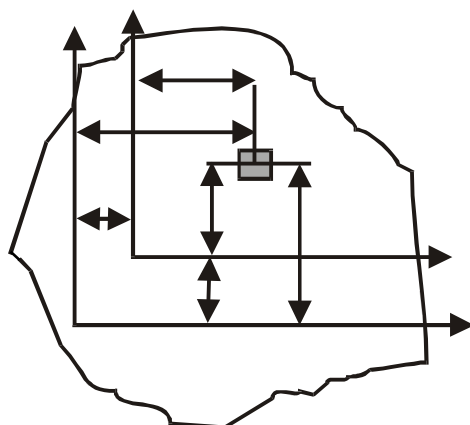


О.В. ДЁМИН, В.Е. БУЛАНОВ

МЕХАНИКА: ОСНОВЫ РАСЧЁТОВ НА СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОН- СТРУКЦИЙ



Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

О.В. ДЁМИН, В.Е. БУЛАНОВ

МЕХАНИКА:
ОСНОВЫ РАСЧЁТОВ
НА СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТ-
РУКЦИЙ

*Рекомендовано Учёным советом ТГТУ в качестве учебного пособия
для студентов специальностей 280202 и 200503*



Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

УДК 531/534(075)
ББК В2я73
Д306

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
В.М. Червяков

Кандидат технических наук, доцент
М.М. Свиридов

Д306 **Дёмин, О.В.**
Механика: основы расчётов на статистическую прочность элементов конструкций : учебное пособие / О.В. Дёмин, В.Е. Буланов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 96 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-0855-8.

Содержит теоретические основы расчётов на статическую прочность деталей машин и механизмов, примеры решения, тесты, задания для расчётно-проектировочных работ, справочные данные, глоссарий.

Предназначено для студентов специальностей 280202 и 200503 очной и заочной форм обучения.

УДК 531/534(075)

ББК В2я73

ISBN 978-5-8265-0855-8

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный
технический университет» (ТГТУ), 2009

Учебное издание

ДЁМИН Олег Владимирович,
БУЛАНОВ Владимир Евгеньевич

**МЕХАНИКА:
ОСНОВЫ РАСЧЁТОВ
НА СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 20.10.2009
Формат 60 × 84/16. 5,58 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 422

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Цель учебного пособия – облегчить работу студентов при выполнении практических расчётов на прочность по курсам «Механика» и «Детали приборов (машин) и основы конструирования».

Основная цель механики – открытие, изучение и практическое применение общих законов движения и равновесия материальных тел. Механика – одна из древнейших наук. Она возникла и развивалась под влиянием запросов общественной практики, а также благодаря любознательности человеческого разума. Рождение механики произошло одновременно с изобретением, изготовлением и применением человеком первых древнейших орудий труда – рычага, наклонной плоскости, блока, клина, винта, верёвки. Эти простейшие орудия сыграли роль научных методов, послуживших средством доказательства важнейших теорем и принципов механики. Архимедом (287 – 212 гг. до новой эры) было обнаружено, что законы равновесия различных машин можно свести к равновесию рычага. Голландский учёный Стевин (1548 – 1620) с помощью наклонной плоскости открыл закон параллелограмма сил. Лагранж (1736 – 1833) использовал систему блоков для доказательства основного принципа статики – принципа возможных перемещений. Равновесие верёвки и верёвочного многоугольника под действием сил послужило основой для создания графостатики, с помощью которой были выполнены многие расчёты стержневых систем. Таким образом, эти простейшие орудия, предназначенные для поднятия тяжестей, оказались средствами абстрактного научного мышления.

Теоретическая механика относится к числу физико-математических дисциплин. Законы механики носят физический характер. Рабочими инструментами механики служат различные математические методы. Многие математики внесли существенный вклад в развитие механики.

Теоретическая механика является научной основой целого ряда инженерных дисциплин – сопротивления материалов, теории механизмов и машин, статики и динамики сооружений, строительной механики, деталей машин и других.

Сопротивление материалов – учебная дисциплина о прочности, жёсткости и устойчивости элементов конструкций. Неправильный расчёт самой незначительной детали может повлечь за собой очень тяжёлые последствия – привести к разрушению конструкции в целом. При проведении расчётов необходимо стремиться к сочетанию надёжности работы конструкции с её дешёвизной, добиваться наибольшей прочности при наименьшем расходе материала.

Сопротивление материалов – одна из сложных дисциплин, изучаемых в высших технических учебных заведениях; занятия по этому курсу должны обязательно сопровождаться составлением конспекта и решением задач. Если при решении задач возникают затруднения, следует воспользоваться имеющимися в задачниках указаниями и примерами, но совершенно необходимо научиться самостоятельно решать задачи и делать выводы формул. При этом нужно обращать внимание на физическую сущность явления и на те допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов. Необходимо хорошо разбираться в чертежах, которыми сопровождаются выводы формул. После изучения теоретических положений следует ответить на тестовые вопросы и познакомиться с глоссарием.

В представленном учебном пособии рассматриваются основные разделы сопротивления материалов, необходимые для проведения практических расчётов и закрепления теоретических знаний по дисциплинам «Механика» и «Детали приборов (машин) и основы конструирования».

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ. ПРОСТЫЕ ВИДЫ НАГРУЖЕНИЯ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Сопротивление материалов – это наука о том, как реагируют элементы конструкций (механизмов, машин, сооружений) на воздействие нагрузок и как обеспечить их соответствие своему назначению и работоспособность.

В сопротивлении материалов рассматриваются вопросы расчёта отдельных элементов конструкций и вопросы расчёта некоторых простейших конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость.

Сопротивление материалов – наука о прочности и деформируемости элементов (деталей) сооружений и машин. Основные объекты изучения сопротивления материалов являются стержни, массивы и пластины, для которых устанавливаются соответствующие методы расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость при действии статических и динамических нагрузок. Сопротивление материалов базируется на законах и выводах теоретической механики, а также учитывает способность материалов деформироваться под действием внешних сил.

В отличие от теоретической механики, в которой все тела рассматриваются как абсолютно твёрдые, в сопротивлении материалов учитывается, что элементы конструкций при действии внешних сил изменяют свою форму и размеры, т.е. деформируются.

В сопротивлении материалов широко применяются методы теоретической механики (в первую очередь, статики) и математического анализа, а также используются данные из разделов физики, в которых изучаются свойства различных материалов.

Сопротивление материалов является экспериментально-теоретической наукой, так как она широко использует опытные данные и теоретические исследования.

Сопротивление материалов является одной из ветвей механики деформируемого тела. Используя при исследовании напряжённого и деформированного состояния твёрдых тел большее число упрощающих допущений и существенно более простой математический аппарат, чем смежные ветви той же науки – математическая и прикладная теория упругости и пластичности, сопротивление материалов даёт практические, широко доступные методы расчёта элементов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость.

В сопротивлении материалов исследование вопроса о прочности реального объекта начинается с выбора расчётной схемы. Прежде всего устанавливают, что в данном случае является существенным и что несущественно, т.е. необходимо произвести схематизацию объекта и отбросить все те факторы, которые не могут сколько-нибудь заметным образом повлиять на работу системы в целом. Такого упрощения задачи или выбор её схемы во всех случаях совершенно необходим, так как решение с полным учётом всех свойств реального объекта является принципиально невозможным в силу их очевидной неисчерпаемости.

Реальный объект, освобождённый от несущественных особенностей, носит название *расчётной схемы*. С геометрической точки зрения все объекты рассматривают как комбинацию брусьев (стержней), оболочек и массивных тел.

Для одного и того же объекта может быть предложено несколько расчётных схем, в первую очередь, в зависимости от требуемой точности и от того, какая сторона явления интересует исследователя в данном конкретном случае. Если для одного объекта может быть предложено несколько расчётных схем, то, с другой стороны, одной расчётной схеме может быть поставлено в соответствие много реальных объектов. Последнее обстоятельство является весьма важным, так как, исследуя некоторую схему, можно получить решение целого класса реальных задач, сводящихся к данной схеме. Выбор расчётной схемы включает в себя использование основных гипотез (допущений) науки о сопротивлении материалов. Вводят упрощения и в геометрию реального объекта. Основным упрощающим приёмом в сопротивлении материалов является приведение геометрической формы тела к схеме *бруса* или к схеме *оболочки*.

Элемент конструкции, длина которого значительно больше его поперечных размеров, называется *брусом*.

Элемент конструкции, длина и ширина которого значительно больше его толщины, называется *оболочкой*.

Элемент конструкции, все размеры которого соизмеримы, называется *массивным телом*.

Нагрузки, действующие на конструкцию, являются по отношению к ней *внешними* силами. Эти силы приложены к тому или иному элементу конструкции по некоторым участкам его поверхности или распределены по его объёму.

При составлении расчётных схем нагрузку, приложенную к участку, размеры которого значительно меньше размеров объекта, заменяют сосредоточенной силой P , Н/м.

Пара сил, приложенная к объекту, рассматривается как сосредоточенный момент m , Н/м.

Нагрузки, приложенные к участкам, размеры которых соизмеримы с размерами объекта, считаются распределёнными по длине – q , Н/м.

К внешним силам, действующим на элементы конструкции, кроме нагрузок – активных сил – относятся также реакции связей – реактивные силы.

Нагрузки различаются не только по способу их приложения (распределённые и сосредоточенные), но также по длительности действия (постоянные и временные) и характеру воздействия на конструкцию (статические и динамические).

Различают упругое, упругопластичное и вязкопластичное твёрдые тела. *Упругим телом* называют такое, которое после снятия внешней нагрузки восстанавливает свои размеры и форму, существовавшие до нагружения. *Упругопластичное* тело восстанавливает их не полностью. В этом случае после снятия нагрузки остаётся так называемая остаточная деформация, т.е. тело оказывается частично изменённым. Иногда образование остаточной деформации является целью технологической операции по приданию телу необходимой формы (холодная штамповка, гибка, протяжка и т.д.). При вязкопластичном состоянии вещество ведёт себя как твёрдое тело в отношении очень кратковременных нагрузок и, напротив, как вязкая жидкость в отношении длительных. Примером вязкопластичного течения может служить движение ледника, спускающегося с гор.

Деформация – изменение формы и объёма тела под действием внешних сил. Деформация связана с изменением относительного положения частиц тела и, обычно, сопровождается изменением величин межуатомных сил, мерой которого является упругое напряжение.

Различают четыре основных вида деформаций: растяжение/сжатие, сдвиг, кручение и изгиб.

В инженерных сооружениях и механических машинах недопустимо появление остаточных деформаций. Поэтому их части могут быть только упругими, а не упруго- или вязкопластичными твёрдыми телами.

1.1.1. Гипотезы и принципы, принимаемые при исследовании деформированного состояния упругих тел

В сопротивлении материалов используется ряд предпосылок (допущений), упрощающих расчёты.

Основные предпосылки в сопротивлении материалов следующие:

1. Материал конструкции является однородным и сплошным, т.е. его свойства не зависят от формы и размеров тела и одинаковы во всех его точках.

2. Материал конструкции изотропен, т.е. свойства его по всем направлениям одинаковы.

3. Материал конструкции обладает свойством идеальной упругости, т.е. способностью полностью восстанавливать первоначальную форму и размеры тела после устранения причин, вызвавших его деформацию.

4. Деформации материала конструкции в каждой его точке прямо пропорциональны напряжениям в этой точке. Данная предпосылка, впервые сформулированная Р. Гуком (1660), называется законом Гука.

Закон Гука справедлив для большинства материалов, но для каждого из них лишь при напряжениях, не превышающих некоторого значения (предела пропорциональности). Этот закон используется при решении большинства задач сопротивления материалов.

5. Деформации конструкции предполагаются настолько малыми, что можно не учитывать их влияние на взаимное расположение нагрузок и на расстояния от нагрузок до любых точек конструкции.

6. Результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности (принципа независимости действия сил). Его часто называют также принципом наложения или принципом суперпозиции.

7. Поперечные сечения бруса, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки.

Эта предпосылка называется гипотезой плоских сечений или гипотезой Бернулли.

1.1.2. Внутренние усилия в нагруженной детали. Метод сечений

Под *внутренними силами* (или внутренними усилиями) в сопротивлении материалов обычно понимают силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

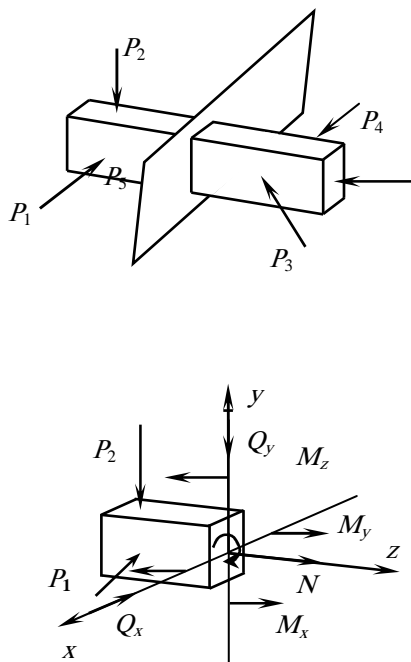


Рис. 1.1. Метод сечений

Рассмотрим общий приём определения внутренних усилий, называемый *методом сечений*. Пусть дан брус (рис. 1.1), который под действием внешних нагрузок находится в равновесии. Рассечём его плоскостью, совпадающей с поперечным сечением стержня, и рассмотрим левую отсечённую часть. Поскольку весь брус находится в равновесии, любая из отсечённых частей также должна находиться в равновесии. Это возможно лишь в том случае, когда в поперечном сечении возникают внутренние усилия, уравнивающие внешние нагрузки. В общем случае могут возникнуть шесть внутренних усилий: продольная сила N , поперечные силы Q_x и Q_y ; крутящий момент M_z ; изгибающие моменты M_x и M_y .

Внутренние усилия в каком-либо поперечном сечении определяют по внешним силам. Численные значения внутренних усилий определяются с помощью шести уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned}$$

1.1.3. Напряжения

Сосредоточенные внутренние силы и моменты, характеризующие взаимодействие между отдельными частями элемента, являются лишь статическим эквивалентом внутренних сил, распределённых по площади сечения.

Интенсивность касательных сил в рассматриваемой точке сечения называется *касательным напряжением* и обозначается τ , а интенсивность нормальных сил – *нормальным напряжением* и обозначается σ . Напряжения τ и σ выражаются формулами

$$\tau = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} (\Delta T / \Delta F); \quad \sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} (\Delta N / \Delta F).$$

Напряжения выражаются в ньютонах на квадратный метр (Н/м²) или Паскалях (Па), мегапаскалях (МПа).

Нормальное и касательное напряжения являются составляющими полного напряжения p в рассматриваемой точке: $p = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}$.

Нормальное напряжение в данной точке по определённому сечению характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц элемента конструкций, расположенных по обе стороны этого сечения, а касательное напряжение – интенсивность сил, сдвигающих эти частицы в плоскости рассматриваемого сечения. Совокупность напряжений, действующих по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой *напряжённое состояние* в этой точке.

1.1.4. Деформации

Все существующие в природе материалы не являются абсолютно твёрдыми и под действием внешних сил в какой-то мере меняют свою форму (деформируются). Это существенно влияет на законы распределения внутренних сил в напряжённом теле, хотя само по себе изменение формы является, как правило, незначительным и обнаруживается в большинстве случаев только при помощи чувствительных инструментов.

Под действием внешних сил точки меняют свое положение в пространстве. Вектор, имеющий начало в точке недеформированного тела, а конец в той же точке деформированного тела, называется *вектором полного перемещения точки*. Его проекции на оси носят название перемещений по осям.

Кроме линейного перемещения существует понятие углового перемещения. Если рассмотреть отрезок прямой между двумя близкими точками до и после изменения формы тела, то легко установить, что этот отрезок поворачивается в пространстве на некоторый угол. Этот угол поворота характеризуется вектором, который может быть разложен по осям x, y, z .

Для того чтобы характеризовать интенсивность изменения формы и размеров, вводятся понятие линейной деформации ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) и понятие угловой деформации ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$).

Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям для одной точки образует *деформированное состояние* в точке.

1.1.5. Диаграмма растяжения и сжатия

При проектировании конструкций, машин и механизмов инженеру необходимо знать значения величин, характеризующих прочностные и деформативные свойства материалов. Их можно получить путём механических испытаний, проводимых в экспериментальных лабораториях на соответствующих испытательных машинах. Таких испытаний проводится много и самых различных, например испытания на твёрдость, сопротивление ударным и переменным нагрузкам, противодействие высоким температурам и т.д. Подробное описание всех видов механических испытаний и применяемых при этом машин и приборов проводится в специальной литературе. Но основными и наиболее распространёнными являются испытания на растяжение и сжатие. С их помощью удаётся получить наиболее важные характеристики материала, находящие прямое применение в расчётной практике.

Для испытания на растяжение используются специально изготовленные образцы, которые большей частью вытачиваются из прутковых заготовок или вырезаются из листа. Основной особенностью таких образцов является наличие усиленных мест захвата и плавного перехода к сравнительно узкой ослабленной рабочей части.

При испытании на сжатие используются цилиндрические образцы, высота которых превышает размеры поперечного сечения не более чем в два раза. При большой высоте сжатие образца сопровождается, как правило, его искривлением, искажающим результаты испытаний.

Основной задачей испытания на растяжение и сжатие являются построение диаграмм растяжения и сжатия, т.е. зависимости между силой, действующей на образец, и его удлинение.

Механические характеристики материалов (т.е. величины, характеризующие их прочность, пластичность и т.д., а также модуль упругости и коэффициент Пуассона) определяются путём испытаний специальных образцов, изготовленных из исследуемого материала. Наиболее распространёнными являются

статические испытания на растяжение. Для некоторых материалов (камня, цемента, бетона и т.д.) основными являются испытания на сжатие. Испытания проводятся на специальных машинах различных типов.

В процессе испытания специальное устройство (диаграмма построитель) автоматически вычерчивает график, изображающий зависимость между нормальным напряжением в поперечных сечениях стержня и относительной деформацией.

Для пластичных материалов по диаграммам определяют пределы пропорциональности и пластичности.

Пластичность – свойство твёрдых тел изменять под нагрузкой форму и размеры без образования разрывов и трещин и сохранять изменившиеся форму и размеры после удаления нагрузки. Пластичность противоположна упругости.

Некоторые пластичные материалы, например дюралюмин, не имеют на диаграмме растяжения площадки текучести. Для таких материалов вводится понятие условного предела текучести, в качестве которого принимается напряжение, соответствующее остаточной деформации 0,2 %.

При сжатии образец из пластичного материала расплющивается, и площадь его сечения увеличивается, в связи с чем увеличиваются также сжимающие силы и условные напряжения. Таким образом, понятие предела прочности при сжатии пластичной стали лишено физического смысла. Пределы текучести при растяжении и сжатии для одной и той же пластичной стали практически одинаковы.

Хрупкость – свойство твёрдых тел мгновенно разрушаться под действием внешних сил без заметной пластичной деформации.

Весьма хрупким материалом является чугун. Для образцов из обычного серого литейного чугуна относительное остаточное удлинение при разрыве не превышает 0,015 %, в то время как для стали марки Ст3 оно превышает 20 %. Деформации чугуна очень малы. Они с самого начала не следуют закону Гука, а потому диаграммы его растяжения и сжатия получаются криволинейными; однако участки диаграмм, соответствующие малым напряжениям, лишь незначительно отличаются от прямой.

Некоторые материалы обладают различными свойствами в различных направлениях. Такие материалы называются анизотропными. Анизотропным материалом является, например, сосна, сопротивляемость которой существенно зависит от направления силы по отношению к направлению волокон. Сопротивление сосны вдоль волокон значительно больше, чем поперёк волокон, а деформация меньше.

1.1.6. Допускаемые напряжения

В результате испытания на растяжение и сжатие мы получим основные данные о механических свойствах материала. Теперь рассмотрим вопрос о том, как использовать полученные результаты испытаний в практических расчётах инженерных конструкций на прочность.

Как известно, наиболее распространённым является метод расчёта по напряжениям. Согласно ему расчёт на прочность ведётся по наибольшему напряжению σ_{\max} , возникшему в некоторой точке нагруженной конструкции. Напряжение σ_{\max} называется максимальным рабочим напряжением. Оно не должно превышать определённой величины, свойственной данному материалу и условиям работы конструкции.

Расчёт по напряжениям ведётся по схеме

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n},$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ – некоторое предельное для данного материала напряжение; n – число, большее единицы, называемое коэффициентом запаса (или просто запасом).

Обычно бывает так, что размеры конструкции уже известны и назначены, например, из эксплуатационных соображений или соображений технологичности. Расчёт на прочность является поверочным. В этом случае подсчитывается величина σ_{\max} и определяется величина фактического коэффициента запаса:

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\max}}.$$

Если этот запас удовлетворяет конструктора, считается, что поверочный расчёт дал положительный результат.

Когда конструктор находится в стадии проектирования и некоторые характерные размеры должны быть назначены непосредственно из требований прочности, величиной n задаются заранее. Искомый размер получают из условия

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$.

Эта величина называется *допускаемым напряжением*.

Для того чтобы избежать в работающей конструкции образование заметных остаточных деформаций, за величину $\sigma_{\text{пред}}$ для пластичных материалов обычно принимается предел текучести. Тогда наибольшее рабочее напряжение составляет n -ю долю от $\sigma_{\text{т}}$. Коэффициент в этом случае обозначается через $n_{\text{т}}$ и называется коэффициентом запаса по пределу текучести. Для хрупких материалов и умеренно пластичных материалов за $\sigma_{\text{пред}}$ принимается предел прочности $\sigma_{\text{в}}$. Тогда получаем

$$n_{\text{в}} = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma_{\max}}$$

где $n_{\text{в}}$ – коэффициент запаса по пределу прочности.

Литература: [1, гл. I – VII]; [2, гл. I – VII]; [3, гл. 1]; [4, гл. 1, 2]; [5, гл. II]; [7, гл. 4]; [8, гл. 1].

1.2. РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ

1.2.1. Эпюра продольных сил. Напряжения

Центральным растяжением (сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса (стержня) возникает только продольная (нормальная) сила. Считается, что внутренняя продольная сила действует вдоль оси стержня, перпендикулярно к его поперечным сечениям. Численные значения продольных сил N определяют по участкам, используя метод сечений, составляя уравнения равновесия суммы проекций на ось бруса (z) всех сил, действующих на отсечённую часть.

