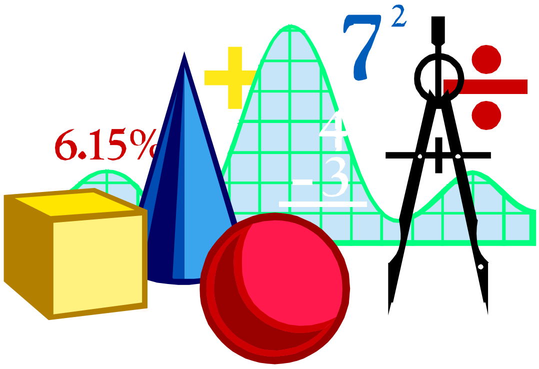
Б.И. ГЕРАСИМОВ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА: ЭКОНОМЕТРИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

ББК 65в6 я 73
УДК 330.115 (075.8)
Г14

Рецензент
Кандидат экономических наук, профессор
А.П. Романов

Герасимов, Б.И.
Г14 Экономико-математические модели погрешностей оценки качества: эконометрика : монография / Б.И. Герасимов. – 8-е изд. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 80 с. – 150 экз. – ISBN 978-5-8265-0844-2.

Рассмотрена методология построения экономико-математических моделей погрешностей оценки финансово-экономических измерений, средств и систем измерений по моделям погрешности, учитывающим систематические и случайные составляющие.
Предназначена для преподавателей и аспирантов вузов, а также научных работников.

ББК 65в6 я 73
УДК 330.115 (075.8)

ISBN 978-5-8265-0844-2

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

Б.И. ГЕРАСИМОВ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА: ЭКОНОМЕТРИКА

Монография

Издание восьмое

Тамбов
♦ Издательство ТГТУ ♦
2009

Научное издание

ГЕРАСИМОВ Борис Иванович

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА: ЭКОНОМЕТРИКА

Монография

Издание восьмое

Редактор Е.С. Мордасова
Инженер по компьютерному макетированию М.А. Филатова

Подписано в печать 25.10.2009
Формат 60 × 84 / 16. 4,65 усл. печ. л. Тираж 150 экз. С. 391.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета,
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Под мерой качества понимается отображение качества или его подмножеств (отдельных свойств или их групп) на множестве вещественных чисел [7, 24, 25]. Оценка качества, формирующая ценностные суждения об объекте оценки, базируется на результатах измерения качества. Эффективность оценки может быть увеличена за счет реализации ее операционной схемы с минимально достижимой погрешностью.

Основу критериев оценки качества составляют финансово-эконо-мические показатели (ФЭП), поэтому с позиций системного подхода при построении экономико-математических моделей необходимо разрабатывать методы измерений ФЭП, которые базируются на теоретических подходах метрологии с формализацией модели погрешности на основе современных информационных технологий. Основу модели погрешности составляют погрешности финансово-экономических измерений (глава 1) и средств измерений (приборов, устройств и т.д. – главы 2, 3) с учетом изучения объекта исследований в статике или динамике.

Снижение погрешностей приборов, все чаще используемых в качестве инструментария исследований, необходимо осуществлять посредством оптимального проектирования измерительных каналов приборов по различным критериям качества (глава 4).

В реальных условиях эксплуатации любых средств измерений финансово-экономических показателей погрешность определяется с учетом соотношений систематических и случайных составляющих погрешности средств измерений в соответствии с действующими стандартами и рекомендациями (глава 5).

Внедрение информационных технологий в экономику предопределяет развитие автоматических систем контроля показателей и определение погрешности их измерительных каналов (глава 6).

Методология экономико-математических методов оценки качества формируется в отдельный блок решения задач синтеза и входит в общую систему информационных технологий подготовки, проведения и анализа финансово-экономических исследований.

1. СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Погрешностью экономического измерения[*] называется отклонение значения величины, найденное путем ее измерения (результат измерения) от истинного значения измеряемой величины. Погрешность измерения определяется погрешностью средства измерения, применяемым методом измерения, свойствами измеряемой величины и условиями проведения измерений. Погрешности измерений делят на статические и динамические. В соответствии с ГОСТ 16263–70 статические погрешности измерений подразделяют на абсолютные, относительные, систематические, случайные, грубые, инструментальные и погрешность метода измерения.

Абсолютной погрешностью измерения Δ называют погрешность измерения, выраженную в единицах измеряемой величины и определяют по формуле

$$\Delta x = x_{\text{изм}} - x,$$

где $x_{\text{изм}}$ – значение, полученное при измерении; x – истинное значение измеряемой величины.

Относительной погрешностью измерения $\Delta\bar{x}$ называют отношение Δx к x и выражают, как правило, в процентах.

Грубой погрешностью измерения называют погрешность, существенно превышающую ожидаемую при данных условиях.

Инструментальной погрешностью измерения называют составляющую погрешность, зависящую от погрешности применяемых средств измерений, технических средств, используемых при измерениях и имеющих нормированные метрологические характеристики.

Погрешностью метода измерений называют составляющую погрешность, происходящую от несовершенства метода измерения, который характеризуется совокупностью приемов использования принципов[**] и средств измерений.

Рассмотрим более подробно случайные, систематические и динамические погрешности измерений, которые характеризуют качество измерений.

1.2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Случайной погрешностью измерения $\dot{\Delta}$ называется составляющая погрешности, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Основными причинами, их вызывающими, являются:

1) наличие случайных погрешностей у применяемых приборов;
2) несоответствие между моделью объекта измерения и самим реальным объектом;
3) колебания неинформативных параметров процесса измерения;
4) ограниченные возможности чувств экспериментатора.

Случайные погрешности, подчиняющиеся статистическим вероятностным закономерностям, проявляются в том, что повторные измерения одной и той же величины в одних и тех же условиях приводят к результатам, отличающимся один от другого.

Основной характеристикой $\dot{\Delta}$ служит закон, устанавливающий соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления. Поскольку $\dot{\Delta}$ является непрерывной случайной величиной, то указанная характеристика называется плотностью распределения (плотностью вероятностей) $\rho(\dot{\Delta})$. Геометрически $\rho(\dot{\Delta})$ изображается кривой, форма которой зависит от характера распределения (рис. 1.1). Значение функции $\rho(\dot{\Delta})$ позволяет, в частности, оценить вероятность попадания погрешности $\dot{\Delta}$ в заданное поле допусков (на рис. 1.1 – заштрихованная площадь)

$$\rho\left(\dot{\Delta}_{\text{н}} < \dot{\Delta} < \dot{\Delta}_{\text{в}}\right) = \int_{\dot{\Delta}_{\text{н}}}^{\dot{\Delta}_{\text{в}}} \rho\left(\dot{\Delta}\right) d\dot{\Delta},$$

где $\dot{\Delta}_{\text{н}}$ и $\dot{\Delta}_{\text{в}}$ – нижняя и верхняя границы поля допусков $\dot{\Delta}$.

---

[*] В дальнейшем изложении для краткости – измерения.

[**] Принцип измерений определяется совокупностью физических явлений, на которых основаны измерения.

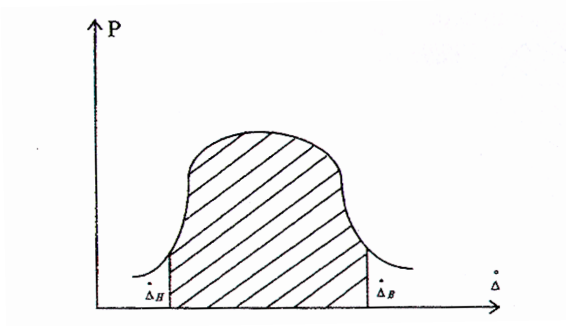


Рис. 1.1. Кривая плотности распределения

В практике измерений встречаются различные законы распределения $\dot{\Delta}$, однако наибольшее значение имеет нормальный закон распределения $\rho(\dot{\Delta})$ (закон Гаусса). Объясняется это тем, что часто $\dot{\Delta}$ представляет собой сумму большого числа независимых и слабо зависимых случайных величин. По центральной предельной теореме такая сумма погрешностей имеет нормальный закон распределения, хотя законы распределения отдельных слагаемых могут отличаться от нормальных. Закон распределения суммы тем ближе к нормальному, чем больше число слагаемых и чем равномернее их вклад [4].

Формула, определяющая плотность вероятностей $\dot{\Delta}$ распределенной по нормальному закону, имеет вид:

$$\rho(\dot{\Delta}) = \left(1/\sqrt{2\pi}\,\sigma\right)\exp\left[\frac{\left(\dot{\Delta} - M\{\dot{\Delta}\}\right)^2}{2\sigma^2}\right],$$

где $M(\dot{\Delta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Delta}_{\rho}(\dot{\Delta})d\dot{\Delta}$ – математическое ожидание, определяющее ее среднее значение; $\int_{-\infty}^{\infty}[\dot{\Delta} - M\{\dot{\Delta}\}]^2 \rho(\dot{\Delta})d\dot{\Delta}$ – дисперсия $\dot{\Delta}$, характеризующая степень разброса $\dot{\Delta}$ относительно среднего значения.

Из анализа формулы (1.1) видно, что кривая Гаусса симметрична относительно $M\{\dot{\Delta}\}$, а максимальная $\rho(\dot{\Delta}) = 1/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$ (рис. 1.2); причем с увеличением σ увеличивается вероятность малых и уменьшается вероятность больших случайных погрешностей (рис. 1.3).

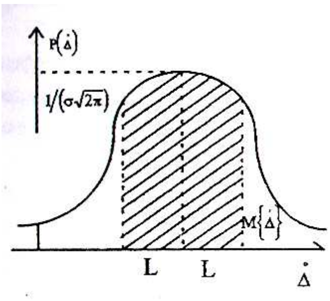


Рис. 1.2. Кривая нормального закона распределения случайных погрешностей

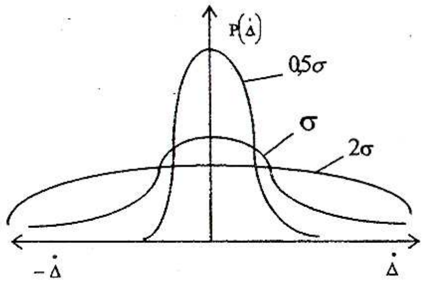


Рис. 1.3. Кривые нормального закона распределения случайных погрешностей, соответствующие трем значениям σ

В ряде практических случаев необходимо знать вероятность $\Phi(l)$ того, что погрешность $\dot{\Delta}$ не будет отличаться от своего среднего значения больше, чем на величину $L = l\sigma$ (на рис 1.2 – заштрихованная площадь); причем, чем больше l, тем ближе $\Phi(l)$ к единице. Для нормального закона распределения $\dot{\Delta}$ [4, 19]

$$\Phi(l) = \int_{M\{\dot{\Delta}\}-l\sigma}^{M\{\dot{\Delta}\}+l\sigma} \rho(\dot{\Delta})d\dot{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l}^{l} e^{-1/2}\,dl.$$

Значения $\Phi(l)$, рассчитанные по формуле, даны в табл. 1.1.

1.1. Значения функции Φ(*l*)

l	Φ(*l*)	*l*	Φ(*l*)	*l*	Φ(*l*)	*l*	Φ(*l*)
1,00	0,68	1,23	0,78	1,56	0,88	2,05	0,96
1,04	0,70	1,28	0,80	1,65	0,90	2,17	0,97
1,08	0,72	1,34	0,82	1,75	0,92	2,33	0,98
1,13	0,74	1,41	0,84	1,88	0,94	2,58	0,99
1,18	0,76	1,48	0,86	1,96	0,95		

В практике измерений число проводимых опытов для определения погрешностей конечно, поэтому характеристики $M(\dot{\Delta})$, да и сам закон распределения получают в виде оценок, которые сами являются случайными величинами. Различают состоятельные, несмещенные и эффективные оценки [4]. Оценка называется состоятельной, если при ограниченном увеличении числа опытов вероятность того, что $\dot{\Delta}^* = \dot{\Delta}$, где $\dot{\Delta}^*$ – оценка погрешности, которая стремится к единице. Если среднее значение оценки $M\{\dot{\Delta}^*\}$ равно истинному значению $\dot{\Delta}$, то оценка называется несмещенной; при этом, если закон распределения последней имеет минимальную дисперсию, то такая оценка называется эффективной [4, 19].

Оценку нормального закона распределения наиболее часто осуществляют с помощью критерия Пирсона χ^2 (хи-квадрат) по следующей схеме.

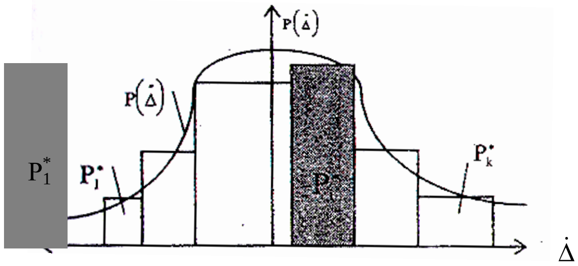


Рис. 1.4. Кривая экспериментального закона распределения

1. Вычисляют χ^2 по формуле

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{k}\left(\rho_i^* - \rho_i\right)^2 \Big/ \rho_i = \sum_{i=1}^{k}(m_i - n\rho_i)^2 \Big/ n\rho_i; \left|\sum_{i=1}^{k}\rho_i^* = 1,\right.$$

где $\rho_i = m_i/n$ и ρ_i^* – теоретическая вероятность и ее оценка; τ_i – число благоприятных опытов; k – число интервалов разбиения $\dot{\Delta}$; n – общее число опытов (рис. 1.4).

2. Определяют число степеней свободы $r = k - \nu$, где ν – число вычисленных параметров кривой $\rho(\dot{\Delta})$.3. По табл. 1.2 [4] определяют вероятность того, что величина χ^2 за счет чисто случайных причин может превысить значение, вычисленное в п. 1.

1.2. Зависимость критерия χ^2 от *r* и ρ

r	Значения χ^2 при ρ, равных						
	0,99	0,95	0,80	0,50	0,20	0,05	0,01
1	0,000	0,004	0,064	0,455	1,642	3,84	6,64
3	1,115	0,352	1,005	2,37	4,64	7,82	11,34
6	0,872	1,635	3,07	5,35	8,56	12,59	16,81
9	2,09	3,32	5,38	8,34	12,24	16,92	21,7
12	3,57	5,32	7,81	11,34	15,81	21,0	26,2
15	5,23	7,26	10,31	14,34	19,31	25,0	30,6
18	7,02	9,39	12,86	17,34	22,8	28,9	34,8
21	8,90	11,59	15,44	20,3	26,2	32,7	38,9
24	10,86	13,85	18,06	23,3	29,6	36,4	43,0
27	12,88	16,15	20,7	26,3	32,9	40,1	47,0
30	14,95	18,49	23,4	29,3	36,2	43,8	50,9

Примечание: ρ – вероятность того, что расчетная величина χ^2 превышает значение χ^2, приведенное в таблице.

4. Если эта вероятность мала (например, меньше 0,20), то гипотезу о том, что случайные погрешности $\dot{\Delta}$ подчиняются нормальному закону распределения $\rho(\dot{\Delta})$ следует отбросить. В противном случае принятая гипотеза не противоречит данным экономических измерений.

В практике измерений гипотезу о нормальности небольшой группы наблюдений (n < 50) проверяют с помощью двух критериев [19].

Критерий I. По данным измерений $\dot{\Delta}_1, ..., \dot{\Delta}_n$ вычисляют параметр d по формуле

$$d = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \dot{\Delta}_i - \overline{\dot{\Delta}}^* \right| \right) \Big/ nS^*,$$

где $S^* = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{\Delta}_i - \overline{\dot{\Delta}}^* \right)^2 \right) \Big/ n}$; $\overline{\dot{\Delta}}^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{\Delta}_i \right) \Big/ n$.

Далее выбирают уровень значимости критерия q_1 и по табл. 1.3 [4] находят $d_{q_1/2}$ и $d_{1-q_1/2}$.

1.3. Значения *q*-процентных точек распределения параметра *d*

Число измерений	при q / 2, %			при (1 – q) / 2, %		
	1	5	10	90	95	99
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,8570	0,7530	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7470	0,7216
46	0,8622	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291

Принимается, что гипотеза о нормальности по критерию I не отвергается, если $d_{1-q_1/2} \le d \le d_{q_1/2}$, а в противном случае отвергается.

Критерий II. Данный критерий является дополнительным и вводится для проверки «концов» распределения.

Принимается, что гипотеза о нормальности по критерию II не отвергается, если не более m разностей $\left| \dot{\Delta}_1 - \overline{\dot{\Delta}}^* \right|$ превзошли $z_{\alpha/2}\sigma$, где $z_{\alpha/2}$ – верхняя $100\alpha/2$-процентная квантиль нормированной функции Лапласа Ф(l); при этом α определяется по n и уровню значимости q как корень уравнения

$$1 - \sum_{k=0}^{m} C_n^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k} = q.$$

Для нахождения α по заданным n, q и m = 1 или 2 составлена табл. 1.4 [4, 19].

1.4. Значения α из уравнения $1 - \sum_{k=0}^{m} C_n^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k} = q$

n	m	Уровень значимости q, %		
		1	2	3
10	1	0,98	0,98	0,96
11 – 14	1	0,99	0,98	0,97
15 – 20	1	0,99	0,99	0,98
21 – 22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24 – 27	2	0,98	0,98	0,97
28 – 32	2	0,99	0,98	0,97
33 – 35	2	0,99	0,98	0,98.
36 – 49	2	0,99	0,99	0,98

При 10 < n < 20 принимают m = 1. Если 50 > $n \ge$ 20, то m = 2. Если число разностей $\left| \dot{\Delta}_1 - \overline{\dot{\Delta}}^* \right|$ больших $z_{\alpha/2}\sigma$ превышает m, то гипотеза о нормальности отвергается.

Гипотеза о нормальности принимается, если для проверяемой группы данных выполняются оба критерия. Уровень значимости составленного критерия $q \le q_1 + q_2$, где q_1, q_2 – уровни значимости критериев I и II.

Обычно применяемые на практике оценки математического ожидания и дисперсии погрешности $\dot{\Delta}$ имеют вид:

$$M^*\{\dot{\Delta}\} = \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{\Delta}_i\right) \Big/ n; \ \sigma^{*2}\{\dot{\Delta}\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \left[\dot{\Delta}_i - M^*\{\dot{\Delta}\}\right]^2\right\} \Big/ (n-1),$$

где n – число измерений.

При этом

$$\sigma_{M\{\dot{\Delta}\}} \approx \sigma^*\{\dot{\Delta}\} / \sqrt{n}; \ \sigma_{\sigma^*\{\dot{\Delta}\}} \approx \sigma^*\{\dot{\Delta}\} / \sqrt{2n}.$$

Однако использованная в приведенных формулах замена истинных значений среднеквадратичного отклонения его оценкой может привести при малом числе опытов к существенным ошибкам. Для их устранения можно считать [4, 19], что при нормальном распределении $\dot{\Delta}$ случайная погрешность

$$t = \sqrt{n}\left[M^*\{\dot{\Delta}\} - M\{\dot{\Delta}\}\right] / \sigma^{*2}\{\dot{\Delta}\}$$

подчиняется закону распределения Стьюдента (табл. 1.5) [4].

1.5. Значения ε, удовлетворяющие равенству $2\int_0^{\varepsilon} S(t)dt = P_{\varepsilon}$

r	Значения ε в при P_{ε}, равных						
	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99
1	0,158	0,510	1,000	1,936	6,31	12,71	63,7
6	0,131	0,404	0,718	1,134	1,943	2,45	4,71
11	0,129	0,396	0,697	1,088	1,796	2,20	3,11
16	0,128	0,392	0,690	1,071	1,746	2,12	2,92
21	0,127	0,391	0,686	1,063	1,721	2,08	2,83
26	0,127	0,390	0,684	1,058	1,706	2,06	2,78
40	0,126	0,388	0,681	1,050	1,684	2,02	2,70
∞	0,126	0,385	0,674	1,086	1,645	1,96	2,58

Примечание: P_{ε} – вероятность того, что случайная величина t, распределенная по закону Стьюдента $S(t)$ с r степенями свободы, не превосходит ε по абсолютному значению.

