8.2)$$

Если

$$\text{rank}[B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] = n, \quad (8.3)$$

то при любом  $x[n]$  можно указать такие  $u[0], u[1], \dots, u[n-1]$ , при которых равенство (8.28) будет выполняться. И только при условии (8.3) для любого  $x[n]$  существуют  $u[0], u[1], \dots, u[n]$ , удовлетворяющие (8.2).

Таким образом условие (8.3) является необходимым и достаточным условием перевода системы (8.1) посредством управления за конечное время (за  $n$ -шагов) из любого начального состояния в любое конечное состояние.

Условия полной управляемости по Калману для стационарных линейных процессов с непрерывным и дискретным временем по внешнему виду совпадают. Следует иметь в виду, что если (8.1) – есть дискретная модель непрерывного процесса (7.1), то матрицы  $A$  и  $B$  в системе (8.1) и (7.1) неодинаковы.

#### 8.1.2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА VII.1

Аналогия между управляемостью линейных стационарных непрерывных и дискретных систем распространяется и на другие виды управляемости. Так, из выражения

$$x_3[k+1] - Ax_3[k] = Bu[k]$$

следует, что для перевода посредством управления системы из произвольного начального положения в произвольное конечное, по заданной траектории с дискретным временем  $x_3[k]$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rank } B = n. \quad (8.4)$$

### 8.1.3. ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ЗА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО ШАГОВ

Рассмотрим следующие равенства:

$$\begin{aligned}x[1] &= Ax[0] + Bu[0]; \\x[2] &= A^2x[0] + Bu[1] + ABu[0]; \\&\vdots \\x[k] &= A^kx[0] + Bu[k-1] + AB[k-2], \dots, A^{n-1}Bu[0].\end{aligned}$$

Следует, что для произвольного перевода необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие за:

а) один шаг

$$\text{rank}[B] = n;$$

б) два шага:

$$\text{rank}[B, AB] = n;$$

в)  $k < n$ -шагов:

$$\text{rank}[B:AB:A^2B:\dots:A^{k-1}B] = n. \quad (8.5)$$

### 8.1.4. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА П.1

Из уравнения

$$x[k] = A^kx[0] + Bu[k-1] + AB[k-2], \dots, A^{n-1}Bu[0]$$

следует, что необходимые и достаточные условия управляемости П.1 имеют форму

$$\begin{aligned}x[0] &\in G; \\Ax[0] + Bu[0] &\in G; \\A^2x[0] + Bu[1] + ABu[0] &\in G; \\&\vdots \\A^n x[0] + Bu[n-1] + AB[n-2], \dots, A^{n-1}Bu[0] &\in G,\end{aligned} \quad (8.6)$$

причём,

$$\text{rank}[B:AB:A^2B:\dots:A^{l-1}B] = n.$$

### 8.1.5. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА I.2

Пусть  $u$  – вектор размерности  $r$  и  $B$  – матрица размера  $m \times r$  областью изменения управления является  $\Omega$ . Пусть существует  $u \in \Omega$ , при которой  $Bu = 0$  и выпуклая оболочка имеет непустую внутренность. Для того чтобы система (8.1) была управляема в смысле I.2 нужно, чтобы выполнялось условие (8.3) и не существовало собственного вектора  $x$  матрицы  $A^T$ , отвечающей неотрицательному собственному значению, для которого выполнено неравенство

$$V_i^T Bu \leq 0 \quad \text{при } u \in \Omega. \quad (8.7)$$

Частным случаем является проблема управляемости при неотрицательных управлениях  $u_1 \geq 0, \dots, u_r \geq 0$ , в которой в настоящее время уделяется внимание в связи с тем, что методы теории оптимального управления широко используются при решении задач экономики и биологии.

## 8.2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В уравнении описывающий непрерывный нестационарный процесс имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u. \quad (8.8)$$

Матричные функции  $A(t)$  и  $B(t)$  считаются непрерывными. Матрица Коши, рассмотренная ранее, обозначается  $K(t, t_0)$ .

### 8.2.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА I.1

Необходимым и достаточным условием управляемости по Калману нестационарной и линейной системы является существование конечного времени  $t_1$ , для которого определена матрица вида

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) K^T(t_0, \tau) d\tau. \quad (8.9)$$

### 8.2.2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА VII.1

Для возможности перевода линейной нестационарной системы по произвольно заданной дифференцируемой траектории необходимо и достаточно, чтобы во время перевода выполнялось условие

$$\text{rank } B(t) = n. \quad (8.10)$$

### 8.2.3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА I.4

Необходимым и достаточным условием возможности мгновенного перевода системы в момент времени  $t_0$  из произвольного начального состояния в произвольное заданное состояние является

$$\text{rank } B(t_0) = n. \quad (8.11)$$

### 8.2.4. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА III.1

Для возможности перевода системы (8.8) на отрезке времени  $(t_0, t_1)$  из произвольного начального состояния на любую плоскость  $Dx = \text{const}$ , где  $D$  – матрица размера  $p \times n$ ,  $p \leq n$ , необходимо и достаточно, чтобы матрица была положительно определённой. Матрица имеет вид

$$\int_{t_0}^t DK(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) K^T(t, \tau) D^T d\tau.$$

Этот вид управляемости называется *управляемостью по  $y = Dx$* .

## 8.3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Из уравнения системы

$$x[k+1] = A[k] x[k] + B[k] u[k]$$

следует

$$\begin{aligned} x[k] = & A[k-1] A[k-2] \dots A[0] x[0] + \\ & + A[k-1] A[k-2] \dots A[1] B[0] u[0] + \\ & + A[k-1] A[k-2] \dots A[2] B[1] u[1] + \\ & \vdots \\ & + A[k-1] B[k-2] u[k-2] + B[k-1] u[k-1]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

### 8.3.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА I.1

Для перевода системы за  $n$ -шагов из произвольного начального состояния в любое заданное состояние необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\begin{aligned} \text{rank}[B[n-1]; A[n-1] B[n-2]; A[n-1] A[n-2] \times \\ \times B[n-3]; \dots; A[n-1] A[n-2] \dots A[1] B[0]] = n. \end{aligned} \quad (8.13)$$

### 8.3.2. ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ПЕРЕВОД ЗА ОДИН ИЛИ НЕСКОЛЬКО ШАГОВ

Для перевода системы из любого начального положения в любое заданное положение необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия за:

а) один шаг

$$\text{rank } B[0] = n; \quad (8.14)$$

б) два шага

$$B[1] \dots A[1] B[0] = n; \quad (8.15)$$

в)  $k$  шагов

$$\begin{aligned} \text{rank}[B[k-1]:A[k-1] B[k-2]:A[k-1] A[k-2] \times \\ \times B[k-3]:\dots:A[k-1] A[k-2] \dots A[1] B[0]] = k. \end{aligned} \quad (8.16)$$

#### 8.4. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ

Рассмотрим две стационарные линейные системы:

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{x} &= Ax + Bu; \\ z &= Hx + Cu; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y &= A^T y + H^T k; \\ s &= B^T y + L^T k, \end{aligned}$$

где  $x, u, z$  – вектор-столбцы размерности  $n \times m \times n$ ;  $A, B, H, L$  – матрицы размера  $n \times n, n \times r, m \times n, m \times r$ .

Система 2 векторы  $y, k, s$  – вектор-столбцы размерности  $n \times m \times r$ , тогда система 1 вполне управляема (по Калману), если система 2 вполне наблюдаема (по Калману), и вполне наблюдаема, если система 2 вполне управляема.

Действительно, условия полной управляемости и полной наблюдаемости для системы 1 имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rank}[B:AB:\dots:A^{n-1}B] &= n; \\ \text{rank}[H^T:A^T H^T \dots (A^T)^{n-1} H^T] &= n. \end{aligned}$$

Для системы 2 соответственно полная наблюдаемость и полная управляемость имеют место при

$$\begin{aligned} \text{rank}[H^T:A^T H^T \dots (A^T)^{n-1} H^T] &= n; \\ \text{rank}[B:AB:\dots:A^{n-1}B] &= n. \end{aligned}$$

#### 8.5. УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Теория управляемости нелинейных систем разработана достаточно слабо, и трудности на пути её создания достаточно велики.

##### 8.5.1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА VII.1

Условие перевода системы

$$\dot{x} = \dot{f}(x, u, t) \quad (8.17)$$

по заданной произвольной траектории  $x = x_3(t)$ , принадлежащей заданному множеству  $x_3$ , сводится к разрешению уравнения

$$x_3 = f(x_3(t), u, t)$$

относительно  $u$ .

$$\text{Условие} \quad \text{rank} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) = n \quad (8.18)$$

можно рассмотреть как благоприятствующее такой разрешимости, хотя и недостаточное.

Для случая линейно-входящего управления

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u.$$

Необходимым и достаточным условием рассмотренного вида управляемости является условие

$$\text{rank } \varphi(x_3(t), t) = n. \quad (8.19)$$

### 8.5.2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА V.1

Задача управляемости «в малом» в окрестности заданной траектории  $x^0(t)$ , полученной при заданном  $u = u^0(t)$ , сводится к задаче управляемости линейной нестационарной системы обычным путем линеаризации. При этом считается, что функция  $f$  дифференцируема по своим аргументам:

$$\begin{aligned} x &= f(x, u, t); \\ \Delta \dot{x} &= A(t) \Delta x + B(t) \Delta u; \\ A(t) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x = x^0(t); \\ u = u^0(t)}}; \\ B(t) &= \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) \Big|_{\substack{x = x^0(t); \\ u = u^0(t)}}. \end{aligned}$$

Пусть программной траекторией является нулевое решение. Рассмотрим нелинейный процесс  $\dot{x} = f(x, u)$ , где  $f(0, 0) = 0$  и  $u \in \Omega \subset R^r$ . Обозначим через  $K$  минимальный замкнутый выпуклый конус, содержащий множество  $\{f(0, u) \mid u \in \Omega\}$ , и через  $A = (\partial f / \partial x)|_{x=0}$  – матрицу  $A(t)$  на программной траектории.

Результаты по управляемости нелинейных систем опираются на следующее положение. Для того чтобы нелинейный процесс был управляем в смысле V.1, достаточно, чтобы решения уравнения  $\dot{x} = Ax + w(t)$  с нулевыми начальными условиями при всех измеримых функциях  $w(t)$  со значениями в  $K$  заполняли окрестность начала координат. Обратное утверждение верно.

Следствие: если линеаризованная система управляема в смысле I.2, то нелинейная система управляема в смысле V.2.

### 8.5.3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА III.2

В нелинейных задачах часто рассматривается задача попадания на многообразие. В связи с этим естественно возникает задача попадания на устойчивое инвариантное многообразие. На этом многообразии решения стремятся к программной траектории при  $t \rightarrow \infty$ .

Аналогом положения п. 8.5.2 является следующее. Пусть нелинейная система управления та же, что и в п. 8.5.2. Пусть  $M$  – гладкое многообразие, проходящее через точку 0. Рассматривается задача попадания на это многообразие из малой окрестности нуля. Для того чтобы нелинейный процесс был управляем в смысле V.2, достаточно, чтобы решения уравнения  $\dot{x} = Ax + w(t)$  с начальными условиями из касательного к  $M$  в точке 0 пространства и управлениями в виде измеримых функций времени со значениями из  $\Omega$  заполняли окрестность начала координат. Отсюда следует, что если линеаризованная система управляема в смысле I.2, то нелинейная система управляема в смысле V.2.

## 8.6. УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Для процессов, описываемых уравнением

$$x[k+1] = f(x[k], u[k], k),$$

задачи управляемости в принципе приводятся к задачам разрешимости функциональных (алгебраических, трансцендентных и т.д.) уравнений.

### 8.6.1. УСЛОВИЕ ПЕРЕВОДА ЗА ОДИН И НЕСКОЛЬКО ШАГОВ

За один шаг из заданного состояния  $x_0$  в любое заданное состояние  $x_1$  эквивалентно разрешимости уравнения относительно  $u[0]$ :

$$x[1] = f(x[0], u[[0], 0). \quad (8.20)$$

Для линейного входящего управления, когда процесс описывается уравнением

$$x[k+1] = f(x[k], u[k], k),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank } \varphi[x[0], 0] = n . \quad (8.21)$$

Для двух шагов общая задача сводится к разрешимости относительно  $u$  уравнения

$$x[2] = f(f(x[0], u[0], 0), u[1], 1). \quad (8.22)$$

Для трех шагов

$$f\{f[f[x[0], u[0], 0], u[1], 1], u[2], 2\} = x[3]. \quad (8.23)$$

### 8.6.2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВИДА VII.1

Условие возможности перевода системы из одного состояния в другое по заданной в дискретном времени траектории сводится к разрешимости относительно  $u[k]$  уравнения

$$x_3[k+1] = f[x_3[k], u[k], k].$$

Для линейно-входящего управления необходимо и достаточно выполнение условия

$$\text{rank } \varphi[x_3[k], k] = n .$$

#### Вопросы для самопроверки

1. Управляемость линейных стационарных систем с дискретным временем:
  - управляемость вида VII.1;
  - произвольный переход за один или несколько шагов;
  - управляемость вида II.1;
  - управляемость вида I.2.
2. Управляемость линейных нестационарных систем вида:
  - I.1;
  - VII.1;
  - I.4;
  - III.1.
3. Управляемость нестационарных систем с дискретным временем:
  - управляемость вида I.1;
  - произвольный перевод за один или несколько шагов.
4. В чём состоит принцип двойственности в теории управляемости и наблюдаемости?
5. Управляемость нелинейных систем вида:
  - VII.1;
  - V.1;
  - III.2.
6. Управляемость нелинейных систем с дискретным временем:
  - условие перевода за один и несколько шагов;
  - управляемость вида VII.1.

## Лекция 9

### АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Постановки и решения задач оптимизации автоматического управления отличаются чрезвычайным разнообразием. Хотя согласно концепции прикладной современной теории автоматического управления (СТАУ), изложенной в ведении, главной её проблемой является оптимизация управления «в большом» в реальном времени и с решительными целями, необходимо осветить решения частных задач оптимизации и оптимизацию на стадии проектирования.

Это следует делать на базе изложенных выше моделей, критериев, алгоритмов и методов.

#### 9.1. КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Классификацию алгоритмов оптимального и субоптимального управления целесообразно осуществлять с учётом решаемых задач, условий, для которых предназначен тот или иной алгоритм. Правда, задача оптимального или субоптимального управления может решаться системой в целом, включающей не только аппаратные или программные модули формирования управляющих воздействий, но и модули оценивания, идентификации,

адаптации, реконфигурации. Тем не менее, алгоритмы оптимального (субоптимального) автоматического управления целесообразно классифицировать по объёму необходимой априорной и текущей (апостериорной) информации, минимизируемому функционалу, необходимой вычислительной производительности, назначению и другим подобным признакам.

### 9.1.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПО ОБЪЁМУ НЕОБХОДИМОГО ИНФОРМАЦИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ХАРАКТЕРУ РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ

Измерение и модель управляемого процесса являются основой всякого управления. Поэтому количество необходимой для функционирования системы (алгоритма) текущей и априорной информации можно считать одним из важнейших классификационных признаков. Априорную и апостериорную информацию, используемую для управления, будем называть *информационным обеспечением управления*.

В таблице 9.1 приведена укрупнённая классификация алгоритмов автоматического управления по признаку необходимого информационного обеспечения.

Как априорная, так и текущая информация здесь делятся на три уровня (высокий, средний, малый). Варианты одной строки отличаются объёмом необходимого априорного (начального) информационного обеспечения. Варианты одного столбца – объёмом текущего (апостериорного) информационного обеспечения. Априорное информационное обеспечение осуществляется на стадии проектирования всеми имеющимися средствами (включая идентификацию при испытаниях). Текущее информационное обеспечение осуществляется за счёт измерения (наблюдения) в процессе управления, включая, может быть, специальные искусственные тестовые (пробные) воздействия.

#### 9.1. Классификация алгоритмов управления по объёму необходимого информационного обеспечения

Текущее (апостериорное) информационное обеспечение		Априорное информационное обеспечение, характеристика и номер варианта		
характеристика	номер варианта	высокое	среднее	малое
Высокое	1	1.1	1.2	1.3
Среднее	2	2.1	2.2	2.3
Малое	3	3.1	3.2	3.3

Осуществление управления затрудняется при перемещении в табл. 9.1 сверху вниз, слева направо (особенно совместно, т.е. при переходе к нижнему правому варианту таблицы). Эта трудность носит принципиальный характер и не может быть полностью преодолена никакими алгоритмическими, вычислительными средствами. Однако необходимо выделять различные группы вариантов.

Обратимся к вариантам 1.1, 1.2, 1.3 верхней строки таблицы. Здесь текущее информационное обеспечение высокое, а априорное изменяется от высокого до малого (об управляемом процессе заранее мало что известно). Для управления (в том числе оптимального, субоптимального) в случаях 1.2, 1.3 служат *алгоритмы адаптивного автоматического управления или алгоритмы с обучением*. Здесь недостаток априорной информации восполняется за счёт текущей информации, получаемой в процессе управления. За счёт высокосовременного алгоритмического обеспечения и высокопроизводительных вычислительных средств здесь даже в варианте 1.3 (не говоря уже о 1.1, 1.2) можно получить высокоэффективное управление.

Все это, но уже с меньшими возможностями, относится и к вариантам второй строки табл. 9.1. Здесь для вариантов 2.2 и отчасти 2.3 с успехом могут применяться алгоритмы адаптивного управления. Задачи типа 3.1, в которых налицо достаточно полное априорное информационное обеспечение, но текущая информация резко ограничена, могут решаться посредством программных управляющих воздействий (систем разомкнутого типа).

Самыми сложными являются условия, обозначенные индексом 3.3. Относительно сложными являются и условия, обозначенные индексом 3.2,5. В абстрактно-математической современной теории управления задачи, соответствующие этим условиям, весьма популярны (управление в условиях неопределённости, объект управления в виде «чёрного» ящика, системы с самообучением и т.д.). При этом нередко у исследователей возникают иллюзорные представления о всемогуществе алгоритмов. В действительности возможности управления в отмеченных случаях резко ограничены и ничего сверх некоторых пределов добиться нельзя, как бы ни были совершенны управляющие ЭВМ и их математическое обеспечение.

Другой группой классификационных признаков алгоритмов автоматического управления являются решаемые задачи, цели управления, выраженные в виде минимизируемого функционала или в других терминах. Сюда относятся все виды функционалов, представленные ранее. Это формализованное выражение целей управ-

ления. Конечно, при классификации алгоритмов могут указываться и цели управления, выраженные на «содержательном» уровне (например, управление агрегатом котёл–турбина при пуске и остановке, управление посадкой самолета на этапе от дальнего радиомаяка до приземления и т.д.).

С практической точки зрения весьма важным является следующее обстоятельство. В классической теории автоматического управления (КТАУ) также ставились задачи типа 1.2, 1.3 (см. табл. 9.1). При достаточной энергии управления (эффективности управляющих органов) и необходимой степени управляемости почти любая цель управления в вариантах 1.1 – 1.3 может быть достигнута за счёт «навязывания» управляемому объекту новой «искусственной» динамики.

Отсюда появились в КТАУ системы, «почти эквивалентные по своим адаптивным свойствам». Сюда относятся системы с обратными связями с большими коэффициентами усиления, некоторые релейные системы, системы с переменной структурой (СПС), некоторые системы автоматического управления, синтезированные посредством функций Ляпунова эвристического происхождения.

Несмотря на простоту соответствующих алгоритмов и их достаточно высокую эффективность в некоторых приложениях, популярность подобных систем в современный период падает. Объясняется это следующим. Если обратится к реальным новым технологическим процессам и подвижным объектам, то ясно видна ограниченность ресурсов для управления. Вследствие предельного использования всех факторов в таких процессах и объектах нет возможности увеличивать энергию или мощность, или потоки вещества, затрачиваемые на управление. Такие энергетически напряжённые режимы, как скользящий режим, становятся недопустимой роскошью. Необходимо оптимальное управление с максимальным использованием естественных, собственных движений объекта. Именно такие управления получаются на основе СТАУ.

### 9.1.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕХНОЛОГИИ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

В период классической теории автоматического регулирования (ТАР) синтез алгоритмов или законов управления осуществлялся на стадии проектирования, а доводка, коррекция законов – на стадии испытаний объекта и системы. Это касалось и задающих воздействий, программных значений параметров, проектирование которых в рамки классической теории автоматического регулирования (КТАР) не входило, но которые обязательно разрабатывались конструкторами объекта. Подобное положение сохраняется в значительной мере и в настоящее время. Ясно, что такая технология алгоритмического обеспечения весьма критична к объёму и достоверности априорной информации. Это, в свою очередь, затягивает сроки проектирования и испытаний. Для создания систем оптимального управления «в большом» многофункциональными объектами подобная технология вообще во многих случаях оказывается непригодной.

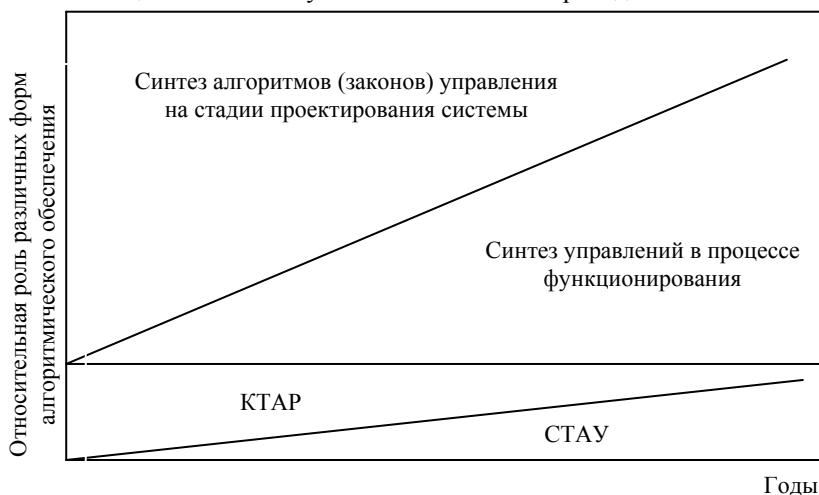


Рис. 9.1

Тенденция развития алгоритмического обеспечения систем автоматического управления в соответствии с концепцией, изложенной во введении, иллюстрирует рис. 9.1. Аналитическая теория автоматического управления играет и будет играть возрастающую роль в создании алгоритмического обеспечения. При этом КТАР все в большей степени будет уступать место СТАУ.

Высокая роль прикладной СТАУ не только в создании методов и структур систем автоматического управления, но непосредственно в алгоритмическом обеспечении, определяется следующим. Главной трудностью решения основной современной проблемы автоматического управления – оптимального управления «в боль-



шом» весьма сложными процессами – остаётся необходимая вычислительная производительность. Преодоление этой трудности возможно только на пути сочетания развитой аналитической прикладной СТАУ как фундамента алгоритмического обеспечения с численными методами как формой реализации алгоритмов.

Существенные различия существуют между двумя фазами алгоритмического обеспечения: синтезом алгоритмов (законов) управления на стадии проектирования и синтезом управления в процессе функционирования системы (*совмещенный синтез*).

## **9.2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ (ЗАКОНОВ) УПРАВЛЕНИЯ НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

Эта форма синтеза в КТАР была единственной, причём собственно ТАР решала задачи отработки задающих воздействий, устойчивости и качества переходных процессов в контурах стабилизации. Технология алгоритмического обеспечения сводилась здесь в общих чертах к следующему.

На основе инженерной ТАР и располагаемой (как правило, значительной) априорной информации об управляемом объекте, а также номенклатуре *измерительных преобразователей* (датчиков), производился предварительный синтез контуров. Далее следовало математическое и (во многих случаях) полунатурное моделирование. На этом этапе выполнялся основной объём анализа и синтеза алгоритмов (законов) управления. Завершающей стадией была отладка при натуральных испытаниях.

В общих чертах эти фазы технологии алгоритмического обеспечения сохраняются и при СТАУ, однако появляются и принципиальные отличия. Прежде всего расширяются задачи оптимизации и в связи с этим коренным образом изменяется математический аппарат. Синтез алгоритмов регулирования на стадии проектирования получил в СТАУ даже новое название – *аналитическое конструирование оптимальных регуляторов* (АКОР). Роль прикладной СТАУ в алгоритмическом обеспечении современных и перспективных систем автоматического управления непрерывно расширяется (см. рис. 9.1). За аналитической фазой синтеза следует численная фаза, выполняемая, как правило, на универсальных ЭВМ. Она сопровождается разработкой или использованием программного обеспечения, свойственного этим ЭВМ. Далее следует весьма сложная технология редактирования или создания необходимого программного обеспечения для управляющих или специализированных ЭВМ.

Несмотря на всё возрастающее оснащение научно-исследовательских и проектно-конструкторских организаций вычислительной техникой, трудности алгоритмического обеспечения на базе СТАУ в процессе проектирования ещё весьма значительны. Речь идёт о трудностях априорного информационного обеспечения, высоких вычислительных затратах в сложности развития фаз аналитического решения задачи при классических формах функционалов.

## **9.3. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ В ПРОЦЕССЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ**

В любой реально функционирующей системе управления формирование управляющих воздействий происходит в реальном времени. Однако в традиционных системах это формирование производится на основе строго детерминированных законов (формул), записанных в памяти ЭВМ или устройствах аналогового типа. В лучшем случае в «классических» САУ происходит смена фиксированных законов управления при изменении некоторых параметров режима работы объекта.

Под синтезом управлений в реальном времени понимается синтез законов или алгоритмов управления, осуществляемый на основе оптимизации практически одновременно с формированием самих управляющих воздействий. Это понятие не отличается чёткостью, и трудно провести границы между обычным формированием управляющих воздействий и «совмещённым синтезом», а также формированием управляющих воздействий в реальном времени на основе «проб и ошибок». Тем не менее, именно этот подход является решающим в главной проблеме СТАУ – оптимизации управления «в большом» с достижением наилучшего конечного результата.

## **9.4. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ КЛАССИЧЕСКИХ ФОРМАХ ФУНКЦИОНАЛОВ**

Как отмечалось выше, вычислительные затраты при оптимизации сложных динамических систем при классических формах функционалов настолько велики, что соответствующие методы применяются только на стадии проектирования. Даже в этом качестве практическое использование методов резко ограничено. Последнее связано с быстрым ростом мощности множеств, с которым приходится сталкиваться при усложнении (увеличении размерности) нелинейных математических моделей управляемых процессов.

## **9.5. ВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ БЕЛЛМАНА**

Пусть управляемый процесс описывается детерминированным уравнением общего вида (9.1):

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (9.1)$$

а минимизируемый функционал классического типа также имеет общий вид (Задача Больца):

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} L[x(\theta), u(\theta), \theta] d\theta. \quad (9.2)$$

Рассматривается задача синтеза алгоритмов класса 1.1 (см. табл. 9.1). Тогда уравнение Беллмана (Гамильтона–Якоби–Беллмана) имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u [L(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u, t)] = 0, \quad (9.3)$$

где

$$V_{t=t_2} = V_3[x(t_2)], \quad (9.4)$$

а допустимые управления  $u$ , вообще говоря, принадлежат заданному множеству.

Несмотря на компактную общую форму функционального уравнения Беллмана (9.3), его решение в практических многомерных случаях сталкивается с непреодолимыми трудностями. Это видно хотя бы из следующих преобразований. Обозначим управление, доставляющее минимум выражению в скобках, через  $v$  и положим, что оно удовлетворяет необходимому условию локального минимума гладкой функции. Тогда вместо (9.3) записываем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u, t) = -L(x, u, t); \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} L(x, v, t) + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} f(x, v, t) \right] = 0. \quad (9.6)$$

Таким образом, получили систему нелинейных взаимосвязанных уравнений в частных производных. Только при решении этой системы уравнений с учетом условия (9.4) и последующим выражением  $v$  как функции  $x, t$  задача синтеза оптимального управления в виде обратной связи может считаться решенной. Рассмотрение последующих более простых случаев показывает, какие трудности возникают при этом.

### 9.5.1. УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА С АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЗАТРАТ НА УПРАВЛЕНИЕ И ПРОЦЕССА С ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Для процесса, который формируется системой уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u, \quad (9.7)$$

и функционала качества

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} U_3[u(\theta), \theta] d\theta \quad (9.8)$$

уравнения (9.5) и (9.6) в предположении, что  $V = V(x, t)$ , принимают вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + \varphi(x, t)v] + U_3(v, t) = -Q_3(x, t), \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} U_3(v, t) + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) = 0. \quad (9.10)$$

Допустим, что уравнение (9.10) может быть решено относительно  $v$  единственным образом:

$$v = A[\varphi^T(x, t) (\partial V / \partial x)^T, t], \quad (9.11)$$

где  $\varphi^T (\partial V / \partial x)^T$  и  $v$  – мерные вектор-столбцы.

Подставляя в (9.9), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) \times$$

$$\times \Delta \left[ \varphi^T(x, t) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, t \right] + U_3 \left\{ \Delta \left[ \varphi^T(x, t) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, t \right] \right\} = -Q_3(x, t). \quad (9.12)$$

Нелинейное уравнение в частных производных (9.12) есть уравнение Беллмана для данного случая. Решение этого уравнения при граничном условии (9.4) должно определять оптимальное управление  $u = u_{\text{оп}} = v$ , согласно выражению (9.10).

Покажем, что если

$$U_3(u, t) - U_3(v, t) - \left[ \frac{\partial}{\partial v} U_3(v, t) \right] (u - v) \quad (9.13)$$

есть положительно-определенная функция относительно  $u$ , обращающаяся в нуль только при  $u = v$ , то управление (9.10) действительно минимизирует функционал (9.8) на решениях уравнения (9.7).

Действительно, добавляя к обеим частям уравнения (9.9) члены

$$\frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) u + U_3[u(t), t]$$

и учитывая (9.7) и (9.11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) v + U_3(v, t) + U_3(u, t) = \\ = -Q_3(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) u + U_3(u, t), \end{aligned} \quad (9.14)$$

или с учётом (9.10)

$$\dot{V} + Q_3(x, t) + U_3(u, t) = U_3(u, t) - U_3(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} U_3(v, t) (u - v).$$

Здесь производная  $\dot{V}$  вычисляется на решениях уравнения (9.7).

Интегрируя это выражение по времени от  $t_1$  до  $t_2$  на решениях уравнения (9.7) с учетом граничного условия (9.4), находим

$$\begin{aligned} I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} U_3[u(\theta), \theta] d\theta = V_3[x(t_1)] + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ U_3[u(\theta), \theta] - U_3[v(\theta), \theta] - \frac{\partial}{\partial v} U_3[v(\theta), \theta] [u(\theta) - v(\theta)] \right\} d\theta. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Величина  $V_3[x(t_1)]$  не зависит от управления на интервале  $[t_1, t_2]$ . Из выражения (9.15) и указанного свойства функции (9.13) непосредственно следует, что функционал (9.8) для процесса (9.7) принимает минимальное значение при  $u = v$ .

### 9.5.2. УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА СО СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ $U_3$ И ПРОЦЕССА С ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Допустим, что для процесса (9.7) функционал имеет вид

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^r \frac{u_j^{q_j}(\theta)}{q_j k_j} d\theta, \quad (9.16)$$

где  $q_j > 1$  и также, что  $u_j^{q_j}$  — четная функция  $u_j, k_j > 0, j = \overline{1, r}$ . В данном случае функция

$U_3(u) - U_3(v) - \left[ \frac{\partial}{\partial v} U_3(v) \right] (u - v)$  имеет единственный минимум по  $u$  при  $u = v$ , равный нулю, и указанное выше

условие выполняется.

Равенство (9.10) в скалярной форме имеет здесь вид

$$v_j^{q_j-1} = -k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_{ij}. \quad (9.17)$$

Вводя величины

$$p_j^{-1} + q_j^{-1} = 1, \quad (9.18)$$

выражение (9.17) преобразуем к виду

$$k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_{ij};$$

$$v_j = - \left( k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_{ij} \right)^{p_j/q_j}. \quad (9.19)$$

После подстановки этих выражений в уравнение Беллмана (9.12) и преобразований получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) - \sum_{j=1}^r \frac{k_j^{p_j-1}}{p_j} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_{ij} \right)^{p_j} = -Q_3(x, t). \quad (9.20)$$

Итак, если  $V(x, t)$  есть решение нелинейного уравнения в частных производных (9.20) при граничном условии  $V_{t=t_2} = V_3[x(t_2)]$ , то оптимальным управлением, минимизирующим функционал (9.16) является

$$u_j = u_{j\text{оп}} = - \left( k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_{ij} \right)^{p_j-1}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (9.21)$$

### 9.5.3. УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА ДЛЯ СЛУЧАЯ ФУНКЦИОНАЛА С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ $U_3$

Пусть в выражениях (9.20) и (9.21)  $q_j = 2, j = \overline{1, r}$ . Тогда, согласно (9.18),  $q_j = 2, j = \overline{1, r}$ , минимизирующий функционал имеет вид

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^r \frac{u_j^{q_j}(\theta)}{q_j k_j} d\theta.$$

Уравнение Беллмана (9.20) и оптимальное управление (9.21) здесь принимают вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r k_j \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_{ij} \right)^2 = -Q_3(x, t);$$

$$u_j = u_{j\text{оп}} = - \left( k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_{ij} \right), \quad j = \overline{1, r}.$$

В матричной форме

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} u^T(\theta) K^{-1} u(\theta) d\theta; \quad (9.22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) K \varphi^T(x, t) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T = -Q_3(x, t); \quad (9.23)$$

$$V_{t=t_2} = V_3(x); \quad (9.24)$$

$$u = -K \varphi^T(x, t) (\partial V / \partial x)^T. \quad (9.25)$$

## Вопросы для самопроверки

1. Что называется информационным обеспечением управления.
2. Какие системы относятся к системам, «почти эквивалентным по своим адаптивным свойствам»?
3. Классификация по объёму необходимого информационного обеспечения и характеру решаемых задач.
4. Общая характеристика технологии алгоритмического обеспечения.
5. Синтез алгоритмов (законов) управления на стадии проектирования.
6. Синтез управлений в реальном времени в процессе функционирования системы.
7. Синтез законов управления непрерывными детерминированными процессами при классических формах функционалов.
8. Варианты уравнений Беллмана для:
  - функционала с аддитивной функцией затрат на управление и процесса с линейно входящим управлением;
  - функционала со степенной функцией  $U_3$  и процесса с линейно входящим управлением;
  - случая функционала с квадратичной функцией  $U_3$ .

## Лекция 10

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

### 10.1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА

Согласно изложенному синтез оптимальных управлений сводится к решению уравнений Беллмана. Решение уравнения Беллмана в его формах (9.12), (9.20), (9.23), не говоря о более общих формах (9.3), (9.5), (9.6), для многомерных нелинейных объектов встречает огромные трудности. Эти трудности являются принципиальными и связаны с высокими мощностями конечных множеств, с которыми приходится иметь дело при приближенном численном решении таких уравнений. Аналитическое же построение точных решений существует лишь для линейно-квадратичных задач.

Все же здесь кратко излагаются способы приближённого решения уравнений Беллмана для нелинейных систем. Эти способы могут оказаться полезными при решении задач синтеза на стадии проектирования субоптимальных управлений для процессов невысокой размерности. Такие задачи возникают, в частности, при использовании декомпозиции или иерархической оптимизации.

### 10.2. ЧИСЛЕННАЯ ФОРМА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Уравнение (9.3) иногда получается путем предельного перехода от численной конечной формы динамического программирования. Легко осуществить и обратный переход. Однако для многомерных многосвязных (не допускающих декомпозиции) задач численное решение методом динамического программирования требует огромного объёма памяти и вычислительных затрат. Поэтому в практических динамических задачах управления оно оказывается в большинстве случаев неприменимым даже на стадии проектирования.

### 10.3. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Для численного решения уравнений с частными производными (9.9), (9.10), (9.12), (9.20), (9.23) могут быть построены разностные схемы и соответствующие процессы численного интегрирования. Как известно, этот метод весьма успешно применяется для интегрирования разнообразных уравнений с частными производными в двух- и трехмерных пространствах. Однако для задач оптимизации управления, где размерность пространства состояний нередко измеряется десятками, мощность конечных множеств, фигурирующих в разностных схемах, чрезмерно велики («проклятие» размерности). Положение здесь аналогично изложенному выше.

#### 10.3.1. МЕТОД РЯДОВ

Если функции  $f$ ,  $\varphi$ ,  $Q_3$ ,  $V_3$  представлены в виде рядов по каким-либо базисным функциям, то решения уравнения Беллмана можно искать также в виде рядов по этим функциям.

Метод степенных рядов применительно к уравнению типа (9.23) рассмотрен в работе. Решение ищется в виде ряда

$$V = (1/2) \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} x_i x_j + (1/3) \sum_{i,j,k=1}^n \gamma_{ijk} x_i x_j x_k + \dots$$

Для коэффициентов этого ряда  $\gamma_{ij}, \gamma_{ijk}, \dots$  (они не меняются при перестановке индексов) получается в общем случае бесконечная система групп обыкновенных дифференциальных уравнений нарастающей размерности. Решение этих групп уравнений для сложных объектов представляет чрезвычайные трудности.

### 10.3.2. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

Для уравнений с частными производными первого порядка общеизвестен метод характеристик. Однако в данном случае он приводит к необходимости интегрирования уравнений, которые для наиболее простого (из рассмотренных) случая (9.23) при  $f = f(x), \varphi = \varphi(x), Q_3 = Q_3(x)$  имеют вид

$$\dot{x} = f(x) - \varphi(x)K\varphi^T(x)p ;$$

$$\dot{p} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T p = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [p^T \varphi(x)K\varphi^T(x)p] \right\}^T - \left(\frac{\partial Q_3}{\partial x}\right)^T . \quad (10.1)$$

Главная сложность здесь заключается в том, что интегрирование системы уравнений (10.1) необходимо осуществлять при начальном условии  $x_{t=t_1} = x(t_2)$  для  $x$  и конечном условии  $p_{t=t_2} = \left[\frac{\partial}{\partial x} V_3\right]^T$  для  $p$ . Таким образом, здесь возникает двухточечная краевая задача, которая для многомерных процессов сопряжена с большими вычислительными трудностями.

### 10.4. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ

Как уже указывалось, линейно-квадратичная задача является единственной, при которой решение получается в общем виде. Это решение находит практическое применение при проектировании систем стабилизации, контуров обработки задающих воздействий при многомерных линейных моделях объекта в отклонениях. В отечественной литературе соответствующие методики получили название АКОР.

### 10.5. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АКОР ДЛЯ СЛУЧАЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Пусть управляемый объект описывается уравнением типа

$$\dot{x} = Ax + Bu ,$$

а минимизируемый функционал имеет вид

$$I = 0,5x^T(t_2) \rho x(t_2) + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} x^T(\theta) \beta x(\theta) d\theta + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} u^T(\theta) K^{-1} u(\theta) d\theta . \quad (10.2)$$

Эта задача несколько широкая, чем задача оптимальной стабилизации состояния  $x \equiv 0$  в обычном её понимании, так как здесь помимо качества переходных процессов фигурирует задача приведения системы в положение  $x = 0$  в заданный момент времени. Но для краткости будем эту задачу называть *задачей стабилизации* (в широком смысле).

Уравнение Беллмана для данной задачи получается из уравнения (9.23), если положить

$$f = Ax, \quad \varphi = B, \quad Q_3 = 0,5x^T \beta x, \quad V_3 = 0,5x^T \rho x .$$

Таким образом, здесь

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} A(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} BKB^T \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T = -0,5x^T \beta x . \quad (10.3)$$

Решение этого уравнения ищется в идее квадратичной формы

$$V = 0,5x^T Sx , \quad (10.4)$$

где  $S = S^T = S(t)$  – симметричная матрица размера  $n \times n$ . Из граничного условия следует  $S(t_2) = \rho$ .

Подставляя (10.4) в (10.3) и приравнявая (в скалярной форме) коэффициенты при одинаковых произведениях  $x_i, x_j$ , получаем известное уравнение Риккати:

$$\dot{S} + SA + A^T S - SBKB^T S = -\beta. \quad (10.5)$$

Решение этого уравнения при условии  $S(t_2) = \rho$  определяет, согласно (9.25), оптимальное управление

$$u = u_{\text{оп}} = -KB^T Sx. \quad (10.6)$$

Это и есть решение задачи АКОР для данного случая.

В общем рассматриваемом случае  $A = A(t)$ ,  $B = B(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$ ,  $S = S(t)$ . Таким образом, решение задачи синтеза здесь сводится к интегрированию матричного уравнения Риккати, которое в скалярной форме эквивалентно системе  $n(n+1)/2$  уравнений первого порядка (с учетом симметрии матрицы  $S = S^T$ ):

$$\dot{S}_{ij} + \sum_{k=1}^n (S_{ki} A_{kj} + A_{ki} S_{kj}) - \sum_{l=1}^r K_{ll} \sum_{p=1}^n B_{pi} S_{pj} \sum_{k=1}^n B_{kl} S_{ki} = -\beta_{ij}. \quad (10.7)$$

Теория матричного уравнения Риккати хорошо разработана. В частности, было показано, что если условие полной управляемости (7.2) выполняется, то уравнение (10.5) имеет единственное решение, к которому стремятся все другие решения, в обратном времени начиная с  $S(t_2) = \rho$ . Количество операций на один шаг численного интегрирования матричного уравнения Риккати (10.5) при большой размерности  $n$  имеет порядок  $(4-16)n^3$  (в зависимости от метода численного интегрирования).

Информация о синтезированном на стадии проектирования оптимальном терминальном управлении хранится в системе в виде матричной функции времени  $K(t)B^T(t)S(t)$ , точнее,  $K(t_2-t)B^T(t_2-t)S(t_2-t)$  (матричная функция оставшегося времени  $t_2-t$ ).

Однако нестационарные терминальные задачи редко удается свести к линейным моделям и квадратичным функционалам. Большое практическое применение линейно-квадратичные способы синтеза систем стабилизации находят в стационарных и квазистационарных задачах АКОР для объектов с распределенными параметрами, аппроксимированные конечномерными линейными моделями. К такому классу задач относятся, в частности, задачи аэроавтотупругости.

Существует несколько вариантов постановки линейно-квадратичных стационарных задач оптимизации систем стабилизации.

**А.** *Решение линейно-квадратичной классической стационарной задачи АКОР для случая стабилизации и скользящего интервала оптимизации.* Пусть для стационарного линейного объекта

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A, B = \text{const}$$

задан минимизируемый квадратичный функционал со скользящим интервалом оптимизации:

$$I = 0,5 \int_t^{t+T_{\text{оп}}} x^T(\theta) \beta x(\theta) d\theta + 0,5 \int_t^{t+T_{\text{оп}}} u^T(\theta) K^{-1} u(\theta) d\theta, \quad (10.8)$$

где матрицы  $\beta$ ,  $K$  также постоянны.