Растягивающие продольные силы принято считать положительными, а сжимающие – отрицательными.

Рассмотрим (рис. 1.2, а) прямой брус постоянной толщины, закреплённый одним концом и нагруженный на другом конце силой P , направленной вдоль его оси. Под действием закрепления и внешней силы P брус растягивается (деформируется). При этом в закреплении возникает некоторое усилие, благодаря которому верхний край бруса остаётся неподвижным. Это усилие называют *реакцией* закрепления на внешнюю нагрузку. Заменим влияние закрепления на стержень эквивалентно действующей силой. Эта сила равна реакции закрепления R (рис. 1.2, б).

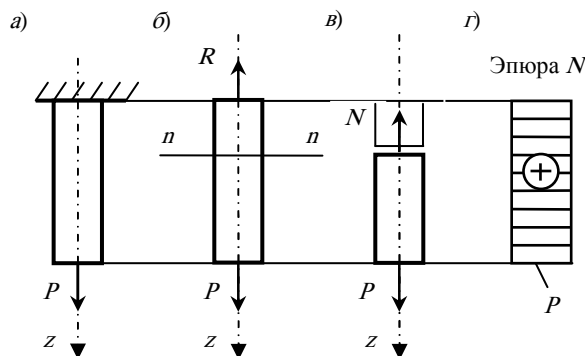


Рис. 1.2. Определение продольной силы

Под действием двух внешних воздействий: известной силы P и неизвестной пока реакции R – брус находится в равновесии. Уравнение равновесия бруса

$$\sum Z=0; -R+P=0 \text{ или } R=P.$$

При построении уравнений общего равновесия механики принято следующее правило знаков: проекция усилия на ось положительна, если её направление совпадает с выбранным направлением этой оси, проекция отрицательна, если направлена в противоположную сторону.

Мысленно разрежем стержень на две части по интересующему нас сечению $n-n$ (рис. 1.2, б). Влияние на нижнюю часть верхней части представим действием на нижнюю часть в её верхнем торце $n-n$ нормальной силы N (рис. 1.2, в). Уравнение равновесия нижней отсечённой части бруса

$$\sum Z=0; -N+P=0 \text{ или } N=P.$$

График изменения продольной силы вдоль оси бруса показан на рис. 1.2, г. График, показывающий изменение продольных сил по длине оси бруса, называется *эпюрой продольных сил (эпюрой N)*.

Пример. Построить эпюру внутренних нормальных сил, возникающих под действием трёх внешних сил (см. рис. 1.3): $P_1 = 5$ кН, $P_2 = 8$ кН, $P_3 = 7$ кН (см. рис. 1.3, а).

Используя метод сечений, определим значения внутренней силы в характерных поперечных сечениях бруса.

Уравнения равновесия нижней отсечённой части бруса:

сечение I–I

$$\sum Z=0; -N+P_1=0 \text{ или } N=P_1=5 \text{ кН};$$

сечение II–II

$$\sum Z=0; -N+P_1-P_2=0 \text{ или } N=P_1-P_2=-3 \text{ кН};$$

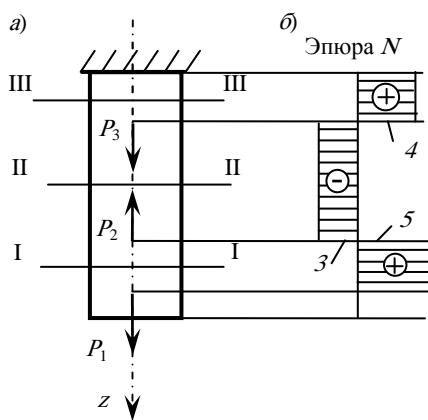


Рис. 1.3. Построение эпюры

сечение III–III

$$\sum Z=0; -N+P_1-P_2+P_3=0 \text{ или } N=P_1-P_2+P_3=4 \text{ кН}.$$

Строим эпюру нормальных сил (см. рис. 1.3, б).

Продольная сила N , возникающая в поперечном сечении бруса, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределённых по площади поперечного сечения, и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями зависимостью

$$N = \int_F \sigma dF;$$

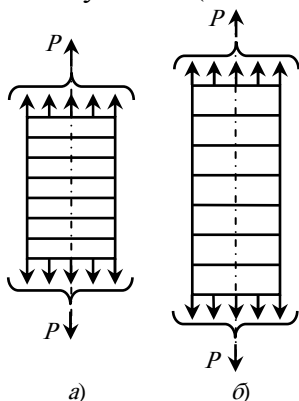
здесь σ – нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке dF ; F – площадь поперечного сечения бруса.

Произведение $\sigma dF = dN$ представляет собой элементарную внутреннюю силу, приходящуюся на площадку dF .

Значение продольной силы N в каждом частном случае легко можно определить при помощи метода сечений. Для нахождения напряжений в каждой точке поперечного сечения бруса надо знать закон их распределения по этому сечению.

Проведём на боковой поверхности бруса до его нагружения линии, перпендикулярные к оси бруса (рис. 1.4, а).

Каждую такую линию можно рассматривать как след плоскости поперечного сечения бруса. При нагружении бруса осевой силой P эти линии, как показывает опыт, остаются прямыми и параллельными между собой (их положения после нагружения бруса показаны на рис. 1.4, б).



Это позволяет считать, что поперечные сечения бруса, плоские до его нагружения, остаются плоскими и при действии нагрузки. Такой опыт подтверждает гипотезу плоских сечений (гипотезу Бернулли).

Согласно гипотезе плоских сечений, все продольные волокна бруса растягиваются одинаково, значит их растягивают одинаковые по величине силы $\sigma dF = dN$, следовательно, во всех точках поперечного сечения нормальное напряжение σ имеет постоянное значение.

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma F,$$

откуда $\sigma = \frac{N}{F}$.

Рис. 1.4. Деформирование бруса

В поперечных сечениях бруса при центральном растяжении или сжатии возникают равномерно распределённые нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

Для наглядного изображения изменения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня (по его длине) строится *эпюра нормальных напряжений*. Осью этой эпюры является отрезок прямой, равный длине стержня и параллельный его оси. При стержне постоянного сечения эпюра нормальных напряжений имеет такой же вид, как и эпюра продольных сил (она отличается от неё лишь принятым масштабом). При стержне же переменного сечения вид этих двух эпюр различен; в частности, для стержня со ступенчатым законом изменения поперечных сечений эпюра нормальных напряжений имеет скачки не только в сечениях, в которых приложены сосредоточенные осевые нагрузки (где имеет скачки эпюра продольных сил), но и в местах изменения размеров поперечных сечений.

1.2.2. Деформации

Рассмотрим прямой брус постоянного сечения длиной ℓ (рис. 1.5), заделанный одним концом и нагруженный на другом конце растягивающей силой P . Под действием силы P брус удлиняется на некоторую величину $\Delta\ell$, которая называется полным (или абсолютным) удлинением (абсолютной продольной деформацией).

В любых точках рассматриваемого бруса имеется одинаковое напряжённое состояние и, следовательно, линейные деформации для всех его точек одинаковы. Поэтому значение ϵ можно определить как отношение абсолютного удлинения $\Delta\ell$ к первоначальной длине бруса ℓ , т.е. $\epsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$.

Брусья из различных материалов удлиняются различно. Для случаев, когда напряжения в брус не превышают предела пропорциональности, опытом установлена следующая зависимость:

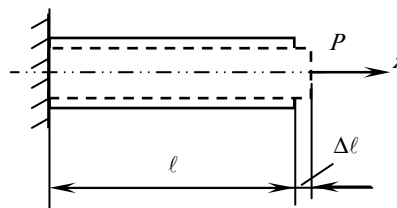


Рис. 1.5. Деформация бруса

$$\epsilon = \frac{N}{EF},$$

где N – продольная сила в поперечных сечениях бруса; F – площадь поперечного сечения бруса; E – коэффициент, зависящий от физических свойств материала.

Учитывая, что нормальное напряжение в поперечном сечении бруса $\sigma = N/F$, получаем $\varepsilon = \sigma/E$. Откуда $\sigma = \varepsilon E$.

Абсолютное удлинение бруса выражается формулой

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}.$$

Более общей является следующая формулировка закона Гука: относительная продольная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению. В такой формулировке закон Гука используется не только при изучении растяжения и сжатия брусков, но и в других разделах курса.

Величина E называется модулем упругости первого рода. Это физическая постоянная материала, характеризующая его жёсткость. Чем больше значение E , тем меньше при прочих равных условиях продольная деформация. Модуль упругости выражается в тех же единицах, что и напряжение, т.е. в паскалях (Па) (сталь $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, медь $E = 1 \cdot 10^5$ МПа).

Произведение EF называется жёсткостью поперечного сечения бруса при растяжении и сжатии.

Кроме продольной деформации при действии на брус сжимающей или растягивающей силы наблюдается также поперечная деформация. При сжатии бруса поперечные размеры его увеличиваются, а при растяжении – уменьшаются. Если поперечный размер бруса до приложения к нему сжимающих сил P обозначить B , а после приложения этих сил $B - \Delta B$, то величина ΔB будет обозначать абсолютную поперечную деформацию бруса.

Отношение $\varepsilon' = \Delta B/B$ является относительной поперечной деформацией.

Опыт показывает, что при напряжениях, не превышающих предела упругости, относительная поперечная деформация прямо пропорциональна относительной продольной деформации, но имеет обратный знак: $\varepsilon' = -\mu \varepsilon$.

Коэффициент пропорциональности μ зависит от материала бруса. Он называется коэффициентом поперечной деформации (или *коэффициентом Пуассона*) и представляет собой отношение относительной поперечной деформации к продольной, взятое по абсолютной величине, т.е. коэффициент Пуассона наряду с модулем упругости E характеризует упругие свойства материала.

Коэффициент Пуассона определяется экспериментально. Для различных материалов он имеет значения от нуля (для пробки) до величины, близкой к 0,50 (для резины и парафина). Для стали коэффициент Пуассона равен 0,25...0,30; для ряда других металлов (чугуна, цинка, бронзы, меди) он имеет значения от 0,23 до 0,36.

Определение величины поперечного сечения стержня выполняется на основании условия прочности

$$\sigma_{\max} = N/F \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

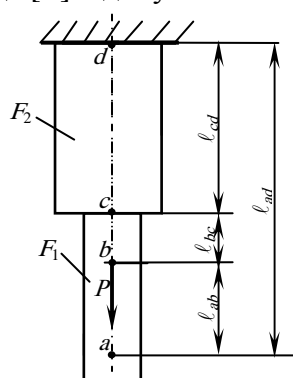


Рис. 1.6. Брус переменного поперечного сечения

Определим продольное перемещение δ_a точки a оси бруса, растянутого силой P (рис. 1.6).

Оно равно абсолютной деформации части бруса ad , заключённой между заделкой и сечением, проведённым через точку d , т.е. продольная деформация бруса определяется по формуле $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$. Эта формула применима лишь, когда

в пределах всего участка длиной ℓ продольные силы N и жёсткости EF поперечных сечений бруса постоянны. В рассматриваемом случае на участке ab продольная сила N равна нулю (собственный вес бруса не учитываем), а на участке bd она равна P ; кроме того, площадь поперечного сечения бруса на участке ac отличается от площади сечения на участке cd . Поэтому продольную

деформацию участка ad следует определять как сумму продольных деформаций трёх участков ab , bc и cd , для каждого из которых значения N и EF постоянны по всей его длине:

$$\Delta l_{ad} = \Delta l_{ab} + \Delta l_{bc} + \Delta l_{cd}.$$

Продольные силы на рассматриваемых участках бруса

$$N_{ab} = 0; N_{bc} = N_{cd} = P.$$

Следовательно,

$$\Delta l_{ab} = 0; \quad \Delta l_{bc} = \frac{P l_{bc}}{EF_1}; \quad \Delta l_{cd} = \frac{P l_{cd}}{EF_2}; \quad \delta_a = \Delta l_{ad} = \frac{P}{E} \left(\frac{l_{bc}}{F_1} + \frac{l_{cd}}{F_2} \right).$$

Аналогично можно определить перемещения δ любых точек оси бруса, а по их значениям построить эпюру *продольных перемещений* (эпюру δ), т.е. график, изображающий изменение этих перемещений по длине оси бруса.

1.2.3. Условие прочности. Расчёт на жёсткость

При проверке напряжений площади поперечных сечений F и продольные силы N известны и расчёт заключается в вычислении расчётных (фактических) напряжений σ в характерных сечениях элементов. Полученное при этом наибольшее напряжение сравнивают затем с допускаемым:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

При подборе сечений определяют требуемые площади $[F]$ поперечных сечений элемента (по известным продольным силам N и допускаемому напряжению $[\sigma]$). Принимаемые площади сечений F должны удовлетворять условию прочности, выраженному в следующем виде:

$$F \geq [F] = \frac{N}{[\sigma]}.$$

При определении грузоподъёмности по известным значениям F и допускаемому напряжению $[\sigma]$ вычисляют допускаемые величины $[M]$ продольных сил: $[M] = F[\sigma]$. По полученным значениям $[M]$ затем определяются допускаемые величины внешних нагрузок $[P]$.

Для этого случая условие прочности имеет вид

$$P \leq [P].$$

Величины нормативных коэффициентов запаса прочности устанавливаются нормами. Они зависят от класса конструкции (капитальная, временная и т.п.), намечаемого срока её эксплуатации, нагрузки (статическая, циклическая и т.п.), возможной неоднородности изготовления материалов (например, бетона), от вида деформации (растяжение, сжатие, изгиб и т.д.) и других факторов. В ряде случаев приходится снижать коэффициент запаса в целях уменьшения веса конструкции, а иногда увеличивать коэффициент запаса – при необходимости учитывать износ трущихся частей машин, коррозию и загнивание материала.

Величины нормативных коэффициентов запаса для различных материалов, сооружений и нагрузок имеют в большинстве случаев значения: $[n_b] - 2,5 \dots 5$ и $[n_r] - 1,5 \dots 2,5$.

Под проверкой жёсткости элемента конструкции, находящегося в состоянии чистого растяжения – сжатия, понимается поиск ответа на вопрос: достаточны ли значения жёсткостных характеристик элемента (модуля упругости материала E и площади поперечного сечения F), чтобы максимальное из всех

значений перемещений точек элемента, вызванных внешними силами, u_{\max} не превысило некоторого заданного предельного значения $[u]$. Считается, что при нарушении неравенства $u_{\max} \leq [u]$ конструкция переходит в предельное состояние.

Литература: [3, гл. 2]; [4, гл. 3]; [5, гл. III]; [7, гл. 5]; [8, гл. 2].

1.3. СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

1.3.1. Чистый сдвиг и его особенности

На примере растяжения и сжатия были выявлены некоторые наиболее важные свойства напряжённого состояния. При растяжении в зависимости от ориентации секущих площадок на гранях выделенного прямоугольного элемента возникают как нормальные, так и касательные напряжения. Последние, независимо от величины нормальных напряжений, подчиняются условию парности.

Теперь положим, что имеется такое напряжённое состояние, когда на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения. Такое напряжённое состояние называется *чистым сдвигом* (более строгое определение чистого сдвига будет дано позднее на основе общей теории напряжённого состояния).

В качестве примера, иллюстрирующего состояние однородного чистого сдвига, можно рассмотреть тонкостенную цилиндрическую трубку, нагруженную моментами, приложенными в торцовых плоскостях.

Величина напряжения τ определяется из условий равенства момента равномерно распределённых по поперечному сечению внутренних сил моменту:

$$\tau = \frac{M}{2\pi R^2 \delta},$$

где R – радиус трубки; δ – толщина трубки.

Рассмотрим деформации при сдвиге. Касательное напряжение τ связано с угловой деформацией γ соотношением

$$\tau = G\gamma,$$

где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

В результате возникающих угловых деформаций пластина перекашивается, а торцовые сечения трубки получают взаимные угловые смещения φ .

$$\varphi = \frac{\gamma l}{R}.$$

Аналогично испытанию на растяжение и сжатие можно провести испытание материала в условиях чистого сдвига. Для этого удобнее всего воспользоваться испытанием тонкостенной трубки. Сопоставление диаграммы сдвига с диаграммой растяжения для одного и того же материала показывает их качественное сходство. На диаграмме сдвига также имеется упругая зона, зоны текучести и упрочнения.

Аналогичным образом для сдвига, как и для растяжения, можно было бы дополнительно ввести характеристики – предел пропорциональности при сдвиге, предел упругости, предел текучести и пр.

Прежде, когда изучение механики деформируемых тел находилось ещё в начальной стадии, так обычно и поступали. В дальнейшем, однако, было установлено, что характеристики сдвига связаны с характеристиками растяжения. В настоящее время теория пластичности даёт возможность построить теоретически диаграмму сдвига по диаграмме растяжения, а также выразить все характеристики сдвига через уже знакомые нам механические характеристики растяжения. Точно так же допускаемые напряжения и коэффициенты запаса при чистом сдвиге могут быть связаны с соответствующими величинами для простого растяжения.

Напряжённое состояние, изображённое на рис. 1.7, *а* представляет собой чистый сдвиг. В этом состоянии длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми гранями: первоначально прямые углы становятся равными $90^\circ + \gamma$ и $90^\circ - \gamma$ (рис. 1.17, *б*).

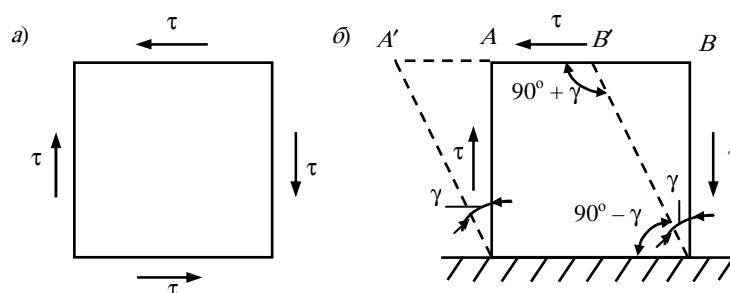


Рис. 1.7. Деформация при сдвиге

Каждая из граней параллелепипеда при деформации чистого сдвига перемещается относительно противоположной грани на величину AA' , называемую абсолютным сдвигом. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями называется относительным сдвигом, при малых деформациях оно равно углу сдвига γ – изменения первоначально прямых углов между боковыми гранями параллелепипеда. Абсолютный сдвиг выражается в мерах длины, а относительный сдвиг является безразмерной величиной. Угол сдвига γ , как показывает опыт, прямо пропорционален касательным напряжениям. Эта зависимость между γ и τ , называемая законом Гука при сдвиге, выражается в виде

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad \text{или} \quad \tau = \gamma G.$$

Она справедлива при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала.

Коэффициент пропорциональности G в формулах называется модулем сдвига (или модулем упругости второго рода).

Модуль сдвига является физической постоянной материала, характеризующей его жёсткость (т.е. способность сопротивляться упругим деформациям) при сдвиге. Модуль сдвига G , как и модуль упругости E , выражается в паскалях (Па), мегапаскалях (МПа).

1.3.2. Кручение бруса с круглым поперечным сечением

Под *кручением* понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только крутящий момент. Прочие силовые факторы (изгибающие моменты, нормальная и поперечные силы) равны нулю.

Для крутящего момента, независимо от формы сечения, принято следующее правило знаков. Если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видит момент M_k направленным против часовой стрелки, то момент считается положительным. При противоположном направлении моменту приписывается знак минус.

Рассмотрим стержень, нагруженный по концам моментами M (рис. 1.8). Если посмотреть на одну его плоскость со стороны внешней нормали, то мы увидим, что момент M_k направлен по часовой стрелке. Следовательно, M_k будет отрицательным. Тот же самый результат может быть получен, если посмотреть из точки со стороны внешней нормали на другую его плоскость.

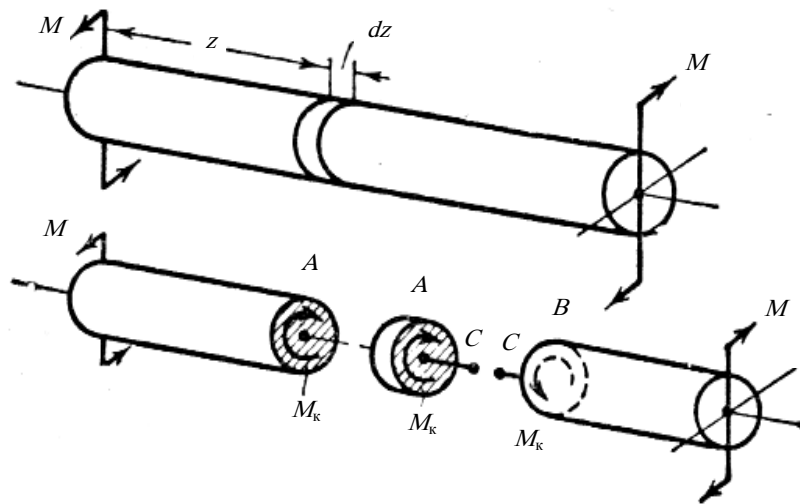


Рис. 1.8. Брус, нагруженный моментами

При расчёте стержня на кручение надо решить две основные задачи. Требуется определить напряжения и найти угловые перемещения в зависимости от внешних моментов. Эти задачи решаются по-разному, смотря по тому, какой вид имеет поперечное сечение стержня. Наиболее просто можно получить решение в случае кругового сечения, а также для широкого класса тонкостенных стержней.

Указанным правилом руководствуются при построении эпюр крутящих моментов (рис. 1.9).

Механизм деформирования стержня с круглым поперечным сечением можно представить себе в следующем виде: будем считать, что каждое поперечное сечение в результате действия внешних моментов поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как жёсткое целое. Этот угол поворота для различных сечений будет различным. Сказанное представляет собой гипотезу плоских сечений – предположение, оправдываемое общими правдоподобными соображениями о характере возникающих перемещений.