В этом случае для заданного значения доверительной вероятности P_{ε} и числа степеней свободы $r = n - 1$ можно найти величину доверительного интервала ε для величины $M\{\dot{\Delta}\}$.

При расчете $\dot{\Delta}$ экономических измерений необходимо также обнаруживать с помощью известных критериев 3σ, Шовине, Романовского случайные грубые погрешности, явно искажающие результаты измерений. Если измерения имеют бóльшие $\dot{\Delta}$, то необходимо удостовериться в том, что получаемые результаты статистически подконтрольны и устойчивы, т.е. группируются вокруг одного и того же центра $M\{\dot{\Delta}\}$ и имеют одну и ту же дисперсию $\sigma^2\{\dot{\Delta}\}$. Более подробно с данными вопросами можно познакомиться в [19].

1.3. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Систематической погрешностью экономических измерений называется составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины; последние, в свою очередь, подразделяют на прогрессирующие, периодические и изменяющиеся по сложному закону. Источниками систематических погрешностей могут быть три компонента измерения: метод измерений, средства измерений и экспериментатор. Соответственно этому принято различать систематические погрешности методические, инструментальные и личные [4, 19].

Методические погрешности обусловлены следующими причинами: несовершенством метода измерения; ограниченной точностью формул; влиянием средств измерений на объект, свойство которого измеряется; пороговым несоответствием модели и объекта измерения.

Инструментальные систематические погрешности – погрешности, вызванные несовершенством средств измерений (неточность градуировки шкалы измерительного прибора, дополнительные и динамические погрешности и т.д.).

Личные систематические погрешности – систематические погрешности, связанные с индивидуальными особенностями экспериментатора.

В практике измерений причины проявления для систематических погрешностей типичны и поэтому наиболее существенны постоянные погрешности [4, 19], для устранения которых применяют следующие методы:

1) замещения, обусловленные тем, что измеряемая величина заменяется известной величиной так, что при этом в состоянии и действии всех используемых средств измерений не происходит никаких изменений;

2) противопоставления, при котором измерение выполняется с двумя наблюдениями, приводимыми так, чтобы причина постоянной погрешности оказывала разные, но известные по закономерности воздействия на результаты наблюдений;

3) компенсации погрешности по знаку, суть которого состоит в том, что измерение проводится с двумя наблюдениями, выполненными так, чтобы постоянная систематическая погрешность в результат каждого из них входила с разными знаками.

Для обнаружения и устранения изменяющихся систематических погрешностей используют статистические методы, в частности методы Стьюдента, Фишера и Аббе, а также корреляционный и регрессионный анализы [24].

При изучении систематических погрешностей на практике обычно решаются две задачи: нахождение поправок методами корреляционного и регрессивного анализов; оценивание статистическими методами границ систематических погрешностей с учетом вида измерения (прямые, косвенные, совокупные или совместные) по всем ее составляющим.

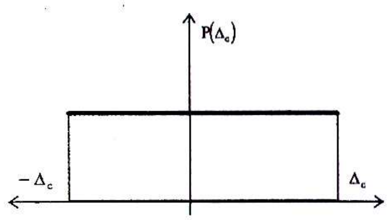


Рис. 1.5. Кривая равномерного распределения систематической погрешности Δ_c

При решении второй задачи элементарные составляющие систематической погрешности рассматривают как случайные величины, распределенные по равномерному закону (рис, 1.5), а далее производят статистическое суммирование элементарных погрешностей путём построения композиции их распределения гистограмм [4, 19].

1.4. ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Прямым называется измерение, при котором искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных.

Из анализа оценивания погрешностей прямых измерений [4, 21] можно выделить два варианта представления результата измерения: раздельное указание оценок границ систематической погрешности и среднего квадратичного отклонения результата измерения; указание оценки суммарной погрешности результата измерения.

Раздельное указание составляющих возможно лишь для статистических измерений с целью выявления $\dot{\Delta}$, причем, расчет погрешностей производится в следующей последовательности:

1. Определяются оценки измеряемой величины по среднему арифметическому значению и среднему квадратическому отклонению наблюдений по формулам:

$$x^* = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \Big/ n, \quad \sigma = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - x^*)^2 \right] \Big/ (n-1)},$$

где n – число измерений величины x.

2. Вычисляется оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического

$$\sigma_{x*} = \sigma / \sqrt{n}.$$

3. Задаются значением надежности среднего результата α и определяют коэффициент Стьюдента $t_\alpha(n)$ для заданной надежности α и числа наблюдений n (табл. 1.6 [19]).

1.6. Значения *q*-процентных точек распределения Стьюдента

Число степеней свободы, $k = n - 1$	Уровень значимости $q = (1 - \alpha)\cdot 100$ %			Число степеней свободы $k = n - 1$	Уровень значимости $q = (1 - \alpha)\cdot 100$ %		
	10	5	1		10	5	1
1	6,31	12,71	63,66	14	1,76	2,14	2,98
2	2,92	4,3	9,92	16	1,75	2,12	2,92
3	2,35	3,18	5,84	18	1,73	2,10	2,88
4	2,13	2,78	4,60	20	1,72	2,09	2,84
5	2,02	2,57	4,03	22	1,72	2,07	2,82
6	1,94	2,45	3,71	24	1,71	2,06	2,80
7	1,90	2,36	3,50	26	1,71	2,06	2,78
8	1,86	2,31	3,36	28	1,70	2,05	2,76
9	1,83	2,26	3,25	30	1,70	2,04	2,75
10	1,81	2,23	3,17	∞	1,64	1,96	2,58
12	1,78	2,18	3,06				

4. Находятся границы доверительного интервала (абсолютная случайная погрешность результата измерений) $\Delta x = t_\alpha(n)\sigma_{x*}$. Если эта величина окажется сравнимой с величиной погрешности измерительного прибора, то в качестве границы доверительного интервала следует взять величину:

$$\Delta x = \sqrt{t_\alpha^2(n)\sigma_{x*}^2 + (K_\alpha / 3)^2 \delta^2}; K_\alpha = t_\alpha(\infty),$$

где δ – величина погрешности прибора.

5. Оценивается относительная случайная погрешность прямых измерений

$$\bar{\varepsilon} = [\Delta x / x*] \cdot 100\%.$$

6. Определяются доверительные границы постоянной систематической погрешности результата измерений в зависимости от выбранного коэффициента надежности α (табл. 1.7 [19])

$$\theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2},$$

где m – число элементарных систематических погрешностей прямых измерений, которые имеют равномерное распределение.

1.7. Значения коэффициента *k* в зависимости от числа слагаемых систематических погрешностей и доверительной вероятности

Число слагаемых, m	Значение k при доверительной вероятности α			
	0,90	0,95	0,99	0,9973
2	0,97	1,10	1,27	1,34
3	0,96	1,12	1,37	1,50
4	*	1,12	1,41	1,58
5	*	*	1,42	1,61
6	*	*	*	1,64
...	...	...	...	...
	0,95	1,13	1,49	1,73

* – коэффициент k не вычисляется, так как θ при данном n выходит за пределы крайнего интервала.

7. Оценивается граница общей погрешности $\Delta = \Delta x + \theta$.

8. Окончательный результат измерений записывается в виде

$$x = x^* \pm \Delta.$$

При обыкновенных прямых измерениях в отличие от статистических погрешности средств измерений не выявляются в ходе измерения, но их надо учитывать при расчете погрешности результата измерения; причем, метод измерения должен быть изучен и методические погрешности либо заранее устранены, либо должно быть известно, как их устранить [4, 19].

Оценка прямых измерений с точным оцениванием погрешностей производится по суммарной погрешности результата измерения:

$$\Delta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Delta_{c_i}^2 + \dot{\Delta}^2},$$

где Δ_{c_i} – составляющая систематической погрешности прямых измерений; $\dot{\Delta}$ – случайная погрешность прямых измерений, имеющая равномерное распределение.

Оценка обыкновенных прямых измерений с приближенным оцениванием погрешностей рассчитывается в виде оценки границ погрешностей

$$H_\Sigma = k\sqrt{\delta_n^2\sum_{j=1}^{m}\delta_j^2},$$

где H_Σ – граница суммы равномерно распределенных центрированных случайных величин; $\delta_п$ – предел допускаемой основной погрешности средства измерения; δ_j – предел j-й дополнительной погрешности измерений.

1.5. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Косвенным называется измерение, при котором искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям, причем, исходными данными являются ряды результатов прямых измерений аргументов, входящих в математическую функцию связи. Эти зависимости предварительно обрабатываются по методике, изложенной в п. 1.4.

При косвенных измерениях для вычисления погрешностей исходят из предположений [4]. Допустим, что искомая величина y определяется непосредственно измеряемыми величинами – аргументами x_1, x_2, ... , x_i, функционально связана с ними

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n), \quad i = \overline{1,n} \tag{1.3}$$

и аргументы не коррелированы.

Средняя квадратичная погрешность функции σ_y при одинаковой надежности всех измерений будет равна:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2}, \tag{1.4}$$

где $\partial y/\partial x_i$ – частная производная функции по x_i; σ_{x_i} – средняя квадратическая погрешность непосредственно измеряемой величины x_i.

Подставляем в формулу (1.3) выражение (1.4), находим абсолютную погрешность Δy, определяющую доверительный интервал для значения функции:

$$\Delta y = t_\alpha(n)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}t_\alpha(n)\sigma_{x_i}\right)^2}.$$

Учитывая $t_\alpha(n)\sigma_{x_i} = \Delta x_i$, получаем

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2},$$

где Δx_i – абсолютная погрешность непосредственно измеряемой величины.

Относительная погрешность $\delta y = \frac{\Delta y}{y}$ может быть вычислена в общем случае по формуле

$$\delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\ln y\right)^2 \Delta x_i^2}. \tag{1.5}$$

При расчете погрешностей косвенных измерений необходимо учитывать, что, если случайные погрешности результата измерений меньше, чем погрешность измерительного прибора, то за погрешность окончательного результата серии измерений принимается приборная погрешность эксперимента. В этом случае последняя определяется по формуле (1.5), при этом вместо Δx_i ставят или половину цены наименьшего деления (в некоторых случаях цену деления) применяемых измерительных приборов или абсолютную погрешность прибора, определяемую по его классу точности.

В практике измерений [4, 19], когда аргументы функции (1.3) коррелированы между собой, ее обычно линеаризуют и представляют в виде:

$$y \approx f\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i;\; i = \overline{1, n}, \tag{1.6}$$

где $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$ – математические ожидания аргументов x_1, x_2, ... , x_3, ... , x_n.

Математическое ожидание функции (1.6) $- m_y = f\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}\right)$, а дисперсия

$$D_y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 D(x_i) + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)k_{x_i x_j};\; i = \overline{1, n},$$

где $D(x_i)$ – дисперсия случайной величины x_i (аргумент); $k_{x_i x_j}$ – корреляционный момент величин x_i и x_j; $i < j$ – обозначает, что суммирование распространяется на все возможные попарные сочетания случайных величин (x_1, x_2, ... , x_n).

1.6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Процесс измерения можно обобщенно представить в виде схемы [22], приведенной на рис. 1.6.

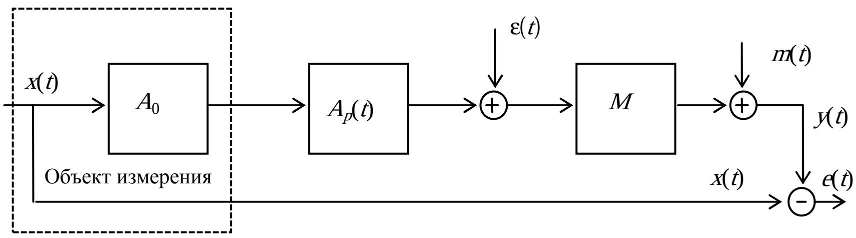


Рис. 1.6. Схема процесса измерения:
$x(t)$ – изменяющаяся во времени измеряемая величина; $\varepsilon(t)$ – аддитивные погрешности; A_o – оператор, описывающий искажение измеряемой величины вследствие погрешностей метода измерения;
A_p – оператор, описывающий преобразование величины, которая действует на чувствительный элемент конкретного средства измерения, применяемого в эксперименте; M – оператор масштабирования;
$m(t)$ – погрешность процедуры сравнения с мерой; $y(t)$ – результат измерения;
$e(t) = y(t) - x(t)$ – динамическая погрешность

Погрешность $e(t)$ в общем случае определяется по выражению:

$$e(t) = A_p[x(t) + e_0(t)] + \varepsilon(t) - x(t),$$

где $e_0(t)$ – погрешность, вызванная отличием оператора A_0 от единичного, причем $e(t)$ существенным образом зависит от оператора A_p, например, в случае, если A_p – линейный стационарный оператор, то расчет $e(t)$ производится по формуле:

$$e(t) = \int_0^t h(t-\tau)[x(\tau) + e_0(\tau)]d\tau + \varepsilon(t) - x(t) =$$

$$= \int_0^t h(t-\tau)e_0(\tau)d\tau + \varepsilon(\tau) + \int_0^t x(\tau)[h(t-\tau) - \delta(t-\tau)]d\tau,$$

где $h(t)$ – переходная характеристика средства измерения; $\delta(t)$ – дельта-функция.

На практике реализацию $x(t)$ представляют двумя способами: детерминированным и стохастическим. По первому способу наибольшее распространение получила форма представления $x(t)$ в виде:

$$x(\bar{a}, t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(t) = \bar{a}^{\mathrm{т}} \bar{\varphi}, \quad \bar{a} \in V_{\bar{a}},$$

где $\bar{a}$ – вектор варьируемых параметров; $V_{\bar{a}}$ – допустимое замкнутое множество параметров; $\bar{\varphi} = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)]^{\mathrm{т}}$ – базисные функции; т – знак транспонирования.

По второму способу необходимые сведения о величине $x(t)$ могут быть получены из анализа стохастического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в форме Коши, либо путем задания характеристик стационарного случайного процесса – автокорреляционной функции $R_x(\tau)$ или спектральной плотности

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

В качестве характеристики погрешности $e(t)$ определяют дисперсию σ_e^2, которая складывается из суммы дисперсий:

1) σ_x^2, зависящей от свойств измеряемой величины и вызванной инерционностью средства измерения;

2) $\sigma_{e_0}^2$, отфильтрованной средством измерения погрешности $e_0(t)$;

3) σ_ε^2, вызванной совместным действием инерционности средства измерения и погрешности $\varepsilon(t)$;

4) σ_e^2, аддитивной погрешности $\varepsilon(t)$, характеристики которой нормируются в составе характеристик статических погрешностей в нормальных условиях.

Перечисленные дисперсии погрешности измерений не всегда могут быть получены, поэтому производится оценка σ_e^2:

а) при изменении измеряемой величины во временной области

$$\sigma_e^2 \le \sigma_x^2 (K_0 - 1)^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{e_0}^2 (K_0 - 1)^2,$$

где $K_0 \approx \frac{1}{2}\int_0^\infty |h_{\mathrm{р}}(\tau) - h_{\mathrm{и}}(\tau)| d\tau$; $h_{\mathrm{и}}(\tau)$; $h_{\mathrm{р}}(\tau)$ – идеальная и реальная переходные характеристики средства измерения;

б) при изменении измеряемой величины в частотной области

$$\sigma_e^2 \le M^2\sigma_x^2 + (A_{\max}/\pi)\int_{\omega_*}^{\omega^*} \sin^2[\varphi(\omega)/2] S_x(\omega) d\omega + \sigma_{e_0}^2 + \sigma_\varepsilon^2,$$

где $M = |1 - A(\omega)|$ – неравномерность амплитудно-частотной характеристики $A(\omega)$ средства измерения в рабочей полосе частот $[\omega_*, \omega^*]$; $\varphi(\omega)$ – фазо-частотная характеристика средства измерения.

В случае применения в измерительном процессе (рис. 1.6) средства измерения, параметры которого изменяются во времени, с математической моделью вида

$$y(t) = \int_0^t k(\tau) h(t-\tau) x(\tau) d\tau + \varepsilon(t),$$

где $k(\tau)$ – изменяющийся во времени коэффициент усиления средства измерения, σ_e^2 определяется по формуле:

$$\sigma_e^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_x^2(k_{\mathrm{р}} - 1) + \sigma_k^2 k_{\mathrm{р}}^2 (m_x^2 + \sigma_x^2),$$

где $k_р$ – реальный коэффициент усиления средства измерения; σ_k^2 – дисперсия коэффициента усиления; τ_x – математическое ожидание измеряемого процесса.

На практике параметры средства измерения

$$\bar{a} \in V_{\bar{a}}, \quad \bar{b} \in V_{\bar{b}},$$

где $\bar{a}, \bar{b}$ – векторы варьируемых параметров средства измерения; $V_{\bar{a}}, V_{\bar{b}}$ – допустимые замкнутые множества параметров вида

$$V_{\bar{a}} = [a_*, \; a^*], \quad V_{\bar{b}} = [b_*, \; b^*],$$

поэтому

$$\sigma_e^2 \le \max \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| k(\bar{a}, \bar{b}, j\omega) - 1 \right|^2 S_x(\omega) d\omega + \sigma_\varepsilon^2.$$

Более подробно с определением динамических погрешностей измерений можно познакомиться в [6, 18].

2. СТАТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБОРОВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ И КОНТРОЛЯ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Измерительным прибором (или просто прибором*) называют средство измерений, служащее для выработки сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия наблюдателем. По форме выдачи информации приборы подразделяют на аналоговые, показания которых являются непрерывной функцией измеряемой величины, и цифровые, показания которых являются дискретными и представляются в цифровой форме, а по способу отсчета – на показывающие, самопишущие, комбинированные, суммирующие и интегрирующие.

Показывающие – это такие приборы, у которых значение измеряемой величины указывается на отсчетном устройстве. *Самопишущие (регистрирующие) приборы* снабжают приспособлениями, автоматически записывающими на бумажной ленте (или диске) текущее значение измеряемой величины во времени. *Комбинированные приборы* одновременно показывают и регистрируют измеряемую величину. В *суммирующем приборе* показания функционально связаны с суммой двух или нескольких величин, подводимых к нему по различным каналам. В *интегрирующем приборе* подводимая величина подвергается интегрированию во времени или другой независимой переменной.

2.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Погрешностью измерительного прибора является разность между его показанием и истинным значением измеряемой величины. Погрешности приборов можно классифицировать по различным признакам: условиям и причинам появления погрешностей; единице измеряемой величины; характеру связи между величинами погрешности и измеряемой величиной; закономерности появления погрешности при многократных испытаниях прибора.

По условиям появления погрешности разделяются на статистические и динамические. *Статистические погрешности* появляются при установившемся режиме измерения, когда измеряемая величина и показания прибора сохраняют постоянные значения. *Динамические погрешности* возникают при неустановившемся режиме работы.

В зависимости от единицы измерения различают абсолютные, относительные и приведенные погрешности.

Абсолютная погрешность прибора выражается в единицах измеряемой величины x или выходного сигнала y прибора и равна разности между показанием прибора $x_п$ и истинным значением измеряемой величины x: $\Delta = = x_п - x$. Однако, поскольку истинное значение измеряемой величины остается практически неизвестным, вместо него используют действительное значение измеряемой величины x_0 и $\Delta = x_п - x_0$, а Δy, приведенная к его выходу

$$\Delta y = y - y_0,$$

где $y = f(x, \bar{a})$, $x \in [x_*, \; x^*]$, $\bar{a} \in V_{\bar{a}}$ – фактический выходной сигнал прибора, соответствующий его реальной статической характеристике; $[x_*, \; x^*]$ – диапазон измерения x, ограниченный минимальным x_* и максимальным x^* значениями; $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ – вектор варьируемых параметров прибора; n – число параметров; $V_{\bar{a}}$ – замкнутое допустимое множество параметров; $y_0 = f(\bar{a}, x_0)$ – идеальный выходной

* В общем случае – средство измерения

сигнал прибора, соответствующий его идеализированной (заданной) статической характеристике; $\bar{a} \in V_{\bar{a}}$; $x_0 \in [x_{0*}, x_0^*]$.

