ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

♦ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ♦

Учебное издание

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания и индивидуальные задания

Составители:
ПОПОВ Вячеслав Александрович,
ЩЕРБАКОВА Антонина Васильевна

Редактор Ю.В. Шиманова
Инженеры по компьютерному макетированию:
Н.И. Колмакова, М.А. Евсейчева

Подписано в печать 24.12.2008.
Формат 60 × 84 / 16. 1,63 усл. печ. л. Тираж 100. Заказ № 588.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, г. Тамбов, ул. Советская, 106, к. 14

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания и индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов 1 курса инженерных и экономических специальностей

Тамбов
Издательство ТГТУ
2008

УДК 514.7422(075)
ББК В151.5я73-5
В269

Рекомендовано Редакционно-издательским советом университета

Рецензент
Доктор физико-математических наук
А.И. Булгаков

Составители:
В.А. Попов, А.В. Щербакова

В269 Векторная алгебра : методические указания и индивидуальные задания / сост. : В.А. Попов, А.В. Щербакова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 28 с. – 100 экз.

Содержат необходимый для изучения темы теоретический материал и примеры решения стандартных задач. Предложенные задачи являются типовыми, предназначены для аудиторной и самостоятельной работы студентов, и также могут служить основой при составлении вариантов проверочных заданий.

Предназначены для студентов 1 курса инженерных и экономических специальностей.

УДК 514.7422(075)
ББК В151.5я73-5

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов при изучении темы "Векторная алгебра". Одним из этапов усвоения учебного материала является изучение методов решения типовых задач, приведённых в разделе I, и применение их к выполнению вариантов индивидуальных заданий из раздела II.

При решении типовых задач из раздела I необходимо внимательно изучить соответствующий теоретический материал раздела IV. Более полное изложение теоретического материала можно найти в рекомендованной литературе. Если непосредственное решение вызывает затруднения, то имеет смысл рассмотреть решение соответствующих задач типового варианта, изложенных в разделе III.

Соответствие между номерами типовых задач и материалом разделов III, IV приведено в табл. 1.

Таблица 1

Номера типовых задач	Справочный материал из раздела IV	Номера решённых задач из раздела III	Номера типовых задач	Справочный материал из раздела IV	Номера решённых задач из раздела III
1 – 3	п. 1		12 – 20	п. 5	1. б) 2. а), г)
4 – 9	п. 2, 4	1. а)	21 – 29	п. 6	2. б) 4. а)
10, 11	п. 3	2. г)	30 – 36	п. 7	2. в), д) 4. в)

I. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить следующие векторы:

1) $\overline{2a}$; 2) $-0{,}5\bar{b}$; 3) $3\bar{a}+0{,}25\bar{b}$; 4) $0{,}5\bar{a}-3\bar{b}$.

1. Даны: $|\bar{a}|=13$, $|\bar{b}|=19$ и $|\bar{a}+\bar{b}|=24$. Вычислить $|\bar{a}-\bar{b}|$.

2. Даны: $|\bar{a}|=11$, $|\bar{b}|=23$ и $|\bar{a}-\bar{b}|=30$. Вычислить $|\bar{a}+\bar{b}|$.

3. Даны вершины $A(3; 2; –5)$, $B(1; 4; 3)$ и $C(–3; 0; 1)$ треугольника. Найти координаты середин его сторон.

4. Даны вершины $A(2; –1; 4)$, $B(3; 2; –6)$ и $C(–5; 0; 2)$ треугольника. Вычислить длину медианы, проведённой из вершины A.

5. Даны три вершины $A(3; –1; 2)$, $B(1; 2; –4)$ и $C(–1; 1; 2)$ параллелограмма. Найти его четвёртую вершину D.

6. Отрезок прямой, ограниченный точками $A(–1; 8; 3)$ и $B(9; –7; 2)$ разделён точками на пять равных частей. Найти координаты этих точек.

7. Определить при каких значениях α и β векторы $\bar{a} = \{–2; 3; \beta\}$ и $\bar{b} =\{\alpha; –6; 2\}$ коллинеарны.

Проверить, что четыре точки $A(3; –1; 2)$, $B(1; 2; –1)$, $C(–1; 1; 3)$ и $D(3; –5; 3)$ служат вершинами трапеции.

Даны два вектора $\bar{a} = \{3; –2; 6\}$ и $\bar{b} = \{–2; 1; 0\}$. Определить координаты следующих векторов: 1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $2\bar{a}$;
4) $2\bar{a} + 3\bar{b}$;
5) $0{,}5\bar{a} - \bar{b}$.

Даны два вектора $\bar{a} = \{2; 4; 3\}$ и $\bar{b} = \{–1; 5; 8\}$. Определить координаты следующих векторов: 1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $3\bar{a}$;
4) $\bar{a} + 2\bar{b}$;
5) $0{,}5\bar{a} - 3\bar{b}$.

8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 3$ и $|\bar{b}| = 4$, вычислить: 1) $\bar{a}\,\bar{b}$; 2) $\overline{a^2}$; 3) $\overline{b^2}$; 4) $(\bar{a}+\bar{b})^2$; 5) $(3\bar{a}+2\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})$; 6) $(\bar{a}-\bar{b})^2$.

9. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 5$ и $|\bar{b}| = 3$, вычислить: 1) $\bar{a}\,\bar{b}$; 2) $\overline{a^2}$; 3) $\overline{b^2}$; 4) $(\bar{a}+\bar{b})^2$; 5) $(3\bar{a}+2\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})$; 6) $(\bar{a}-\bar{b})^2$.

Даны векторы $\bar{a} = \{4; –2; –4\}$ и $\bar{b} = \{6; –3; 2\}$. Вычислить:

1) $\bar{a}\,\bar{b}$; 2) $\sqrt{\bar{a}^2}$; 3) $\sqrt{\bar{b}^2}$; 4) $(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}+\bar{b})$; 5) $(\bar{a}+\bar{b})^2$.

10. Даны векторы $\bar{a} = \{2; 4; 4\}$ и $\bar{b} = \{2; –6; 3\}$. Вычислить: 1) $\bar{a}\,\bar{b}$; 2) $\sqrt{\bar{a}^2}$; 3) $\sqrt{\bar{b}^2}$; 4) $(3\bar{a}+2\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})$; 5) $(\bar{a}-\bar{b})^2$.

11. Даны вершины четырёхугольника $A(1; –2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(–4; 1; 1)$ и $D(–5; –5; 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

12. Вычислить проекцию вектора $\bar{a} = \{5; 2; 5\}$ на ось вектора $\bar{b} = \{2; –1; 2\}$ и найти косинус угла между этими векторами.

13. Вычислить проекцию вектора $\bar{a} = \{6; 3; 2\}$ на ось вектора $\bar{b} = \{2; 2; 1\}$ и найти косинус угла между этими векторами.

14. Даны вершины $A(–1; –2; 4)$, $B(–4; –2; 0)$ и $C(3; –2; 1)$ треугольника. Определить его внутренний угол при вершине B.

15. Даны три вектора $\bar{a} = \{2; –1; –3\}$, $\bar{b} = \{1; –3; 2\}$ и $\bar{c} = \{3; –4; 12\}$. Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям: $\bar{x}\bar{a} = -5$, $\bar{x}\bar{b} = -11$, $\bar{x}\bar{c} = 20$.

16. Определить и построить вектор $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$, если 1) $\bar{a} = 3\bar{i},\ \bar{b} = 2\bar{k}$; 2) $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j},\ \bar{b} = \bar{i} - \bar{j}$; 3) $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j},\ \bar{b} = 3\bar{j} + 2\bar{k}$.

17. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $\bar{i}\times(\bar{j}+\bar{k}) - \bar{j}\times(\bar{i}+\bar{k}) + \bar{k}\times(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$;

2) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times\bar{c} + (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\times\bar{b} + (\bar{b}-\bar{c})\times\bar{a}$;

3) $(2\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{c}-\bar{a}) + (\bar{b}+\bar{c})\times(\bar{a}+\bar{b})$;

4) $2\bar{i}\times(\bar{j}\times\bar{k}) + 3\bar{j}\times(\bar{i}\times\bar{k}) + 4\bar{k}\times(\bar{i}\times\bar{j})$.

18. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 1$ и $|\bar{b}| = 2$, вычислить: 1) $|\bar{a}\times\bar{b}|^2$; 2) $|(3\bar{a}+2\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})|^2$; 3) $|(\bar{a}+3\bar{b})\times(3\bar{a}-\bar{b})|^2$.

Даны векторы $\bar{a} = \{3; –1; –2\}$ и $\bar{b} = \{1; –2; –1\}$. Вычислить:
1) $\bar{a}\times\bar{b}$; 2) $(2\bar{a}+\bar{b})\times\bar{b}$; 3) $(3\bar{a}+2\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})$.

Даны векторы $\bar{a} = \{1; 1; –3\}$ и $\bar{b} = \{3; 2; 0\}$. Вычислить:
1) $\bar{a}\times\bar{b}$; 2) $(\bar{a}+3\bar{b})\times\bar{b}$; 3) $(\bar{a}+2\bar{b})\times(\bar{a}-3\bar{b})$.

19. Построить параллелограмм на векторах $\bar{a} = 2\bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{k}$ и вычислить его площадь и высоту.

Даны вершины $A(1; –2; 8)$, $B(0; 0; 4)$ и $C(6; 2; 0)$ треугольника.
Вычислить его площадь и длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

20. Даны вершины $A(1; –1; 2)$, $B(5; –6; 2)$ и $C(1; 3; –1)$ треугольника. Вычислить его площадь и длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

21. С помощью векторного произведения выяснить, коллинеарны ли векторы $\bar{a} = \{1; 0; 3\}$ и $\bar{b} = \{2; 0; 6\}$.

22. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2$ и $|\bar{c}| = 3$, вычислить $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

23. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 30°. Зная, что $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 3$ и $|\bar{c}| = 3$, вычислить $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

Даны три вектора: $\bar{a} = \{0; 1; –3\}$, $\bar{b} = \{3; 2; 1\}$, $\bar{c} = \{1; 3; 2\}$.
Вычислить $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

24. Установить, компланарны ли векторы:

1) $\bar{a} = \{2; 3; –1\}$, $\bar{b} = \{1; –1; 3\}$, $\bar{c} = \{1; 9; –11\}$;

2) $\bar{a} = \{1; 1; –3\}$, $\bar{b} = \{0; 1; 0\}$, $\bar{c} = \{1; 1; 1\}$;

3) $\bar{a} = \{2; –1; 2\}$, $\bar{b} = \{1; 2; –3\}$, $\bar{c} = \{3; –4; 7\}$.

Доказать, что четыре точки $A(1; 2; –1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(–1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

25. Вычислить объём пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$, $D(0; 0; 0)$.

Даны вершины пирамиды: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; –2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(–5; –4; 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

II. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Даны вершины $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ треугольника ABC.
Найти:
а) длину медианы AE;
б) внутренний угол C.

1. $A(-4; 3)$, $B(-7; 2)$, $C(-1; -1)$.
2. $A(2; 3)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -1)$.
3. $A(4; 4)$, $B(7; 3)$, $C(1; 0)$.
4. $A(3; 5)$, $B(6; 4)$, $C(0; 1)$.
5. $A(4; 5)$, $B(7; 4)$, $C(1; 1)$.
6. $A(5; 3)$, $B(8; 2)$, $C(2; -1)$.
7. $A(2; 5)$, $B(5; 4)$, $C(-1; 1)$.
8. $A(-2; 5)$, $B(-5; 4)$, $C(1; 1)$.
9. $A(-2; 3)$, $B(-5; 2)$, $C(1; -1)$.
10. $A(-4; 5)$, $B(-7; 4)$, $C(-1; 1)$.
11. $A(4; 7)$, $B(10; 3)$, $C(-2; -1)$.
12. $A(-2; 1)$, $B(-5; 0)$, $C(1; 1)$.
13. $A(-3; 3)$, $B(2; 0)$, $C(9; 6)$.
14. $A(-2; -1)$, $B(13; 3)$, $C(5; 7)$.
15. $A(2; 1)$, $B(0; 3)$, $C(10; 6)$.
16. $A(2; 1)$, $B(0; 3)$, $C(10; 6)$.
17. $A(-1; -4)$, $B(5; -1)$, $C(1; 5)$.
18. $A(-3; -4)$, $B(0; 5)$, $C(5; 0)$.
19. $A(-5; 1)$, $B(-7; 5)$, $C(5; 1)$.
20. $A(-4; 4)$, $B(-8; -1)$, $C(-3; -8)$.
21. $A(-4; -4)$, $B(4; -6)$, $C(6; 6)$.
22. $A(5; 2)$, $B(-2; 0)$, $C(8; -2)$.
23. $A(7; 4)$, $B(0; 2)$, $C(10; 0)$.
24. $A(1; -2)$, $B(-6; -4)$, $C(4; -6)$.
25. $A(-5; 1)$, $B(5; -5)$, $C(3; 9)$.
26. $A(2; 8)$, $B(-10; 2)$, $C(-2; -10)$.
27. $A(-1; -2)$, $B(2; 7)$, $C(7; 2)$.
28. $A(-5; 0)$, $B(5; -6)$, $C(-2; 8)$.
29. $A(0; -2)$, $B(7; 4)$, $C(-3; -2)$.
30. $A(5; 1)$, $B(4; 11)$, $C(2; 8)$.

2. Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Вычислите: а) скалярное произведение $\bar{b}$, $\bar{c}$; б) модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$; в) смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Проверьте: г) будут ли коллинеарны или ортогональны какие-либо два из трёх заданных векторов; д) будут ли компланарны три заданных вектора.