Ясно, что решение данной задачи получается как частный случай решения более общей задачи п. 8.5.1 при  $\rho = 0$ ,  $t_1 = t$ ,  $t_2 = t + T_{\text{оп}}$  и постоянных матрицах коэффициентов. В соответствии с этим постоянная матрица  $S$ , входящая в оптимальное управление

$$u = u_{\text{оп}} = -KB^T Sx, \quad (10.9)$$

получается путём интегрирования матричного уравнения Риккати (10.5) в обратном времени при начальном условии  $S(T_{\text{оп}}) = 0$ . Тогда решение  $S(t)$  при  $t = 0$  будет тем значением матрицы  $S$ , которое входит в оптимальное управление (10.9).

Уравнение (10.5) в обратном времени запишется в виде

$$\dot{S} - SA - A^T S + SBKB^T S = -\beta, \quad (10.10)$$

и решение рассматриваемой задачи можно сформулировать так: оптимальным в смысле минимума функционала (10.8) является управление (10.9), где  $S$  – постоянная матрица, получаемая путем решения уравнения (10.10) при нулевом начальном условии

$$S(0) = 0, S = S(T_{\text{оп}}).$$

**Б.** *Решение линейно-квадратичной классической стационарной задачи АКОР для бесконечного интервала оптимизации.* При выполнении условия полной управляемости система, замкнутая через оптимальные управления, в рассматриваемых случаях получается устойчивой. Поэтому с полным основанием можно применять функционал с бесконечным интервалом оптимизации, например,

$$I = 0,5 \int_0^{\infty} x^T(\theta) \beta x(\theta) d\theta + 0,5 \int_0^{\infty} u^T(\theta) K^{-1} u(\theta) d\theta.$$

Оптимальное управление при этом имеет прежний вид (10.9), где постоянная матрица  $S = \bar{S}$  есть «установившееся» решение уравнения (10.5), т.е. решение алгебраического матричного уравнения

$$\bar{S}A - A^T \bar{S} + \bar{S}BK B^T \bar{S} = -\beta, \quad (10.11)$$

известного под названием уравнения Лурье.

**В.** *Решение линейно-квадратичной классической стационарной задачи АКОР для нетерминального функционала.* Точно такое же, как в предыдущем случае, оптимальное управление получается для произвольного интервала оптимизации, по функционалу вида

$$I = 0,5 x^T(t_2) S(t_2) x(t_2) + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} x^T(\theta) \beta x(\theta) d\theta + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} u^T(\theta) K^{-1} u(\theta) d\theta. \quad (10.12)$$

Этот функционал относится к числу полуопределённых, так как  $S$  здесь не заданная матрица, а решение уравнения (10.5), вследствие чего граничное условие  $S_{t=t_2} = S(t_2)$  выполняется автоматически. Для синтеза оптимального управления необходимо искать то решение уравнения (10.5), которое не зависит от каких-либо начальных или конечных условий. Таким решением является «вынужденное» решение  $S$  уравнения (10.11).

Матрица  $S(t)$ , являющаяся решением уравнения (10.5), в общем случае вполне управляемой системы и положительно-определённых матриц  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $K$  является положительно-определённой. Поэтому применение функционала (10.11), имеет определённый смысл.

## 10.6. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АКОР ДЛЯ СЛУЧАЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Встречаются задачи стабилизации в условиях действия на управляемый объект возмущений, поддающихся достаточно точному контролю. Для линейного объекта это соответствует уравнению

$$\dot{x} = Ax + Bu + w, \quad (10.13)$$

где  $w = w(t)$  – измеряемая некоторая функция времени.

Функционал в общем случае задаётся в прежнем виде (10.2). Уравнение (10.3) уступает место следующему:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} A(x+w) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} BKB^T \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T = -\frac{1}{2} x^T \beta x. \quad (10.14)$$

Решение уравнения (10.14) ищется в виде

$$V = 0,5 x^T S(t) x + x^T y(t) + q(t),$$

где  $S(t)$ ,  $y(t)$ ,  $q(t)$  – пока неизвестные матричная, векторная и скалярная функции времени, соответственно. Подставляя это в выражение (10.14) и (10.6), выполняя обычные процедуры, находим

$$u = u_{\text{оп}} = -KB^T (Sx + y); \quad (10.15)$$

$$\dot{y} = (SBKB^T - A^T) y - Sw, \quad (10.16)$$

где  $S$  определяется прежним уравнением Риккати при прежнем конечном условии  $S(t_2) = \rho$ , а  $y(t_2) = 0$ .

Заметим, что условие  $y(t_2) = 0$  делает реализацию данного нестационарного варианта оптимального управления затруднительной. Действительно, в (10.5), (10.16) входят текущие значения  $x(t)$ ,  $w(t)$  (которые измеряются согласно предположению) и, кроме того,  $y(t)$ , определенное с учетом будущего ( $y(t_2) = 0$ ). Если  $w(t)$  на всем интервале оптимизации неизвестно (т.е. неизвестны будущие значения возмущающих воздействий), то



(10.16) точно решить нельзя. Однако можно решить задачу, пренебрегая конечным условием для  $y(t)$  ( $y(t_2) = 0$ ), т.е. определяя «вынужденное» решение уравнения (10.16).

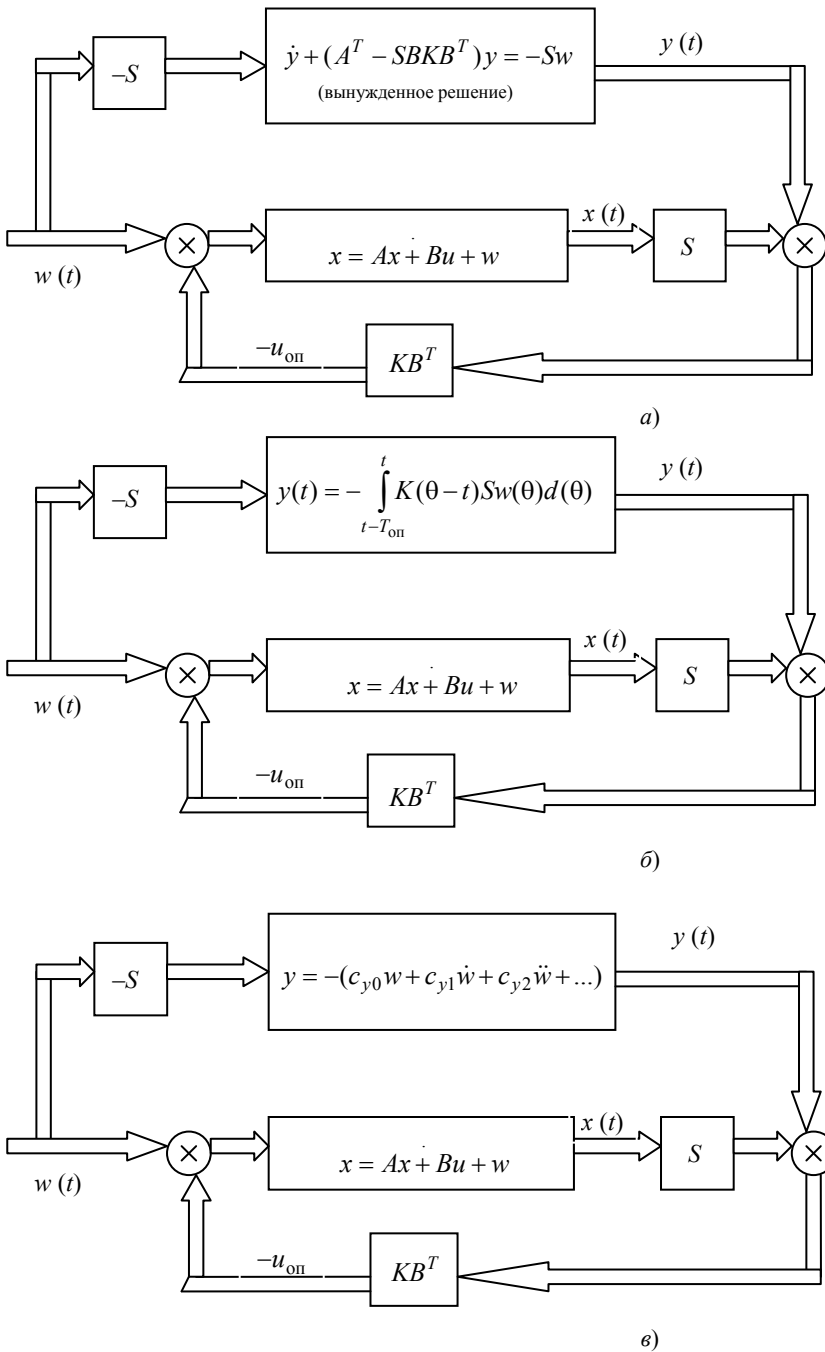


Рис. 10.1

Структурные схемы систем, полученные в результате решения линейно-квадратичной задачи АКОР при наличии измеряемого возмущающего воздействия представлены на рис. 10.1, где  $a$  – полное решение;  $b$  – компенсация с ограниченной памятью;  $v$  – компенсация с разложением по производным.

**А.** Решение линейно-квадратичной классической задачи стабилизации и отброшенном граничном условии для  $y$ . Задавая скользящий интервал оптимизации  $t_1 = t, t_2 = t + T_{\text{оп}}$  и отбрасывая граничное условие для  $y$ , из предыдущего получаем оптимальное управление

$$u = u_{\text{оп}} = -KB^T(S_{\text{оп}}x + y), \quad (10.17)$$

где  $S_{\text{оп}}$  есть значение  $S(T_{\text{оп}})$  решения уравнения (10.10):

$$\dot{S} - SA - A^T S + SBKB^T S = -\beta \quad (10.18)$$

при  $S(0) = p$ , а  $y$  – вынужденное решение уравнения (10.16)

$$\dot{y} = (S_{\text{оп}} BKB^T - A^T)y - S_{\text{оп}} w \quad (10.19)$$

(частное решение неоднородного линейного уравнения не зависящее от граничных условий).

При заданном  $T_{\text{оп}}$  матрица  $S_{\text{оп}}$  постоянна. Если  $A, B$  также постоянны (стационарный линейный объект) и  $K = \text{const}$ , то оптимальная система управления (10.17), (10.19) стационарна. Соответствующая структурная схема представлена на рис. 10.1, а) (индекс у  $S_{\text{оп}}$  опущен). Здесь явно видны два канала распространения возмущённого воздействия, и в этом отношении система напоминает инвариантную к возмущениям. Однако полной инвариантности не получается вследствие ограниченных затрат на управление, предусмотренных минимизируемым функционалом. Действительно, запишем уравнения, соответствующие структурной схеме рис. 10.1, а (т.е. уравнения (10.13), (10.15), (10.16)) в операторной форме (для стационарного случая):

$$(pE - A + BKB^T S)x = -BKB^T y + w \quad (10.20)$$

$$(pE + A^T - SBKB^T)y = -Sw,$$

где  $p = d/dt$ ,  $E$  – единичная матрица размера  $n \times n$ .

Исключая  $y$ , получаем

$$(pE - A + BKB^T S)x = [BKB^T (pE + A^T - SBKB^T)^{-1} S + E]w.$$

Правая часть может обратиться тождественно в нуль, при  $K \rightarrow \infty$  (все элементы диагональной матрицы стремятся к бесконечности), т.е. при неограниченной мощности управления. Таким образом, помимо полной априорной информации, полная инвариантность требует отсутствия энергетических ограничений на управление. Это обстоятельство обычно остаётся в тени.

При практическом осуществлении структур типа представленной на рис. 10.1, а, точнее, звена (10.19), возникает следующая трудность. Легко видеть, уравнения свободного движения основного оптимального контура

$$\dot{x} = -A + BKB^T S)x = 0 \quad (10.21)$$

и контура компенсации

$$\dot{y} = (A^T - SBKB^T)y = 0 \quad (10.22)$$

являются сопряжёнными ( $K^T = K$ ). Если  $K(t, t_0) = K(t - t_0)$  – матрица Коши уравнения (10.15), то матрица Коши сопряжённого уравнения (10.22) есть  $K(t, t_0) = K(t - t_0)$ . Отсюда следует, что если основной контур в оптимальной системе устойчив (а это, естественно, должно быть для любой практически пригодной системы), то контур компенсации неустойчив.

Построение системы, воспроизводящей (хотя бы приближённо) вынужденное движение неустойчивого контура, требует специальных приемов.

**Б. Контур компенсации с ограниченной памятью.** Трудность, связанная с воспроизведением вынужденного движения неустойчивого контура компенсации, может быть в некоторой мере преодолена, если искусственно ограничить «время памяти» этого контура. Основанием этому служит то, что время памяти основного оптимального контура  $T_{\text{н}}$  также практически ограничено. Практически оно не превышает двух-трех значений обратной величины наименьшей по модулю действительной части собственных чисел матрицы  $-A + BKB^T S$  (см. (10.21)).

Вынужденное решение уравнения (10.16) равно

$$y(t) = - \int_{-\infty}^t K(\theta - t) Sw(\theta) d\theta. \quad (10.23)$$

Ограничивая память контура компенсации, записываем

$$y(t) = - \int_{t-T_{\text{оп}}}^t K(\theta - t) Sw(\theta) d\theta. \quad (10.24)$$

Выражение (10.24), в отличие от (10.23), может быть реализовано численно со сколь угодно высокой точностью. Соответствующая схема представлена на рис. 10.1, б).

**В. Компенсация возмущений с точностью до остаточных членов разложения по коэффициентам ошибок.** Низкочастотную часть вынужденного движения в контуре компенсации можно представить в виде ряда по производным  $w, \dot{w}, \ddot{w}, \dots$ . Это можно выполнить, в частности, следующим образом. Пусть

$$w(\theta) = w(t) + \frac{1}{1!} \dot{w}(t)(\theta - t) + \frac{1}{2!} \ddot{w}(t)(\theta - t)^2 + \dots$$

Тогда согласно (10.24)

$$y(t) = -c_{y0}w(t) - c_{y1}\dot{w}(t) - c_{y2}\ddot{w}(t) - \dots,$$

где

$$c_{y1} = \int_{t-T_n}^t K(\theta - t) S d\theta = \int_{-T_n}^0 K(\tau) S d\tau,$$

$$c_{y1} = \frac{1}{1!} \int_{-T_n}^0 K(\tau) S \tau d\tau;$$

$$c_{y2} = \frac{1}{2!} \int_{-T_n}^0 K(\tau) S \tau^2 d\tau.$$

Соответствующая структурная схема представлена на рис. 10.1, в.

### Вопросы для самопроверки

1. Методы решения уравнения Беллмана.
2. Численная форма динамического программирования.
3. Построение разностных схем:
  - методом рядов;
  - методом характеристик.
4. Синтез законов оптимального управления детерминированными линейными объектами при квадратичном функционале.
5. Решение линейно-квадратичной классической задачи стационарной АКОР для:
  - случая стабилизации при отсутствии возмущающих воздействий;
  - случая стабилизации и скользящего интервала оптимизации;
  - бесконечного интервала оптимизации;
  - нетерминального функционала.
6. Решение линейно-квадратичной классической задачи АКОР для случая стабилизации при наличии возмущающих воздействий:
  - решение линейно-квадратичной классической задачи стабилизации и отброшенном граничном условии для  $y$ ;
  - контур компенсации с ограниченной памятью;
  - компенсация возмущений с точностью до остаточных членов разложения по коэффициентам ошибок.

## Лекция 11

### УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ КАЧЕСТВА

#### 11.1. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ АКОР ДЛЯ СЛУЧАЯ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ИЗВЕСТНОГО ЗАДАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Линейные модели управляемых процессов в наибольшей мере соответствуют управлению «в малом» в окрестности программного или заданного движения. Для оптимизации процесса отслеживания задающего воздействия квадратичный функционал содержит квадратичные формы рассогласования. В качестве рассогласования может фигурировать разность между линейным преобразованием вектора состояния и заданной векторной функцией

$$\Delta = Hx - z_3(t).$$

Представим  $z_3(t)$  в виде  $z_3(t) = Hx_3(t)$ , тогда  $(\Delta = Hx - z_3(t))$ .  
 Задающее воздействие  $x_3(0)$  при  $0 \leq t$ , а в другом случае и при

$0 \leq t_2$  считается известным. Квадратичная форма относительно рассогласования  $\Delta^T \beta_\Delta \Delta$  преобразуется к виду  $[x - x_3(t)]^T \beta [x - x_3(t)]$ , где  $\beta = H^T \beta_\Delta H$ .

Итак, квадратичный функционал для данной задачи может быть представлен в виде

$$I = 0,5[x(t_2) - x_3(t_2)]^T p[x(t_2) - x_3(t_2)] + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} [x(\theta) - x_3(\theta)]^T \beta [x(\theta) - x_3(\theta)] d\theta + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} u^T(\theta) K^{-1} u(\theta) d\theta. \quad (11.1)$$

Уравнение Беллмана в данном случае примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} A(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B K B^T \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T = -0,5[x - x_3(t)]^T \beta [x - x_3(t)].$$

Как и раньше, можно искать решение в виде

$$V = 0,5x^T S(t)x + x^T y(t) + q(t). \quad (11.2)$$

После выполнения стандартной процедуры находим

$$u = u_{\text{оп}} = -KB^T (S_{\text{оп}}x + y); \quad (11.3)$$

$$\dot{y} = (SBKB^T - A^T)y + \beta x_3(t), \quad (11.4)$$

где  $S$  определяется уравнением (10.4) при прежнем граничном условии  $S(t_2) = \rho$ , а  $y$  удовлетворяет граничному условию  $y(t_2) = -\rho x_3(t_2)$ .

Во всех традиционных следящих системах используется сигнал рассогласования  $\Delta x = x(t) - x_3(t)$ . В соответствии с этим представляем (11.3) в виде

$$u = u_{\text{оп}} = -KB^T (S\Delta x + Sx_\Delta + y). \quad (11.5)$$

При реализации системы (11.5), (11.4) с граничным условием  $y(t_2) = -\rho x_3(t_2)$  возникают те же трудности, что и для систем стабилизации. Однако задающее воздействие нередко прогнозируется в системе старшего уровня. Поэтому целесообразно сначала привести структуру, соответствующую точному решению.

**А. Структура алгоритма, соответствующего точному решению.** Обозначим  $Sx_3 + y = y^*$ . Подставляя выражение  $y = y^* - Sx_3$  в (11.4) и используя (10.5), получаем

$$\dot{y}^* = (SBKB^T - A^T)y^* + S(\dot{x}_3 - Ax_3) \quad (11.6)$$

(функция  $x_3 = x_3(t)$  считается дифференцируемой или кусочно-дифференцируемой с разрывами с разрывами первого рода).

Выражение (11.5) при этом принимает вид

$$u = u_{\text{оп}} = -KB^T (S\Delta x + Sx_\Delta + y^*). \quad (11.7)$$

Для задачи слежения наиболее подходит функционал со скользящим интервалом оптимизации  $\rho = 0$ ,  $t_1 = t$ ,  $t_2 = t + T_{\text{оп}}$ :

$$I = 0,5\Delta x^T(t + T_{\text{оп}})p\Delta x(t + T_{\text{оп}}) + 0,5 \int_t^{t+T_{\text{оп}}} [\Delta x^T(\theta) \beta \Delta x(\theta) u^T(\theta) K^{-1} u(\theta)] d\theta. \quad (11.8)$$

Тогда точный оптимальный алгоритм слежения для нестационарного линейного объекта

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

заключается в следующем. Мгновенно в обратном времени при условии  $S(t + T_{\text{оп}}) = \rho$  и решается матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{S} + SA(t) - A^T(t)S + SB(t)KB^T(t)S = -\beta$$

до момента времени  $t$ . Одновременно при условии  $\dot{y}^*(t+T_{\text{оп}}) = Sx_3(t+T_{\text{оп}}) - px_3(t+T_{\text{оп}}) = 0$  в обратном времени интегрируется уравнение (11.6) (функция  $x_3(t)$  на интервале  $[t, t+T_{\text{оп}}]$  по условию считается известной).

Так определяются  $S(t)$ ,  $y^*$ . Величина  $\Delta x(t)$  измеряется. Из этих величин формируется текущее оптимальное управление  $u$  (11.7).

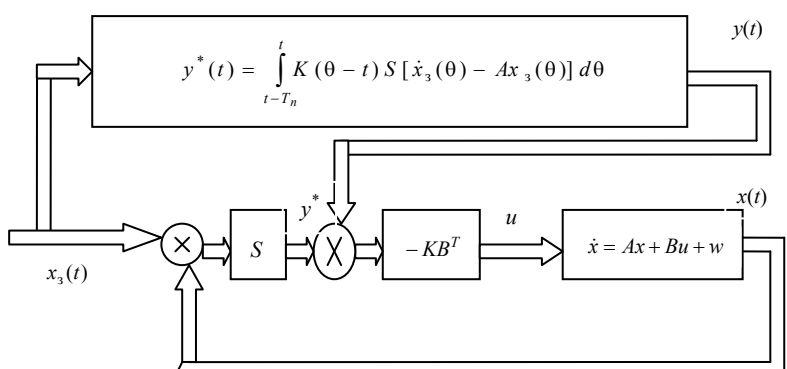
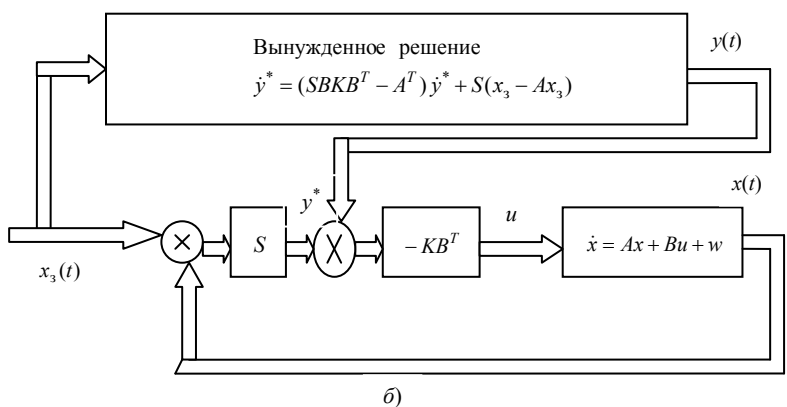
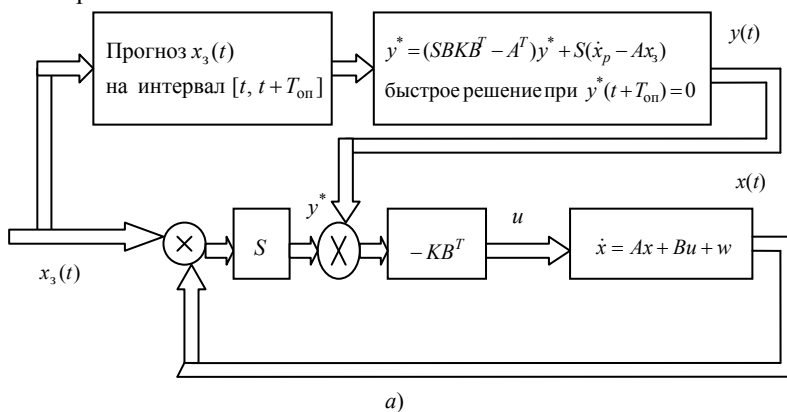
Для стационарного объекта ( $A = \text{const}$ ,  $B = \text{const}$ ) при  $\beta = \text{const}$ ,  $K = \text{const}$  решение уравнения Риккати должно производиться заблаговременно, на стадии проектирования. В данной задаче при этих условиях  $S$  постоянно. Таким образом, в данном случае точное решение заключается в мгновенном интегрировании векторного уравнения (11.6) от  $t+T_{\text{оп}}$  до  $t$  при  $\dot{y}^*(t+T_{\text{оп}}) = 0$  и вычислении  $u$  согласно (11.7). Соответствующая структура системы представлена на рис. 11.1, а. Прогноз  $x_3$  на интервале  $[t, t+T_{\text{оп}}]$  может выполняться как в самой следящей системе путём экстраполяции (этот вариант показан на рис. 11.1, а), так и поступать с верхнего уровня (где происходит формирование  $x_3$ ).

Как видно из указанных уравнений и структурной схемы, контур компенсации отсутствует только при  $\dot{x}_3 - Ax_3 \equiv 0$  (при этом  $y^* \equiv 0$ ), т.е. в том случае, когда задающее воздействие соответствует собственному движению неуправляемого объекта. Очевидно, что это редкое исключение.

Мгновенное численное решение уравнения (11.6) на интервале от  $t+T_{\text{оп}}$  до  $t$  не возможно, но практически достаточно решение в ускоренном времени (обычно коэффициент ускорения времени должен составлять несколько десятков).

Хотя численная реализация данного алгоритма для управления в реальном времени даже относительно сложными системами находится в пределах современных возможностей ЭВМ, вычислительные затраты могут считаться недопустимо большими.

Действительно речь идет всего лишь о линейно-квадратичной стационарной задаче отслеживания. Для этой задачи желательно иметь простое алгоритмическое обеспечение, требующее минимальных вычислительных затрат.



в)

**Рис. 11.1**

**Б.** Структура алгоритма, соответствующего вынужденному решению в контуре компенсации. Как и в позиции **А**, получается при отказе от граничного условия в контуре компенсации и переходе к вынужденному решению уравнения (11.6). Допустимость такого подхода, по крайней мере, для достаточно больших диагональных элементов задаваемой матрицы  $\rho$ , следует из выражения (11.2) и условия  $S(t + T_{\text{оп}}) = \rho$ . Структура системы с вынужденным решением в контуре компенсации в общем виде представлена на рис. 11.1, б.

**В.** Структура алгоритма, соответствующего вынужденному решению в контуре компенсации с ограниченной памятью. При построении вынужденного решения уравнения (11.6) в виде

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^i K(\theta - t) + S[\dot{x}_3(\theta) - Ax_3(\theta)]d\theta, \quad (11.9)$$

где  $K(t)$  – матрица Коши замкнутого основного контура. Возникает та же трудность, что и в позиции **А** п. 8.5.2, обусловленная неустойчивостью сопряжённой системы ( $K \rightarrow \infty$  при  $0 \rightarrow -\infty$ ). Для устранения этой трудности ограничиваем память в контуре компенсации. Тогда

$$y^*(t) = \int_{t-T_{\text{оп}}}^i K(\theta - t) + S[\dot{x}_3(\theta) - Ax_3(\theta)]d\theta. \quad (11.10)$$

Структурная схема соответствующей системы представлена на рис. 11.1, в.

## 11.2. УПРОЩЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕГУЛЯТОРОВ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ АКОР

Для объекта

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$x_{t=t_1} = x(t_1) \quad (11.11)$$

рассматриваемая задача синтеза регулятора

$$u(t) = -\Omega x(t), \quad (11.12)$$

где матрица коэффициентов  $\Omega$  размера  $(r \times n)$  характеризуется тем, что отличными от нуля являются либо только предварительно указанные элементы, либо так называемые существенные элементы, т.е. играющие доминирующую роль в полном законе управления, полученном в задаче АКОР, рассмотренной ранее в данной работе.

Вводится матрица  $Z$ , элементы которой принимают значения только 0 и 1, и операция поэлементного умножения матриц одинакового размера

$$\Omega = \Omega(\Omega', Z) + \Omega' * Z, \quad (11.13)$$

при которой каждый элемент матрицы-произведения представляет собой произведение аналогичных элементов сомножителей  $\Omega_{ij} = \Omega'_{ij} Z_{ij}$ .

Минимизируемый функционал (9.27) при этом принимает значение

$$I^* \geq I_{\text{оп}}. \quad (11.14)$$

В общем случае выполнение этого неравенства может зависеть от начальных условий  $x(t_1)$ . В этом случае полезны предположение о нормальном распределении начальных условий и переход к неравенству, выраженному через вторые моменты.

Если матрица  $Z$  задана на основе физических представлений, то задача сводится к выбору матрицы  $\Omega'$ . Если же требуется просто сократить число обратных связей в (11.12), то задача решается в два этапа: выявление несущественных связей (которым в  $Z$  ставятся в соответствие элементы 0) и выбор матрицы  $\Omega'$ .

Выбор матрицы  $\Omega'$  осуществляется из условия

$$I(\Omega'_{\text{оп}}, Z) = \min_{\Omega'} I(\Omega', Z) \quad (11.15)$$

с использованием любого метода поиска минимума функции многих переменных (минимизация осуществляется по элементам  $\Omega'$ , соответствующим единичным элементам  $Z$ ). Иногда (11.15) целесообразно заменить условием

$$I(\Omega'_{\text{оп}}, Z) \leq (1 + \varepsilon) I_{\text{оп}}, \quad (11.16)$$

где  $\varepsilon$  – заданное «малое» число, характеризующее допустимое ухудшение качества регулирования.

Выявление несущественных связей регулятора осуществляется полным перебором (поочередной заменой 0 на 1) элементов матрицы  $Z$  в (11.13) при условии, что  $\Omega' = KB^T S$ . Принятие решения о существенности каждой связи делается по условию (11.16). Помимо большого объема вычислений к трудностям следует отнести неединственность получаемых решений.

### Вопросы для самопроверки

1. Решение линейно-квадратичной задачи АКОР для случая отслеживания известного задающего воздействия. Структура алгоритма, соответствующего решению:

- точному;
- вынужденному в контуре компенсации;
- вынужденному в контуре компенсации с ограниченной памятью.

2. Упрощение структуры регуляторов в линейно-квадратичной классической задаче АКОР.

## Лекция 12

### УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ

#### 12.1. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИ КЛАССИЧЕСКИХ ФОРМАХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Стационарный синтез с дискретным временем описывается разностным уравнением

$$x[k+1] = f[x[k], u[k]]. \quad (12.1)$$

Классическая форма функционала имеет вид

$$I = V_3[x[k_2]] + \sum_{k=k_1}^{k_2-1} L[x[k], u[k]]. \quad (12.2)$$

Уравнение Беллмана для задачи минимизации функционала (12.2) на процессе (12.1) имеет вид

$$\begin{aligned} V_{k_2-k}[x[k_2-k]] &= \min_{u[k_2-k]} \{L[x[k_2-k], u[k_2-k]] + \\ &= V_{k_2-k+1}[f[x[k_2-k], u[k_2-k]]]\}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12.3)$$

при

$$V_{k_2}[x[k_2]] = V_3[x[k_2]]. \quad (12.4)$$

Решение этого функционального уравнения для нелинейных многомерных систем так же трудно осуществить, как решение уравнения для систем с непрерывным временем. Дело не только в трудности многократного нахождения экстремума функции многих переменных (в практических задачах число шагов  $k_2 - k_1$ , составляет как минимум, десятки). Главная трудность в нарастании сложности функций от шага к шагу. Каждая следующая функция  $V_{h_2-h}[x[k_2-k]]$  для нелинейного объекта – функция другого, более сложного класса, чем функция  $V_{h_2-h}[x[k_2-k+1]]$  (именно на это должны указывать индексы у функций). Для запоминания таких функций большого числа аргументов при численном решении необходим огромный объем памяти.

#### 12.2. ВАРИАНТЫ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ЧАСТНЫХ ФОРМ ФУНКЦИОНАЛА

Трудности решения общего дискретного уравнения Беллмана (12.3) сохраняются и для всех нелинейно-квадратичных многомерных задач.

12.2.2. ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ПРОЦЕССА  
С ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИМ УПРАВЛЕНИЕМ И  
АДДИТИВНОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ЗАТРАТ  
НА УПРАВЛЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЕ

Пусть процесс имеет вид

$$x[k+1] = f[x[k]] + \varphi[x[k]]u[k], \quad (12.5)$$

а функционал (6.3) (стационарный вариант)

$$I = V_3[x[k]] + \sum_{k=k_1}^{k_2-1} Q_3[x[k]] + \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \sum_{j=1}^r \frac{u_j^{q_j}[k]}{q_j d_j}. \quad (12.6)$$

Здесь  $q_j > 1$ ,  $u_j^{q_j}$  – чётная функция  $u_j$ ,  $j = \overline{1, r}$ .

Дискретное уравнение принимает вид

$$V_{k_2-k}[x[k_2-k]] = \min_{u[k_2-k]} \{Q_3[x[k_2-k]] + \sum_{j=1}^r q_j^{-1} d_j^{-1} u_j^{q_j}[k_2-k] + \\ + V_{k_2-k+1}[f[x[k_2-k]] + \varphi[x[k_2-k]]u[k_2-k]]\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12.7)$$

Необходимое условие локального минимума для гладких функций в данном случае запишется в виде

$$(k_j^*)^{-1} u_j^{q_j-1}[k_2-k] + \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \varphi^{|j|}[x[k_2-k]] = 0, \quad (12.8)$$

где  $\varphi^{|j|}$  –  $j$ -й столбец матрицы  $\varphi$ .

Вводя величины  $p_j$  такие, что

$$p_j^{-1} + q_j^{-1} = 1, \quad (12.9)$$

и разрешая (12.8) относительно  $u_j$ , находим

$$u_j[k_2-k] = - \left\{ d_j \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \varphi^{|j|}[x[k_2-k]] \right\}^{p_j/q_j}, \quad (12.10)$$

подставляя которое в (12.7), придаем уравнению Беллмана вид

$$V_{k_2-k}[x[k_2-k]] = Q_3[x[k_2-k]] + \sum_{j=1}^r q_j^{-1} d_j^{-1} \left[ \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \varphi^{|j|}[x[k_2-k]] \right]^{p_j} + \\ + V_{k_2-k+1} \left\{ f[x[k_2-k]] - \varphi[x[k_2-k]] \left( d_j \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \varphi^{|j|}[x[k_2-k]] \right)^{p_j/q_j} \right\}, \quad (12.12)$$

где  $\left( d_j \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \varphi^{|j|}[x[k_2-k]] \right)^{p_j/q_j}$  – матрица-столбец, составленная из элементов (12.10).

12.2.3. ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ПРОЦЕССА С ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИМ УПРАВЛЕНИЕМ И КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ  $U_3$

При  $p_j = q_j = 2$ ,  $j = \overline{1, r}$ , т.е. используется квадратичный функционал, при этом выражения (12.11), (12.10) принимают вид

$$V_{k_2-k}[x[k_2-k]] = Q_3[x[k_2-k]] + 0,5 \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \varphi[x[k_2-k]] \times \\ \times D\varphi^T[x[k_2-k]] \left[ \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \right]^T + V_{k_2-k+1} \times$$



$$\times \left\{ f[x[k_2 - k] - \varphi[x[k_2 - k]] D \varphi^T[x[k_2 - k]] \left( \frac{\partial V_{k_2 - k + 1}}{\partial x[k_2 - k + 1]} \right)^T \right\},$$

$$u[k_2 - k] = -D \varphi^T[x[k_2 - k]] \left[ \frac{\partial V_{k_2 - k + 1}}{\partial x[k_2 - k + 1]} \right]^T. \quad (12.14)$$

#### 12.2.4. ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Для процесса

$$x[k + 1] = A[k]x[k] + B[k]x[k]u[k] \quad (12.15)$$

и функционала вида

$$I = 0,5x^T[k_2] \rho x[k_2] + 0,5 \sum_{k=k_1}^{k_2-1} x^T[k] \beta x[k] + 0,5 \sum_{k=k_1}^{k_2-k} u^T[k] D^{-1} u[k] \quad (12.16)$$

уравнение Беллмана принимает вид

$$V_{k_2 - k}[x[k_2 - k]] = 0,5x^T[k_2 - k] \beta x[k_2 - k] + 0,5 \frac{\partial V_{k_2 - k + 1}}{\partial x[k_2 - k + 1]} \times$$

$$\times B[k_2 - k] D B^T[k_2 - k] \left[ \frac{\partial V_{k_2 - k + 1}}{\partial x[k_2 - k + 1]} \right]^T + V_{k_2 - k + 1} \times$$

$$\times \left[ A[k_2 - k] x[k_2 - k] - B[k_2 - k] D B^T[k_2 - k] \left( \frac{\partial V_{k_2 - k + 1}}{\partial x[k_2 - k + 1]} \right)^T \right]. \quad (12.17)$$

Это уравнение должно решаться при граничном условии

$$V_{k_2}[x[k_2]] = 0,5x^T[k_2] \rho x[k_2]. \quad (12.18)$$

Оптимальное управление равно

$$u[k_2 - k] = -D B^T[k_2 - k] \left[ \frac{\partial V_{k_2 - k + 1}}{\partial x[k_2 - k + 1]} \right]^T. \quad (12.19)$$

### 12.3. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Единственным случаем, когда дискретное уравнение Беллмана решается в общем виде, является линейно-квадратичная задача. Это связано с тем, что класс функции  $V$  здесь не меняется на каждом шаге (квадратичная форма). Поэтому индекс у этой функции в (12.17) – (12.19) можно опустить.

#### 12.3.1. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ АКОР ДЛЯ СЛУЧАЯ СТАБИЛИЗАЦИИ

Решение уравнения (12.17) можно искать в виде квадратичной формы с привлечением уравнения управляемого процесса

$$x[k_2 - k + 1] = A[k_2 - k]x[k_2 - k] - B[k_2 - k] D B^T[k_2 - k] \left[ \frac{\partial V_{k_2 - k + 1}}{\partial x[k_2 - k + 1]} \right]^T.$$

А именно, если положить

$$V_{k_2 - k + 1}[x[k_2 - k + 1]] = V[x[k_2 - k + 1]] =$$

$$= 0,5x^T[k_2 - k + 1] S^*[k_2 - k + 1] x_2[k_2 - k + 1],$$

то

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \right)^T &= S^*[k_2-k+1]x[k_2-k+1]= \\ &= S[k_2-k+1]A[k_2-k]x[k_2-k]-S[k_2-k+1] \times \\ &\times B[k_2-k]DB^T[k_2-k] \left( \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \right) \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial V_{k_2-k+1}}{\partial x[k_2-k+1]} \right]^T &= [E + S^*[k_2-k+1]B[k_2-k]DB \times \\ &\times [k_2-k]]^{-1} S^*[k_2-k+1]A[k_2-k]x[k_2-k]. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (12.17) и приравнявая коэффициенты при одинаковых произведениях  $x_i x_j$  (в скалярной форме), можно получить рекуррентное уравнение для  $S^*$  и выражение для оптимального управления. Можно использовать другую процедуру доказательства. В результате получаем

$$\begin{aligned} u[k_2-k] = u_{\text{оп}}[k_2-k] &= -[D^{-1}[k_2-k] + B^T[k_2-k]S[k_2-k+1] \times \\ &\times B[k_2-k]]^{-1} B^T[k_2-k]S[k_2-k+1]A[k_2-k]x[k_2-k], \quad (12.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S[k_2-k] &= A^T[k_2-k]S[k_2-k+1]A[k_2-k] - A^T[k_2-k] \times \\ &\times S[k_2-k+1]B[k_2-k][D^{-1}[k_2-k] + B^T[k_2-k] \times \\ &\times S[k_2-k+1]B[k_2-k]]^{-1} B^T[k_2-k] \times \\ &\times S[k_2-k+1]A[k_2-k] + \beta[k_2-k]. \quad (12.21) \end{aligned}$$

Здесь  $k$  пробегает значения 1, 2, ... . Рекуррентное уравнение (12.21) решается при граничном условии  $S[k_2] = \rho$ .

Приближенно можно оценить вычислительные затраты для данной нестационарной задачи при определении  $S$  на  $N$  шагах. При большой размерности (высокое  $n$ ) общее число необходимых элементарных операций приближенно равно  $4(2n^3 + n^2r + nr^2)N$ . При  $n = 20$ ,  $r = 5$ ,  $N = 100$  это число составляет примерно  $4 \cdot 10^8$ .

### 12.3.2. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ АКОР ДЛЯ СЛУЧАЯ СТАБИЛИЗАЦИИ

Для стационарной линейно-квадратичной задачи стабилизации  $A[k] = A = \text{const}$ ,  $B[k] = B = \text{const}$ , а минимизируемый функционал естественно задавать в виде

$$I = 0,5 \sum_{i=k}^{k+k_{\text{оп}}} x^T[i] \beta x[i] + 0,5 \sum_{i=k}^{k+k_{\text{оп}}} u^T[i] D^{-1} u[i],$$

где  $\beta = \text{const}$ ,  $D = \text{const}$ . Тогда рекуррентное уравнение (12.21) принимает форму

$$S[i] = A^T S[i+1]A - A^T S[i+1]B[D + B^T S[i+1]B]^{-1} B^T S[i+1]A + \beta. \quad (12.22)$$

Если граничное условие записать в виде  $S(k_{\text{оп}}+1) = 0$ , то  $i$  в (12.22) должно принимать значение  $k_{\text{оп}}$ ,  $k_{\text{оп}}-1$ , ..., 0. При этом  $S(0)$  является искомой матрицей, которая входит в выражение оптимального стационарного управления

$$u[j] = u_{\text{оп}}[j] = -[D^{-1} + B^T S[0]B]^{-1} B^T S[0]Ax[j]. \quad (12.23)$$

#### Вопросы для самопроверки

1. Синтез законов управления детерминированными процессами с дискретным временем при классических формах функционалов.
2. Варианты дискретного уравнения Беллмана для частных форм функционала. Дискретное уравнение Беллмана для:

- процесса с линейно входящим управлением и аддитивной степенной функцией затрат на управление в функционале;
  - процесса с линейно входящим управлением и квадратичной функцией  $U_3$ ;
  - линейно-квадратичной классической задачи.
3. Синтез законов линейными системами. Решение:
- линейно-квадратичной классической дискретной задачи АКОР для случая стабилизации;
  - линейно-квадратичной стационарной задачи АКОР для случая стабилизации.

## Лекция 13

### УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

#### 13.1. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ ФУНКЦИОНАЛАХ КЛАССИЧЕСКОГО ТИПА

Существуют функционалы классического типа двух разных форм для оптимизации управления стохастическими процессами. Первую форму образуют функционалы в виде безусловного математического ожидания классических функционалов, применяемых для детерминированных процессов. Вторую форму составляют функционалы в виде условного математического ожидания классических функционалов, применяемых для детерминированных процессов.

Эти две формы функционалов порождают разные формы алгоритмического обеспечения. При этом для нелинейных систем эта задача синтеза управления стохастическими процессами путем минимизации функционалов ещё намного сложнее, чем для детерминированных процессов.

В то же время для типовых функционалов используемых при решении нелинейных задач приближённо, а для линейно-квадратичных задач точно справедлива теорема разделения. Это делает синтез законов управления стохастическими нелинейными системами путём минимизации функционалов по своей сложности примерно эквивалентным синтезу алгоритмов управления детерминированными системами. Для линейно-квадратичных задач оптимизации управления стохастическими процессами решения по своей трудоёмкости не отличаются от соответствующих детерминированных аналогов как при использовании безусловных, так и условных математических ожиданий целевых функций.

#### 13.2. ПРИБЛИЖЁННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА С ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Пусть управляемый процесс описывается уравнением в форме Ланжевена

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u + \xi(t), \quad (13.1)$$

а функционал в виде

$$J_Y = E_Y[I] = \int_{-\infty}^{\infty} Ip(x, u, t | Z) dxdu = E_Y \left\{ V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} U_3 u[(\theta), \theta] d\theta \right\}, \quad (13.2)$$

где

$$U_3(u, t) - U_3(u, t) - \left[ \frac{\partial}{\partial v} U_3(v, t) \right] (u - v) \quad (13.3)$$

– положительно-определённая функция относительно  $u$ , обращающаяся в нуль только при  $u = v$ .

Условия наблюдаемости здесь уточняются, однако предполагается, что обработка сигнала наблюдения  $z$  на интервале наблюдения (эта информация обозначается  $Z$ ) позволяет хотя бы приближённо определить текущее значение оценки

$$\hat{x} = E_y[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, u, t | Z) dxdu .$$

Для каждой реализации  $\xi(t)$  сохраняет силу уравнения (9.9) с учётом  $\xi(t)$  и (9.10):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + \varphi(x, t)v + \xi(t)] + U_3(v, t) = -Q_3(x, t); \quad (13.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} U_3(v, t) + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) = 0 \quad (13.5)$$

и выражение (9.15) принимает вид

$$I = V_3[x(t_1)] + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ U_3[u(\theta), \theta] - U_3[v(\theta), \theta] - \left[ \frac{\partial}{\partial v} U_3[v(\theta), \theta] \right] [u(\theta) - v(\theta)] \right\} d\theta. \quad (13.6)$$

Заметим, что для любой непрерывной функции  $F(x, u, t)$  вследствие теоремы о среднем справедливо соотношение

$$E_y[F(x, u, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, u, t) p(x, u, t | Z) dx du = F(\tilde{x}, \tilde{u}, t),$$

где  $\tilde{x}, \tilde{u}$  – некоторые значения  $x, u$  в области, для которой условная плотность вероятностей  $p(x, u, t | Z)$  отлична от нуля. Чем выше точность оценивания, выполняемая некоторым фильтром, тем ближе  $p(x, u, t | Z)$  к  $\delta$ -функции и ближе приближение к равенству

$$E_y[F(x, u, t)] = F(\tilde{x}, \tilde{u}, t), \quad (13.7)$$

где

$$\hat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, u, t | Z) dx du, \quad \hat{u} = \int_{-\infty}^{\infty} up(x, u, t | Z) dx du. \quad (13.8)$$

Применим оператор условного математического ожидания к выражениям (13.4) – (13.6), используя везде приближённое равенство (13.7). Получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} + V(\hat{x}, t) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} V(\hat{x}, t) [f(\hat{x}, t) + \varphi(\hat{x}, t)\hat{v}] + U_3(\hat{v}, t) + V_x \hat{\xi} = -Q_3(\hat{x}, t); \quad (13.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{v}} U_3(\hat{v}, t) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} V(\hat{x}, t) \varphi(\hat{x}, t) = 0; \quad (13.10)$$

$$J_y = E_y[I] = V_3[\hat{x}(t_1)] + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ U_3[u(\theta), \theta] - U_3[\hat{v}(\theta), \theta] - \frac{\partial}{\partial \hat{v}} U_3[\hat{v}(\theta), \theta] [u(\theta) - \hat{v}(\theta)] \right\} d\theta, \quad (13.11)$$

где

$$V_x \hat{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x} \xi(t) p(x, v, t) dx dv. \quad (13.12)$$

Вследствие указанного свойства функции (13.3)  $J_y$  имеет единственный минимум при  $u = \hat{v}$ , где  $\hat{v}$  определяется выражением (13.10). Если величина (13.12) равна нулю, то (13.9), (13.10) отличаются от уравнений, записанных для детерминированных процессов, только заменой  $x = \hat{x}$  и  $v = \hat{v}$ . Итак при условии  $V_x \hat{\xi} \approx 0$  оптимальное (в смысле минимума  $J_y$ ) управление стохастическим процессом (13.1) при стохастическом условии наблюдения может быть приближенно получено как оптимальное (в смысле минимума  $I$ ) управление детерминированным процессом с точным измерением  $x$  путём замены в последнем истинного значения  $x$  на оценку  $\hat{x} = E_y[x]$ . Полученное таким путём приближённое решение задачи синтеза закона управления стохастическим процессом тем точнее, чем выше точность оценивания, т.е. чем  $\Delta x = x - \hat{x}$ .

Это составляет содержание приближённого принципа (теоремы) разделения в общем виде.

Принцип разделения удобен в практическом использовании, так как позволяет отдельно синтезировать систему оценивания и идентификации, с одной стороны, и систему собственно управления, с другой стороны.

Далее принцип приближённого разделения формируется для частных видов минимизируемого функционала (13.2).

### 13.2.1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА $J_Y$ СО СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ $U_3$

Если минимизируемый функционал имеет вид

$$J_Y = E_Y \left\{ V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \sum_{j=1}^r \int_{t_1}^{t_2} q_j^{-1} k_j^{-1} u_j^{q_j}(\theta) d\theta \right\}, \quad (13.13)$$

где  $q_j > 1$ ,  $k_j > 0$ ,  $u_j^{q_j}$  – чётная функция  $q_j$  и  $V_x \hat{\xi}$  приближённо или точно равно нулю, то субоптимальным управлением для процесса (13.1) служит

$$u_j = - \left[ k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}_i} \Phi_{ij}(\hat{x}, t) \right]^{p_j-1}, \quad (13.14)$$

где  $V(\hat{x}, t)$  – определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} f(\hat{x}, t) - \sum_{j=1}^r p_j^{-1} k_j^{p_j-1} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \hat{x}_i} \Phi_{ij}(\hat{x}, t) \right)^{p_j} = -Q_3(x, t) \quad (13.15)$$

при граничном условии

$$V_{t=t_2} = V_3[\hat{x}(t_2)]. \quad (13.16)$$

В (13.14) используются значения  $p_j = q_j / (q_j - 1)$ , а  $\hat{x}(t)$  есть оценка истинного  $x(t)$  в виде УМО  $\hat{x} = E_Y[x]$ .

### 13.2.2. ПРИБЛИЖЁННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ ФУНКЦИОНАЛА $J_Y$ С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ $U_3$

Пусть минимизируемый функционал имеет вид

$$J_Y = E_Y \left\{ V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} u^T(\theta) K^{-1} u(\theta) d\theta \right\} \quad (13.17)$$

и  $V_x \hat{\xi}$  приближённо или точно равна нулю. Тогда субоптимальным управлением для процесса (13.1) служит

$$u = -K\Phi^T(\hat{x}, t) (\partial V / \partial \hat{x})^T, \quad (13.18)$$

где  $V = V(\hat{x}, t)$  есть решение уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} f(\hat{x}, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \Phi(\hat{x}, t) K \Phi^T(\hat{x}, t) \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \right)^T = -Q_3(\hat{x}, t) \quad (13.19)$$

при граничном условии (13.16),  $\hat{x}(t)$  в (13.18) есть оценка истинного значения  $x(t)$  в виде УМО  $\hat{x} = E_Y[x]$ .

## 13.3. ТОЧНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАРКОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Для линейных стохастических процессов, описываемых уравнением

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u + \xi(t), \quad (13.20)$$

где  $\xi(t)$  – процесс типа гаусовского белого шума, а также для линейных стохастических процессов с дискретным временем

$$x[k+1] = A[k]x[k] + B[k]u[k] + \xi[k], \quad (13.21)$$

где  $\xi[k]$  – белая гауссовская случайная последовательность, справедлив принцип точного разделения, причём как при минимизации квадратичных функционалов типа  $J$ , так и типа  $J_Y$ .

### 13.3.1. НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ

Для процесса (13.20) оптимальным в смысле минимума квадратичного функционала

$$J = E \left[ 0,5x^T(t_2)\rho x(t_2) + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} x^T(\theta)\beta x(\theta) d\theta + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} u^T(\theta)K^{-1}u(\theta) d\theta \right] \quad (13.22)$$

является управление

$$u = u_{\text{оп}} = -KB^T(t) + S(t)\hat{x}, \quad (13.23)$$

где  $S(t)$  есть решение матричного уравнения Риккати (10.5)

$$\dot{S} + SA + A^T S - SBKB^T S = -\beta$$

при условии  $S(t_2) = \rho$ ,  $\hat{x}(t)$  есть оценка истинного значения  $x(t)$  в виде УМО  $E_Y(x)$  получаемая, в частности, на выходе ФКБ.

### 13.3.2. ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ

Для процесса (13.21) оптимальным в смысле минимума квадратичного функционала

$$J = E \left\{ 0,5x^T[k_2]\rho x[k_2] + 0,5 \sum_{k=k_1}^{k_2-1} x^T[k]\beta x[k] + 0,5 \sum_{k=k_1}^{k_2-1} u^T[k]D^{-1}u[k] \right\} \quad (13.24)$$

является управление

$$u[i] = -[D^{-1}[i] + B^T[i]S[i+1]B[i]]^{-1} - B^T[i]S[i+1]A[i]\hat{x}[i], \quad (13.25)$$

где  $S[i]$  определяется рекуррентным уравнением

$$S[i] = A^T[i]S[i+1]A[i] - A^T[i]S[i+1]B[i][D^{-1}[i] + B^T[i]S[i+1]B[i]]^{-1} \times \\ \times B^T[i]S[i+1]A[i] + \beta[i] \quad (13.26)$$

при граничном условии  $S(k_2) = \rho$ ,  $\hat{x}[i]$  – оценка истинного значения  $x[i]$  в виде УМО  $E_Y[x[i]]$ , получаемая, в частности, на выходе ФКБ условного математического ожидания.

#### Вопросы для самопроверки

1. Синтез законов управления стохастическими процессами при функционалах классического типа.
2. Приближенное разделение для стохастического нелинейного объекта с линейно входящим управлением:
  - приближенное разделение для случая минимизации функционала  $J_y$  со степенной функцией  $U_3$ ;
  - приближенное разделение для случая функционала  $J_Y$  с квадратичной функцией  $U_3$ .
3. Точное разделение для линейно-квадратичных задач оптимального управления Марковскими процессами:
  - непрерывное время;
  - дискретное время.

## Лекция 14

# УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ ПО КРИТЕРИЮ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ

## 14.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ КРИТЕРИЯ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Приведём общие решения задач синтеза оптимальных управлений при функционалах типа обобщённой работы, на которых, как частные случаи, получаются многие известные решения.

## 14.2. ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Рассматриваются задачи управления объектом с линейным управлением и аддитивными функциями затрат на управление в минимизируемом функционале обобщённой работы (ФОР).

### 14.2.1. МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ С АДДИТИВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЗАТРАТ

Пусть управляемый процесс описывается уравнением вида

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u, \quad (14.1)$$

а минимизируемый функционал имеет вид

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta]d\theta + \int_{t_1}^{t_2} \{U_3[u(\theta), \theta] + U_3^*[u_{оп}(\theta), \theta]\}d\theta, \quad (14.2)$$

где  $U_3, U_3^*$  – заданные функции указанных аргументов такие, что

$$U_3(u, \theta) + U_3^*(u_{оп}, \theta) - \left[ \frac{\partial}{\partial u_{оп}} U_3(u_{оп}, \theta) \right] u \quad (14.3)$$

– положительно-определённая функция относительно  $u$ , обращающаяся в нуль при  $u = u_{оп}$ . Функция  $u_{оп}$  в (14.2) – пока неизвестное оптимальное управление.

Покажем, что оптимальное управление  $u = u_{оп}$  в данном случае определяется соотношением

$$\frac{\partial}{\partial v} U_3(v, t) = -\frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t), \quad (14.4)$$

где  $V = V(x, t)$  есть решение уравнения Ляпунова для неуправляемого  $u \equiv 0$  объекта

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) = -Q_3(x, t) \quad (14.5)$$

при граничном условии  $V_{t=t_2} = V_3(x)$ .

Запишем уравнение Беллмана (9.3) для задачи (14.1), (14.2)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ Q_3(x, t) + U_3(u, t) + U_3^*(u_{оп}, t) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + \varphi(x, t)u] \right\} = 0$$

или с привлечением достаточного условия локального минимума гладкой функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + Q_3(x, t) + U_3(v, t) + U_3^*(v, t) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, t) + \varphi(x, t)u] &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial v} U_3(v, t) + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Если из второго уравнения выражение

$$\frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial v} U_3(v, t) \quad (14.7)$$

подставить в первое и учесть, что согласно указанному условию

$$U_3(v, t) + U_3^*(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} U_3(v, t)v = 0,$$

то получаем выражения (14.4), (14.5).

Как и в случае классического функционала (9.8), можно привести другое доказательство, более наглядное с точки зрения единственности решения. Добавим к обеим частям уравнения (14.5) функции

$$\frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) u + U_3(u, t) + U_3^*(v, t),$$

с учетом (14.1) получаем

$$\dot{V} + Q_3(x, t) + U_3(u, t) + U_3^*(v, t) = U_3(u, t) + U_3^*(v, t) + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) u. \quad (14.8)$$

Здесь полная производная по времени  $\dot{V}$  вычислена на решении уравнения (14.1). Интегрируя (14.8) по времени от  $t_1$  до  $t_2$  с учётом граничного условия  $V_{t=t_2} = V_3(x)$  и выражения (14.7), находим

$$I = V[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} \left[ U_3(u, \theta) + U_3^*(v, \theta) - \frac{\partial}{\partial v} U_3(v, \theta) u \right] d\theta.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что при заданном условии для функции (14.3) функционал  $I$  имеет единственный минимум при управлении  $u = v = u_{\text{оп}}$ , определяемом выражениями (14.4), (14.5).

#### 14.2.2. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ С АДДИТИВНЫМИ СТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЗАТРАТ

Для управляемого процесса (14.1) минимизируется функционал:

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{j=1}^r \left( q_j^{-1} k_j^{-1} u_j^{q_j}(\theta) + p_j^{-1} k_j^{-1} u_{j\text{оо}}^{q_j}(\theta) \right) \right] d\theta, \quad (14.9)$$

где  $q_j > 1$ ,  $u_j^{q_j}$  – чётная функция  $u_j$ ,  $p_j^{-1} + q_j^{-1} = 1$ ; здесь удовлетворяется условие, заданное для функции (14.3).

Выражение (14.4) имеет вид

$$v_j^{q_j-1} = -k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_{ij}(x, t), \quad j = \overline{1, r},$$

но  $(q_j - 1)^{-1} = p_j / q_j$  и

$$u_j = u_{\text{оп}} = - \left[ k_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_{ij}(x, t) \right]^{p_j / q_j}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (14.10)$$

Таким образом, оптимальное управление при ФОР (14.9) имеет такой же внешний вид, как при классическом функционале (9.16) (см. (9.19)). Однако  $V = V(x, t)$  здесь есть решение линейного уравнения с частными производными (14.5) (уравнения Ляпунова), в то время как при классическом функционале  $V = V(x, t)$  есть решение уравнения Беллмана (9.20). Это принципиальное отличие, сохраняющиеся для всех задач оптимизации по ФОР (в том числе для предшествующей), обуславливает широкие возможности решения основной проблемы СТАУ, как она представлена во введении.

Ввиду большого значения оптимизации по неклассическому (полуопределённому) функционалу обобщённой работы соответствующая постановка задачи и её решение через уравнение Ляпунова (14.5) именуется часто в дальнейшем *принципом минимума обобщенной работы*. Для детерминированных управляемых процессов с непрерывным временем конкретными выражениями этого принципа служат уравнения (14.1) – (14.5), а для степенной функции затрат на управление в функционале – формулы (14.5), (14.9), (14.10). Это более общие формулировки принципа минимума обобщенной работы, в сравнении с опубликованными, когда наиболее общим был случай (14.9) при  $p_j = p$ ,  $q_j = q$ ,  $j = \overline{1, r}$ .

#### 14.3. ОПТИМАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассматриваются два решения задачи оптимизации по ФОР: строгое и приближенное.



### 3.1. СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Для процесса  $x[k+1] = f[x[k]] + \varphi[x[k]]u[k]$  и ФОР

$$I = [x[k_2]] + \sum_{R=R_1}^{R_2-1} Q_3[x[k]] + \sum_{R=R_1}^{R_2-1} U_3[u[k]] + \sum_{R=R_1}^{R_2-1} U_3^*[u_{\text{он}}[k]], \quad (14.11)$$

где функция

$$U_3(u) + U_3^*(u_{\text{он}}) - \left[ \frac{\partial}{\partial u_{\text{он}}} U_3(u_{\text{он}}) \right] u \quad (14.12)$$

является положительно-определенной относительно  $u$  и обращается в нуль при  $u = u_{\text{он}}$ , дискретное уравнение Беллмана (12.3) записывается в виде

$$V_i[x[i]] = \min \left\{ Q_3(x[i]) + U_3(u[i]) + U_3^*(u_{\text{он}}[i]) + V_{i+1}[f(x[i]) + \varphi(x[i])u[i]] \right\} \\ i = k_2 - 1; \quad k_2 - 2, \dots \quad (14.13)$$

Рекуррентное функциональное уравнение (14.13) должно решаться при граничном условии

$$V_{k_2}[x[k_2]] = V_3[x[k_2]]. \quad (14.14)$$

Привлекая необходимое условие локального минимума гладкой функции, вместо (14.13) записываем

$$V_i[x[i]] = Q_3[x[i]] + U_3(u_{\text{он}}[i]) + U_3^*(u_{\text{он}}[i]) + V_{i+1}[f(x[i]) + \varphi(x[i])u_{\text{он}}[i]], \quad (14.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_{\text{он}}} U_3[u_{\text{он}}[i]] = - \frac{\partial V_{i+1}}{\partial x[i+1]} \varphi[x[i]]. \quad (14.16)$$

Учитывая, что по условию при  $u = u_{\text{он}}$  выражение (14.12) равно нулю, преобразуем (14.15) к виду

$$[x[i]] = Q_3[x[i]] + V_{i+1}f[x[i]] + \varphi(x[i])u_{\text{он}}[i] - \frac{\partial V_{i+1}}{\partial x[i+1]} \varphi[x[i]]u_{\text{он}}[i]. \quad (14.17)$$

Выражения (14.16), (14.17) описывают строгое решение задачи синтеза оптимальных управлений для указанных условий. Но для многомерных нелинейных объектов сложность выражений быстро нарастает с ростом числа шагов, а при численных формах решений быстро растёт необходимый объём памяти. Положение кажется аналогичным тому, которое имеет место при классическом функционале. Однако для уравнений (14.16), (14.17) есть несравненно более простое приближённое решение. Оно для большинства случаев, встречающихся на практике, оказывается удовлетворительным по своей близости к строго оптимальному решению. Это решение получается следующим образом.

#### 14.3.2. ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Обычно разностное уравнение (14.5)  $x[k+1] = f[x[k]] + \varphi[x[k]]u[k]$  непрерывного нелинейного объекта  $\dot{x} = f^*(x) + \varphi^*(x)u$  получается путём применения какого-либо метода численного интегрирования, например, метода Эйлера, при котором

$$x[k+1] = x[k] + \Delta t_{\text{ш}} f^*[x[k]] + \Delta t_{\text{ш}} \varphi^*[x[k]]u[k],$$

где  $\Delta t_{\text{ш}}$  – шаг численного интегрирования.

Шаг в разностных схемах или рекуррентных алгоритмах управления должен быть достаточно малым; в противном случае «чистое запаздывание», вносимое дискретностью управления, вызовет нежелательные эффекты, включая потерю устойчивости. Отсюда следует, что норма величины  $\varphi[x[k]]u[k] = \Delta t_{\text{ш}} \varphi^*[x[k]]u[k]$ , вообще говоря, мала, а величина  $f[x[k]] = x[k] + \Delta t_{\text{ш}} f^*[x[k]]$  близка к  $x[k]$  и  $x[k+1]$ . Таким образом, справедливо приближённое равенство

$$V_{i+1} \{ f[x[i]] + \varphi(x[i])u_{\text{он}}[i] \} = V_{i+1} \{ f[x[i]] \} + \frac{\partial V_{i+1}}{\partial x[i+1]} \varphi[x[i]]u_{\text{он}}[i],$$

при котором уравнение (14.17) принимает очень простую приближённую форму

$$V_i[x[i]] = Q_3[x[i]] + V_{i+1}[f[x[i]]]. \quad (14.18)$$

Решение этого рекуррентного уравнения при граничном условии (14.14) определяет согласно (14.16) *субоптимальное управление* в смысле минимума функционала (14.11).

#### 14.4. ПРИБЛИЖЁННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ УСЛОВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ФУНКЦИОНАЛА ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ

Для стохастического процесса

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u + \xi(t)$$

и наблюдения при наличии шумов (здесь не конкретизируется) минимизируется функционал в виде условного математического ожидания величины (14.2)

$$J_y = E_y[J] = \int \int_{-\infty}^{\infty} Ip(x, u, t|Z) dx du = \\ = E_y \left\{ V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} U_3[u(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} U_3^*[u_{\text{оп}}(\theta), \theta] d\theta \right\},$$

где величина (14.3) удовлетворяет тому же условию, что и в детерминированном случае.

Согласно приведённому ранее преобразованию

$$J_y = E_y \{ V[x(t_1)] \} + E_y \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[ U_3(u, \theta) + U_3^*(u_{\text{оп}}, \theta) - \frac{\partial}{\partial u_{\text{оп}}} U_3(u_{\text{оп}}, \theta) u \right] d\theta \right\}.$$

При достаточно точном оценивании текущего состояния условная плотность вероятности  $p(x, u, \theta|Z)$  близка к  $\delta$ -функции и при непрерывных функциях  $U_3^*$ ,  $\frac{\partial}{\partial u_{\text{оп}}} U_3$  функционал  $J_y$  приближенно равен

$$J_y = E_y \{ V[x(t_1)] \} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ U_3(u, \theta) + U_3^*(u_{\text{оп}}, \theta) - \frac{\partial}{\partial \hat{u}_{\text{оп}}} U_3(\hat{u}_{\text{оп}}, \theta) u \right] d\theta. \quad (14.19)$$

При этом же условии справедливо приближённое выражение

$$\frac{\partial}{\partial \hat{u}_{\text{оп}}} U_3(\hat{u}_{\text{оп}}, t) = \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \varphi(\hat{x}, t), \quad (14.20)$$

где  $V$  есть решение уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} f(\hat{x}, t) = -Q_3(\hat{x}, t) - E_y \left[ \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \xi \right] \quad (14.21)$$

при граничном условии  $V_t = t_2 = V_3(\hat{x})$ . Индексом « $\wedge$ » в (14.19), (14.20) обозначены УМО.

Из (14.19), (14.21) следует, что если величина  $E_y \left[ \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \xi \right]$  приближенно или точно равна нулю, то функционал (14.19) достигает минимального значения при  $u = \hat{u}_{\text{оп}}$ , где  $\hat{u}_{\text{оп}}$  определяется выражением (14.20), в котором  $\hat{x}(t)$  есть условное математическое ожидание истинного значения  $x(t)$ , а  $V$  определяется уравнением Ляпунова типа (14.5).

Таким образом, принцип разделения при оптимизации по ФОР справедлив в той же мере, как и при оптимизации по классическому функционалу.

#### 14.5. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ

Пусть система описывается уравнением вида

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u + \xi(t), \quad (14.22)$$

где  $\xi(t)$  – процесс типа гауссовского белого шума с матрицей интенсивностей  $Q$ . Стохастический ФОР имеет вид

$$E \left\{ V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} U_3[u(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} U_3^*[u(\theta), \theta] d\theta \right\}, \quad (14.23)$$

где соблюдается условие (14.3), а  $E$  – символ безусловного МО.

Функциональное уравнение Беллмана для задачи (14.22), (14.23) имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ Q_3(x, t) + U_3(u, t) + U_3^*(u_{\text{оп}}, t) + \frac{\partial V}{\partial t} [f(x, t) + \varphi(x, t)u] + 0,5 \text{tr} \left( Q \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x^T} \right) \right\} = 0. \quad (14.24)$$

Необходимое условие минимума по  $u$  выражения в фигурных скобках имеет вид

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u} U_3(u, t) \right]_{u=u_{\text{оп}}} + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) = 0. \quad (14.25)$$

Подставляя  $\frac{\partial V}{\partial x} \varphi$  из (14.25) в (14.24), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ U_3(u, t) + U_3^*(u_{\text{оп}}, t) - \left[ \frac{\partial}{\partial u_{\text{оп}}} U_3(u_{\text{оп}}, t) \right] u + Q_3(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + 0,5 \text{tr} \left( Q \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x^T} \right) \right\} = 0.$$

Согласно условию (14.3) это эквивалентно

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + 0,5 \text{tr} \left( Q \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x^T} \right) = -Q_3(x, t). \quad (14.26)$$

Решение уравнений (14.26) должно удовлетворять граничному условию

$$V(x, t_2) = V_3(x). \quad (14.27)$$

Итак, стохастический принцип минимума обобщённой работы может быть сформулирован следующим образом. Оптимальное управление, доставляющее минимум функционалу (14.23) на множестве решений уравнения (14.22), при выполнении условия (14.3) определяется выражением

$$u = u_{\text{оп}}, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial u_{\text{оп}}} U_3(u_{\text{оп}}, t) \right]^T = -\varphi^T(x, t) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, \quad (14.28)$$

где  $V = V(x, t)$  есть решение уравнения в частных производных (14.26) при граничном условии (14.27).

Как видно, стохастический принцип минимума обобщённой работы, в котором ищется условие минимума математического ожидания функционала по всему множеству реализаций, отличается от детерминированного ( $Q = 0$ ) случая и случая с условным средним тем, что вместо уравнения Ляпунова (14.5) здесь фигурирует уравнение (14.26), содержащее «диффузионный член»

$$0,5 \text{tr} \left( Q \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x^T} \right). \quad (14.29)$$

Из приведённой формулировки стохастического принципа минимума обобщённой работы вытекают все частные случаи, являющиеся аналогами решений соответствующих вариантов детерминированной задачи ( $Q = 0$ ).

## 14.6. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП МИНИМУМА ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ И УРАВНЕНИЕ ФПК

Выражение (14.26) напоминает уравнение ФПК для системы (14.22) без управления

$$\dot{x} = f(x, t) + \xi(t), \quad (14.30)$$

это позволяет получить следующую интерпретацию. Уравнение ФПК для логарифмической плотности вероятности после добавления к обеим частям равенства удвоенного члена (14.29) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln p + \frac{\partial \ln p}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( Q \frac{\partial^2 \ln p}{\partial x \partial x^T} \right) = \\ = -\text{tr} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \ln p}{\partial t} Q \left( \frac{\partial \ln p}{\partial x} \right)^T + \text{tr} \left( Q \frac{\partial^2 \ln p}{\partial x \partial x^T} \right). \end{aligned} \quad (14.31)$$

Для системы (14.22) определяется выражением

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u_{\text{оп}}} U_3(u_{\text{оп}}, t) \right]^T = \varphi^T(x, t) \left( \frac{\partial \ln p}{\partial x} \right)^T.$$

### Вопросы для самопроверки

1. Решение задачи минимизации критерия обобщённой работы в общем виде.
2. Оптимальные управления непрерывными детерминированными процессами. Минимизации ФОР с аддитивными:
  - функциями затрат;
  - степенными функциями затрат.
3. Оптимальные уравнения детерминированными процессами с дискретным временем.
- Строгое решение задачи оптимизации.
- Приближённое решение задачи оптимизации.
4. Приближённое разделение при минимизации условного математического ожидания функционала обобщённой работы.
5. Стохастический принцип минимума обобщённой работы.
6. Стохастический принцип минимума обобщённой работы и уравнение ФПК.

## Лекция 15

### УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО КРИТЕРИЮ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ

#### 15.1. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ ОПТИМАЛЬНОГО И СУБОПТИМАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЕНИЙ НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ ФУНКЦИОНАЛАХ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ

Основным достоинством метода синтеза оптимального по ФОР управления является возможность его эффективного использования для существенно нелинейных объектов и неквадратичных функционалов. Однако наиболее конструктивные результаты применения этого метода относятся к динамическим объектам с линейно входящим управлением.

#### 15.2. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩЕМУ УПРАВЛЕНИЮ

Для случая непрерывного времени уравнение движения такого объекта имеет вид

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u. \quad (15.1)$$

Условия, накладываемые на функции  $f$  и  $\varphi$ , а также на множество  $u \in U$ , пока оговаривать не будем. Объект управления, уравнение движения которого имеет более общий вид

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (15.2)$$

может быть приведён к форме (15.1) различными способами.

Во-первых, ряд задач управления предполагает, что синтезированные законы будут использовать значения вектора управления из достаточно малой окрестности некоторого базового значения вектора управления  $u_E$ .

Малость определяется допустимостью линеаризации функции  $f(x, u, t)$  по вектору  $u$ . Тогда, воспользовавшись известными правилами линеаризации, вместо (15.2) можно записать

$$\dot{x} = f(x, u^{\circ}, t) + \left( \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \right)_{u=u^{\circ}} \Delta u. \quad (15.3)$$

Здесь  $f(x, u^{\circ}, t)$  –  $n$ -мерная функция, вычисляемая при базовых значениях вектора управления и текущих значениях  $x$  и  $t$ , отождествляется с функцией  $f(x, t)$  уравнения (15.1);  $\left( \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \right)_{u=u^{\circ}}$  – матрица размера  $n \times r$  частных производных функции  $f(x, u, t)$  по компонентам вектора  $u$ , вычисляемых при базовых значениях вектора управления и текущих значениях  $x$  и  $t$ , она отождествляется с матрицей  $\varphi(x, t)$  уравнения (15.1);  $\Delta u$  –  $r$ -мерный вектор приращений вектора управления объекта (15.2), отождествляемый с вектором управления объекта (15.1).

Во-вторых, большинство задач управления динамическими объектами допускает переформулировку задачи в таком виде, когда оптимизируемым управлением является скорость изменения вектора управления исходной задачи. Тогда, вводя новые обозначения  $y$  –  $r$ -мерный вектор управления, заменяющий в (15.2) вектор  $u$ ;  $u$  –  $r$ -мерный новый вектор управления, соответствующий скорости изменения  $y$ , запишем

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = u.$$

Формально такой объект может быть записан в виде (15.1) при расширении вектора состояния объединением  $x$  и  $y$ . Уравнение движения такого объекта имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} u, \quad (15.5)$$

где  $0$  – матрица с нулевыми элементами;  $E$  – единичная матрица.

Матрицы уравнения (15.5) отождествляются с соответствующими матрицами (15.1).

В качестве недостатков каждого из этих способов следует отметить следующее: первый способ сужает множество  $U$  до окрестности базового значения вектора управления, второй способ приводит к расширению вектора состояния и требует переформулировки минимизируемого функционала.

### 15.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЕ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЗАТРАТ НА УПРАВЛЕНИЕ

Рассматривается задача синтеза для непрерывного объекта

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u \quad (15.6)$$

управления  $u$ , оптимального в смысле минимума функционала

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3(x, t) dt + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} (u^T K^{-1} u + u_{\text{оп}}^T K^{-1} u_{\text{оп}}) dt, \quad (15.7)$$

где  $f$  и  $\varphi$  – векторная и матричная функции указанных аргументов, определённые для всех  $t \in [t_1, t_2]$ ;  $Q_3$  и  $V_3$  – заданные положительно определённые функции указанных аргументов;  $K$  – положительно определённая матрица заданных коэффициентов.

#### 15.3.1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Пусть выполняются следующие условия:

- а) уравнение, описывающее движение объекта, линейно относительно вектора управляющих воздействий  $u$ ;
- б) минимизируемый функционал является квадратичным относительно вектора управления  $u$ ;
- в) область возможных значений управляющих воздействий является незамкнутой;
- г) решения (15.6)  $x(t) \in X$  непрерывны и непрерывно дифференцируемы на  $X$ ;
- д) на  $X \times [t_1, t_2]$  уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) = -Q(x, t), \quad (15.8)$$

которое при  $t = t_2$  принимает значение

$$V(x, t)_{t=t_2} = V_3[x(t_2)]. \quad (15.9)$$

Тогда существует единственное решение задачи оптимизации (15.6), (15.7), а вектор оптимального управления определяется соотношением

$$u_{\text{оп}} = -K\varphi^T \frac{\partial V^T}{\partial x}. \quad (15.10)$$

Здесь  $V = V(x, t)$  – вещественная скалярная функция указанных аргументов;  $\frac{\partial V}{\partial x}$  – матрица-строка, элементами которой являются частные производные  $V(x, t)$  по компонентам вектора состояния.

Решение уравнения (15.8) с условием (15.9) и последующая реализация (15.10) представляют собой содержание синтеза закона управления, оптимального по ФОР.

Перечисленным условиям может быть дана физическая интерпретация. В большинстве случаев эти условия приводят к несильным ограничениям в практических задачах. Так, вопросы удовлетворения первым двум условиям обсуждены в данной работе ранее. Приближенный учёт ограничений управлений по абсолютной величине может быть заменён соответствующим выбором  $K(t)$  в (15.7). Однако следует заметить, что при этом будет наблюдаться некоторое, обычно несущественное, недоиспользование располагаемого диапазона управляющих воздействий. Условие г) является естественным для непрерывных динамических систем и редко может вызвать затруднения.

Последнее из перечисленных условий связано с существованием положительно-определённого решения уравнения Ляпунова (15.8). На анализе этого условия остановимся несколько подробнее. Если длительность интервала  $[t_1, t_2]$  является конечной, т.е. момент окончания процесса оптимизации  $t_2$  является конечной заданной величиной, (15.8), (15.9) соответствуют типовой задаче уравнений с частными производными первого порядка. Сюда относятся случаи с заранее заданным моментом  $t_2$ , т.е. *терминальные задачи оптимизации*, и случаи со *скользящим интервалом оптимизации*, когда интервал  $[t_1, t_2]$  задаётся с постоянной длительностью, т.е.  $t_2 = t + T_{\text{оп}}$ , где  $T_{\text{оп}} = \text{const}$ .

Если же по содержанию задачи  $t_2$  отождествляется с бесконечно удалённым моментом времени, то положительно определённое значение  $V(x, t)$ , удовлетворяющее (15.8), (15.9), существует только для асимптотически устойчивых объектов. Следовательно, в нетерминальной постановке, когда вместо интервала  $[t_1, t_2]$  рассматривается  $[t_1, \infty]$ , решение задачи оптимизации (15.6), (15.7) в виде (15.8) – (15.10) определено только для асимптотически устойчивых объектов.

### 15.3.2. РЕШЕНИЕ НЕТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ И НЕЙТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для обеспечения применимости рассматриваемого метода к неустойчивым и нейтральным объектам разработан ряд способов к числу которых относятся:

- предварительное обеспечение устойчивости объекта за счёт специально введённых «стабилизирующих» обратных связей;
- преобразование переменных, при котором вектор состояния объекта представляется в виде

$$x(t) = \aleph(t)x^*(t), \quad (15.11)$$

где  $x^*$  – вновь введённый  $n$ -мерный вектор состояния;  $\aleph(t)$  – диагональная матрица достаточно быстро нарастающих функций времени.

Второй способ по существу приводит тоже к асимптотически устойчивому объекту в новых переменных, если величина  $\frac{\dot{\aleph}_i}{\aleph_i} = \frac{d}{dt} \ln \aleph > 0$  достаточно велика. Метода синтеза управления в этом случае предполагает за-

дание в новом пространстве состояния (для вектора  $x^*$ ) подынтегральных функций минимизируемого функционала  $V_3$  и  $Q_3$ , решение задачи оптимизации управления для устойчивого объекта

$$x^* = -\aleph^{-1}\aleph x^* + \aleph^{-1}f(\aleph x^*, t) + \aleph^{-1}\varphi(\aleph x^*, t)u, \quad (15.12)$$

полученного из (15.6) заменой вектора состояния в соответствии с (15.11), а также обратного переходу к исходному вектору состояния. При этом

$$u_{\text{оп}} = -K\varphi^T \frac{\partial V^T}{\partial x}, \quad (15.13)$$

где  $V(x, t) = V^*(\aleph^{-1}x, t)$ . В качестве функций  $\aleph_i(t)$  рекомендуется выбирать экспоненты.

### 15.3.3. ВАРИАНТЫ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО ПО ФУНКЦИОНАЛУ ОБОБЩЕННОЙ РАБОТЫ УПРАВЛЕНИЯ

Разработанные алгоритмы данного типа можно классифицировать следующим образом.

I. По особенностям задания функционала различают *терминальные и нетерминальные задачи*. К терминальным (по времени) относят задачи, в которых из физического содержания задачи назначен конкретный момент времени окончания процесса. Соответствующие требования формируют в  $V_3(x, t)$ . К нетерминальным относят задачи, для которых не назначается заранее момент окончания процесса. В этом случае поступают следующим образом:

- задают  $V_3(t_2)$  в виде вынужденного решения уравнения (15.8) в момент времени  $t = t_2$ ;
- назначают скользящий интервал оптимизации некоторой постоянной длительности  $T_{\text{оп}}$ , т.е.  $t_2 = t' + T_{\text{оп}}$ .

II. По особенностям представления объекта управления задачи делятся на управление *положением органов объекта* (15.1) и на управление *скоростью перемещения органов* (15.4). Исследования показали, что в прикладных задачах подход, основанный на представлении объекта в форме (15.4), дает хорошие результаты.

III. По способу реализации процесса оптимизации управления различают решение оптимизационной задачи предварительное, т.е. при проектировании системы управления, когда на период функционирования этой системы возлагается только реализация полученного закона, а точнее, его аппроксимации в пространстве  $X$ , и так называемый *совмещенный синтез управления*. В последнем случае вся оптимизационная задача решается непосредственно в процессе функционирования системы управления.

IV. По основам алгоритмического обеспечения варианты делятся на алгоритмы:

- с матричным уравнением Ляпунова (область применения этих алгоритмов ограничена линейными объектами и квадратичными функционалами);
- с фундаментальными матрицами (область применения этих алгоритмов ограничена линейными объектами и квадратичными функционалами или случаем степенных разложений соответствующих функций в (15.6) и (15.7));
- операционные (область применения ограничена задачами с небольшой длительностью интервалов оптимизации  $(t_{\text{зр}} - t)$ );
- с прогнозирующими моделями (можно полагать, что это наиболее универсальный вариант алгоритмического обеспечения).

### 15.3.4. УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ С ЧИСТЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается наиболее простой случай, когда в системе действует одинаковое для всех входов запаздывание. Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x(t-s))(t-s)u(t-s) \quad (15.14)$$

на отрезке  $[t_1, t_2]$ , где  $s$  – единое для правой части уравнения запаздывание во времени. Предполагается, что на интервале  $[t_1, t_1 + s]$  уравнение (15.14) имеет некоторое не противоречащее дальнейшему изложению решение в  $X$ . Минимизируемый функционал задается в виде

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1+s}^{t_2} Q(x, t) dt + 0,5 \int_{t_1+s}^{t_2} \left( u^T(t-s)K^{-1}u(t-s) + u_{\text{оп}}^T(t-s)K^{-1}u_{\text{оп}}(t-s) \right) dt. \quad (15.15)$$

Тогда оптимальное в смысле минимума (15.15) управление из незамкнутого множества  $U$  определится соотношением

$$u_{\text{оп}}(t) = -K\varphi^T(x(t), t) \frac{\partial V^T(x(t+s))}{\partial x(t+s)}, \quad (15.16)$$

где  $V(x, t)$  – скалярная дифференцируемая по  $t$  и  $x$  функция, удовлетворяющая на отрезке  $[t_1 + s, t_2]$  уравнению (15.8).

Реализация описанного алгоритма управления сводится к вычислению функции  $V(x, t)$ , удовлетворяющей (15.8) с ограниченным условием (15.9), и использованию упреждающих значений производных  $\partial V / \partial x_i$  (вычисленных для будущих моментов времени, сдвинутых относительно настоящих моментов времени на время  $s$ ) для

определения сигналов управления в соответствии с (15.16). На практике строгое осуществление (15.16) невозможно, так как при действии неконтролируемых возмущений неопределимо точное значение  $x(t+s)$ .

### 15.3.5. ДИСКРЕТНОЕ ВО ВРЕМЕНИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОЦЕССОМ

Применение для управления непрерывными динамическими объектами средств вычислительной техники неизбежно создаёт особые условия реализации управления. К числу основных особенностей относится квантование по времени управляющего сигнала. В этом случае вектор управления следует рассматривать как кусочно-постоянную функцию

$$u_d(t) = u_d(t_j), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad (15.17)$$

где  $t_j$  – момент формирования управляющих сигналов на  $j$ -м шаге (такте), длительность которого составляет  $\Delta t_u$ .

Для объекта (15.6) минимум функционала (15.7) на кусочно-постоянных функциях (15.17) обеспечивается лишь при условиях, что на каждом цикле от  $t_j$  до  $t_{j+1}$  функция имеет значения

$$u_d(t_j) = \left[ \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_u} K^{-1}(t) dt \right]^{-1} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_u} K^{-1}(t) u_{оп}(t) dt. \quad (15.18)$$

Для случая  $K = \text{const}$  формула (15.18) упрощается:

$$u_d(t_j) = \frac{1}{\Delta t_u} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_u} u_{оп}(t) dt. \quad (15.19)$$

Здесь  $u_{оп}(t)$  – непрерывное оптимальное управление для данной задачи.

Таким образом, оптимальное кусочно-постоянное управление на каждом такте есть среднее значение непрерывного оптимального управления на этом такте. При отсутствии точного прогнозирования непрерывного оптимального управления на такт вперед абсолютно строгое осуществление (15.18), (15.19) невозможно. Однако при достаточно малой длительности такта  $\Delta t_u$  легко осуществляются близкие приближения к (15.18), (15.19) путем экстраполяции  $u_{оп}$ .

## 15.4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА МЕТОДОМ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

Данный тип алгоритмов основан на аппроксимации решения уравнения (15.8) степенными рядами, для определения коэффициентов которых используются различные подходы.

### 15.4.1. АЛГОРИТМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Предполагается, что компоненты векторной функции  $f(x, t)$  исходного объекта (15.1) могут быть представлены степенными рядами, сходящимися во всей рассматриваемой области пространства  $X$ , т.е.

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j x_{\mathfrak{R}} + \sum_{j, \mathfrak{R}, l=1}^n a_{ij \mathfrak{R} l} x_j x_{\mathfrak{R}} x_l + \dots, \quad (15.20)$$

где  $a_*$  – постоянные коэффициенты или функции времени, одинаковые при любом расположении индексов, начиная со второго. Положительно определённые функции  $V_3$  и  $Q_3$  минимизируемого функционала в общем случае тоже задаются в виде степенных рядов:

$$V_3 = (1/2) \sum_{i, j=1}^n \rho_{ij} x_i x_j + (1/3) \sum_{i, j, \mathfrak{R}=1}^n \rho_{ij \mathfrak{R}} x_i x_j x_{\mathfrak{R}} + \dots; \quad (15.21)$$

$$Q_3 = (1/2) \sum_{i, j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + (1/3) \sum_{i, j, \mathfrak{R}=1}^n \beta_{ij \mathfrak{R}} x_i x_j x_{\mathfrak{R}} + \dots, \quad (15.22)$$

где  $\rho_*$  – постоянные коэффициенты, одинаковые при любом расположении индексов;  $\beta_*$  – постоянные коэффициенты или функции времени, не зависящие от порядка следования индексов.