При фиксированном значении измеряемой величины $\tilde{x} \in [x_*, x^*]$ в реальных условиях происходят изменения выходного сигнала прибора на величину Δy, вызванные такими источниками погрешностей, как неконтролируемые изменения температуры, давления и влажности окружающей среды, колебание питающих напряжений, воздействие дополнительных электрических и магнитных полей и пр. Рассматривая малое приращение выходного сигнала Δy, вызванное перечисленными факторами, как дифференциал функции $y = f(x, \bar{a})$; $x \in [x_*, x^*]$; $\bar{a} \in V_{\bar{a}}$ нетрудно получить приближенную связь между погрешностями Δ и Δy:

$$\Delta y = \frac{\partial y(x, \bar{a})}{\partial x}\Delta = S\Delta,$$

где $S = \partial y(x, \bar{a}) / \partial x$ – чувствительность прибора.

Относительная погрешность прибора равна отношению Δ или Δ_y к действительному значению x_0 или выходного сигнала прибора y_0:

$$\delta_x = \Delta / x_0 = \Delta(x_п - \Delta) = \Delta \Big/ \left[x_п - \left(1 - \frac{\Delta}{x_п}\right)\right] \approx \Delta / x_п;\ \ \Delta / x_п << 1,$$

$$\delta_y = \Delta y / y_0 \approx \Delta y / y;\ \ \Delta y / y_0 << 1.$$

Приведенная погрешность – отношение абсолютной погрешности к нормирующему значению x_N: $\delta_п = \Delta / x_N$. Чаще всего $x_N = x^* - x_*$. Величины δ_x, δ_y, $\delta_п$ обычно выражают в процентах.

В экономике применяют приборы для измерения лишь с определенной заранее заданной точностью – основной погрешностью, допускаемой нормами. Если прибор работает в условиях, отличных от нормальных (температура окружающего воздуха $t = 20 \pm 5$ °С, давление $p = 101{,}325 \pm 3{,}3$ кПа), то возникает дополнительная погрешность, увеличивающая общую погрешность прибора.

Обобщенной характеристикой прибора в статическом режиме является класс точности. При изменении измеряемой величины x величина погрешности может изменяться:

$$\Delta = F(x),$$

где $F(x)$ – некоторая функция измеряемой величины.

В зависимости от характера функции $F(x)$ погрешности делятся на аддитивные и мультипликативные. В соответствии с причинами появления выделяют методические, инструментальные и субъективные погрешности; по закономерностям появления при многократных испытаниях прибора различают погрешности систематические и случайные (см. гл. 1).

В большинстве практически важных случаев статическую погрешность прибора Δ можно представить в виде:

$$\Delta = \Delta_с + \dot{\Delta},$$

где $\Delta_с$ – постоянная или медленно изменяющаяся величина – систематическая погрешность; $\dot{\Delta}$ – случайная погрешность, среднее значение которой равно нулю.

Полученное соотношение определяет модель погрешности прибора. Погрешность Δ, как сумма постоянной и случайной величин, является случайной величиной; поэтому для полной и объективной характеристики точностных свойств приборов необходимо пользоваться аппаратом теории случайных величин – теорией вероятностей (см. гл. 1).

Рассмотрим более подробно аддитивные и мультипликативные погрешности, класс точности и вариацию прибора, шумы и погрешности градуировки приборов, а также вопросы нормирования статических погрешностей измерительных приборов.

2.2. АДДИТИВНЫЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Основной характеристикой прибора, работающего в статическом режиме, является статическая характеристика $y = f(x, \bar{a})$; $\bar{a} \in V_{\bar{a}}$, $x \in [x_*, x^*]$. Аналитическое выражение статической характеристики называют функцией преобразования, которая может быть также задана в виде таблицы, графика или алгоритма, причем при ее изменении возникают аддитивные и мультипликативные погрешности [5].

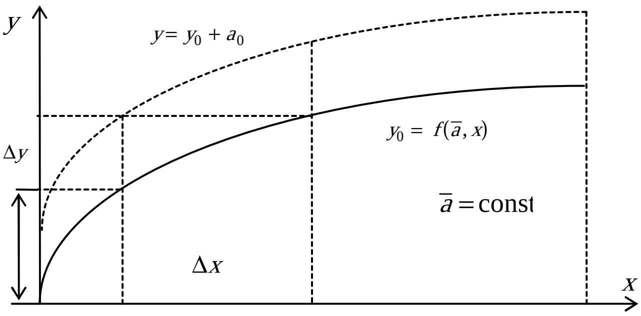


Рис. 2.1. Статическая характеристика прибора с аддитивной погрешностью

Погрешности, обусловленные смещением идеализированной (заданной) характеристики прибора параллельно самой себе на постоянную величину a_0 называют *аддитивными* (рис. 2.1), при этом уравнение реальной функции преобразования имеет вид

$$y = y_0 + a_0 = f(x, \overline{a}) + a_0|_{\overline{a}=\text{const}}.$$

Абсолютные погрешности такого прибора по величине соответственно на выходе и входе будут равны

$$\Delta y = a_0; \Delta x = \frac{a_0}{y_0'(\overline{a}, x)|_{\overline{a}=\text{const}}}; y_0'(\overline{a}, x) = \frac{\partial y_0(\overline{a}, x)}{\partial x}.$$

Причинами аддитивных погрешностей могут служить смещение нулевой точки, смещение с нуля стрелки невключенного измерительного прибора, контактные ЭДС при работе на потенциометре и др.

Абсолютное значение аддитивной погрешности по величине на выходе $\Delta y = a_0 = \text{const}$, а относительное $\Delta_y = (a_0 / y) \cdot 100$ %; причем при $y \to 0$, $\Delta_y \to \infty$, а при $y \to \infty$, $\Delta_y \to 0$.

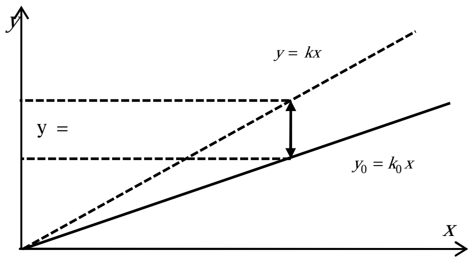


Рис. 2.2. Статическая характеристика линейного прибора с мультипликативной погрешностью

Погрешности прибора с линейной статической характеристикой, вызванные поворотом его характеристики на неполный угол, что равносильно изменению чувствительности, называют *мультипликативными* (рис. 2.2). Абсолютную погрешность на выходе прибора (абсолютную погрешность чувствительности) можно определить по выражению

$$\Delta_{\text{м}} = y - y_0 = (k - k_0)x = \Delta_{\text{к}} x,$$

а относительную

$$\Delta_{\text{к-о}} = \frac{\Delta_{\text{к}} x}{y_0} = \frac{\Delta_{\text{к}} x}{k_0 x} = \frac{\Delta_{\text{к}}}{k_0} = \Delta_{\text{к-о}},$$

где $\Delta_{\text{к-о}}$ – относительная погрешность чувствительности.

При нелинейности функции преобразования (статической характеристики) прибора поворот характеристики относительно начала координат тоже приводит к изменению чувствительности во всем диапазоне x. Однако это изменение, а также и возникающие при этом погрешности будут сложными функциями величины x, вычисление их затруднительно, и поэтому при рассмотрении работы нелинейных измерительных приборов понятием мультипликативной погрешности не пользуются.

2.3. КЛАСС ТОЧНОСТИ И ВАРИАЦИЯ ПРИБОРОВ

Классом точности измерительного прибора называют его обобщенную характеристику, определяемую пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также другими свойствами прибора, влияющими на точность, значения которых устанавливаются в стандартах на отдельные виды приборов.

Класс точности $К_т$ характеризует свойства приборов в отношении точности, но не является непосредственным ее показателем измерений, выполняемых с их помощью, так как точность зависит также от метода измерений и условий их выполнения.

Пределы допускаемых основной и дополнительных погрешностей приборов для каждого из $К_т$ устанавливаются в виде абсолютных и приведенных погрешностей (см. п. 2.1).

Приборам, пределы допускаемых погрешностей которых выражаются в единицах измеряемой величины, присваиваются $К_т$, обозначенные порядковыми номерами, причем приборам с большим значением допускаемых погрешностей устанавливаются классы большего порядкового номера. В этом случае обозначение $К_т$ прибора не связано со значением предела допускаемой погрешности, т.е. носит условный характер.

Приборам, пределы допускаемой основной погрешности которых задаются в виде приведенных относительных погрешностей, присваиваются $К_т$, выбираемые из ряда

$$К_т = (1;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ 3{,}0;\ 4{,}0;\ 5{,}0;\ 6{,}0)\cdot 10^n,\ n = 1;\ 0;\ -2\ \ldots \qquad (2.1)$$

Конкретные $К_т$ по (2.1) устанавливаются в стандартах на отдельные виды приборов и указываются на их циферблатах. Чем меньше число, обозначающее $К_т$ прибора, тем меньше пределы допускаемой основной погрешности. Классы точности приборов, нормируемых по приведенным погрешностям, имеют связь с конкретным значением предела погрешности.

Под *пределом допускаемой основной погрешности* понимают наибольшую без учета знака основную погрешность прибора, при которой он может быть признан годным и допущен к применению. Эту погрешность для краткости часто называют допускаемой основной погрешностью.

Пределом допускаемой дополнительной погрешности является наибольшая без учета знака дополнительная погрешность, вызываемая изменением влияющей величины в пределах расширенной области значений влияющих величин; принимают, например, температуру окружающего воздуха от 5 до 50 °С или от –50 до 50 °С, относительную влажность воздуха от 30 до 80 % или от 30 до 98 % и т.д. В некоторых случаях при нормировании пределов допускаемых дополнительных погрешностей приборов дается функциональная зависимость допускаемой дополнительной погрешности от изменения влияющей величины.

В связи с вышеизложенным в практике измерений применяют следующие формулы для расчета:

$$К_т = \delta_{п\max}\cdot 100\ \% = \frac{\Delta_{\max}}{x^* - x_*}\cdot 100\ \%; \qquad (2.2)$$

$$К_т = \max \delta_{\nu i},\ i = \overline{1, n}, \qquad (2.3)$$

где $\delta_п$, Δ – приведенная и абсолютная погрешности прибора; $\delta_{\nu i}$ = 100 ($x_п$ – – $x_{п.н.}$) – дополнительная погрешность прибора, вызванная изменением i-й влияющей величины на нормированное отклонение или в пределах расширенной области значений влияющих величин; $x_п$ – показание прибора в данной точке шкалы; $x_{п.н.}$ – показание прибора в данной точке шкалы при нормальных условиях эксплуатации прибора или нормальной области значений влияющей величины (принимается за действительное значение).

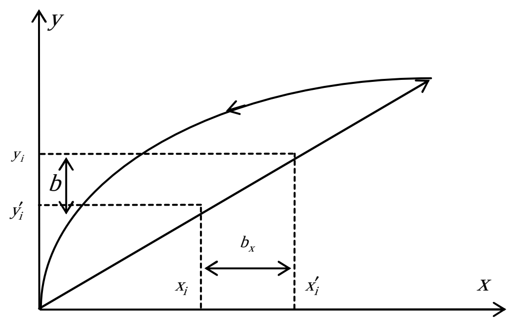


Рис. 2.3. Неоднозначность хода статической характеристики

Постоянство показаний прибора характеризуется вариацией, которая проявляется в неоднозначности хода статической характеристики прибора при увеличении и уменьшении измеряемой величины (рис. 2.3). Наибольшая разность $b = |y_i - y_i'|$ между выходными сигналами y_i и y_i' прибора, соответствующими одному и тому же действительному значению измеряемой или входной величин x_i, называется вариацией показаний прибора или выходного сигнала. Вариацию можно также определить экспериментально при нормальных условиях как наибольшую разность $b_x = |x_i - x_i'|$ действительных значений измеряемых величин x_i и x_i' (рис. 2.3), соответствующих одной и той же отметке шкалы прибора y_i при плавном подводе указателя вначале при увеличении, а затем при уменьшении измеряемой величины.

На практике вариацию ε выражают в процентах нормирующего значения x_N и определяют по формуле

$$\varepsilon = \frac{b}{x^* - x_*} \cdot 100\%. \qquad (2.4)$$

Вариация показаний или выходного сигнала прибора обычно нормируется в стандартах на отдельные виды или группы приборов в долях абсолютного значения допускаемой основной погрешности. Погрешность вариации связана с наличием механического, теплового, электрического и магнитного гистерезиса; она имеет систематическую и случайную составляющие [4].

При поверке приборов (операция сравнения показаний прибора с образцовыми для определения их погрешностей или поправок к их показаниям) вывод о пригодности прибора к эксплуатации осуществляется по следующему алгоритму:

1) сопоставляют рассчитанные по формулам (2.2) – (2.4) значения ε и $К_т$, если $\varepsilon > К_т$, то прибор не пригоден, а если $\varepsilon < К_т$, то выполняется следующий этап поверки;

2) сопоставляют рассчитанное значение $К_т$ по формулам (2.2), (2.3) с $К_т$, помеченном на шкале прибора $К_{тп}$, если $К_т > К_{тп}$, то прибор не пригоден, а если $К_т < К_{тп}$, то прибор признается годным.

2.4. ШУМЫ И ПОГРЕШНОСТИ ГРАДУИРОВКИ ПРИБОРОВ

Наличие шумов и помех во всех элементах прибора вызывают случайные неповторяющиеся отклонения отдельных точек статической характеристики прибора [5]. Погрешность шума, как правило, является нестационарной случайной функцией времени, поэтому значения этой погрешности, определяемые в произвольно взятые моменты времени, являются случайными величинами (см. гл. 1) с математическим ожиданием, равным нулю, и с некоторым средним квадратическим отклонением $\sigma_ш$. Закон распределения погрешности шума считают нормальным. Погрешность шума носит аддитивный характер – ее $\sigma_ш$ не зависит от величины x на входе прибора.

Представление функции преобразования прибора таблицей или шкалой связано с появлением погрешности градуировки [5]. При попытке экспериментально определить характеристику преобразования получают ряд точек более или менее близких к прямой линии, к параболе или к другой предполагаемой характеристике, определяющейся зависимостью $y = f(x, \bar{a}),\ \ x \in [x_*, x^*], \bar{a} \in V_{\bar{a}};\ \ \bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$; $a_1 = \text{const}$, $a_2 = \text{const}$, ... , $a_n = \text{const}$. При повторной градуировке получается другой ряд точек, не совпадающий с первоначальным. Это обстоятельство заставило ввести понятие нормальной градуировочной характеристики преобразования, т.е. характеристики, которая приписывается прибору, указывается в его паспорте и используется при производстве измерением с участием этого прибора. Отклонения реальной характеристики преобразования от нормальной приводят к появлению погрешностей градуировки прибора, причем по характеру проявления выделяются следующие их составляющие [4, 19].

1. Систематическое отклонение реальной характеристики от номинальной градуировочной, вызванное нелинейностью статической характеристики. Закон изменения такой погрешности вдоль шкалы известен и ее можно учесть при получении результата измерения, если известна таблица поправок для каждой точки шкалы. Неудобства такого способа учета погрешности очевидны, поэтому в современных приборах, если необходимо учитывать известные систематические погрешности, используют средства вычислительной техники (микропроцессоры и микроЭВМ) для автоматического введения соответствующих поправок в каждый результат измерения. Проявляется и оценивается данная погрешность как случайная составляющая погрешности (см. гл. 1).

2. Отклонение, вызванное неоптимальным выбором точек предполагаемой градуировочной характеристики прибора. Погрешность градуировки связана как с конечной точностью измерения образцового значения x и y так и со способом передачи градуировочных значений прибору (например, со способом нанесения шкалы и ее использования). Эта погрешность имеет систематическую и случайную составляющие (см. гл. 1).

2.5. НОРМИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИБОРОВ

Существуют два метода нормирования погрешностей измерительных приборов:

1) детермированный, при котором нормируются основные и дополнительные погрешности приборов (см. п. 2.3);

2) вероятностно-статический, при котором нормируются следующие погрешности[*]:

– для систематической составляющей погрешности $\Delta_с$ предел допускаемого значения $\Delta_{сD}$, математическое ожидание $M(\Delta_с)$ и среднее квадратическое отклонение (с.к.о.) $\sigma(\Delta_с)$;

– для случайной составляющей погрешности $\dot{\Delta}$ предел допускаемого значения с.к.о. $\sigma_D(\dot{\Delta})$, нормализованная автокорреляционная функция $r_{\dot{\Delta}}(\lambda)$ или спектральная плотность $S_{\dot{\Delta}}(\omega)$;

– для погрешности Δ предел допускаемого значения Δ_D, предел допускаемого значения Δ_D математического ожидания $M(\Delta)$ и (с.к.о.) $\sigma(\Delta)$.

Все перечисленные погрешности должны указываться в нормативно-технической документации на приборы.

В соответствии с ГОСТ 8.009-84 оценки статистических характеристик с целью их нормирования осуществляют следующим образом:

1. Определяют систематическую составляющую погрешности $\Delta_с$ конкретного экземпляра прибора в точке x диапазона измерения:

$$\Delta_с = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\overline{\Delta}_м + \overline{\Delta}_б\right),$$

где $\overline{\Delta}_м = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\Delta_{м_i}$; $\overline{\Delta}_б = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\Delta_{б_i}$; n – число опытов при определении $\Delta_м$ и $\Delta_б$; $\Delta_{м_i}$ и $\Delta_{б_i}$ – i-е значение погрешности при подходе к точке x со стороны меньших и больших значений.

2. Определяют вариацию $b^* = \left|\overline{\Delta}_м - \overline{\Delta}_б\right|$.

3. Находят оценку математического ожидания $\Delta_с$ приборов данного типа по значениям, полученным для каждого экземпляра прибора:

$$M^*(\Delta_{-}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Delta^*_{с_i},$$

где k – число исследуемых приборов; $\Delta^*_{с_i}$ – оценка систематической составляющей погрешности i-го прибора.

4. Проводят оценку с.к.о. $\Delta_с$ приборов данного типа:

$$\sigma^*(\Delta_с) = \sqrt{[1/(k-1)]\sum_{i=1}^{k}\left[\Delta^*_{c_i} - M^*(\Delta_с)\right]^2}.$$

5. Проводят оценку с.к.о. погрешности $\dot{\Delta}$ в точке x диапазона измерения конкретного прибора данного типа:

$$\sigma^*(\dot{\Delta}) = \sqrt{[1/(2n-1)]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_{м_i} - \overline{\Delta}_м\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_{б_i} - \overline{\Delta}_б\right)^2\right]}.$$

6. Определяют значение нормализованной автокорреляционной функции:

$$r^*_{\dot{\Delta}}(\lambda) = \frac{1}{(n - \lambda/T_0)D^*(\dot{\Delta})}\int_{i=1}^{n-\lambda/T_0}\left(\Delta_i - \overline{\Delta}\right)\left(\Delta_{i+\lambda/T_0} - \overline{\Delta}\right),$$

где n – число отсчетов погрешности при определении автокорреляционной функции; T_0 – интервал времени между двумя последовательными отсчетами; $\overline{\Delta} = (1/n)\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$; Δ_i – i-я реализация (отсчет) погрешности (для приборов, допускающих плавное изменение входной величины, отсчеты Δ_i проводят при подходе к данной точке диапазона изменения только с одной стороны):

$$D^*(\dot{\Delta}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_i - \overline{\Delta}\right)^2.$$

---

[*] Требования ГОСТ 8.009–84.

Необходимо отметить, что автокорреляционная функция определяется по точкам для дискретных значений аргумента λ. Интервал времени, в течение которого проводится n отсчетов при определении $r_{\dot{\Delta}}(\lambda)$, равен $T = (n-1)T_0$, где интервал времени T_0 должен удовлетворять неравенству $\lambda_{max}/n < T \leq \lambda_1$; здесь λ_{max} – верхний предел диапазона аргумента λ, в котором определяется $r_{\dot{\Delta}}(\lambda)$; λ_1 – первое, после нулевого, значение λ.