1. $\bar{a}\{2; -3; 2\}$, $\bar{b}\{0; 1; 4\}$, $\bar{c}\{5; 2; -3\}$.
2. $\bar{a}\{3; 4; 1\}$, $\bar{b}\{1; -2; 7\}$, $\bar{c}\{3; -6; 21\}$.
3. $\bar{a}\{2; -4; -2\}$, $\bar{b}\{7; 3; 0\}$, $\bar{c}\{3; 5; -7\}$.
4. $\bar{a}\{-7; 0; 2\}$, $\bar{b}\{2; -6; 4\}$, $\bar{c}\{1; -3; 2\}$.
5. $\bar{a}\{-4; 2; -1\}$, $\bar{b}\{3; 5; -2\}$, $\bar{c}\{0; 1; 5\}$.
6. $\bar{a}\{2; -3; 1\}$, $\bar{b}\{1; 0; 4\}$, $\bar{c}\{5; 2; -3\}$.
7. $\bar{a}\{3; 4; 1\}$, $\bar{b}\{1; -2; 7\}$, $\bar{c}\{3; -6; 21\}$.
8. $\bar{a}\{2; -4; -2\}$, $\bar{b}\{7; 3; 0\}$, $\bar{c}\{3; 5; -7\}$.
9. $\bar{a}\{-7; 0; 2\}$, $\bar{b}\{2; -6; 4\}$, $\bar{c}\{1; -3; 2\}$.
10. $\bar{a}\{-4; 2; -1\}$, $\bar{b}\{3; 5; -2\}$, $\bar{c}\{0; 1; 5\}$.
11. $\bar{a}\{2; -3; 1\}$, $\bar{b}\{0; 4; 1\}$, $\bar{c}\{5; -3; 2\}$.
12. $\bar{a}\{3; 4; 1\}$, $\bar{b}\{1; -2; 7\}$, $\bar{c}\{3; -6; 21\}$.
13. $\bar{a}\{2; -4; -2\}$, $\bar{b}\{7; 0; 3\}$, $\bar{c}\{3; 5; -7\}$.
14. $\bar{a}\{-7; 2; 0\}$, $\bar{b}\{2; -6; 4\}$, $\bar{c}\{1; -3; 2\}$.
15. $\bar{a}\{-4; -1; 2\}$, $\bar{b}\{3; -2; 5\}$, $\bar{c}\{0; 5; 1\}$.
16. $\bar{a}\{4; -1; 3\}$, $\bar{b}\{2; 3; -5\}$, $\bar{c}\{7; 2; 4\}$.
17. $\bar{a}\{4; 2; -3\}$, $\bar{b}\{2; 0; 1\}$, $\bar{c}\{-12; -6; 9\}$.
18. $\bar{a}\{3; -1; 5\}$, $\bar{b}\{2; -4; 6\}$, $\bar{c}\{1; -2; 3\}$.
19. $\bar{a}\{-1; 0; 5\}$, $\bar{b}\{-3; 2; 2\}$, $\bar{c}\{-2; -4; 1\}$.
20. $\bar{a}\{-3; 2; 7\}$, $\bar{b}\{1; 0; -5\}$, $\bar{c}\{6; 4; -1\}$.
21. $\bar{a}\{5; -3; 4\}$, $\bar{b}\{2; -4; -2\}$, $\bar{c}\{3; 5; -7\}$.
22. $\bar{a}\{3; -1; 2\}$, $\bar{b}\{-1; 5; -4\}$, $\bar{c}\{6; -2; 4\}$.
23. $\bar{a}\{-4; 3; -7\}$, $\bar{b}\{4; 6; -2\}$, $\bar{c}\{6; 9; -3\}$.
24. $\bar{a}\{4; -6; -2\}$, $\bar{b}\{-2; 3; 1\}$, $\bar{c}\{3; -5; 7\}$.
25. $\bar{a}\{-5; 2; -2\}$, $\bar{b}\{7; 0; -5\}$, $\bar{c}\{2; 3; -2\}$.

26. $\bar{a}$ {2; –7; 5}, $\bar{b}$ {–1; 2; –6}, $\bar{c}$ {3; 2; –4}.

27. $\bar{a}$ {3; 1; –3}, $\bar{b}$ {–2; 4; 1}, $\bar{c}$ {1; –2; 5}.

28. $\bar{a}$ {4; 2; 3}, $\bar{b}$ {–3; 1; –8}, $\bar{c}$ {2; –4; 5}.

29. $\bar{a}$ {0; 2; –3}, $\bar{b}$ {4; –3; –2}, $\bar{c}$ {–5; –4; 0}.

30. $\bar{a}$ {1; 3; 6}, $\bar{b}$ {–3; 4; –5}, $\bar{c}$ {1; –7; 2}.

3. Доказать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

1. $\bar{a}$ {2; 1; 1}, $\bar{b}$ {–1; 3; –2}, $\bar{c}$ {3; –1; 2}, $\bar{d}$ {–4; 11; –7}.
2. $\bar{a}$ {3; 3; 2}, $\bar{b}$ {–2; 4; –1}, $\bar{c}$ {4; –2; –1}, $\bar{d}$ {12; 6; –9}.
3. $\bar{a}$ {2; 2; 3}, $\bar{b}$ {1; 3; 2}, $\bar{c}$ {3; 1; 1}, $\bar{d}$ {7; 1; 6}.
4. $\bar{a}$ {8; 1; 4}, $\bar{b}$ {3; 1; 1}, $\bar{c}$ {–6; –1; –3}, $\bar{d}$ {–4; 2; –5}.
5. $\bar{a}$ {2; 3; 3}, $\bar{b}$ {–1; 4; –2}, $\bar{c}$ {–1; –2; 4}, $\bar{d}$ {4; 11; 11}.
6. $\bar{a}$ {3; 2; 2}, $\bar{b}$ {2; 3; 1}, $\bar{c}$ {1; 1; 3}, $\bar{d}$ {5; 1; 1}.
7. $\bar{a}$ {1; 2; 4}, $\bar{b}$ {1; –1; 1}, $\bar{c}$ {2; 2; 4}, $\bar{d}$ {–1; –4; –2}.
8. $\bar{a}$ {1; 2; 4}, $\bar{b}$ {5; –3; 1}, $\bar{c}$ {–4; 1; –3}, $\bar{d}$ {–5; 2; –4}.
9. $\bar{a}$ {2; 3; 1}, $\bar{b}$ {–1; 2; –2}, $\bar{c}$ {1; 2; 1}, $\bar{d}$ {2; –2; 1}.
10. $\bar{a}$ {1; 2; 1}, $\bar{b}$ {3; –1; 2}, $\bar{c}$ {4; –1; 3}, $\bar{d}$ {6; 1; 5}.
11. $\bar{a}$ {2; 1; 1}, $\bar{b}$ {–4; –5; –1}, $\bar{c}$ {1; 3; 1}, $\bar{d}$ {3; –1; 1}.
12. $\bar{a}$ {1; 2; 1}, $\bar{b}$ {–1; 1; 1}, $\bar{c}$ {1; 1; 2}, $\bar{d}$ {6; 3; 5}.
13. $\bar{a}$ {2; –1; 3}, $\bar{b}$ {–1; 3; 2}, $\bar{c}$ {1; –1; 1}, $\bar{d}$ {4; –3; 3}.
14. $\bar{a}$ {3; 1; 1}, $\bar{b}$ {1; 1; –2}, $\bar{c}$ {–2; 1; 3}, $\bar{d}$ {–2; 0; –3}.
15. $\bar{a}$ {1; –2; 1}, $\bar{b}$ {2; –3; 5}, $\bar{c}$ {–1; 2; 1}, $\bar{d}$ {1; 0; –5}.
16. $\bar{a}$ {2; 1; –2}, $\bar{b}$ {–3; –5; –1}, $\bar{c}$ {1; –2; 3}, $\bar{d}$ {–3; 6; –9}.
17. $\bar{a}$ {3; 1; 1}, $\bar{b}$ {1; 2; 4}, $\bar{c}$ {1; 2; –1}, $\bar{d}$ {4; 3; –2}.
18. $\bar{a}$ {4; 1; –1}, $\bar{b}$ {–1; 3; 2}, $\bar{c}$ {–1; 3; –1}, $\bar{d}$ {0; –4; 5}.
19. $\bar{a}$ {2; 5; –1}, $\bar{b}$ {–1; 3; –2}, $\bar{c}$ {0; –6; 3}, $\bar{d}$ {7; –5; 7}.
20. $\bar{a}$ {3; 1; 2}, $\bar{b}$ {–1; 2; –1}, $\bar{c}$ {1; –1; 3}, $\bar{d}$ {12; 12; 9}.
21. $\bar{a}$ {1; 1; 3}, $\bar{b}$ {3; –1; –2}, $\bar{c}$ {–2; 4; –1}, $\bar{d}$ {–4; 4; –9}.
22. $\bar{a}$ {2; 2; 3}, $\bar{b}$ {1; 0; 1}, $\bar{c}$ {1; 1; 2}, $\bar{d}$ {6; 13; 8}.
23. $\bar{a}$ {3; 2; 1}, $\bar{b}$ {–2; 3; –2}, $\bar{c}$ {–5; –4; 3}, $\bar{d}$ {5; 12; –1}.
24. $\bar{a}$ {2; 4; 1}, $\bar{b}$ {–1; 1; 1}, $\bar{c}$ {2; 4; 2}, $\bar{d}$ {0; 6; –4}.
25. $\bar{a}$ {2; 3; 1}, $\bar{b}$ {–1; 4; 5}, $\bar{c}$ {–3; 2; 1}, $\bar{d}$ {1; 0; –3}.
26. $\bar{a}$ {–3; 3; 1}, $\bar{b}$ {5; 1; –4}, $\bar{c}$ {6; 1; –2}, $\bar{d}$ {–8; –4; –9}.
27. $\bar{a}$ {2; 2; 3}, $\bar{b}$ {3; 1; 2}, $\bar{c}$ {1; 3; 1}, $\bar{d}$ {4; 0; 1}.
28. $\bar{a}$ {1; 2; 3}, $\bar{b}$ {5; 4; –1}, $\bar{c}$ {–1; –3; –3}, $\bar{d}$ {3; 2; 7}.
29. $\bar{a}$ {2; 3; 5}, $\bar{b}$ {–1; –1; 2}, $\bar{c}$ {5; 5; 13}, $\bar{d}$ {4; 0; 2}.
30. $\bar{a}$ {1; 2; 1}, $\bar{b}$ {–2; –1; 0}, $\bar{c}$ {–1; 0; 1}, $\bar{d}$ {–2; –1; –2}.