Решение уравнения Ляпунова



$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = -Q \quad (15.23)$$

с граничным условием

$$V(t_2) = V_3[x(t_2)] \quad (15.24)$$

в данном случае целесообразно искать также в виде степенного ряда

$$V(x, t) = (1/2) \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j + (1/3) \sum_{i,j,\Re=1}^n A_{ij\Re} x_i x_j x_{\Re} + \dots \\ \dots + (1/M) \sum_{i,\dots,v=1}^n A_{i\dots v} \underbrace{x_i \dots x_v}_M, \quad (15.25)$$

где  $A_*$  в общем случае – функции времени, обладающие той же симметрией по индексам, что и коэффициенты (15.21), (15.22). При этом полагается, что

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j + \sum_{j,\Re=1}^n A_{ij\Re} x_j x_{\Re} + \sum_{l,j,\Re=1}^n A_{ij\Re l} x_j x_{\Re} x_l + \dots \quad (15.26)$$

сходящийся в рассматриваемой области ряд.

Для рассматриваемого случая оптимальные в смысле ФОР управления (при диагональной матрице  $K(t)$ ) имеют вид

$$u_j = -\Re_j(t) \sum_{\Re=1}^n \varphi_{\Re j} \frac{\partial V}{\partial x_{\Re}}. \quad (15.27)$$

Коэффициенты искомой функции  $V(x, t)$  в (15.27), представленной рядом (15.25), удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{A}_{\underbrace{i\dots q}_N} - \sum_{R=1}^{N-1} \frac{R!(N-R)}{(N-1)!} \sum_p^n \left\{ A_{\underbrace{p_i\dots h}_R} a_{\underbrace{p_j\dots q}_{N-R}} \right\} = -\beta_{\underbrace{i\dots q}_N} \quad (15.28)$$

с граничными условиями

$$A_{i\dots q}(t_2) = \rho_{i\dots q}, \quad i, \dots, q = \overline{1, n}. \quad (15.29)$$

Здесь фигурные скобки условно обозначают суммирование заключенного в них произведения после каждой возможной взаимной замены индексов при  $A$  и  $a$  (15.28).

#### 15.4.2. АЛГОРИТМ С МАТРИЦЕЙ КОШИ

Оптимальные коэффициенты, удовлетворяющие (15.28), могут быть также определены с помощью матрицы Коши линейного приближения объекта (8.20), которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} K(t, t') = aK(t, t') \quad (15.30)$$

при начальном условии

$$K(t, t') = E, \quad (15.31)$$

где  $a$  – начальная матрица коэффициентов  $a_{\Re}$  функций (15.20);  $E$  – единичная матрица.

Для терминальной постановки задачи (см. (15.7)) оптимальные коэффициенты определяются выражениями

$$\dot{A}_{\underbrace{i\dots q}_N} = \sum_{v,\dots,\mu=1}^n K_{vi}(t_2, t), \dots, K_{\mu q}(t_2, t) \rho_{v\dots\mu} + \\ + \sum_{v,\dots,\mu=1}^n \int_t^{t_2} K_{vi}, \dots, K_{\mu q} \left[ \beta_{\underbrace{v\dots\mu}_N} - \sum_{\Re=1}^{N-2} \frac{R!(N-R)}{(N-1)!} \sum_{p=1}^n \left\{ A_{\underbrace{pv\dots n}_R} a_{\underbrace{p\Re\dots\mu}_{N-R}} \right\} \right] dt. \quad (15.32)$$

Здесь фигурные скобки используются так же, как в (15.28).

Соотношения (15.28) и (15.32) в общем случае приводят к громоздким вычислительным операциям. В первом случае это интегрирование системы дифференциальных уравнений высокой размерности, а во втором – интегрирование достаточно сложных комбинаций функций времени.

#### 15.4.3. АЛГОРИТМ С «ИНДЕКСИРОВАННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ»

Основанные на (15.28) и (15.32) процедуры синтеза управлений для нелинейных объектов типа (15.20) высокой размерности весьма трудоёмки. Более экономными в вычислительном отношении являются процедуры, построенные на специально организованном анализе индексов значимых (отличных от нуля) коэффициентов степенных рядов (15.20) – (15.22), (15.25).

Для формализации таких процедур вводится понятие *индексированного множества* и определяются для них специальные операции (8.23), (8.24).

Индексированное множество (ИМ) – множество элементов с неповторяющимися индексами. При этом различают симметричное ИМ, элементы которого не изменяются при перестановке индексов (при формировании соответствующих ИМ из коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  элементы, отличающиеся перестановкой индексов, складываются алгебраически), и квазисимметричное ИМ, элементы которого не изменяются при перестановке любых индексов, кроме первых (при формировании ИМ из коэффициентов  $a$  элементы, отличающиеся перестановкой второго, третьего и последующих индексов, складываются алгебраически).

*Индексное число* ИМ, обозначенное  $I$ , – количество симметричных индексов, уменьшенное на единицу.

Суммой двух ИМ

$$a(I) + b(I) = c(I)$$

с индексным числом  $I$  называется ИМ, которое объединяет все элементы слагаемых множеств, причём при совпадении совокупностей индексов элементы суммируются алгебраически. Свойства суммы: симметричность при симметричных слагаемых; коммутативность и ассоциативность; неизменность индексного числа; присутствие какого-либо определённого индекса при элементе в том и только том случае, если он присутствовал при элементе слагаемого.

Условным произведением симметричного ИМ на квазисимметричное ИМ

$$b(I_b) a(I_a) = c(I_c)$$

называется такое симметричное ИМ, элементами которого являются попарные алгебраические произведения элементов перемножаемых ИМ, у которых первый индекс элемента квазисимметричного ИМ совпадает с одним из индексов элемента симметричного ИМ. Индексы результата перемножения образованы объединением симметричных индексов сомножителей без одного индекса, равного первому индексу элемента квазисимметричного множества. Результаты перемножения с одинаковыми индексами суммируются алгебраически. Примером может быть симметричное ИМ  $b(2): \{b_{\alpha\beta}, b_{\alpha\alpha}, b_{\alpha\beta\gamma}, b_{\gamma\gamma}\}$ ; квазисимметричное ИМ  $a(1): \{a_{\alpha\beta}, a_{\beta\beta}, a_{\alpha\alpha}\}$ ; произведение – симметричное ИМ  $c(3): \{c_{\beta\beta\beta} = b_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\beta} = 2b_{\alpha\alpha} a_{\alpha\beta} + 2b_{\alpha\beta} a_{\beta\beta} + b_{\alpha\beta} a_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta\gamma} = b_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta}, c_{\alpha\alpha\beta} = b_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} + 2b_{\alpha\alpha} a_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta\gamma} a_{\beta\beta} + b_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\alpha}\}$ . Свойства произведения: некоммутативность; неассоциативность (все сомножители, кроме одного, должны быть квазисимметричными, а операция выполняется последовательно для симметричного и одного из квазисимметричных сомножителей); дистрибутивность умножения по отношению к сложению; равенство индексного числа произведения сумме индексных чисел сомножителей; присутствие какого-либо определённого индекса при элементе произведения в том и только том случае, если он содержится в числе симметричных индексов элемента квазисимметричного ИМ или в числе индексов элемента симметричного ИМ с учетом исключения одного индекса, равного первому индексу элемента квазисимметричного ИМ.

Синтез управления, а точнее определение коэффициентов функции (15.25), осуществляется следующим образом. Формальным введением дополнительной переменной  $x_{n+1} \equiv 1$  нелинейный объект управления приводится к виду, когда коэффициенты  $a_{ij}$  в (15.20) с двумя индексами равны нулю. Далее вводится симметричное ИМ временных функций  $\sigma^m(I)$  с элементами

$$\sigma_{i\dots s}^m = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \rho_{i\dots s} + \beta_{i\dots s} \frac{\tau}{m} \right] \tau^{m-1}, \quad (15.33)$$

где  $\tau = t_2 - t$  – относительное обратное время. Тогда для стационарного объекта и стационарного функционала с учетом (15.33), правил выполнения введенных операций и перечисленных свойств множество коэффициентов ряда (15.25) с заданным индексным числом ( $I = 1, 2, \dots$ ) может быть определено соотношением

$$A(I) = \sigma^1(I) - \sum_{k=1}^{I-1} \sigma^2(k) a(N-k) + \sum_{k=1}^{I-1} \sigma^3(k) a(N-k-1) a(1) + \dots \\ \dots + (-1)^{I-1} \sigma^1(1) \underbrace{a(1) \dots a(1)}_{I-1}. \quad (15.34)$$

Дальнейшее развитие этого направления, а также исследование свойств симметрии (по совокупности существенных коэффициентов ряда (15.20)).

### Вопросы для самопроверки

1. Приведение задачи к линейно входящему управлению.
2. Приведение задачи к линейно входящему управлению.
3. Решение задачи оптимизации при функционале обобщенной работы с квадратичной функцией затрат на управление.
  - Оптимальное управление непрерывными детерминированными процессами.
  - Решение нетерминальной задачи для неустойчивых и нейтральных систем.
  - Варианты алгоритмов оптимального по ФОР управления.
  - Управление объектом с чистым запаздыванием.
  - Дискретное во времени кусочно-постоянное управление непрерывным процессом.
4. Решение уравнения Ляпунова методом степенных рядов и соответствующие законы. Алгоритм:
  - с дифференциальными уравнениями;
  - с матрицей Коши;
  - с «индексированными множествами».

## Лекция 16

### МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

#### 16.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

Операционный метод решения уравнения Ляпунова основан на многократном применении некоторого оператора. В данном случае используется дифференциальный оператор.

##### 16.1.1. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ

Вводится линейный дифференциальный оператор

$$L = \sum_{i=1}^n f_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (16.1)$$

определённый на всем пространстве. Тогда уравнение Ляпунова (15.8) может быть записано в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + LV = -Q, \quad V(t_2) = V_3[x(t_2)]. \quad (16.2)$$

С помощью введённого оператора и функций минимизируемого функционала генерируется последовательность скалярных функций  $\{V_\nu\}$ , элементы которой определяются соотношениями

$$(16.3)$$

Если функции  $f$ ,  $V_3$  и  $Q_3$  в (16.1) и функционале (15.7) таковы, что для области их задания  $X \times [t_1, t_2]$  можно указать хотя бы один такой элемент последовательности  $V_\mu$  с порядковым номером  $\mu$ , которому оператор  $L$  ставит в соответствие функцию, удовлетворяющую неравенству

$$|LV_\mu| \leq \varepsilon(x, t), \quad (16.4)$$

где  $\varepsilon$  – положительная достаточно малая на  $X \times [t_1, t_2]$  функция, то со степенью точности, определяемой (16.4), решение уравнения Ляпунова (16.2) в задаче оптимизации (15.6) – (15.10) может быть представлено суммой ряда

$$V_{\|\mu\|} = V_3 + \sum_{v=1}^{\mu} V_v. \quad (16.5)$$

При этом (16.5) является точным решением уравнения

$$\frac{\partial V_{\|\mu\|}}{\partial t} + LV_{\|\mu\|} = -Q_3 + \Delta Q_{\|\mu\|}, \quad V_{\|\mu\|}(t_2) = V_3[x(t_2)], \quad (16.6)$$

которое отличается от (16.2) наличием функции  $\Delta Q_{\|\mu\|} = LV_{\mu}$ . Следовательно, использование в управлении (15.27) функции  $V_{\|\mu\|}$  соответствует минимизации функционала (15.7), в котором заданная функция  $Q_3$  заменена на  $Q = Q_3 - \Delta Q_{\|\mu\|}$ , а  $V$  – на  $V_{\|\mu\|}$ . Если же выполняется (16.4), то разница между функциями  $Q_3$  и  $Q$  отвечает требованиям малости и можно говорить о близости заданного и действительного минимизируемого функционала.

### 16.1.2. СХОДИМОСТЬ ОПЕРАЦИОННОГО РЯДА. СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ

Указанное выше условие возможности замены точного решения уравнения Ляпунова приближённым решением (16.5) является относительно слабым. Если потребовать от последовательности  $\{V_v\}$  выполнения более сильных условий, а именно обеспечения сходимости ряда (16.5) вместе с частными производными  $\frac{\partial V_{\|\mu\|}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial V_{\|\mu\|}}{\partial x}$  при  $\mu \rightarrow \infty$ , то сумма этого ряда является точным решением уравнения (16.2).

Для стационарного объекта и функционала, у которых функции  $f$  и  $Q_3$  не зависят явным образом от времени, ряд (16.5) может быть представлен в виде

$$V_{\|\mu\|} = V_3 + \sum_{v=0}^{\mu-1} \frac{(t_2 - t)^{v+1}}{(v+1)!} L^v (LV_3 + Q_3). \quad (16.7)$$

В большинстве случаев нестационарную систему можно привести к стационарной путём введения дополнительных координат и вместо (16.5) использовать (16.7).

Достаточным условием равномерной сходимости ряда (16.7) в некоторой области  $G$  пространства  $X$  является предположение о том, что функции  $f$ ,  $V_3$  и  $Q$  таковы, что для области  $G$  можно указать такое положительное число  $D_0$  и целые  $d \geq 0$  и  $\mu > d$ , при которых  $\forall x \in G$  и для натуральных чисел  $v \geq \mu$  справедливо соотношение

$$|L^v (LV_3 + Q_3)| \leq A_{v+1}^d D_0 |LV_3 + Q_3|, \quad (16.8)$$

где  $A_{v+1}^d$  – число размещений из  $v+1$  по  $d$  элементов.

Действительно, остаток ряда (16.7) при условии (16.8) удовлетворяет неравенству

$$R_{\mu,d} [D_0(t_2 - t)] \leq D_0^{d-1} (t_2 - t)^d \times \\ \times \left\{ \exp[D_0(t_2 - t)] - \sum_{l=0}^{\mu-d-1} \frac{D_0^l (t_2 - t)^l}{l!} \right\} |LV_3 + Q_3|$$

и стремится к нулю при  $\mu \rightarrow \infty$ . Равномерно сходятся и ряды  $\frac{\partial V_{\|\mu\|}}{\partial t}$ ,  $LV_{\|\mu\|}$ .

Для оценивания сверху допускаемой при ограниченных изменениях погрешности в определении функции  $\sigma$  можно пользоваться соотношениями

$$\sigma_{R_{\|\mu\|}} = \frac{|R_{\mu,d} [D_0(t_2 - t)]|}{|LV_3 + Q_3|} \leq D_0 (t_2 - t)^d \left\{ \exp[D_0(t_2 - t)] - \sum_{l=0}^{\mu-d-1} \frac{D_0^l (t_2 - t)^l}{l!} \right\} \quad (16.9)$$

или

$$\sigma_{Q_{\|\mu\|}} = \frac{|\Delta Q_{\|\mu\|}|}{|LV_3 + Q_3|} \leq \frac{\mu D_0^{\mu-1} (t_2 - t)^{\mu-1}}{(\mu - d)!}, \quad (16.10)$$

последнее из которых предполагает, что зависимость решения уравнения (16.2) от подынтегральной функции  $V(x, t)$  функционала непрерывна и удовлетворяет условию Липшица.

Непосредственно из (16.9) и (16.10) видно, что малые значения погрешности обеспечиваются на малых временных интервалах  $[t_1, t_2]$ . С ростом же  $D_0(t_2 - t)$  верхние границы ошибки оптимизации быстро увеличиваются. Увеличение числа вычисляемых членов обеспечивает как уменьшение величин  $\sigma_{R_{\|\mu\|}}$  и  $\sigma_{Q_{\|\mu\|}}$ , так и расширение приведённого интервала  $D_0(t_2 - t)$  с относительно малыми погрешностями оптимизации. Всё это указывает на квазилокальный (по времени оптимизации) характер оптимального управления, осуществляемого с помощью операционного алгоритма. Другими словами, применение этого алгоритма наиболее эффективно в задачах с небольшим временем оптимизации  $t_2 - t$  в предельном случае, когда  $\mu \rightarrow \infty$ , погрешности  $\sigma_{R_{\|\mu\|}}$  и  $\sigma_{Q_{\|\mu\|}}$  исчезают, что соответствует приближению к точному решению задачи синтеза.

### 16.1.3. ОПЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Операционный алгоритм управления (субоптимального управления) объектом типа (15.6) сводится к реализации (16.5), где используются приближённые значения функций  $V(x, t)$ , полученные вычисленные ряда (16.5) или в стационарном случае – ряда (16.7). Операционный алгоритм допускает как аналитическое решение задачи, так и числовую реализацию на ЦВМ. В последнем случае достаточно вычислить числовые значения  $V_{\|\mu\|}$  в определённых точках пространства  $X$ .

Описанный выше алгоритм основан на использовании оператора, предусматривающего дифференцирование по всем компонентам вектора состояния  $X$ . Это часто сопряжено с большим объёмом вычислений, затрудняющим как аналитическую, так и числовую реализацию операционного алгоритма для объектов больших размерностей.

Алгоритм с дифференцированием по длине дуги вдоль траектории свободного движения предполагает наличие в  $X$  евклидовой нормы вектора состояния. Тогда, вводя в скалярную величину  $s$ , характеризующую перемещение конца вектора состояния вдоль траектории свободного (т.е. неуправляемого,  $u = 0$ ) движения объекта (15.6), переходят к линейному оператору

$$S = \dot{s} \frac{\partial}{\partial s}. \quad (16.11)$$

Здесь  $\dot{s}$  – скорость перемещения конца вектора  $x$  вдоль траектории свободного движения;  $\frac{\partial}{\partial s}$  – оператор дифференцирования вдоль единственного направления в  $X$ , совпадающего с касательной к траектории свободного движения. Направление касательной задается вектором

$$j = \frac{1}{\dot{s}} f(x, t). \quad (16.12)$$

Уравнение Ляпунова записывается в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + SV = -Q, \quad V(t_2) = V_3[x(t_2)], \quad (16.13)$$

а его решение по аналогии с (15.31) может быть приближённо вычислено суммированием ряда (16.5) или (16.7) с той лишь разницей, что вместо оператора  $L$  следует использовать оператор  $S$ , осуществляющий дифференцирование в одномерном подпространстве в общем случае многомерного пространства состояний.

Алгоритм с дифференцированием по времени вдоль траектории свободного движения связан с введением дифференциального оператора  $D$ , который ставит в соответствии искомой оптимизирующей функции  $V(x, t)$  другую скалярную функцию, равную скорости изменения во времени функции  $V(x, t)$ , если это изменение обусловлено изменением неуправляемого (свободного движения) состояния объекта при  $u = 0$ . В этом случае уравнение Ляпунова записывается в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + DV = -Q, \quad V(t_2) = V[x(t_2)]. \quad (16.14)$$

Простота оператора  $D$  обуславливает вычислительные преимущества операционного алгоритма (16.5), (16.7), в котором вместо  $L$  используется  $D$ . При этом все вычисления проводятся на свободном движении объекта. Применение данного алгоритма в аналитической форме основывается на аналитическом решении уравнения

$$\dot{\bar{x}} = f(x, \tau). \quad (16.15)$$

Если известно достаточное число раз дифференцируемое решение  $X[x(t), t, \tau]$  этого уравнения, проходящее через точку текущего состояния  $x(t)$  объекта, то на этом решении соответствующие функции стационарного функционала примут вид  $V_3(X[x(t_2), t, \tau])$  и  $Q_3(X[x(t_2), t, \tau])$ . Здесь буквой  $\tau$  обозначено время свободного движения. Решением уравнения (16.4), представленным рядом (16.7), в этом случае будет

$$V(t) = V_3(X[x(t_2), t, \tau])_{\tau=t} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(t_2-t)^v}{v!} \left[ \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} V_3(X[x(t_2), t, \tau]) + \frac{\partial^{v-1}}{\partial \tau^{v-1}} Q_3(X[x(t_2), t, \tau]) \right]_{\tau=t}. \quad (16.16)$$

## 16.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

В основе большой группы алгоритмов оптимального по ФОР управления, так называемых алгоритмов с прогнозирующей моделью, лежит применение для решения управления Ляпунова (15.8) с граничным условием (15.9) метода характеристик, называемого также методом Коши или первым методом Якоби.

### 16.2.1. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПО ФУНКЦИОНАЛУ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ

Если воспользоваться обозначением

$$H\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, t\right) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + Q_3(x, t), \quad (16.17)$$

где  $H$  – гамильтониан, то для искомой интегральной поверхности управления в частных производных (15.8) можно записать в общем виде как уравнения характеристик

$$\dot{x} = -\left[\frac{\partial H}{\partial p}\right]^T, \quad \dot{p} = -\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^T, \quad (16.18)$$

где введено обозначение  $p = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T$  – вектор частных производных искомой функции  $V(x, t)$  по компонентам вектора  $x$  и  $X$ .

При этом полная производная функции  $V(x, t)$  на характеристиках (интегральных кривых, удовлетворяющих уравнениям (16.18)) определяется соотношением

$$\dot{V} = \frac{\partial H}{\partial p} p - H. \quad (16.19)$$

Граничные условия для (16.18), (16.19) к уравнению Ляпунова (15.8) дают

$$\dot{x} = f(x, t); \quad (16.20)$$

$$\dot{p} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T p - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^T; \quad (16.21)$$

$$\dot{V} = -Q(x, t). \quad (16.22)$$

Полагая известным текущее состояние объекта, можно определить все необходимые граничные условия для (16.18) – (16.22). При известном  $x(t)$  детерминированное уравнение (16.20) однозначно определяет состояние объекта в момент  $t_2$ . Подстановка  $x(t_2)$  в (16.22) даёт граничное условие для скалярного уравнения (16.22), а предварительное дифференцирование (16.20) по компонентам  $x$  с последующей подстановкой  $x(t_2)$  даёт граничное условие для (16.21).

Принципиальной особенностью уравнений (16.20) – (16.22), обусловленной структурой уравнения Ляпунова, является то, что они связаны со «свободным» движением объекта, т.е. движением, описываемым (15.6) при  $u = 0$ .

Другой принципиальной особенностью, в сравнении с оптимизацией на основе классических функционалов, является отсутствие двухточечной краевой задачи при решении уравнений характеристик (16.20) – (16.21). Это, как многократно отмечалось выше, создает широкие возможности применения принципа минимума обобщённой работы.

Алгоритмы оптимального по ФОР управления, связанные с реализацией (16.20) – (16.22), (15.10), в той или иной форме прогнозируют свободное ( $u = 0$ ) движение объекта управления на интервале  $[t, t_2]$  с помощью (16.20), что и послужило основанием для их названия.

## 16.2.2. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ

Алгоритм с прогнозирующей моделью может иметь разнообразные применения на стадии проектирования системы. Рассмотрим один из вариантов такого применения.

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что структура системы управления выбрана на основе предварительного анализа, инженерных и экономических соображений и т.д. Требуется определить оптимальные значения некоторых параметров, постоянных во времени или настраиваемых в функции параметров среды. Тогда можно записать уравнение замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x, a), \quad (16.23)$$

где  $a$  – вектор настраиваемых параметров, уравнение настройки параметров

$$\dot{a} = u_a \quad (16.24)$$

и минимизируемый ФОР

$$I_a = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q(x, t) dt + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} (u_a^T K^{-1} u_a + u_{a.оп}^T K^{-1} u_{a.оп}) dt. \quad (16.25)$$

Сформулированная задача аналогична (15.5), (15.7), и для её решения могут применяться различные алгоритмы, однако наиболее подходящими представляются алгоритмы с прогнозирующими моделями. В качестве начальных значений вектора параметров могут принимать произвольные значения этого вектора из допустимой области.

В детерминированном случае при условии  $V_3 = 0$  и отсутствии явной зависимости функции  $Q_3$  от вектора параметров  $a$  (что вполне оправдано для задач предварительного параметрического синтеза законов управления, когда переходные процессы, связанные с изменением  $a$ , не имеют практического значения) метод характеристик даёт вместо (16.20) – (16.22) уравнения

$$\dot{x} = f(x, a); \quad (16.26)$$

$$\dot{p}_x = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T p_x - \left(\frac{\partial Q_3}{\partial x}\right)^T; \quad (16.27)$$

$$\dot{p}_a = -\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^T p_x; \quad (16.28)$$

$$\dot{V} = -Q_3(x, t), \quad (16.29)$$

где  $p_x = \partial V / \partial x$ ,  $p_a = \partial V / \partial a$ .

Решение данной задачи включает интегрирование на заданном интервале  $[t, t_2]$  замкнутой системы уравнений управляемого объекта (16.26) при некоторых фиксированных значениях параметров  $a$  (или испытание на этом же интервале реальной системы с соответствующими настройками параметров). Затем на полученных процессах  $x^a(t)$  с использованием (16.27), (16.28) или (16.29) определяются корректирующие управления

$$u_{a.оп} = -K \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^T = -K p_a, \quad (16.30)$$

в соответствии с которыми происходит настройка параметров. Скорость настройки параметров во многом определяется выбором элементов матрицы  $K$ . В практических задачах рекомендуется выбирать достаточно малые значения этих элементов.

В результате применения алгоритмов с прогнозирующими моделями, реализующими (16.26) – (16.30), получается кусочно-линейная

(с шагом, равным длине цикла вычислений) программа  $a(t)$  и кусочно-постоянная программа  $u_a(t)$ . С точностью до переходных процессов на начальном участке интервала  $[t, t_2]$  и ошибок квантования по циклам эти программы совпадают с оптимальными.

### Вопросы для самопроверки

1. Решение уравнения Ляпунова операционным методом и соответствующие законы управления.
    - Операционный метод в задаче оптимизации управления.
    - Сходимость операционного ряда. Стационарный случай.
- Операционные алгоритмы управления.
2. Решение уравнения Ляпунова методом характеристик и соответствующие законы управления.
    - Метод характеристик в задаче оптимизации по ФОР.
    - Применение алгоритма с прогнозирующей моделью на стадии проектирования системы.

## Лекция 17

### УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО ФУНКЦИОНАЛУ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ (АКОР). ЧИСЛЕННЫЕ АСПЕКТЫ

Управление линейными процессами является частным, но весьма важным случаем. Получаемые решения характеризуются, как правило, завершённостью. Они в наибольшей степени доступны для реализации.

#### 17.1. ОБЩИЙ ЗАКОН ОПТИМАЛЬНОГО ПО КРИТЕРИЮ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМ ПРОЦЕССОМ, ВЫРАЖЕННЫЙ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Уравнения линейного объекта запишутся в виде

$$\dot{x}_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{\mathfrak{R}=1}^r b_{i\mathfrak{R}} u_{\mathfrak{R}}, \quad (17.1)$$

где коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{i\mathfrak{R}}$  постоянны для стационарных объектов и являются функциями времени для нестационарных объектов. В матричной форме уравнения линейного объекта записываются в виде

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (17.2)$$

где  $x$ ,  $u$  – векторы (матрицы-столбцы) соответствующих размерностей;  $a$ ,  $b$  – квадратная и прямоугольная матрицы постоянных или изменяющихся во времени коэффициентов. Функции  $Q_3$  и  $V_3$  функционала для линейного объекта часто задаются в виде положительно определённых квадратичных форм:

$$Q_3 = 0,5 \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j = 0,5 x^T \beta x;$$

$$V_3 = 0,5 \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} x_i x_j = 0,5 x^T \rho x. \quad (17.3)$$

Здесь  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$  – заданные коэффициенты (в общем случае функции времени);  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$  – заданные коэффициенты.

Таким образом, задачу (16.1) – (16.3) можно рассматривать как частный случай (15.20) – (15.22).

Решение уравнения Ляпунова (15.1) целесообразно искать в виде квадратичной формы

$$V = 0,5 \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j = 0,5 x^T A x, \quad (17.4)$$

где  $A = A^T$  – матрица неизвестных пока коэффициентов.

В рассматриваемом случае уравнение (15.1) может быть записано в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = -Q \quad (17.5)$$



или с учётом (17.3) и (17.4)

$$\dot{x}^T Ax + x^T Aax + x^T a^T Ax = -x^T \beta x.$$

Очевидно, что если это скалярное уравнение справедливо для произвольного вектора  $x$ , то вместо него можно использовать матричное уравнение для коэффициентов

$$\dot{A} + Aa + a^T A = -\beta \quad (17.6)$$

с граничным условием  $A(t_2) = \rho$ . В данном случае оптимальное управление (15.10) приводится к виду

$$u_{\text{оп}} = -Kb^T Ax, \quad (17.7)$$

где  $A = A(t)$  – решение матричного уравнения (17.6).

Решение задачи АКОР сводится к решению уравнения (17.6) и формированию управления (17.7).

### 17.2. ПРЯМОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЯ

Один из основных способов решения задачи АКОР заключается в решении линейного уравнения (17.6) интегрированием в обратном времени от конечного  $t_2$  (при условии  $A(t_2) = \rho$ ) до текущего момента  $t$ . В отдельных случаях удастся получить аналитическое решение, но в большинстве случаев (и особенно для нестационарных задач) широко используются вычислительные методы. Определённая сложность связана с необходимостью наличия информации о будущих значениях коэффициентов в (17.1) и (17.3). При неограниченной (на практике – достаточно большой) длительности интервала оптимизации  $[t, t_2]$  (т.е. при  $t_2 \rightarrow \infty$ ) возникает проблема получения положительно определённой матрицы  $A$  искомым коэффициентов управления для неустойчивого объекта.

В общем случае матрица коэффициентов закона управления (17.7) является нестационарной, при этом

$$u_{\text{оп}} = -K(t)b^T(t)A(t_2, t)x. \quad (17.8)$$

Если же коэффициенты в (17.1) и (17.3) не зависят от времени, то решение уравнения (17.6) в общем случае зависит от относительного времени  $t_2 - t$  и закон управления (16.7) остаётся нестационарным

$$u_{\text{оп}} = -Kb^T A(t_2 - t)x. \quad (17.9)$$

Стационарный закон управления имеет место, во-первых, при задании скользящего интервала оптимизации, когда  $t_2 = t + T_{\text{оп}}$ , где  $T_{\text{оп}}$  – заданное постоянное время, и, во-вторых, при значительных длительностях интервала  $[t, t_2]$  и устойчивости объекта, когда решение (17.6) достигает установившегося значения.

### 17.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ КОШИ

Матрицей Коши для объекта называется квадратная невырожденная матрица  $K(t, t')$ , удовлетворяющая уравнению

$$\dot{K}(t, t') = aK(t, t'); \quad K(t', t') = E, \quad (17.10)$$

где точкой отмечена операция дифференцирования по  $t$ .

Решение уравнения (17.6) записывается следующим образом:

$$A(t) = K^T(t_2, t)\rho K(t_2, t) + \int_t^{t_2} K^T(t', t)\beta(t')K(t', t)at'. \quad (17.11)$$

В этом случае синтез закона управления заключается в определении  $K(t, t')$  интегрированием (17.10) и вычислении (17.11), что в общей сложности эквивалентно интегрированию  $n^2 + n(n+1)/2$  скалярных уравнений. Для стационарного объекта уравнение (17.10) может решаться один раз предварительно, а (17.11) требует вычисления для каждого текущего относительно времени  $t_2 - t$ .

Данный метод позволяет использовать полученные экспериментально матрицы  $K(t, t')$  объекта, и благодаря этому можно исключить операцию идентификации коэффициентов уравнений объекта.

## 17.4. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЯ

В случае назначения достаточно большой длительности интервала оптимизации  $[t, t_2]$ , при которой интегрирование (17.6) даёт установившееся значение (исходный объект полагается устойчивым), можно воспользоваться непосредственным вычислением установившегося решения уравнения (17.6). Это решение удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$Aa + a^T A = -\beta. \quad (17.12)$$

Часто такой подход даёт существенный выигрыш в объёме вычислений. Уравнение (17.12) приводится к нормальному виду

$$\tilde{a}\tilde{A} = -\tilde{\beta} \quad (17.13)$$

специальным формированием расширенной квадратной матрицы  $\tilde{a}$  и матриц-столбцов  $\tilde{A}$  и  $\tilde{\beta}$  размерности  $n(n+1)/2$ . Правило формирования предусматривает введение четырёхиндексного обозначения элементов  $a_{(ij)(kl)}$ , где  $(ij)$  рассматривается как единый номер строки, а  $(kl)$  – соответственно как номер столбца. Полагается, что всегда  $i \leq j, k \leq l$ . Элементы матрицы  $\tilde{a}$  определяются соотношением

$$a_{(ij)(kl)} = c_{(ij)(kl)} + d_{(ij)(kl)}, \quad (17.14)$$

где

$$c_{(ij)(kl)} = \begin{cases} a_{lj} & \text{при } i = k; \\ a_{kj} & \text{при } i = l \neq k; \\ 0 & \text{при } i \neq k, i \neq l; \end{cases} \quad d_{(ij)(kl)} = \begin{cases} a_{ki} & \text{при } j = l; \\ a_{ki} & \text{при } j = k \neq l; \\ 0 & \text{при } j \neq k, j \neq l. \end{cases} \quad (17.15)$$

Элементы матриц-столбцов  $\tilde{A}$  и  $\tilde{\beta}$  размещаются в соответствии с введённой индексацией, т.е.  $[\tilde{A}_{(kl)}]$  и  $[\tilde{\beta}_{(kl)}]$ .

Из (17.13) следует решение (в силу невырожденности  $\tilde{a}$ )

$$\tilde{A} = \tilde{a}^{-1} \tilde{\beta}. \quad (17.16)$$

## 17.5. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АКОР ПО КРИТЕРИЮ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ

Возрастающая размерность рабочих моделей автоматизируемых систем, с одной стороны, и существенный прогресс микропроцессорной техники – с другой, выдвигают дополнительные требования к уже существующим методам оптимизации и требует разработки новых, использование которых позволяет получить результаты в рамках имеющихся средств обработки информации.

Одним из современных, развивающихся методов решения такого рода задач большой размерности является теория многоуровневого иерархического управления. Идея решения здесь состоит в декомпозиции и формировании максимально упрощённых локальных задач, составляющих нижний уровень управления, с координацией последних для обеспечения решения всей задачи.

Использование для иерархических многоуровневых систем принципа минимума обобщённой работы позволяет существенно облегчить решение задачи синтеза и машинной реализации, найти оптимальные стратегии управления с уменьшенным объёмом вычислений на нижнем уровне управления, т.е. приспособленные для реализации на малых ЭВМ с ограниченными ресурсами.

### 17.5.1. МНОГОУРОВНЕВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛУ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ

Рассматривается линейная система большой размерности

$$\dot{x} = ax + bu; \quad x(t_0) = 0, \quad (17.17)$$

которая разбивается на  $N$  взаимосвязанных подсистем

$$\dot{x}_{(i)} = a_{(i)}x_{(i)} + b_{(i)}u_{(i)} + \pi_{(i)}; \quad (17.18)$$

$$\pi_{(i)} = \sum_{i'/j} a_{(ij')}x_{(j)}, \quad x_{(i)}(t_1) = x_{(i)0}. \quad (17.19)$$

Здесь

$$x = x(t) = [x_{(1)}^T(t) \dots x_{(N)}^T(t)]^T - n\text{-мерный вектор состояний};$$

$$u = u(t) = [u_{(1)}^T(t) \dots u_{(N)}^T(t)]^T - r\text{-мерный вектор управлений};$$

$$\pi = \pi(t) = [\pi_{(1)}^T(t) \dots \pi_{(N)}^T(t)]^T - n\text{-мерный вектор взаимосвязей}.$$

Каждая подсистема на первом уровне управления с помощью локальных управляющих устройств (ЛЛУ<sub>*i*</sub>,  $i = \overline{1, N}$ ), которые, в свою очередь, координируются подсистемой верхнего уровня.

Задача управления состоит в определении управлений  $u_{(i)}$  по подсистемам  $i = \overline{1, N}$ , минимизирующих глобальный функционал всей системы

$$I_a = 0,5 \int_{t_1}^{t_2} [x^T(\theta) \beta x(\theta) + u^T(\theta) K^{-1} u(\theta)] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N x_{(i)}^T(\theta) A_{(i)}(\theta) b_{(i)} K^{-1} b_{(i)}^T A_{(i)}(\theta) x_{(i)}(\theta) d\theta, \quad (17.20)$$

где  $\beta$  и  $K$  – заданные блочно-диагональные матрицы соответствующих размеров;  $A_{(i)}$  – матрицы, определяемые из решений уравнений Ляпунова.

Найденные локальные оптимальные управления имеют вид

$$u_{(i)}(t) = -K_{(i)} b_{(i)}^T A_{(i)} x_{(i)}(t) - K_{(i)} b_{(i)}^T f_{(i)}(t); \quad (17.21)$$

$$\dot{A}_{(i)} + A_{(i)} a_{(i)} + a_{(i)}^T A_{(i)} + \beta_{(i)} = 0; \quad (17.22)$$

$$\dot{f}_{(i)} = (A_{(i)} b_{(i)} K^{-1} b_{(i)}^T - a_{(i)}^T) f_{(i)} + \sum_{j \neq i} a_{ji} \gamma_j(t) - A_{(i)} \pi_{(i)}. \quad (17.23)$$

Для получения локальных оптимальных управлений требуется решать, как видно,  $\sum_i 0,5 n_i (n_i + 1)$  линейных, а не нелинейных, как обычно, дифференциальных матричных уравнений;  $f_{(i)}(t)$  является функцией состояний всех подсистем. Переменные  $\pi_{(i)}$  и  $\gamma_{(i)}$  определяются итеративно подсистемами верхнего уровня.

Ранее исследованы двухуровневые структуры системы, когда на верхнем уровне итеративно определяются множители  $\gamma_{(i)}$  и взаимосвязи  $\pi_{(i)}$  и затем передаются нижним подсистемам. В рассмотренных трёхуровневых структурах управления для дискретных динамических систем на втором уровне определяются переменные  $f_{(i)}$  и  $\pi_{(i)}$ , а множители  $\gamma_{(i)}$  уточняются итеративно на третьем уровне. Доказана сходимость трёхуровневых алгоритмов управления.

## 17.5.2. МНОГОУРОВНЕВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

Если на функцию штрафа в квадратичном функционале наложены жёсткие требования и её нельзя изменять, то синтезированные по ФОР алгоритмы для исходного функционала будут субоптимальными. В работе предлагается подход к построению иерархических систем, лишенный этого недостатка. Алгоритмы находятся из условия оптимизации квадратичного функционала с заданной матрицей коэффициентов. При этом не только сохраняются достоинства метода синтеза по ФОР, но и ещё более упрощается вычислительная сторона определения оптимальных управлений на нижнем уровне.

**А. Формулировка задачи.** Рассматривается задача многоуровневой оптимизации динамической системы большой размерности (17.18), (17.19), где для  $i$ -й подсистемы  $x_{(i)}$  – это  $n_i$ -мерный вектор состояний;  $u_{(i)}$  – это  $r_i$ -мерный вектор управлений;  $\pi_{(i)}$  – это  $n_i$ -мерный вектор взаимосвязи;  $a_{(i)}$ ,  $L_{(i)}$  и  $b_{(i)}$  – это постоянные матрицы размеров  $n_i \times n_i$ ,  $n_i \times n_i$  и  $n_i \times r_i$ , соответственно.

Уравнения (17.18), (17.19) можно переписать в форме

$$\dot{x} = \bar{a}x + bu + cx, \quad (17.24)$$

где  $\bar{a}$  – блочно-диагональная матрица с блоками  $a_{(i)}$ ;  $c = a - \bar{a}$ .

Общий критерий качества задаётся выражением

$$I = 0,5x^T(t_2)\rho x(t_2) + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} [x^T(\theta)\beta x(\theta) + u^T(\theta)K^{-1}u(\theta)] d\theta, \quad (17.25)$$

где  $\rho > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $K > 0$  – блочно-диагональные матрицы.

Требуется определить векторы управлений по подсистемам  $u_{(i)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , которые минимизируют общий критерий качества системы (17.25) при ограничениях (17.18), (17.19).

**Б. Двухуровневое иерархическое управление (модификация 1).** Предполагается, что верхний уровень обеспечивает равенство

$$\bar{x}(t) = x(t). \quad (17.26)$$

Тогда модель системы можно записать в виде

$$\dot{x} = \bar{a}x + bu + c\bar{x}. \quad (17.27)$$

Вводится следующий критерий:

$$I' = I + \int_{t_1}^{t_2} [x(\theta) - \bar{x}(\theta)]^T \beta_{2x} [x(\theta) - \bar{x}(\theta)] d\theta. \quad (17.28)$$

Здесь первый член определяется выражением (17.25), второй же вводится для снижения вычислительных затрат и обеспечения сходимости. Вид матрицы  $\beta_{2x}$ , которая является положительно определённой блочно-диагональной соответствующего размера, определяется так:  $\beta_{2x_i} = A_{(i)}b_{(i)}K_{(i)}b_{(i)}^T A_{(i)}$ .

Очевидно, что задача (17.27), (17.28) эквивалентна исходной (17.24), (17.25) в случае выполнения условия (17.26).

Найденные локальные оптимальные управления имеют вид

$$u_{(i)} = -K_{(i)}b_{(i)}^T (A_{(i)}x_{(i)} + f_{(i)}); \quad (17.29)$$

$$\dot{A}_{(i)} + a_{(i)}^T A_{(i)} + A_{(i)}a_{(i)} + \beta_{(i)} = 0; \quad (17.30)$$

$$\dot{f}_{(i)} = A_{(i)}b_{(i)}K_{(i)}b_{(i)}^T f_{(i)} - a_{(i)}^T f_{(i)} + \beta_{2x_i} \bar{x}_{(i)} - A_{(i)} \sum_{j \neq i} a_{(ji)}^T \bar{x}_{(j)} - \alpha_{(i)}. \quad (17.31)$$

Итерационная структура верхнего уровня определяется, например, соотношением

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{(i)} \\ \alpha_{(i)} \end{bmatrix}_{\|l\|} = \begin{bmatrix} x_{(i)} \\ -\beta_{2x_i} (x_{(i)} - \bar{x}_{(i)}) + \sum_{j \neq i} a_{(ji)} \lambda_j \end{bmatrix}_{\|l\|}, \quad (17.32)$$

где  $\lambda_j = A_{(j)}x_{(j)} + f_{(j)}$ ;  $l$  – номер итерации ( $l = 0, 1, \dots$ ).

Алгоритм двухуровневой оптимизации описывается следующим образом:

**Шаг 1.** На первом уровне вычисляются и запоминаются матрицы из уравнений Ляпунова (17.30).

**Шаг 2.** На втором уровне задаются начальные функции  $\bar{x}_{(i)}$  и  $\alpha_{(i)}$  и передаются на первый уровень.

**Шаг 3.** На первом уровне с помощью полученной информации из уравнений (17.27), (17.29), (17.31) вычисляются  $\pi_{(i)}$ ,  $u_{(i)}$ ,  $x_{(i)}$ . Результаты посылаются на второй уровень.