Математическое ожидание погрешности прибора при нормальных условиях эксплуатации $M(\Delta) = M(\Delta_c)$, а при эксплуатации прибора в условиях, отличных от нормальных $M(\Delta) = M(\Delta_c) + \psi(\xi)$, где $\psi(\xi)$ – функция влияния на результаты измерений физической величины ξ, не измеряемой данным прибором.

Среднее квадратичное отклонение погрешности приборов данного типа

$$\sigma(\Delta) = \sqrt{\sigma^2(\Delta_c) + \sigma_D^2(\dot{\Delta}) + (1/12)b_D^2},$$

где значения σ_D и b_D берут из нормативно-технической документации.

В ряде случаев влияющие величины изменяют значение с.к.о. погрешности $\dot{\Delta}$ прибора и его вариацию. В этом случае выражение для погрешности $\sigma(\Delta)$ имеет следующий вид:

$$\sigma(\Delta) = \sqrt{\sigma^2(\Delta_c) + \left[\sigma_D(\dot{\Delta}) + \psi_\sigma(\xi)\right]^2 + (1/12)[b_D + \psi_b(\xi)]^2},$$

где $\psi_\sigma(\xi)$ и $\psi_b(\xi)$ – соответствующие функции влияния физической величины ξ на с.к.о. случайной составляющей погрешности $\sigma(\dot{\Delta})$ прибора и на его вариацию b.

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПОГРЕШНОСТИ ПРИБОРОВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ И КОНТРОЛЯ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

3.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При измерениях в динамических условиях, т.е. при переменном во времени значении измеряемой величины, возникают динамические погрешности, обусловленные инерционностью приборов, которые проявляются в том, что их показания отстают от изменения измеряемой величины. Для оценки инерционности обычно вводят понятие *динамических характеристик*.

Прежде всего заметим, что для каждого прибора существует свой *оператор*, т.е. закон, в соответствии с которым каждой данной функции на его входе ставится в соответствие определенная функция на его выходе. Именно оператором преобразования и определяется все многообразие динамических свойств, присущих приборам, если конечно, этот оператор составлен с учетом всех важных факторов и закономерностей, сопровождающих работу последних [1].

Аналоговый прибор называется *линейным*, если отношение информативного параметра выходного сигнала[*] к соответствующему постоянному информативному параметру входного сигнала[**] и динамические характеристики, определяющие изменение выходного сигнала вследствие изменений во времени информативного параметра входного сигнала в пределах требуемой точности, не зависят от информативного параметра входного сигнала[***], в противном случае он называется нелинейным.

Прибор называется *стационарным*, если его динамические свойства не изменяются с течением времени. Если такое изменение имеет место, то прибор является *нестационарным*.

Следствием постоянства во времени динамических свойств прибора является то, что процесс преобразования входных сигналов обладает *свойством инвариантности* относительно сдвига во времени входных сигналов. Таким образом, реакция стационарных приборов не зависит от момента приложения входных сигналов, а зависит только от разности текущего времени и момента приложения входных сигналов.

Нестационарные приборы не обладают указанным выше свойством инвариантности, их реакция зависит как от текущего времени, так и от момента приложения входных сигналов.

Вполне понятно, что нелинейные приборы могут быть как стационарными, так и нестационарными.

---

[*], [**] В дальнейшем изложении для краткости – выходной и входной сигналы, соответственно.

[***] Требование ГОСТ 8.256–87.

Приборы, будучи представленными одной из выше рассмотренных групп, могут быть отнесены либо к приборам с сосредоточенными, либо с распределенными параметрами.

Приборами с сосредоточенными параметрами называются такие, при учете взаимодействия которых с источником входного сигнала и (или) устройством, подключенным к его выходу, в пределах требуемой точности можно пренебречь размерами входных и (или) выходных устройств и волновыми эффектами*. Их динамические свойства описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Приборами с распределенными параметрами называются такие, входы и сигналы которых непрерывно распределены вдоль некоторой линии или поверхности. Их динамические свойства описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными, интегро-дифференциальными или функциональными уравнениями.

Поскольку влияние динамических характеристик приборов на динамические свойства систем наиболее существенно для систем автоматического регулирования и управления различными финансово-экономическими показателями, где основные параметры процессов являются строго детермированными функциями времени, то для практических случаев с достаточной степенью точности и достоверности можно считать применяемые в практике приборы стационарными линейными с сосредоточенными параметрами. При дальнейшем изложении, если это не будет оговорено особо, рассматриваются динамические свойства только таких приборов.

3.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИБОРОВ

Динамическими характеристиками приборов называются характеристики их инерционных свойств, определяющие зависимость выходного сигнала от меняющихся во времени величин: параметров входного сигнала, внешних влияющих величин, нагрузки*.

По признаку полноты описания динамических свойств динамические характеристики приборов разделяют на полные и частные.

Полной динамической характеристикой прибора называется динамическая характеристика, однозначно определяющая изменение его выходного сигнала при любом изменении во времени входного сигнала или влияющей величины**. К ним относятся дифференциальное уравнение, импульсная и переходная характеристики, передаточная функция, совокупность амплитудно- и фазочастотной характеристик.

Частной динамической характеристикой прибора называется динамическая характеристика, представляющая собой параметр или функционал полной динамической характеристики.

3.2.1. Импульсная и переходная характеристики

Для характеристики динамических свойств приборов широко используются переходные процессы, соответствующие типовым входным сигналам. Наиболее распространенными переходными временными характеристиками являются:

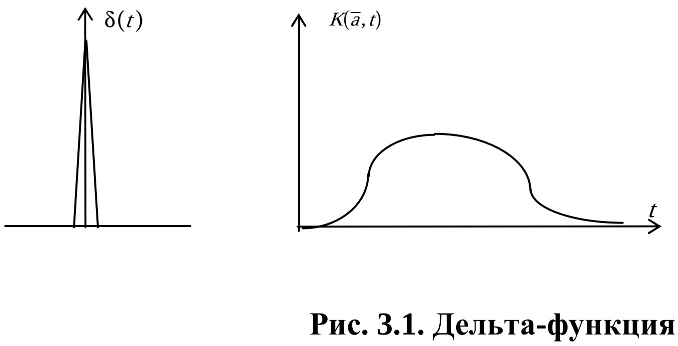


Рис. 3.1. Дельта-функция и реакция на нее

1) импульсная характеристика, которую в дальнейшем будем обозначать $K(\bar{a},t)$, показывающая реакцию прибора на единичный мгновенный импульс $\delta(t)$, называемый *дельта-функцией* или *функцией Дирака* (рис. 3.1) и удовлетворяющая условиям:

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ \infty, & t=0;\end{cases}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1;$$

---

* Требование ГОСТ 8.256–87.

* Требование ГОСТ 8.009–84.

** Требование ГОСТ 8.256–87.

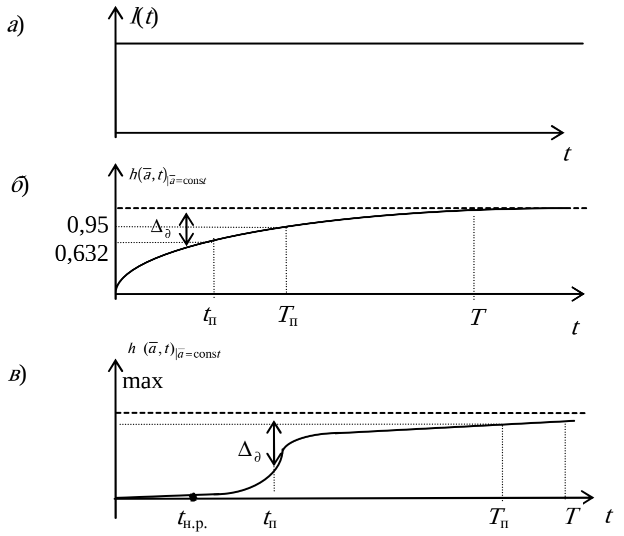


Рис. 3.2. Единичная ступенчатая функция и реакции на нее

2) переходная характеристика, которую будем обозначать в дальнейшем изложении $h(\bar{a}, t)$, показывающая, как изменяется выходная величина у прибора при подаче на его вход сигнала в виде единичной ступенчатой функции $l(t)$, называемой *функцией Хевисайда* (рис. 3.2, *а*):

$$l(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ l, & t \geq 0. \end{cases}$$

Между функциями $\delta(t)$ и $l(t)$, а также $k(\bar{a}, t)$ и $h(\bar{a}, t)$ существуют следующие взаимосвязи: $\delta(t) = l'(t)$; $k(\bar{a}, t) = h'(\bar{a}, t)$; $l(t) = \int\limits_0^t \delta(t)dt$; $h(\bar{a}, t) = \int\limits_0^t k(\bar{a}, t)dt.$ В большинстве случаев практического применения приборов в качестве основной временной характеристики используется переходная характеристика $h(\bar{a}, t)$ (рис. 3.2, *б*, *в*), из которой можно получить следующие частные динамические характеристики: $t_п$ – постоянную времени при экспоненциальном изменении выходного сигнала $h(\bar{a}, t)$ (рис. 3.2, *б*), за которое последний достигает 0,632 установившегося значения $h(\bar{a}, t)_{\max}$ и определяемую как проекцию касательной, проведенной в начале координат на ось абсцисс; $t_п$ – постоянную времени для неэкспоненциального характера изменения (рис. 3.2, *в*), определяемую как проекцию на ось абсцисс касательной, проведенной в точке перегиба динамической характеристики; $t_{н.р.}$ – время начала регистрирования, прошедшее с момента изменения входного сигнала до заметного изменения выходного; $T_п$ – время переходного процесса, в течение которого показания входят в 5 %-ную зону установившегося значения, т.е. когда $h(\bar{a}, t) \geq 0{,}95\, h(\bar{a}, t)_{\max}$; $\bar{a} = \text{const}$; T – полное время установления показаний от момента изменения входного сигнала до момента установления постоянных показаний прибора.

3.2.2. Передаточная функция и амплитудно-фазовая характеристика

Для практики использования приборов в условиях финансово-экономических исследованиях бывает удобнее оперировать не с рассмотренными выше временными характеристиками (импульсными и переходными), а с так называемыми передаточными функциями, которые определяются с помощью преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа L для функции $f(t)$ можно записать в следующем виде:

$$L[f(t)] = F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \quad . \quad (3.1)$$

где p – оператор Лапласа.

Передаточной функцией прибора будем называть отношение изображения по Лапласу его выходного сигнала к изображению по Лапласу входного сигнала при нулевых начальных условиях

$$W(\bar{a}, p) = \frac{y(\bar{a}, p)}{x(p)}, \bar{a} \in D_{\bar{a}} = \text{const}. \quad (3.2)$$

При практических расчетах динамических свойств приборов целесообразно рассматривать частный случай передаточных функций, определяемых уравнением (3.2) при $p = i\omega$.

В этом случае преобразование Лапласа превращается в преобразование Фурье и передаточная функция $W(\bar{a}, p)$ выражается в совокупность амплитудно- и фазочастотной характеристик (амплитудно-фазовая характеристика – АФХ) $W(\bar{a}, i\omega)$, которая дает представление о частотных свойствах прибора.

В большинстве случаев можно ограничиться изучением частной динамической характеристики – модуля комплексного числа АФХ $|W(\bar{a}, i\omega)|$, который получил название амплитудно-частотной характеристики.

Амплитудно-частотная характеристика прибора определяет спектр частот, пропускаемых этим прибором. Очевидно, что если он обладает большой инерционностью (запаздыванием), т.е. имеет длительное время от момента изменения входного сигнала на входе прибора до момента начала изменения выходных показаний, то спектр его частот будет лежать в области низких частот и, поэтому он не будет измерять параметры быстроменяющихся процессов, содержащих высокочастотные составляющие.

Функции $h(\bar{a}, t)$, $k(\bar{a}, t)$, $W(\bar{a}, p)$, $W(\bar{a}, i\omega)$, приборов связаны между собой (табл. 3.1). Каждая из них может быть получена непосредственно из дифференциального уравнения; при этом предполагается, что вектор параметров $\bar{a} = \bar{a}^0 = \text{const}$.

В табл. 3.1 приняты обозначения: L – прямое преобразование Лапласа (3.1); L^{-1} – обратное преобразование Лапласа:

$$L^{-1}[f(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\omega}^{\sigma_0 + i\omega} f(p)e^{pt}\,dt,$$

где σ_0 – абсцисса абсолютной сходимости функций; F – прямое преобразование Фурье:

$$F[f(t)] = f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt;$$

F^{-1} – обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}[f(i\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

3.1. Динамические характеристики приборов и связи между ними

Характеристики	$h(\bar{a}, t)$	$k(\bar{a}, t)$	$W(\bar{a}, i\omega)$	$W(\bar{a}, p)$
$h(\bar{a}, t)$	–	$\int_0^t k(\bar{a}, t)dt$	$F^{-1}\left[\frac{W(\bar{a}, i\omega)}{i\omega}\right]$	$L^{-1}\left[\frac{W(\bar{a}, p)}{p}\right]$
$k(\bar{a}, t)$	$\frac{dh(\bar{a}, t)}{dt}$	–	$F^{-1}[W(\bar{a}, i\omega)]$	$L^{-1}[W(\bar{a}, p)]$
$W(\bar{a}, i\omega)$	$i\omega F[h(\bar{a}, t)]$	$F[k(\bar{a}, t)]$	–	$W(\bar{a}, p)$, $p = i\omega$
$W(\bar{a}, p)$	$pL[h(\bar{a}, t)]$	$L[k(\bar{a}, t)]$	$W(\bar{a}, i\omega)$, $p = i\omega$	–

3.2.3. Методы определения динамических характеристик

Наиболее распространенными в практике динамических измерений методами определения динамических характеристик приборов являются аналитические и экспериментальные методы.

Аналитические методы предполагают нахождение дифференциального уравнения, описывающего работу прибора в динамическом режиме измерения с учетом всего комплекса физических и физико-химических процессов, происходящих в приборе, а также условий его работы.

В ряде случаев данная группа методов является весьма трудоемкой, поэтому на практике широко применяются экспериментальные методы изучения динамики.

В ГОСТ 8.256–87 определены основные требования к методам экспериментального определения динамических характеристик, суть которых состоит в следующем.

При определении полных динамических характеристик предпочтение необходимо отдавать прямым методам, при которых на вход прибора подается испытательный сигнал, позволяющий непосредственно по выходному сигналу определить искомую характеристику.

Если невозможно воспроизвести с требуемой точностью испытательный сигнал, позволяющий найти полную динамическую характеристику непосредственно из опытных данных, то допускается ее определять пересчетом другой динамической характеристики, найденной прямым методом.

При определении динамических характеристик приборов, представляющих собой функции, вид которых известен, целесообразно определять экспериментально только коэффициенты функций. Более подробно с данными вопросами можно познакомиться в [3, 6, 18].

3.2.4. Некоторые вопросы анализа нестационарных линейных приборов

Динамические свойства приборов определяются не только структурной схемой, связывающей выходной сигнал с входным, но и характером входящих в эту схему параметров $\bar{a}$. Ясно, что постоянство параметров в процессе эксплуатации, переменность и характер их переменности – это основные моменты, которые коренным образом могут изменить динамические свойства приборов, хотя структура оператора преобразования входного сигнала может оставаться одной и той же.

В ряде случаев практического применения входной сигнал прибора измеряется в условиях, отличных от нормальных, поэтому в анализ его динамических свойств необходимо вводить влияющие величины, действующие на параметры, т.е. считать, что $\bar{a} = \bar{a}(\bar{q})$, где $\bar{q}$ – вектор влияющих величин.

Исследование влияния переменности параметров $\bar{a}$ на динамические свойства прибора может быть произведено методами теории чувствительности [1], которые являются наиболее простыми, правда далеко не самыми точными.

Теоретической основой методов чувствительности являются классические методы теории возмущений, или, что то же самое, методы малых параметров. Наиболее благоприятной основой для применения методов теории чувствительности являются ситуации, при которых отклонения параметров $\bar{a}(\bar{q})$ от их номинальных значений $\bar{a}(\bar{q}^0)$ сравнительно малы.

Суть метода теории чувствительности заключается в следующем. Пусть в заданной структурной схеме прибора содержится k параметров $a_1, a_2, \ldots, a_k$, значения которых могут отличаться от номинальных (т.е. при $\bar{q} = \bar{q}^0$)

$a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{k0}$ на величины $\delta_{a1}, \delta_{a2}, \ldots, \delta_{ak}$. Тогда выходной сигнал такого прибора будет функцией как времени, так и всех указанных параметров $y = f(t, a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Допустим, что отклонения $\delta_{a1}, \delta_{a2}, \ldots, \delta_{ak}$ малы и при разложении функции $y(t, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ в ряд Тейлора можно ограничиться изучением только линейных относительно δ_{ai} членов.

При этом

$$y = f(t, a_1, a_2, \ldots, a_k) = y_0(t, a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{k0}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial y(t, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\partial a_i} \delta_{a_i} \Bigg|_{\substack{a_1 = a_{10} \\ \vdots \\ a_k = a_{k0}}},$$

где $y_0(t, a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{k0})$ – означает реакцию прибора со значениями параметров $\bar{a}$, равными номинальным.

Функции

$$Z_i(t) = \frac{\partial y(t, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\partial a_i} \Bigg|_{\substack{a_1 = a_{10} \\ \vdots \\ a_k = a_{k0}}} \tag{3.3}$$

называются функциями чувствительности. Как видно, физический смысл этих функций заключается в том, что они характеризуют влияние отклонений параметров $\bar{a}$ от их номинальных значений на величину выходного сигнала.

В том случае, когда ограничение линейными членами разложения выходного сигнала в ряд Тейлора не дает ожидаемых результатов, совершенно аналогично вводится понятие функции чувствительности более высокого порядка. Например, функции чувствительности второго порядка будут определяться следующими выражениями:

$$Z_i^2(t) = \frac{\partial^2 y(t, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\partial a_i^2} |a_1 = a_{10}, \ldots, a_k = a_{k0}.$$

Функции чувствительности могут быть определены также непосредственно из самих уравнений, описывающих динамику приборов, для чего строятся новые уравнения – уравнения чувствительности, причем, в большинстве случаев они оказываются линейными независимо от структуры исходного уравнения.

На практике исследуется чувствительность не только самого выходного сигнала прибора, но и всех его основных динамических характеристик. Следовательно, по аналогии с формулой (3.3) для функций чувствительности динамических характеристик прибора имеем

$$Z_{h_i}(t) = \frac{\partial h(t, a_1, a_2, ..., a_k)}{\partial a_i} | a_1 = a_{10}, ..., a_k = a_{k0};$$

$$Z_{k_i}(t) = \frac{\partial k(t, a_1, a_2, ..., a_k)}{\partial a_i} | a_1 = a_{10}, ..., a_k = a_{k0};$$

$$Z_{W_i}(p) = \frac{\partial W(p, a_1, a_2, ..., a_k)}{\partial a_i} | a_1 = a_{10}, ..., a_k = a_{k0};$$

$$Z_{W_i}(\omega) = \frac{\partial W(\omega, a_1, a_2, ..., a_k)}{\partial a_i} | a_1 = a_{10}, ..., a_k = a_{k0}.$$

Эти соотношения определяют собой функции чувствительности переходной характеристики, импульсной характеристики, передаточной функции, АФХ, соответственно. Ясно, что если известны аналитические выражения в замкнутой форме или в явном виде для этих характеристик, то нахождение соответствующих функций чувствительности не представляет собой особого труда. Однако, поскольку имеются взаимосвязи между динамическими характеристиками (см. данные табл. 3.1), то для нахождения всех функций чувствительности достаточно знания хотя бы одной характеристики, причем в большинстве случаев желательно – передаточной функции прибора.