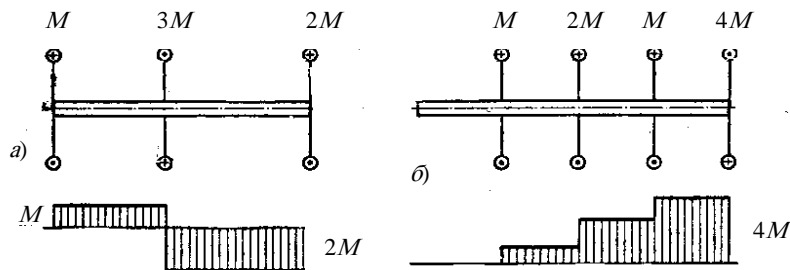


Рис. 1.9. Эпюры крутящих моментов

Окончательным критерием пригодности любой гипотезы является опыт. Получив расчётную формулу, нужно, прежде всего, сопоставить результаты расчёта с экспериментом, и если между ними обнаруживается достаточно хорошее соответствие, гипотеза считается приемлемой.

В данном случае принятая гипотеза носит название *гипотезы плоских сечений*.

В поперечных сечениях стержня возникает постоянный крутящий момент

$$M_k = M.$$

Двумя поперечными сечениями выделим из стержня элемент длиной dz , а из него в свою очередь двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ выделим элементарное кольцо.

Правое торцевое сечение кольца поворачивается при кручении относительно левого на угол $d\varphi$. Образующая цилиндра AB поворачивается при этом на угол γ и занимает положение AB' . Отрезок BB' равен, с одной стороны, $\rho d\varphi$, а с другой – γdz . Следовательно,

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

Угол γ представляет собой не что иное, как угол сдвига цилиндрической поверхности. Величина $d\varphi/dz$ обозначается обычно через θ ,

$$\frac{d\varphi}{dz} = \theta,$$

и называется *относительным углом закручивания*. Это – угол взаимного поворота двух сечений, отнесённый к расстоянию между ними. Величина θ аналогична относительному удлинению при растяжении $\Delta l/l$. Вводя обозначение θ , получим

$$\gamma = \rho\theta.$$

По закону Гука для сдвига

$$\tau = G\theta\rho,$$

где τ – касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении бруса. Парные им напряжения возникают в продольных плоскостях – в осевых сечениях.

Элементарные силы τdF приводятся к крутящему моменту

$$M_k = \int_F \tau\rho dF.$$

Интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения F . Подставляя в подынтегральную функцию напряжение τ из последней формулы, получим

$$M_k = G\theta \int_F \rho^2 dF.$$

Записанный в формуле интеграл представляет собой чисто геометрическую характеристику (см. п. 2), измеряется в см^4 и носит название полярного момента инерции сечения:

$$\int_F \rho^2 dF = J_p.$$

Таким образом, получаем $M_k = GJ_p\theta$, или

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_p}.$$

Произведение GJ_p называют *жёсткостью стержня при кручении*.

Через относительный угол закручивания θ легко определяется и величина взаимного угла поворота сечений φ . Имеем

$$d\varphi = \frac{M_k dz}{GJ_p},$$

откуда

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_k dz}{GJ_p},$$

где l – расстояние между сечениями, для которых определяется взаимный угол поворота φ .

Если крутящий момент по длине стержня не изменяется, $M_k = M$, и если жёсткость остаётся постоянной, то

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ_p}.$$

Проведя преобразования, получим

$$\tau = \frac{M_k \rho}{J_p}.$$

Таким образом, касательные напряжения в поперечном сечении распределены вдоль радиуса по линейному закону и имеют наибольшее значение в точках, наиболее удалённых от оси. При этом

$$\tau_{\max} = \frac{M_k \rho_{\max}}{J_p}.$$

Величина $\frac{J_p}{\rho_{\max}} = W_p$ называется полярным моментом сопротивления и измеряется в см^3 . Окончательно имеем

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}.$$

Эти формулы являются основными расчётными формулами для кручения стержня с круговым поперечным сечением. Они справедливы как для сплошного, так и для полого кругового сечения.

Определим теперь величины геометрических характеристик сечения J_p и W_p . Если стержень имеет сплошное круговое сечение, то

$$J_p = 2\pi \int_0^{D/2} \rho^3 d\rho,$$

где D – диаметр сечения, или

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}.$$

Если же в стержне имеется внутренняя центральная полость диаметра d , то

$$J_p = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho,$$

или

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right).$$

Соответственно этим выражениям определяем полярный момент сопротивления W_p : для сплошного сечения

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2 D^3;$$

для кольцевого сечения (полый вал)

$$W_p \approx 0,2 D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right).$$

Таким образом, при заданном крутящем моменте угловые перемещения вала обратно пропорциональны четвёртой степени диаметра. Что же касается наибольшего напряжения, то оно обратно пропорционально кубу диаметра D .

Касательные напряжения в поперечных сечениях бруса направлены в каждой точке перпендикулярно к текущему радиусу ρ . Из условия парности следует, что точно такие же напряжения возникают и в продольных сечениях бруса. Наличие этих напряжений проявляется, например, при испытании на кручение деревянных образцов.

1.3.3. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением

Определение напряжений в стержне с некруглым поперечным сечением представляет собой довольно сложную задачу, которая не может быть решена методами сопротивления материалов. Причина заключается в том, что для некруглого сечения упрощающая гипотеза неизменности плоских сечений, введённая ранее, оказывается неприемлемой. Сечения заметно искривляются, в результате чего существенно меняется картина распределения напряжений по сечению.

В качестве примера форма закрученного бруса прямоугольного поперечного сечения показана на рис. 1.10. На поверхность бруса предварительно была нанесена мелкая прямоугольная сетка, которая деформировалась вместе с поверхностными частицами металла. Поперечные линии сетки заметно искривлены, следовательно, искривлены будут и поперечные сечения бруса.

При определении углов сдвига необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но также и местный перекосяк, связанный с искривлением сечений. Задача, кроме того, резко усложняется тем, что для некруглого сечения напряжения должны определяться в функции уже не одного независимого переменного (ρ), а двух (x и y).

Выскажем общие соображения относительно законов распределения напряжений в поперечных сечениях некруговой формы, а затем приведём готовые формулы, полученные методами теории упругости для некоторых, наиболее часто встречающихся форм поперечных сечений.

Прежде всего, можно довольно просто установить, что касательные напряжения в поперечных сечениях для точек, расположенных вблизи контура, направлены по касательной к дуге контура. Действительно, положим, что в какой-то точке касательное напряжение τ вблизи контура направлено под некоторым углом к контуру. Разложим это напряжение на две составляющие – по касательной к контуру и по нормали.

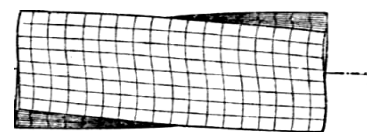


Рис. 1.10. Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения

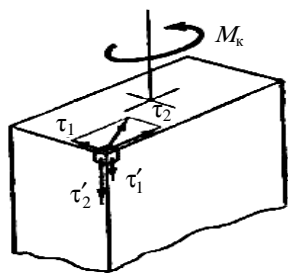


Рис. 1.11. Напряжения при кручении

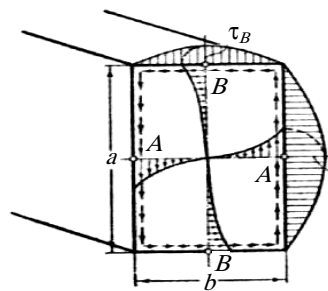


Рис. 1.12. Эпюра касательных напряжений

По условию парности на свободной поверхности стержня должно возникнуть касательное напряжение $\tau'_n = \tau_n$. Но внешняя поверхность свободна от нагрузки и к ней никаких внешних сил не приложено, кроме, разве что, сил атмосферного давления. Таким образом, $\tau'_n = 0$. Следовательно, $\tau_n = 0$, и касательное напряжение τ вблизи контура направлено по касательной к контуру.

Совершенно аналогично можно показать, что в случае, если поперечное сечение имеет внешние углы, то в них касательные напряжения обращаются в нуль (рис. 1.11). Раскладывая напряжение τ вблизи угла на две составляющие по нормальям к сторонам угла, получаем напряжения τ_1 и τ_2 . Так как парные им напряжения τ'_1 и τ'_2 равны нулю, то в нуль обращаются и напряжения τ_1 и τ_2 . Значит, вблизи внешнего угла касательные напряжения в поперечном сечении отсутствуют.

Если рассмотреть полученную методами теории упругости эпюру касательных напряжений для бруса прямоугольного сечения (рис. 1.12), то как мы увидим, напряжения равны нулю, а наибольшие напряжения возникают по серединам больших сторон:

в точке A :

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_k}{\alpha ab^2};$$

в точке B

$$\tau_B = \eta \tau_{\max},$$

где a – большая, b – малая стороны прямоугольника.

Коэффициенты α и η зависят от отношения сторон a/b . Значения этих коэффициентов задаются в таблице.

Угловое перемещение

$$\varphi = \frac{MI}{G\beta b^3 a}.$$

Коэффициент β также является функцией отношения a/b .

1.3.4. Расчёт на прочность деталей при срезе

В некоторых конструкциях по отдельным сечениям действуют значительные касательные напряжения. В этих же сечениях, как правило, действуют и нормальные напряжения, а потому они не являются площадками чистого сдвига. Однако если нормальные напряжения в них значительно меньше касательных, то в приближенных расчётах учитываются лишь касательные напряжения, а указанные сечения при этом рассматриваются как площадки чистого сдвига.

Рассмотрим заклёпочное соединение на примере стыка элемента конструкции (с сечением, состоящим из двух уголков), растянутого силами P (рис. 1.13).

Касательные напряжения в заклёпках по плоскостям среза определяются по формуле

$$\tau = \frac{P}{n(\pi d^2/4)m},$$

где d – диаметр стержней заклёпок; n – число заклёпок; m – число плоскостей среза заклёпки. В случае, показанном на рис. 1.21, $n = 2$, $m = 2$.

Найденное значение должно удовлетворять условию прочности

$$\frac{P}{n(\pi d^2/4)m} \leq [\tau],$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение. Для большинства материалов допускаемое касательное напряжение составляет от 60 до 80 % допускаемого растягивающего напряжения.

Аналогично рассчитываются сварные соединения (рис. 1.14).

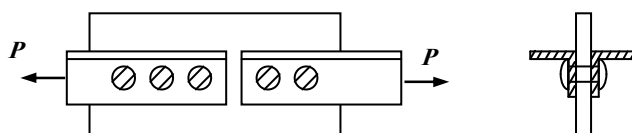


Рис. 1.13. Заклёпочное соединение

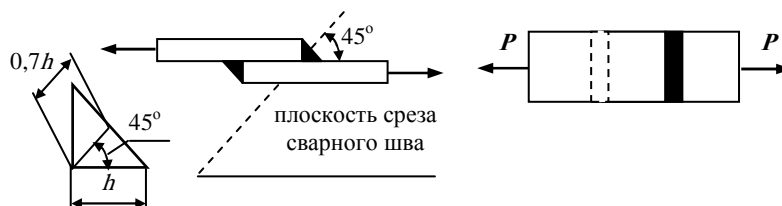


Рис. 1.14. Сдвиг при сварном соединении

$$\tau = \frac{Q}{F_{\text{ср}}}; \quad Q = P, \quad F_{\text{ср}} = \ell \cdot 0,7h,$$

где ℓ – длина шва.

$$\tau = \frac{P}{\ell \cdot 0,7h} \leq [\tau_{\text{ш}}],$$

где $[\tau_{\text{ш}}]$ – допускаемые напряжения для шва в зависимости от типа электродов (50...70 % от допускаемых напряжений на растяжение свариваемого металла).

Литература: [3, гл. 3]; [4, гл. 5]; [5, гл. IV]; [7, гл. 6]; [8, гл. 4, 6].

1.4. ИЗГИБ

1.4.1. Внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях бруса при изгибе

Под *изгибом* понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты. Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, а поперечные и нормальная силы отсутствуют, изгиб называется *чистым*. Большей частью, однако, в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. В этом случае изгиб называют *поперечным*. Классификация видов изгиба производится и по другим признакам, некоторые из которых будут рассмотрены в дальнейшем. Брус, работающий в основном на изгиб, часто называют *балкой*.

Для того чтобы правильно ориентироваться в вопросах, связанных с расчётом бруса на изгиб, необходимо, прежде всего, научиться определять законы изменения внутренних силовых факторов, т.е. научиться строить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Рассмотрим некоторые характерные примеры и установим необходимые правила.

Простейшая двухопорная балка, нагруженная силой P показана на рис. 1.15, а. Напомним ещё раз, что показанная система, как и все, которые рассматривались до сих пор и будут рассмотрены в дальнейшем, получена как результат операций, связанных с выбором расчётной схемы. К анализу схемы двухопорной балки сводится расчёт очень многих машиностроительных конструкций, например балки мостового крана, показанной на рис. 1.16.

Анализ внутренних сил начинается обычно с определения полной системы внешних сил. В данном случае необходимо определить реакции опор. Из условий равновесия определяем реакции:

$$P_a = \frac{P_b}{a+b}, \quad P_b = \frac{P_a}{a+b}.$$

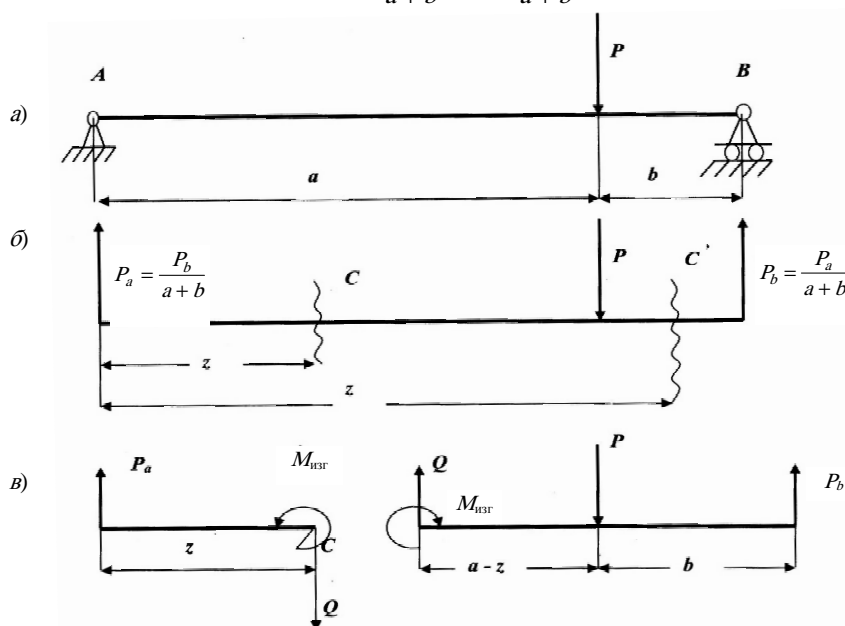


Рис. 1.15. Определение изгибающего момента

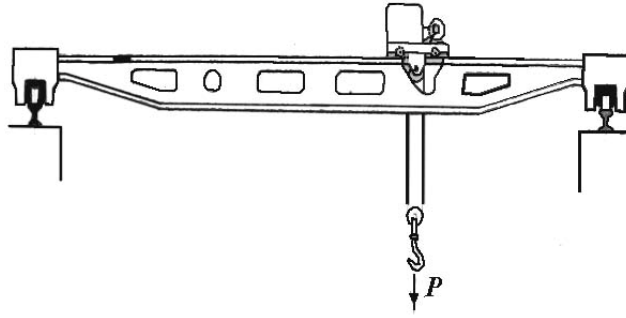


Рис. 1.16. Мостовой кран

На расстоянии z , от левой опоры проведём сечение C (рис. 1.15) и разделим балку мысленно на две части. Для того чтобы каждая из частей находилась в равновесии, в сечении C необходимо приложить силу Q и момент M . Эти силовые факторы определяются из условий равновесия одной из частей бруса. B – величина внутренних сил не зависит от того, рассматриваются ли условия равновесия правой или левой части бруса (рис. 1.15, в). В данном случае удобнее рассматривать левую часть.

Если взять сумму моментов всех сил, действующих на левую часть бруса, относительно центральной поперечной оси в сечении C и приравнять эту сумму нулю, то получим

$$M_{\text{изг}} = P \cdot (a - z).$$

Если бы слева от сечения C действовала не одна, а несколько сил, величина изгибающего момента $M_{\text{изг}}$ в сечении определилась бы *суммой* моментов этих сил. Таким образом, изгибающий момент в сечении может рассматриваться как сумма моментов относительно поперечной оси сечения всех сил, расположенных по одну сторону от этого сечения. В дальнейшем, для того чтобы избежать громоздких рисунков, иллюстрирующих равновесие отсечённых частей бруса, изгибающий момент будем определять именно так.

Знак изгибающего момента устанавливается по знаку кривизны изогнутого бруса (рис. 1.17) и зависит от выбранного направления осей внешней неподвижной системы координат zy . Если ось y (рис. 1.17) направить в обратную сторону, то знак кривизны, а следовательно, и момента изменится на обратный. Этим правилом знаков пользуются при определении перемещений бруса и при определении формы изогнутой оси. При построении эпюр изгибающих моментов используется другое правило знаков (правило относительных знаков), при котором знак момента не зависит от направления внешних осей. Эпюра моментов строится на оси бруса, и ордината момента откладывается в сторону вогнутости упругой линии, т.е., как говорят, эпюра моментов строится на сжатом волокне. Этому правилу можно дать и другое толкование. Если сумма моментов сил, действующих на *левую часть* бруса, даёт равнодействующий момент, направленный *по часовой стрелке*, то ордината изгибающего момента в сечении откладывается вверх. Если же равнодействующий внешний момент *слева* от сечения направлен *против* часовой стрелки, ордината изгибающего момента откладывается вниз.

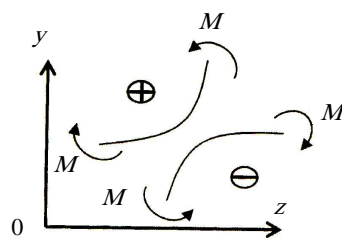


Рис. 1.17. Знаки изгибающего момента

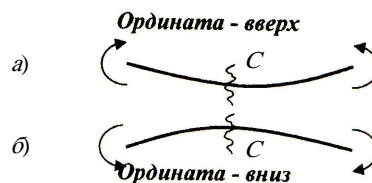


Рис. 1.18. Ордината изгибающего момента

Для сил, лежащих справа от сечения, имеет место обратная зависимость: в случае равнодействующего момента, направленного по часовой стрелке, – вниз, а в случае равнодействующего момента, на-

правленного против часовой стрелки, – вверх. Сказанное иллюстрируется схемой, представленной на рис. 1.18.

Возвращаясь к рассматриваемому примеру двухопорной балки, замечаем, что момент силы P_a , расположенной *слева* от сечения C , направлен *по часовой стрелке*. Следовательно, в сечении C ордината изгибающего момента откладывается вверх.

В пределах изменения z от 0 до a изгибающий момент равен

$$M_{\text{изг}} = +\frac{P_b}{a+b}z.$$

Для правого участка z меняется в пределах от a до $(a+b)$. Изгибающий момент в сечении C удобнее рассматривать как сумму моментов внешних сил, лежащих справа от сечения. Очевидно,

$$M_{\text{изг}} = +P_b(a+b-z) = +\frac{P_a}{a+b}(a+b-z).$$

Ордината момента отложена вверх, так как момент внешней силы, лежащей справа от сечения C , направлен против часовой стрелки. В соответствии с полученными выражениями для изгибающих моментов может быть построена эпюра, показанная на рис. 1.19. Эпюра является кусочно линейной и на всей длине балки расположена сверху. Это значит, что ось изогнутой балки, называемая упругой линией, всюду направлена вогнутой стороной вверх, что в данном случае достаточно очевидно.

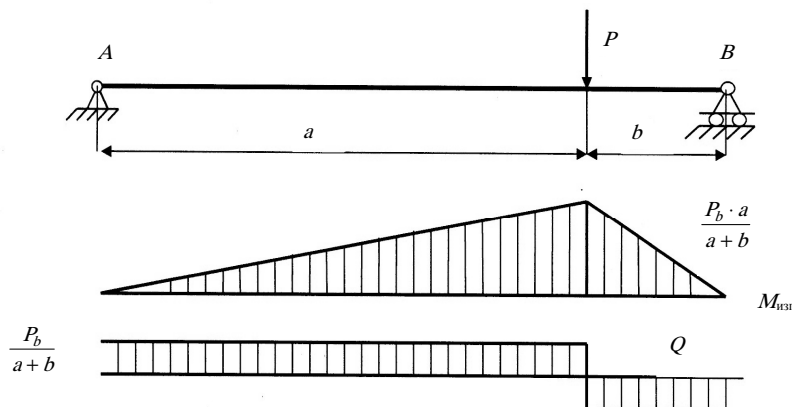


Рис. 1.19. Построение эпюр

Определим поперечные силы Q . Из условия равновесия левой или правой части разрезанного бруса (рис. 1.15) следует, что

$$Q = P_a, \text{ или } Q = P - P_a = P_b.$$

Во всех случаях поперечная сила для прямого бруса равна сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, лежащих по одну сторону от сечения. Отсюда устанавливается правило знаков для поперечной силы. Если сумма внешних сил, лежащих по левую сторону от сечения, даёт равнодействующую, направленную вверх, то поперечная сила в сечении считается *положительной*, вниз – *отрицательной*. Справа вниз – знак «плюс», справа вверх – знак «минус». Это правило иллюстрируется схемой, показанной на рис. 1.20.

В рассматриваемом случае двухопорной балки сила P_a , лежащая *слева* от сечения C , направлена *вверх*. Следовательно,

$$Q = +P_a = +\frac{P_b}{a+b}.$$

Для правого участка балки сила P_b расположенная *справа* от сечения C , направлена *вверх*. Следовательно, на этом участке поперечная сила будет отрицательной:

$$Q = -P_b = -\frac{P_a}{a+b}.$$

Эпюра поперечных сил в рассматриваемой двухопорной балке изобразится двумя прямоугольниками (рис. 1.19).

Рассмотрим ещё несколько примеров построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Двухопорная балка длиной l нагружена равномерно распределёнными силами собственного веса. Эти силы характеризуются интенсивностью нагрузки q Н/м, т.е. силой, приходящейся на единицу длины бруса (рис. 1.21). Определяем реакции опор. Очевидно,

$$P_a = P_b = \frac{ql}{2}.$$

Обычно, для упрощения прибегают к условному изображению реакций.