**Шаг 4.** На втором уровне после замены номера итерации  $l$  на  $l + 1$  определяются новые значения  $\bar{x}_{(i)}$ ,  $\alpha_{(i)}$  из (17.32).

**Шаг 5.** Осуществляется проверка сходимости. Если условия сходимости выполнены, то расчёты прекращаются, а полученные  $u_{(i)}$  и  $x_{(i)}$  передаются на первый уровень и выполняется переход к шагу 3.

**В. Двухуровневое иерархическое управление (модификация 2).** Если в качестве критерия оптимальности принять

$$I = 0,5[x(t_2) - \bar{x}(t_2)]^T \rho_* [x(t_2) - \bar{x}(t_2)] + 0,5x^T(t_2) \rho x(t_2) + \\ + 0,5 \int_{t_1}^{t_2} \{x^T(\theta) \beta x(\theta) + u^T(\theta) K^{-1} u(\theta) + [x(\theta) - \bar{x}(\theta)]^T \beta_* [x(\theta) - \bar{x}(\theta)]\} d\theta, \quad (17.33)$$

а блоки матрицы  $\rho_*$  определять как

$$\rho_{*(i)} = A_{(i)ст} - \rho_{(i)} ; \\ a_{(i)}^T A_{(i)ст} + A_{(i)ст} a_{(i)} + \beta_{(i)} = 0$$

(полагаем, что матрицы  $a_{(i)}$  соответствуют устойчивым подсистемам), то локальные оптимальные управления определяются соотношениями

$$u_{(i)} = -K_{(i)} b_{(i)}^T (A_{(i)ст} x_{(i)} + f_{(i)}) ; \\ \dot{f}_{(i)} = (A_{(i)ст} b_{(i)} K_{(i)} b_{(i)}^T - a_{(i)}^T) f_{(i)} + \beta_* \bar{x}_{(i)} \sum_{j \neq i} a_{(ji)}^T \bar{x}_{(j)} - \alpha_{(i)}. \quad (17.34)$$

Для этого случая нужно решать семейство алгебраических уравнений Ляпунова (а не дифференциальных) и запоминать одно значение матрицы  $A_{(i)ст}$ , а не временные функции  $A_{(i)}(t)$  для всех значений времени.

Структура итерационной процедуры системы второго уровня остаётся такой же, как и в (17.32).

## 17.6. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО КРИТЕРИЮ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ ДИСКРЕТНОЕ ПО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Рассмотренное ранее построение дискретных по времени кусочно-постоянных оптимальных управлений непрерывным процессом имеет отмеченный уже недостаток, связанный с необходимостью прогнозирования управления на такт вперёд. Здесь приведено другое решение задачи синтеза оптимального по ФОР кусочно-постоянного управления непрерывной линейной системой. В интересах общности изложение ведётся применительно к процессу, возмущаемому белым шумом, т.е. рассматривается стохастический вариант:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w(t). \quad (17.35)$$

Задача управления состоит в построении кусочно-постоянных сигналов управления

$$u(t) = u(t_k) = u[k], \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (17.36)$$

по известным в дискретные моменты времени значениям  $x(t_k) = x[k]$  ( $t_k = t_0 + k\Delta t$ ,  $\Delta t$  – интервал квантования), которые минимизируют ФОР, построенный на непрерывных состояниях процесса  $x(t)$  и кусочно-постоянных значениях управления:

$$J = E \left\{ V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} L[x(\theta), u(\theta), u_{оп}(\theta)] d\theta \right\}, \quad (17.37)$$

где

$$L = 0,5(x^T \beta x + u^T K_1^{-1} u + u_{оп}^T K_2^{-1} u_{оп}), \quad (17.38)$$

$$V_3 = (1/2)x^T(t_2) \rho x(t_2). \quad (17.39)$$

Здесь  $\beta$  – положительная знакопостоянная;  $K_1$  – положительно определённая матрица (вид матрицы  $K_2$  будет определён позднее).

Эквивалентная задача с дискретным временем будет определяться моделью

$$x[k+1] = A_{\text{д}}x[k] + B_{\text{д}}u[k] + w_k[k], \quad (17.40)$$

поведение которой точно совпадает с (17.35) в моменты  $t_k$ , и критерием, эквивалентным интегральному:

$$J = E \left\{ V_N[x[N]] + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} L[x(\theta), u(\theta), u_{\text{оп}}(\theta)] d\theta \right\} = \\ = E \left\{ V_N[x[N]] + \sum_{k=0}^{N-1} L_k[x[k], u[k], u_{\text{оп}}[k]] + \sum_{k=0}^{N-1} L_{\theta k}(\Delta t) \right\}, \quad (17.41)$$

где

$$A_{\text{д}} = A_{\text{д}}(\Delta t) = \exp(A\Delta t), \quad B_{\text{д}} = \int_0^{\Delta t} A_{\text{д}}(\theta) B d\theta;$$

$$L_{\theta k} = 0,5[x^T[k]\beta_{\text{д}}x[k] + x^T[k]T_{\text{д}}u[k] + u^T[k]T_{\text{д}}^T x[k] + \\ + u^T[k]K_{\text{д}}^{-1}u[k] + u_{\text{оп}}^T[k]K_2^{-1}u_{\text{оп}}[k]];$$

$w[k]$  – гауссовская последовательность с характеристиками

$$E[w[k]] = 0, \quad E[w[k]w^T[l]] = R_{\text{д}}\delta_{kl};$$

$$\beta_{\text{д}} = \beta_{\text{д}}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} A_{\text{д}}^T(\theta)\beta A_{\text{д}}^T(\theta) d\theta;$$

$$T_{\text{д}} = T_{\text{д}}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} A_{\text{д}}^T(\theta)\beta B_{\text{д}}(\theta) d\theta;$$

$$K_{\text{д}}^{-1} = K_{\text{д}}^{-1}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} [K_1^{-1} + B_{\text{д}}^T(\theta)\beta B_{\text{д}}(\theta)] d\theta;$$

$$L_{\theta k} = L_{\theta k}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \text{tr}(R_{\text{д}}\beta) d\theta. \quad (17.42)$$

Оптимальное управление для исходной задачи имеет вид

$$u[k] = -K_2[B_{\text{д}}^T S[k+1]A_{\text{д}} + T_{\text{д}}] x[k], \quad k = \overline{0, N}, \quad (17.43)$$

где  $S[k]$  определяется из дискретного разностного уравнения Ляпунова

$$S[k] = A_{\text{д}}^T S[k+1]A_{\text{д}} + \beta_{\text{д}} \quad (17.44)$$

с граничным условием  $S[N] = \rho$ ;

$$K_2 = [K_2^* + B_{\text{д}}^T S[k+1]B_{\text{д}}]^{-1}; \quad K_2^* = \int_0^{\Delta t} A_{\text{д}} R_{\text{д}} A_{\text{д}}^T d\theta. \quad (17.45)$$

### Вопросы для самопроверки

1. Синтез законов управления линейными процессами при ФОР (метод АКОР).
2. В чём состоит общий закон оптимального по критерию обобщённой работы управления линейным процессом, выраженный через решение уравнения Ляпунова?
3. Как выглядит прямое решение уравнения Ляпунова для нестационарного случая?
4. Как выглядит решение уравнения Ляпунова с использованием матрицы Коши?
5. Решение алгебраического уравнения Ляпунова для стационарного случая.

- Многоуровневая оптимизация по ФОР.
- Многоуровневая оптимизация по квадратичному критерию.
- 6. Иерархическая оптимизация линейных динамических систем с использованием.
- АКОР по критерию обобщённой работы.
- Многоуровневая оптимизация по ФОР.
- Многоуровневая оптимизация по квадратичному критерию.
- 7. Оптимальное по критерию обобщённой работы дискретное по времени управление непрерывными динамическими процессами.

## Лекция 18

### АДДИТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Традиционный путь создания системы управления содержит следующие этапы:

- 1) формулировка критерия (функционала);
- 2) разработка математической модели объекта;
- 3) синтез законов (алгоритмов) управления;
- 4) разработка алгоритмов адаптации (настройки) законов управления по режимам функционирования объекта;
- 5) осуществление полученных законов, в частности, с помощью ЦВМ или АВМ.

Такой подход позволяет достичь относительно невысокого объёма вычислений, выполняемых в процессе управления (этап 5), но приводит к существенному сужению возможностей управляющих алгоритмов, так как структура и значительная часть параметров алгоритмов выбираются для конкретных условий.

Объединение трёх последних этапов позволяет создать на базе ЭВМ управляющую систему, осуществляющую синтез оптимальных управлений и само управление практически одновременно в процессе функционирования объекта (*совмещённый синтез управления*). Именно этот путь является основным в решении главной задачи СТАУ – оптимизации управления «в большом» для достижения конечной цели этапа или режима функционирования системы.

#### 18.1. ОБЩЕЕ ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ

Для процесса

$$\dot{x} = f(x, t) + \varphi(x, t)u \quad (18.1)$$

оптимальное в смысле минимума ФОР

$$I = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(\theta), \theta] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} \{U_3[u(\theta), \theta] + U_3^*[u_{\text{оп}}(\theta), \theta]\} d\theta \quad (18.2)$$

управление  $u = u_{\text{оп}}$  определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial u_{\text{оп}}} U_3(u_{\text{оп}}, t) + \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x, t) = 0, \quad (18.3)$$

где полная производная  $\dot{V}$  вычисляется в силу управления свободного движения объекта

$$\dot{x}_c = f(x_c, t), \quad (18.4)$$

равна

$$\dot{V} = -Q_3(x_c, t). \quad (18.5)$$

Из полученного выражения следует

$$V[x_c(t_2), t_2] - V[x_c(t), t] = - \int_t^{t_2} Q_3[x_c(\theta), \theta] d\theta,$$

или с учётом граничного условия для  $V$

$$V[x_c(t), t] = V_3[x_c(t_2)] + \int_t^{t_2} Q_3[x_c(\theta), \theta] d\theta.$$

Обозначим общее решение уравнения свободного движения (18.4) на интервале  $[t, t_2]$  при начальном условии  $x_t = x(t)$  (где  $x(t)$  – текущий вектор состояния управляемого движения (18.1)) через

$$X(x, t, \theta). \quad (18.6)$$

Тогда общее аналитическое выражение алгоритма с прогнозирующей моделью запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial u_{\text{ОП}}} U_3(u_{\text{ОП}}, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ V_3[X(x, t, t_2)] + \int_t^{t_2} Q_3[X(x, t, \theta), \theta] d\theta \right\} \varphi(x, t). \quad (18.7)$$

Решение (18.6) можно интерпретировать как прогноз свободного движения управляемого объекта до момента времени  $t_2 > t$ . Выражение в фигурных скобках (18.7) есть главная часть функционала, вычисленная на прогнозируемом движении.

Два случая степенной функции затрат на управление в ФОР алгоритм с прогнозирующей моделью принимает вид

$$u = u_{j\text{ОП}} = - \left\{ k_j \sum_{v=1}^n \varphi_{jv}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ V_3[X(x, t, t_2)] + \int_t^{t_2} Q_3[X(x, t, \theta), \theta] d\theta \right\} \right\}^{p_j/q_j}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (18.8)$$

Здесь  $p_j^{-1} + q_j^{-1} = 1$ ,  $u_j^{q_j}$  – чётная функция  $u_j$ .

Для случая квадратичной функции затрат на управление в ФОР ( $p_j = q_j = 2$ ) аналитическая форма алгоритма с прогнозирующей моделью принимает вид

$$u = u_{\text{ОП}} = -K\varphi^T(x, t) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ V_3[X(x, t, t_2)] + \int_t^{t_2} Q_3[X(x, t, \theta)] d\theta \right\} \right]^T. \quad (18.9)$$

## 18.2. СТРУКТУРА АЛГОРИТМА С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ. ВАРИАНТЫ АЛГОРИТМА

Содержание алгоритма с прогнозирующей моделью можно интерпретировать как решение уравнений характеристик, соответствующих уравнению Ляпунова в задаче оптимизации управления по ФОР, и формирования управления по формуле (18.8) (для случая  $p_j = q_j = 2$ ). При численной реализации все необходимые вычисления выполняются циклически (*цикл формирования управления*) с продолжительностью цикла  $\Delta t_u$ . Численный алгоритм с прогнозирующей моделью включает операции:

- а) измерение или оценку текущего состояния объекта в дискретные моменты времени, соответствующие началу очередного цикла формирования управления;
- б) прогнозирование свободного (неуправляемого) движения объекта на заданном интервале  $[t_u, t_2]$  оптимизации управления (*интервал прогнозирования*) с начальными условиями, совпадающими с текущим в момент  $t_u$  состоянием объекта или лежащим в некоторой окрестности этого состояния;
- в) вычисление градиента изменения функции  $V(x, t)$  для текущего состояния объекта;
- г) формирование сигнала управления.

Конкретные возможности и вычислительные затраты зависят от варианта алгоритма. Основные варианты алгоритма с прогнозирующей моделью:

- 1) с численным дифференцированием;
- 2) модифицированный;
- 3) с матрицей чувствительности;
- 4) с синхронным детектированием;
- 5) с аналитическим решением.

Кроме того, возможны различные комбинации этих алгоритмов.

## 18.3. УРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СКОРОСТЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ ВХОДНЫХ ВЕЛИЧИН

Для широкого класса объектов моделирование (15.1) или (15.2) при  $u = 0$  на интервале  $[t_u, t_2]$  сопряжено с трудностями, главным образом, вычислительного характера. Так, окрестность текущего состояния объекта,



содержащая прогнозируемые на  $[t_u, t_2]$  траектории, может либо значительно превышать по размеру область допустимых состояний в  $X$ , либо совсем не пересекаться с ней. Кроме того, для нелинейных объектов возможно существенное изменение динамических свойств при замене текущего вектора входных величин нулевым вектором.

Поэтому рассмотрим задачу управления скоростью изменения вектора входных величин. Движение объекта описывается уравнениями

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = u. \quad (18.10)$$

Минимизируемый функционал задаётся в виде (18.7), при этом в общем случае вектор  $u$  может быть включён в функции  $V_3$  и  $Q_3$ .

Переход от объекта (15.6) к объекту (18.10) с введением обозначений

$$p_x(t) = [\partial V(t) / \partial x(t)]^T, \quad p_y(t) = [\partial V(t) / \partial y(t)]^T$$

даёт уравнения характеристик:

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = 0; \quad (18.11)$$

$$\dot{p}_x = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T p_x - \left(\frac{\partial Q_3}{\partial x}\right)^T; \quad (18.12)$$

$$\dot{p}_y = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^T p_x - \left(\frac{\partial Q_3}{\partial y}\right)^T; \quad (18.13)$$

$$\dot{V} = Q(x, y, t). \quad (18.14)$$

#### 18.4. АЛГОРИТМ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ И ЧИСЛЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

Алгоритм заключается в вычислении  $V(x(t), t)$  интегрированием (18.14) при условии (15.9) на моделируемом в ускоренном времени  $\tau = t/\chi$  ( $\chi$  – масштаб ускорения времени) движении объекта (в соответствии с (18.11)) с последующим численным дифференцированием этой функции.

Таким образом, для определения оптимального в смысле (15.7) управления объектом (18.10) в текущий момент времени (реально – на очередной цикл формирования управления  $\Delta t_u$ ) в управляющей ЭВМ осуществляется как минимум  $r + 1$  прогнозов движения объекта интегрированием уравнений модели

$$\frac{d}{d\tau} x^M = \chi f^M(x^M, y^M, \tau), \quad \frac{d}{d\tau} y^M = 0 \quad (18.15)$$

в ускоренном времени  $\tau$  с различными начальными условиями  $y^{M<j>}(0)$ ,  $j = \overline{1, r+1}$ , лежащими в окрестности текущего значения, полученного в предыдущем цикле. Начальные условия для первого уравнения (18.15) задаются соотношением

$$x^M(\tau_u) = x(t_u). \quad (18.16)$$

На основе этих прогнозов вычисляются скалярные функции

$$V(t_u) = V(\tau_u) = V_3(x^M(\tau_2)) + \chi \int_{\tau_u}^{\tau_2} Q(x^M(\tau), \tau) d\tau, \quad (18.17)$$

где  $\tau_u = t_u/\chi$  и  $\tau_2 = t_2/\chi$  – пределы интегрирования в ускоренном времени, соответствующие моменту определения управляющих сигналов  $t_u$  и моменту окончания интервала оптимизации  $t_2$ ;  $x^M(\tau)$  – прогнозируемый в ускоренном времени вектор состояния управляемого объекта (18.10);  $f^M$  – векторная функция, представляющая в модели (18.15) соответствующую функцию объекта (18.10) и в общем случае не равная ей (в предположении точно известной структуры  $f$  эта функция может отличаться вектором параметров  $a$ ).

Вычисленные (при выполнении вычислений на ЦВМ множитель  $\chi$  в (18.15) и (18.17) можно не принимать во внимание, имея в виду, что вычисления производятся в ускоренном темпе) значения (18.17) используются для аппроксимации разностным аналогом частных производных в соотношении

$$u_{\text{оп}}(t_u) = -K \left( \frac{\partial V(t_u)}{\partial y(t_u)} \right)^T = -K p_y(t_u), \quad (18.18)$$

заменяющем (15.10) для объекта (18.10).

### 18.5. АЛГОРИТМ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ, МОДИФИЦИРОВАННЫЙ

Предполагается дифференцируемость по  $x(t)$  функций  $V_3(x, y, t)$  и  $Q_3(x, y, t)$  функционала (15.7) на  $X \times Y \times [t_1, t_2]$ . Алгоритм связан с решением в ускоренном «обратном» времени

$$\vartheta = \tau_2 - \tau, \quad (18.19)$$

изменяющемся от 0 до  $\vartheta_K = (\tau_2 - \tau_u)$ , уравнений (18.12), (18.13) с граничными условиями

$$p_x(0) = p_x(\tau_2) = [\partial V_3(x^M(\tau_2)) / \partial x^M(\tau_2)]^T;$$

$$p_y(0) = p_y(\tau_2) = [\partial V_3(x^M(\tau_2)) / \partial y^M(\tau_2)]^T. \quad (18.20)$$

Вычисление этих условий предполагает знание состояния (18.11) в конце интервала оптимизации, получаемого предварительным моделированием (18.15) в ускоренном «прямом» времени  $\tau$  с начальными условиями (18.16) и

$$y^M(\tau_u) = y(t_u). \quad (18.21)$$

Необходимость вычисления вдоль прогнозируемой траектории объекта функций  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$ ,  $\partial Q / \partial x$  и  $\partial Q / \partial y$  приводит либо к запоминанию в управляющей ЭВМ траектории (18.15), пройденной при предварительном моделировании, либо к совместному решению в обратном времени  $\vartheta$  уравнений

$$\frac{d}{d\vartheta} x^M = -\chi f^M(x^M, y^M, \vartheta); \quad \frac{d}{d\vartheta} y^M = 0;$$

$$\frac{d}{d\vartheta} P_x = \chi \left( \frac{\partial f}{\partial x^M} \right)^T P_x + \chi \left( \frac{\partial Q_3}{\partial x^M} \right)^T;$$

$$\frac{d}{d\vartheta} P_y = \chi \left( \frac{\partial f}{\partial y^M} \right)^T P_x + \chi \left( \frac{\partial Q_3}{\partial y^M} \right)^T. \quad (18.22)$$

Полученные компоненты вектора  $p_y(\vartheta_K) = p_y(\tau_u) = p_y(t_u)$  определяют оптимальное управление (18.18).

Алгоритм (18.18), (18.22) не требует численного дифференцирования и поэтому потенциально обладает более высокой точностью.

### 18.6. АЛГОРИТМ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ И МАТРИЦЕЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Алгоритм сводится к вычислению и использованию вдоль прогнозируемого движения (18.15) чувствительности прогнозируемого состояния  $x^M(\tau)$  к вариациям компонент вектора входных величин  $y^M(\tau_u) = y^M(t_u)$ . Алгоритм может быть получен из (18.11) и (18.14) следующим образом.

Если функция  $f$  в (18.10) и, следовательно, в (18.11) непрерывна вместе со своими частными производными по  $x$  и  $y$  на  $X \times Y \times (t_-, t_+)$ , где  $(t_-, t_+)$  – открытая временная область, содержащая отрезок  $[t_1, t_2]$ ; тогда в соответствии с теоремой Пеано решение уравнения (18.11), которое обозначим  $x_c(t)$ , принадлежит классу  $C^1$  в открытой области его определения. При этом матрица  $x_y(t) = \partial x_c(t) / \partial y(t_u)$  частных производных этого решения по вектору параметров  $y(t_u)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_y(t) = \frac{\partial f(x_c, y, t)}{\partial x_c(t)} x_y(t) + \frac{\partial f(x_c, y, t)}{\partial y(t_u)} \quad (18.23)$$

с начальным условием

$$x_y(t_u) = 0, \quad (18.24)$$

где матрицы  $\partial f / \partial x_c$  и  $\partial f / \partial y$  вычисляются на  $x_c(t)$ .

Вводится обозначение частной производной  $\bar{p}_y(t) = (\partial V(t) / \partial y(t_u))^T$ , вычисляемой дифференцированием  $V(x, y, t)$  как сложной функции  $y(t_u)$ , которая отличается от явной производной  $p_y(t)$ . Дифференцирование (18.14) по  $y(t_u)$  по правилу дифференцирования сложной функции даёт

$$\bar{p}_y(t) = -x_y^T(t) \left( \frac{\partial Q(t)}{\partial x_c(t)} \right)^T - \left( \frac{\partial Q(t)}{\partial y(t_u)} \right)^T. \quad (18.25)$$

Аналогично из (15.9) получается для (18.25) граничное условие

$$\bar{p}_y(t_2) = x_y^T(t_2) \left( \frac{\partial V_3(t_2)}{\partial x_c(t_2)} \right)^T + \left( \frac{\partial V_3(t_2)}{\partial y(t_u)} \right)^T. \quad (18.26)$$

Имеет место соотношение

$$\bar{p}_y(t) = x_y^T(t) p_x(t) + p_y(t). \quad (18.27)$$

Из него следует, что в момент  $t_u$ , для которого определяется значение управления, в силу (18.27) вместо  $p_y(t_u)$  можно использовать  $\bar{p}_y(t_u)$ .

При реализации этого варианта алгоритма оптимального управления с прогнозирующей моделью в управляющей ЭВМ должно моделироваться движение (18.15) с начальными условиями (18.16) и (18.21). На прогнозируемом движении следует интегрировать (18.25) в форме записи с ускоренным временем  $\tau$  или, что то же самое, вычислять

$$p_y(t_u) = p_y(\tau_u) = x_y^{MT}(\tau_2) \left( \frac{\partial V_3(\tau_2)}{\partial x^M} \right)^T + \left( \frac{\partial V_3(\tau_2)}{\partial y^M} \right)^T + \chi \int_{\tau_2}^{\tau_2} \left[ x_y^{MT}(\tau) \left( \frac{\partial Q_3(\tau)}{\partial x^M} \right)^T + \left( \frac{\partial Q_3(\tau)}{\partial y^M} \right)^T \right] d\tau. \quad (18.28)$$

Используемая при этом матрица  $x_y^M(\tau)$  определяется интегрированием в ускоренном времени  $\tau$  уравнения

$$\frac{d}{d\tau} x_y^M(\tau) = \chi \frac{\partial f(x^M, y^M, \tau)}{\partial x^M(\tau)} x_y^M(\tau) + \chi \frac{\partial f(x^M, y^M, \tau)}{\partial y^M(\tau)} \quad (18.29)$$

с начальным условием (18.24). В отличие от предыдущего варианта, алгоритм (18.28), (18.29) не имеет интегрирования в обратном ускоренном времени.

## 18.7. АЛГОРИТМ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ И СИНХРОННЫМ ДЕТЕКТИРОВАНИЕМ

Вариации начальных условий и многократный  $((r+1)$ -кратный) запуск прогнозирующей модели в варианте алгоритма с численным дифференцированием можно заменить на быстроменяющиеся вариации в процессе одного запуска модели с соответствующей обработкой сигналов. Речь идет о том, чтобы использоваться принцип градиента в алгоритме с прогнозирующей моделью. Цель этого заключается в сокращении необходимых вычислительных затрат.

Данный алгоритм изложим применительно к общей форме алгоритма с прогнозирующей моделью (18.4), (18.6), (18.7), из которой, как частные случаи, получаются варианты (18.8), (18.9). Применяя формулу сложной производной, вместо (18.7) записываем

$$\frac{\partial}{\partial u_{\text{оп}}} U_3(u_{\text{оп}}, t) = - \left\{ \frac{\partial}{\partial X} V_3[X(x, t, t_2)] \frac{\partial}{\partial x} X(x, t, t_2) + \int_t^{t_2} \frac{\partial}{\partial X} Q_3[X(x, t, \theta), \theta] \frac{\partial}{\partial x} X(x, t, \theta) d\theta \right\} \varphi(x, t), \quad (18.30)$$

где  $X(x, t, \theta)$  – по определению решение на интервале  $[t, t_2]$  уравнения свободного движения объекта

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (18.31)$$

при начальном условии

$$X(x, t, \theta) = x_t,$$

где  $x_t = x(t)$  – текущее значение вектора состояния объекта (18.1).

Допустим, что значению  $x(t)$  придаётся малая вариация  $\delta x(t)$  (реализация этого при численном интегрировании уравнения (18.31) описана ниже). Тогда с точностью до малых второго порядка

$$X(x + \delta x, t, \theta) = X(x, t, \theta) + \frac{\partial}{\partial x} X(x, t, \theta) \delta x(t). \quad (18.32)$$

Функция  $\delta x(t)$  задаётся быстро переменяющейся (в сравнении с  $x(t)$ ) детерминированной или случайной с нулевым средним значением. Для цифровой реализации наиболее подходит детерминированная функция  $\delta x(t)$ , каждая компонента которой представляет кодовую группу из прямоугольных импульсов по типу *функций Уолша*. Длительность каждого прямоугольного импульса соответствует шагу численного интегрирования уравнения прогнозирующей модели (уравнения типа (18.31)) в ускоренном времени. Кодовые группы удовлетворяют условиям, при которых

$$d = \overline{\delta x(t) \delta x^T(t)} \quad (18.33)$$

– диагональная постоянная (не зависящая от  $t$ ) матрица,

$$\overline{\delta x(t)} = 0. \quad (18.34)$$

Здесь чертой обозначено усреднение по интервалу времени, равному длительности наиболее протяжённой кодовой группы.

Умножим (18.32) справа на  $\delta x^T(t)$  и усредним по указанному интегралу. С учётом медленного изменения  $x(t)$  в сравнении с  $\delta x(t)$  и выражений (18.33), (18.34) получаем

$$\overline{X[x(t) + \delta x(t), t, \theta] \delta x^T(t)} = \frac{\partial}{\partial x} X(x, t, \theta) d. \quad (18.35)$$

Подставляя (18.35) в (18.30), получаем следующее непрерывное описание алгоритма с прогнозирующей моделью и синхронным детектированием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_{\text{оп}}} U_3(u_{\text{оп}}, t) = & \left\{ \left( \frac{\partial V_3(X)}{\partial X} \right)_{\theta=t_2} \overline{X[x(t) + \delta x(t), t, t_2] \delta x^T(t)} + \right. \\ & \left. + \int_t^{t_2} \frac{\partial Q_3(X)}{\partial X} \overline{X[x(t) + \delta x(t), t, \theta] \delta x^T(t)} d\theta \right\} d^{-1} \varphi(x, t), \end{aligned} \quad (18.36)$$

где

$$\left( \frac{\partial V_3(X)}{\partial X} \right)_{\theta=t_2} = \frac{\partial}{\partial X} V_3[X(x, t, t_2)];$$

$$\frac{\partial Q_3(X)}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} Q_3[X(x, t, \theta)].$$

Цифровая численная реализация алгоритма (18.36) заключается в следующем. Как и в других алгоритмах с прогнозирующей моделью, время разбивается на циклы, а циклы в ускоренном времени – на шаги (такты). В начале каждого цикла запускается прогнозирующая модель свободного движения в ускоренном времени (модель типа (18.31)) с начальными условиями, близкими к текущему значению вектора состояния. В отличие от других вариантов алгоритма с прогнозирующей моделью, «запуск» занимает несколько шагов, а именно столько, сколько содержится импульсов в наиболее длинной кодовой группе вариаций начальных условий  $\delta x$ . Пусть это число шагов равно  $n_{\text{ш}}$ . В течение этих  $n_{\text{ш}}$  начальных шагов каждого цикла численное интегрирование уравнений (18.31) ведётся при

искусственных малых возмущениях каждой из компонент посредством кодовых групп, присвоенных этим компонентам. Только после  $n_{ш}$  шагов прогнозируемое движение становится действительно свободным (ограниченность разрядной сетки не учитывается).

«Умножение» на те же кодовые группы компонент прогнозируемого по шагам свободного движения и усреднение в пределах длительности кодовой группы обеспечивает согласно (18.36) определение градиента главной части функционала на прогнозируемом движении и формирование вектора оптимального управления на очередной цикл. Вычислительные затраты на синхронное детектирование («умножение» на кодовые группы и усреднение), а также другие операции численной реализации (18.36) невелики в сравнении с затратами на численное интегрирование уравнений свободного прогнозируемого движения. Ввиду того, что при данном алгоритме это численное интегрирование выполняется лишь один раз за каждый цикл, необходимая вычислительная производительность, по крайней мере, в  $(r + 1)$  раз меньше, чем для алгоритма с численным дифференцированием, и в 3-4 раза ниже, чем для модифицированного алгоритма с прогнозирующей моделью.

### 18.8. АЛГОРИТМ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ И АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ

В ряде случаев уравнения свободного движения управляемого объекта (уравнения прогнозируемого движения) допускают общее аналитическое решение, т.е. векторная функция (18.6) известна в аналитическом выражении. Это имеет место, в частности, для процессов, описываемых линейными уравнениями с известной переходной матрицей. Часто к такому описанию можно прийти при иерархическом подходе к задаче оптимизации, когда на верхнем уровне используются простые, в частности линейные, модели прогнозируемых процессов.

Для квадратичной функции затрат на управление в ФОР и управления скоростью изменения вектора  $y$  (уравнения управляемого процесса в форме (18.10)) общий алгоритм (18.4) – (18.7) даёт

$$u(t) = u_{оп}(t) = -K \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial y} X(x, y, t, t_2) \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial x} V_3(x, y, t_2) \right]^T + \left[ \frac{\partial}{\partial y} V_3(x, y, t_2) \right]^T + \int_t^{t_2} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial y} X(x, y, t, \theta) \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial x} Q_3(x, y, \theta) \right]^T + \left[ \frac{\partial}{\partial y} Q_3(x, y, \theta) \right]^T \right) d\theta \right\}. \quad (18.37)$$

При наличии аналитического решения  $X(x, y, t, \theta)$  уравнения прогнозируемого свободного движения необходимые вычислительные затраты резко сокращаются. В некоторых случаях приближённое аналитическое решение может строиться в форме степенного ряда

$$X(x(t), y(t), t, \theta) = x(t) + \frac{\theta - t}{1!} f + \frac{(\theta - t)^2}{2!} \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{(\theta - t)^3}{3!} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} f \right) + \dots \quad (18.38)$$

### 18.9. ВОПРОСЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ

Все пять вариантов алгоритма с прогнозирующей моделью приводят по существу к одному решению (при предельной точности аппроксимации) производных в (18.18) и решения (18.38) и отличаются только вычислительными процедурами. При этом первые четыре варианта являются алгоритмами численного решения задачи, а пятый – аналитического решения задачи. Очевидно, что последний из них требует высокой квалификации разработчиков и больших трудозатрат при предварительной подготовке алгоритма управления, но характеризуется самым низким уровнем трудозатрат на формирование управления в процессе функционирования системы.

Остальные же варианты практически всю трудоёмкость синтеза управления сосредоточивают на этапе формирования управления в процессе функционирования системы управления.

Для приближённого сравнения трудоёмкости вычислительных процедур первых трёх вариантов алгоритмов с прогнозирующими моделями предполагается, что объём вычислений, связанных с интегрированием каждого скалярного уравнения (кроме тривиальных) в (18.15), (18.22), (18.28) и (18.29), одинаков и составляет  $\gamma_{инт}$ . Тогда трудоёмкость каждого из вариантов алгоритма оценится соответственно

$$\Gamma_I = Nn\gamma_{инт}, \quad \Gamma_{II} = (3n + m)\gamma_{инт}, \quad \Gamma_{III} = [n(m + 1) + m]\gamma_{инт}, \quad (18.39)$$

где  $N$  – число дискретных значений функции  $V(x, y, t)$ , необходимое для реализации разностного аналога.

Таким образом, для многомерных объектов с большим числом входов при невозможности аналитического решения задачи наиболее предпочтительным с точки зрения трудоёмкости является второй вариант алгоритма с прогнозирующей моделью, так называемый модифицированный алгоритм.

### Вопросы для самопроверки

1. Этапы создания системы управления.
2. Общее обоснование алгоритма с прогнозирующей моделью.
3. Операции численного алгоритма с прогнозирующей моделью.
4. Уравнения характеристик в задаче оптимального управления скоростью изменения входных величин.
5. Алгоритм с прогнозирующей моделью и численным дифференцированием.
6. Алгоритм с прогнозирующей моделью, модифицированный.
7. Алгоритм с прогнозирующей моделью и матрицей чувствительности.
8. Алгоритм с прогнозирующей моделью и синхронным детектированием.
9. Алгоритм с прогнозирующей моделью и аналитическим решением.
10. Вопросы численной реализации алгоритма в реальном масштабе времени.

## ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

**ИС-32.** Исследовать наблюдаемость, устойчивость, управляемость системы автоматического управления. Построить графики изменения переменных состояния и входа. Начальные условия единичные.

$$1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 - u; \\ \dot{x}_2 = 6x_1 + 2u; \end{cases}$$

$$y = x_1 + x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2; \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 3x_2 - u; \end{cases}$$

$$y = 3x_1 - 4x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u; \\ \dot{x}_2 = x_1 + 6x_2 + u; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = x_1 - x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t^2, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2; \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - u; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = -x_1 + 6x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t^2, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_3 + u; \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 3u; \end{cases}$$

$$y_1 = -x_1 + x_2; \quad y_2 = -x_2 + x_3;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t^3, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$7) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = 2x_1 - x_2; \quad y_2 = -x_1 + 7x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -\cos t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{aligned} -4\ddot{x} + 4x - x &= u; \\ y &= x_1; \end{aligned}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$8) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - u; \end{cases}$$

$$y_1 = -x_1 - x_2; \quad y_2 = -x_1 + x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t^2}, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$9) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - u_1; \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 3x_3 + u_2; \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2; \end{cases}$$

$$y = -6x_1 + x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$10) \quad -8\ddot{x} + 6\dot{x} + x = u;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$y = x_1.$$

$$11) \quad 6\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = u;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t^2, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$y = x_1.$$

$$12) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 6x_2 - u_1; \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 10u_2; \end{cases}$$

$$y = x_1 - 6x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin 2t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$13) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 5x_2 - u_1; \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 4u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 + x_2; \quad y_2 = -x_1 - 3x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos 2t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$17) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 4x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 - x_2; \quad y_2 = -x_1 + 6x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t^4, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$14) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 8x_2 + u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 + x_2; \quad y_2 = x_1 - 6x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t^3, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$15) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = 6x_1 + 2x_3 + u_2; \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_3 + u_3; \end{cases}$$

$$y_1 = -x_1 + x_3; \quad y_2 = -x_2 - x_3;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t^3, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$16) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 5x_2 + u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = x_1 - x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -\cos t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$18) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = -x_1 - x_2; \quad y_2 = -2x_1 + 3x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t^2, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t, & t \geq 0. \end{cases}$$

**ИС-31.** Исследовать наблюдаемость, устойчивость, управляемость системы автоматического управления. Построить графики изменения переменных состояния и входа. Начальные условия единичные.

$$1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 5x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2u; \end{cases}$$

$$y = x_1 - x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 2t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} 2\ddot{x} - 4\dot{x} + x = u; \\ y = x_1; \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = x_1 + x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -8t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2; \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 + u; \end{cases}$$

$$y = 2x_1 - 3x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u; \\ \dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_3 + u; \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_3 - u; \end{cases}$$

$$y = -2x_1 + x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = x_1 + 3x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t^2, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$7) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = 2x_1 - x_2; \quad y_2 = x_1 + 6x_2;$$

$$12) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 6x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 4u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 - x_2; \quad y_2 = 2x_1 + 6x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin 2t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$8) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - u; \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + u; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 + x_2; \quad y_2 = x_1 - x_2;$$

$$13) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 8x_2 + u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 - x_2; \quad y_2 = x_1 + 6x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t^2, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$9) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = 7x_1 - 5x_3 - u; \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + 4x_3 + u; \end{cases}$$



$$y = -6x_1 - x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t^3, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$10) \quad 10\ddot{x} + 6\dot{x} - x = u;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$y = x_1.$$

$$14) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 2x_3 + u_2; \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_3 - u_3; \end{cases}$$

$$y_1 = -2x_1 + x_3; \quad y_2 = x_2 - 6x_3;$$

$$11) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 6x_2 - u; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 10u; \end{cases}$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$y = x_1 - 4x_2;$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t^2, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos 2t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$u_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$15) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = x_1 + 6x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$19) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 5x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 2u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 - x_2; \quad y_2 = 2x_1 + 6x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t^2, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$16) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - u_1; \\ \dot{x}_2 = x_1 + 10x_2 + u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = x_1 + x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$20) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 - u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 6x_2 - u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 + x_2; \quad y_2 = -x_1 + 6x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos t, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$17) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1 - 5x_2 - u; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + u; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 - x_2; \quad y_2 = 2x_1 + 3x_2;$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t^4, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$21) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_3 - u_2; \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_3 + u_3; \end{cases}$$

$$y_1 = 2x_1 + 3x_2; \quad y_2 = x_1 - 6x_2;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t}, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$18) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - u_2; \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 + x_2; \quad y_2 = -3x_1 + 6x_2;$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sin t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t^2, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$u_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t^2, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -t, & t \geq 0. \end{cases}$$

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

### Тема 1. ОДНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

#### Занятие 1. ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

**1.1. Описание сигналов.** Сигналы, действующие в системах управления, во временной области описываются различными функциями, в том числе обобщенными. Выделяют два типовых сигнала: импульсное воздействие, которое описывается дельта-функцией  $\delta(t - \tau)$ , и единичную ступенчатую функцию  $I(t - \tau)$ .

1. *Дельта-функция* (асимметричная) определяется формулой

$$\int_a^b f(t) \delta(t - \tau) dt = \begin{cases} f(t+0), & \tau \in [a, b); \\ 0, & \tau \in (\infty, a) \cup [b, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

справедливой для любой кусочно-непрерывной функции  $f(t)$ . Аналогично определяются производные дельта-функции:

$$\int_a^b f(t) \delta^{(k)}(t - \tau) dt = \begin{cases} (-1)^k f^{(k)}(t+0), & \tau \in [a, b); \\ 0, & \tau \in (\infty, a) \cup [b, \infty), \end{cases}$$

где  $f(t)$  – любая функция, имеющая кусочно-непрерывную производную соответствующего порядка.

2. *Единичная ступенчатая функция*

$$I(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (2)$$

Момент  $\tau$  соответствует моменту приложения входного воздействия к системе управления (рис. 1).

Типовые сигналы связаны соотношением

$$\int_{-\infty}^t \delta(\eta - \tau) d\eta = I(t - \tau),$$

т.е. дельта-функцию  $\delta(t - \tau)$  можно считать производной от единичной ступенчатой функции  $I(t - \tau)$ .

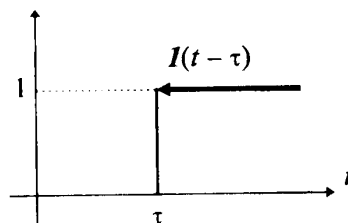


Рис. 1

**1.2. Описание систем.** Непрерывные процессы, протекающие в системах управления, могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями с соответствующими начальными условиями. Тогда, если известен входной сигнал, выходной сигнал определяется в результате решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Одномерная *линейная непрерывная нестационарная* система управления описывается дифференциальным уравнением

$$a_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_0(t)x(t) = b_m(t) \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_0(t)g(t) \quad (3)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0; \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \quad (4)$$

где  $g(t)$  – входной сигнал;  $x(t)$  – выходной сигнал;  $t$  – время;  $a_n(t), \dots, a_0(t), b_m(t), \dots, b_0(t)$  – коэффициенты левой и правой частей уравнения;  $n$  и  $m$  – порядки старших производных выходного и входного сигналов, соответственно;  $t_0$  – момент начала функционирования системы.

Если коэффициенты уравнения постоянны, система называется **линейной стационарной**:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_0 g(t). \quad (5)$$

В **операторной форме** уравнение (3) имеет вид

$$D(p, t)x(t) = M(p, t)g(t),$$

где  $p = \frac{d}{dt}$  – символ, обозначающий операцию дифференцирования;  $D(p, t), M(p, t)$  – дифференциальные операторы левой и правой частей уравнения (3):

$$D(p, t) = a_n(t)p^n + \dots + a_1(t)p + a_0(t),$$

$$M(p, t) = b_m(t)p^m + \dots + b_1(t)p + b_0(t).$$

Уравнение (5) в операторной форме имеет вид

$$D(p)x(t) = M(p)g(t), \quad (6)$$

где  $D(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$ ,  $M(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0$ .

Из операторной формы уравнения следует способ изображения стационарной системы на структурных схемах (рис. 2).

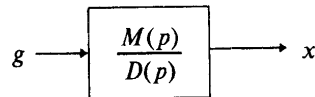


Рис. 2

Сложные системы управления, как правило, состоят из элементарных и типовых звеньев.

1. **Усилительное звено** (рис. 3, а) описывается уравнением

$$x(t) = K(t)g(t), \quad (7)$$

где  $K(t)$  – коэффициент усиления. Если звено стационарное, то  $K(t) = K = \text{const}$ . Примеры усилительных звеньев:

а) трансформатор (рис. 3, б), где выходное напряжение связано с входным соотношением  $U_{\text{вых}}(t) = K U_{\text{вх}}(t)$ ;

б) редуктор (рис. 3, в), где угловые скорости выходного и входного вала связаны через соотношение чисел зубьев шестерен:

$$\omega_2 = \frac{n_1}{n_2} \omega_1 = K(t) \omega_1; \quad K(t) = K = \frac{n_1}{n_2}.$$

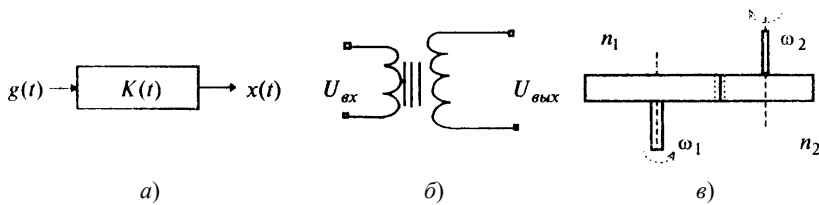


Рис. 3

2. **Дифференцирующее звено** (рис. 4) описывается уравнением

$$x(t) = \frac{dg(t)}{dt}. \quad (8)$$

Выходной сигнал равен производной входного сигнала. Уравнение (8) в операторной форме имеет вид  $x(t) = pg(t)$ .