3.3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБОРОВ

Динамические погрешности прибора возникают при неустановившемся режиме измерения. Под динамической погрешностью понимают ту часть погрешности прибора, которая добавляется к статической погрешности в неустановившемся режиме измерения. Таким образом, общая погрешность в динамическом режиме равна сумме статической и динамической погрешностей. В практике измерений применяют два способа нахождения динамической погрешности: экспериментальный и аналитический.

В первом случае скачкообразно на входе прибора изменяют значение измеряемой величины, находят выходной сигнал (переходная характеристика $h(\bar{a}, t)$) и по разности между показаниями прибора и действительным значением измеряемой величины (при отсутствии статической погрешности показания) в данный момент времени определяют динамическую погрешность Δ_∂ (см. рис. 3.2): $\Delta_\partial = X_\partial - x$, где X_∂ – показание прибора в динамических условиях; x – измеряемая величина.

Аналитически динамическую погрешность определяют по формуле [8]:

$$\Delta_\partial(t) = F\left\{L\left\{W(\bar{a}^0, p)\left[f(p, \bar{q}^0) + \xi(p, \bar{q}^0)\right]\right\}\right\} - x(t),$$

где $F_н$ – символ функции, обратной номинальной статической характеристике прибора при нормальных условиях эксплуатации; $\bar{q} = \bar{q}^0$; $W(\bar{a}^0, p)$ – передаточная функция; $f(p, \bar{q}^0)$ – операторное выражение входного сигнала, преобразованного по Лапласу; $\xi(p, \bar{q}^0)$ – операторное по Лапласу выражение погрешности прибора, приведенное к его входу, если $\Delta_\partial(t)$ определяется для нормальных условий эксплуатации, то $\xi(p, \bar{q}^0)$ – основная допустимая погрешность, если для рабочих условий, то $\xi(p, \bar{q}^0)$ – погрешность в рабочих условиях эксплуатации.

4. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГОКАНАЛА ПРИБОРОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

С позиций дефиниции определим измерительный канал прибора как первичный измерительный преобразователь.

4.1. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПЕРВИЧНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПРИБОРОВ

Качество первичных измерительных преобразователей приборов оценивается на стадии их проектирования рядом показателей, различных по своей природе, которые делятся в общем случае на статические и динамические критерии.

Статические критерии в свою очередь подразделяют на метрологические (пределы измерений, предел допускаемой основной приведенной погрешности, пределы допускаемых дополнительных приведенных погрешностей, вариация показаний, стабильность измерения) и критерии надежности (вероятность безотказной работы в течение определенного времени, интенсивность потока отказов). К динамическим критериям качества относятся: динамическая погрешность; время начала реагирования, переходного процесса и установления показаний; постоянные времени; метрологическая надежность.

На практике перечисленные показатели качества нормируются стандартами и техническими условиями для определенных групп первичных измерительных преобразователей. Получение основных статических и динамических характеристик измерительных преобразователей заданной структуры – главная задача анализа, решив которую, переходят к задаче синтеза первичного измерительного преобразователя по заранее выбранному критерию качества, формализованному из статических или динамических характеристик.

4.2. ЗАДАЧИ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ПЕРВИЧНОГО ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Допустим, что на основе предварительного анализа (эвристический синтез) образовано множество конкурирующих структур построения преобразователя V_k. Каждая из них характеризуется вектором показателей качества:

$$\bar{k}_S = \{I_1, I_2, I_3, .., I_k\},$$

где S – номер структуры.

На практике задача синтеза обычно разбивается на два этапа:

1) параметрический синтез, в результате которого определяются оптимальные параметры $\bar{a}^0$ каждой структуры из множества V_k;

2) структурный синтез, в результате которого определяется оптимальная структура.

Задача параметрического синтеза формулируется следующим образом. Для заданной структуры построения первичного преобразователя из множества V_k надо найти вектор оптимальных параметров $\bar{a}^0 = \{a_i^0\}_{i=1}^n$ таким образом, чтобы некоторый заранее выбранный из анализа экспертных оценок специалистов критерий качества прибора I принял оптимальное значение:

$$I(\bar{a}^0) = \mathrm{opt}\, I(\bar{a}); \bar{a} \in D_{\bar{a}}, \tag{4.1}$$

где D – область допускаемых решений; $D = \{\bar{a} : C_k(\bar{a}) \le 0, k = \overline{1, m}\}$; $C_k(\bar{a})$ – функция ограничений на параметры.

Областью поиска решений задачи (4.1) является область П = $= \{\bar{a} : a_i \ge 0,\ i = \overline{1, n}\}$, где a_{i*}, a_i^* – минимальное и максимальное значения i-го параметра, причем $\text{п} \in R_n^+ = \{\bar{a} : a_i \ge 0;\ i = \overline{1,\ n}\}$, где R_n^+ – множество неотрицательных решений задачи (4.1), а $R_n^+ \subset E_n$, где E_n – евклидово n-мерное пространство.

В квазистатическом режиме эксплуатации первичного измерительного преобразователя прибора в качестве критерия параметрического синтеза I целесообразно выбрать предельную величину из частных составляющих погрешности точности прибора как метрологического показателя, отражающего его обобщенную характеристику. В этом случае параметрический синтез производится по следующей методике [9, 10].

1. Из анализа экспертных оценок специалистов выбирается структура построения преобразователя.

2. Задаваясь параметрами $\bar{a}$ этой структуры, рассчитывают статическую характеристику.

3. Производят линеаризацию статической характеристики функций вида $y_{\text{ап}} = Ax_0 + B$, где коэффициенты A и B определяются из условия:

$$\min_{A,e}\|F[x_0,\ \bar{a}(\bar{q}_0)] - Ax_0 - B\|,$$
$$x_0 \in [x_{0*},\ x_0^*];\ \bar{a} \in D_{\bar{a}}. \tag{4.2}$$

4. Определяют погрешность линеаризации $\Delta y_{\text{ср}}(x_0,\ \bar{a})$ как разницу между статической характеристикой и линеаризованной статической характеристикой $y_{\text{ап}}$ (4.2).

5. Рассчитывают основную погрешность первичного измерительного преобразователя, состоящую из систематической и случайной составляющих. Например, для нормального закона распределения случайной составляющей погрешности основную погрешность определяют по формуле:

$$\delta_0(x_0,\ \bar{a}) = \max\frac{2\sqrt{D_y(x_0,\ \bar{a})} + \Delta y_{\text{ср}}(x_0,\ \bar{a})}{B(x_0^* - x_{0*})};$$
$$x_0 \in [x_{0*},\ x_0^*], \tag{4.3}$$

где $D_y(x_0,\ \bar{a})$ – дисперсия случайной составляющей погрешности.

Однако на практике этот закон распределения неизвестен, поэтому в качестве основной погрешности выбирают систематическую составляющую погрешности (4.3), вызванную нелинейностью статической характеристики преобразователя:

$$\delta_0(x_0,\ \bar{a}) = \max\left[\frac{F[x_0,\ \bar{a}(\bar{q}_0)] - Ax_0 - B}{B(x_0^* - x_{0*})}\right];$$
$$x_0 \in [x_{0*},\ x_0^*]. \tag{4.4}$$

6. Производят оценку приведенной дополнительной погрешности измерения, вызванной отклонением V-влияющей величины от своего нормального номинального значения на регламентированную величину Δq_{V} в линейном приближении:

$$\delta_{\text{V}}(x_0,\bar{a}) = \max\left\{\frac{df_1[x,\bar{a}(\bar{q}^0)]}{dx}\frac{df_0(x_0,\bar{q}^0)}{dq_{\text{V}}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{df_1[x,\bar{a}(\bar{q}^0)]}{da_i}\frac{da_i(\bar{q}^0)}{dq_{\text{V}}}\right\}\frac{\Delta q_{\text{V}}}{B(x_0^* - x_{0*})}, \tag{4.5}$$

где $x = f_0(x_0,\bar{q}^0)$ – методическое преобразование измеряемой величины; $y = f_1[x,\bar{a}(\bar{q}^0)]$ – измерительное преобразование измеряемой величины; x – входной сигнал преобразователя.

Величину $\delta_{\text{V}}(x_0,\bar{a})$ можно также рассчитывать по приращению функции $y = F[x_0,\bar{a}(\bar{q}^0)]$:

$$\delta_{\text{V}}[x_0,\bar{a}(\bar{q}^0)] = \left[\frac{F[x_0,\bar{a}(\bar{q}^0 + \Delta\bar{q}_{\text{V}})] - F[x_0,\bar{a}(\bar{q}^0)]}{B(x_0^* - x_{0*})}\right]. \tag{4.6}$$

7. Составляется критерий качества – величина наибольшей из частных составляющих погрешностей, определяемых по формулам (4.3) – (4.6):

$$I(\bar{a}) = \max\lambda_j\delta_i(\bar{a}), \tag{4.7}$$

где λ_j – коэффициенты, учитывающие соотношение основной и дополнительной погрешностей и определяемые по стандартам на группы преобразователей.

8. С учетом (4.7) формулируется задача оптимального параметрического синтеза. Для заданной структуры S из допустимого множества параметров $\text{V}_{\bar{a}}$ найти такие оптимальные параметры $\bar{a}^0$, чтобы

$$I(\bar{a}^0) \geq \min\max\lambda_j\delta_i(\bar{a}) = \min\max\ f_j(\bar{a});$$
$$\bar{a} \in \text{V}_{\bar{a}};\ j \in [0,\ m]. \tag{4.8}$$

9. Осуществляется решение задачи (4.8) методом математического нелинейного программирования.

Из анализа задачи (4.8) можно получить ряд частных постановок. Например, если статическая характеристика существенно нелинейна при линейной градуировочной характеристике, то доминирующей составляющей становится погрешность градуировки. В этом случае из выражения (4.7) можно получить:

$$I\left(\overline{a}^0\right) = \min\max\left|\frac{F\left[x_0, \overline{a}\left(\overline{q}^0\right)\right] - Ax_0 - B}{Ax_0^*}\right|. \qquad (4.9)$$

Обычно в качестве критерия оптимальности при параметрическом синтезе используется средняя чувствительность измерения

$$I\left(\overline{a}^0\right) = \max A\left[\overline{a}\left(\overline{q}^0\right)\right]; \;\; \overline{a} \in V_{\overline{a}}. \qquad (4.10)$$

где $A\left[\overline{a}\left(\overline{q}^0\right)\right]$ – определяется из условия (4.2).

Анализ постановок задач (4.8) – (4.10) позволяет сделать следующие выводы. Задача (4.10) существенно проще для решения, чем (4.8) – (4.9), а критерий не противоречит критерию (4.8), так как величина A входит в знаменатель всех его составляющих. Однако от вектора $\overline{a}$ зависит не только знаменатель, но и числитель выражений $\delta_j(\overline{a})$. Поэтому увеличение средней чувствительности измерений сопровождается более значительным увеличением абсолютных погрешностей, в частности градуировочных, вследствие увеличения погрешности [9, 10].

После проведения параметрического синтеза решается задача структурного синтеза [16].

1. Из множества структур V_k определяется множество допустимых структур, у которых все показатели качества удовлетворяют ограничениям вида:

$$\begin{cases} I_r - I_r^* \le 0, & r = \overline{1, p}; \\ -\left(I_r - I_r^*\right) \le 0, & r = \overline{p+1, k}, \end{cases}$$

где I^* – технические требования к первичному измерительному преобразователю.

2. Из оставшегося множества структур построения преобразователя выделяется множество так называемых неулучшаемых структур V_{II}, которое содержит векторно несравнимые структуры, и для выбора из него оптимальной структуры необходимо использовать условный критерий предпочтения.

3. Исходя из назначения первичного измерительного преобразователя, выбирается вид условного критерия предпочтения структуры. На практике целесообразно в качестве такого критерия использовать экономическую эффективность структуры по сравнению с преобразователем-аналогом, у которого показатели качества строго совпадают с техническими требованиями.

4. Принимается, что экономический эффект от использования преобразователя-аналога в промышленности является основным, а структуры, показатели качества которых лучше, чем у аналога, дают дополнительный эффект, рассчитываемый по формуле

$$\Delta Э(S) = \sum_{r=1}^{k} Э_r = \sum_{r=1}^{p} l_r (I_r - I_r*) + \sum_{r=1}^{k} l_r (I_r - I_r*),$$

где l_r – весовые коэффициенты, рассчитываемые на основе конкретной задачи экономического измерения.

5. Формируется задача структурного синтеза: из множества неулучшаемых структур V_{II} определить структуру:

$$S^0 = \operatorname{argmax} \Delta Э(S); S \in V_{II}.$$

6. Перебором структур из множества V_{II} находят структуру $S^0 \in V_{II}$.

Выше рассмотренные критерии качества и постановки задач анализа и синтеза характерны для рационального или оптимального проектирования первичных измерительных преобразователей на "жестких" структурах. Дефиниция экономических измерений как технических, квазистатических и косвенных измерений обосновывает использование для проектирования измерительного канала прибора – статистических критериев качества, на базе которых формируется векторный критерий качества.

4.3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВАПЕРВИЧНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ МИКРОПРОЦЕССОРНОГО ПРИБОРА

Обычно критерии оптимальности при синтезе математических моделей первичных измерительных преобразователей выбирают методами экспертных оценок, т.е. исходя из назначения, условий работы проектируемого микропроцессорного прибора МП с учетом существующих ограничений.

Для МП важнейшими критериями следует считать метрологические, характеризующие точность проводимых с их помощью измерений. В МП преобразования финансово-экономического показателя $æ_0$ в выходной сигнал первичного измерительного преобразователя W в ряде случаев имеют статистический характер, обусловленный случайными помехами, влияющими факторами, неопределяемыми параметрами объекта. Поэтому сигнал W в квазистатическом приближении* является случайной величиной, и близость результата измерений æ$_0$ (оценка величины æ$_0$) к значению измеряемой величины æ$_0$ целесообразно оценивать статистическими критериями качества.

Исчерпывающей характеристикой погрешности Δ В общем случае вход и выход первичного измерительного преобразователя (ПИП) рассматриваются как эргодические стационарные случайные процессы
æ$_0$ = $\overline{ж}_0 - ж_0$ является условная плотность вероятности $P(\overline{ж}_0 \;/\; ж_0)$, задание которой в каждой точке шкалы прибора практически невозможно. Учитывая, что в зависимости от условий $ж_0$ можно рассматривать как неизвестную случайную величину, используем для оценки качества случайной величины $\overline{ж}_0$ в смысле ее близости к $ж_0$ критерий условного ρ_1 (для неслучайных $ж_0$) и среднего ρ_2 (для случайных $ж_0$) риска, получающиеся усреднением неубывающей, симметричной относительно погрешности $\Delta ж_0$ функции потерь $П(\Delta ж_0)$. [14, 15]:

$$\rho_1 = \int П(\Delta ж_0) P(\overline{ж}_0 \;/\; ж_0)\, d\overline{ж}_0;$$

$$\rho_2 = \int \rho_1 P(ж_0)\, dж_0,$$

где $P(ж_0)$ – плотность распределения величины $ж_0$.

Поскольку по ГОСТ 8.009–84 одной из комплекса характеристик, применяемых при нормировании случайной составляющей $\dot{\Delta}$ погрешности, является предел допускаемого ее среднего квадратического отклонения, то используем в дальнейших расчетах в качестве $П(\Delta ж_0)$ функцию вида

$$П(\Delta ж_0) = (\Delta ж_0)^2.$$

С учетом этого критерии условного и среднего риска будут иметь вид:

$$\rho_1 = \lambda_1^2 = \Delta_c^2 + \sigma_{\dot{\Delta}}^2; \tag{4.11}$$

$$\rho_2 = \int \left(\Delta_c^2 + \sigma_{\dot{\Delta}}^2\right) P(ж_0)\, dж_0, \tag{4.12}$$

где $\Delta_c = \Delta ж_0 - \dot{\Delta}$ – систематическая составляющая погрешности; $\sigma_{\dot{\Delta}}$ – среднее квадратическое отклонение случайной составляющей погрешности; λ_1 – средняя квадратическая погрешность.

При $\Delta_\varepsilon = 0$ выражения (4.11) и (4.12) записываются следующим образом:

$$\rho_1 = \sigma_{\dot{\Delta}}^2; \tag{4.13}$$

$$\rho_2 = \int \sigma_{\dot{\Delta}}^2 P(ж_0)\, dж_0. \tag{4.14}$$

Метрологические показатели (4.13) и (4.14) зависят от параметров и вида структуры первичного измерительного преобразователя, что позволяет их использовать для решения оптимизационных задач. В частности, критерий (4.13) обычно применяется при структурной оптимизации, а критерий среднего риска (4.14), не зависящий от измеряемой величины $ж_0$, для оптимизации параметров структуры [14, 15].

В общем случае выходной сигнал W зависит от измеряемой величины $ж_0$, параметров и условий работы преобразователя $\overline{u}$, неинформативных параметров анализируемого объекта $\overline{x}_{II}$ и собственных шумов измерительной схемы $\overline{\xi}$. Поэтому в квазистатическом режиме статическая характеристика ПИП:

$$W = f(ж_0,\ \overline{x}_{II},\ \overline{u},\ \overline{\xi}). \tag{4.15}$$

В процессе измерения векторы $\overline{x}_{II}$, $\overline{u}$, $\overline{\xi}$ случайным образом отклоняются от своих номинальных значений $\hat{x} = \langle \overline{x}_{II} \rangle$, $\overline{u} = \langle \overline{u} \rangle$, $\hat{\xi} = \rangle \overline{\xi} \langle = 0$*, что обусловливает вероятностный характер сигнала W и служит источником случайной погрешности $\Delta ж_0(\Delta W)$.

При $\overline{x}_{II} = \hat{x}_{II}^*$, $u = \hat{u}$, $\xi = 0$ выражение (4.15) определяет номинальную статическую характеристику первичного измерительного преобразователя:

---

* В общем случае вход и выход первичного измерительного преобразователя (ПИП) рассматриваются как эргодические стационарные случайные процессы.

* Здесь и далее по тексту символами $\hat{\ldots}$ и $\langle \ldots \rangle$ обозначены номинальные значения параметров или функций, равные их математическим ожиданиям в момент градуировки.

$$\hat{\hat{W}} = f_1\left(ж_0, \hat{\hat{x}}, \hat{\hat{u}}\right).$$

Абсолютная погрешность измерений:

$$\Delta ж_0 \cong dж_0 = dW/S_1, \qquad (4.16)$$

где $S_1 = dW/dж_0$ – номинальная чувствительность преобразователя.

Поделив (4.16) на диапазон измерения $D = ж_0^+ - ж_0^-$ ($ж_0^+, ж_0^-$ – соответственно, верхняя и нижняя границы диапазона измерения), получим выражение относительной приведенной погрешности:

$$\delta ж_0 = dW \; / \; S_1 D.$$

Если отклонения $\Delta\bar{x}_{II} = \bar{x}_{II} - \hat{\hat{x}}_{II}$, $\Delta\bar{u} = \bar{u} - \hat{\hat{u}}$ и ξ малы, то получаем [14, 15]:

$$\Delta W = W - \hat{W} \cong dW\big|_{ж_0} = \frac{dW}{d\bar{x}_{II}}\Delta\bar{x}_{II} + \frac{dW}{d\bar{u}}\Delta\bar{u} + \frac{dW}{d\bar{\xi}}\bar{\xi} =$$

$$= \frac{dW}{d\bar{x}_{II}}\hat{\hat{x}}_{II}\delta\bar{x}_{II} + \frac{dW}{d\bar{u}}\hat{\hat{u}}\delta\bar{u} + \frac{dW}{d\bar{\xi}}\bar{\xi},$$

где $\delta\bar{x}_{II} = \Delta\bar{x}_{II} \; / \; \hat{\hat{x}}_{II}$; $\delta\bar{u} = \Delta\bar{u} \; / \; \hat{\hat{u}}$ – относительные отклонения неинформативных параметров $\bar{x}_{II}$ и $\bar{u}$ от номинальных значений.