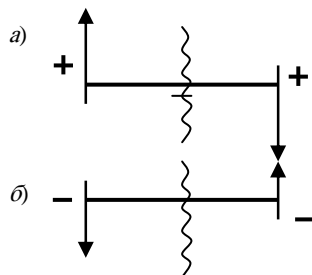


Рис. 1.20. Знаки поперечных сил

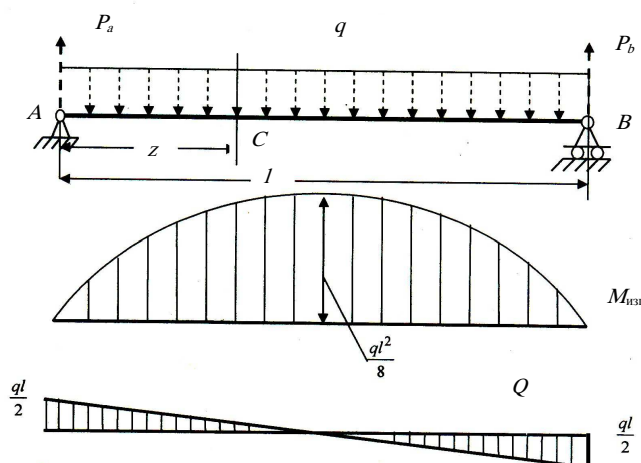


Рис. 1.21. Построение эпюр

Сумма моментов внешних сил, лежащих по одну сторону от сечения, например по левую, равна

$$M_{\text{изг}} = +P_a z - \frac{qz^2}{2}.$$

где $P_a z$ – момент силы P_a направлен по часовой стрелке (знак плюс); qz – сила собственного веса на длине z . её равнодействующая проходит через середину отрезка z . Следовательно, плечо силы равно $z/2$, а момент этой силы, расположенной слева от сечения C , направлен против часовой стрелки (знак «минус»). Таким образом,

$$M_{\text{изг}} = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

Эпюра изгибающего момента изображается параболой, показанной на рис. 1.21. Наибольшее значение изгибающий момент имеет в среднем сечении пролета при $z = l/2$;

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}.$$

Поперечная сила в сечении C равна сумме сил, лежащих по одну сторону от сечения:

$$Q = +P_a - qz = \frac{ql}{2} - qz.$$

Эпюра поперечной силы изображается прямой.

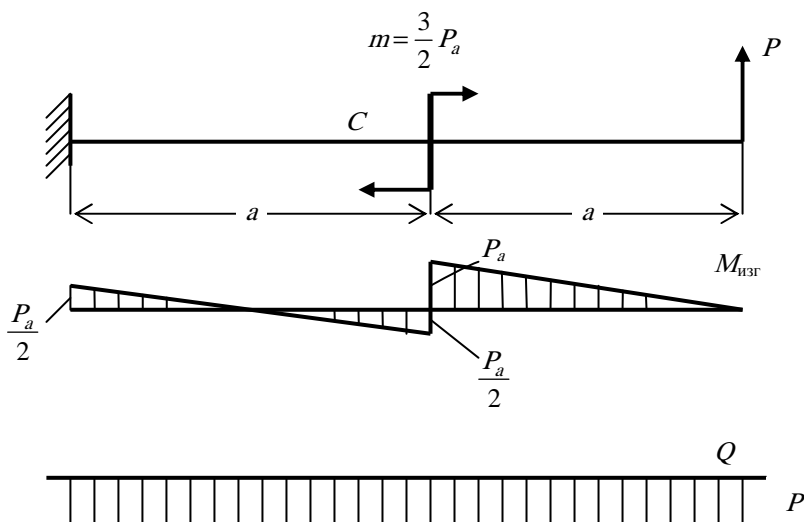


Рис. 1.22. Изгиб балки

Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил на примере балки закреплённой одним концом показано на рис. 1.22.

Такого рода балки называются обычно *консолями*. В данном случае с правой стороны на балку не наложено связей и определение изгибающих моментов и поперечных сил в любом сечении может быть произведено без предварительного определения реакций.

В среднем сечении консоли к балке через крестовину передаётся момент пары сил. В результате на эпюре изгибающих моментов возникает скачок. При переходе через сечение C сумма моментов сил, расположенных по правую или левую сторону от сечения, меняется сразу на величину M . Рассматривая все построенные выше эпюры, нетрудно подметить определённую закономерную связь между эпюрами изгибающих моментов и эпюрами поперечных сил.

Судя по виду эпюр, поперечная сила Q представляет собой производную от изгибающего момента M по длине бруса. Докажем, что эта закономерность действительно имеет место.

Пусть брус закреплён произвольным образом и нагружен в общем случае распределённой нагрузкой интенсивности $q = f(z)$. Принятое направление для q будем считать положительным (рис. 1.23).

Выделим из бруса элемент длиной dz и в произведённых сечениях приложим моменты M и $M + dM$, а также поперечные силы Q и $Q + dQ$. Направления для этих силовых факторов приняты положительными в соответствии с обусловленным выше правилом знаков. В пределах малого отрезка dz нагрузку q можно считать распределённой равномерно.

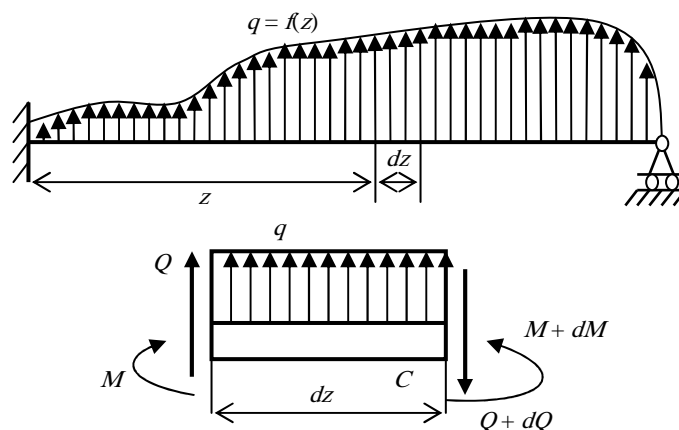


Рис. 1.23. Построение эюр

Приравниваем нулю сумму проекций всех сил на вертикальную ось и сумму моментов относительно поперечной оси C (рис. 1.23)

$$Q + qdz - Q - dQ = 0;$$

$$M + Qdz + qdz \frac{dz}{2} - M - dM = 0.$$

Производя упрощения и отбрасывая величину высшего порядка малости, получим

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q.$$

Таким образом, поперечная сила действительно представляет собой производную от изгибающего момента по длине бруса. Производная же от поперечной силы даёт интенсивность внешней распределённой нагрузки q .

Из соотношений можно сделать некоторые общие выводы о характере эюр изгибающих моментов и поперечных сил для прямого бруса.

Если брус нагружен равномерно распределённой нагрузкой интенсивности $q = \text{const}$, очевидно, функция Q будет линейной, а M – квадратичной.

Если брус нагружен сосредоточенными силами или моментами, то в промежутках между точками их приложения интенсивность $q = 0$. Следовательно, $Q = \text{const}$, а M является линейной функцией z . В точках приложения сосредоточенных сил эюра Q претерпевает скачок на величину внешней силы, а в эюре M возникает соответствующий излом (разрыв в производной).

1.4.2. Напряжения в бресе при чистом изгибе

Наиболее простым случаем изгиба является чистый изгиб. Под *чистым изгибом* понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только изгибающие моменты, а $Q = 0$. Для тех участков стержня, где соблюдается это условие, изгибающий момент остаётся постоянным. Условия чистого изгиба могут возникать при различных внешних нагрузках.

Под действием моментов M стержень изогнётся. Так как в любом сечении возникает один и тот же изгибающий момент, то в случае однородного стержня изменение кривизны для всех участков будет одним и тем же. Следовательно, при чистом изгибе ось однородного стержня принимает форму дуги окружности.

Все сечения однородного стержня при чистом изгибе не искривляются, а лишь поворачиваются. Это утверждение, будучи точным для чистого изгиба, в общем случае является приближённым и именуется *гипотезой плоских сечений*.

Образование деформаций при чистом изгибе может рассматриваться как результат поворота плоских поперечных сечений друг относительно друга. При чистом изгибе напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону. Геометрическое место точек в сечении, удовлетворяющее условию $\sigma = 0$, называется *нейтральной линией* сечения. Нейтральная линия перпендикулярна к плоскости кривизны изогнутого бруса.

В результате расчётов получают формулу для напряжения σ :

$$\sigma = \frac{M_y}{J_x}.$$

Максимальное напряжение при изгибе возникает в точках, наиболее удалённых от нейтральной линии,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y_{\max}}}{J_x}.$$

Отношение J_x/y_{\max} называется *моментом сопротивления сечения* при изгибе и обозначается через W_x (измеряется в см^3 или мм^3):

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}.$$

Таким образом,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x}.$$

Эта формула является основной в расчётах на прочность при изгибе.

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами b и h

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad y_{\max} = \frac{h}{2}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Для стержня круглого сечения

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}; \quad y_{\max} = \frac{D}{2}; \quad W_x = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3.$$

Таким образом, напряжения при изгибе обратно пропорциональны третьей степени линейных размеров сечения.

Наиболее экономичными являются такие формы поперечных сечений, для которых с наименьшей затратой материала получается наибольшая величина момента сопротивления. Чтобы форма сечения была рациональной, необходимо по возможности распределять площадь сечения подальше от нейтральной оси. Так возникли стандартные двутавровые и корытные тонкостенные профили. При изгибе в вертикальной плоскости такие профили дают существенную выгоду по сравнению с прочими формами поперечных сечений.

1.4.3. Поперечный изгиб

При чистом изгибе в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные напряжения. Соответствующие им внутренние силы приводятся к изгибающему моменту в сечении. В случае поперечного изгиба в сечении стержня возникает не только изгибающий момент, но и поперечная сила Q . Эта сила представляет собой равнодействующую элементарных распределённых сил, лежащих в плоскости сечения. Следовательно, в этом случае в поперечных сечениях возникают не только нормальные, но и касательные напряжения.

Возникновение касательных напряжений τ сопровождается появлением угловых деформаций γ . Поэтому, кроме основных смещений, свойственных чистому изгибу, каждая элементарная площадка сече-

ния dF получает ещё некоторые дополнительные угловые смещения, обусловленные сдвигом. Касательные напряжения распределены по сечению неравномерно. Поэтому неравномерно будут распределены и угловые смещения. Это значит, что при поперечном изгибе, в отличие от чистого изгиба, поперечные сечения не остаются плоскими.

Однако на величине нормальных напряжений искажение плоскости поперечных сечений заметным образом не сказывается. В частности, если поперечная сила Q не меняется по длине стержня, формулы

$$\sigma = \frac{M_y}{J_x}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{W_x},$$

выведенные для случая чистого изгиба, будут давать совершенно точные результаты и в случае поперечного изгиба.

При поперечной силе, изменяющейся вдоль оси стержня, формулы чистого изгиба дают для σ некоторую погрешность. Путём несложного анализа можно показать, что величина этой погрешности имеет порядок h/l по сравнению с единицей, где h – размер поперечного сечения в плоскости изгиба, а l – длина стержня.

Одной из особенностей поперечного изгиба является наличие нормальных напряжений, возникающих в продольных сечениях бруса, т.е. напряжений «надавливания» между слоями. Эти напряжения возникают только при переменной поперечной силе Q и имеют весьма малую величину.

Таким образом, в пределах указанных пренебрежений формулы, выведенные для определения нормальных напряжений, применимы не только при чистом изгибе, но и при поперечном. В такой же мере применима и формула, дающая зависимость кривизны стержня от изгибающего момента.

Касательные напряжения при поперечном изгибе определяются по формуле

$$\tau = \frac{QS_x^*}{J_x b}.$$

Эта формула носит название *формулы Журавского*, по имени русского учёного XIX века, который впервые провёл общее исследование касательных напряжений при поперечном изгибе.

Можно произвести сопоставление абсолютных величин максимальных нормальных и максимальных касательных напряжений, возникающих в поперечных сечениях стержня. Например, для консоли прямоугольного сечения имеем

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} = \frac{6Pl}{bh^2}; \quad \tau_{\max} = \frac{3P}{2bh},$$

откуда

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{h}{4l}.$$

В связи с малостью величины τ_{\max} расчёт на прочность при поперечном изгибе производится только по нормальным напряжениям, как и при чистом изгибе. Касательные напряжения во внимание не принимаются. Это тем более естественно, что в точках сечения, наиболее удалённых от нейтральной оси, т.е. в наиболее опасных, касательные напряжения в поперечном сечении равны нулю.

Литература: [3, гл. 5]; [4, гл.]; [5, гл. VII–VIII]; [7, гл. 8]; [8, гл. 7].

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

2.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ СЕЧЕНИЯ

Как уже известно, при растяжении и сжатии прочность и жёсткость стержней, напряжения, возникающие в их поперечных сечениях, потенциальная энергия деформации и другие зависят от площадей поперечных сечений стержней.

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения (рис. 2.1). Если представить сечение состоящим из бесчисленного множества элементарных площадок dF , то площадь всего сечения

$$F = \int_F dF. \quad (2.1)$$

При расчётах на изгиб, кручение, сложное сопротивление, а также при расчётах сжатых стержней на устойчивость используются более сложные геометрические характеристики сечений: статический момент, а также осевой (или экваториальный), полярный и центробежный моменты инерции сечений. Выражения этих характеристик отличаются от выражения (2.1) тем, что у них под знаки интеграла входят произведения элементарных площадок dF на функции координат Y, X , этих площадок (рис. 2.1). Таким образом, указанные геометрические характеристики зависят не только от формы и размеров сечения, но также от положения осей и точек (полюсов), относительно которых они вычисляются.

Геометрические характеристики сечений простой формы можно определить по специальным формулам. Кроме того, в таблицах ГОСТ (называемых также таблицами нормального сортамента) приводятся геометрические характеристики профилей стандартного проката (уголков, швеллеров, двутавров). Для определения геометрических характеристик сложных сечений приходится расчленять их на ряд простых фигур и пользоваться формулами, устанавливающими зависимости между геометрическими характеристиками относительно различных осей.

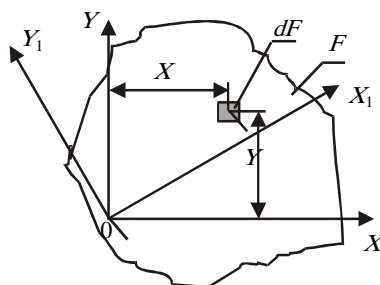


Рис. 2.1. Площадь сечения

2.2. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЙ

Статическим моментом сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на их расстояния от этой оси, т.е.

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF. \quad (2.2)$$

Статические моменты выражаются в см^3 , м^3 и т.д.

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси.

Нельзя суммировать статические моменты частей сечения, вычисленные относительно различных осей. Изменение положительного направления оси y вызывает изменение знака статического момента S_x ; аналогично, изменение положительного направления оси x вызывает изменение знака статического момента S_y .

Установим зависимость между статическими моментами одного и того же сечения относительно двух параллельных друг другу осей и x_1 (рис. 2.2). Выражения статических моментов относительно этих осей на основании формулы (2.2) имеют вид

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_{x_1} = \int_F y_1 dF,$$

но $y_1 = (y - a)$ и следовательно,

$$S_{X_1} = \int_F (y - a) dF = \int_F y dF - a \int_F dF = S_X - aF .$$

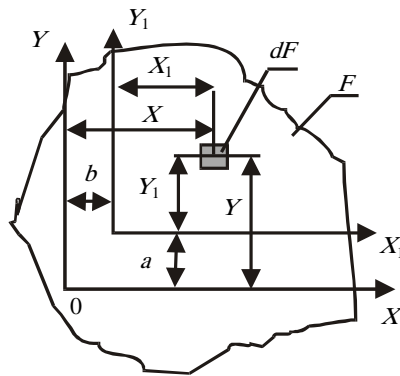


Рис. 2.2. Сечение

Окончательно

$$S_{X_1} = S_X - aF \quad (2.3)$$

и, аналогично,

$$S_{Y_1} = S_Y - bF . \quad (2.4)$$

Найдём теперь положение осей x_1 и y_1 , относительно которых статические моменты равны нулю. Для этого приравняем нулю выражения (2.3) и (2.4): $S_{X_1} = S_X - y_C F = 0$; $S_{Y_1} = S_Y - x_C F = 0$ откуда

$$y_C = S_X / F ; \quad x_C = S_Y / F . \quad (2.5)$$

Оси, проходящие через центр тяжести, называются центральными осями. Относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения (т.е. относительно любой центральной оси), статический момент равен нулю. Формулы (2.5) используются для определения координат центра тяжести сечения.

Для случаев, когда положение центра тяжести сечения известно, а требуется определить статические моменты сечения относительно любых осей u и x , формулы (2.5) преобразуются к виду

$$S_x = y_C F ; \quad S_y = x_C F . \quad (2.6)$$

На основании вышеизложенного можно установить следующий порядок определения положения центра тяжести сложного сечения:

1. Сложное сечение разбивается на части, имеющие вид простых фигур.
2. Определяются площади и положения центров тяжести каждой фигуры.
3. Выбираются случайные координатные оси u и x .
4. По формулам (2.6) вычисляются статические моменты S_y^i и S_x^i каждой фигуры относительно осей u и x . Затем путём суммирования значений S_y^i определяется статический момент S_y , а значений S_x^i – статический момент S_x всего сечения.

5. По формулам (2.5) вычисляются координаты центра тяжести всего сечения.

В отдельных случаях, когда заданное сечение нельзя разбить на такие фигуры, положение центров тяжести которых известны, положение центра тяжести всего сечения необходимо определить путём непосредственного интегрирования.

2.3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Осевым (или экваториальным) моментом инерции сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний от этой оси, т.е.

$$I_y = \int_F x^2 dF; \quad I_x = \int_F y^2 dF. \quad (2.7)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний от этой точки, т.е.

$$I_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (2.8)$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на их расстояния от этих осей, т.е.

$$I_{yx} = \int_F yx dF. \quad (2.9)$$

Моменты инерции выражаются в см^4 , м^4 и т.д. Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, так как в их выражения под знаки интегралов входят величины площадок dF (всегда положительные) и квадраты расстояний этих площадок от данной оси или полюса.

На рисунке 2.3 изображено сечение площадью F и показаны оси y и x . Осевые моменты инерции этого сечения относительно осей y и x :

$$J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_x = \int_F y^2 dF.$$

Сумма этих моментов инерции

$$J_y + J_x = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = \int_F (y^2 + x^2) dF.$$

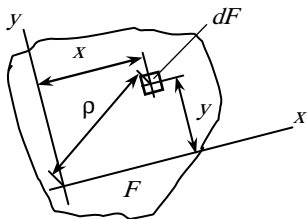


Рис. 2.3. Сечение площадью F

Но $y^2 + x^2 = \rho^2$, следовательно,

$$J_y + J_x = \int_F \rho^2 dF = J_p,$$

т.е.

$$J_y + J_x = J_p.$$

Сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции этого сечения относительно точки пересечения указанных осей.

Центробежные моменты инерции могут быть положительными или равными нулю. Центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю. Осевой момент инерции сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме осевых моментов инерции составляющих его частей относительно этой же оси. Аналогично, центробежный момент инерции сложного сечения относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей равен сумме центробежных моментов инерции составляющих его частей относительно этих же осей. Также и полярный момент инерции сложного сечения относительно некоторой точки равен сумме полярных моментов инерции составляющих его частей относительно той же точки. Следует иметь в виду, что нельзя суммировать моменты инерции, вычисленные относительно различных осей и точек.

Для прямоугольника $I_y = \frac{hb^3}{12}$; $I_x = \frac{bh^3}{12}$.

Для круга $I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$; $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$.

Для кольца $I_x = I_y = (1 - C^4) \frac{\pi D^4}{64}$; $I_p = (1 - C^4) \frac{\pi D^4}{32}$, где $C = \frac{d}{D}$.

Часто при решении практических задач необходимо определять моменты инерции сечения относительно осей, различным образом ориентированных в его плоскости. При этом удобно использовать уже известные значения моментов инерции всего сечения (или отдельных составляющих его частей) относительно других осей, приводимые в технической литературе, специальных справочниках и таблицах, а также подсчитываемые по имеющимся формулам. Поэтому очень важно установить зависимости между моментами инерции одного и того же сечения относительно разных осей.

В самом общем случае переход от любой *старой* к любой *новой* системе координат может рассматриваться как два последовательных преобразования старой системы координат:

- 1) путём параллельного переноса осей координат в новое положение;
- 2) путём поворота их относительно нового начала координат.

Следовательно, $J_{x_1} = J_x - 2aS_x + a^2F$.

Если ось x проходит через центр тяжести сечения, то статический момент $S_x = 0$ и $J_{x_1} = J_x + a^2F$.

Из всех моментов инерции относительно параллельных осей осевой момент инерции имеет наименьшее значение относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения.

Момент инерции относительно оси y

$$J_{y_1} = J_y - 2bS_y + b^2F.$$

В частном случае, когда ось y проходит через центр тяжести сечения,

$$J_{y_1} = J_y + b^2F.$$

Центробежный момент инерции

$$J_{y_1x_1} = J_{yx} - aS_y - bS_x + abF.$$

В частном случае, когда начало старой системы координат Ox находится в центре тяжести сечения,

$$S_y = S_x = 0;$$

$$J_{y_1x_1} = J_{yx} + abF.$$

Если сечение симметрично и одна из старых осей (или обе) совпадают с осью симметрии, то $J_{y_1x_1} = abF$.

2.3. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

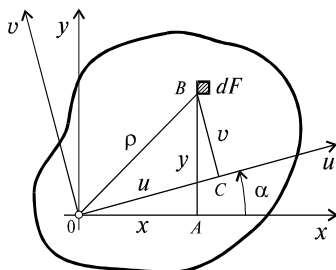


Рис. 2.4. Сечение произвольного очертания

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции плоского сечения при повороте осей координат из положения x и y к положению u и v . Из рисунка 2.4 легко установить, что

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha; \quad v = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad (2.10)$$

Из выражений

$$I_u = \int_F v^2 dF; \quad I_v = \int_F u^2 dF; \quad I_{uv} = \int_F uv dF$$

с учётом (2.10) после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_v &= I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{uv} &= 0,5(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Складывая первые два уравнения, получим

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_p, \quad (2.12)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$; I_p – полярный момент инерции сечения, величина которого, как видно, не зависит от угла поворота координатных осей.