4. Вершины пирамиды находятся в точках *A*, *B*, *C* и *D*. Вычислите:

а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объём пирамиды *ABCD*.

1. *A*(3; 4; 5), *B*(1; 2; 1), *C*(–2; –3; 6), *D*(3; –6; –3);

а) *ACD*; б) *l* = *AB*, *C* и *D*.

2. *A*(–7; –5; 6), *B*(–2; 5; –3), *C*(3; –2; 4), *D*(1; 2; 2);

а) *BCD*; б) *l* = *CD*, *A* и *B*.

3. *A*(–1; 4; 5), *B*(1; 2; 1), *C*(–2; –1; 6), *D*(–1; –6; –1);

а) *ABC*; б) *l* = *AB*, *C* и *D*.

4. *A*(–2; 4; 5), *B*(2; 2; 2), *C*(–2; –2; 6), *D*(–2; –6; –2);

а) *BCD*; б) *l* = *BD*, *A* и *C*.

5. $A(–2; 2; 7)$, $B(2; 1; 2)$, $C(–2; –1; 6)$, $D(–2; –6; –3)$;
а) ACD; б) $l = AD$, B и C.
6. $A(3; 4; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $C(–1; –3; 6)$, $D(3; –6; –3)$;
а) ABD; б) $l = AB$, D и C.
7. $A(–7; –1; 6)$, $B(–1; 4; –3)$, $C(3; –1; 4)$, $D(2; 1; 1)$;
а) BDC; б) $l = DC$, A и B.
8. $A(–2; 4; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $C(–1; –2; 6)$, $D(–2; –6; –2)$;
а) ABD; б) $l = AB$, D и C.
9. $A(1; 4; 1)$, $B(1; 1; 1)$, $C(–1; –1; 6)$, $D(–1; –6; –1)$;
а) BDC; б) $l = BC$, A и D.
10. $A(–1; 1; 7)$, $B(1; 2; 1)$, $C(–1; –2; 6)$, $D(–1; –6; –3)$;
а) ADC; б) $l = AC$, B и D.
11. $A(3; 4; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $C(–1; –3; 0)$, $D(3; 0; –3)$;
а) CBD; б) $l = CB$, D и A.
12. $A(–8; –1; 0)$, $B(–1; 1; –3)$, $C(3; –1; 4)$, $D(2; 1; 1)$;
а) BDA; б) $l = DA$, C и B.
13. $A(–2; 4; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $C(–1; –2; 0)$, $D(–2; 0; –2)$;
а) CBD; б) $l = CB$, D и A.
14. $A(–1; 4; 1)$, $B(1; 1; 1)$, $C(–1; –1; 0)$, $D(–1; 0; –1)$;
а) BDA; б) $l = BA$, C и D.
15. $A(–1; 1; 8)$, $B(1; 2; 1)$, $C(–1; –2; 0)$, $D(–1; 0; –3)$;
а) CDA; б) $l = CA$, B и D.
16. $A(2; 3; 4)$, $B(0; 1; 0)$, $C(–3; –4; 5)$, $D(2; –7; –4)$;
а) ACD; б) $l = AB$, C и D.
17. $A(–5; –3; 8)$, $B(0; 7; –5)$, $C(5; 0; 6)$, $D(2; 4; 4)$;
а) BCD; б) $l = CD$, A и B.
18. $A(1; –4; –5)$, $B(–1; –2; –1)$, $C(2; 1; –6)$, $D(1; 6; 1)$;
а) ABC; б) $l = AB$, C и D.
19. $A(–3; 3; 4)$, $B(1; 1; 1)$, $C(–3; –3; 5)$, $D(–3; –7; –3)$;
а) BCD; б) $l = BD$, A и C.
20. $A(0; 4; 9)$, $B(4; 3; 4)$, $C(0; 1; 8)$, $D(0; –4; 1)$;
а) ACD; б) $l = AD$, B и C .
21. $A(–1; 0; –3)$, $B(–2; –3; –2)$, $C(–5; –7; 2)$, $D(–1; –10; –7)$;
а) ABD; б) $l = AB$, D и C.
22. $A(–2; 4; 11)$, $B(4; 9; 2)$, $C(8; 4; 9)$, $D(7; 6; 6)$;
а) BDC; б) $l = DC$, A и B.
23. $A(–3; 3; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(–2; –3; 5)$, $D(–3; –7; –3)$;
а) ABD; б) $l = AB$, D и C.
24. $A(–3; 2; –1)$, $B(–1; –1; –1)$, $C(–3; –3; 4)$, $D(–3; –9; –3)$;
а) BDC; б) $l = BC$, A и D.
25. $A(–3; –1; 5)$, $B(–1; 0; –1)$, $C(–3; –4; 4)$, $D(–3; –8; –5)$;
а) ADC; б) $l = AC$, B и D.
26. $A(6; 7; 4)$, $B(5; 4; 5)$, $C(2; 0; 3)$, $D(6; 3; 0)$;
а) CBD; б) $l = CB$, D и A.
27. $A(–3; 4; 5)$, $B(4; 6; 2)$, $C(8; 4; 9)$, $D(7; 6; 6)$;
а) BDA; б) $l = DA$, C и B.
28. $A(2; –4; –1)$, $B(–2; –1; –2)$, $C(1; 2; 0)$, $D(2; 0; 2)$;
а) CBD; б) $l = CB$, D и A.
29. $A(0; 5; 2)$, $B(2; 2; 2)$, $C(0; 0; 1)$, $D(0; 1; 0)$;
а) BDA; б) $l = BA$, C и D.
30. $A(–3; –1; 6)$, $B(–1; 0; –1)$, $C(–3; –4; –2)$, $D(–3; –2; –5)$;
а) CDA; б) $l = CA$, B и D.

III. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

1. Даны вершины $A(0; 2)$, $B(4; 1)$, $C(-2; -3)$ треугольника ABC. Найти: а) длину медианы AE; б) внутренний угол C.

Решение.