При $\langle\delta\bar{x}_{II}\rangle = \langle\delta\bar{u}\rangle = \langle\bar{\xi}\rangle = 0$ (обозначает отсутствие систематических погрешностей) выражение для дисперсии случайной погрешности первичного измерительного преобразователя запишется в виде:

$$\sigma_\Delta^2 = \rho_1 = \left\langle\left(\delta ж_0\right)^2\right\rangle =$$

$$= \frac{\left(\frac{dW}{d\bar{x}_{II}}\hat{\hat{x}}\right)^2\left\langle\left(\delta\bar{x}_{II}\right)^2\right\rangle + \left(\frac{dW}{d\bar{u}}\hat{\hat{u}}\right)^2\left\langle\left(\delta\bar{u}\right)^2\right\rangle + \left(\frac{dW}{d\bar{\xi}}\right)^2\left\langle\left(\bar{\xi}\right)^2\right\rangle}{\left(S_1 D\right)^2}. \qquad (4.17)$$

Подставляя (4.17) в (4.14), получим аналитическое выражение для критерия среднего риска:

$$\rho_2 = \frac{1}{D^2}\int_{ж_0^-}^{ж_0^+}\frac{\left(\frac{dW}{d\bar{x}_{II}}\hat{\hat{x}}\right)^2\left\langle\left(\delta\bar{x}_{II}\right)^2\right\rangle + \left(\frac{dW}{d\bar{u}}\hat{\hat{u}}\right)^2\left\langle\left(\delta\bar{u}\right)^2\right\rangle + \left(\frac{dW}{d\bar{\xi}}\right)^2\left\langle\left(\bar{\xi}\right)^2\right\rangle}{S_1^2}\mathrm{P}\left(ж_0\right)dж_0. \qquad (4.18)$$

Анализ выражений (4.16) – (4.18) показывает, что увеличение чувствительности S_1, приводит как к уменьшению характеристик случайной составляющей, так и к снижению общей погрешности $\Delta ж_0 = \dot{\Delta} + \Delta_c$, т.е. косвенным образом к уменьшению систематической составляющей погрешности первичного измерительного преобразователя. Таким образом, минимизация показателя (4.18) и максимизация номинальной чувствительности приводят к снижению уровней случайной и систематической погрешностей.

Критерием максимальной чувствительности может служить следующее выражение:

$$\theta_1\left(\hat{\hat{x}}_{II}, \hat{\hat{u}}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left[S_1\left(ж_{0i}, \hat{\hat{x}}_{II}, \hat{\hat{u}}\right) - S_{1i}^{\max}\right]^2 \to \min_{\hat{\hat{u}}}, \qquad (4.19)$$

где

$$\begin{aligned} &S_{1i}^{\max} = \max_{\hat{\hat{u}}} S_1\left(ж_{0i}, \hat{\hat{x}}_{II}, \hat{\hat{u}}\right), \; ж_{0i} \in \left|ж_0^-, ж_0^+\right|, \\ &S_1\left(ж_{0i}, \hat{\hat{x}}_{II}, \hat{\hat{u}}\right) = \frac{dW}{dж_0\big|_{ж_{0i}}}, \; i = \overline{1, N}. \end{aligned} \qquad (4.20)$$

Для построения критерия (4.19) необходимо решить N вспомогательных оптимизационных задач (4.20) и определить максимальную чувствительность в каждой из точек $ж_{0i} \in \left|ж_0^-, ж_0^+\right|$, т.е. функция $\theta_1\left(\hat{\hat{x}}_{II}, \hat{\hat{u}}\right)$ характеризует степень близости чувствительности первичного измерительного преобразователя в точках $ж_{0i} \in \left|ж_0^-, ж_0^+\right|$ к максимально возможной в этих точках чувствительности.

Выбор модели структурной схемы первичного измерительного преобразователя обычно не вызывает принципиальных трудностей и осуществляется из конечного дискретного множества вариантов построения преобразователя путем сопоставления для каждой структуры значения показателя (4.13).

4.4. ЗАДАЧА ВЕКТОРНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

По своей природе задача параметрической оптимизации всегда многокритериальна, так как при проектировании нового первичного измерительного преобразователя приходится учитывать много различных требований, зачастую противоречащих друг другу. Задача многокритериальной (векторной) оптимизации может быть сформулирована следующим образом.

Пусть задана модель структуры первичного измерительного преобразователя и, следовательно, задана его статическая характеристика в виде функции (4.15); это позволяет построить n метрологических критериев качества преобразователя:

$$I_i = \Gamma_i\, W,\ \ i = \overline{1,n},$$

где Γ_i – некоторый оператор, определенный на множестве значений функции (4.15).

Тогда задача оптимизации сводится к определению такого вектора оптимальных параметров $\hat{\hat{u}}^0 \in U^0$, что

$$I_i\left(ж_0, \hat{\hat{x}}_{\text{II}}, \hat{\hat{u}}^0\right) = \min I_i\left(ж_0, \hat{\hat{x}}_{\text{II}}, \hat{\hat{u}}^0\right),\ \ i = \overline{1,n}, \tag{4.21}$$

где $ж_0 \in \left(ж_0^-, ж_0^+\right)$;

$$U^0 = \left\{\hat{\hat{u}} \middle| g_j\left(\hat{\hat{u}}\right) \ge 0,\ \ j = \overline{1,m}\right\}.$$

Задача (4.21) является задачей оптимизации первичного преобразователя по векторному критерию $I = \{I_i\}_{i=1}^n$, для которой характерна неопределенность целей, т.е. невозможность в большинстве случаев одновременно минимизировать (максимизировать) все компоненты векторного критерия [17]. Неопределенность целей требует привлечения дополнительных гипотез для того, чтобы однозначно сформулировать цель проектирования. Поэтому при решении задачи (4.21) неформальные методы играют не меньшую роль, чем формальный математический аппарат.

В связи с этим решение задачи (4.21) целесообразно проводить в два этапа.

1) построение множества Парето (формальный этап);
2) выбор оптимального решения на множестве Парето (неформальный этап).

По определению [12], точка $\hat{\hat{u}}$ принадлежит множеству Парето (является эффективной, оптимальной по Парето), если во всем допустимом множестве U^0 не найдется другой точки $\hat{\hat{u}}_1$, для которой в системе неравенств:

$$I_i\left(ж_0, \hat{\hat{x}}_{\text{II}}, \hat{\hat{u}}^0\right) \le I_i\left(ж_0, \hat{\hat{x}}_{\text{II}}, \hat{\hat{u}}^0\right),\ \ i = \overline{1,n},$$

$$ж_0 \in \left(ж_0^-, ж_0^+\right) \tag{4.22}$$

хотя бы одно неравенство строгое.

Построение множества Парето позволяет исключить из анализа заведомо худшие варианты решений, проанализировать, например, влияние уменьшения (увеличения) одного из показателей качества на значениях других.

Второй этап решения задачи векторной оптимизации обычно осуществляется с помощью экспертных оценок разработчиков микропроцессорных приборов финансово-экономических исследований.

4.5. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО

Одной из отличительных особенностей многокритериальных задач по сравнению с однокритериальными является невозможность полностью формализовать процесс решения. Математической формализации поддается лишь первый этап решения задачи – построение множества Парето.

В работе [12] показано, что если множество U^0 выпукло и все частные критерии оптимизации I_i – выпуклые функции, то для любой оптимальной по Парето точки $\hat{\hat{u}}_\text{п} \in U^0$ существует такой вектор $\bar{\lambda} \in \Lambda$, где $\Lambda = \left\{\lambda \middle| \lambda_i \ge 0;\ i = \overline{1,n};\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}$, что решение задачи

$$\sum \lambda_i I_i\left(ж_0, \hat{\hat{x}}_{\text{П}}, \hat{\hat{u}}\right) \to \min_{\hat{\hat{u}} \in U^0} \tag{4.23}$$

достигается в точке $\hat{\hat{u}}_{\text{П}}$.

Данное утверждение позволяет строить множество Парето путем выбора различных значений коэффициентов $\bar{\lambda} \in \Lambda$ и решения для каждого из них экстремальной задачи (4.23). Однако в связи с тем, что в большинстве случаев критерии $I_i\left(ж_0, \hat{\hat{x}}_{\text{П}}, \hat{\hat{u}}^0\right)$; $i = \overline{1,n}$ являются сложными функциями $\hat{\hat{u}}$ и размерность вектора $\hat{\hat{u}}$ обычно велика, построение множества Парето описанным выше способом требует больших затрат машинного времени.

На основе литературных данных [12, 20] для построения множества Парето целесообразно выбрать метод, основанный на получении представительной части множества достижимости (множество $D_{\text{р}}$) и выделении из нее приближенно эффективных точек. При этом множество достижимости определяется следующим образом [17].

Каждой точке $\hat{\hat{u}} \in U^0$ при фиксированном значении $ж_0$ и номинальном значении вектора неинформативных параметров объекта соотношения

$$Z_i = I_i\left(ж_0, \hat{\hat{x}}_{\text{П}}, \hat{\hat{u}}\right), \ i = \overline{1,n}, \tag{4.24}$$

ставят в соответствие некоторую точку в пространстве критериев. Соотношения (4.24) определяют отображение множества на множество достижимости D_Z, причем $D_p \in D_z$.

Приближенно эффективными точками множества D_Z будем называть точки, выбранные из D_p на основе определения (4.22) эффективных точек [23]. Очевидно, что приближенно эффективные точки совпадают с эффективными точками, если совпадают множества D_p и D_Z.

В работе [23] показано, что наилучшее представление о множестве достижимости получается в том случае, если значения критериев $I_i\left(ж_0, \hat{\hat{x}}, \hat{\hat{u}}\right)$ вычислять в точках равномерно распределенных последовательностей.

Для построения множества D_p будем использовать так называемые ЛП$_\tau$-последовательности, обладающие наилучшими характеристиками равномерно распределенных последовательностей [23].

Декартовы координаты в единичном n-мерном кубе точки $Q_i = \left\{q_{ij}\right\}_{j=1}^{n}$ такой последовательности можно вычислить следующим образом [23].

По заданному номеру i определяются

$$m = 1 + [\ln i / \ln 2], \tag{4.25}$$

а затем для $j = \overline{1,n}$

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^{m} 2^{-k+1}\left\{\frac{1}{2}\sum_{l=k}^{m}\left[2\left\{i 2^{-l}\right\}\right]\left[2\left\{\Gamma_j^{(l)} 2^{k-1-l}\right\}\right]\right\}. \tag{4.26}$$

В формулах (4.25), (4.26) символами $[I]$ и $\{\Gamma\}$ обозначены соответственно целая и дробная часть; значения чисел приведены в работе [23].

С помощью (4.25), (4.26) рассчитываются координаты точки $\hat{\hat{u}}_i = \left(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}\right)$ в n-мерном параллелепипеде:

$$t_{ij} = a_j + (b_j - a_j)\, q_{ij}, \tag{4.27}$$

где a_j, b_j – ограниченная на j-й варьируемый параметр первичного измерительного преобразователя МП, т.е. $a_j \le t_{ij} \le b_j$.

После получения М* точек ЛП$_\tau$-последовательности их используют для построения множества D, из которого, по определению (4.22), выделяются приближенно эффективные точки, являющиеся при М* $\to \infty$ точками множества Парето.

Для случаев двух критериев нами предлагается следующий алгоритм построения множества Парето.

1. Вычисляются по формуле (4.27) координаты М* точек $\hat{\hat{u}}_i$ ЛП$_\tau$-последовательности.

2. Определяются в точках $\hat{\hat{u}}_i$ значения критериев I_1 и I_2, которые образуют соответственно массивы Y_1 и Y_2.

3. Одним из известных методов производится сортировка массива Y_1 по убыванию значений его членов, при этом необходимо обеспечить, чтобы i-е члены массивов Y_1, Y_2 являлись значениями критериев I_1 и I_2 в одной и той же точке.

4. Для $\sigma = \overline{1, M^* - 1}$ и $\sigma_1 = \overline{\sigma + 1, \sigma + M^*}$ проверяется неравенство

$$Y_2^{\sigma_1} \le Y_2^{\sigma}, \tag{4.28}$$

где $Y_2^{\sigma_1}, Y_2^{\sigma}$ – соответственно σ_1-й и σ-й члены массива Y_2.

Если неравенство (4.28) не выполняется ни для одного значения σ_1, то σ-е члены Y_1 и Y_2 запоминаются соответственно в массивах Y_3 и Y_4. Последними в массивы Y_3, Y_4 заносятся М*-е члены Y_1, Y_2. Нетрудно заметить, что члены массивов Y_3, Y_4 являются координатами приближенно эффективных точек в пространстве критериев, т.е. удовлетворяют определению (4.22).

Как показали численные эксперименты, построение множества Парето по описанному алгоритму осуществляется в 1,5 – 2 раза быстрее, чем по определению (4.22). Выигрыш в скорости достигается за счет использования хорошо разработанных быстродействующих алгоритмов сортировок [13], причем он возрастает с увеличением числа М. Кроме того, применение данного алгоритма значительно упрощает программную реализацию построения приближенно эффективных точек.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Реализация операционной схемы финансово-экономических исследований диктует повышенные требования к коррекции оценки погрешности экономических измерений. Заниженная оценка погрешности измерений ведет к увеличению брака продукции, неэкономичному расходованию материальных ресурсов, неправильным выводам при научных исследованиях, ошибочным решениям при разработке и испытаниях новой техники. Завышенная оценка погрешности приводит к необходимости применения более точных средств измерений (СИ), что вызывает рост затрат на разработку, промышленный выпуск и эксплуатацию СИ.

Основная тенденция развития современной практической метрологии – стремление максимально приблизить оценку погрешности измерений к ее действительному значению так, чтобы она при этом оставалась в вероятностном смысле "оценкой сверху".

В общем случае погрешность измерений зависит от свойств применяемых СИ, способов их использования (методик проведения измерений), корректности калибровки и поверки СИ, условий, в которых выполняются измерения, скорости (частоты) определения измеряемых величин, алгоритмов вычислений, погрешности, вносимой оператором и др.

Далее рассмотрена составляющая погрешность измерений, обусловленная свойствами СИ (инструментальная составляющая погрешности), приведены методы ее расчета в реальных условиях в пределах рабочей области применения СИ в соответствии с РД 50-453-84 с использованием нормируемых метрологических характеристик (НМХ) и характеристик влияющих величин и входного сигнала по ГОСТ 8.009-84.

5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

5.1.1. Инструментальная погрешность. НМХ

Инструментальная погрешность в общем случае включает в себя четыре составляющие:

– погрешность, обусловленная отличием действительной функции преобразования СИ в нормальных условиях от номинальной функции преобразования. Эта составляющая погрешность называется ***основной погрешностью СИ***;

– погрешность, обусловленная реакцией СИ на изменения внешних влияющих величин и неинформативных параметров входного сигнала относительно их нормальных значений. Эта составляющая зависит как от свойств СИ, так и от изменений влияющих величин и называется ***дополнительной погрешностью СИ***;

– погрешность, обусловленная реакцией СИ на скорость (частоту) изменения входного сигнала. Эта составляющая, определяющая динамическую погрешность и режим изменений, зависит как от динамических свойств СИ, так и от частотного спектра входного сигнала и называется ***динамической погрешностью***;

– погрешность, обусловленная взаимодействием СИ и объекта измерений. Эта составляющая зависит как от свойств СИ, так и объекта изменений.

Для оценки инструментальной составляющей погрешности измерений необходима информация о метрологических характеристиках (МХ) СИ. Сведения о МХ СИ получают, как правило, из нормативно-технических документов на СИ. Лишь в тех случаях, когда данных о НМХ недостаточно для эффективного использования СИ, экспериментально исследуют конкретные экземпляры СИ с целью определения их индивидуальных МХ.

На базе информации о НМХ СИ решается ряд задач, связанных с применением СИ, основными из которых являются оценка инструментальной составляющей погрешности измерений и выбор СИ. Решение этих задач базируется на взаимосвязи между инструментальной составляющей погрешности измерений и НМХ СИ с учетом характеристик влияющих величин, отражающих условия эксплуатации СИ, и характеристик входного сигнала СИ, отражающих режим работы СИ (статический или динамический). Характерной особенностью этой взаимосвязи является то, что инструментальная составляющая погрешности измерений, в свою очередь, содержит ряд указанных составляющих, и может быть определена лишь как их объединение.

Эта взаимосвязь выражается в построении комплексов НМХ в соответствии с принятой моделью СИ. Комплекс НМХ, установленный в нормативно-технических документах на СИ конкретного типа, предназначен для использования в следующих основных целях:

– определения результатов измерений, проводимых с применением любого экземпляра СИ данного типа;

– расчетного определения характеристик инструментальной составляющей погрешности измерений, проводимых с использованием любого экземпляра СИ данного типа;

– расчетного определения МХ измерительных систем, в состав которых входит любой экземпляр СИ данного типа;

– оценка метрологической исправности СИ при их испытаниях и поверке.

5.1.2. Модели погрешности средств измерений

При расчетном определении инструментальной составляющей погрешности измерений используется модель вида

$$\Delta_{\mathrm{instr}} = \Delta_{MI} * \Delta_{\mathrm{int}}, \qquad (5.1)$$

где символом $*$ обозначено объединение погрешности Δ_{MI} СИ в реальных условиях применения и составляющей погрешности Δ_{int}, обусловленной взаимодействием СИ с объектом измерения. Под объединением следует понимать применение к составляющим погрешности измерений некоторого фукционала, позволяющего рассчитать погрешность, обусловленную совместным воздействием этих составляющих. При этом под реальным условиями эксплуатации СИ понимают условия конкретного применения СИ, составляющие часть или, в частном случае, совпадающие с рабочими условиями, регламентированными в нормативно-технической документации на СИ.

В соответствии с ГОСТ 8.009–84 считается, что модель погрешности СИ определенного типа в реальных условиях применения может иметь один из двух видов.

Модель вида I описывается выражением:

$$(\Delta_{MI})_1 = \Delta_{os} \cdot \dot{\Delta}_{\text{он}} \cdot \sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci} \cdot \Delta_{dyn}, \qquad (5.2)$$

где Δ_{os} – систематическая составляющая основной погрешности СИ; $\dot{\Delta}_o$ – случайная составляющая основной погрешности СИ; $\dot{\Delta}_{\text{он}}$ – случайная составляющая основной погрешности, обусловленная гистерезисом; $\sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci}$ – объединение дополнительных погрешностей Δ_{ci} СИ, обусловленных действием влияющих величин и неинформативных параметров входного сигнала СИ; Δ_{dyn} – динамическая погрешность СИ, обусловленная влиянием скорости (частоты) изменения входного сигнала СИ; l – число дополнительных погрешностей.

При этом Δ_{os} рассматривают как детермированную величину для отдельного экземпляра СИ, но как случайную величину или процесс для совокупности СИ данного типа. При расчете характеристик погрешности СИ в реальных условиях применения (и при расчете характеристик инструментальной составляющей погрешности измерений) составляющие Δ_{ci} и Δ_{dyn} могут рассматриваться как случайные величины (процессы) или как детерминированные величины в зависимости от того, какие известны характеристики реальных условий применения СИ и спектральные характеристики входного сигнала СИ.

Модель II имеет вид:

$$(\Delta_{MI})_2 = \Delta_o * \sum_{i=1}^{l} \Delta_{ci} * \Delta_{dyn}, \tag{5.3}$$

где Δ_o – основная погрешность СИ (без разделения ее на составляющие, как в модели I); $\Delta_o = \Delta_{os} + \dot{\Delta}_{o\,н}$.

В обоих случаях число l составляющих Δ_{ci} должно быть равно числу всех величин, существенно влияющих на погрешность СИ в реальных условиях применения. При этом в зависимости от свойств СИ данного типа и реальных условий его использования отдельные составляющие (модели I и II) или все составляющие Δ_{ci} и (или) Δ_{dyn} (модель II) могут отсутствовать.

Рассмотренные модели используются при выборе соответствующего комплекса НМХ и лежат в основе методов расчета погрешностей измерений.