Приравняв значение I_u к нулю, находим положение главных центральных осей, при котором функция I_u принимает экстремальное значение:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (2.13)$$

С учётом (2.12) можно утверждать, что при $\alpha = \alpha_0$ один из осевых моментов I_u или I_v будет наибольшим, а другой наименьшим. Положительное направление угла α_0 откладывается против хода часовой стрелки.

Декартовы оси координат, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются главными осями инерции. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными и находятся по формулам (2.11) или (2.14):

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (2.14)$$

Литература: [1, гл. VIII]; [2, гл. VIII]; [3, гл. 4]; [4, гл. 4]; [5, гл. VI]; [8, гл. 5].

3. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

3.1. НАЗНАЧЕНИЕ ГИПОТЕЗ ПРОЧНОСТИ

Составление условий прочности в случаях, когда материал находится или в одноосном напряжённом состоянии (растяжение, сжатие), или простейшем двухосном, когда главные напряжения в каждой точке равны между собой по величине и противоположны по знаку (сдвиг, кручение), не вызывало затруднений. Для обеспечения прочности материала требовалось, чтобы наибольшее нормальное напряжение (при растяжении, сжатии) или наибольшее касательное напряжение (при кручении) не превосходило соответствующего допускаемого напряжения, значение которого установлено по полученному опытным путём соответствующему пределу текучести или пределу прочности (для хрупких материалов).

При изучении более сложных деформаций, таких, например, как кручение с изгибом и других, встречаются более сложные случаи напряжённого состояния.

Общий случай трёхосного напряжённого состояния и площадка действия максимального касательного напряжения изображены на рис. 3.1.

Спрашивается, при каких значениях напряжений $\sigma_{1л}$, $\sigma_{2л}$, $\sigma_{3л}$ (предельных напряжений) наступит предельное состояние материала, т.е. произойдёт его разрушение или возникнут пластические деформации?

Решение этого вопроса позволило бы решить и другую задачу: определить безопасные (допускаемые) значения главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Поставленная задача является весьма сложной. Наиболее надёжный способ её решения состоял бы в том, чтобы испытать образец при заданном соотношении главных напряжений до разрушения или до начала текучести и установить таким образом предельные, а затем допускаемые значения главных напряжений.

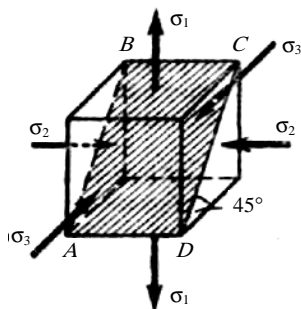


Рис. 3.1. Трёхосное напряжённое состояние

Однако этот способ приходится отвергнуть, так как при каждой новой комбинации напряжений пришлось бы снова производить испытания.

Кроме того, такие испытания требуют очень сложных машин и приборов. Необходимо поэтому иметь какую-то гипотезу (теорию), которая позволила бы оценивать опасность перехода материала в предельное состояние при сложном напряжённом состоянии, не прибегая каждый раз к трудоёмким опытам, а используя лишь данные наиболее простых опытов, т.е. опытов с одноосным напряжённым состоянием.

Таким образом, построение гипотез прочности основывается на предпосылке, состоящей в том, что два каких-либо напряжённых состояния считаются равноопасными и равнопрочными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз одновременно становятся предельными.

В этом случае коэффициент запаса прочности для обоих напряжённых состояний при указанных условиях будет одинаковым.

Гипотез прочности предложено несколько, и исследования в этой области продолжаются. Это объясняется сложностью природы разрушения. С физической точки зрения, разрушение материала представляет собой или отрыв частиц друг от друга (так называемое хрупкое разрушение), или сдвиг частиц (так называемое вязкое разрушение, сопровождающееся значительными пластическими деформациями). Однако трудность вопроса состоит в том, что один и то же материал при различных напряжённых состояниях и различных условиях испытания (температура окружающей среды, скорость деформирования и т.д.) может разрушаться и хрупко, и вязко. Кроме того, в некоторых случаях возможно комбинированное разрушение, когда в одних зонах разрушение происходит в результате отрыва частиц, а в других – в результате сдвига. Это свидетельствует о том, что характер предельного состояния материала и условия его перехода в предельное состояние зависят от многих факторов.

Естественно принять в качестве таких факторов напряжения (нормальные и касательные) и деформации (линейные и угловые). Было предложено также принять в качестве критерия перехода в предельное состояние потенциальную энергию деформации. Идея рассматриваемых гипотез прочности и состоит в том, что каждая из них из большого числа факторов, влияющих на прочность материала, выбирает какой-нибудь один, игнорируя все остальные (подчёркиваем, что здесь и в дальнейшем, говоря о прочности, имеем в виду как разрушение в буквальном смысле слова, так и возникновение пластических деформаций).

По мере накопления опытных данных стала очевидной необходимость применения более сложных гипотез прочности, основывающихся не только на опытах с одноосным растяжением (сжатием), но и на опытах при сложном напряжённом состоянии.

Надёжность той или иной гипотезы прочности проверяется опытным путём. Поэтому, прежде чем переходить к изложению гипотез прочности, ознакомимся с результатами некоторых опытов, проведённых при двухосном напряжённом состоянии. Двухосные напряжённые состояния с различным соотношением главных напряжений получаются сравнительно просто при испытании тонкостенных трубок, подверженных внутреннему давлению и действию осевой силы.

Результаты опытов будем изображать графически (рис. 3.2), строя диаграмму зависимости между значениями главных напряжений к моменту разрушения или к моменту начала текучести материала (диаграмму зависимости между предельными значениями главных напряжений).

Тогда при одноосном растяжении предельное напряжение изобразится отрезком OF (если элемент, показанный на чертеже, растягивается в вертикальном направлении) или OA (в случае растяжения элемента в горизонтальном направлении), причём для изотропных материалов $OF = OA$. Величина этих отрезков в определённом масштабе равна пределу прочности или пределу текучести при одноосном растяжении в зависимости от того, какое предельное состояние мы рассматриваем.

При одноосном сжатии предельное напряжение изобразится отрезком OB или отрезком OK .

Испытаем теперь образец при каком-нибудь двухосном напряжённом состоянии, например, при таком, чтобы напряжение σ_1 увеличиваясь, все время было в два раза больше напряжения σ_2 . При каких-то значениях этих напряжений, например σ'_{1n} и σ'_{2n} , произойдёт разрушение или наступит текучесть материала. Нанесём на диаграмму точку E , координаты которой равны σ'_{1n} и σ'_{2n} . Проведя опыты при других соотношениях между главными напряжениями, нанеся на диаграмму соответствующие точки и соединив их между собой, получим некоторую линию $KFCAB$, которую назовём *диаграммой предельных напряжений*. Очевидно, что для изотропных материалов линия $a - a$ есть ось симметрии этой диаграммы, так что достаточно построить одну половину диаграммы предельных напряжений: $CEFK$ или SAB .

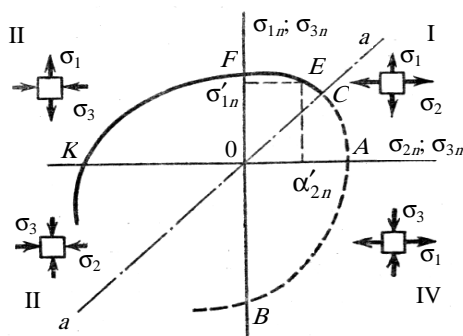


Рис. 3.2. Диаграмма предельных напряжений

Для трёхосного напряжённого состояния опытных данных значительно меньше, чем для плоского напряжённого состояния. Опыты проведены для некоторого ограниченного числа комбинаций главных напряжений.

Перейдём теперь к изложению имеющихся основных гипотез прочности.

Некоторые из них подтверждаются опытами или как гипотезы пластичности, или как гипотезы разрушения. Другие же подтверждаются одновременно и как гипотезы разрушения, и как гипотезы пластичности.

3.2. ПЕРВАЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ

Первая гипотеза прочности называется также гипотезой наибольших нормальных напряжений, потому что за критерий прочности она принимает наибольшее нормальное напряжение. Сформулирована она может быть следующим образом: *предельное состояние материала при сложном напряжённом состоянии наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает величины предельного напряжения при одноосном напряжённом состоянии.*

$$\sigma_{1n} = \sigma_n,$$

где σ_{1n} – предельное значение наибольшего (из трёх) нормального напряжения (в момент разрушения); σ_n – предельное напряжение при одноосном сжатии или растяжении (предел прочности).

Диаграмма предельных напряжений по первой гипотезе изображена на рис. 3.3, а в виде прямых 1–2, 2–3, 3–4 и 1–4. При этом отрезки $OA = OF$ представляют собой предельное напряжение при одноосном растяжении, отрезки $OB = OK$ – предельное напряжение при одноосном сжатии. Для хрупких материалов $OB > OF$, для пластичных материалов $OB = OF$ (рис. 3.3, б). Разделив обе части равенства на коэффициент запаса прочности и добавляя знак неравенства, получим условие прочности

$$\sigma_1 = [\sigma],$$

где σ_1 – фактическое значение наибольшего главного напряжения, возникающего в опасной точке детали; $[\sigma]$ – допускаемое значение нормального напряжения, принимаемое для одноосного растяжения или сжатия.

Первую гипотезу прочности можно сформулировать также следующим образом: *прочность материала при сложном напряжённом состоянии обеспечивается, если наибольшее нормальное напряжение не превосходит допускаемого нормального напряжения, установленного для одноосного напряжённого состояния.*

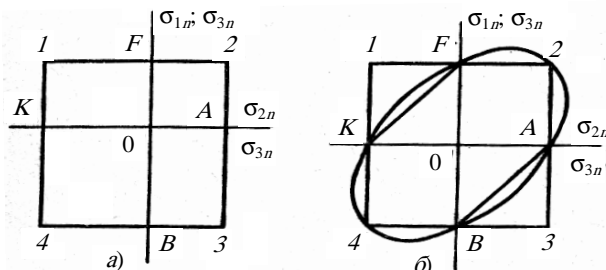


Рис. 3.3. Диаграмма предельных напряжений

Как видим, эта гипотеза учитывает лишь влияние наибольшего главного напряжения, пренебрегая влиянием двух других главных напряжений на прочность материала. Рассмотренные выше опыты для пластичных материалов не подтверждают этой гипотезы как гипотезы пластичности, т.е. гипотезы, устанавливающей критерий возникновения текучести. Опытные точки располагаются не на прямых FC , CE и BE , как это следует из первой гипотезы, а на некоторой кривой линии $CKADB$.

Для хрупких материалов в I квадранте диаграммы предельных напряжений и в значительной части IV (или //) квадранта первая гипотеза хорошо согласуется с опытными данными. В этих случаях ею и следует пользоваться, рассматривая её как гипотезу, устанавливающую критерий хрупкого разрушения.

Если материал имеет различные допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, то вместо одного условия прочности будем иметь два условия – по наибольшим растягивающим и сжимающим напряжениям:

$$\begin{aligned}\max \sigma_p &\leq [\sigma_p]; \\ \max \sigma_c &\leq [\sigma_c].\end{aligned}$$

3.3. ВТОРАЯ И ТРЕТЬЯ ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Согласно второй гипотезе прочности, называемой также *гипотезой наибольших линейных деформаций*, в качестве критерия прочности принимается наибольшая линейная деформация. Поскольку опыты не подтверждают эту теорию, она не получила широкого применения.

Согласно третьей гипотезе прочности, называемой также *гипотезой наибольших касательных напряжений*, прочность материала при сложном напряжённом состоянии считается обеспеченной, если наибольшее касательное напряжение не превосходит допускаемого касательного напряжения, установленного для одноосного напряжённого состояния.

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

При двухосном напряжённом состоянии наибольшие касательные напряжения имеют место в сечениях под углом $\alpha = 45^\circ$ к направлению главных напряжений и равны полуразности этих напряжений

В случае объёмного напряжённого состояния максимальные касательные напряжения имеют место в плоскости $ABCD$; их величина равна (см. рис. 3.1)

$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}.$$

Допускаемое касательное напряжение $[\tau]$ при одноосном напряжённом состоянии связано с допускаемым нормальным напряжением $[\sigma]$ соотношением

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2},$$

вытекающим из предыдущей формулы, если положить в ней σ_3 , равные нулю.

Таким образом, условие прочности по третьей гипотезе, выраженное в нормальных напряжениях, имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства, представляет собой некоторое напряжение, называемое *приведённым* или *эквивалентным* (или *расчётным*).

Его следует понимать как *напряжение, которое следует создать в растянутом (или сжатом) образце, чтобы его прочность была одинаковой с прочностью образца, находящегося в условиях сложного напряжённого состояния*.

Третья гипотеза, в общем, удовлетворительно характеризует сопротивление этих материалов пластическим деформациям, во всяком случае значительно правильнее, чем первая гипотеза. Недостатком третьей гипотезы является то, что она не учитывает влияния промежуточного главного напряжения σ_2 на прочность материала.

В настоящее время третья гипотеза прочности широко применяется для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

3.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ

Энергетическая гипотеза (гипотезы Бельтрами): *прочность материала при сложном напряжённом состоянии обеспечивается в том случае, если удельная потенциальная энергия деформации не превосходит допускаемой удельной потенциальной энергии, установленной для одноосного напряжённого состояния*.

$$\varepsilon_p \leq [\varepsilon_p].$$

Энергетическая гипотеза, так же как и третья, не учитывает различия между растяжением и сжатием. Опыты показывают, что лучшие результаты получаются, если в качестве критерия прочности принимать не всю энергию деформации, а лишь ту её часть, которая связана с изменением формы тела. Ус-

ловие прочности (в данном случае это условие пластичности) по энергетической гипотезе формоизменения (называемой также *четвёртой гипотезой* или гипотезой Губера–Мизеса) имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma].$$

В частном случае для плоского напряжённого состояния ($\sigma_3 = 0$) получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma].$$

Для хрупких материалов результаты по четвертой гипотезе получаются неудовлетворительными.

3.5. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ДРУГИХ ГИПОТЕЗАХ ПРОЧНОСТИ

Рассматриваемые выше гипотезы прочности дают удовлетворительные результаты или, только для хрупкого разрушения (первая гипотеза), или только для вязкого (третья или четвёртая). Кроме того, они не учитывают различной прочности материалов на растяжение и сжатие.

Кроме рассмотренных было предложено большое количество других гипотез. Некоторые из них заслуживают внимания, хотя и не могут быть подробно рассмотрены в настоящем кратком курсе. Здесь прежде всего необходимо отметить гипотезу прочности О. Мора, позволяющую учесть различное сопротивление материалов растяжению и сжатию. Условие прочности, по гипотезе Мора, имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \kappa\sigma_3 \leq [\sigma_p],$$

где $\kappa = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{нс}}}$; $\sigma_{\text{пр}}$ – предельное напряжение при растяжении; $\sigma_{\text{нс}}$ – предельное напряжение при сжатии.

Для пластичных материалов предельные напряжения равны соответствующим пределам текучести.

Для хрупких материалов предельные напряжения равны пределам прочности

Таким образом, гипотеза Мора может рассматриваться и как гипотеза пластичности, и как гипотеза разрушения. При $\kappa = 1$ гипотеза прочности Мора совпадает с третьей гипотезой. Для хрупких материалов гипотеза Мора даёт удовлетворительные результаты, хотя и приводит к завышенным размерам сечений. Наилучшие результаты даёт теория Мора при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_3 < 0$.

Заслуживает также внимания обобщение энергетической гипотезы прочности, позволяющее учесть различную прочность материала на растяжение и сжатие. Заслуживают внимания так называемые *объединённые гипотезы прочности*, где в качестве критерия прочности принимаются не один фактор, а два или даже три. Предлагались и другие гипотезы прочности. В частности, предлагается записывать условие прочности в виде некоторого многочлена второй или даже третьей степени относительно главных напряжений, содержащего определённое число произвольных постоянных, которые определяются из опытов, в том числе и из опытов при сложном напряжённом состоянии. Однако приведённые выше диаграммы разрушения хрупких материалов ясно показывают, что условие прочности материала не может быть выражено непрерывной функцией во всем диапазоне напряжённых состояний.

Для хрупких материалов наиболее оправданной является, по-видимому, объединённая гипотеза прочности Н.Н. Давиденкова.

Мы рассматривали гипотезы прочности, опираясь на данные опытов с двухосным напряжённым состоянием. Опытных данных, относящихся к трёхосным напряжённым состояниям, значительно меньше. Имеющиеся опыты свидетельствуют о том, что при напряжённых состояниях, близких к трёхосному сжатию, материалы, даже хрупкие, способны выдерживать весьма значительные напряжения. При равностороннем сжатии таких материалов, как сталь, медь, алюминий, разрушения не происходит при громадных давлениях 5000...20 000 МПа.

На основании имеющихся опытных данных можно считать, что для пластичных материалов при трёхосном напряжённом состоянии удовлетворительные результаты даёт энергетическая гипотеза формоизменения и третья гипотеза прочности. Что же касается хрупких материалов, то для них рекомендуется гипотеза прочности Мора.

Литература: [3, гл. 7, 8]; [5, гл. III, V].

4. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Ранее рассмотрены четыре вида простого нагружения стержня: центральное растяжение (сжатие), сдвиг, кручение и плоский изгиб.

Во всех этих случаях в поперечных сечениях стержня под действием нагрузки возникало только одно внутреннее усилие (продольная или поперечная сила, крутящий или изгибающий моменты). Исключением явился лишь общий случай плоского изгиба (поперечный изгиб), при котором в поперечных сечениях стержня возникают одновременно два внутренних усилия: изгибающий момент и поперечная сила. Но и в этом случае при расчётах на прочность и жёсткость, как правило, учитывалось лишь одно внутреннее усилие – обычно изгибающий момент.

Однако на практике часто встречаются и более сложные случаи, когда в поперечных сечениях стержня одновременно действует несколько внутренних силовых факторов (внутренних усилий), одновременно учитываемых при расчёте на прочность, например продольная сила и крутящий момент, либо сочетание из трёх и более внутренних усилий. Эти случаи называют *сложным сопротивлением*.

Порядок решения таких задач следующий. Вначале с помощью метода сечений определяют внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях стержня. При сложной нагрузке рекомендуется строить эпюры внутренних усилий, позволяющие определить положение опасного сечения (В некоторых случаях по эпюрам внутренних усилий не представляется возможным с полной уверенностью установить, какое сечение является опасным, при этом по эпюрам устанавливают два (а иногда и более) предположительно опасных сечения и для каждого из них производят расчёт). После этого на основании принципа независимости действия сил определяют нормальные и касательные напряжения от каждого внутреннего усилия отдельно, пользуясь полученными ранее формулами. Исследуя распределение напряжений по сечению, устанавливают опасную (или предположительно опасную) точку, для которой и составляют условие прочности. При этом, если окажется, что в опасной точке имеет место одноосное напряжённое состояние (одноосное растяжение или сжатие), то для расчёта на прочность достаточно сопоставить возникающее в этой точке суммарное (т.е. от всех внутренних усилий) нормальное, напряжение с допускаемым $[\sigma_p]$ или $[\tau_c]$. В случае же, если напряжённое состояние в опасной точке является двухосным, расчёт следует выполнять, применяя ту или иную гипотезу прочности (при расчёте бруса/стержня случаи трёхосного напряжённого состояния не встречаются). Как известно из предыдущего материала, выбор гипотезы прочности определяется в первую очередь состоянием материала (пластическое или хрупкое).

При необходимости определения того или иного перемещения также используется принцип независимости действия сил (складывают перемещения геометрически).

4.2. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЯ С ЛОМАННОЙ ОСЬЮ

Рассмотрим пример построения эпюр крутящих и изгибающих моментов, а также продольных сил для стержня с ломаной осью, изображённого на рис. 4.1, а.

Изгибающий момент в любом сечении стержня определяем как алгебраическую сумму моментов (относительно соответствующей оси) внешних сил, действующих по одну сторону от сечения. Чтобы не определять предварительно реакций в заделке, рекомендуется брать сумму моментов сил, действующих со стороны свободного конца стержня.

Изгибающий момент в произвольном сечении участка AB равен $M_{S1} = FS_1$ (рис. 4.1, б). По этому уравнению с правой стороны стержня (на сжатом волокне) построена эпюра M_H для участка AB .

Для определения изгибающих моментов в сечениях участка BC полезно мысленно перенести силу F параллельно самой себе из точки A в точку B . При переносе силы надо добавить момент, лежащий в

плоскости чертежа, т.е. в плоскости xOy , и равный $M_{yz} = Fl_1$. Так как плоскость действия этого момента перпендикулярна оси участка BC стержня, то он вызывает кручение стержня, а изгиб производит сила F . Поэтому изгибающий момент в сечении с абсциссой S_2 равен $M_{S_2} = FS_2$.

Сжатые волокна на участке BC будут справа, здесь и построена эпюра M_{S_2} с наибольшей ординатой Fl_2 . Аналогичным образом строится эпюра изгибающих моментов для участка CD . Для этого силу F и момент $M_{yz} = Fl_1$ из точки B мысленно переносим в точку C .

В точке C будут действовать сила F , направленная вдоль участка CD , и два момента: один момент $M_{yz} = Fl_1$, который переносится без изменения, и второй момент $M_{xy} = Fl_2$, который получается при переносе силы F из точки B в точку C .

Оба эти момента M_{yz} и M_{xy} (на чертеже они не показаны) вызывают изгиб стержня: первый – в вертикальной плоскости, второй – в горизонтальной.