а) Для нахождения длины медианы AE используем формулу расстояния между двумя точками:

$$\left|\overline{AE}\right| = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}.$$

Координаты точки E найдём по формулам координат середины отрезков:

$$x_E = \frac{1}{2}(x_B + x_C),\ x_E = \frac{1}{2}(4-2) = 1;\quad y_E = \frac{1}{2}(y_B + y_C),\ y_E = \frac{1}{2}(1-3) = -1.$$

$E(1; -1)$, тогда

$$\left|\overline{AE}\right| = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}.$$

б) Внутренний угол C треугольника ABC образован векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Используя формулу косинуса угла между векторами $\cos\angle C = = \dfrac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{\left|\overline{CA}\right|\cdot\left|\overline{CB}\right|}$, определим угол C. Найдём координаты и длины векторов $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$:

$$\overline{CA} = \big(0-(-2);\ 2-(-3)\big) = (2;\,1),\ \left|\overline{CA}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{CB} = \big(4-(-2);\ 1-(-3)\big) = (6;\,4),\ \left|\overline{CB}\right| = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52} = 4\sqrt{13}.$$

Скалярное произведение векторов $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ равно:

$$\overline{CA}\ \cdot\ \overline{CB} = 2\cdot 6 + 1\cdot 4 = 16,$$

тогда

$$\cos\angle C = \frac{16}{\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}},\ \ \angle C = \arccos\frac{4}{\sqrt{65}}.$$

2. Даны векторы $\bar{a}\ \{0; -5; -1\}$, $\bar{b}\ \{-2; 2; -1\}$ и $\bar{c}\ \{3; -5; 0\}$. Вычислите: а) скалярное произведение $\bar{b}$, $\bar{c}$; б) модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$; в) смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Проверьте: г) будут ли коллинеарны или ортогональны какие-либо два из трёх заданных векторов; д) будут ли компланарны три заданных вектора.

Решение.

а) Найдём скалярное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$: $\bar{b}\,\bar{c} = -2\cdot 3 + 2\cdot(-5) + (-1)\cdot 0 = -16$.

б) Чтобы вычислить $\left|\left[\bar{a},\,\bar{b}\right]\right|$, найдём координаты векторного произведения $\left[\bar{a},\,\bar{b}\right]$:

$$\left[\bar{a},\,\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \big(5-(-2)\big)\bar{i} - (0-2)\,\bar{j} + (0-10)\bar{k} = 7\bar{i} + 2\,\bar{j} - 10\bar{k} = \{7;\ 2;\ -10\},$$

тогда $\left|\left[\bar{a},\,\bar{b}\right]\right| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-10)^2} = \sqrt{153}.$

в) Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ найдём по формуле

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix},$$

вычислив определитель третьего порядка, получим $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\ = 11$.

г) Два вектора коллинеарны, если их координаты пропорциональны или векторное произведение равно нулевому вектору. Из б) следует, что $\left[\bar{a},\,\bar{b}\right]\ \neq \bar{0}$, следовательно векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны. Проверим коллинеарность векторов $\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$: $\dfrac{0}{3} \neq \dfrac{-5}{-5} \neq \dfrac{-1}{0}$, следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ не коллинеарны. $\dfrac{-2}{3} \neq \dfrac{2}{-5} \neq \dfrac{-1}{0}$, следовательно, векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не коллинеарны.

Из а) следует, что векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не ортогональны, так как скалярное произведение этих векторов не равно нулю. Найдём скалярные произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{c}$ и $\bar{a}$, $\bar{b}$:

$$\bar{a}\ \bar{c} = 0 \cdot 3 + (-5) \cdot (-5) + (-1) \cdot 0 = 25 \neq 0;$$

$$\bar{a}\ \bar{b} = 0 \cdot (-2) + (-5) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = -9 \neq 0.$$

Это значит, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не ортогональны.

д) Условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Из в) следует, что $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} \neq 0$. Это значит, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не компланарны.

3. Доказать, что векторы $\bar{a}\,\{1; 3; -1\}$, $\bar{b}\,\{1; 0; 1\}$ и $\bar{c}\,\{0; 1; 1\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\bar{d}\,\{5; -3; 2\}$ в этом базисе.

Решение.

Три вектора образуют базис, если они не компланарны, т.е. смешанное произведение $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} \neq 0$.

Найдём смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

следовательно, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис.

Обозначим координаты вектора $\bar{d}$ в базисе $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ через *x*, *y* и *z*. Тогда

$$\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c},$$

или, переходя к координатной форме

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{cases} x + y = 5; \\ 3x + z = -3; \\ -x + y + z = 2. \end{cases}$$

Решая по формулам Крамера, найдём:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta},\ \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \ x = 0;$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta},\ \ \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -25,\ \ y = 5;$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta},\quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 15,\ \ z = 15.$$

Таким образом, $\bar{d} = 5\bar{b} - 3\bar{c}$ или $\bar{d}\,\{0; 5; -3\}$ в базисе $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$.

4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(-2; 3; 1)$,
$C(1; 2; 3)$ и $D(1; -2; 2)$. Вычислите: а) площадь грани *ABC*; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра *AB* и вершины *C* и *D* пирамиды; в) объём пирамиды *ABCD*.

Решение.

а) Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма построенного на тех же векторах, т.е.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]\right|.$$

Найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}(-2-2;\ 3-(-1);\ 1-1) = (-4;\ 4;\ 0);$$

$$\overline{AC}(1-2;\ 2-(-1);\ 3-1)=(-1;\ 3;\ 2).$$

Векторное произведение $\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]$ равно:

$$\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-4 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-4 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=8\bar{i}+8\bar{j}-8\bar{k}=(8;\ 8;\ -8);$$

$$\left|\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]\right|=\sqrt{8^2+8^2+(-8)^2}=\sqrt{192}=8\sqrt{3},$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

б) Найдём координаты точки M – середины ребра AB:

$$x_M=\frac{1}{2}\bigl(2+(-2)\bigr)=0;\ \ y_M=\frac{1}{2}\bigl(-1+3\bigr)=1;\ \ z_M=\frac{1}{2}\bigl(1+1\bigr)=1,$$

получим $M(0;\ 1;\ 1)$.

Площадь треугольника MCD определяется по формуле

$$S_{MCD}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{MC},\ \overline{MD}\right]\right|.$$

Найдём координаты векторов $\overline{MC}$ и $\overline{MD}$ $\left[\overline{MC}, \overline{MD}\right]$:

$$\overline{MC}=(1-0;\ 2-1;\ 3-1)=(1;\ 1;\ 2);\ \ \overline{MD}=(1-0;\ -2-1;\ 2-1)=(1;\ -3;\ 1);$$

$$\left[\overline{MC},\ \overline{MD}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=7\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}=(7;\ 1;\ -4);$$

$$\left|\left[\overline{MC},\ \overline{MD}\right]\right|=\sqrt{7^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{66},$$

$$S_{MCD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{66}.$$

в) Объём пирамиды $ABCD$ вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right|.$$

Координаты векторов $\overline{AB}=(-4;\ 4;\ 0)$, $\overline{AC}=(-1;\ 3;\ 2)$, $\overline{AD}=(1-2;\ \ -2-\ (-1);\ \ 2-1)=(-1;\ -1;\ 1)$.

Найдём смешанное произведение векторов

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}=\begin{vmatrix}-4 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-24,$$

тогда $V=\dfrac{1}{6}\left|-24\right|=4.$

IV. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Определение 1. *Вектором* называется направленный отрезок.

Обозначения: **a**, $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$. Длина этого отрезка называется модулем вектора и обозначается $|\mathbf{a}|$, $|\overline{a}|$, $|\overline{AB}|$.

Определение 2. Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

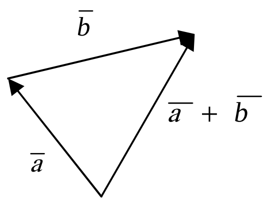
Определение 3. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Вектор называется *нулевым*, если его начальная и конечная точки совпадают. Нулевой вектор не имеет определённого направления и считается коллинеарным и перпендикулярным любому вектору.

Определение 4. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину (модуль) и одинаковое направление.

Из определения 4 следует, что равные между собой векторы могут иметь различные начальные точки. Такие векторы называются *свободными.* Векторы, для которых важна точка приложения, называются присоединёнными (связанными) и используются в некоторых разделах физики.