Модель I погрешности выбирается для таких СИ, при использовании которых допускается превышение (изредка) действительной погрешности измерений значения, рассчитанного по НМХ СИ. При этом по комплексу НМХ могут быть рассчитаны интервалы в соответствии с ГОСТ 8.011–72, в которых инструментальная составляющая погрешности измерений находится с любой заданной вероятностью, близкой к единице, но не равной ей.

В данном случае рассчитанный интервал охватывает подавляющее большинство возможных действительных значений инструментальной составляющей погрешности измерений, проводимых в реальных условиях. Незначительная часть значений погрешности, не охватываемая данным интервалом, определяется задаваемой при расчете величиной вероятности. Приближая значение вероятности к единице (но не принимая ее равной единице), можно получить достаточно достоверные оценки инструментальной составляющей погрешности измерений.

При этом метод расчета погрешности должен заключаться в статистическом объединении характеристик всех существенных составляющих модели I и составляющей Δ_{int}. Такой же метод следует применять при расчете МХ измерительных систем, в состав которых входят СИ данного типа.

Модель II погрешности выбирается для СИ, при использовании которых в реальных условиях нельзя допустить, чтобы погрешность измерений хотя бы изредка превышала значение, рассчитанное по НМХ СИ. В данном случае, рассчитанный по комплексу НМХ, интервал погрешности будет представлять собой грубую оценку сверху искомой инструментальной составляющей погрешности измерений, охватывающую все возможные, в том числе очень редко реализующиеся, значения погрешности. Для подавляющего большинства измерений этот интервал будет существенно превышать интервал, в котором действительно находятся инструментальные составляющие погрешности измерений. Требование равенства единице вероятности, с которой погрешность находится в данном интервале, приводит практически к значительно завышенным требованиям к МХ СИ при заданной точности измерений.

При использовании модели II метод расчета погрешности состоит в арифметическом суммировании модулей наибольших возможных значений всех существенных составляющих инструментальной составляющей погрешности измерений. Эти наибольшие возможные значения являются границами интервалов, в которых соответствующие составляющие погрешности находятся с вероятностью, равной единице.

5.2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ПОГРЕШНОСТИ СИ В РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

5.2.1. Общая характеристика методов

Методы, установленные РД 50-453-84, позволяют рассчитать следующие характеристики погрешности СИ в реальных условиях эксплуатации:

– математическое ожидание $M[\Delta_{СИ}]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[\Delta_{СИ}]$ погрешности СИ;

– нижнюю $\Delta_{СИ\ н.}$ и верхнюю $\Delta_{СИ\ в.}$ границы интервала, в котором с вероятностью P находится погрешность СИ.

В зависимости от задач измерений, экономической целесообразности и доступной исходной информации используется один из двух методов.

Метод 1 включает в себя расчет статистических моментов составляющих погрешности СИ и позволяет определить как $M[\Delta_{СИ}]$, $\sigma[\Delta_{СИ}]$, так и $\Delta_{СИ\ н.}$, $\Delta_{СИ\ в.}$. Этот метод дает более рациональную (при числе составляющих погрешности СИ более трех) оценку погрешности СИ за счет пренебрежения редко реализующимися значениями погрешности, для чего назначается $P < 1$.

Метод 2 состоит в расчете наибольших возможных значений составляющих погрешности СИ и позволяет определить $\Delta_{СИ\ н.}$ и $\Delta_{СИ\ в.}$ при $P = 1$. Этот метод дает грубую (при числе составляющих погрешности СИ более трех), хотя и надежную оценку погрешности СИ, включающую в себя редко реализующиеся значения погрешности.

Метод 2 целесообразно использовать в следующих случаях:

– если хотя бы маловероятное нарушение требований к точности измерений может привести к серьезным отрицательным техническим или экономическим последствиям или связано с угрозой здоровью и жизни людей;

– завышение требований к МХ СИ, к которому ведет применение данного метода расчета при заданной норме точности измерений, и связанные с этим дополнительные затраты не препятствуют использованию таких СИ.

В качестве исходных данных для расчета используются комплексы НМХ СИ, предусмотренные ГОСТ 8.009–84. НМХ указываются в нормативно технической документации на СИ как характеристики любого экземпляра СИ данного типа. Вместо этих характеристик в качестве исходных данных могут использоваться индивидуальные СИ, определяемые в результате исследования конкретного экземпляра СИ.

5.2.2. Метод 1

Исходные данные. В качестве исходных данных для расчета характеристик погрешности СИ методом 1 используются следующие НМХ: математическое ожидание $M[\Delta_{os}]$ систематической составляющей основной погрешности СИ; среднее квадратичное отклонение $\sigma[\Delta_{os}]$ систематической составляющей основной погрешности СИ; предел $\sigma_p\left[\dot{\Delta}_o\right]$ допускаемого среднего квадратического отклонения случайной составляющей основной погрешности СИ; предел H_{op} допускаемой вариации СИ при нормальных условиях; номинальная цена μ_{sf} единицы наименьшего разряда кода цифрового измерительного прибора (аналого-цифрового измерительного преобразователя); номинальные функции влияния $\psi_{s.sf}(\xi_j)$ $j = 1,2,...,n$ на систематическую составляющей погрешности СИ; номинальные функции влияния $\psi_{\sigma.sf}(\xi_j)$ $j = 1, 2, ..., l$ на среднее квадратическое отклонение случайной составляющей погрешности СИ; номинальные функции влияния $\psi_{H.sf}(\xi_j)$ $j = 1, 2, ..., k$ на вариацию СИ; одна их полных динамических характеристик СИ – номинальная переходная характеристика $h_{sf}(t)$, номинальная импульсная переходная характеристика $g_{sf}(t)$, номинальная амплитудно-фазовая характеристика $G_{sf}(j\omega)$, номинальная передаточная функция $G_{sf}(s)$.

При этом характеристики влияющих величин ξ_j могут быть заданы в двух видах. Вид 1 – значения ξ_j, $j = 1, 2, ... , n$ влияющих величин. Вид 2 – математические ожидания $M[\xi_j]$, средние квадратические отклонения $\sigma[\xi_j]$, наименьшие $\xi_{нj}$ и наибольшие $\xi_{вj}$ значения влияющих величин, соответствующие реальным условиям эксплуатации СИ, $j = 1, 2, ... , n(l, k)$.

Параметры входного сигнала задаются в виде спектральной плотности $S_x(\omega)$ или автокорреляционной функции $R_x(\tau)$ входного сигнала СИ, соответствующие реальным условиям эксплуатации.

Алгоритм расчета по методу 1

1) Для исходных данных о ξ_j вида 1 математическое ожидание $M[\Delta_\xi]$ и $\sigma[\Delta_\xi]$ статической составляющей погрешности СИ при реальных значениях влияющих величин вычисляются соответственно по формулам:

$$M[\Delta_\xi] = M[\Delta_{os}] + \sum_{j=1}^{n} \psi_{s.sf}\left(\xi_j\right) \quad (5.1)$$

и

$$D\left[\Delta_\xi\right] = \sigma^2\left[\Delta_{os}\right] + \left\{\sigma_p\left[\dot{\Delta}_o\right] + \sum_{j=1}^{l} \psi_{\sigma.sf}\left(\xi_j\right)\right\}^2 + $$

$$+ \frac{1}{12}\left[H_{op} + \sum_{j=1}^{k} \psi_{H.sf}\left(\xi_j\right)\right]^2 + \frac{\mu_{sf}^2}{12}; \quad (5.2)$$

2) Для исходных данных о влияющих величинах ξ_j вида 2 $M[\Delta_\xi]$ и $\sigma[\Delta_\xi]$ определяются по формулам:

$$M[\Delta_\xi] = M[\Delta_{os}] + \sum_{j=1}^{n} M\left[\psi_{s.sf}\left(\xi_j\right)\right], \quad (5.3)$$

$$D\left[\Delta_\xi\right] = \sigma^2\left[\Delta_{os}\right] + \sum_{j=1}^{n} D\left[\psi_{\sigma.sf}\left(\xi_j\right)\right] + \left[\sigma_p\left[\dot{\Delta}_o\right] + \sum_{j=1}^{l} \psi_{\sigma.sfm}\left(\xi_j\right)\right]^2 + $$

$$+ \frac{1}{12}\left[H_{op} + \sum_{j=1}^{k} \psi_{H.sfm}\left(\xi_j\right)\right]^2 + \frac{\mu_{sf}^2}{12}, \quad (5.4)$$

где $\psi_{H.sfm}$, $\psi_{\sigma.sfm}$ – наибольшие на интервале $\xi_{Hj} \le \xi_j \le \xi_{Bj}$ номинальные функции влияния $\psi_{H.sf}\left(\xi_j\right)$ и $\psi_{\sigma.sf}\left(\xi_j\right)$.

При этом для линейных функций влияния $\psi_{s.sf}(\xi_j) = K_{s.sfj}(\xi_j - \xi_{ref.j})$ выражения для $M[\psi_{s.sf}\left(\xi_j\right)]$ и $D[\psi_{s.sf}\left(\xi_j\right)]$ соответственно имеют вид:

$$M[\psi_{s.sf}\left(\xi_j\right)] = K_{s.sfj}^0\left(M\left[\xi_j\right] - \xi_{ref.j}\right), \quad (5.5)$$

$$D[\psi_{s.sf}\left(\xi_j\right)] = K_{s.sfj}^2\sigma^2\left(\xi_j\right), \quad (5.6)$$

где $\xi_{ref.j}$ – нормальное значение j-й влияющей величины; $K_{s.sfj}$ – номинальный коэффициент влияния ξ_j на Δ_{os}.

Для вычисления приближенных значений $M[\psi_{s.sf}\left(\xi_j\right)]$ и $D[\psi_{s.sf}\left(\xi_j\right)]$ в случае линейных функций влияния имеем:

$$M[\psi_{s.sf}\left(\xi_j\right)] = \psi_{s.sf}\left(M\left[\xi_j\right]\right) + 0{,}5\psi''_{s.sf}\left(M\left[\xi_j\right]\right)\sigma^2\left[\xi_j\right], \quad (5.7)$$

$$D[\psi_{s.sf}\left(\xi_j\right)] = \left[\psi'_{s.sf}\left(M\left[\xi_j\right]\right)\right]^2\sigma^2\left[\xi_j\right] + 0{,}4\left[\psi''_{s.sf}\left(M\left[\xi_j\right]\right)\right]^2\sigma^4\left[\xi_j\right], \quad (5.8)$$

где $\psi'_{s.sf}\left(M\left[\xi_j\right]\right)$, $\psi''_{s.sf}\left(M\left[\xi_j\right]\right)$ – первая и вторая производные от номинальной функции влияния $\psi_{s.sf}(\xi_j)$ при $\xi_j = (M\left[\xi_j\right])$.

В обоих случаях при определении $M[\Delta_\xi]$ и $D[\Delta_\xi]$ суммирование выполняется для n, l и k влияющих величин, для которых нормированы МХ $\psi_{s.sf}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $\psi_{\sigma.sf}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \ldots, l$; $\psi_{H.sf}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ и значения которых в момент измерения отличаются от установленных для данного СИ нормальных значений. Кроме того, принимается $\mu_{sf} = 0$ для аналоговых СИ.

Примечания:

1. Если для СИ нормирован Δ_{osp} допускаемых значений систематической составляющей основной погрешности без указания значений $M[\Delta_{os}]$ и $\sigma[\Delta_{os}]$ и нет оснований предполагать несимметричность и

полимодальность распределения указанной погрешности в пределах Δ_{osp}, то допускается для расчетов характеристик погрешности СИ пользоваться предположением $M[\Delta_{os}] = 0$, а $\sigma[\Delta_{os}] = \Delta_{osp}/\sqrt{3}$.

2. Для СИ с индивидуальными метрологическими характеристиками для расчетов характеристик погрешности СИ принимается $M[\Delta_{os}] = 0$ и $\sigma[\Delta_{os}] = \Delta_{sm} / \sqrt{3}$, где Δ_{sm} – наибольшая возможная по абсолютной величине неисключенная систематическая составляющая погрешности СИ.

3. Если для j-й влияющей величины известны только ее наименьшее ξ_{Hj} и наибольшее ξ_{Bj} значения, соответствующие реальным условиям эксплуатации СИ, и нет оснований выделить области предпочтительных значений ξ_j в границах от ξ_{Hj} до ξ_{Bj}, несимметрично расположенные относительно центра интервала, определяемого указанными границами, то допускается пользоваться предположением $M[\xi_j] = 0{,}5\,[\xi_{H.j} + \xi_{B.j}]$ и $\sigma[\xi_j] = (\xi_{B.j} - \xi_{H.j})/\left(2\sqrt{3}\right)$.

3) Дисперсия $D[\Delta_{dyn}]$, приведенной к выходу динамической составляющей погрешности Δ_{dyn} аналогового СИ, вычисляется по формуле:

$$D[\Delta_{dyn}] = 2\int_0^{\infty}\left|G_{sf}(j\omega) - G_{sf}(j\omega_0)\right|^2 S_x(\omega)d\omega, \qquad (5.9)$$

где $G_{sf}(j\omega_0)$ – номинальная амплитудно-фазовая характеристика при нормальном значении ω_0 частоты.

Если в качестве характеристики входного сигнала задана его $R_x(\tau)$, то предварительно определяют $S_x(\omega)$ по выражению:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \qquad (5.10)$$

В том случае, если заданы динамические характеристики в виде $G_{sf}(S)$ или $g_{sf}(t)$, или $h_{sf}(t)$, то предварительно осуществляют преобразование этих функций в $G_{sf}(j\omega)$. При этом для $G_{sf}(S)$ это преобразование заключается в замене аргумента S на $j\omega$, а для $g_{sf}(t)$ и $h_{sf}(t)$ – $G_{sf}(j\omega)$ определяется соответственно по формулам:

$$G_{sf}(j\omega) = \int_0^{\infty} g_{sf}(t)e^{-j\omega t}dt, \qquad (5.11)$$

$$G_{sf}(j\omega) = j\omega\int_0^{\infty} h_{sf}(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (5.12)$$

Приведенные методы расчета динамической погрешности применимы для таких аналоговых СИ, которые могут рассматриваться как линейные.

Динамическая погрешность цифровых СИ рассчитывается в соответствии с рекомендациями РД 50-148-79 "Нормирование и определение динамических характеристик аналого-цифровых преобразователей мгновенного значения электрического напряжения и тока".

4) Определение характеристик погрешности СИ в реальных условиях эксплуатации $M[\Delta_{СИ}]$, $\sigma[\Delta_{СИ}]$, $\Delta_{СИ.H}$ и $\Delta_{СИ.B}$ производится соответственно по формулам:

$$M[\Delta_{СИ}] = M[\Delta_{\xi}], \qquad (5.13)$$

$$\sigma[\Delta_{СИ}] = \sqrt{D\left[\Delta_{\xi}\right] + D\left[\Delta_{dyn}\right]}, \qquad (5.14)$$

$$\Delta_{СИ.H} = M[\Delta_{СИ}] - K\sigma[\Delta_{СИ}], \qquad (5.15)$$

$$\Delta_{СИ.B} = M[\Delta_{СИ}] + K\sigma[\Delta_{СИ}], \qquad (5.16)$$

Значение K зависит от вида закона распределения погрешности $\Delta_{СИ}$ и выбранного значения вероятности P.

В том случае, если закон распределения погрешности $\Delta_{СИ}$ может быть отнесен к числу симметричных законов распределения с невозрастающей плотностью по мере удаления от центра распределения, то в качестве K может быть принято K_{cp}, график зависимости которого от P приведен на рис. 5.1.

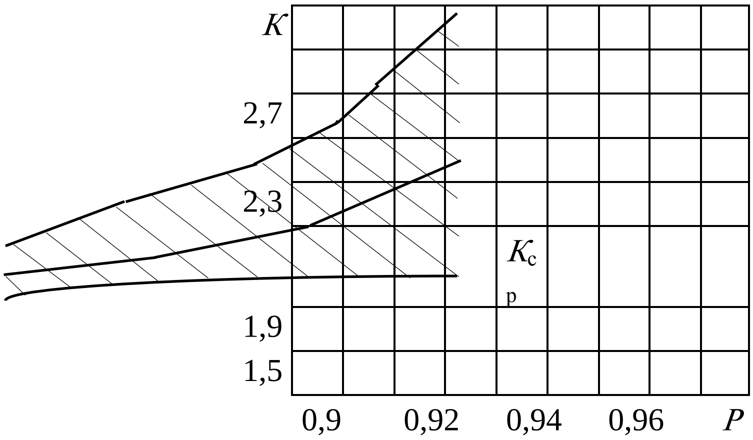


Рис. 5.1. График зависимости коэффициента *K* от *P*

Заштрихованная на рис. 5.1 область соответствует возможным значениям K. Разность между кривой $K_{ср}$ и любой из граничных кривых определяет погрешность коэффициента $K_{ср}$, например при $P = 0{,}95$ эта погрешность лежит в пределах ±16 %, а при $P = 0{,}99$ – в пределах ±30 %.

Для грубых, ориентировочных расчетов, если закон распределения $\Delta_{СИ}$ примерно удовлетворяет указанным требованиям, значение K может быть определено по формуле:

$$K = 0{,}5(P - 0{,}5) \text{ для } 0{,}8 \le P < 1. \tag{5.17}$$

Эта формула дает значения K, несколько завышенные по отношению к $K_{ср}$.

В том случае, если для закона распределения $\Delta_{СИ}$, удовлетворяющего приведенным требованиям, известна оценка параметра λ, равного $\lambda = \Delta / 2\sigma$, где Δ – основание усеченной функции плотности распределения вероятностей (длина интервала погрешности, соответствующая $P = 1$), то значения коэффициента K могут быть выбраны по таблице, в которой также приведены значения наибольшей относительной погрешности δ_K.

P	Значения K (числитель) и δ_K (знаменатель), %				
	2	3	4	5	6
0,90	$\frac{1{,}6}{7}$	$\frac{1{,}7}{25}$	$\frac{1{,}5}{40}$	$\frac{1{,}2}{65}$	–
0,95	$\frac{1{,}7}{8}$	$\frac{2{,}0}{25}$	$\frac{2{,}1}{40}$	$\frac{2{,}0}{45}$	$\frac{1{,}9}{55}$
0,98	$\frac{1{,}8}{8}$	$\frac{2{,}2}{25}$	$\frac{2{,}5}{40}$	$\frac{2{,}7}{45}$	$\frac{2{,}7}{50}$

5.2.3. Метод 2

Исходные данные. В качестве исходных данных при расчете характеристик погрешности СИ методом 2 используются следующие НМХ: предел Δ_{op} допускаемых значений основной погрешности СИ; наибольшие допускаемые изменения $\varepsilon_p(\xi_j)$, $j = 1, 2, ..., n$ погрешности СИ, вызванные изменением влияющих величин ξ_j в установленных пределах.

Характеристики влияющих величин могут быть заданы в двух видах. Вид 1 – значения ξ_j, $j = 1, 2, ..., n$ влияющих величин. Вид 2 – наименьшие $\xi_{H.j}$ и наибольшие $\xi_{B.j}$, $j = 1, 2, ..., n$ значения влияющих величин, соответствующие реальным условиям эксплуатации.

Для описания входного сигнала применяются следующие характеристики: нижняя $\omega_Н$ и верхняя $\omega_В$ границы спектра частот реального входного сигнала x СИ.

Кроме того, в качестве нормируемой динамической характеристики при расчете используется номинальная амплитудно-частотная характеристика $A_{sf}(\omega)$ СИ.