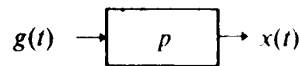


Рис. 4

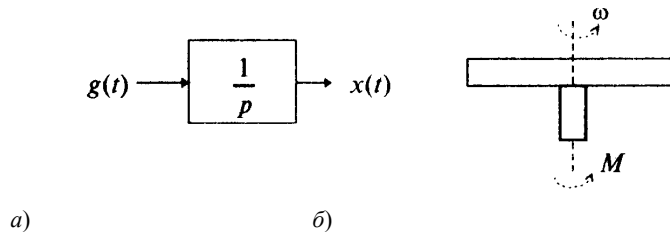


Рис. 5

3. **Интегрирующее звено** (рис. 5, а) описывается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t). \quad (9)$$

Выходной сигнал получается в результате интегрирования входного. В операторной форме уравнение (9) имеет вид

$$px(t) = g(t), \text{ или } x(t) = \frac{1}{p}g(t).$$

Для примера рассмотрим процесс изменения угловой скорости  $\omega$  диска с моментом инерции  $J$  под действием управляющего момента внешних сил  $M$  из состояния покоя (рис. 5, б).

Уравнение вращательного движения  $J \frac{d\omega}{dt}, \omega(t_0) = 0$ . Отсюда имеем  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{J}$ , а если положить  $x = \omega$ ,  $g = \frac{M}{J}$ , получаем уравнение (9).

4. **Звено чистого запаздывания** описывается уравнением  $x(t) = g(t - \gamma)$ , где  $\gamma$  – величина запаздывания выходного сигнала относительно входного.

5. **Аперриодическое звено** (рис. 6, а) описывается уравнением

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = g(t),$$

где  $T$  – действительное положительное число, называемое *постоянной времени*.

Операторная форма записи уравнения (10) имеет вид

$$(Tp + 1)x(t) = g(t).$$

В качестве примера рассмотрим схему с заданным сопротивлением  $R$  и емкостью  $C$  (рис. 6, б). В начальный момент времени ёмкость не заряжена.

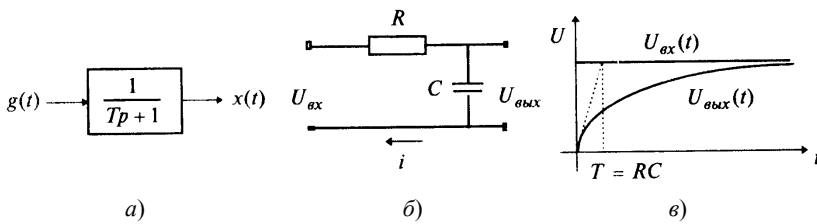


Рис. 6

Требуется составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение выходного напряжения при условии подачи на вход постоянного напряжения единичной величины.

Запишем уравнение второго закона Кирхгофа – соотношение, связывающее ток и напряжение на ёмкости, и начальные условия:

$$U_{\text{ВЫХ}} + iR = U_{\text{ВХ}},$$

$$i = C \frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt},$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(t_0) = U_{\text{ВЫХ}}(0) = 0.$$

Отсюда следует

$$RC \frac{dU_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{\text{ВХ}}(t),$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(0) = 0.$$

Используя обозначения  $T = RC$ ,  $x = U_{\text{ВЫХ}}$ ,  $g = U_{\text{ВХ}}$ , получаем уравнение вида (10). Если  $g(t) = U_{\text{ВХ}}(t) = I(t)$ , то решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = U_{\text{ВЫХ}}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0.$$

Входной и выходной (заметим, что он неперiodический) сигналы изображены на рис. 6, в.

6. **Колебательное звено** (рис. 7, а) описывается уравнением

$$T^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = g(t), \quad (11)$$

где  $T > 0$  – постоянная времени;  $\xi$  – коэффициент демпфирования,  $|\xi| < 1$ . Для примера рассмотрим схему с известными параметрами  $R, L, C$  (рис. 7, б). В начальный момент времени ток в цепи отсутствует, а ёмкость не заряжена. Требуется составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение выходного напряжения.

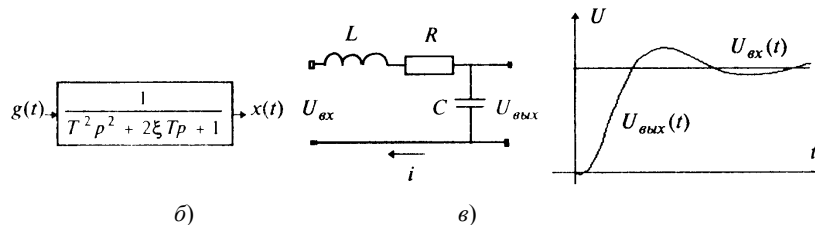


Рис. 7

Запишем уравнение второго закона Кирхгофа – соотношение, связывающее ток и напряжение на емкости, и начальные условия:

$$L \frac{di}{dt} + iR + U_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{ВХ}}, \quad U_{\text{ВЫХ}}(0) = 0,$$

$$i = C \frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt}, \quad i(0) = 0.$$

Отсюда получаем

$$LC \frac{d^2 U_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^2} + RC \frac{dU_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + U_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{\text{ВХ}}(t).$$

По сравнению с (11) здесь  $T = \sqrt{LC}$ ,  $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ ,  $U_{\text{ВЫХ}} = x$ ,  $U_{\text{ВХ}} = g$ .

График типовой реакции рассматриваемой схемы на единичное ступенчатое входное напряжение при комплексных корнях характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью и нулевых начальных условиях изображен на рис. 7, в.

7. **Неустойчивое аperiodическое звено** (рис. 8, а) описывается уравнением

$$T \frac{dx(t)}{dt} - x(t) = g(t),$$

где  $T > 0$  – число, называемое *постоянной времени*.

8. **Неустойчивое колебательное звено** (рис. 8, б) описывается уравнением

$$T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} - x(t) = g(t),$$

где  $T > 0$  – постоянная времени;  $\xi$  – коэффициент демпфирования.

9. **Дифференцирующее звено первого порядка** (рис. 8, в) описывается уравнением

$$x(t) = T \frac{dg(t)}{dt} + g(t),$$

где  $T$  – постоянная времени.

10. **Дифференцирующее звено второго порядка** (рис. 8, г) описывается уравнением

$$x(t) = T^2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dg(t)}{dt} + g(t).$$

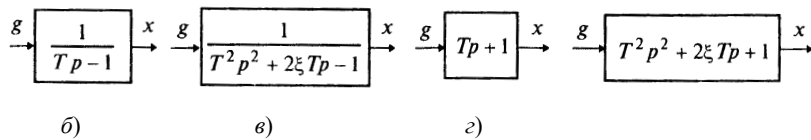


Рис. 8

**З а м е ч а н и е.** Первые четыре звена называются *элементарными*, так как они не могут быть представлены через другие звенья.

## З а н я т и е 2. СВЯЗЬ СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

**2.1. Построение структурной схемы по дифференциальному уравнению.** Структурные схемы строятся с помощью элементарных, типовых звеньев и сумматоров, описывающих преобразование сигналов. Они служат одним из языков описания систем управления. По структурным схемам, как правило, находится эквивалентный оператор системы управления, а затем решаются различные задачи анализа

### Алгоритм построения структурной схемы.

1. Выразить член со старшей производной из дифференциального уравнения (3) и представить полученное соотношение с помощью сумматора, дифференцирующих и усилительных звеньев.
2. Все низшие производные получить как сигналы на соответствующих выходах последовательно соединенных интегрирующих звеньев.
3. Начальные условия (4) представить как постоянные во времени воздействия, приложенные на выходах интегрирующих звеньев.

**Пример 1.** Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$4\ddot{x} - 3\dot{x} + x - 2\dot{g}$$

с начальными условиями  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ .

- Выразим из уравнения член со старшей производной:

$$4\ddot{x} - 2\dot{g} + 3x - x = 0.$$

Изобразим схему получения сигнала  $4\ddot{x}$  (рис. 9). С помощью усилительного члена с коэффициентом усиления  $\frac{1}{4}$  получим сигнал  $\ddot{x}$ .

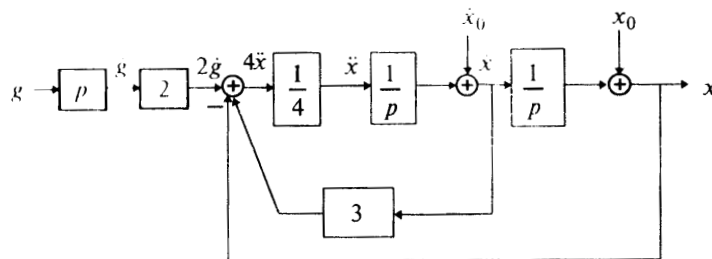


Рис. 9

Построим теперь прямую цепь схемы, последовательно преобразовывая сигнал  $\ddot{x}$  интегрирующими звеньями. Добавляя на выходах интегрирующих звеньев соответствующие начальные условия, получаем часть прямой цепи схемы, в которой присутствующим выходным сигналом служит  $4\ddot{x}$ . На этом сумматоре нужно реализовать равенство

$$4\ddot{x} = 2\dot{g} + 3x - x.$$

Для этого добавляем к прямой цепи соединение дифференцирующего и усилительного звеньев, которые из входного сигнала  $g$  позволяют получить нужный сигнал  $2\dot{g}$  на входе сумматора. Сигналы  $x$  и  $3x$  подаем на сумматор с соответствующим знаком, используя обратные связи. Таким образом, получаем структурную схему (рис. 9), соответствующую заданному дифференциальному уравнению.

**Пример 2.** Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$5\ddot{x} + t\dot{x} + t^2x = \dot{g} + 2g$$

с начальными условиями  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ,  $\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0$ .

- Выразим из уравнения член со старшей производной:

$$5\ddot{x} = \dot{g} + 2g - t\dot{x} - t^2x.$$

Согласно алгоритму получим структурную схему системы (рис. 10).

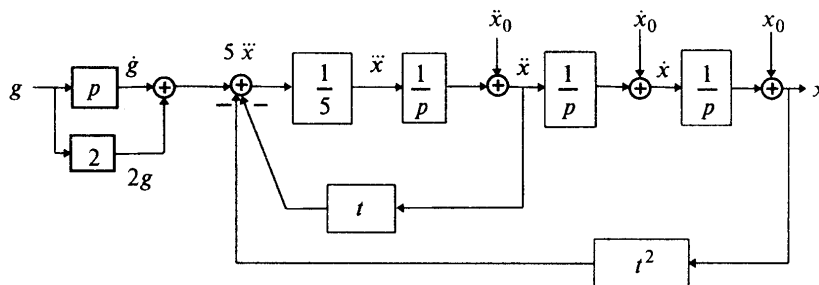


Рис. 10

**Пример 3.** Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = g.$$

- Выразим из уравнения член со старшей производной

$$\ddot{x} = g - \dot{x} - x$$

и с помощью алгоритма получим схему (рис. 11).

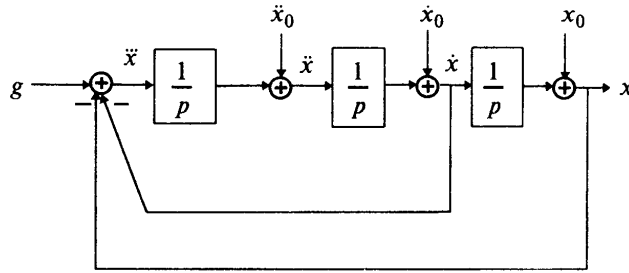


Рис. 11

**2.2. Составление дифференциального уравнения по структурной схеме.** Для записи дифференциального уравнения следует обозначить на схеме все промежуточные сигналы, записать уравнения для каждого звена и для каждого сумматора и из полученной системы дифференциальных и алгебраических уравнений исключить промежуточные переменные кроме входного и выходного сигналов.

**Пример 4.** Составить дифференциальное уравнение по структурной схеме, изображенной на рис. 12.

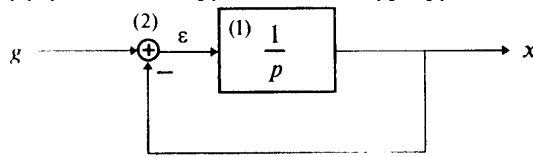


Рис. 12

□ Составим уравнения элементов схемы:

$$1) x = \frac{1}{p} \varepsilon; \quad 2) \varepsilon = g - x.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{p}(g - x), \quad px = g - x, \quad (p+1)x = g.$$

Дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$\dot{x}(t) + x(t) = g(t),$$

что совпадает с (10) при  $T = 1$ , т.е. система, состоящая из интегрирующего звена, замкнутого отрицательной обратной связью, является апериодическим звеном.

**Пример 5.** Составить дифференциальное уравнение по структурной схеме, представленной на рис. 13.

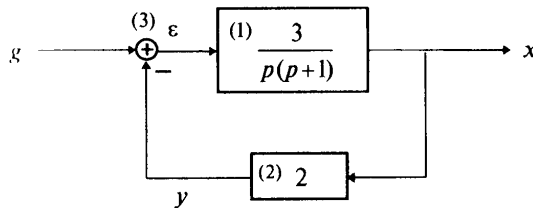


Рис. 13

□ Составим уравнения элементов схемы:

$$1) x = \frac{3}{p(p+1)} \varepsilon; \quad 2) y = 2x; \quad 3) \varepsilon = g - y.$$

Отсюда

$$(p^2 + p)x = 3(g - y) = 3(g - 2x) = 3g - 6x.$$

Переходя от операторной формы записи дифференциального уравнения к обычной, получаем

$$\ddot{x} + \dot{x} + 6x = 3g.$$



### З а н я т и е 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОЕДИНЕНИЙ

Рассмотрим три вида соединений двух звеньев: последовательное, параллельное и с обратной связью (рис. 14).

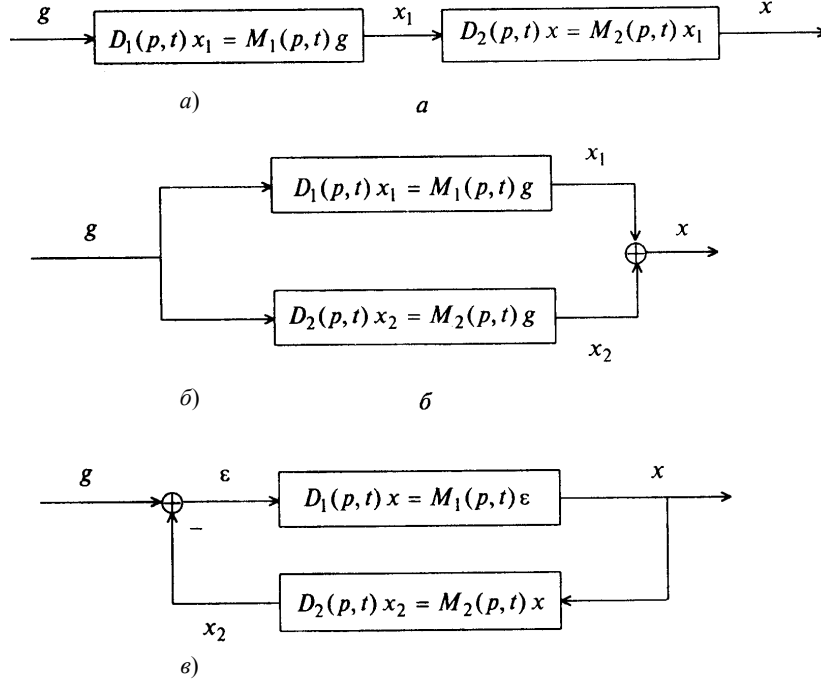


Рис. 14

**Общая постановка задачи.** Заданы дифференциальные уравнения звена 1 и звена 2 в операторной форме. Требуется найти дифференциальное уравнение соединения в операторной форме:

$$D(p,t)x = M(p,t)g. \quad (12)$$

Для решения задачи применим **метод уравнивающих операторов**.

1. **Последовательное соединение** (см. рис. 14, а). Пусть заданы дифференциальные уравнения звеньев 1 и 2 в операторной форме:

$$\begin{aligned} D_1(p,t)x_1 &= M_1(p,t)g; \\ D_2(p,t)x &= M_2(p,t)x_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Для нахождения дифференциального уравнения последовательного соединения умножим первое уравнение в (13) слева на некоторый дифференциальный оператор  $U_1(p,t)$ , а второе уравнение на  $U_2(p,t)$ . Получим:

$$\begin{aligned} [U_1 * D_1]x_1 &= [U_1 * M_1]g; \\ [U_2 * D_2]x &= [U_2 * M_2]x_1. \end{aligned}$$

Выберем **уравнивающие операторы**  $U_1$  и  $U_2$  так, чтобы выполнялось равенство

$$U_1 * D_1 = U_2 * M_2. \quad (14)$$

Тогда

$$[U_2 * D_2]x = [U_1 * M_1]g, \quad (15)$$

где, сравнивая с (12),

$$D(p,t) = U_2 * D_2; \quad M(p,t) = U_1 * M_1.$$

Нули, порядки операторов  $D_1, D_2, M_1, M_2, U_1, U_2$  равны  $n_1, n_2, m_1, m_2, \nu, \mu$ , соответственно. Тогда

из (14) следует равенство порядков операторов в левой и правой части:  $n_1 + \nu = m_2 + \mu$ . Поэтому можно выбрать  $\nu = m_2$ ,  $\mu = n_1$  и искать уравнивающие операторы в виде

$$U_1(p, t) = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i(t) p^i; \quad U_2(p, t) = \sum_{i=0}^{\mu} \beta_i(t) p^i. \quad (16)$$

Общее число неизвестных коэффициентов в (16) равно  $n_1 + m_2 + 2$ , а число уравнений, получающихся в результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $p$  в правой и левой части (14) составит  $n_1 + m_2 + 1$ . Один коэффициент в процессе решения выбирается произвольно, например  $\alpha_\nu(t) = 1$ .

При перемножении операторов применяется правило

$$A_1 * A_2 = \sum_{j=0}^m \frac{d^j A_1}{dp^j} A_2 \frac{p^j}{j!}, \quad (17)$$

где операторы  $A_1, A_2$  имеют порядок соответственно  $m, n$ . Если  $m = 1$ , то формула (17) имеет вид

$$A_1 * A_2 = A_1 A_2 + \frac{dA_1}{dp} A_2 p. \quad (18)$$

При действии оператора  $p$  на функцию, зависящую от аргумент  $t$ , производится дифференцирование, например:  $p \cdot 1 = 0$ ,  $p \cdot t = 1$ ,  $p \cdot t^2 = 2t$ ,  $p \sin t = \cos t$  и т.д. Для избежания ошибок коэффициенты дифференциальных операторов, равные единице, следует писать явно. Например:

$$p * t = p \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot p = p,$$

$$p * t = p \cdot t + 1 \cdot t \cdot p = 1 + t \cdot p,$$

$$\begin{aligned} (p+t) * (\sin t \cdot p + 1) &= (p+t)(\sin t \cdot p + 1) + 1 \cdot (\sin t \cdot p + 1) p = \\ &= p \cdot \sin t \cdot p + p \cdot 1 + t \sin t \cdot p + t \cdot 1 + \sin t \cdot p^2 + 1 \cdot p = \\ &= \sin t \cdot p^2 + t + (1 + \cos t + t \sin t) p. \end{aligned}$$

**Пример 6.** Заданы дифференциальные уравнения звеньев

$$(t^2 + \sin t \cdot p) x_1 = t^2 g,$$

$$t^3 x = \sin t \cdot p x_1.$$

Требуется найти дифференциальное уравнение последовательного соединения этих звеньев.

□ Сравнивая с (13), имеем  $D_1 = t^2 + \sin t \cdot p$ ,  $M_1 = t^2$ ,  $D_2 = t^3$ ,  $M_2 = \sin t \cdot p$ . Порядки уравнивающих операторов  $\nu = m_2 = 1$ ,  $\mu = n_1 = 1$  и, следовательно, они имеют вид  $U_1 = \alpha_0 + \alpha_1 p$ ,  $U_2 = \beta_0 + \beta_1 p$ . Записываем левую и правую части равенства (14), применяя правила (17), (18):

$$\begin{aligned} U_1 * D_1 &= (\alpha_0 + \alpha_1 p) * (t^2 + \sin t \cdot p) = \\ &= \alpha_0 t^2 + \alpha_1 p t^2 + \alpha_0 \sin t \cdot p + \alpha_1 p \sin t \cdot p + \alpha_1 t^2 p + \alpha_1 \sin t \cdot p^2 = \\ &= \alpha_0 t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_0 \sin t \cdot p + \alpha_1 \cos t \cdot p + \alpha_1 t^2 p + \alpha_1 \sin t \cdot p^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 * M_2 &= (\beta_0 + \beta_1 p) * (\sin t \cdot p) = \beta_0 \sin t \cdot p + \beta_1 p \sin t \cdot p + \beta_1 \sin t \cdot p^2 = \\ &= \beta_0 \sin t \cdot p + \beta_1 \cos t \cdot p + \beta_1 \sin t \cdot p^2. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $p$ , получаем

$$p^2: \quad \alpha_1 \sin t = \beta_1 \sin t;$$

$$p^1: \quad \alpha_0 \sin t + \alpha_1 \cos t + \alpha_1 t^2 = \beta_0 \sin t + \beta_1 \cos t;$$

$$p^0: \quad \alpha_0 t^2 + 2\alpha_1 t = 0.$$

Положим  $\alpha_v = \alpha_1 = 1$ . Тогда  $\beta_1 = 1$ ,  $\alpha_0 = -\frac{2}{t}$ ,  $\beta_0 = \frac{t^2}{\sin t} - \frac{2}{t}$ .

Найдём операторы искомого дифференциального уравнения (15):

$$D = U_2 * D_2 = \left( \frac{t^2}{\sin t} - \frac{2}{t} + 1 \cdot p \right) * t^3 = \frac{t^5}{\sin t} - 2t^2 + 1 \cdot p \cdot t^3 + 1 \cdot t^3 p = \\ = \frac{t^5}{\sin t} - 2t^2 + 1 \cdot 3t^2 + t^3 p = t^2 + \frac{t^5}{\sin t} + t^3 p;$$

$$M = U_1 * M_1 = \left( -\frac{2}{t} + 1 \cdot p \right) * t^2 = -2t + 1 \cdot p \cdot t^2 + 1 \cdot t^2 p = -2t + 2t + 1 \cdot t^2 p = t^2 p.$$

Отсюда  $\left( t^2 + \frac{t^5}{\sin t} + t^3 p \right) x = t^2 p g$ , а искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$t^3 x(t) + \left( t^2 + \frac{t^5}{\sin t} \right) x(t) = t^2 \dot{g}(t) \text{ или } t \dot{x}(t) + \left( 1 + \frac{t^3}{\sin t} \right) x(t) = \dot{g}(t).$$

2. **Параллельное соединение** (см. рис. 14, б). Пусть заданы дифференциальные уравнения звеньев 1 и 2 в операторной форме:

$$D_1(p, t)x_1 = M_1(p, t)g; \\ D_2(p, t)x_2 = M_2(p, t)g, \\ x = x_1 + x_2.$$

Из второго и третьего уравнений получаем

$$D_1(p, t)[x - x_1] = D_2(p, t)x - D_2(p, t)x_1 = M_2(p, t)g.$$

Исключим  $x_1$  из первого и последнего уравнений. Для этого умножим их слева на уравнивающие операторы  $U_1(p, t)$  и  $U_2(p, t)$ , соответственно. Находим

$$[U_1 * D_1]x_1 = [U_1 * M_1]g; \\ [U_2 * D_2]x - [U_2 * D_2]x_1 = [U_2 * M_2]g.$$

Выберем уравнивающие операторы  $U_1$  и  $U_2$  так, чтобы выполнялось равенство

$$U_1 * D_1 = U_2 * D_2. \quad (19)$$

Тогда получаем дифференциальное уравнение параллельного соединения

$$[U_2 * D_2]x = \{ [U_2 * M_2] + [U_1 * M_1] \} g,$$

а операторы уравнения (12) равны

$$D = U_2 * D_2; \quad M = [U_2 * M_2] + [U_1 * M_1]. \quad (20)$$

При этом  $\nu = n_2$  и  $\mu = n_1$ .

**Пример 7.** Заданы дифференциальные уравнения звеньев 1 и 2:

$$(p+1)x_1 = g,$$

$$px_2 = g.$$

Требуется найти дифференциальное уравнение параллельного соединения этих звеньев.

□ Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем  $D_1 = p+1$ ,  $M_1 = 1$ ,  $D_2 = p$ ,  $M_2 = 1$ . Порядки уравнивающих операторов  $\nu = n_2 = 1$ ,  $\mu = n_1 = 1$ , поэтому  $U_1 = \alpha_0 + \alpha_1 p$ ,  $U_2 = \beta_0 + \beta_1 p$ .

Запишем соотношение (19)

$$\begin{aligned}
(\alpha_0 + \alpha_1 p)^*(1 \cdot p + 1) &= \alpha_0 p + \alpha_0 + \alpha_1 p \cdot 1 \cdot p + \alpha_1 p \cdot 1 + \alpha_1 p^2 + \alpha_1 p = \\
&= \alpha_0 p + \alpha_0 + \alpha_1 p^2 + \alpha_1 p = (\beta_0 + \beta_1 p)^*(1 \cdot p) = \beta_0 p + \beta_1 p \cdot 1 \cdot p + \beta_1 p^2 = \\
&= \beta_0 p + \beta_1 p^2.
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $p$ , имеем

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_0 + \alpha_1 = \beta_0, \alpha_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_v = 1, \beta_1 = 1, \alpha_0 = 0, \beta_0 = 1.$$

Тогда можно записать дифференциальные операторы параллельного соединения в виде (20)

$$\begin{aligned}
D &= U_2 * D_2 = (1 + 1 \cdot p)^*(1 \cdot p) = 1 \cdot p + 1 \cdot p \cdot 1 + 1 \cdot p^2 = p^2 + p; \\
M &= U_2 * M_2 + U_1 * M_1 = (1 + 1 \cdot p)^* 1 + (1 \cdot p)^* 1 = \\
&= 1 + 1 \cdot p \cdot 1 + 1 \cdot p + 1 \cdot p \cdot 1 + 1 \cdot p = 2p + 1,
\end{aligned}$$

а само уравнение – в форме

$$(p^2 + p)x = (2p + 1)g \quad \text{или} \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = 2\dot{g}(t) + g(t).$$

3. **Соединение с обратной связью** (см. рис. 14, в). Пусть заданы дифференциальные уравнения звеньев 1 и 2 в операторной форме, а обратная связь отрицательная:

$$\begin{aligned}
D_1(p, t)x &= M_1(p, t)\varepsilon; \\
D_2(p, t)x_2 &= M_2(p, t)x, \\
\varepsilon &= g - x_2.
\end{aligned}$$

Подставляя третье уравнение в первое, получаем

$$D_1(p, t)x = M_2(p, t)g - M_2(p, t)x_2.$$

Исключим  $x_2$  из второго и полученного уравнений. Для этого умножим их слева на уравнивающие операторы  $U_1(p, t)$  и  $U_2(p, t)$ , соответственно. Находим

$$\begin{aligned}
[U_1 * D_1]x &= [U_1 * M_1]g - [U_1 * M_1]x_2; \\
[U_2 * D_2]x_2 &= [U_2 * M_2]x.
\end{aligned}$$

Выберем уравнивающие операторы  $U_1$  и  $U_2$  так, чтобы выполнялось равенство

$$U_1 * M_1 = U_2 * D_2. \quad (21)$$

Тогда получаем дифференциальное уравнение соединения с отрицательной обратной связью:

$$\{[U_1 * D_1] + [U_2 * M_2]\}x = [U_1 * M_1]g,$$

а операторы дифференциального уравнения (12) равны

$$D = [U_1 * D_1] + [U_2 * M_2], \quad M = U_1 * M_1. \quad (22)$$

При этом  $\nu = n_2, \mu = m_1$ .

**Пример 8.** Заданы дифференциальные уравнения звеньев 1 и 2:

$$(p + 1)x = \varepsilon,$$

$$px_2 = x.$$

Требуется найти дифференциальное уравнение соединения с отрицательной обратной связью.

□ Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем  $D_1 = p + 1, M_1 = 1, D_2 = p, M_2 = 1$ . Порядки уравнивающих операторов  $\nu = n_2 = 1, \mu = m_1 = 0$ , поэтому  $U_1 = \alpha_0 + \alpha_1 p, U_2 = \beta_0$ .

Выпишем равенство (21) с применением (17), (18):

$$(\alpha_0 + \alpha_1 p)^* 1 = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 p \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 1 \cdot p = \alpha_0 + \alpha_1 p = \beta_0 * p = \beta_0 p.$$

Отсюда  $\alpha_0 = 0, \beta_0 = \alpha_1$ . При  $\alpha_v = \alpha_1 = 1$  имеем  $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1$ . Операторы искомого дифференциального уравнения:

$$D = [U_1 * D_1] + [U_2 * M_2] = (1 \cdot p) * (1 \cdot p + 1) + (1 * 1) =$$

$$= 1 \cdot p \cdot 1 \cdot p + 1 \cdot p \cdot 1 + (p + 1)p + 1 = p^2 + p + 1;$$

$$M = U_1 * M_1 = (1 \cdot p) * 1 = 1 \cdot p \cdot 1 + p = p.$$

Поэтому дифференциальное уравнение соединения с обратной связью имеет вид  $(p^2 + p + 1)x = pg$  или  $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \dot{g}(t)$ .

#### З а н я т и е 4. СВЯЗЬ ВХОД-ВЫХОД

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = b_m(t)g^{(m)}(t) + \dots + b_0(t)g(t) \quad (23)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}_0. \quad (24)$$

Требуется по заданному входному сигналу и начальным условиям найти выходной сигнал.

Для линейных систем справедлив **принцип суперпозиции**: эффект, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме эффектов каждого из воздействий в отдельности. Поэтому выходной сигнал линейной системы представляется в виде суммы свободного и вынужденного движений:

$$x(t) = x_c(t) + x_{\text{вын}}(t). \quad (25)$$

**Свободное движение**  $x_c(t)$  происходит при отсутствии внешнего воздействия ( $g(t) = 0$ ) вследствие ненулевых начальных условий. Оно является решением однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному уравнению системы:

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = 0 \quad (26)$$

с начальными условиями (24). В случае, когда начальные условия нулевые, свободное движение в системе отсутствует ( $x_c(t) = 0$ ).

**Вынужденное движение**  $x_{\text{вын}}(t)$  происходит вследствие внешнего воздействия  $g(t)$  при нулевых начальных условиях. Оно является решением неоднородного уравнения (23) при нулевых начальных условиях. Вынужденное движение  $x_{\text{вын}}(t)$  отлично от нуля только после приложения внешнего воздействия. Подчеркивая эту причинно-следственную связь, вынужденное движение системы при внешнем воздействии, отличном от нуля при  $t > t_0$ , будем обозначать  $x_{\text{вын}}(t) \cdot I(t - t_0)$ , где  $I(t - t_0)$  – единичная ступенчатая функция (2). Выходной сигнал системы будет иметь вид

$$x(t) = x_c(t) + x_{\text{вын}}(t) \cdot I(t - t_0), \quad (27)$$

где функции  $x_c(t)$ ,  $x_{\text{вын}}(t)$  можно считать  $n$  раз непрерывно дифференцируемыми.

**З а м е ч а н и я.**

1. Общее решение однородного уравнения (26) находится по формуле

$$x_0(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t), \quad (28)$$

где  $c_1, \dots, c_n$  – произвольные постоянные;  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  – фундаментальная система решений уравнения (26).

Если система (23) стационарная, т.е. описывается уравнением

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_0 x(t) = b_m g^{(m)}(t) + \dots + b_0 g(t)$$

с постоянными коэффициентами, то сначала определяются корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (29)$$

Если корни действительные разные, то (28) имеет вид

$$x_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}. \quad (30)$$

Если среди корней есть кратный действительный корень  $\lambda_j$  кратности  $k$ , то ему соответствует следующая составляющая общего решения

шения:

$$x_{0j}(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}) e^{\lambda_j t} \quad (31)$$

где  $c_1, \dots, c_k$  – произвольные постоянные.

Паре комплексных сопряжённых корней  $a_j \pm \beta_j i$  соответствует решение

$$x_{0j}(t) = e^{\alpha_j t} (c_1 \cos \beta_j t + c_2 \sin \beta_j t), \quad (32)$$

а паре комплексных сопряжённых корней кратности  $k$  –

$$x_{0j}(t) = e^{\alpha_j t} [(c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}) \cos \beta_j t + (d_1 + d_2 t + \dots + d_k t^{k-1}) \sin \beta_j t], \quad (33)$$

где  $c_1, \dots, c_k; d_1, \dots, d_k$  – произвольные постоянные.

2. Частное решение неоднородного уравнения (23) находится методом вариации произвольных постоянных или методом подбора. В частном случае, когда система описывается уравнением

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_0 x(t) = g(t); \quad g(t) = [R_q(t) \cos \beta t + P_l(t) \sin \beta t] e^{\alpha t},$$

где  $R_q(t), P_l(t)$  – многочлены степеней  $q$  и  $l$ , соответственно,  $\alpha, \beta$  – заданные числа, частное решение ищется в форме

$$x_{\text{н}}(t) = e^{\alpha t} [Q_m(t) \cos \beta t + T_m(t) \sin \beta t] t^s, \quad (34)$$

в которой  $m = \max(q, l)$ ,  $Q_m(t), T_m(t)$  – многочлены степени  $m$  с неопределёнными коэффициентами; показатель степени  $s$  определяется следующим образом:

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если число } (\alpha + i\beta) \text{ не совпадает ни с одним из корней} \\ & \text{характеристического уравнения;} \\ k, & \text{если число } (\alpha + i\beta) \text{ совпадает с корнем } x \text{ арактеристического} \\ & \text{уравнения кратности } k. \end{cases}$$

3. Методика решения задачи анализа выходных процессов для стационарных систем с помощью перехода от начальных условий к начальным значениям изложена ранее.

4. По реакции системы на входное воздействие в виде единичной ступенчатой функции можно определить основные показатели качества переходных процессов (рис. 15):

а) статическое отклонение  $x_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ ;

б) максимальное отклонение  $x_{\text{max}}$ ;

в) время переходного процесса  $T_p$  – наименьшее время, после которого выполняется условие  $|x(t) - x_{\infty}| < \Delta$ , где  $\Delta$  – заданная величина;

г) перерегулирование  $\sigma = \frac{x_{\text{max}} - x_{\infty}}{x_{\infty}} \cdot 100\%$ , если  $x_{\infty} \neq 0$ ;

д) число колебаний выходного сигнала за время переходного процесса.

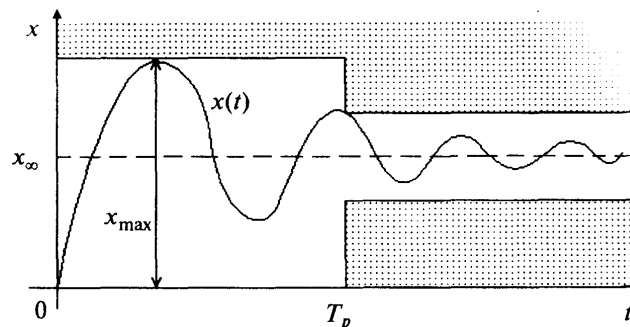


Рис. 15

Система управления удовлетворяет требуемому качеству, если все показатели качества не превышают заранее заданных значений.

### Анализ выходных процессов

#### Постановка задачи.

Пусть известны:

- а) входной сигнал  $g(t)$ ;
- б) система, описываемая дифференциальным уравнением

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = b_m(t)g^{(m)}(t) + \dots + b_0(t)g(t);$$

- в) начальные условия:

$$x(t_0) = x_0; \quad \dot{x}(t) = \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}.$$

Требуется найти выходной сигнал  $x(t)$ .

#### Алгоритм решения задачи.

1. Найти свободное движение, решив однородное дифференциальное уравнение (26) с заданными начальными условиями (24).
2. Найти вынужденное движение, решив неоднородное дифференциальное уравнение (23) с нулевыми начальными условиями.
3. Определить выходной сигнал как сумму свободного и вынужденного движений.

**Пример 9.** Найти реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$T\ddot{x}(t) + x(t) = g(t), \quad T > 0,$$

на входной сигнал  $g(t) = I(t)$  при нулевых начальных условиях.

1. Найдём свободное движение. Так как начальные условия нулевые, свободное движение отсутствует, т.е.  $x_c(t) = 0$ .

2. Найдём вынужденное движение как решение уравнения  $T\ddot{x}(t) + x(t) = 1$  при условии  $x(0) = 0$ .

- а) Общее решение однородного уравнения

$$T\ddot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение  $T\lambda + 1 = 0$  имеет корень  $\lambda = -\frac{1}{T}$ . Согласно (30) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x_0(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}.$$

- б) Частное решение неоднородного уравнения  $x_n(t) = 1$ .

- в) Общее решение неоднородного уравнения

$$x(t) = x_0(t) + x_n(t) = Ce^{-\frac{t}{T}} + 1.$$

- г) Из начального условия  $x(0) = C + 1 = 0$  следует  $C = -1$ .

Окончательно получаем

$$x_{\text{вын}}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}.$$

3. Выходной сигнал определяется вынужденным движением

$$x(t) = x_{\text{вын}}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0.$$

Реакция аperiodического звена на единичное ступенчатое воздействие изображена на рис. 6, в.

**Пример 10.** Найти реакцию колебательного звена, описываемого дифференциальным уравнением

$$3\ddot{x}(t) + \sqrt{3}\dot{x}(t) + x(t) = g(t),$$

на входное воздействие  $g(t) = I(t)$  при нулевых начальных условиях (здесь  $T = \sqrt{3}$ ,  $\xi = 0,5$ ).

1. Найдём свободное движение. Так как начальные условия нулевые, свободное движение отсутствует, т.е.  $x_c(t) = 0$ .

2. Найдём вынужденное движение, которое является решением неоднородного дифференциального уравнения  $3\ddot{x}(t) + \sqrt{3}\dot{x}(t) + x(t) = 1$  при нулевых начальных условиях  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

а) Общее решение однородного уравнения

$$3\ddot{x}(t) + \sqrt{3}\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение  $3\lambda^2 + \sqrt{3}\lambda + 1 = 0$  имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \pm \frac{i}{2} = \alpha \pm i\beta \left( \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{1}{2} \right).$$

Согласно (32) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x_0(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}t} \left( c_1 \cos \frac{t}{2} + c_2 \sin \frac{t}{2} \right).$$

б) Частное решение неоднородного уравнения:  $x_h(t) = A$ . В результате подстановки в неоднородное уравнение имеем  $A = 1 = x_h(t)$ .

в) Общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_0(t) + x_h(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}t} \left( c_1 \cos \frac{t}{2} + c_2 \sin \frac{t}{2} \right) + 1.$$

г) Из начальных условий

$$x(0) = c_1 + 1 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\sqrt{3}}{6}c_1 + \frac{c_2}{2} = 0$$

получаем  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , а вынужденное движение

$$x_{\text{вын}}(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}t} \left( -\cos \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{t}{2} \right) + 1.$$

3. Выходной сигнал определяется вынужденным движением:

$$x(t) = x_{\text{вын}}(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}t} \left( -\cos \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{t}{2} \right) + 1.$$

**Пример 11.** Найти свободное и вынужденное движения, а также выходной сигнал системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) + x(t) = g(t),$$

с начальным условием  $x(0) = 0,5$  при входном сигнале  $g(t) = I(t)$ .

1. Определяем свободное движение как решение однородного дифференциального уравнения  $\dot{x}(t) + x(t) = 0$  при начальном условии  $x(0) = 0,5$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda + 1 = 0$  имеет корень  $\lambda = -1$ . Согласно (30) общее решение однородного уравнения имеет вид  $x_0(t) = Ce^{-t}$ . Из начального условия получаем  $x(0) = C = 0,5$  и окончательно свободное движение

$$x_c(t) = \frac{1}{2} e^{-t}.$$

2. Находим вынужденное движение как решение неоднородного дифференциального уравнения  $\dot{x}(t) + x(t) = 1$  при начальном условии  $x(0) = 0$ .

а) Общее решение однородного уравнения имеет вид  $x_0(t) = Ce^{-t}$  (см. п. 1).

б) Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде  $x_h(t) = A$ . В результате подстановки в неоднородное уравнение имеем  $A = 1 = x_h(t)$ .



нородное уравнение имеем  $A=1$ ,  $x_h(t)=1$ .

в) Общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_0(t) + x_h(t) = Ce^{-t} + 1.$$

г) Из начального условия  $x(0) = C + 1 = 0$  следует  $C = -1$ . Тогда вынужденное движение

$$x_{\text{вын}}(t) = -e^{-t} + 1.$$

3. Выходной сигнал определяется по формуле (25):

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-t} + 1 = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

**Пример 12.** Найти свободное и вынужденное движения, а также выходной сигнал системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = g(t)$$

с начальными условиями  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 3$  при входном сигнале

$$g(t) = \begin{cases} 2e^{3t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

1. Определяем свободное движение как решение однородного дифференциального уравнения  $\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$  при начальных условиях  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 3$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$  имеет два корня:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ .

Согласно (30) получаем общее решение однородного уравнения:

$$x_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Из начальных условий

$$x(0) = c_1 + c_2 = 1;$$

$$\dot{x}(0) = c_1 + 2c_2 = 3$$

имеем  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 2$ , а свободное движение

$$x_c(t) = -e^t + 2e^{2t}.$$

2. Находим вынужденное движение как решение неоднородного дифференциального уравнения  $\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 2e^{3t}$  при условиях  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

а) Общее решение однородного уравнения получено в п.1:

$$x_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

б) Частное решение неоднородного уравнения  $x_h(t) = Ae^{3t}$ . Подставляя в неоднородное уравнение, имеем  $9e^{3t}A - 9Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = 2e^{3t}$ . Отсюда  $A = 1$ ,  $x_h(t) = e^{3t}$ .

в) Общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_0(t) + x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + e^{3t}.$$

г) Подставляя в начальные условия, получаем

$$x(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = c_1 + 2c_2 + 3 = 0.$$

Отсюда  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -2$ , а вынужденное движение

$$x_{\text{вын}}(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}.$$

3. Выходной сигнал определяется по формуле (25):

$$x(t) = -e^t + 2e^{2t} + e^t - 2e^{2t} + e^{3t} = e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

**Пример 13.** Найти свободное и вынужденное движения, а также выходной сигнал системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = g(t)$$

с начальными условиями  $x(0)=1$ ,  $\dot{x}(0)=-1$  при входном сигнале

$$g(t) = \cos 2t \cdot I(t).$$

1. Определяем свободное движение как решение однородного дифференциального уравнения  $\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0$  при начальных условиях  $x(0)=1$ ,  $\dot{x}(0)=-1$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 4 = 0$  имеет два комплексных сопряженных корня  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$  ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ ). Согласно (32) получаем общее решение однородного уравнения:

$$x_0(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Из начальных условий

$$x(0) = c_1 = 1,$$

$$\dot{x}(0) = (-2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t)|_{t=0} = 2c_2 = -1$$

имеем  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -\frac{1}{2}$ , а свободное движение

$$x_c(t) = \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

## Т е м а 2. МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### З а н я т и е 5. ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

**5.1. Описание сигналов.** Входные, выходные и промежуточные детерминированные сигналы в многомерных системах представляются вектор-функциями времени, например:

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

где  $g(t)$  –  $r$ -мерный входной, а  $y(t)$  –  $k$ -мерный выходной сигналы.

В качестве компонент входного сигнала  $g(t)$  могут использоваться единичные ступенчатые функции (2) и дельта-функции (1).

**5.2. Описание систем.** Многомерные линейные нестационарные системы в отличие от одномерных имеют  $r$  входов и  $k$  выходов (рис. 16). Они описываются уравнениями состояния вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)g(t) \tag{35}$$

с начальными условиями

$$x_0(t) = x_0 \tag{36}$$

и уравнениями выхода

$$y(t) = C(t)x(t), \tag{37}$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $g$  –  $r$ -мерный вектор входных воздействий (управлений);  $y$  –  $k$ -мерный вектор выхода (вектор измерений);  $x_0$  – начальное состояние;  $t$  – время;  $t_0$  – начальный момент времени (момент подачи входного воздействия);  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  – матрицы размера  $(n \times n)$ ,  $(n \times r)$ ,  $(k \times n)$ , соответственно.

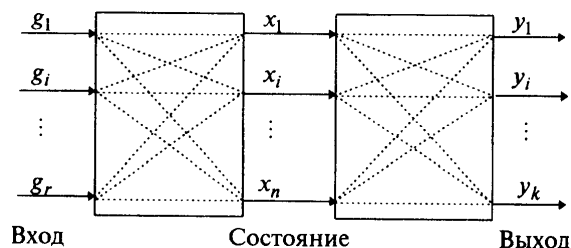


Рис. 16

Многомерную систему можно рассматривать как совокупность  $rk$  одномерных систем, каждая из которых связывает один из  $r$  входов с одним из  $k$  выходов. Если  $r=1$  и  $k=1$ , система является одномерной. Если матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  не зависят от времени  $t$ , система называется *многомерной стационарной*.

**Пример 15.** Записать уравнения состояния и выхода многомерной системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + g_1, & y_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2 - 3g_1, \end{aligned}$$

в матричной форме.

□ Определяем размерности сигналов:  $n=2$ ,  $r=1$ ,  $k=1$  и записываем соответствующие уравнения:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B(t)} g_1, \quad y_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

**Пример 16.** Записать уравнения состояния и выхода многомерной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - tx_2 + 2g_1 + g_2, & y_1 &= x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + t^2x_3 + g_2, & y_2 &= -x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 &= \sin tx_1 + 2x_2 + 3x_3 + g_1, \end{aligned}$$

в матричной форме.

□ Определяем размерности сигналов  $n=3$ ,  $r=2$ ,  $k=2$  и записываем соответствующие уравнения:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & t^2 \\ \sin t & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B(t)} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{C(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Пример 17.** Записать уравнения состояния и выхода многомерной системы

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{x} + z &= 2g_1, & y_1 &= x - 2z, \\ \ddot{z} - \dot{x} + 3z &= g_2, & y_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

в матричной форме.

□ Обозначим  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = \dot{z}$ . Тогда уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - x_3 + 2g_1, & y_1 &= x_1 - 2x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, & y_2 &= x_2 \\ \dot{x}_4 &= x_2 - 3x_3 + g_2, \end{aligned}$$

или в матричной форме ( $n = 4, r = 2, k = 2$ ):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B(t)} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

### З а н я т и е 6. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ И ВЫХОДА СОЕДИНЕНИЙ

Как следует из предыдущего раздела, многомерная система, описываемая уравнениями состояния и выхода, полностью характеризуется набором трех матриц:  $A, B, C$ . Здесь и далее аргумент  $t$  для сокращения записи опущен. Две многомерные системы могут образовывать три типа соединений: параллельное, последовательное и с обратной связью, изображенные на рис. 17,  $a - e$ .

Предполагается, что обе системы, образующие соединения, описываются в пространстве состояний соотношениями

$$\dot{x}^1 = A_1 x^1 + B_1 g^1, \quad y^1 = C_1 x^1; \quad (38)$$

$$\dot{x}^2 = A_2 x^2 + B_2 g^2, \quad y^2 = C_2 x^2, \quad (39)$$

где  $x^1, g^1, y^1$  – векторы состояния, входного сигнала и выхода первой системы размерности  $n_1, r_1, k_1$ , соответственно;  $x^2, g^2, y^2$  – векторы состояния, входного сигнала и выхода второй системы, размерности которых  $n_2, r_2, k_2$ , соответственно.

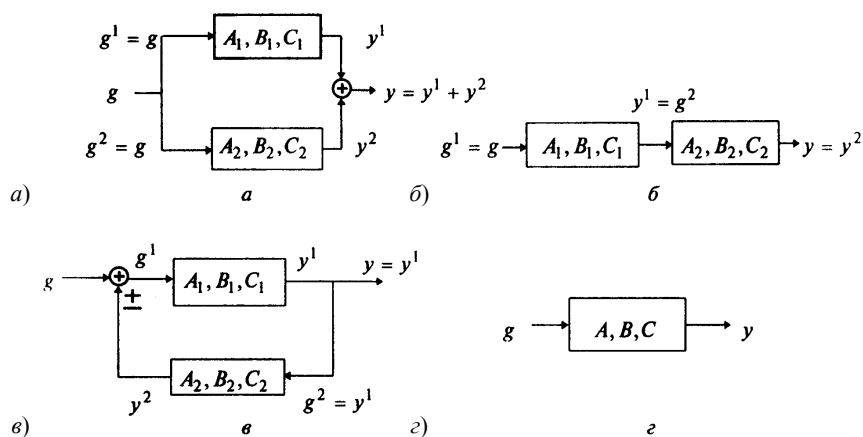


Рис. 17

Требуется заменить соединение эквивалентной системой, описываемой уравнениями (35), (37) и изображенной на рис. 17,  $z$ , в которой  $n, r, k$  – размерности векторов состояния  $x$ , входного сигнала  $g$  и выхода  $y$ .

1. **Параллельное соединение** (рис. 17,  $a$ ). Условия соединения:

$$y = y^1 + y^2; \quad k = k_1 = k_2; \quad g = g^1 = g^2; \quad r = r_1 = r_2.$$



где  $n_1=1$ ;  $r_1=1$ ;  $k_1=2$ ;  $A_1(t)=1$ ;  $B_1(t)=1$ ;  $C_1(t)=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ;

– вторая система:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 \\ g_2^2 \end{pmatrix}; \quad y_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \downarrow \\ C_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix},$$

где  $n_2=2$ ;  $r_2=2$ ;  $k_2=1$ .

Требуется записать уравнения эквивалентной системы.

□ Условие соединения  $r_2 = k_1 = 2$  выполняется. Согласно (41) эквивалентная система имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 17 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} g; \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \downarrow \\ C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где  $n = n_1 + n_2 = 3$ ;  $r = r_1 = 1$ ;  $k = k_2 = 1$ ;  $g = g^1$ .

3. **Соединение с обратной связью** (рис. 17, в). Условия соединения:  $g^1 = g \pm y^2$ ,  $g^2 = y^1$ ,  $r = r_1 = k_2$ ,  $r_2 = k_1$ . В первом соотношении (38) положим  $g^1 = g \pm y^2 = g \pm C_2 x^2$ , а в первом уравнении (39)  $g^2 = C_1 x^1$ . Сравнивая рис. 17, в и 17, з, получаем  $y = y^1$ . Эквивалентная система имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} g; \quad y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ \downarrow \\ C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Полагая  $x = (x^1 \quad x^2)^T$ ,  $n = n_1 + n_2$  и сравнивая с (35), (37), получаем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = (C_1 \quad 0)$$

эквивалентной системы размера  $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ ,  $(n_1 + n_2) \times r_1$ ,  $k_1 \times (n_1 + n_2)$ , соответственно. Знак «плюс» – для положительной, а знак «минус» – для отрицательной обратной связи.

**Пример 20.** Системы, образующие соединение с отрицательной обратной связью, описываются уравнениями:

– первая система

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} g; \quad \begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix},$$

где  $n_1=2$ ;  $r_1=1$ ;  $k_1=2$ ;

– вторая система

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 \\ g_2^2 \end{pmatrix}; \quad y_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \downarrow \\ C_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix},$$

где  $n_2=2$ ;  $r_2=2$ ;  $k_2=1$ .

Требуется записать уравнения эквивалентной системы.

□ Условия соединения  $r_2 = k_1 = 2$ ,  $r_1 = k_2 = 1$  выполняются. Согласно (42) эквивалентная система имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} g;$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где  $n = n_1 + n_2 = 4$ ;  $r = r_1 = k_2 = 1$ ;  $k = k_1 = 2$ .

### З а н я т и е 7. СВЯЗИ ВХОД-СОСТОЯНИЕ И ВХОД-ВЫХОД

Рассмотрим многомерную линейную систему, описываемую уравнениями состояния и выхода:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)g(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = C(t)x(t).$$

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции: эффект, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме эффектов от каждого из воздействий в отдельности. Закон изменения вектора состояния линейной системы представляется в виде суммы свободного и вынужденного движений:  $x(t) = x_c(t) + x_{\text{вын}}(t)$ . Аналогичное соотношение справедливо и для вектора выхода:  $y(t) = y_c(t) + y_{\text{вын}}(t)$  в силу связи (37).

**Свободное движение**  $x_c(t)$  ( $y_c(t)$ ) происходит при отсутствии внешнего воздействия ( $g(t) = 0$ ) вследствие ненулевых начальных условий (36). Оно определяется решением однородной системы уравнений, соответствующей исходному уравнению состояния (35)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (43)$$

с начальными условиями  $x(t_0) = x_0$ . Если начальные условия нулевые, свободное движение в системе отсутствует, т.е.  $x_c(t) = 0$ .

**Вынужденное движение**  $x_{\text{вын}}(t)$  ( $y_{\text{вын}}(t)$ ) – это реакция системы на внешнее воздействие  $g(t)$  при нулевых начальных условиях. Оно определяется решением неоднородного уравнения (35) при нулевых начальных условиях.

Для многомерных нестационарных систем, описываемых соотношениями (35) – (37), законы изменения векторов состояния и выхода определяются по формулам

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) g(\tau) d\tau, \quad (44)$$

$$y(t) = C(t)x(t) = C(t)\phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) g(\tau) d\tau, \quad (45)$$

где  $\phi(t, \tau)$  – *переходная матрица*, или *матрица Коши*, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial \phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\phi(t, \tau) \quad (46)$$

с начальным условием

$$\phi(\tau, \tau) = E. \quad (47)$$

Первые слагаемые в (44), (45) описывают свободное движение, а вторые – вынужденное.

Формулы (43) – (46) следуют из общего алгоритма решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, включающего три этапа.

*Первый этап.* Решается однородная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

соответствующая исходной неоднородной системе

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)g(t).$$

Её общее решение записывается в форме

$$x_0(t) = \varphi(t)c = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t),$$

где  $c = (c_1, \dots, c_n)^T$  – вектор произвольных постоянных;  $\varphi(t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  – фундаментальная матрица;  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  – линейно независимые решения однородной системы.

Каждый столбец  $\varphi_i(t)$  фундаментальной матрицы удовлетворяет однородной системе, т.е. справедливы равенства  $\dot{\varphi}_i(t) = A(t)\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  или  $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)$ .

*Второй этап.* Ищется общее решение неоднородной системы методом вариации произвольных постоянных:

$$x(t) = \varphi(t)c(t),$$

где вектор-функция  $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$  подлежит определению.

Подставляя  $x(t)$  в неоднородную систему, получаем

$$\dot{\varphi}(t)c(t) + \varphi(t)\dot{c}(t) = A(t)\varphi(t)c(t) + B(t)g(t).$$

С учётом  $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)$  имеем

$$\varphi(t)\dot{c}(t) = B(t)g(t), \text{ или } \dot{c}(t) = \varphi^{-1}(t)B(t)g(t).$$

Обратная матрица  $\varphi^{-1}(t)$  существует, поскольку  $\det \varphi(t) \neq 0$  как определитель Вронского. Интегрируя последнее соотношение, находим

$$c(t) = \int_{t_0}^t \varphi^{-1}(\tau)B(\tau)g(\tau)d\tau + c_0,$$

где  $c_0$  – вектор произвольных постоянных.

В результате искомое общее решение имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)B(\tau)g(\tau)d\tau + \varphi(t)c_0.$$

*Третий этап.* Ищется частное решение неоднородной системы, удовлетворяющее начальным условиям  $x(t_0) = x_0$ :

$$x(t_0) = \varphi(t_0)c_0 = x_0.$$

Отсюда

$$c_0 = \varphi^{-1}(t_0)x_0 \text{ и } x(t) = \varphi(t)\varphi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)B(\tau)g(\tau)d\tau.$$

Обозначая  $\phi(t, \tau) = \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)$ , получаем формулу (44). При  $t = \tau$  получаем начальное условие (47). Умножая уравнение  $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)$  справа на матрицу  $\varphi^{-1}(\tau)$ , имеем  $\frac{\partial \phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t) \cdot \frac{\varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)}{\phi(t, \tau)}$ , т.е. уравнение (46).

**З а м е ч а н и е.** Для многомерных стационарных систем, описываемых уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bg(t), \tag{48}$$

$$x(0) = x_0, \tag{49}$$



$$y(t) = Cx(t), \quad (50)$$

законы изменения вектора состояния и вектора выхода находятся по формулам

$$x(t) = \phi(t)x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)Bg(\tau)d\tau, \quad (51)$$

$$y(t) = Cx(t) = C\phi(t)x_0 + C\int_0^t \phi(t-\tau)Bg(\tau)d\tau, \quad (52)$$

где  $\phi(\eta) = \phi(t-\tau)$  – переходная матрица стационарной системы, зависящая от разности  $t-\tau = \eta$ .

В данном случае решение уравнения (46) имеет вид

$$\phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} = \phi(t-\tau) = \phi(\eta).$$

### Анализ выходных процессов

#### Постановка задачи.

Пусть известны:

- входной сигнал  $g(t)$ ;
- система, описываемая уравнениями состояния и выхода

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)g(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= C(t)x(t); \end{aligned}$$

- вектор начальных состояний  $x_0$ .

Требуется найти законы изменения вектора состояния  $x(t)$  и вектора выхода  $y(t)$ .

**З а м е ч а н и е.** Если система образована соединениями подсистем, то она заменяется эквивалентной системой так, как показано ранее.

#### Алгоритм решения задачи.

- Найти переходную матрицу (одним из трёх способов, рассмотренных далее).
- Используя соотношения (44), (45) или (51), (52) в зависимости от типа системы, определить законы изменения векторов состояния и выхода.

Рассмотрим различные способы нахождения переходной матрицы.

*Первый способ.* Если *фундаментальная матрица*  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ , столбцы которой образуют фундаментальную систему решений однородной системы дифференциальных уравнений (43), известна, то переходная матрица находится по формуле

$$\phi(t, \tau) = \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau), \quad (53)$$

**З а м е ч а н и е.** Общее решение однородной системы (43) можно записать в виде

$$x_0(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t), \quad (54)$$

где  $c_1, \dots, c_n$  – произвольные постоянные

Для стационарных систем следует выполнить действия:

- Найти корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0, \quad (55)$$

где  $E$  – единичная матрица.

- Выписать выражение общего решения (54) для каждой компоненты вектора  $x$ , следуя известным правилам в зависимости от типа корней. При этом произвольные постоянные в выражениях различны.
- Полученные выражения подставить в однородную систему. Во многих случаях достаточно подставить в первые  $n-1$  уравнений системы, что облегчает решение задачи.
- Приравнять коэффициенты при одинаковых функциях аргумента  $t$  и решить полученную систему уравнений.
- Выписать общее решение, зависящее от  $n$  произвольных постоянных в форме (54). В результате находится фундаментальная матрица, а по формуле (53) – переходная.

**Пример 21.** Найти переходную матрицу системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2,$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 + g.$$

□ Составим матрицу системы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Используем приведённый выше алгоритм.

1. Корни характеристического уравнения  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ,  $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$  действительные разные:  $\lambda_1 = 5$ ;  $\lambda_2 = -1$ .

2. Запишем выражения общего решения для каждой компоненты:

$$x_1(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t},$$

$$x_2(t) = B_1 e^{5t} + B_2 e^{-t}.$$

3. Подставим полученные соотношения в первое уравнение системы:

$$5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t} = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} + 2B_1 e^{5t} + 2B_2 e^{-t}.$$

4. Приравняв коэффициенты при  $e^{5t}$  и  $e^{-t}$ , получим

$$4C_1 = 2B_1, \text{ или } B_1 = 2C_1,$$

$$-2C_2 = 2B_2, \text{ } B_2 = -C_2.$$

5. Из пп. 2, 4 имеем

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \\ 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $\varphi_1(t)$   $\varphi_2(t)$

Отсюда

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{-1}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-5t} & e^{-5t} \\ 2e^t & -e^t \end{pmatrix}$$

и по формуле (53)

$$\begin{aligned} \phi(t, \tau) &= \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-5\tau} & e^{-5\tau} \\ 2e^\tau & -e^\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5(t-\tau)} + 2e^{-(t-\tau)} & e^{5(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \\ 2e^{5(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)} & 2e^{5(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5\eta} + 2e^{-\eta} & e^{5\eta} - e^{-\eta} \\ 2e^{5\eta} - 2e^{-\eta} & 2e^{5\eta} + e^{-\eta} \end{pmatrix} = \phi(\eta). \end{aligned}$$

**Пример 22.** Найти переходную матрицу системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + g.$$

□ Составим матрицу системы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Используем приведённый выше алгоритм.

1. Корень характеристического уравнения  $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ,  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$  действительный кратный:  $\lambda = -1$ ,  $k = 2$ .

2. Выражения общего решения для каждой компоненты имеют вид

$$x_1(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t},$$

$$x_2(t) = (B_1 + B_2 t) e^{-t}.$$

3. Подставим полученные соотношения в первое уравнение системы:

$$C_2 e^{-t} - (C_1 + C_2 t) e^{-t} = (B_1 + B_2 t) e^{-t}.$$

4. Приравняв коэффициенты при  $e^{-t}$  и  $te^{-t}$ , получим

$$\begin{aligned} C_2 - C_1 &= B_1, \\ -C_2 &= B_2. \end{aligned}$$

5. Из пп. 2, 4 имеем

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} \\ (C_2 - C_1) e^{-t} - C_2 t e^{-t} \end{pmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}}_{\varphi_1(t)} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} t e^{-t} \\ e^{-t} - t e^{-t} \end{pmatrix}}_{\varphi_2(t)}.$$

Отсюда находится фундаментальная матрица

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - t e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^t - t e^t & -t e^t \\ e^t & e^t \end{pmatrix}$$

и по формуле (53)

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tau) &= \begin{pmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - t e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\tau - \tau e^\tau & \tau e^\tau \\ e^\tau & e^\tau \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-(t-\tau)} + (t-\tau) e^{-(t-\tau)} & (t-\tau) e^{-(t-\tau)} \\ -(t-\tau) e^{-(t-\tau)} & 2e^{-(t-\tau)} - (t-\tau) e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\eta} + \eta e^{-\eta} & \eta e^{-\eta} \\ -\eta e^{-\eta} & e^{-\eta} - \eta e^{-\eta} \end{pmatrix} = \Phi(\eta). \end{aligned}$$

В случае *нестационарных* систем для определения фундаментальной матрицы можно воспользоваться следующим приёмом, позволяющим уменьшить порядок системы, если известно её решение  $\varphi_1 = (\varphi_{11} \dots \varphi_{n1})^T$  и  $\varphi_{n1}(t) \neq 0$  при  $t > \tau$ .

Тогда вектор-функции  $\varphi_q = (\varphi_{1q} \dots \varphi_{nq})^T$ ,  $q = 2, 3, \dots, n$ , образующие вместе с функцией  $\varphi_1(t)$  фундаментальную систему решений для (43), можно найти по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_{1q} &= \mathfrak{A}_q \varphi_{11} + z_{1q}; \\ &\dots \\ \varphi_{n-1,q} &= \mathfrak{A}_q \varphi_{n-1,1} + z_{n-1,q}, \quad q = 2, 3, \dots, n; \\ \varphi_{nq} &= \mathfrak{A}_q \varphi_{n1}, \end{aligned} \tag{56}$$

где

$$\mathfrak{A}_q = \int \frac{1}{\varphi_{n-1}(t)} \sum_{s=1}^{n-1} a_{ns} z_{sq} dt,$$

а функции  $z_{sq}(t) = (z_{1q}, \dots, z_{n-1,q})^T$ ,  $q = 2, 3, \dots, n$  являются линейно независимыми решениями системы  $(n-1)$  порядка

$$\dot{z}_{pq} = \sum_{s=1}^{n-1} \left[ a_{ps} - \frac{\varphi_{p1}}{\varphi_{n1}} a_{ns} \right] z_{sq}, \quad p = 1, \dots, n-1. \tag{57}$$

**Пример 23.** Найти переходную матрицу системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = \frac{2t^2 + 1}{t(t^2 + 1)} x_1(t) - \frac{t^2}{t^2 + 1} x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{t^2(t^2 + 1)} x_1(t) - \frac{1}{t(t^2 + 1)} x_2(t).$$

□ Для определения переходной матрицы  $\Phi(t, \tau)$  нужно найти два линейно независимых решения задан-

ной системы. Первое решение будем искать с помощью рядов, представляя функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  в виде

$$x_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m, \quad x_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m.$$

Подставив эти функции в систему, предварительно умножив первое уравнение на  $t(t^2+1)$ , а второе – на  $t^2(t^2+1)$ , имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} t(t^2+1) m a_m t^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (2t^2+1) a_m t^m - \sum_{m=0}^{\infty} t^3 b_m t^m,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} t^2(t^2+1) m b_m t^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m - \sum_{m=0}^{\infty} t b_m t^m.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad a_0 = 0, \quad a_1 - b_0 = 0; \\ a_2 + 2a_0 = 2a_2, \quad a_2 - b_1 = b_1, \quad a_2 - b_2 = 2b_2; \\ a_3 + 2a_1 = 3a_3 + a_1, \quad a_4 - b_3 = 3b_3 + b_1; \\ \dots \quad \dots \\ a_m + 2a_{m-2} - b_{m-3} = (m-2)a_{m-2} - m a_m; \\ a_m - b_{m-1} = (m-1)b_{m-1} + (m-3)b_{m-3}, \\ m = 5, 6, \dots \end{aligned}$$

Данной системе уравнений удовлетворяют коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_m = 0, \quad m = 2, 3, \dots; \\ b_0 = 1, \quad b_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, вектор-функция  $(t, 1)^T$  является решением системы.

Обозначим это решение  $\varphi_1(t) = (t, 1)^T$ . Так как  $\varphi_{21}(t) = 1 \neq 0$  при всех  $t$ , можно понизить порядок системы. Согласно (56) второе решение  $\varphi_2(t) = (\varphi_{12}(t), \varphi_{22}(t))^T$  ищется в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(t) &= \vartheta(t) \varphi_{11}(t) + z(t); \\ \varphi_{22}(t) &= \vartheta(t) \varphi_{21}(t), \end{aligned}$$

где  $\vartheta(t) = \int \frac{1}{\varphi_{21}(t)} \frac{1}{t^2(t^2+1)} z(t) dt$ , а  $z(t)$  – решение системы (57), которая в данном случае состоит из одного уравнения ( $n-1=1$ ):

$$\dot{z}(t) = \left[ \frac{2t^2+1}{t^2(t^2+1)} - \frac{\varphi_{11}(t)}{\varphi_{11}(t)} \frac{1}{t^2(t^2+1)} \right] z(t).$$

Подставляя  $\varphi_{11}(t) = t$  и  $\varphi_{21}(t) = 1$ , получаем уравнение

$$\dot{z}(t) = \frac{2t}{t^2+1} z(t),$$

решение которого находится с помощью разделения переменных, т.е.  $\frac{dz}{z} = \frac{2t}{t^2+1} dt$ . В результате  $z(t) = t^2 + 1$ .

Тогда  $\vartheta(t) = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}$  и, следовательно,  $\varphi_{12}(t) = -\frac{1}{t} t + t^2 + 1 = t^2$ ,  $\varphi_{22}(t) = -\frac{1}{t}$ .

По найденным решениям  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  составляем фундаментальную матрицу

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \text{ и } \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t^2 \\ 1 & -t \end{pmatrix}.$$

По формуле (53) имеем

$$\Phi(t, \tau) = \frac{1}{\tau^2+1} \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & \tau^2 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t(1+t\tau)}{\tau(\tau^2+1)} & \frac{t\tau(\tau-t)}{\tau^2+1} \\ \frac{t-\tau}{\tau(\tau^2+1)} & \frac{\tau(t\tau+1)}{t(\tau^2+1)} \end{pmatrix}.$$

*Второй способ.* Применение теоремы разложения Сильвестра. Переходная матрица стационарной системы определяется по формуле

$$\Phi(\eta) = e^{A\eta} \sum_{i=1}^n \left( e^{\lambda_i \eta} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{A - \lambda_j E}{\lambda_i - \lambda_j} \right), \quad (58)$$

где  $\lambda_i$  – собственные значения матрицы  $A$  (здесь предполагается, что они различны);  $E$  – единичная матрица.

**Пример 24.** Найти законы изменения векторов состояния и выхода многомерной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + g, & y &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2, \end{aligned}$$

с начальными условиями  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -1$  при входном сигнале

$$g(t) = \begin{cases} e^t, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

1. Перепишем уравнения системы в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} g; \quad y = (1 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

2. Найдём переходную матрицу. Для этого определим собственные значения матрицы  $A$ . Получим

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1-\lambda^2) - 4 = 0.$$

Отсюда  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -1$ . По формуле (58) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) &= e^{3\eta} \frac{A - (-1)E}{3 - (-1)} + e^{-\eta} \frac{A - 3E}{(-1) - 3} = \frac{1}{4} e^{3\eta} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} e^{-\eta} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3\eta} + e^{-\eta} & e^{3\eta} - e^{-\eta} \\ e^{3\eta} - e^{-\eta} & e^{3\eta} + e^{-\eta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. По формулам (51), (52) найдём законы изменения векторов состояния и выхода:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3\eta} + e^{-\eta} & e^{3\eta} - e^{-\eta} \\ e^{3\eta} - e^{-\eta} & e^{3\eta} + e^{-\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{3(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} & e^{3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \\ e^{3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} & e^{3(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\tau} d\tau = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t - \frac{3}{4}e^{-t} \end{pmatrix};$$

$\downarrow$   $x_c(t)$                        $\downarrow$   $x_{\text{вын}}(t)$

$$y(t) = (1 \ 1) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + (1 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix}.$$

$\downarrow$   $y_c(t)=0$                        $\downarrow$   $y_{\text{вын}}(t)$

**Пример 25.** Найти законы изменения векторов состояния и выхода многомерной системы

$$\dot{x}_1 = -x_2 + g_1, \quad y_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + g_2, \quad y_2 = x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

с начальными условиями  $x_1(0) = -1$ ,  $x_2(0) = 0$  при входном сигнале

$$g_1(t) = \begin{cases} 2, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0; \end{cases} \quad g_2(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

1. Перепишем уравнения системы в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

2. Найдём переходную матрицу. Для этого определим собственные значения матрицы  $A$ . Получим

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 1 = 0.$$

Отсюда  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ . По формуле (58) имеем

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= e^{i\eta} \frac{A - (-i)E}{i - (-i)} + e^{-i\eta} \frac{A - iE}{(-i) - i} = \frac{1}{2i} e^{i\eta} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} - \frac{1}{2i} e^{-i\eta} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

так как  $\cos \eta = \frac{e^{i\eta} + e^{-i\eta}}{2}$ ,  $\sin \eta = \frac{e^{i\eta} - e^{-i\eta}}{2i}$ .

3. По формулам (51), (52) найдём законы изменения векторов состояния и выхода:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & -\sin(t-\tau) \\ \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + 2\sin t + \cos t \\ 2 - 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix}; \\ &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad x_c(t) \quad \quad \quad x_{\text{вын}}(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + 2\sin t + \cos t \\ 2 - 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t - \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - 2\cos t + \sin t \\ \frac{5}{2}\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2\cos t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

$\downarrow$   $x_c(t)$                        $\downarrow$   $x_{\text{вын}}(t)$

*Третий способ.* Использование теоремы Кели-Гамильтона.

Рассмотрим два случая ее применения.

1. В случае различных собственных значений матрицы  $A$

$$\phi(\eta) = r_0 E + r_1 A + \dots + r_{n-1} A^{n-1} = R(A), \quad (59)$$

где  $n$  – число строк матрицы  $A$ ;  $A^{n-1}$  –  $(n-1)$ -я степень матрицы  $A$ , коэффициенты  $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$  многочлена  $R(\lambda)$  находятся из системы уравнений

$$e^{\lambda_i \eta} = R(\lambda_i) = r_0 + r_1 \lambda_i + \dots + r_{n-1} \lambda_i^{n-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (60)$$

2. В случае кратных собственных значений матрицы  $A$  формула (59) также справедлива. Корню  $\lambda_i$  кратности  $\mu$  в системе  $n$  уравнений (60) соответствуют соотношения

$$\frac{d^k e^{\lambda_i \eta}}{d\lambda^k} = \frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k} \Big|_{\lambda=\lambda_i}, \quad k = 0, 1, \dots, \mu - 1. \quad (61)$$

**Пример 26.** Найти переходную матрицу системы, если матрица  $A$  в уравнении состояния имеет вид  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  (см. пример 24).

□ Собственные значения матрицы  $A$   $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -1$  различны,  $n = 2$ . Поэтому составим систему уравнений (60):

$$e^{3\eta} = r_0 + 3r_1,$$

$$e^{-\eta} = r_0 + r_1(-1).$$

Отсюда  $r_0 = \frac{1}{4}[e^{3\eta} + 3e^{-\eta}]$ ,  $r_1 = \frac{1}{4}[e^{3\eta} - e^{-\eta}]$ . По формуле (59) имеем

$$\phi(\eta) = r_0 E + r_1 A = \frac{1}{4}[e^{3\eta} + 3e^{-\eta}] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}[e^{3\eta} - e^{-\eta}] \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3\eta} + e^{-\eta} & e^{3\eta} - e^{-\eta} \\ e^{3\eta} - e^{-\eta} & e^{3\eta} + e^{-\eta} \end{pmatrix}.$$

Результат совпадает с полученным ранее. ■

**Пример 27.** Найти законы изменения векторов состояния и выхода многомерной системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + g, \quad y_1 = x_1 + x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2, \quad y_2 = x_1.$$

с начальными условиями  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -1$  при входном сигнале

$$g(t) = \begin{cases} -1, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

□ Перепишем уравнения системы в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B(t)} g, \quad y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

где  $n = 2$ ;  $r = 1$ ;  $k = 2$ .

2. Найдём переходную матрицу. Для этого определим собственные значения матрицы  $A$ . Получим

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Отсюда  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  (корень действительный кратный). По формуле (61) имеем

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 \eta} &= r_0 + r_1 \lambda_1; \\ \frac{de^{\lambda \eta}}{d\lambda} &= \frac{d(r_0 + r_1 \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_1}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{aligned} e^{-\eta} &= r_0 + r_1(-1); \\ \eta e^{-\eta} &= r_1. \end{aligned} \end{aligned}$$

Отсюда  $r_0 = e^{-\eta} + \eta e^{-\eta}$ ,  $r_1 = \eta e^{-\eta}$ . По формуле (59) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) &= r_0 E + r_1 A = [e^{-\eta} + \eta e^{-\eta}] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \eta e^{-\eta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\eta} + \eta e^{-\eta} & \eta e^{-\eta} \\ -\eta e^{-\eta} & e^{-\eta} - \eta e^{-\eta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. По формулам (51), (52) найдём законы изменения векторов состояния и выхода:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t} + te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \\ &\quad - \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-\tau)} + (t-\tau)e^{-(t-\tau)} & (t-\tau)e^{-(t-\tau)} \\ -(t-\tau)e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - (t-\tau)e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} + 2e^{-t} - 2 \\ 1 - e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} + 3e^{-t} - 2 \\ 1 - 2e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix}, \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad x_c(t) \quad y_{\text{вын}}(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{-t} + 2e^{-t} - 2 \\ 1 - e^{-t} - te^{-t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} - 1 \\ -2 + 2e^{-t} + te^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} - 1 \\ -2 + 3e^{-t} + te^{-t} \end{pmatrix}. \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad y_c(t) \quad y_{\text{вын}}(t) \end{aligned}$$

### Тема 3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

#### Занятие 8. ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

1. **Описание сигналов.** Сигналы в системах управления, подверженных случайным воздействиям, являются случайными процессами. В качестве их характеристик обычно используются:

- **математическое ожидание**

$$m_g(t) = M[G(t)] = \int_{R^n} gp(t, g) dg, \quad (62)$$

где  $M$  – операция вычисления математического ожидания;  $G(t)$  – вектор входного сигнала;  $p(t, f)$  – плотность вероятности случайного процесса  $G(t)$ ;

- **ковариационная функция**

$$R_g(t_1, t_2) = M \left\{ [G(t_1) - m_g(t_1)] [G(t_2) - m_g(t_2)]^T \right\}, \quad (63)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – два момента времени.

Ковариационная функция удовлетворяет условию  $R_g(t_1, t_2) = R_g(t_2, t_1)$ .

При  $t_1 = t_2$  ковариационная функция представляет собой **ковариационную матрицу**  $R_g(t) = R_g(t, t)$ , на главной диагонали которой находятся **дисперсии** каждой компоненты вектора  $G(t)$ :



$$D_i(t) = R_{g_{ii}}(t) = M \left\{ \left[ G_i(t) - m_{g_i}(t) \right]^2 \right\}. \quad (64)$$

Частным случаем случайных процессов является **белый шум**  $N(t)$ , имеющий нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию

$$R_N(t_1, t_2) = S_0(t_1) \delta(t_1 - t_2), \quad (65)$$

где  $S_0(t_1)$  – **интенсивность** шума, симметрическая неотрицательно определённая матрица;  $\delta(t_1 - t_2)$  – **симметричная дельта-функция**, определяемая условием

$$\int_a^b f(t) \delta(t - \tau) dt = \begin{cases} 0, & \tau \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty), \\ f(\tau), & \tau \in (a, b), \\ 0,5f(a), & \tau = a, \\ 0,5f(b), & \tau = b \end{cases} \quad (66)$$

для любой непрерывной в точке  $\tau$  функции  $f(t)$ .

**Стационарные случайные процессы** имеют постоянные по времени математические ожидания, а их ковариационные функции зависят от разности своих аргументов  $t_1 - t_2 = \eta$ . Поэтому последние можно рассматривать как функции одного аргумента:

$$R_g(t_1, t_2) = R_g(t_1 - t_2) = R_g(\eta). \quad (67)$$

Дисперсия стационарного процесса постоянна и равна  $D = R_g(0)$ . Например, **стационарный белый шум** имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию

$$R_N(t_1, t_2) = S_0 \delta(t_1 - t_2) \quad \text{или} \quad R_N(\eta) = S_0 \delta(\eta), \quad (68)$$

где  $S_0$  – постоянная матрица интенсивности шума.

**2. Описание систем.** Линейные системы при наличии случайных воздействий в пространстве состояний описываются **стохастическими дифференциальными уравнениями**, которые могут быть записаны в различных формах.

*Первый способ.* Система описывается уравнением

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + B(t)G(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (69)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  – матрицы размера  $(n \times n)$ ,  $(n \times r)$ ;  $G(t)$  –  $r$ -мерный случайный процесс с математическим ожиданием  $m_g(t)$  и ковариационной функцией  $R_g(t_1, t_2) = S_0(t_1) \delta(t_1 - t_2)$ ;  $X_0$  –  $n$ -мерный случайный вектор, характеризующий начальное состояние системы.

Если  $m_g(t) \equiv 0$ , сигнал  $G(t)$  совпадает с белым шумом  $N(t)$ .

*Второй способ.* Система описывается уравнением

$$dX = A(t)X(t)dt + B(t)dG(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (70)$$

где  $G(t)$  –  $r$ -мерный **винеровский случайный процесс**, удовлетворяющий условиям:  $G(t_0) = 0$ ,  $M\{G(t)\} = 0$  для всех  $t > t_0$ , вектор  $G(t)$  для любых  $t > t_0$  распределён по гауссовскому закону, процесс является однородным с независимыми приращениями. Его ковариационная функция  $R_g(t_1, t_2) = S_0 \min[t_1, t_2]$ . Если  $S_0 = E$ , винеровский случайный процесс называется **стандартным**.

## З а н я т и е 9. СВЯЗИ ВХОД-ВЫХОД

Если система задана уравнением (69), то закон изменения **математического ожидания вектора состояния** имеет вид

$$\dot{m}_x(t) = A(t)m_x(t) + B(t)m_g(t), \quad m_x(t_0) = m_0. \quad (71)$$

Закон изменения **ковариационной матрицы вектора состояния**:

$$\dot{R}_x(t) = A(t)R_x(t) + R_x(t)A^T(t) + B(t)S_0(t)B^T(t), \quad R_x(t_0) = R_0. \quad (72)$$

**Ковариационная функция** определяется по формуле

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} \phi(t_1, t_2)R_x(t_2), & t_1 \geq t_2, \\ R_x(t_1)\phi^T(t_2, t_1), & t_1 \leq t_2, \end{cases} \quad (73)$$

где  $\phi(t_1, t_2)$  – переходная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1} = A(t_1)\phi(t_1, t_2), \quad \phi(t_1, t_2) = E. \quad (74)$$

Если система задана уравнением (70), то в (71) следует положить  $m_g(t) = 0$ , а в (72) подставить  $S_0(t) = S_0$ .

Уравнение (71) получается из (69) путем нахождения математического ожидания левой и правой частей. Поясним соотношения (72), (73). Применим формулу Коши (44) для уравнения (71):

$$m_x(t) = \phi(t, t_0)m_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)m_g(\tau)d\tau. \quad (75)$$

Обозначим

$$P_x(t) = M[X(t)X^T(t)], \quad P_{xg}(t) = M[X(t)G^T(t)], \quad P_{gx}(t) = M[G(t)X^T(t)]$$

и определим ковариационную матрицу

$$R_x(t) = M\{[X(t) - m_x(t)][X(t) - m_x(t)]^T\} = M[X(t)X^T(t)] - M[X(t)m_x^T(t)] - M[m_x(t)X^T(t)] + m_x(t)m_x^T(t) = P_x(t) - m_x(t)m_x^T(t). \quad (76)$$

Выведем уравнение, описывающее изменение  $P_x(t)$ . С учетом (69) получаем

$$\begin{aligned} \dot{P}_x(t) &= M[\dot{X}(t)X^T(t)] + M[X(t)\dot{X}^T(t)] = A(t)\underbrace{M[X(t)X^T(t)]}_{P_x(t)} + \\ &+ B(t)\underbrace{M[G(t)X^T(t)]}_{P_{gx}(t)} + \underbrace{M[X(t)X^T(t)]}_{P_x(t)}A^T(t) + \underbrace{M[X(t)G^T(t)]}_{P_{xg}(t)}B^T(t) = \\ &= A(t)P_x(t) + B(t)P_{gx}(t) + P_x(t)A^T(t) + P_{xg}(t)B^T(t). \end{aligned}$$

Найдем  $P_{xg}(t)$  с учетом формулы (44) и того, что  $X_0$  и  $G(t)$  не коррелированы ( $R_{x_0g} = 0$ ):

$$\begin{aligned} P_{xg}(t) &= M[X(t)G^T(t)] = M\left[\phi(t, t_0)X_0G^T(t) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)G(\tau)G^T(t)d\tau\right] = \\ &= \phi(t, t_0)m_0m_g^T(t) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)M[G(\tau)G^T(t)]d\tau. \end{aligned}$$

Определим взаимную ковариационную функцию

$$\begin{aligned} R_{xg}(t_1, t_2) &= M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][G(t_2) - m_g(t_2)]^T\} = \\ &= \underbrace{M[X(t_1)G^T(t_2)]}_{P_{xg}(t_1, t_2)} - m_x(t_1)m_g^T(t_2) - m_x(t_1)m_g^T(t_2) + m_x(t_1)m_g^T(t_2) = \\ &= P_{xg}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_g^T(t_2). \end{aligned}$$

Используем полученное соотношение

$$\begin{aligned} M[G(\tau)G^T(t)] &= P_g(\tau, t) = m_g(\tau)m_g^T(t) + R_g(\tau, t) = \\ &= m_g(\tau)m_g^T(t) + S_0(\tau)\delta(\tau - t). \end{aligned}$$

Тогда

$$P_{xg}(t) = \phi(t, t_0) m_0 m_g^T(t) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) m_g(\tau) m_g^T(t) d\tau + \\ = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) S_0(\tau) \delta(\tau - t) d\tau.$$

Используя (74) и (75), имеем

$$P_{xg}(t) = m_x(t) m_g^T(t) + \frac{1}{2} \underbrace{\phi(t, t)}_E B(t) S_0(t) = m_x(t) m_g^T(t) + \frac{1}{2} B(t) S_0(t).$$

Аналогично можно показать, что

$$P_{gx}(t) = m_g(t) m_x^T(t) + \frac{1}{2} S_0(t) B^T(t).$$

Поэтому

$$\dot{P}_x(t) = A(t) P_x(t) + P_x(t) A^T(t) + B(t) m_g(t) m_x^T(t) + \\ + m_x(t) m_g^T(t) B^T(t) + B(t) S_0(t) B^T(t).$$

Продифференцировав (76), с учётом (75) и  $P_x(t) = R_x(t) + m_x(t) m_x^T(t)$ , получим уравнение (72).  
Используем полученное соотношение

$$\dot{R}_x(t) = \dot{P}_x - \dot{m}_x(t) m_x^T(t) - m_x(t) \dot{m}_x^T(t) = A(t) P_x(t) + P_x(t) A^T(t) + \\ + B(t) S_0(t) B^T(t) + B(t) m_g(t) m_x^T(t) + m_x(t) m_g^T(t) B^T(t) - A(t) m_x(t) m_x^T(t) - \\ - B(t) m_g(t) m_x^T(t) - m_x(t) m_x^T(t) A^T(t) - m_x(t) m_g^T(t) B^T(t) = A(t) R_x(t) \\ + A(t) m_x(t) m_x^T(t) + R_x(t) A^T(t) + m_x(t) m_x^T(t) A^T(t) + B(t) S_0(t) B^T(t) - \\ - A(t) m_x(t) m_x^T(t) - m_x(t) m_x^T(t) A^T(t) = \\ = A(t) R_x(t) + R_x(t) A^T(t) + B(t) S_0(t) B^T(t).$$

### Анализ выходных процессов

#### Постановка задачи.

Пусть известны:

- входной сигнал, заданный своими статистическими характеристиками  $m_g(t)$ ,  $R_g(t_1, t_2)$  или  $R_g(t)$ ;
- система, описываемая одним из уравнений (69) или (70);
- математическое ожидание  $m_0$  и ковариационная матрица  $R_0$  гауссовского закона распределения начального состояния  $X_0$ .