Определение 5. *Суммой* $\overline{a}+\overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$, если начало вектора $\overline{b}$ совпадает с концом вектора $\overline{a}$.

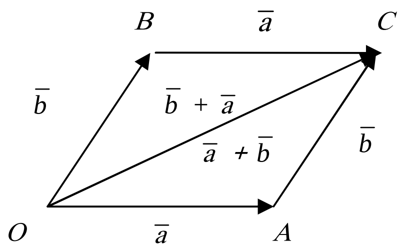


Такое правило сложения векторов называют *правилом треугольника.*

Свойства сложения:

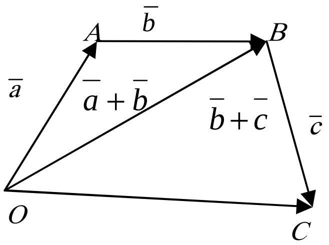
1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.

Доказательство. Приложим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ к общему началу и рассмотрим параллелограмм *AOBC*. Из определения 5 и треугольника *OBC* следует, что $\overline{OC}=\overline{b}+\overline{a}$, а из треугольника *OAC*: $\overline{OC}=$
$=\overline{a}+\overline{b}$.



Свойство 1 доказано.

В ходе доказательства свойства 1 получено ещё одно правило сложения векторов – *правило параллелограмма*: сумма $\overline{a}+\overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ есть вектор образованный диагональю параллелограмма, выходящей из общего начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, на которых построен параллелограмм.



2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$.

Доказательство. Из рисунка видно, что $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\left(\overline{OA}+\overline{AB}\right)+$
$+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC},\quad \overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=$
$=\overline{OA}+\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}.$

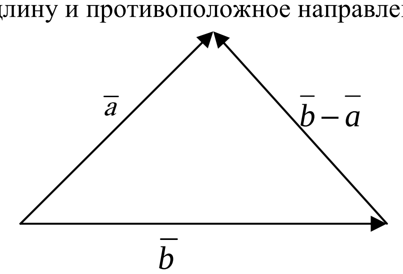
Свойство 2 доказано.

3. Для любого вектора $\overline{a}$ существует нулевой вектор $\overline{0}$ такой, что $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

Доказательство этого свойства следует из определения 5.

4. Для каждого вектора $\overline{a}$ существует противоположный ему вектор $-\overline{a}$ такой, что $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$.

Доказательство. Достаточно определить $-\overline{a}$ как вектор, коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий одинаковую с ним длину и противоположное направление.



Определение 6. *Разностью* $\overline{a}-\overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор, который в сумме с вектором $\overline{b}$ даёт вектор $\overline{a}$.

Определение 7. *Произведением* $k\overline{a}$ вектора $\overline{a}$ на число k называется вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору, $\overline{a}$ имеющий модуль, равный $|k||\overline{a}|$, и направление, совпадающее с направлением $\overline{a}$ при $k>0$ и противоположное $\overline{a}$ при $k<0$.

Свойства умножения вектора на число:

1. $k(\overline{a}+\overline{b})=k\overline{a}+k\overline{b}$.
2. $(k+m)\overline{a}=k\overline{a}+m\overline{a}$.
3. $k(m\overline{a})=(km)\overline{a}$.

Следствие. Если ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\overline{b}=k\overline{a}$.

2. БАЗИС И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Определение 8. *Линейной комбинацией* векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называется выражение вида:

$$k_1\overline{a}_1+k_2\overline{a}_2+\ldots+k_n\overline{a}_n, \qquad (1)$$

где k_i – действительные числа.

Определение 9. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ не все равные нулю, что соответствующая линейная комбинация векторов равна нулю, т.е.

$$k_1\overline{a}_1+k_2\overline{a}_2+\ldots+k_n\overline{a}_n=\overline{0}. \qquad (2)$$

Если же равенство (2) возможно только при всех $k_i=0$, то векторы называются *линейно независимыми*.

Свойства линейной зависимости векторов:

1. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
2. Если среди n векторов какие-либо $(n-1)$ линейно зависимы, то и все n векторов линейно зависимы.
3. Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.
4. Любые четыре вектора в трёхмерном пространстве линейно зависимы.

Определение 10. *Базисом* на плоскости (в пространстве) называются два (три) любых линейно независимых вектора.

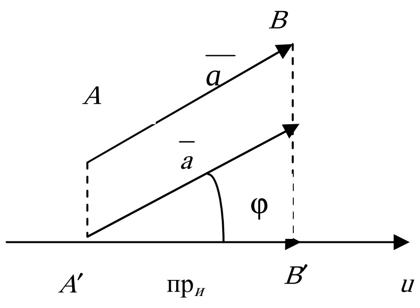
Любой вектор плоскости (пространства) может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Числовые коэффициенты этой линейной комбинации называются *координатами* данного вектора в рассматриваемом базисе. Если $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – базис и $\overline{d}=k\overline{a}+m\overline{b}+p\overline{c}$, то числа k, m, p есть координаты вектора $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Представление вектора в виде линейной комбинации базисных векторов называется разложением вектора $\overline{d}$ в базисе векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и обозначается символически $\overline{d}=\{k; m; p\}$.

Свойства базиса:

1. Разложение вектора по данному базису единственно, т.е. его координаты в этом базисе определяются единственным образом.
2. При сложении двух векторов их координаты в данном базисе складываются.
3. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

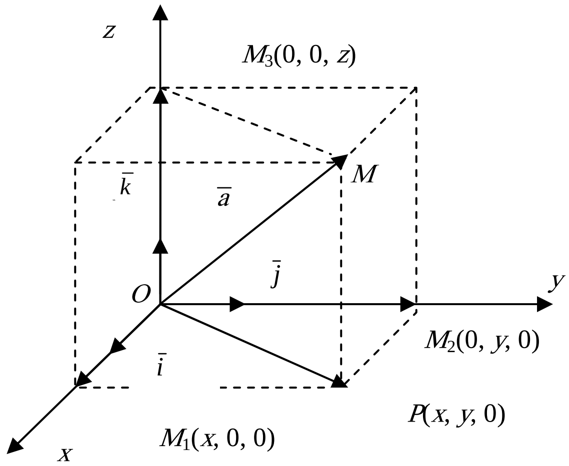
Определение 11. *Проекцией* вектора $\overline{AB}$ на ось u называется положительное число $\left|\overline{A'B'}\right|$, если направления вектора $\overline{A'B'}$ и направление оси u совпадают и отрицательное число $-\left|\overline{A'B'}\right|$, если вектор $\overline{A'B'}$ и ось u противоположно направлены. Точки A' и B' являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось u. Проекция вектора $\overline{a}=\overline{AB}$ на ось u обозначается: $\text{пр}_u\overline{a}$, $\text{пр}_u\overline{AB}$.



Свойства проекции:

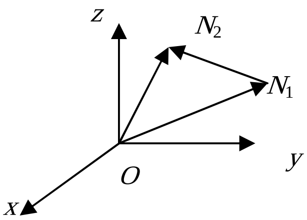
1. $\text{пр}_u\overline{a}=|\overline{a}|\cos\varphi$, где φ – угол между $\overline{a}$ и осью u.
2. При сложении двух векторов их проекции на любую ось складываются.
3. При умножении вектора на число его проекция на любую ось умножается на это число.