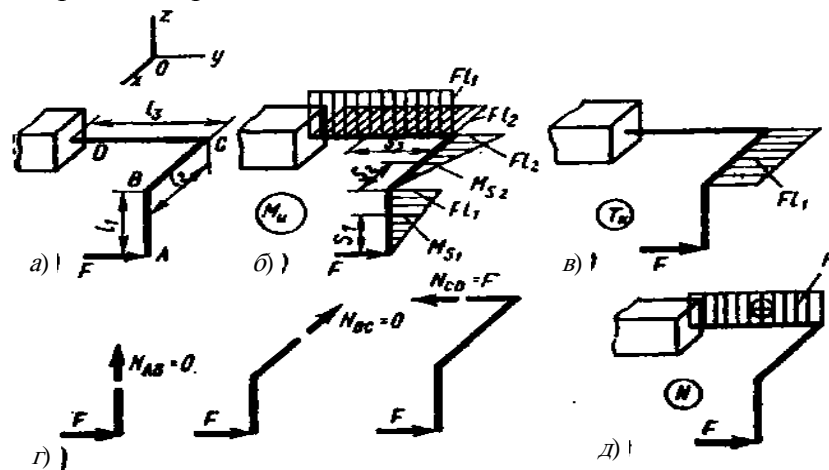


Рис. 4.1. Брус с ломаной осью

Соответствующие эпюры изгибающих моментов для участка CO представлены на рис. 4.1, б. Эпюры построены со стороны сжатых волокон рассматриваемого участка.

Построим эпюру крутящих моментов. Стержень на участке AB не испытывает кручения, так как сила F лежит в той же плоскости, что и продольная ось участка AB .

Крутящий момент в сечениях участка BC равен

$$T_k = M_{yz} = Fl_1.$$

Эпюру T_k можно строить с любой стороны стержня (рис. 4.1, в). Участок CD не испытывает кручения, так как сила F параллельна его оси.

Строим эпюру продольных сил. Из условия равновесия отсечённых частей, проектируя силы на направления осей отдельных участков стержня, получаем (рис. 4.1, г)

$$N_{AB} = 0; \quad N_{BC} = 0; \quad N_{CD} = F \text{ (растяжение)}.$$

Эпюра N показана на рис. 4.1, д. Анализируя эпюры, видим, что:

- 1) участок AB работает только на изгиб;
- 2) участок BC работает на кручение и изгиб в горизонтальной плоскости;
- 3) участок CD работает на изгиб в двух плоскостях и на растяжение.

Соответственно этому должны быть выполнены расчёты на прочность каждого из участков стержня.

Литература: [3, гл. 6]; [5, гл. IX].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При проектировании и эксплуатации машин и приборов возникает необходимость решения вопросов механического профиля – выбор схем, кинематика и динамика, расчёты на прочность, оценка механических причин брака производимой продукции и т.д. Задачей пособия является получение студентами навыков по расчёту и конструированию типовых механических устройств, используемых в машинах, измерительных приборах и средствах автоматизации.

В результате освоения учебного пособия, обучающиеся знакомятся с источниками информации по деталям машин, основам конструирования деталей машин, появлением новых и развитием известных теорий, гипотез, представлений и проверки их опытным путём, методами расчёта элементов конструкций на прочность и жёсткость, проблемными вопросами прочностных расчётов. Студент в результате изучения представленного материала должен уметь оценивать принципы работы, технические характеристики, конструктивные особенности разрабатываемых и используемых технических средств, оценивать работоспособность деталей по критериям прочности, самостоятельно конструировать простейшие механические узлы, при конструировании учитывать требования собираемости, технологичности, стандартизации, экономичности, самостоятельно подбирать справочную литературу, ГОСТ, необходимый вспомогательный материал. Студент получает представление об основных задачах, решаемых данной наукой, о возможностях применения знаний, полученных в данном курсе, об основных законах данного курса и навыки определения основных геометрических параметров и расчёта на прочность широко распространённых деталей машин (приборов) и аппаратов, составления кинематических схем, выполнения расчётов механических передач и их элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краткий курс теоретической механики : учебник для вузов / С.М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2004. – 416 с.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики : учебное пособие для вузов : в 2 т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб. : Лань, 2004. – Т. 1 – 736 с.
3. Сопротивление материалов : учебное пособие для вузов / под ред. Н.А. Костенко. – М. : Высшая школа, 2004. – 430 с.
4. Сопротивление материалов : учебник для вузов / А.В. Александров [и др.]. – М. : Высшая школа, 2000. – 560 с.
5. Молотников, В.Я. Курс сопротивления материалов : учебное пособие для вузов / В.Я. Молотников. – СПб. : Лань, 2006. – 384 с.
6. Справочник конструктора-машиностроителя : в 3-х т. / В.И. Анурьев. – М. : Машиностроение, 1999.
7. Прикладная механика: учебник для вузов / Г.Б. Иосилевич [и др.] – М. : Высшая школа, 1989. – 351 с.
8. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1989. – 624 с.
9. Стандарт предприятия. Проекты (работы) дипломные и курсовые. Правила оформления. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2000. – 38 с.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.

Дано: $P_1 = 20$ кН; $P_2 = 30$ кН; $F_1/F_2 = 2$; $[\sigma_p] = 50$ МПа; $[\sigma_{сж}] = 100$ МПа; $E = 10^5$ МПа; $a = 1$ м; $b = 2$ м; $c = 0,5$ м.

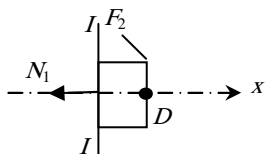
Задача 1. Для схемы (рис. П1.1) определить площади поперечного сечения, построить эпюры продольных сил, напряжений, относительных удлинений и перемещений.

Решение.

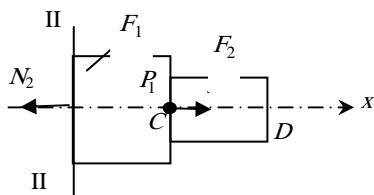
1. Определение продольных сил по участкам стержня.

Расчёт начинаем со свободного конца стержня, чтобы не определять реакции связей в опоре:

$$DC: \sum X = 0; -N_1 = 0; N_1 = 0$$

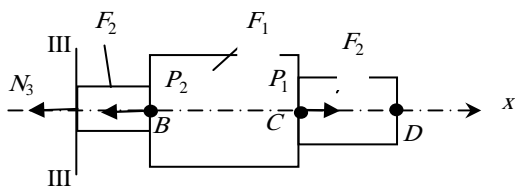


$$CB: \sum X = 0$$



$$P_1 - N_2 = 0; N_2 = P_1 = 20 \text{ кН (растяжение);}$$

$$BA: \sum X = 0$$



$$P_1 - P_2 - N_3 = 0; N_3 = P_1 - P_2 = 20 - 30 = -10 \text{ кН (сжатие).}$$

2. Построение эпюры продольных сил:

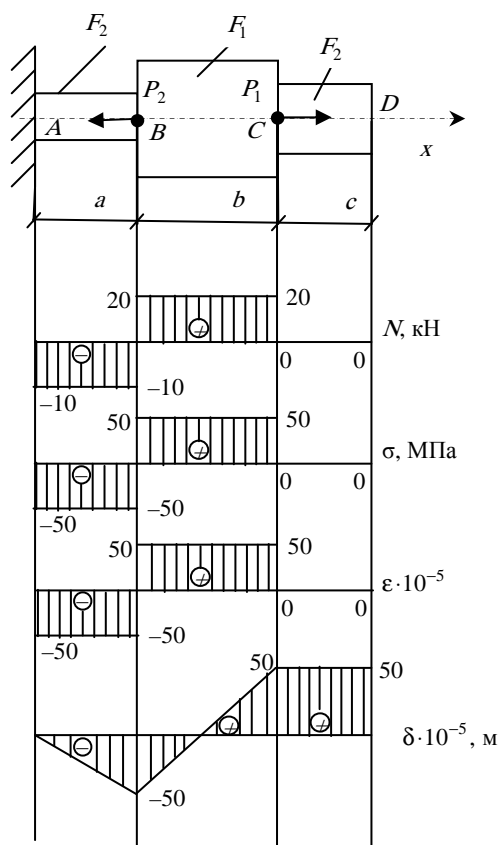


Рис. П1.1. Исходная схема с эпюрами

3. Определение площадей поперечного сечения:

$$DC: \sigma_1 = \frac{N_1}{F_2} \leq [\sigma];$$

$$CB: \sigma_{II} = \frac{N_2}{F_1} \leq [\sigma_p]$$

$$F_1 = \frac{N_2}{[\sigma_p]} = \frac{20 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; \quad F_2 = \frac{F_1}{2} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$BA: \sigma_{III} = \frac{N_3}{F_2} \leq [\sigma_{сж}]$$

$$F_2 = \frac{N_3}{[\sigma_{сж}]} = \frac{10 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; \quad F_1 = 2F_2 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Принимаем $F_1 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$; $F_2 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

4. Определение напряжений по участкам стержня:

$$DC: \sigma_1 = \frac{N_1}{F_2} = 0;$$

$$CB: \sigma_{II} = \frac{N_2}{F_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{0,4 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ МПа};$$

$$BA: \sigma_{III} = \frac{N_3}{F_2} = \frac{-10 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 10^{-3}} = -50 \text{ МПа} .$$

5. Построение эпюры напряжений.

6. Определение относительных удлинений по участкам стержня:

$$DC: \varepsilon_I = \frac{\sigma_I}{E} = 0;$$

$$CB: \varepsilon_I = \frac{\sigma_{II}}{E} = \frac{50}{10^5} = 50 \cdot 10^{-5};$$

$$BA: \varepsilon_I = \frac{\sigma_{III}}{E} = \frac{-50}{10^5} = -50 \cdot 10^{-5} .$$

7. Построение эпюры относительных удлинений.

8. Определение перемещений точек стержня.

$$\delta_A = 0;$$

$$\delta_B = \delta_A + \Delta AB = \delta_A + \varepsilon_{III} a = 0 + (-50 \cdot 10^{-5}) \cdot 1 = -50 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\delta_C = \delta_B + \Delta BC = \delta_B + \varepsilon_{II} b = -50 \cdot 10^{-5} + 50 \cdot 10^{-5} \cdot 2 = 50 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\delta_D = \delta_C + \Delta CD = \delta_C + \varepsilon_I c = 50 \cdot 10^{-5} + 0 = 50 \cdot 10^{-5} .$$

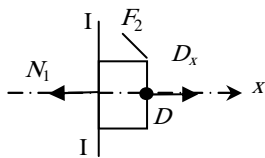
9. Построение эпюры перемещений точек стержня.

Задача 2. Для схемы (рис. П1.2) добавить опору к свободному концу стержня и определить площади поперечного сечения, построить эпюры продольных сил, напряжений, относительных удлинений и перемещений.

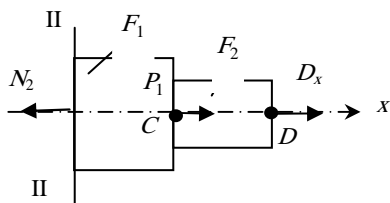
Решение.

1. Определим продольные силы по участкам стержня.

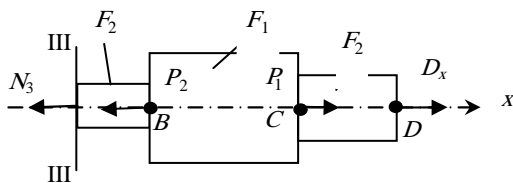
$$DC: \sum x=0; D_x - N_1 = 0; N_1 = D_x$$



$$CB: \sum x=0; D_x + P_1 - N_2 = 0; N_2 = P_1 + D_x$$



$$BA: \sum x=0; D_x + P_1 - P_2 - N_3 = 0; N_3 = D_x + P_1 - P_2$$



2. Освобождаемся от связи в точке D и заменяем опору реакцией связи D_x .
Определим реакцию связи D_x из условия, что

$$\delta_A = \delta_D = 0, \text{ т.е. } \frac{N_3 a}{EF_2} + \frac{N_2 b}{EF_1} + \frac{N_1 c}{EF_2} = 0.$$

Заменяем продольные силы через неизвестную реакцию D_x :

$$\frac{(D_x + P_1 - P_2)a}{EF_2} + \frac{(D_x + P_1)b}{EF_1} + \frac{D_x c}{EF_2} = 0.$$

Выражаем отсюда D_x , подставляем исходные данные и получаем, что $D_x = -4$ кН.
Получив знак минус, меняем направление реакции D_x на обратное.

3. Определим численные значения продольных сил.

DC : $N_1 = D_x = -4$ кН (сжатие);

CB : $N_2 = P_1 + D_x = 16$ кН (растяжение);

BA : $N_3 = D_x + P_1 - P_2 = -14$ кН (сжатие).

4. Построение эпюры продольных сил.

5. Определение площадей поперечного сечения.

$$DC: \sigma_I = \frac{N_1}{F_2} \leq [\sigma_{сж}]$$

$$F_2 = \frac{N_1}{[\sigma_{сж}]} = \frac{4 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0,04 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$F_1 = 2F_2 = 0,08 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

$$CB: \sigma_{II} = \frac{N_2}{F_1} \leq [\sigma_p]$$

$$F_1 = \frac{N_2}{[\sigma_p]} = \frac{16 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6} = 0,32 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$F_2 = \frac{F_1}{2} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

$$BA: \sigma_{III} = \frac{N_3}{F_2} \leq [\sigma_{сж}]$$

$$F_2 = \frac{N_3}{[\sigma_{сж}]} = \frac{14 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0,14 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; F_1 = 2F_2 = 0,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Принимаем $F_1 = 0,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$; $F_2 = 0,14 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

6. Определение напряжений по участкам стержня.

$$DC: \sigma_I = \frac{N_1}{F_2} = \frac{-4 \cdot 10^3}{0,14 \cdot 10^{-3}} = -28,57 \text{ МПа};$$

$$CB: \sigma_{II} = \frac{N_2}{F_1} = \frac{16 \cdot 10^3}{0,28 \cdot 10^{-3}} = 57,142 \text{ МПа};$$

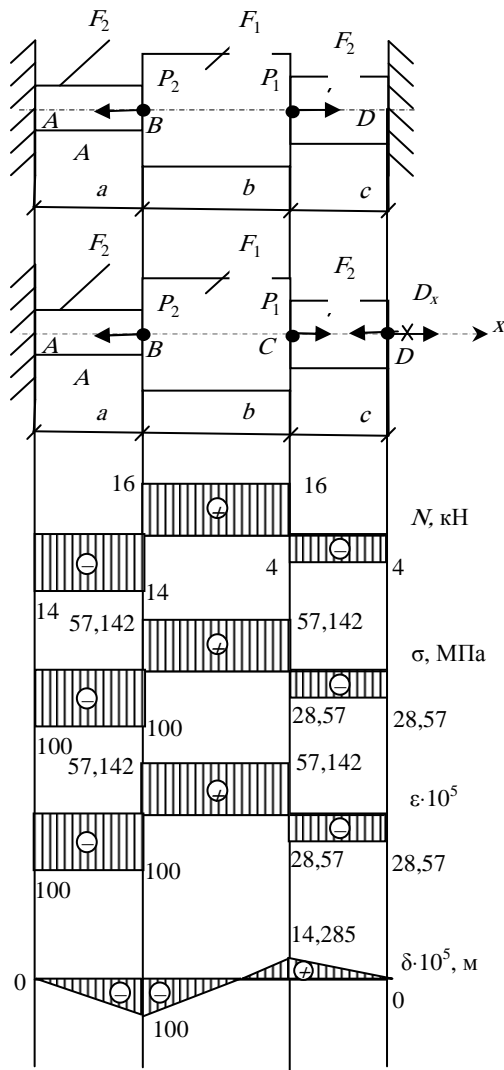


Рис. П1.2. Исходная схема неопределимого бруса с эпюрами

$$BA: \sigma_{III} = \frac{N_3}{F_2} = \frac{-14 \cdot 10^3}{0,14 \cdot 10^{-3}} = -100 \text{ МПа} .$$

7. Построение эпюры напряжений.

8. Определение относительных удлинений по участкам стержня.

$$DC: \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = -28,57 \cdot 10^{-5} ;$$

$$CB: \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = 57,142 \cdot 10^{-5} ;$$

$$BA: \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} = -100 \cdot 10^{-5} .$$

9. Построение эпюры относительных удлинений.

10. Определение перемещений точек стержня.

$$\delta_A = 0 ;$$

$$\delta_B = \delta_A + \Delta AB = \delta_A + \varepsilon_{III} a = 0 + (-100 \cdot 10^{-5}) \cdot 1 = -100 \cdot 10^{-5} \text{ м} ;$$

$$\delta_C = \delta_B + \Delta BC = \delta_B + \varepsilon_{II} b = -100 \cdot 10^{-5} + 57,142 \cdot 10^{-5} \cdot 2 = 14,285 \cdot 10^{-5} \text{ м} ;$$

$$\delta_D = \delta_C + \Delta CD = \delta_C + \varepsilon_1 c = 14,285 \cdot 10^{-5} + (-28,57 \cdot 10^{-5}) \cdot 0,5 \approx 0$$

11. Построение эпюры перемещений точек стержня.

Пример 2. Для балки (рис. П1.3) требуется написать выражения для Q и M на каждом участке в общем виде, построить эпюры Q и M , найти M_{\max} и подобрать номер двутавра.

Дано: $a = 3$ м; $b = 4,2$ м; $c = 2,3$ м; $\ell = 12,5$ м; $M = 8$ кН·м; $P = 11$ кН; $q = 13$ кН/м; $R = 160$ МПа.

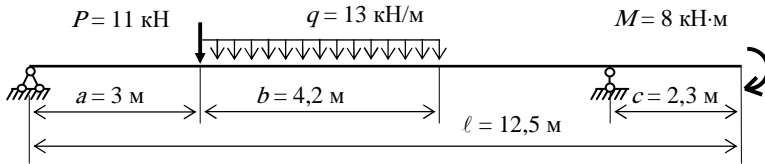


Рис. П1.3. Исходная схема балки

Решение.

Покажем и вычислим реакции опор (рис. П1.4):

$$\sum m_A = 0; R_D(a + b + d) - Pa - qb(a + b/2) - M = 0;$$

$$R_D(3 + 4,2 + 3) - 11 \cdot 3 - 13 \cdot 4,2 \cdot 5,1 - 8 = 0; R_D = 31,32 \text{ кН.}$$

$$\sum m_D = 0; R_A(a + b + d) - P(b + d) - qb(d + b/2) + M = 0;$$

$$R_A(3 + 4,2 + 3) - 11 \cdot (4,2 + 3) - 13 \cdot 4,2 \cdot 5,1 + 8 = 0; R_A = 34,28 \text{ кН.}$$

$$\text{Проверка реакций опор: } \sum Y = 0; R_A - P - qb + R_D = 0;$$

$$34,28 - 11 - 13 \cdot 4,2 + 31,32 = 65,6 - 65,6 = 0.$$

Реакции опор найдены верно.

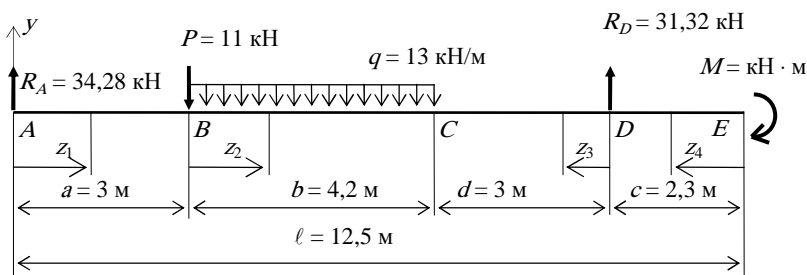


Рис. П1.4. Определение реакций

Вычисляем значения Q и M на участках.

Участок AB : $z_1 \in [0; 3]$;

$$Q(z_1) = R_A; Q(z_1) = 34,28 \text{ кН};$$

$$M(z_1) = R_A z_1; M(z_1) = 34,28 z_1; M(0) = 0; M(3) = 102,84 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$\text{Проверка: } \frac{dM(z_1)}{dz_1} = R_A; \frac{dM(z_1)}{dz_1} = Q(z_1).$$

Участок BC : $z_2 \in [0; 4,2]$;

$$Q(z_2) = R_A - P - qz_2; \quad Q(z_2) = 34,28 - 11 - 13z_2;$$

$$Q(0) = 23,28 \text{ кН}; \quad Q(4,2) = -31,32 \text{ кН};$$

$$Q(z_2) = 0 \text{ при } z_2 = (34,28 - 11)/13 = 1,79 \text{ м};$$

$$M(z_2) = R_A(a + z_2) - Pz_2 - qz_2^2/2; \quad M(z_2) = 34,28(3 + z_2) - 11z_2 - 13z_2^2/2;$$

$$M(0) = 102,84 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M(1,79) = 123,68 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M(4,2) = 85,96 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Проверка: } \frac{dM(z_2)}{dz_2} = R_A - P - qz_2; \quad \frac{dM(z_2)}{dz_2} = Q(z_2).$$

Участок CD : $z_3 \in [0; 3]$;

$$Q(z_3) = -R_D; \quad Q(z_3) = -31,32 \text{ кН};$$

$$M(z_3) = R_D z_3 - M; \quad M(z_3) = 31,32z_3 - 8; \quad M(3) = 85,96 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M(0) = -8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$M(0) = 102,84 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M(1,79) = 123,68 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M(4,2) = 85,96 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Проверка: } \frac{dM(z_3)}{dz_3} = R_D; \quad \frac{dM(z_3)}{dz_3} = -Q(z_3).$$

Участок DE : $z_4 \in [0; 2,3]$;

$$Q(z_4) = 0;$$

$$M(z_4) = -M; \quad M(z_4 = 0) = M(z_4 = 2,3) = -8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюры Q и M (рис. П1.5).

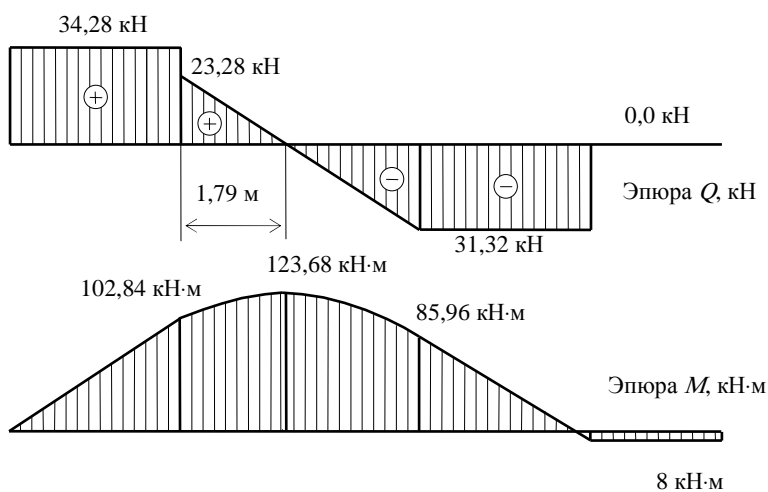


Рис. П1.5. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Подбор сечения. Для балки постоянного сечения опасным является сечение, в котором действует максимальный по абсолютному значению изгибающий момент. В нашем случае это место находится на расстоянии 4,79 м от левой опоры и $M_{\max} = 123,68 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Из условия прочности определяем требуемый момент сопротивления и подбираем номер двутавра:

$$W_x = M_{\max} R = 123,68 \cdot 1000 : 160 = 773 \text{ см}^3.$$

В соответствии с ГОСТ 8510–86 (табл. П4.1), принимаем двутавр № 36, $W_x = 743 \text{ см}^3$. Перегрузка составляет 4 %, что меньше 5 %.