Требуется найти статистические характеристики случайного процесса  $X(t)$ : поведение математического ожидания  $m_x(t)$  и ковариационной матрицы  $R_x(t)$ , а также ковариационную функцию  $R_x(t_1, t_2)$ .

#### Алгоритм решения задачи.

- Решая уравнение (71), найти закон изменения математического ожидания выходного сигнала  $m_x(t)$ .
- Решая уравнение (72), определить закон изменения ковариационной матрицы  $R_x(t)$ .
- Найти переходную матрицу, удовлетворяющую уравнению (74), и ковариационную функцию по формуле (73).

**Пример 28.** Дано уравнение

$$\dot{X}(t) = -X(t) + G(t), \quad X(0) = X_0,$$

где  $m_g(t) = 1$ ,  $R_g(t_1, t_2) = \delta(t_1 - t_2)$ . Начальное состояние  $X_0$  характеризуется параметрами  $m_0 = 0$  и  $R_0 = 0$ .

Требуется найти  $m_x(t)$ ,  $R_x(t)$ ,  $R_x(t_1, t_2)$ .

□ 1. Так как  $A(t) = -1$ ,  $B(t) = 1$ , уравнение (71) имеет вид

$$\dot{m}_x(t) = -m_x(t) + 1, \quad m_x(0) = m_0 = 0.$$

Его решение:  $m_x(t) = 1 - e^{-t}$ .

2. Так как  $S_0(t) = 1$ , уравнение (72) принимает форму

$$\dot{R}_x(t) = -2R_x(t) + 1, \quad R_x(0) = R_0 = 0.$$

Его решение:  $R_x(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$ .

3. Найдём переходную матрицу  $\phi(t_1, t_2)$  системы, удовлетворяющую уравнению (74):

$$\frac{\partial \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1} = -\phi(t_1, t_2), \quad \phi(t_1, t_2) = 1.$$

Отсюда  $\phi(t_1, t_2) = e^{-(t_1 - t_2)}$ .

Ковариационная функция определяется по формуле (73):

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-(t_1 - t_2)} (1 - e^{-2t_2}), & t_1 \geq t_2, \\ \frac{1}{2} e^{-(t_2 - t_1)} (1 - e^{-2t_1}), & t_1 \leq t_2. \end{cases}$$

**Пример 29.** Дано уравнение

$$\dot{X}(t) = tX(t), \quad X(0) = X_0.$$

Начальное состояние  $X_0$  характеризуется параметрами  $m_0 = 1$  и  $R_0 = 10$ . Требуется найти  $m_x(t)$ ,  $R_x(t)$ ,  $R_x(t_1, t_2)$ .

□ 1. Так как  $A(t) = t$ ,  $B(t) = 0$ , уравнение (71) имеет вид

$$\dot{m}_x(t) = tm_x(t), \quad m_x(0) = m_0 = 1.$$

Его решение:  $m_x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ .

2. Уравнение (72) принимает вид  $\dot{R}_x(t) = 2tR_x(t)$ ,  $R_x(0) = R_0 = 10$ . Его решение:  $R_x(t) = 10e^{t^2}$ .

3. Найдём переходную матрицу  $\phi(t_1, t_2)$  системы, удовлетворяющую уравнению (74):

$$\frac{\partial \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1} = t_1 \phi(t_1, t_2), \quad \phi(t_1, t_2) = 1.$$

Отсюда  $\phi(t_1, t_2) = e^{\frac{t_1^2 - t_2^2}{2}}$ .

Ковариационная функция определяется по формуле (73):

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{\frac{t_1^2 - t_2^2}{2}} 10e^{t_2^2}, & t_1 \geq t_2; \\ 10e^{t_1^2} e^{\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}}, & t_1 \leq t_2, \end{cases}$$

т.е.

$$R_x(t_1, t_2) = 10e^{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}}.$$

**Пример 30.** Дана система уравнений

$$\dot{X}_1(t) = X_2(t), \quad X_1(0) = X_{10};$$

$$\dot{X}_2(t) = G(t), \quad X_2(0) = X_{20},$$

где  $G(t)$  – стационарный белый шум с интенсивностью  $S_0 = 1$  (так называемый *стандартный белый шум*).

Начальное состояние  $X_0 = (X_{10}, X_{20})^T$  описывается гауссовским законом распределения с  $m_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  и

$$R_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти математическое ожидание  $m_x(t)$  и ковариационную матрицу  $R_x(t)$ .

□ Так как  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , уравнения (71), (72) имеют вид

$$\dot{m}_x(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m_x(t); \quad m_x(0) = m_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\dot{R}_x(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_x(t) + R_x(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot (0 \ 1); \quad R_x(0) = R_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

где  $m_x = \begin{pmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \end{pmatrix}$ ;  $R_x = \begin{pmatrix} R_{x_{11}} & R_{x_{12}} \\ R_{x_{12}} & R_{x_{22}} \end{pmatrix}$ .

Перепишем их в координатной форме:

$$\dot{m}_{x_1}(t) = m_{x_2}(t), \quad m_{x_1}(0) = 1; \quad \dot{m}_{x_2}(t) = 0, \quad m_{x_2}(0) = 2;$$

$$\dot{R}_{x_{11}}(t) = 2R_{x_{12}}(t), \quad R_{x_{11}}(0) = 2; \quad \dot{R}_{x_{12}}(t) = R_{x_{22}}(t), \quad R_{x_{12}}(0) = 1;$$

$$\dot{R}_{x_{22}}(t) = 1, \quad R_{x_{22}}(0) = 3.$$

Их решение определяет законы изменения математического ожидания и ковариационной матрицы выходного сигнала:

$$m_{x_1}(t) = 2t + 1, \quad m_{x_2}(t) = 2;$$

$$R_{x_{11}}(t) = 3t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 2t + 2, \quad R_{x_{12}}(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 1, \quad R_{x_{22}}(t) = t + 3.$$

**Пример 31.** Дана система уравнений

$$\dot{X}_1(t) = -X_1(t) + X_2(t), \quad X_1(0) = X_{10};$$

$$\dot{X}_2(t) = -2X_2(t) + 2G(t), \quad X_2(0) = X_{20},$$

где  $G(t)$  – входной сигнал с  $m_g(t) = 1$ ;  $R_g(t_1, t_2) = \delta(t_1 - t_2)$ .

Начальное состояние  $X_0 = (X_{10}, X_{20})^T$  характеризуется

$$m_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти математическое ожидание  $m_x(t)$  и ковариационную матрицу  $R_x(t)$ .

□ Так как  $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  и  $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ , уравнения (71), (72) имеют вид

$$\dot{m}_x(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} m_x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad m_x(0) = m_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\dot{R}_x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} R_x(t) + R_x(t) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot (0 \ 2);$$

$$R_x(0) = R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} \dot{m}_{x_1}(t) &= -m_{x_1}(t) + m_{x_2}(t), \quad m_{x_1}(0) = 0; \\ \dot{m}_{x_2}(t) &= -2m_{x_2}(t) + 2, \quad m_{x_2}(0) = 1; \\ \dot{R}_{x_{11}}(t) &= -2R_{x_{11}}(t) + 2R_{x_{12}}(t), \quad R_{x_{11}}(0) = 0; \\ \dot{R}_{x_{12}}(t) &= -3R_{x_{12}}(t) + R_{x_{22}}(t), \quad R_{x_{12}}(0) = 0; \\ \dot{R}_{x_{22}}(t) &= -4R_{x_{22}}(t) + 4, \quad R_{x_{22}}(0) = 1. \end{aligned}$$

Их решение определяет законы изменения математического ожидания и ковариационной матрицы выходного сигнала:

$$\begin{aligned} m_{x_1}(t) &= 1 - e^{-t}, \quad m_{x_2}(t) = 1; \\ R_{x_{11}}(t) &= \frac{1}{3} - e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t}, \quad R_{x_{12}}(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}), \quad R_{x_{22}}(t) = 1. \end{aligned}$$

#### Тема 4. УСТОЙЧИВОСТЬ, УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

##### Занятие 10. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

1. **Одномерные системы.** При изучении различных форм математического описания систем управления большое внимание уделяется алгоритмам решения основной задачи анализа – задачи анализа выходных процессов, т.е. получению количественных характеристик процессов, происходящих в системах. В данном разделе рассмотренные выше системные характеристики используются для выяснения качественных особенностей поведения систем управления.

##### **Постановка задачи.**

Рассмотрим одномерную стационарную систему управления, поведение которой описывается дифференциальным уравнением

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_0 x(t) = b_m g^{(m)}(t) + \dots + b_0 g(t) \quad (77)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

где  $g(t)$  и  $x(t)$  – входной и выходной сигналы;  $t_0$  – начальный момент времени.

В соответствии с представлением (25) выходного сигнала системы в виде суммы свободного и вынужденного движений:  $x(t) = x_c(t) + x_{\text{вын}}(t)$  вводятся следующие понятия устойчивости системы.

Система управления называется **устойчивой по начальным данным (асимптотически устойчивой)**, если при ненулевых ограниченных начальных условиях свободное движение  $x_c(t)$  ограничено при всех  $t \in [t_0, +\infty)$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_c(t) = 0$ .

Система управления называется **устойчивой по входу**, если при любом ограниченном воздействии  $g(t)$  реакция системы  $x_{\text{вын}}(t)$  является ограниченной и любой момент времени  $t \in [t_0, +\infty)$ .

Более краткий термин – **устойчивая система управления** – употребляется, если система устойчива и по входу, и по начальным данным.

Требуется определить, является ли система устойчивой.

##### **Критерии устойчивости.**

1. Для устойчивости системы (77) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (78)$$

имели отрицательные действительные части:  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т.е. располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости (рис. 18).

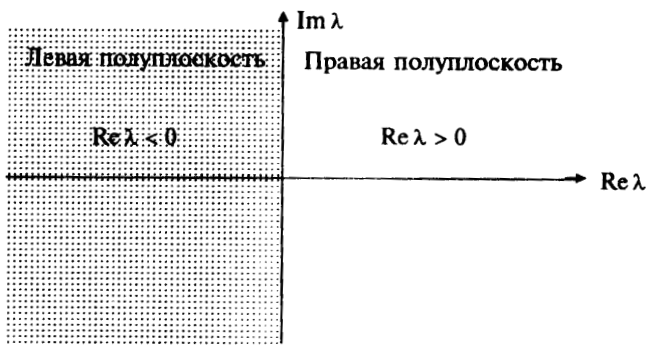


Рис. 18

2. Для проверки отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения (78) можно использовать **критерий Рауса–Гурвица**.

Для устойчивости системы (77) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы при  $a_n > 0$  угловые миноры  $\Delta_i$  матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad (79)$$

были положительны:  $\Delta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $\Delta_1 = a_{n-1}$ ,  $\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{pmatrix}$  и т.д.

При заполнении квадратной порядка  $n$  матрицы (79) отсутствующие в уравнении (78) коэффициенты  $a_{n-i}$  и  $a_i$  при  $i > n$  заменяются нулями.

3. Если система устойчива по начальным данным и порядок  $m$  дифференциального оператора  $M(p) = b_m p^m + \dots + b_0$  правой части уравнения (77) не больше порядка  $n$  дифференциального оператора  $D(p) = a_n p^n + \dots + a_0$  левой части, т.е.  $m \leq n$ , то система (77) устойчива по входу.

**Необходимое условие устойчивости.** Если система (77) устойчива, то все коэффициенты характеристического уравнения (78) имеют одинаковые знаки.

**З а м е ч а н и я.**

1. Первый критерий устойчивости называется **прямым**, а второй – **косвенным**, так как в этом случае процедура анализа устойчивости не требует нахождения корней уравнения (78).

2. Коэффициент  $a_n$  в уравнении (78) всегда можно сделать положительным, например, умножая уравнение на  $(-1)$ .

3. Анализ устойчивости элементарных и типовых звеньев систем управления можно также выполнить, пользуясь определениями и сформулированными критериями. Устойчивыми являются усилительное, апериодическое (при  $T > 0$ ) и колебательное (при  $T > 0$ ,  $0 < \xi < 1$ ) звенья. Дифференцирующее звено не устойчиво по входу, а интегрирующее звено не устойчиво и по входу, и по начальным данным.

4. Критерий асимптотической устойчивости является результатом анализа выражения (28), определяющего свободное движение, и (30) – (33).

**Пример 32.** Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением (апериодическое звено (10))

$$3\dot{x} + x = g.$$

□ Характеристическое уравнение  $3\lambda + 1 = 0$  имеет отрицательный корень  $\lambda = -\frac{1}{3}$ . Кроме того, порядок ( $m = 0$ ) правой части уравнения меньше порядка ( $n = 1$ ) левой части. Согласно первому и третьему критериям система устойчива. ■

**Пример 33.** Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$4\dot{x} - x = g.$$

□ Характеристическое уравнение  $4\lambda - 1 = 0$  имеет положительный корень  $\lambda = \frac{1}{4}$ . Согласно первому критерию система не является устойчивой. ■

**Пример 34.** Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением (колебательное звено (11))

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = g.$$

□ Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$  имеет отрицательный (кратный) корень  $\lambda = -1$ . Кроме того, порядок ( $m = 0$ ) правой части уравнения меньше порядка ( $n = 2$ ) левой части. Согласно первому и третьему критериям система устойчива. ■

**Пример 35.** Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x = g.$$

□ Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$  имеет два корня:  $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2} > 0$ ,  $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2} < 0$ , один из которых положительный. Согласно первому критерию система не является устойчивой. ■

**Пример 36.** Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x + 4x = g.$$

□ Здесь  $a_3 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_0 = 4$ . Необходимое условие устойчивости выполняется. Составим матрицу (79):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем угловые миноры:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\Delta_2 = 8 > 0.$$

Они положительны, следовательно, по второму критерию заключаем, что система является устойчивой по начальным данным. Кроме того, порядок ( $m = 0$ ) правой части уравнения меньше порядка ( $n = 2$ ) левой части. Согласно третьему критерию система устойчива и по входу, т.е. является устойчивой. ■

**Пример 37.** При каких значениях параметра  $k$  система, описываемая дифференциальным уравнением

$$x^{(4)} + 4x^{(3)} + 2x^{(2)} + 3\dot{x} + kx = g,$$

будет устойчивой.

□ Здесь  $a_4 = 1$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_0 = k$ . ■ Необходимое условие устойчивости выполняется, если  $k > 0$ . Составим матрицу (79):

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

Для удовлетворения всех условий критерия Рауса–Гурвица должны выполняться следующие неравенства:

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 16k > 0,$$

$$\Delta_4 = k\Delta_3 > 0.$$

Отсюда  $0 < k < \frac{15}{16}$ . Кроме того, порядок ( $m = 0$ ) правой части уравнения меньше порядка ( $n = 4$ ) левой части.

Согласно второму и третьему критериям система устойчива при  $0 < k < \frac{15}{16}$ . ■



**Пример 38.** Найти все положительные значения коэффициента усиления  $k$ , при которых система, заданная структурной схемой (рис. 19), будет устойчивой.

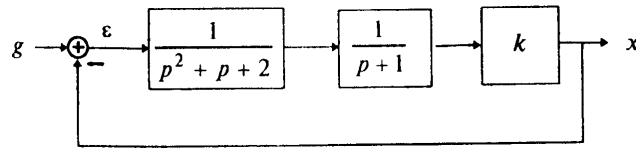


Рис. 19

□ По структурной схеме составляем дифференциальное уравнение. Уравнения элементов системы в операторной форме (6) имеют вид

$$x = \frac{k}{(p+1)(p^2+p+2)} \varepsilon, \quad \varepsilon = g - x.$$

Исключая  $\varepsilon$ , получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x + (k+2)x = kg.$$

Составляем матрицу (79)

$$\begin{pmatrix} 2 & k+2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & k+2 \end{pmatrix}$$

и вычисляем ее угловые миноры:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 4 - k, \quad \Delta_3 = \Delta_2(k+2).$$

Из условия их положительности заключаем, что при всех  $k \in (0, 4)$  система будет устойчива по начальным данным. Так как порядок ( $n = 3$ ) дифференциального оператора левой части больше порядка ( $m = 0$ ) дифференциального оператора правой части, то при  $k \in (0, 4)$  система будет устойчива и по входу. ■

**2. Многомерные системы.** Аналогично одномерным системам рассмотрим качественное поведение многомерных систем, описываемых уравнениями состояния.

**Постановка задачи.**

Рассматривается линейная многомерная стационарная система, описываемая уравнением состояния (35):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bg(t), \quad x(0) = x_0, \quad (80)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $g$  –  $r$ -мерный вектор входных воздействий;  $t$  – время; начальный момент времени  $t_0 = 0$ ;  $x_0$  – начальное состояние;  $A$ ,  $B$  – матрицы размера  $(n \times n)$ ,  $(n \times r)$  соответственно.

Система (80) называется **асимптотически устойчивой**, если ее свободное движение  $x_c(t)$  (при  $g(t) \equiv 0$ ) ограничено при ограниченных начальных состояниях  $x_0$  и выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_c(t)\| = 0. \quad (81)$$

**Критерии устойчивости.**

1. Для асимптотической устойчивости системы (80) необходимо и достаточно, чтобы корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (82)$$

имели отрицательные действительные части:  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т.е. располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости (см. рис. 18).

2. Для проверки отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения (82), которое записывается в форме (78), можно использовать критерий Рауса–Гурвица.

**Необходимое условие устойчивости.** Если система (80) асимптотически устойчива, то все коэффициенты характеристического уравнения (82) имеют одинаковые знаки.

**Пример 39.** Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2,$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 + g_1.$$

□ Здесь  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$  или  $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$  имеет действительные корни разных знаков:  $\lambda_1 = 5 > 0$ ,  $\lambda_2 = -1 < 0$ . Согласно первому критерию система не является устойчивой. ■

**Пример 40.** Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + g_2. \end{aligned}$$

□ Здесь  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$  или  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$  имеет отрицательный корень (кратности 2):  $\lambda_{1,2} = -1$ . Согласно первому критерию система является устойчивой. ■

**Пример 41.** Исследовать устойчивость системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + g_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + g_2. \end{aligned}$$

□ Перепишем уравнения системы в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем корни характеристического уравнения. Получим

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0.$$

Отсюда  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ . Действительная часть корней равна нулю. Согласно первому критерию система не является устойчивой. ■

**Пример 42.** При каких положительных значениях параметра  $a$  система, описываемая дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + g_1, \\ \dot{x}_2 &= (a-2)x_2 + g_1 + g_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - 2ax_3 - g_2, \end{aligned}$$

будет устойчивой?

□ Составляем характеристическое уравнение (82):

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & a-2 \\ 0 & -1 & -2a-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+a)(\lambda^2 + 2a\lambda + a-2) = \\ &= -\lambda^3 - 3a\lambda^2 + (-2a^2 - a + 2)\lambda - a^2 + 2a = 0. \end{aligned}$$

Его корни:  $\lambda_1 = -a$ ,  $\lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - a + 2}$ ,  $\lambda_3 = -a + \sqrt{a^2 - a + 2}$  – действительные; при  $a > 0$  корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – отрицательны. Из неравенства  $\lambda_3 < 0$  находим, что  $a > 2$ . Следовательно, рассматриваемая система устойчива при  $a > 2$ .

Проверим этот вывод при  $a = 3$ , используя критерий Рауса–Гурвица. Характеристическое уравнение имеет вид  $-\lambda^3 - 9\lambda^2 - 19\lambda - 3 = 0$ . Умножая его на  $(-1)$ , получаем коэффициенты:  $a_3 = 1$ ,  $a_2 = 9$ ,  $a_1 = 19$ ,  $a_0 = 3$ .

Составляем матрицу (79):  $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 1 & 19 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ . Затем вычисляем её угловые миноры:  $\Delta_1 = 9 > 0$ ,  $\Delta_2 = 168 > 0$ ,

$\Delta_3 = 504 > 0$ . Согласно второму критерию система устойчива.

Проверим результат при  $a = 1$ . Характеристическое уравнение имеет вид  $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ . Так как коэффициенты этого уравнения имеют разные знаки, то согласно необходимому условию система не является устойчивой. ■

## Занятие 11. АНАЛИЗ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ

### Постановка задачи.

Дана линейная многомерная стационарная система управления, поведение которой описывается уравнениями состояния и выхода:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (83)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $u$  –  $r$ -мерный вектор управления,  $u \in R^r$ ;  $t$  – время,  $t \in [t_0, t_1]$  – промежуток времени функционирования системы;  $y$  –  $k$ -мерный вектор выхода;  $A, B, C$  – матрицы размера  $(n \times n)$ ,  $(n \times r)$ ,  $(k \times n)$  соответственно;  $x_0$  – начальное состояние.

Система (83) называется **вполне управляемой по состоянию**, если выбором управляющего воздействия  $u(t)$  на промежутке времени  $[t_0, t_1]$  можно перевести систему из любого начального состояния  $x(t_0)$  в произвольное заранее заданное конечное состояние  $x(t_1)$ .

Система (83) называется **вполне управляемой по выходу**, если выбором управляющего воздействия  $u(t)$  на промежутке времени  $[t_0, t_1]$  можно перевести систему из любого начального состояния  $x_0(t)$  в такое конечное состояние, при котором обеспечивается заранее заданное произвольное значение выхода  $y(t_1)$ .

Система (83) называется **вполне наблюдаемой**, если по реакции  $y(t)$  на выходе системы на промежутке времени  $[t_0, t_1]$  при заданном управляющем воздействии  $u(t)$  можно определить начальное состояние  $x(t_0)$ .

Постановка задачи формулируется следующим образом.

Пусть известны матрицы  $A, B, C$  системы (83). Требуется определить, является ли система вполне управляемой и наблюдаемой.

### Критерии управляемости и наблюдаемости.

**Критерий управляемости по состоянию.** Для того чтобы система (83) была вполне управляемой по состоянию, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по состоянию

$$W = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

равнялся размерности вектора состояния:

$$\text{rang } W = n. \quad (84)$$

**Критерий управляемости по выходу.** Для того чтобы система (83) была вполне управляемой по выходу, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по выходу

$$P = \begin{pmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n-1}B \end{pmatrix}$$

равнялся размерности вектора выхода:

$$\text{rang } P = k. \quad (85)$$

**Критерий наблюдаемости.** Для того чтобы система была вполне наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости

$$Q = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix}$$

равнялся размерности вектора состояния:

$$\text{rang } Q = n. \quad (86)$$

### Алгоритм решения задачи.

1. В уравнениях состояния и выхода выделить матрицы  $A, B, C$ .
2. Составить матрицу  $W$  управляемости по состоянию, матрицу  $P$  управляемости по выходу и матрицу

наблюдаемости  $Q$ .

3. Подсчитать ранги матриц и сделать вывод об управляемости и наблюдаемости на основе соответствующего критерия.

**З а м е ч а н и е.** Если линейная стационарная система управления описывается соотношениями

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_0 x = g(t), \quad y(t) = x(t),$$

то, вводя обозначения  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ , ...,  $x_n = x^{(n-1)}$ ,  $u = g$ , их записать в эквивалентной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} u,$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x.$$

**Пример 43.** Исследовать управляемость и наблюдаемость системы:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad y = x_1.$$

$$\dot{x}_2 = u,$$

□ 1. В уравнениях состояния и выхода выделим матрицы  $A, B, C$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0), \quad n=2, \quad r=1, \quad k=1.$$

2. Составляем матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = (B \ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = (CB \ CAB) = (0 \ 1),$$

$$Q = (C^T \ A^T C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Определяем ранги матриц:  $\text{rang } W = 2 = n$ ,  $\text{rang } P = 1 = k$ ,  $\text{rang } Q = 2 = n$ . Согласно критериям управляемости (84), (85) и наблюдаемости (86) система вполне управляема по состоянию и по выходу, а также вполне наблюдаема. ■

**Пример 44.** Исследовать управляемость и наблюдаемость системы:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 5x_2 + u, \quad y = x_1 - x_2.$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + 2u,$$

□ 1. В уравнениях состояния и выхода выделим матрицы  $A, B, C$ :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ -1), \quad n=2, \quad r=1, \quad k=1.$$

2. Составляем матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = (B \ AB) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = (CB \ CAB) = (-1 \ 5),$$

$$Q = (C^T \ A^T C^T) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Определяем ранги матриц:  $\text{rang } W = 2 = n$ ,  $\text{rang } P = 1 = k$ ,  $\text{rang } Q = 1 \neq n$ . Согласно критериям управляемости (84), (85) и наблюдаемости (86) система вполне управляема по состоянию и по выходу, но не является вполне наблюдаемой. ■

**Пример 45.** Исследовать управляемость и наблюдаемость системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u, & y_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 - u, & y_2 &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

1. В уравнениях состояния и выхода выделим матрицы  $A, B, C$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n=2, \quad r=1, \quad k=2.$$

2. Составляем матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = (CB \quad CAB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = (C^T \quad A^T C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Определяем ранги матриц:  $\text{rang } W = 1 \neq n$ ,  $\text{rang } P = 1 \neq k$ ,  $\text{rang } Q = 2 = n$ . Согласно критериям управляемости (84), (85) и наблюдаемости (86) система не является вполне управляемой по состоянию и по выходу, но вполне наблюдаема. ■

**Пример 46.** Исследовать управляемость и наблюдаемость системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - u, & \dot{x}_2 &= 5x_1 + 2x_3 + u, & y &= -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 2x_3 - u, \end{aligned}$$

□ 1. В уравнениях состояния и выхода выделим матрицы  $A, B, C$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad 1 \quad 0), \quad n=3, \quad r=1, \quad k=1.$$

2. Составляем матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = (B \quad AB \quad A^2 B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 1 & -7 & 13 \\ -1 & 4 & -10 \end{pmatrix},$$

$$P = (CB \quad CAB \quad CA^2 B) = (3 \quad -9 \quad 27),$$

$$Q = (C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -14 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

3. Определяем ранги матриц:  $\text{rang } W = 2 \neq n$ ,  $\text{rang } P = 1 = k$ ,  $\text{rang } Q = 2 = n$ . Согласно критериям управляемости (84), (85) и наблюдаемости (86) система не является вполне управляемой по состоянию и вполне наблюдаемой, но является вполне управляемой по выходу. ■

**Пример 47.** Исследовать управляемость и наблюдаемость системы:

$$2\ddot{x} - 4\dot{x} + x = g.$$

1. Согласно замечанию к алгоритму перепишем систему в эквивалентной форме и в полученных уравнениях состояния и выхода выделим матрицы  $A, B, C$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0), \quad n=2, \quad r=1, \quad k=1.$$

2. Составляем матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$W = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = (CB \quad CAB) = (0 \quad 0,5),$$

$$Q = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Определяем ранги матриц:  $\text{rang } W = 2 = n$ ,  $\text{rang } P = 1 = k$ ,  $\text{rang } Q = 2 = n$ . Согласно критериям управляемости (84), (85) и наблюдаемости (86) система вполне управляема по состоянию, по выходу и вполне наблюдаема. ■

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Составить дифференциальные уравнения, описывающие процессы в схемах, изображенных на рис. 20, а – в и записать эти уравнения в операторной форме.

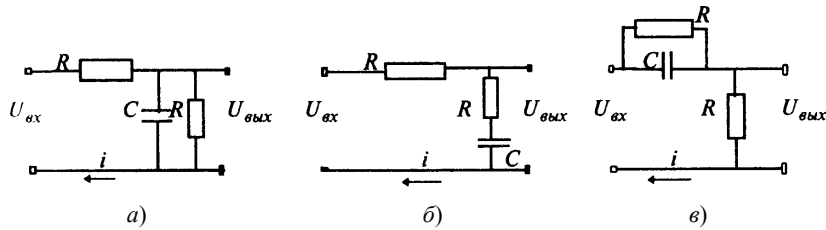


Рис. 20

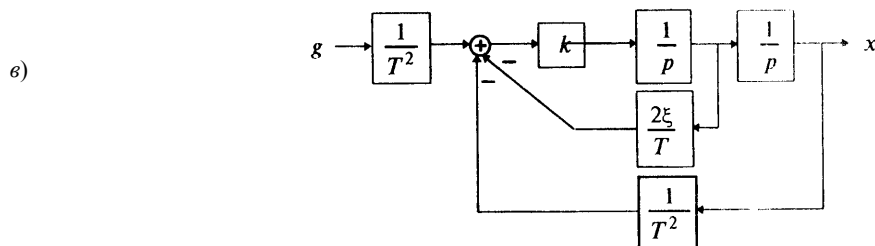
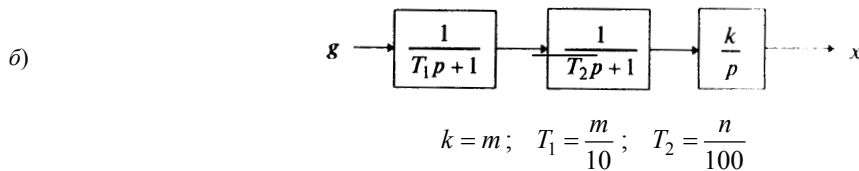
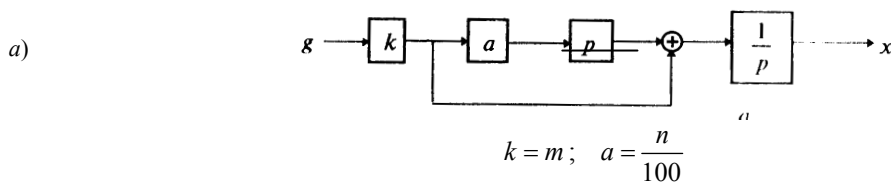
2. По дифференциальным уравнениям, описывающим звенья, составить дифференциальные уравнения их соединений:

- а) последовательного соединения:  $px_1 = g$ ,  $px = x_1$ ;
- б) параллельного соединения:  $px_1 = g$ ,  $px_1 = g$ ;
- в) соединения с отрицательной обратной связью:  $px = \varepsilon$ ,  $px_1 = x$ .

3. Составить дифференциальное уравнение параллельного соединения двух звеньев:  $np x_1 + tx_1 = g$ ,  $t^n x_2 = pg$ ,  $x = x_1 + x_2$ .

4. Составить дифференциальное уравнение последовательного соединения двух звеньев:  $\frac{1}{n} \dot{x}_1 + x_1 = g$ ,  $m \dot{x} + x = x_1$ .

5. Составить дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы, структурные схемы которых изображены на рис. 21, а – в.



$$k = m; \quad T = \frac{n}{100}; \quad \xi = 0,5$$

Рис. 21

6. Используя элементарные звенья, изобразить структурные схемы, соответствующие следующим дифференциальным уравнениям:

а)  $\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) + t^2x(t) = \dot{g}(t) + \sin t \cdot g(t), \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 2;$

б)  $\ddot{x}(t) + n\dot{x}(t) + mn\dot{x}(t) + mx(t) = m^2\ddot{g}(t) + ng(t), \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = n, \quad \ddot{x}_0 = m.$

7. Найти свободное, вынужденное движения и выходной сигнал системы, описываемой дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x}(t) + (2-n)\dot{x}(t) - 2nx(t) = g(t), \quad x(0) = n, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

$$g(t) = \begin{cases} ne^{-4t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

8. Найти законы изменения векторов состояния и выхода многомерной системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (n+2)x_1 + x_2 + g_1, \dots & y &= x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= (-2n-8)x_1 - 4x_2 + g_2, \end{aligned}$$

с начальными условиями  $x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0$  при входном сигнале

$$g_1(t) = \begin{cases} n, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0; \end{cases} \quad g_2(t) = \begin{cases} 2, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие теории оптимального управления связано с ростом требований как к быстродействию и точности систем регулирования, так и переходом к рыночной экономике. Увеличение быстродействия возможно лишь при правильном распределении ограниченных ресурсов управления, и поэтому учёт ограничений на управление стал одним из центральных в теории оптимального управления. С другой стороны, построение систем регулирования высокой точности привело к необходимости учёта при синтезе регуляторов взаимовлияния отдельных частей (каналов) системы. Синтез таких сложных многомерных (многосвязных) систем также состав-

ляет предмет теории оптимального управления.

К настоящему времени построена математическая теория оптимального управления. На её основе разработаны способы построения оптимальных по быстродействию систем и процедуры аналитического конструирования оптимальных регуляторов. Аналитическое конструирование регуляторов вместе с теорией оптимальных наблюдателей (оптимальных фильтров) образуют совокупность методов, которые широко используются при проектировании современных сложных систем регулирования.

Сложность задач теории оптимального управления потребовала более широкой математической базы для её построения. В названной теории используются вариационное исчисление, теория дифференциальных уравнений, теории матриц. Развитие оптимального управления на этой базе привело к пересмотру многих разделов теории автоматического управления, и поэтому теорию оптимального управления иногда называют современной теорией управления. Хотя это и преувеличение роли лишь одного из разделов, однако развитие теории автоматического управления определяется последние десятилетия во многом развитием этого раздела.

В построение теории оптимального управления внесли большой вклад российские учёные Л.С. Понтрягин, Н.Н. Красовский, А.А. Красовский, А.М. Летов, В.Г. Болтянский, В.Ф. Кротов, В.И. Гурман, Н.Н. Моисеев, А.А. Фельдбаум, В.И. Зубов, А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин, А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров, Ю.Г. Евтушенко и зарубежные

Р.Е. Калман, М. Атанс, П.Л. Фалб, Э.Б. Ли, Л.М. Маркус и Р. Беллман.

В широком значении слово "оптимальный" означает наилучший в смысле некоторого критерия эффективности. При таком толковании любая научно обоснованная технико-экономическая система является оптимальной, так как при выборе какой-либо системы подразумевается, что она в каком-либо отношении лучше других. Критерии, с помощью которых осуществляется выбор (критерии оптимальности), могут быть различными. Этими критериями могут являться качество динамики процессов управления, надёжность системы, энергопотребление, её вес и габариты, стоимость и т.п., либо совокупность этих критериев с некоторыми весовыми коэффициентами.

Термин "оптимальный" в пособии используется в узком смысле, когда система автоматического управления оценивается лишь качеством динамических процессов и при этом критерием (мерой) этого качества выступает интегральный показатель качества. Такое описание критериев качества позволяет использовать для нахождения оптимального управления хорошо разработанный в математике аппарат вариационного исчисления.

Огромный вклад в развитие численных методов решения задач математической теории оптимального управления внесли российские учёные Р.П. Федоренко, Б.Т. Поляк, а также зарубежные Э. Полак и др.

В теории управления обращают на себя внимание чрезвычайно широкие и разнообразные области приложений. Они простираются от техники до экологии, от математики до социального планирования, от космических исследований до процессов обучения. Казалось бы, теория управления давно должна иметь какое-то общее изложение, удовлетворяющее все эти области. Однако такое изложение, где были бы систематизированы типовые подходы и методы, на применении которых основано множество прикладных работ, неизвестно, что даёт основание на дальнейшую их разработку.

Теория управления как область знания существует, но, за редким исключением, нацелена на конкретные классы задач. Вдобавок укоренившееся представление об основах теории управления состоит в разобленном наборе методологических положений и математизированных структур, что в равной степени относится к отечественной и зарубежной литературе.

Предлагаемое учебное пособие – это попытка сделать шаг в оформлении теории управления, как дисциплины, направленной на решение конкретного класса задач, попытка выйти за типичное в настоящее время узкоприкладное изложение теории управления.

Эти обстоятельства побудили к отысканию классов объектов, для которых при построении оптимального управления крайняя задача легко решается численно. Такими объектами управления оказались объекты, описываемые линейными дифференциальными уравнениями. Эти результаты, полученные А.М. Летовым и Р. Калманом, явились основой нового направления синтеза систем оптимальной стабилизации, называемого аналитическим конструированием регуляторов.

Пособие снабжено разделом, посвященным проведению практических занятий, в котором подробно рассматривается процесс решения типовых задач, имеющих место при изучении курса и основ теории управления. Материал пособия дает исчерпывающую информацию для выполнения курсовой работы, варианты которой приводятся в отдельном разделе задания.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман, М.А. Выбор вариантов: основы теории / М.А. Айзерман, Ф.Т. Алексеев. – М. : Наука, 1990. – 240 с.
2. Александров, А.Г. Оптимальные и адаптивные системы / А.Г. Александров. – М. : Высшая школа, 1989. – 263 с.
3. Алексеев, В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, СВ. Фомин. – М. : Наука, 1979. – 430 с.
4. Алексеев, В.М. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М. : Наука, 1984. – 288 с.
5. Атанс, М. Оптимальное управление / М. Атанс, П.Л. Фалб. – М. : Наука, 1968. – 764 с.
6. Болтянский, В.Г. Математические методы оптимального управления / В.Г. Болтянский. – М. : Наука, 1969. – 408 с.
7. Вариационное исчисление / М.Л. Краснов и др. – М. : Наука, 1973. – 192 с.
8. Горелова, В.Л. Основы прогнозирования систем / В.Л. Горелова, Е.Н. Мельников. – М. : Высшая школа, 1986. – 287 с.
9. Губанов, В.А. Введение в системный анализ / В.А. Губанов, В.В. Захаров, А.Н. Коваленко. – Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1988. – 232 с.
10. Директор, С. Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер. – М. : Мир, 1974. – 464 с.
11. Добкин, В.М. Системный анализ в управлении / В.М. Добкин. – М. : Химия, 1984. – 224 с.
12. Дончев, А. Системы оптимального управления: возмущения, приближения и анализ чувствительности / А. Дончев ; пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 150 с.
13. Дубов, Ю.А. Многокритериальные модели формирования выбора вариантов систем / Ю.А. Дубов, С.И. Травкин, В.Н. Якимец. – М. : Наука, 1986. – 296 с.
14. Евтушенко, Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю.Г. Евтушенко. – М. : Наука, 1982. – 432 с.
15. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М. : Наука, 1974. – 470 с.
16. Калихман, И.А. Динамическое программирование в примерах и задачах / И.А. Калихман. – М. : Высшая школа, 1979. – 125 с.
17. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М. : Мир, 1971. – 400 с.
18. Клир, Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач / Дж. Клир. – М. : Радио и связь, 1990. – 544 с.

19. Красовский, Н.Н. Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. – М. : Наука, 1985. – 520 с.
20. Куржанский, А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости / А.Б. Куржанский. – М. : Наука, 1977. – 392 с.
21. Макаров, И.М. Теория выбора и принятия решений / И.М. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А. Рубчинский, В.Б. Соколов. – М. : Наука, 1982. – 328 с.
22. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин и др. – М. : Наука, 1969. – 384 с.
23. Месарович, М. Общая теория систем: математические основы / М. Месарович, Я. Гакахара. – М. : Мир, 1978. – 312 с.
24. Месарович, М. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович, Д. Мако, Я. Такахара. – М. : Мир, 1973. – 344 с.
25. Моисеев, Н.Н. Элементы теории оптимальных систем / Н.Н. Моисеев. – М. : Наука, 1975. – 526 с.
26. Мулен, Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели / Э. Мулен. – М. : Мир, 1991. – 464 с.
27. Ногин, В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде / В.Д. Ногин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 176 с.
28. Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагома, С.М. Лобанов и др. ; под. ред. В.Ф. Кротова. – М. : Высшая школа, 1990. – 429 с.
29. Полек, Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / Э. Полек. – М. : Мир, 1974. – 374 с.
30. Поляк, Б.Т. Методы линеаризации при наличии ограничений / Б.Т. Поляк // Итоги науки и техники. Матем. анализ Е.2. – М. : ВИНТИ, 1974. – С. 147–148.
31. Поляк, Б.Т. Методы решения задач на условный экстремум при наличии случайных помех / Б.Т. Поляк // ВМ и МФ. – 1979. – Т. 19, № 1. – С. 147–148.
32. Портер, У. Современные основания общей теории систем / У. Портер. – М. : Наука. 1971. – 556 с.
33. Поспелов, Д.А. Ситуационное управление: теория и практика / Д.А. Поспелов. – М. : Наука, 1986. – 288 с.
34. Раскин, Д.Г. Анализ сложных систем и элементы теории управления / Д.Г. Раскин. – М. : Сов. радио, 1976. – 344 с.
35. Федоренко, Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко. – М. : Наука, 1978. – 488 с.
36. Цлаф, Л.Я. Вариационные исчисления и интегральные уравнения / Л.Я. Цлаф. – М. : Наука, 1970. – 191 с.
37. Чураков, Е.П. Оптимальные и адаптивные системы / Е.П. Чураков. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 256 с.
38. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969. – 424 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ОГЛАВЛЕНИЕ</b> .....	3
<b>Лекция 1.</b> ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ .....	4
<b>Лекция 2.</b> РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ПРОСТРАНСТВ СОСТОЯНИЙ .....	10
<b>Лекция 3.</b> МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ .....	13
<b>Лекция 4.</b> СТРУКТУРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ .....	18
<b>Лекция 5.</b> УСЛОВИЯ НАБЛЮДАЕМОСТИ .....	26
<b>Лекция 6.</b> УПРАВЛЯЕМОСТЬ .....	35
<b>Лекция 7.</b> ВИДЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ .....	40
<b>Лекция 8.</b> ВИДЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ .....	49
<b>Лекция 9.</b> АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	58
<b>Лекция 10.</b> ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ .....	70
<b>Лекция 11.</b> УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ КАЧЕСТВА .....	81
<b>Лекция 12.</b> УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ .....	87
<b>Лекция 13.</b> УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ .....	93
<b>Лекция 14.</b> УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ ПО КРИТЕРИЮ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ .....	99
<b>Лекция 15.</b> УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО КРИТЕРИЮ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ .....	108
<b>Лекция 16.</b> МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА .....	121
<b>Лекция 17.</b> УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО ФУНКЦИОНАЛУ ОБОБЩЁННОЙ РАБОТЫ (АКОР). ЧИСЛЕННЫЕ АСПЕКТЫ .....	129
<b>Лекция 18.</b> АДДИТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ .....	141
<b>ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ</b> .....	154
<b>ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ</b> .....	159
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	233
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	236