Рассмотрим декартову систему координат, базис которой образуют в пространстве три попарно ортогональных единичных вектора $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Любой точке $M(x, y, z)$ в пространстве можно поставить в соответствие радиус-вектор $\overline{a}=\overline{OM}$, имеющий начало в точке O – начале координат. Используя определение 5 суммы векторов, получаем $\overline{OP}=\overline{OM_1}+\overline{OM_2}$ и



радиус-вектор $\overline{a}$ = $\overline{OM}$ = $\overline{OP}+\overline{OM_3}$ = $\overline{OM_1}+\overline{OM_2}+\overline{OM_3}$. А так как $\overline{OM_1}=X\,\overline{i}$, $\overline{OM_2}=X\,\overline{j}$ и $\overline{OM_3}=X\,\overline{k}$, то разложение радиус-вектора $\overline{a}$ в базисе векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ будет иметь вид $\overline{a}$ = $\overline{OM}$ = $X\overline{i}$ + $Y\overline{j}$ + $Z\overline{k}$. Таким образом, координаты точки $M(x,\ y,\ z)$ и координаты соответствующего ей радиуса-вектора $\overline{a}$ = $\overline{OM}$ = $\{X,\ Y,\ Z\}$ совпадают. Используя формулу $\left|\overline{OM}\right|^2=\left|\overline{OM_1}\right|^2+\left|\overline{OM_2}\right|^2+\left|\overline{OM_3}\right|^2$ для вычисления длины диагонали прямоугольного параллелепипеда, получим выражение для модуля вектора $\left|\overline{a}\right|^2=X^2+Y^2+Z^2$ или $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

Если вектор в пространстве определяется начальной точкой $N_1(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$ и конечной точкой $N_2(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$, то его можно выразить через радиусы-векторы этих точек $\overline{N_1N_2}=\overline{ON_2}-\overline{ON_1}$ или в координатной форме $\overline{N_1N_2}$ = $\{X_2-X_1;\ Y_2-Y_1;\ Z_2-Z_1\}$.



З а м е ч а н и е 1. Декартовы координаты вектора равны его проекциям на оси Ox, Oy и Oz декартовой системы координат.

З а м е ч а н и е 2. Расстояние L между точками $N_1(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$ и $N_2(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$ выражается формулой $L=\left|\overline{N_1N_2}\right|=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2+(Z_2-Z_1)^2}$.

Определение 12. Косинусы углов, образованных вектором $\overline{d}$ = $\{X,\ Y,\ Z\}$ с осями декартовой системы координат, называются его *направляющими косинусами.*

Свойства направляющих косинусов:

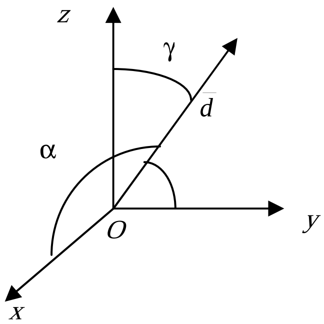
1. $X=\left|\overline{d}\right|\cos\alpha$; $Y=\left|\overline{d}\right|\cos\beta$; $Z=\left|\overline{d}\right|\cos\gamma$.

2. $\cos\alpha=\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$;

   $\cos\beta=\dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$;

   $\cos\gamma=\dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.

3. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.



3. УСЛОВИЕ КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ

Пусть два ненулевых вектора $\overline{a}=a_x\,\overline{i}+a_y\,\overline{j}+a_z\,\overline{k}$ и $\overline{b}=b_x\,\overline{i}+b_y\,\overline{j}+b_z\overline{k}$ коллинеарны. Тогда, пользуясь определением 7, запишем $\overline{a}=\lambda\overline{b}$, где λ – некоторое действительное число, т.е. $a_x\,\overline{i}+a_y\,\overline{j}+a_z\,\overline{k}=\lambda(b_x\overline{i}+b_y\,\overline{j}+b_z\overline{k})=\lambda\,b_x\overline{i}+\lambda b_y\,\overline{j}+\lambda b_z\overline{k}$. Разложение вектора по данному базису единственно, поэтому получаем $a_x=\lambda b_x$, $a_y=\lambda b_y$, $a_z=\lambda b_z$, т.е.

$\frac{a_x}{b_x}=\lambda,\ \frac{a_y}{b_y}=\lambda,\ \frac{a_z}{b_z}=\lambda$ или $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ – условие коллинеарности векторов. Таким образом, координаты коллинеарных векторов пропорциональны. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

4. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ЗАДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Пусть даны точки $M_1(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$ и $M_2(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$.

Найдём координаты точки $M(X,\ Y,\ Z)$, лежащей на отрезке M_1M_2 и делящей его в данном отношении $\lambda=\frac{\left|\overline{M_1M}\right|}{\left|\overline{MM_2}\right|}$. Из определения 7 следует, что $\overline{M_1M}=\lambda\overline{MM_2}$ или $(X-X_1)\bar{i}+(Y-Y_1)\bar{j}+(Z-Z_1)\bar{k}=\lambda\,(X_2-X)\,\bar{i}+\ \ \lambda(Y_2-Y)\,\bar{j}+\lambda(Z_2-Z)\bar{k}$. Отсюда $(X-X_1)=\lambda(X_2-X)$, $(Y-Y_1)=\ =\lambda(Y_2-Y)$, $(Z-Z_1)=\lambda(Z_2-Z)$ и окончательно получаем: $X=\frac{X_1+\lambda X_2}{1+\lambda}$; $Y=\frac{Y_1+\lambda Y_2}{1+\lambda}$; $Z=\frac{Z_1+\lambda Z_2}{1+\lambda}$.

З а м е ч а н и е . Если точка $M(X,\ Y,\ Z)$ делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$ и её координаты определятся по формулам: $X=\frac{X_1+X_2}{2}$; $Y=\frac{Y_1+Y_2}{2}$; $Z=\frac{Z_1+Z_2}{2}$.

5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 13. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi. \tag{3}$$

Обозначения скалярного произведения: $\bar{a}\,\bar{b}$, $(\bar{a},\ \bar{b})$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a}\bar{b}\ =|\bar{a}|\,\text{пр}_a\bar{b}=|\bar{b}|\,\text{пр}_b\bar{a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . По свойству проекции $\text{пр}_a\bar{b}=|\bar{b}|\cos\varphi$ и $\text{пр}_b\bar{a}=|\bar{a}|\cos\varphi$, следовательно, $\bar{a}\bar{b}\ =|\bar{a}|\,\text{пр}_a\bar{b}=|\bar{b}|\,\text{пр}_b\bar{a}$.

2. Для того чтобы векторы были перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a}\,\bar{b}\ =0$.

3. $\bar{a}\,\bar{b}\ =\bar{b}\,\bar{a}$.

4. $(k\,\bar{a}\,)\bar{b}\ =k(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$.

5. $(\bar{a}\ +\bar{b}\,)\bar{c}\ =\bar{a}\ \bar{c}\ +\bar{b}\ \bar{c}$.

6. $\bar{a}^{\,2}=\bar{a}\ \bar{a}\ =|\,\bar{a}\,|^2$, где $\bar{a}^{\,2}$ – называется скалярным квадратом вектора $\bar{a}$.

7. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими декартовыми координатами:

$$\bar{a}\ =\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\},\ \bar{b}\ =\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\},\text{ то }\bar{a}\ \bar{b}\ =X_1X_2+\ Y_1Y_2+Z_1Z_2. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Используя формулу (3), получим $\bar{a}\ \bar{b}\ =(X_1\bar{i}\ \ ++Y_1\bar{j}\ \ +Z_1\bar{k}\,)(X_2\bar{i}\ \ +Y_2\bar{j}\ \ +Z_2\bar{k}\,)$.