Пример 3. К стальному валу приложены три известных момента: T_1 , T_2 и T_3 (рис. П1.6). Требуется: 1) из условия равновесия вала найти значение момента X (сопротивлением опор пренебречь); 2) построить эпюру крутящих моментов; 3) определить диаметр вала из расчёта на прочность; 4) из расчёта на прочность подобрать вал кольцевого поперечного сечения при заданном отношении внутреннего диаметра d к наружному D ; 5) выбрать вал с меньшей площадью поперечного сечения; 6) для выбранного вала проверить выполнение условия жёсткости (при невыполнении этого условия подобрать размеры поперечного сечения вала из условия жёсткости) и построить эпюру углов закручивания.

Дано: $a = 1 \text{ м}$; $b = 1,5 \text{ м}$; $c = 2 \text{ м}$; $T_1 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $T_2 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $T_3 = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $[\tau] = 70 \text{ МПа}$; $[\theta] = 1 \text{ град/м}$; $d : D = 0,8$.

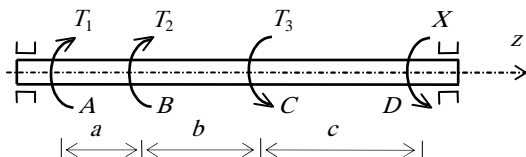


Рис. П1.6. Исходная схема

Решение.

Из условия равновесия $\sum M_z = 0$ находим значение момента X :

$$T_1 + T_2 - T_3 - X = 0; X = T_1 + T_2 - T_3 = 3 + 2 - 1 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Вычисляем крутящие моменты на участках вала.

Участок AB : $M = T_1 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Участок BC : $M = T_1 + T_2 = 3 + 2 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Участок CD : $M = T_1 + T_2 - T_3 = 3 + 2 - 1 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. П1.7).

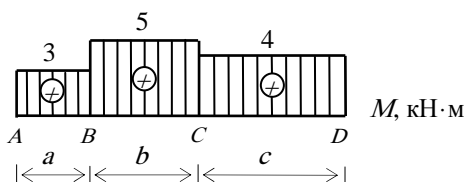


Рис. П1.7. Эпюра крутящих моментов

Опасным является участок BC , расчётный момент $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Вычисляем требуемый диаметр вала по условию прочности:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5}{3,14 \cdot 70}} \cdot 10 = 7,14 \text{ см}.$$

Округлив полученное значение, принимаем $D = 7,5 \text{ см}$.

Находим площадь поперечного сечения (площадь круга):

$$F = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 7,5^2}{4} = 44,16 \text{ см}^2.$$

Из условия прочности вычисляем внешний диаметр вала кольцевого сечения при заданном соотношении внутреннего и внешнего диаметров $d/D = 0,8$:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi(1-(d/D)^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5}{3,14 \cdot (1-0,8^4) \cdot 70}} \cdot 10 = 8,51 \text{ см}.$$

После округления полученного значения принимаем $D = 9,0$ см.

Находим площадь поперечного сечения (площадь кольца) при $d/D = 0,8$ и $D = 9$ см:

$$F = \frac{\pi D^2}{4} (1 - (d/D)^2) = \frac{3,14 \cdot 9^2}{4} (1 - 0,8^2) = 22,89 \text{ см}^2.$$

Для равнопрочных валов сравниваем площади их поперечных сечений $22,89 < 44,16$. Выбираем вал кольцевого сечения, как более экономичный.

Для выбранного вала проверяем выполнение условия жёсткости. Предварительно вычисляем полярный момент инерции кольца при $d/D = 0,8$ и $D = 9$ см:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - (d/D)^4) = \frac{3,14 \cdot 9^4}{32} (1 - 0,8^4) = 380 \text{ см}^4.$$

Находим жёсткость вала при кручении, приняв модуль сдвига стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа:

$$GJ_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 380 \cdot 10^{-5} = 304 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Вычисляем наибольший относительный угол закручивания вала:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\max}}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{5}{304} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,943 \text{ град/м}.$$

Проверяем условие жёсткости.

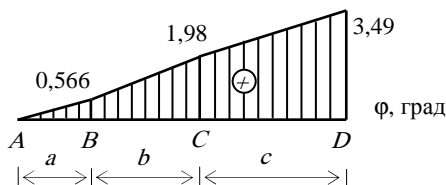
$$\theta_{\max} = 0,943 \text{ град/м} < [\theta] = 1 \text{ град/м}.$$

Условие жёсткости выполняется.

Находим углы закручивания сечений B, C, D относительно сечения A :

$$\begin{aligned} \varphi_A &= 0; \\ \varphi_B &= \frac{3 \cdot 1}{304} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,566 \text{ град}; \\ \varphi_C &= 0,566 + \frac{5 \cdot 1,5}{304} \cdot \frac{180}{3,14} = 1,98 \text{ град}; \\ \varphi_D &= 1,98 + \frac{4 \cdot 2}{304} \cdot \frac{180}{3,14} = 3,49 \text{ град}. \end{aligned}$$

По вычисленным значениям строим эпюру углов закручивания (рис. П1.8).



ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ

Исходные данные для выполнения расчёта выбираются студентом из прилагаемых таблиц в соответствии с заданием, личным учебным шифром и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например:

шифр						
буквы						

Из каждого вертикального столбца таблицы, обозначенного внизу буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы.

Расчётно-проектировочная работа 1

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

Задача 1. Исходные данные взять из табл. П2.1 и рис. П2.1 ($K = \frac{F_1}{F_2}$). Для стержня переменного поперечного сечения необходимо:

1. Определить продольные силы с помощью метода сечений.
2. Построить эпюры продольных сил.
3. Определить площади поперечного сечения.
4. Определить напряжения.
5. Построить эпюры напряжений.
6. Определить относительные удлинения по участкам стержня.
7. Построить эпюры относительных удлинений.
8. Определить перемещения точек стержня.
9. Построить эпюры перемещений.

Задача 2. Для рассмотренного в задаче 1 стержня добавить опору к свободному концу стержня. Получив статически неопределимую задачу, выполнить расчёт по порядку:

1. Замена опоры реакцией связи.
2. Определение продольной силы в зависимости от неизвестной реакции.
3. Определение численного значения реакции связи.
4. Определение численного значения продольной силы с помощью метода сечений.
5. Построение эпюры продольных сил.
6. Определение площадей поперечного сечения.
7. Определение напряжений.
8. Построение эпюры напряжений.
9. Определение относительных удлинений по участкам стержня.
10. Построение эпюры относительных удлинений.
11. Определение перемещений точек стержня.
12. Построение эпюры перемещений.

Таблица П2.1

Цифры шифра	№ схе- мы	Ма- тери- ал	E МПа	P	P	P	a	b	c	d	K	[σ] _p	[σ] _{сж}
				1	2	3						МПа	
				Кн			м						
1	III	сталь	2·10 ⁵	20	30	21	0,2	0,2	0,3	0,4	1,5	160	145
2	IV	медь	1·10 ⁵	15	18	11	0,3	0,1	0,4	0,3	2	60	40
3	V	алю- миний	0,7·10 ⁵	22	21	18	0,1	0,3	0,5	0,3	0,5	50	30
4	IX	чугун	1,2·10 ⁵	18	22	19	0,4	0,5	0,3	0,2	0,7	40	80
5	I	медь	1·10 ⁵	19	18	17	0,5	0,4	0,2	0,3	1,2	60	40
6	II	чугун	1,2·10 ⁵	17	11	21	0,3	0,2	0,4	0,1	1,4	40	80
7	VIII	сталь	2·10 ⁵	23	15	28	0,2	0,4	0,3	0,3	2,1	160	145
8	VII	алю- миний	0,7·10 ⁵	30	19	25	0,1	0,3	0,2	0,2	1,7	50	30
9	VI	сталь	2·10 ⁵	16	23	14	0,3	0,2	0,2	0,2	0,5	160	145
0	I	алю- миний	0,7·10 ⁵	24	27	13	0,4	0,1	0,2	0,2	0,3	50	30
Бу- квы ши- фра	а	б	б	в	г	д	д	е	а	б	е	б	б

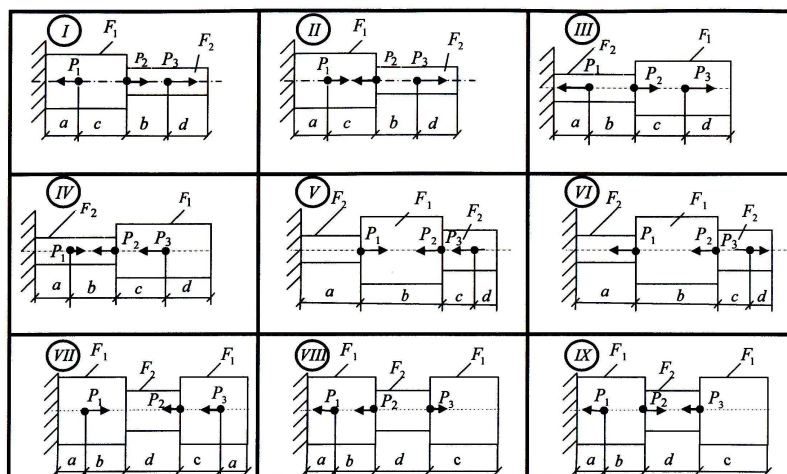


Рис. П2.1

ИЗГИБ БРУСА

Исходные данные взять из табл. П2.2 и рис. П2.2. Содержание задания: для балок из условия прочности при изгибе подобрать поперечные сечения.

Порядок расчёта:

1. Определить опорные реакции
2. Построить эпюры внутренних силовых факторов
3. Проверить правильность построения эпюр, используя дифференциальные зависимости.
4. Из условия прочности подобрать для:
 - консольной балки круглое сечение;
 - балки с шарниром прямоугольное сечение;
 - балки на двух опорах подобрать: круглое сечение, прямоугольное сечение, квадратное сечение, двутавровое сечение.
5. Выявить наиболее экономичное сечение.

Таблица П2.2

Цифры шифра	№ схемы	P_1	P_2	M_1	M_2	q_1	q_2	a	b	c	d	$[\sigma]$	K
		кН		кН·м		кН/м		м				МПа	h/b
1	II	10	–	–	30	20	–	1,0	2,0	1,5	1,2	110	1,3
2	I	–	20	20	–	–	25	1,5	1,7	1,8	2,0	120	1,4
3	IV	30	–	25	–	15	–	1,9	2,0	2,1	3,0	130	1,5
4	III	15	–	–	17	–	18	1,4	1,5	3,0	2,0	140	1,6
5	V	–	20	19	–	10	–	1,1	1,4	2,0	2,2	115	1,7
6	VII	32	–	22	–	30	–	2,3	2,4	1,6	1,8	125	1,8
7	VI	22	–	18	–	–	17	2,0	2,2	1,3	1,4	135	1,9
8	VIII	–	14	–	25	–	1-	1,5	1,6	1,7	1,8	110	2,0
9	X	30	–	13	–	16	–	3,0	2,2	2,3	3,0	120	2,2
0	IX	20	–	–	40	–	20	3,0	3,2	1,8	2,0	130	3
Буквы шифра	а	б	б	в	в	б	б	г	д	е	г	а	д

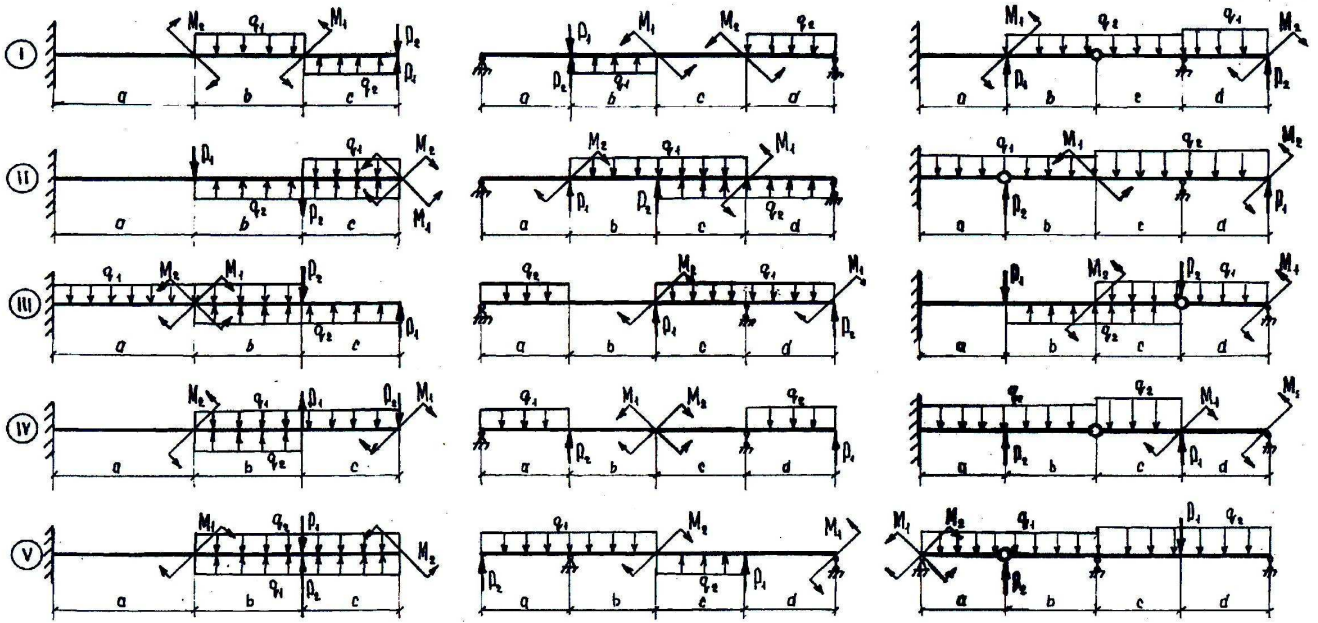


Рис. П2.2. Исходные схемы

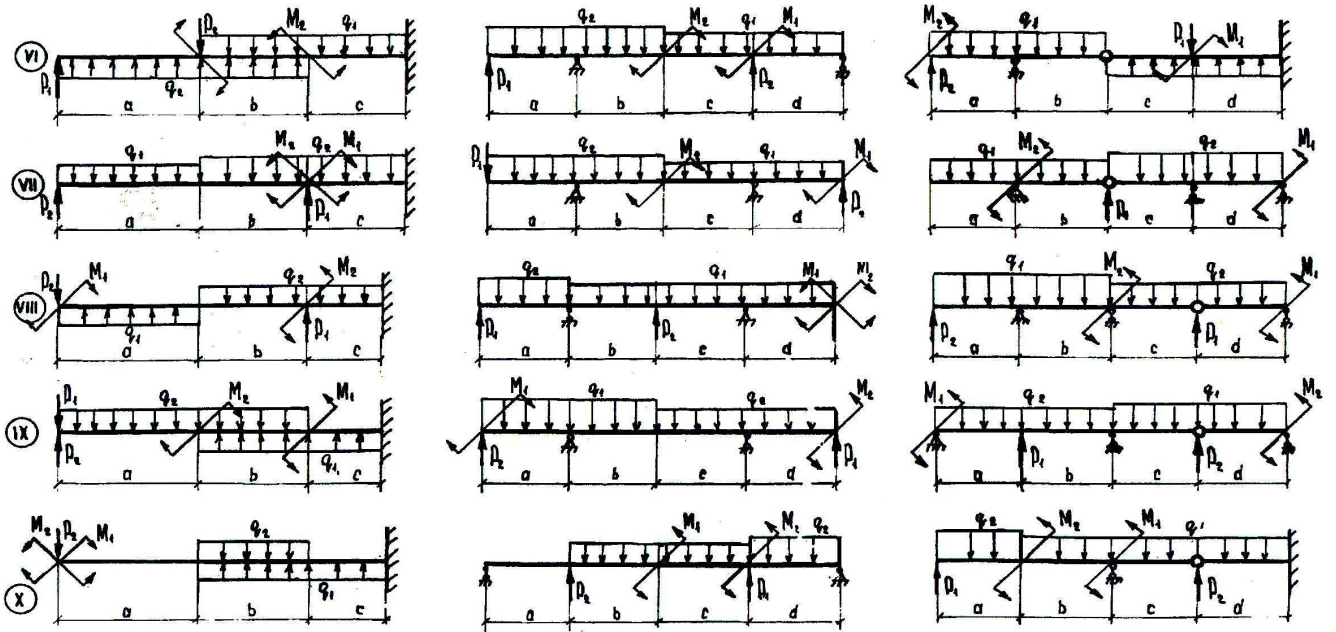


Рис. П2.2. Продолжение

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

УКАЗАНИЯ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЕДИНИЦ МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЫ СИ В ЗАДАЧАХ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Наиболее часто встречающиеся в сопротивлении материалов единицы Международной системы, приведены в табл. ПЗ.1.

Таблица ПЗ.1

Наименование величины	Единица измерения	Сокращённое обозначение единиц измерения
Основные единицы		
Длина	Метр	м
Масса	Килограмм	кг
Время	Секунда	с
Дополнительные единицы		
Плоский угол	РадIAN	рад
Производные единицы		
Частота	Герц	Гц
Угловая скорость (угловая частота)	РадIAN на секунду	рад/с (c^{-1})
Скорость	Метр на секунду	м/с
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	м/с ²
Площадь	Метр в квадрате	м ²
Статический момент сечения (объём)	Метр в кубе	м ³
Осевой момент инерции площади сечения	Метр в четвёртой степени	м ⁴
Плотность	Килограмм на метр в кубе	кг/м ³
Сила	Ньютон	Н
Удельный вес	Ньютон на метр в кубе	Н/м ³
Напряжение, давление, нагрузка, распределённая по поверхности	Ньютон на метр в кубе	Па Н/м Н·м
Погонная нагрузка	Паскаль	Дж Вт
Момент силы	Ньютон на метр	
Работа и энергия	Ньютон-метр	кг·м ²
Мощность	Джоуль	
Динамический момент инерции	Ватт	
	Килограмм-метр в квадрате	

Некоторые основные и производные единицы, имеющие специальные названия (м, с, Гц, Н, Па, Дж, Вт), и окончательных результатах расчётов можно увеличивать или уменьшать, используя для этого приставки, указанные в табл. ПЗ.2.

Таблица ПЗ.2

Приставка	Сокращённое обозначение	Множитель
Тера	Т	10^{12}
Гига	Г	10^9
Мега	М	10^6
Кило	к	10^3
Гекто	г	10^2
Дека	да	10^1
Деци	д	10^{-1}
Санتي	с	10^{-2}
Милли	м	10^{-3}
Микро	мк	10^{-6}
Нано	н	10^{-9}
Пико	п	10^{-12}

Среди производных единиц с большой буквы пишутся те, которые образованы от фамилий учёных (Гц, Н, Па и т.д.).

Приложение 4

СОРТАМЕНТ МАТЕРИАЛОВ

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (ГОСТ 8510–86)

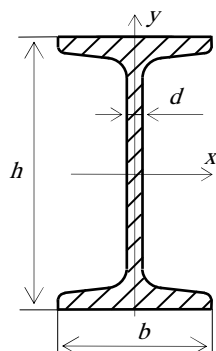


Таблица П4.1

№	h , мм	b , мм	d , мм	A , см ²	J_{x_1} , см ⁴	W_{x_1} , см ³	i_{x_1} , см	S_{x_1} , см ³	J_{y_1} , см ⁴	W_{y_1} , см ³	i_{y_1} , см
10	100	55	4,5	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,55	1,55

1 6	16 0	81	5	20, 2	873	10 9	6,5 7	62, 3	58, 6	14, 5	1,7
1 8	18 0	90	5,1	23, 4	129 0	14 3	7,4 2	81, 4	82, 6	18, 4	1,8 8
1 8 a	18 0	10 0	5,1	25, 4	143 0	15 9	7,5 1	89, 8	11 4	22, 8	2,1 2
2 0	20 0	10 0	5,2	26, 8	184 0	18 4	8,2 8	10 4	11 5	23, 1	2,0 7
2 0 a	20 0	11 0	5,2	28, 9	203 0	20 3	8,3 7	11 4	15 5	28, 2	2,3 2
2 2	22 0	11 0	5,4	30, 6	255 0	23 2	9,1 3	13 1	15 7	28, 6	2,2 7
2 2 a	22 0	12 0	5,4	32, 8	279 0	25 4	9,2 2	14 3	20 6	34, 3	2,5
2 4	24 0	11 5	5,6	34, 8	346 0	28 9	9,9 7	16 3	19 8	34, 5	2,3 7
2 4 a	24 0	12 5	5,6	37, 5	380 0	31 7	10, 1	17 8	26 0	41, 6	2,6 3
2 7	27 0	12 5	6	40, 2	501 0	37 1	11, 2	21 0	26 0	41, 5	2,5 4
2 7 a	27 0	13 5	6	43, 2	550 0	40 7	11, 3	22 9	33 7	50	2,8
3 0	30 0	13 5	6,5	46, 5	708 0	47 2	12, 3	26 8	33 7	49, 9	2,6 9
3 0 a	30 0	14 5	6,5	49, 9	778 0	51 8	12, 5	29 2	43 6	60, 1	2,9 5
3 3	33 0	14 0	7	53, 8	984 0	59 7	13, 5	33 9	41 9	59, 9	2,7 9
3 6	36 0	14 5	7,5	61, 9	13 380	74 3	14, 7	42 3	51 6	71, 1	2,8 9
4 0	40 0	15 5	8,3	72, 6	19 062	95 3	16, 2	54 5	66 7	86, 1	3,0 3
4 5	45 0	16 0	9	84, 7	27 696	12 31	18, 1	70 8	80 8	10 1	3,0 9
5 0	50 0	17 0	10	10 0	39 727	15 89	19, 9	91 9	10 43	12 3	3,2 3
5 5	55 0	18 0	11	11 8	55 962	20 35	21, 8	11 81	13 56	15 1	3,3 9
6 0	60 0	19 0	12	13 8	76 806	25 60	23, 6	14 91	17 25	18 2	3,5 4

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ

Пояснительная записка РПР должна содержать:

- титульный лист;
- основные разделы расчёта;
- заключение.