Используя свойства 4 и 5, раскроем скобки в правой части полученного равенства: $\bar{a}\ \bar{b}\ =X_1X_2\bar{i}\ \bar{i}\ \ +Y_1Y_2\bar{j}\ \bar{j}\ \ +Z_1Z_2\bar{k}\ \bar{k}\ +X_1Y_2\bar{i}\ \bar{j}\ \ +X_1Z_2\bar{i}\ \bar{k}\ \ ++\ Y_1X_2\bar{j}\ \bar{i}\ \ +Y_1Z_2\bar{j}\ \bar{k}\ \ +Z_1X_2\bar{k}\ \bar{i}\ \ +Z_1Y_2\bar{k}\ \bar{j}$. Но $\bar{i}\ \bar{i}\ =\bar{j}\ \bar{j}\ =\bar{k}\ \bar{k}=1$ по свойству 6, $\bar{i}\ \bar{j}\ =\bar{j}\ \bar{i}\ =\bar{i}\ \bar{k}\ =\bar{k}\ \bar{i}\ =\bar{j}\ \bar{k}\ =\bar{k}\ \bar{j}\ =0$ по свойству 2, поэтому $\bar{a}\ \bar{b}\ =X_1X_2+\ Y_1Y_2+Z_1Z_2$.

8. $\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$.

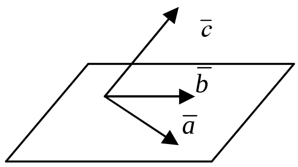
9. $\text{пр}_a\bar{b}\ =\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}$; $\text{пр}_b\bar{a}\ =\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$.

З а м е ч а н и е . Свойства 2, 3, 6 доказываются из определения 13, свойства 4, 5 – из свойств проекции, свойство 8, 9 – из определения 13 и свойства 7.

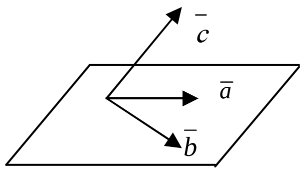
6. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, для которых определен порядок следования называются упорядоченной тройкой векторов.

Определение 14. Тройка некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется правой (левой), если после приведения к общему началу кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$, наблюдаемый с конца вектора $\bar{c}$, виден совершающимся против (по) часовой стрелке.



$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – правая тройка



$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – левая тройка

Определение 15. Вектор $\bar{c}$ называется *векторным произведением* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1. $/\bar{c}\,/=/\bar{a}\,||\,\bar{b}\,|\sin\varphi$, где φ – угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
2. $\bar{c}\perp\bar{a}$ и $\bar{c}\perp\bar{b}$.
3. Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является правой.

Обозначения векторного произведения: $\bar{c}=[\bar{a},\bar{b}]$, $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$.

Свойства векторного произведения:

1. $[\bar{b},\bar{a}]=-[\bar{a},\bar{b}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Вектор $\bar{c}$ удовлетворяет первым двум условиям определения векторного произведения и образует с векторами $\bar{b}$ и $\bar{a}$ правую тройку векторов.

2. Если $[\bar{a},\bar{b}]=\bar{0}$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из первого пункта определения 15 следует, что модуль векторного произведения ненулевых векторов равен нулю только при $\sin\varphi = 0$, что соответствует коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3. Модуль векторного произведения $\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$ равняется площади *S* параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Доказательство следует из первого пункта определения 15.

4. $[(k\bar{a}),\bar{b}]=k[\bar{a},\bar{b}]$.
5. $[(\bar{a}+\bar{b}),\bar{c}]=[\bar{a},\bar{c}]+[\bar{b},\bar{c}]$.
6. Если в декартовой системе координат $\bar{a}=\{X_a;\ Y_a;\ Z_a\}$, $\bar{b}=\{X_b;\ Y_b;\ Z_b\}$, то

$$[\bar{a},\bar{b}]=\left\{\begin{vmatrix}Y_a & Z_a\\ Y_b & Z_b\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}X_a & Z_a\\ X_b & Z_b\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}X_a & Y_a\\ X_b & Y_b\end{vmatrix}\right\}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_a & Y_a & Z_a\\ X_b & Y_b & Z_b\end{vmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Представим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в виде: $\bar{a}=X_a\bar{i}++Y_a\bar{j}+Z_a\bar{k}$; $\bar{b}=X_b\bar{i}+Y_b\bar{j}+Z_b\bar{k}$. Отметим, что $[\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}$; $[\bar{j},\bar{k}]==\bar{i}$; $[\bar{k},\bar{i}]=\bar{j}$; $[\bar{i},\bar{i}]=[\bar{j},\bar{j}]=[\bar{k},\bar{k}]=\bar{0}$. Тогда с использованием свойств 4 и 5 получим: $[\bar{a},\bar{b}]=[(X_a\bar{i}+Y_a\bar{j}+Z_a\bar{k})(X_b\bar{i}+Y_b\bar{j}+Z_b\bar{k})]=(Y_aZ_b-Y_bZ_a)\bar{i}+(X_bZ_a-X_aZ_b)\bar{j}+(X_aY_b-X_bY_a)\bar{k}=$

$$=\begin{vmatrix}Y_a & Z_a\\ Y_b & Z_b\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}X_a & Z_a\\ X_b & Z_b\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}X_a & Y_a\\ X_b & Y_b\end{vmatrix}\bar{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_a & Y_a & Z_a\\ X_b & Y_b & Z_b\end{vmatrix},$$ что доказывает свойство 6.

7. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 16. *Смешанным произведением* векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется результат скалярного умножения векторного произведения $[\bar{a},\bar{b}]$ на вектор $\bar{c}$.

Обозначение: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=[\bar{a},\bar{b}]\bar{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение $[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c}$ равно объёму параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, если они образуют правую тройку, или числу, противоположному значению этого объёма, если $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – левая тройка. Если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны, то $[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = 0$.

Доказательство.

а) Если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны, то вектор $[\bar{a}, \bar{b}]$ ортогонален плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и, следовательно, $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{c}$. Поэтому $[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = 0$.

б) Если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не компланарны, $[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = \left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| |\bar{c}| \cos\varphi = S|\bar{c}|\cos\varphi$, где φ – угол между $\bar{c}$ и $[\bar{a}, \bar{b}]$. Тогда $\pm|\bar{c}|\cos\varphi$ – высота рассматриваемого параллелепипеда. Таким образом, $[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = \pm V$, где выбор знака зависит от величины угла между $\bar{c}$ и $[\bar{a}, \bar{b}]$, т.е. от ориентации векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Утверждение доказано.

Следствие. $[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = \bar{a}\,[\bar{b}, \bar{c}]$.

Действительно, обе части равенства представляют объём одного и того же параллелепипеда. Поэтому положение векторных скобок в смешанном произведении не важно, и в его обозначении скобки не ставятся: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

2. Если $\bar{a} = \{X_a; Y_a; Z_a\}$, $\bar{b} = \{X_b; Y_b; Z_b\}$, $\bar{c} = \{X_c; Y_c; Z_c\}$, то

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Используя координатную запись скалярного и векторного произведения, запишем: $[\bar{a}, \bar{b}]\bar{c} = (Y_aZ_b - Y_bZ_a)X_c + (X_bZ_a - X_aZ_b)Y_c + (X_aY_b - X_bY_a)Z_c = \begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix} X_c - \begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix} Y_c + \begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix} Z_c = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1984.
2. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов.– М. : Наука, 1975.
3. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М., 1987, 1998.
4. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович.– М., 1985.
5. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. – изд. 2–ое. – М. : Банки и биржи, 1998.
6. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М., 1975.
7. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко и др.– Ч. 1. – М. : Высшая школа, 1986, 1996,1997.
8. Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебное пособие для вузов в 3-х ч. / А.П. Рябушко – Минск : Высшая школа, 1990
9. Математика : учебные задания. Ч. 2 / сост. : А.В. Медведев, В.А. Попов, И.В. Петрова, А.И. Урусов, А.В. Щербакова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004.
10. Линьков, В.М. Высшая математика в примерах и задачах. Компьютерный практикум : учебное пособие / В.М. Линьков, Н.Н. Яремко ; под ред. А.А. Емельянова. – М. : Финансы и статистика, 2006.