Титульный лист должен быть выполнен в соответствии с рис. П5.1. Титульный лист выполняется на белой бумаге формата А4 или на белой бумаге потребительского формата, близкого к формату А4, чертёжным шрифтом. Перенос слов на титульном листе и в заголовках по тексту на разрешается. Точка в конце заголовка не ставится. Бланк титульного листа выполняется студентом самостоятельно чёрной пастой или набивается на компьютере.

Основные разделы состоят из задания, схем и расчётов по пунктам.

Заключение должно содержать окончательные выводы, характеризующие итоги работы в решении поставленных перед студентом задач. Выводы должны быть сделаны на основе полученных теоретических знаний и практических навыков.

Общие требования к оформлению текста. Текст документа должен быть набран на персональном компьютере (ПК) или напечатан машинописным способом, или написан от руки, аккуратно чернилами или пастой одного цвета (чёрной, синей, фиолетовой) на одной или двух сторонах листа белой бумаги формата А4 или потребительского формата, близкого к формату А4. Допускается применять листы форматы А3, которые помещают как приложения к тексту. Текстовые документы работы должны быть сброшюрованы в папки. Каждый лист текстового документа, кроме титульного листа, должен быть выполнен по ГОСТ 2.106–96, при этом основную надпись и дополнительные графы выполняют в соответствии с требованиями ГОСТ 2.104–68. Необходимо соблюдать установленные поля: 20 мм от левой границы формата и 5 мм от остальных границ.

Нумерация страниц сквозная, начиная с титульного листа, включая приложения, должна быть в правом верхнем углу относительно текста без сокращённого слова «страница» (с). Независимо от этого каждый отдельный документ имеет свою нумерацию листов, начиная с заглавного листа этого документа. На титульном листе номер страницы не ставится.

Работам присваивается обозначение, состоящее из кода университета – ТГТУ, кода специальности и специализации, номера по списку автора работы из распоряжения по кафедре или номера по списку учебной группы.

Пример – ТГТУ.280202.013.

Рекомендуемая литература: [9].

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО Тамбовский государственный технический университет

Российской Федерации
в Тамбовской области
г. Тамбов

*Кафедра: «Прикладная механика и сопротивление
материалов»*

**РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА
№1**

на тему: «.....»

Шифр 555666

Выполнил: студент гр. Г-21
Иванов И.И.

Принял: доцент Петров П.П.

Тамбов 2009

Рис. П5.1

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ОСНОВНОЙ НАДПИСИ
ПЕРВОГО ЛИСТА ТЕКСТОВОГО ДОКУМЕНТА
ПРОЕКТА (РАБОТЫ)**

					ТГТУ. 230300.013 ПЗ			
(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(2)			
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Приставка СТВ1 Пояснительная записка (1)	Литер.	Лист	Листов
Разраб.	Попов			10.5.96				
Провер.	Орлов			15.5.96			1	130
(10)	(11)	(12)	(13)			КРЭМС, гр. Р-51		
Н.контр.	Орлов			15.5.96		(9)		
Утв.	Серов			17.5.96				

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ОСНОВНОЙ НАДПИСИ
ПОСЛЕДУЮЩИХ ЛИСТОВ ДЛЯ ЧЕРТЕЖЕЙ (СХЕМ)
И ТЕКСТОВОГО ДОКУМЕНТА ПРОЕКТА (РАБОТЫ)**

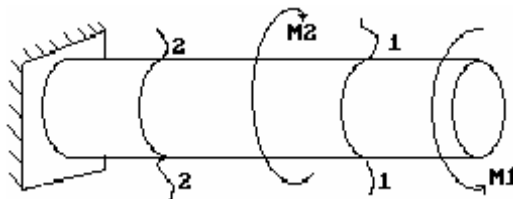
					ТГТУ. 230300.013 ПЗ		Лист
(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(2)		59
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата			(1)

Примечание: Расположение и размеры граф основных надписей последующих листов для чертежей (схем) и текстового документа проекта (работы) в соответствии с ГОСТ 2.104-68.

Рис. П5.2

ТЕСТ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ

1. Способность конструкции (или отдельной детали) сопротивляться деформации называется _____
- а) жёсткостью;
 - б) выносливостью;
 - в) прочностью;
 - г) изотропностью;
 - д) устойчивостью.
2. В нагруженном теле внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади какого-либо сечения, называется _____ в данной точке на данной площадке.
- а) продольной силой;
 - б) поперечной силой;
 - в) напряжением;
 - г) критической силой;
 - д) сосредоточенной силой.
3. Напряжение, при котором наблюдается рост деформаций без изменения нагрузки, называется _____
- а) пределом пропорциональности;
 - б) пределом текучести;
 - в) критическим;
 - г) пределом прочности;
 - д) допускаемым.
4. Момент внутренних сил в поперечном сечении бруса относительно продольной оси бруса называется _____
- а) крутящим моментом;
 - б) динамой;
 - в) главным моментом;
 - г) моментом инерции сечения;
 - д) изгибающим моментом.
5. Проекция главного вектора внутренних сил в поперечном сечении нагруженного бруса на продольную ось бруса называется _____
- а) критической силой;
 - б) сосредоточенной силой;
 - в) поперечной силой;
 - г) продольной силой;
 - д) напряжением.
6. Чему равны крутящие моменты M_k в сечениях 1-1 и 2-2 показанного на рисунке вала?



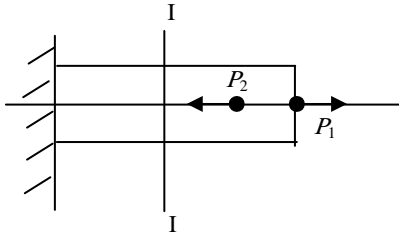
- а) $M_{k1} = M_1$; $M_{k2} = M_2$;
- б) $M_{k1} = M_1 + M_2$; $M_{k2} = 0$;
- в) $M_{k1} = M_1$; $M_{k2} = -M_2$;

- г) $M_{к1} = M_1$; $M_{к2} = M_1 - M_2$;
 д) $M_{к1} = M_1$; $M_{к2} = 0$;

7. Круглый брус скручивается моментами $M_k = 10$ кН·м. Допускаемое касательное напряжение равно $[\tau] = 50$ МПа. Момент сопротивления поперечного сечения определить по приближённой формуле $W_p = 0,2 d^3$. Тогда вычисленный из условия прочности необходимый диаметр круглого бруса окажется равным ...

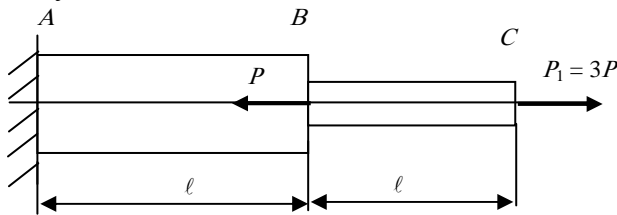
- а) 20 см; б) 10 см; в) 15 см; г) 5 см; д) 1 см.

8. Чему равны напряжения в сечении I-I если $P_1 = 0$ кН, $P_2 = 5$ кН, а площадь поперечного сечения равна $5 \cdot 10^{-4}$ м²?



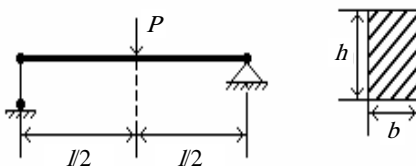
- а) 40 МПа; б) 10 МПа; в) 30 МПа; г) 50 МПа

9. Ступенчатый брус нагружен силами P и P_1 , действующими вдоль оси бруса. Левый конец бруса жёстко закреплён. Площадь поперечного сечения правого участка бруса равна F , а левого $F_1 = 2F$. Модуль продольной упругости одинаков и равен E . Если $P_1 = 3P$, то перемещение точки B будет определяться следующим соотношением:



- а) $-P\ell/E2F$;
 б) $3P\ell/EF$;
 в) $2P\ell/EF$;
 г) $4P\ell/EF$;
 д) $P\ell/EF$

10. Балка на двух шарнирных опорах нагружена посередине силой $P = 0,2$ кН. Длина балки $l = 2$ м; $h = \sqrt{6} b$; схема загрузки балки и её поперечное сечение даны на рисунке. Если допускаемое напряжение $[\sigma] = 100$ МПа, то из условия прочности по нормальным напряжениям получим размеры прямоугольного поперечного сечения

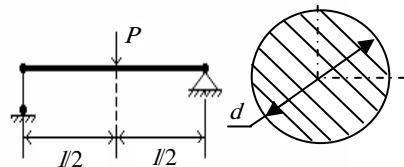


- а) $b = 2,4\sqrt{6}$ см; $h = 3,6$ см;
- б) $b = 0,6$ см; $h = 0,9\sqrt{6}$ см;
- в) $b = 3$ см; $h = 4,5$ см;
- г) $b = 1$ см; $h = 1,5$ см;
- д) $b = 1$ см; $h = \sqrt{6}$ см.

11. В каких точках поперечного сечения балки при изгибе возникают наибольшие нормальные напряжения?

- а) в точках наиболее удаленных от центра тяжести;
- б) в точках наиболее удаленных от нейтральной оси;
- в) в точках контура поперечного сечения;
- г) в центре тяжести сечения;
- д) в точках нейтральной оси сечения.

12. Балка на двух шарнирных опорах нагружена посередине силой $P = 2,5$ кН. Длина балки $l = 2$ м; диаметром d , схема загрузки балки и её поперечное сечение даны на рисунке. Если допускаемое напряжение $[\sigma] = 100$ МПа, то из условия прочности по нормальным напряжениям (принять $W = 0,1d^3$) получим диаметр балки равным:



- а) 40 мм;
- б) 20 мм;
- в) 30 мм;
- г) 60 мм;
- д) 50 мм.

13. В каких единицах измеряется момент сопротивления?

- а) Н·м;
- б) м³;
- в) Н/м²;
- г) м⁴.

14. Понятие расчётного момента используется при расчёте бруса круглого сечения ...

- а) на изгиб;
- б) на кручение;
- в) на совместное действие изгиба и кручения;
- г) на срез.

15. Опасным сечением является то, где ...

- а) возникают максимальные внутренние силовые факторы;
- б) действует максимальный момент;
- в) возникают максимальные напряжения;
- г) площадь поперечного сечения наименьшая.

16. Запишите условие прочности при растяжении-сжатии:

- а) $\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$;
- в) $\tau = \frac{M_{\max}}{W_k} \leq [\tau]$;

б) $\sigma \leq \frac{P}{F} \leq [\sigma]$; г) $\Delta l \leq \frac{Pl}{EF} \leq [\Delta l]$.

17. Чем пластичнее материал, тем больше ...

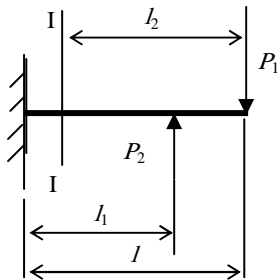
- а) усилия;
- б) остаточные деформации;
- в) упругие деформации;
- г) нормальные напряжения

18. Запишите условие прочности при изгибе:

а) $\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]$; в) $\tau = \frac{M_{к \max}}{W_{к}} \leq [\tau]$;

б) $\sigma = \frac{M_{\text{изг max}}}{W} \leq [\sigma]$; г) $\Delta l \leq \frac{Pl}{EF} \leq [\Delta l]$.

19. Чему равен изгибающий момент в сечении I-I если $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 5$ кН, $l = 5$ м, $l_1 = 3$ м, $l_2 = 4$ м?



- а) 40 кН·м; б) 35 кН·м; в) 45 кН·м; г) 30 кН·м.

ОТВЕТЫ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
а	в	б	а	г	г	б	в	д	д	б	д	б	в	а	б	б	б	г

ГЛОССАРИЙ

Абсолютно твёрдое тело – материальное тело, в котором расстояния между точками остаются неизменными независимо от действующих сил.

Балка – брус, работающий в основном на изгиб.

Брус – элемент конструкции, длина которого значительно больше его поперечных размеров.

Бинормаль – прямая, перпендикулярная к главной нормали и касательной нормали.

Внутренние силы – силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

Вращение тела – движение, при котором все точки тела, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения, все время остаются неподвижными.

Временное сопротивление (предел прочности) – напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца.

Возможные (виртуальные) перемещения системы – любая совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент наложенными на систему связями.

Выносливость – способность материала противостоять действию повторно переменных напряжений.

Главная нормаль кривой – линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей.

Главные напряжения – максимальные и минимальные нормальные напряжения.

Деформация – изменение формы и объёма тела под действием внешних сил.

Динамика – раздел механики, изучающий механическое движение в связи с действующими силами на объект движения.

Главные площадки – называть площадки, по которым касательные напряжения равны нулю.

Задаваемые (активные) силы – силы, не являющиеся реакциями связей.

Деформированное состояние – совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям для одной точки.

Инерциальной системой отсчёта – система отсчёта, в которой проявляются 1-й и 2-й законы динамики.

Изгиб – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты.

Кинематика – раздел механики, изучающий механическое движение без учёта сил, вызывающих это движение или влияющих на него.

Касательное напряжение – интенсивность касательных сил в рассматриваемой точке сечения.

Конус трения – конус с вершиной в точке приложения нормальной реакции шероховатой поверхности, образующая которого составляет угол трения с этой нормальной реакцией.

Кориолисово ускорение – ускорение равное удвоенному векторному произведению мгновенной угловой скорости подвижной системы координат на вектор относительной скорости.

Косой изгиб – случай, когда внешние силы, перпендикулярные оси стержня, не лежат в плоскости, проходящей через главную ось его поперечного сечения.

Коэффициент Пуассона – отношение относительной поперечной деформации к продольной, взятое по абсолютной величине.

Материальная линия – тело, у которого одно из измерений очень велико по сравнению с другими.

Кручение – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только крутящий момент.

Материальная поверхность – однородное тело с формой тонкой оболочки постоянной толщины.

Линии Людерса – Чернова – микроскопические неровности, возникающие вследствие необратимых сдвигов, происходящих в кристаллах под действием наибольших касательных напряжений.

Материальная точка – тело, не имеющее размеров, но в отличие от геометрической точки обладающее массой, равной массе того тела, которое изображается данной материальной точкой.

Массивное тело – элемент конструкции, все размеры которого соизмеримы.

Механическая система – совокупность материальных тел или абсолютно твёрдых тел, связанных между собой общими законами движения или взаимодействия.

Метод сечений – приём определения внутренних усилий.

Механическое взаимодействие – один из видов взаимодействия материи, вызывающий изменение механического движения тел или их частей, а также препятствующий изменению их взаимных положений.

Механическое движение – один из видов движения материи, выражающееся в изменении с течением времени взаимных положений тел или их частей.

Наклёп – явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования.

Момент силы относительно точки – произведение модуля силы на её плечо относительно данной точки.

Напряжённое состояние – совокупность напряжений, действующих по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку.

Моментом пары – произведение модуля сил, образующих пару, на её плечо.

Нормальное напряжение – интенсивность нормальных сил в рассматриваемой точке сечения.

Моментом силы относительно оси – называется алгебраическая величина, абсолютное значение которой равняется произведению модуля проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, на расстояние от точки пересечения оси с этой плоскостью до линии действия проекции силы на плоскость.

Обобщенный закон Гука – выражения, устанавливающие связь между деформациями и напряжениями при пространственном напряжённом состоянии.

Несвободное тело – тело, свобода перемещения которого в пространстве ограничена другими телами.

Оболочка – элемент конструкции, длина и ширина которого значительно больше его толщины.

Обратная ползучесть – явление уменьшения накопленной деформации ползучести.

Относительное движение точки – движение точки по отношению к подвижной системе координат.

Относительное изменение объёма – отношение величины абсолютного изменения объёма к первоначальному объёму параллелепипеда.

Относительное сужение после разрыва – отношение уменьшения площади поперечного сечения образца в месте разрыва к начальной площади поперечного сечения образца.

Относительное удлинение после разрыва – отношение приращения расчётной длины образца после разрыва к её первоначальному значению.

Относительный угол закручивания – угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними.

Пара сил – совокупность двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил.

Переносное движение точки – движение точки, обусловленное движением подвижной системы координат.

Плечо пары сил – расстояние между линиями действия сил пары.

Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на линию действия силы.

Пластичность – свойство твёрдых тел изменять под нагрузкой форму и размеры без образования разрывов и трещин; и сохранять изменившиеся форму и размеры после удаления нагрузки.

Плоская система сил – система сил, линии действия которых, лежат в одной плоскости.

Плоское движение тела – движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Ползучесть – явление изменения тела при неизменной, приложенной к телу нагрузке.

Полная удельная потенциальная энергия деформации – общее количество потенциальной энергии, приходящееся на единицу объёма тела.

Поступательное движение тела – движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной своему первоначальному положению во всё время движения.

Предел пропорциональности – наибольшее напряжение, до которого существует прямо пропорциональная зависимость между нагрузкой и деформацией.

Предел упругости – максимальное напряжение, при котором в материале не обнаруживается признаков пластической (остаточной) деформации.

Принцип наложения напряжений – любое напряжённое состояние можно рассматривать как сумму нескольких напряжённых состояний.

Распределённые силы – силы, приложенные к телу во всех точках части поверхности или во всех точках объёма тела.

Реакции связей – силы, с которыми связи действуют на тело.

Расчётная схема – реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей.

Релаксация – явление медленного уменьшения напряжений в образце при постоянной деформации.

Свободное тело – твёрдое тело, которое может занимать в пространстве любое произвольное положение.

Связи – тела, ограничивающие свободу перемещения рассматриваемого тела.

Сила – количественная мера механического взаимодействия материальных тел, характеризующаяся величиной, направлением и точкой приложения.

Сила тяжести – равнодействующая системы параллельных сил.

Сложное сопротивление – случаи, когда в поперечных сечениях стержня одновременно действует несколько внутренних силовых факторов (внутренних усилий), одновременно учитываемых при расчёте на прочность.

Система отсчёта – система координат, неизменно связанная с телом отсчёта.

Сопротивление материалов – наука о том, как реагируют элементы конструкций (механизмов, машин, сооружений) на воздействие нагрузок и как обеспечить их соответствие своему назначению и работоспособность.

Система сил – совокупность сил, приложенных к одному или нескольким твёрдым телам.

Старение – явление изменения механических свойств.

Система сходящихся сил – система сил, пересекающихся в одной точке.

Система твёрдых тел – несколько тел, соединённых друг с другом шарнирами или соприкасающихся между собой.

Сложное движение точки – движение, при котором она движется относительно системы отсчёта, перемещающейся по отношению к некоторой другой системе отсчёта, принятой за неподвижную.

Сосредоточенная сила – сила, приложенная в одной точке.

Среднее угловое ускорение – отношение приращения угловой скорости к приращению времени.

Среднее ускорение точки – отношение приращения вектора скорости к промежутку времени, в течение которого произошло это приращение.

Средняя скорость точки – отношение приращения дуговой координаты к промежутку времени, за которое произошло это приращение.

Средняя угловая скорость – отношение приращения угла поворота к промежутку времени, за который произошло это приращение.

Статика – раздел механики, изучающий общие свойства сил, правила замены сил другими силами, эквивалентными с точки зрения равновесия.

Тело отсчёта – тело по отношению к которому определяется положение в пространстве движущегося тела.

Теоретическая механика – наука, изучающая законы механического движения и механического взаимодействия, общие для любых тел.

Точка схода – точка пересечения системы сходящихся сил.

Трение – сопротивление возможному или действительному перемещению соприкасающихся тел, возникающему в месте их соприкосновения.

Упругое последствие – явление полного восстановления образцом своих первоначальных размеров при неограниченном увеличении времени.

Упругое тело – тело, которое после снятия внешней нагрузки восстанавливает свои размеры и форму, существовавшие до нагружения.

Усталость материала – явление разрушения материала детали под действием периодически меняющихся (циклических) напряжений.

Физический предел текучести – наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки.

Хрупкость – свойство твёрдых тел мгновенно разрушаться под действием внешних сил без заметной пластичной деформации.

Центральное растяжение (сжатие) – вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса (стержня) возникает только продольная (нормальная) сила.

Цикл напряжения – совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения.

Циклическая нагрузка – нагрузка, изменяющаяся по определённому закону.

Центр системы параллельных сил – точка, через которую проходит линия равнодействующей системы параллельных сил, приложенных в заданных точках, при любом изменении направления этих сил в пространстве.

Центр тяжести – точка, через которую при любом положении тела проходит линия действия его силы тяжести.

Чистый изгиб – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только изгибающие моменты.

Чистый сдвиг – напряжённое состояние, при котором на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения.

Эквивалентные системы – система сил, оказывающая на твёрдое тело одинаковые действия.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ. ПРОСТЫЕ ВИДЫ НАГРУЖЕНИЯ	5
1.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ	5
1.2. РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ	13
1.3. СДВИГ И КРУЧЕНИЕ	20
1.4. ИЗГИБ	30
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ	41
2.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ СЕЧЕНИЯ	41
2.2. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЙ	42
2.3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ	44
2.3. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ	46
3. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ	48
3.1. НАЗНАЧЕНИЕ ГИПОТЕЗ ПРОЧНОСТИ	48
3.2. ПЕРВАЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ	51

3.3. ВТОРАЯ И ТРЕТЬЯ ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ	52
3.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА ПРОЧНОСТИ	53
3.5. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ДРУГИХ ГИПОТЕЗАХ ПРОЧНОСТИ	54
4. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	56
4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	56
4.2. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЯ С ЛОМАНОЙ ОСЬЮ	57
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	59
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	60
ПРИЛОЖЕНИЯ	61
ТЕСТ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ	84
ГЛОССАРИЙ	89