Алгоритм расчета по методу 2

В том случае, когда диапазон изменения $\Delta\xi_{\varepsilon j}$, влияющей величины, для которого нормирована метрологическая характеристика $\varepsilon_p(\xi_j)$, равен диапазону рабочих условий применения СИ, наибольшее по абсолютной величине возможное значение Δ_{cjm} дополнительной погрешности СИ от ξ_j рассчитывается по формуле:

$$\Delta_{cjm} = \varepsilon_p(\xi_j)\ K_\varepsilon(\xi_j), \tag{5.18}$$

где

$$K_\varepsilon(\xi_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_j = \xi_{ref.j}, \\ 1, & \text{если } \xi_j \neq \xi_{ref.j}. \end{cases} \tag{5.19}$$

Если диапазон $\Delta\xi_{\varepsilon j}$ равен лишь части диапазона рабочих условий применения СИ, причем для любой части рабочих условий нормируется одно и то же значение $\varepsilon_p(\xi_j)$, то $K_\varepsilon(\xi_j)$ вычисляется по формуле:

$$K_\varepsilon(\xi_j) = \frac{\left|\xi_j - \xi_{ref.j}\right|}{\Delta\xi_{\varepsilon j}}. \tag{5.20}$$

Выражение (5.20) предполагает наихудший из всех возможных характер зависимости (ступенчатая функция) дополнительной погрешности СИ Δ_{cj} от ξ_j в рабочей области значений влияющей величины. Если в результате исследования определена функция влияния конкретного экземпляра СИ, то расчет Δ_{cjm} может выполняться с использованием этой функции. Например, если в результате исследования установлен линейный характер зависимости Δ_{cj} от ξ_j, то для расчета может быть использовано выражение (5.20) вместо (5.19).

При определении значения $K_\varepsilon(\xi_j)$ по формулам (5.19) и (5.20) для исходных данных вида 1 в качестве ξ_j используются конкретные значения влияющей величины, а для исходных данных вида 2 – используется то из значений $\xi_{H.j}$ или $\xi_{B.j}$, при котором $K_\varepsilon(\xi_j)$ имеет наибольшее значение.

Оценка сверху относительного значения $\delta_{dyn.m}$ динамической погрешности для СИ с линейной фазово-частотной характеристикой имеет вид:

$$\delta_{dyn.m} = \left|1 - \frac{A_{sf}(\omega_0)}{A_{sf}(\omega_m)}\right| \text{и} \tag{5.21}$$

где $A_{sf}(\omega_0)$ – номинальная амплитудно-частотная характеристика при нормальном значении ω_0 частоты; $A_{sf}(\omega_m)$ – номинальная амплитудно-частотная характеристика, отклоняющаяся на интервале $\omega_H \le \omega_m \le \omega_B$ от значения $A_{sf}(\omega_0)$.

При расчете данным методом нижняя $\Delta_{\text{СИн}}$ и верхняя $\Delta_{\text{СИв}}$ границы интервала, в котором с вероятностью $P = 1$ находится погрешность СИ в реальных условиях эксплуатации, определяются по формулам:

$$\Delta_{\text{СИв}} = \Delta_{op} + \sum_{j=1}^{n} \Delta_{cjm} + \delta_{dyn.m} R\text{и} \tag{5.22}$$

$$\Delta_{\text{СИн}} = -\,\Delta_{\text{СИв}}, \tag{5.23}$$

где R – результат измерения.

При этом суммирование выполняется для n влияющих величин, для которых нормированы метрологические характеристики $\varepsilon_p(\xi_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ и значения которых в момент измерения отличаются от установленных для данного СИ нормальных значений.

При расчетах, используя рассмотренные методы, все исходные данные должны быть приведены к одной и той же точке схемы измерений: входу или выходу СИ и выражены в единицах, обеспечивающих получение всех составляющих погрешности Си в одних и тех же абсолютных или относительных (в долях или процентах от одного и того же значения измеряемой величины) единицах.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ КОНТРОЛЯФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Сложность финансово-экономических задач требует создания системных средств измерения (СИ), которые позволяют воспринимать и перерабатывать значительные объемы финансово-экономической информации.

К СИ такого типа относятся автоматические системы контроля (АСК), структура которых диктуется конкретными условиями применения. Определение метрологических характеристик измерительных каналов (ИК) АСК имеет особое значение, так как они, как правило, определяют надежность последующей обработки информации и соответственно корректность принятия решений.

Ниже рассмотрены структуры АСК и их ИК, приведены существующие способы оценки погрешности ИК, структура которых не включает в себя ЭВМ.

6.1. ФУНКЦИИ И СТРУКТУРА АСК

6.1.1. Функции АСК

АСК относятся к классу измерительных систем (ИС), в которых преобладает функция измерения, а функция обработки и хранения информации, получаемой в процессе измерения, незначительна или полностью отсутствуют. Кроме того, специфической функцией АСК является индикация отклонений измеряемого экономического показателя от заданных границ в конкретном ИК и времени наступления события. Практически таких границ (норм) может быть от одной до четырех: предупредительная "меньше", предупредительная "больше", аварийная "меньше" и аварийная "больше".

Рассмотренные функции позволяют использовать АСК в качестве составной части информационно-измерительных подсистем АСУ финансово-экономических исследований.

6.1.2. Функциональная структура АСК

Основой для построения любых ИС, и в том числе АСК, является набор следующих функциональных элементов: первичные измерительные преобразователи (ПП), элементы сравнения (ЭС), меры (М) и элементы выдачи результата (ВР). Кроме того, специфика АСК требует введения в структуру ИК элементов индикации отклонений (ЭИО) и норм (Н).

Сочетание этих элементов образует соответствующую структуру АСК, которая определяется задачей экономического измерения и свойствами финансово-экономического объекта (ОК).

При измерении разнородных экономических величин наиболее распространены многоканальные АСК, или АСК с параллельной структурой (рис. 6.1), и многоточечные АСК, или АСК с параллельно-последователь-ной структурой (рис. 6.2), в которую включен коммутатор каналов (К).

Многоканальные АСК содержат в каждом ИК полный набор элементов, обладают высокой надежностью и быстродействием при одновременном получении результатов экономических измерений, а также дают возможность индивидуального подбора СИ к измеряемым показателям, что в ряде случаев исключает необходимость унификации сигналов. К недостаткам таких систем следует отнести достаточно высокую сложность и стоимость.

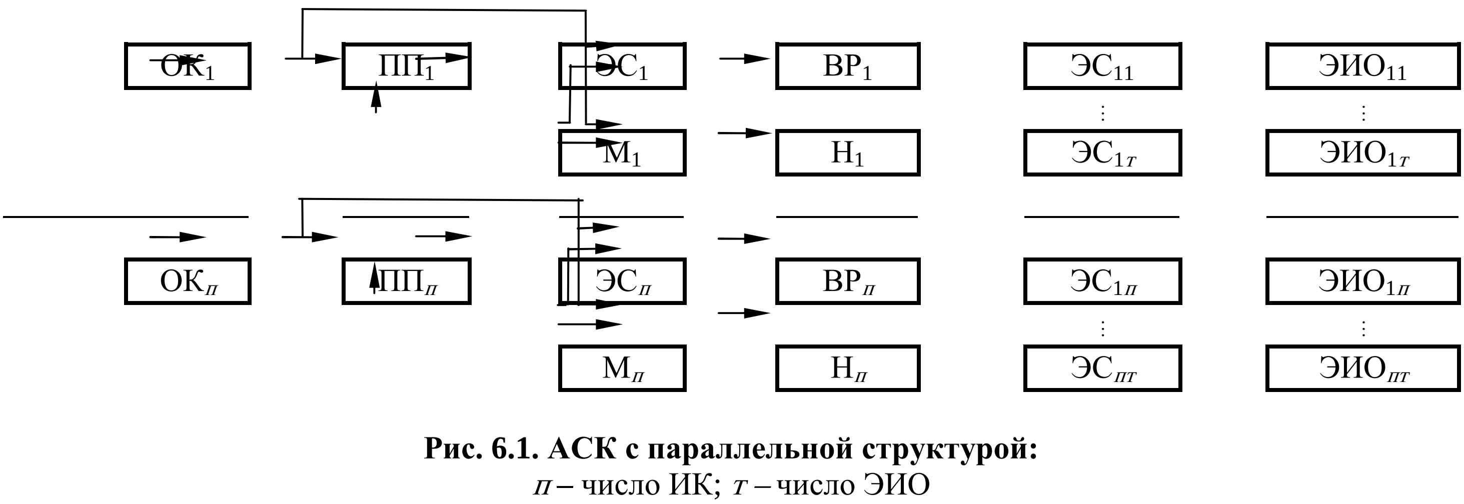


Рис. 6.1. АСК с параллельной структурой:
$п$ – число ИК; $т$ – число ЭИО

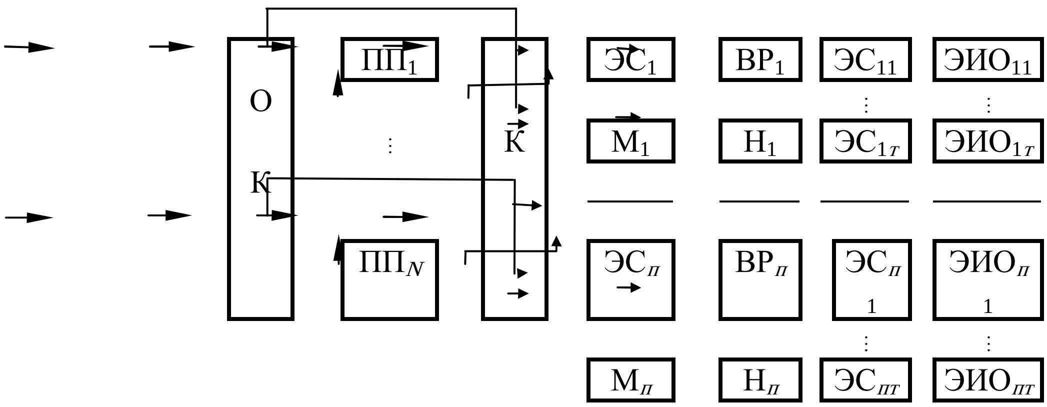


Рис. 6.2. АСК с параллельно-последовательной структурой: $n < N$

АСК с параллельно-последовательной структурой, как правило, используют при организации контроля сложных объектов с большим числом измеряемых финансово-экономических показателей.

Многократное последовательное применение отдельных элементов измерительного тракта при параллельном соединении входных элементов ИК приводит к минимальной сложности АСК данной структуры. Их достоинством, кроме того, является возможность наращивания числа ИК за счет расширения функций измерительного коммутатора К. Недостатками этих АСК являются снижение быстродействия при большом числе опрашиваемых каналов и точности, обусловленное введением в структуру измерительных коммутаторов.

Промышленные АСК подразделяются на системы, которые осуществляют непрерывный контроль показателей объекта (рис. 6.1), системы с дискретным последовательным контролем этих показателей (рис. 6.2) и комбинированные системы (рис. 6.3). Последние реализуются наиболее часто, так как при этом особо важные показатели контролируются непрерывно, а по всем остальным проводится дискретный последовательный контроль. АСК с комбинированными структурами сочетают в себе свойства обеих приведенных структур.

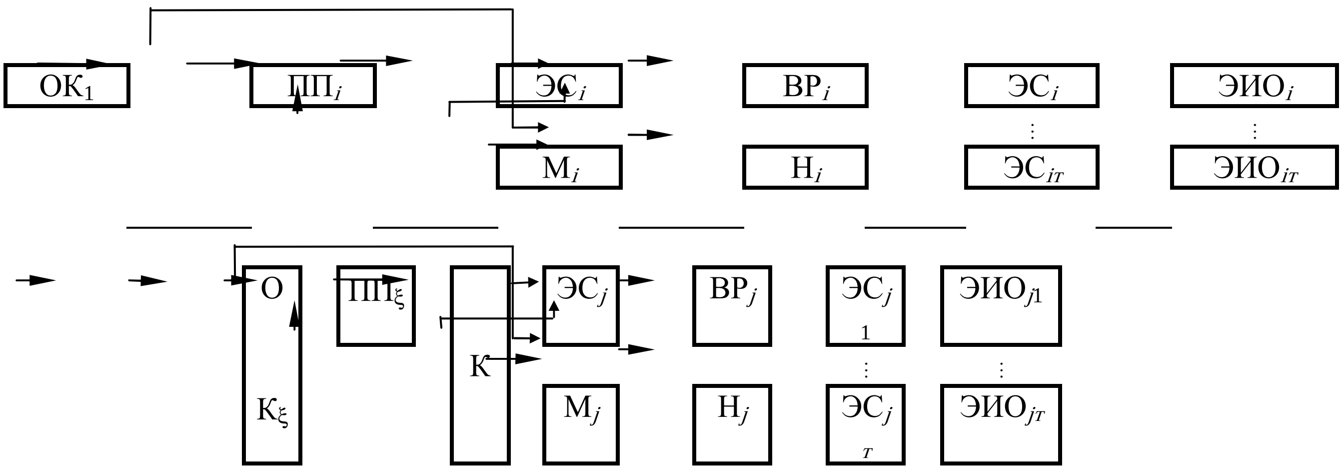


Рис. 6.3. АСК с комбинированной структурой:
$i = 1, \dots, k$; $\xi = 1, \dots, l$; $n = k + l$; $j < \xi$.

6.1.3. Техническая структура АСК

Измерение разнородных экономических величин требует наличия соответствующего числа мер. В этом смысле АСК следует отнести к децентрализованным ИС, структура ИК которых должна включать в себя определенный ряд элементов М соответственно числу измеряемых финансово-экономических показателей.

Техническая же структура АСК, как правило, является централизованной, не исключая при этом возможность независимого использования одноканальных ИС (индивидуальный контроль).

Интеграция достижений сенсорной, микроэлектронной и микропроцессорной техники позволяет придать датчикам "интеллектуальность" и за счет этого улучшить характеристики и расширить функциональные возможности не только самих датчиков, но и системы, в которой они взаимодействуют. В этом случае возможно размещение и распределение "интеллекта" как по ИК системы, так и его сосредоточение в ПП на месте измерения. Однако техническая структура АСК при этом остается централизованной.

Различные варианты реализации технических структур АСК и их ИК представлены на рис. 6.4.

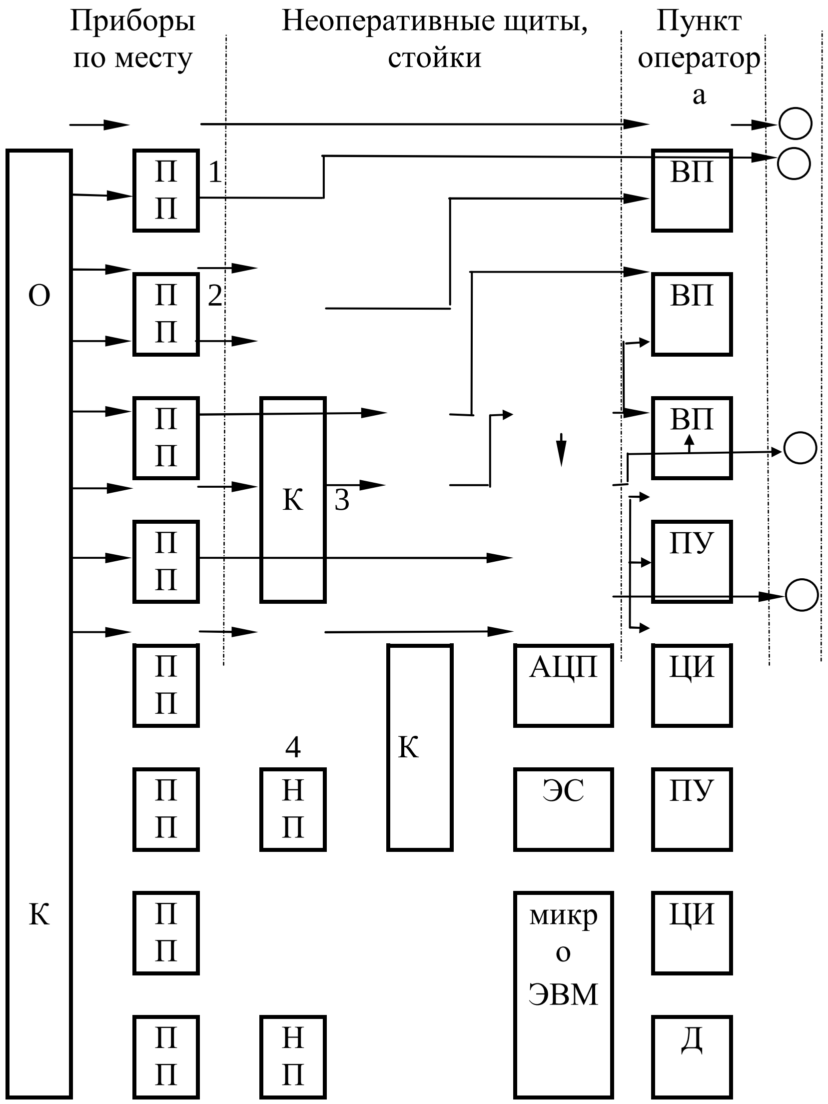


Рис. 6.4. Техническая структура АСК

Системы 1 и 2 (рис. 6.4) относятся к одноканальным ИС индивидуального контроля. В системе 1 сигналы ПП поступают на показывающие или самопишущие вторичные приборы (ВП), которые могут также выполнять функцию индикации отклонений измеряемой экономической величины от установленных норм.

В системе 2 ВП устанавливают у финансово-экономического объекта и сигнал об отклонении показателя от заданных границ поступает непосредственно на операторский пункт.

Система 3 является многоточечной АСК (см. рис. 6.2), которые часто используют при множественном контроле однородных экономических величин. В этой системе для измерения сигналов ПП применяется один показывающий или самопишущий ВП. Коммутация его входных цепей осуществляется ручным или автоматическим К, которые обычно встраиваются в ВП.

В системе 4 унифицированные сигналы от ПП или нормирующих преобразователей (НП) поступают в К, с выхода которого сигналы подаются либо на аналоговые многоканальные ВП, либо после аналогово-цифрового преобразователя (АЦП) – на цифровые индикаторы (ЦИ) или печатающие устройства (ПУ). ЭС осуществляет сопоставление величин контролируемых показателей с заданными значениями и при выходе определенного показателя из области допустимых значений выдает сигнал на устройства индикации отклонений.

Использование микроЭВМ позволяет так перестроить структуру АСК, что часть функций (коммутация каналов, аналогово-цифровое преобразование, сравнение с нормой), выполняемых отдельными элементами АСК, целесообразно передать ЭВМ, такая система представлена структурой 5 (см. рис. 6.4).

В этом случае существенно изменяется форма и технические средства представления информации, которая может выводится на экраны дисплеев (Д). При этом на экранах могут быть представлены статические изображения фрагментов финансово-экономических схем, на которые накладывается информация о значениях измеряемых показателей.

В простейшем случае, как это видно из рис. 6.4, структура ИК АСК может быть представлена в виде последовательной цепи, состоящей из ПП, линии связи ЛС и ВП (рис. 6.5).

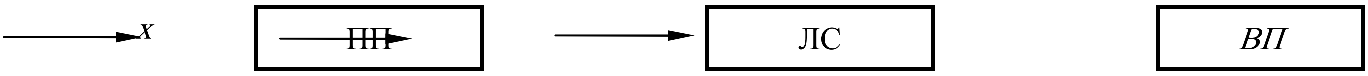


Рис. 6.5. Структура ИК АСП:
x – контролируемый показатель

Расширение функциональных возможностей АСК естественно приводит к необходимости введения дополнительных элементов в ее структуру, таких, как функциональные преобразователи (ФП) и устройства размножения сигналов (УРС). ФП могут выполнять достаточно простые вычислительные процедуры в аналоговой форме.

Различные промежуточные варианты сочетаний рассмотренных элементов структуры ИК определяются условиями измерения.

6.2. СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ АСК

Анализ структурных схем ИК АСК показывает, что ИК, как правило, представляет собой последовательную цепь преобразователей, каждый из которых в соответствии со стандартом имеет нормируемые метрологические характеристики.

Рассмотрим два способа расчета погрешностей таких ИК. Первый базируется на использовании предельных основных и допустимых погрешностей СИ, а второй – на информации о статистических характеристиках систематической и случайной составляющих погрешности, а также соответствующих функций влияния на эти составляющие.

При этом считаем, что динамическая составляющая погрешности СИ отсутствует.

6.2.1. Способ 1

В этом случае производится оценка пределов погрешностей ИК по пределам допускаемых основных и дополнительных погрешностей СИ, входящих в ИК, определяемым их классом точности. При этом определяется максимальное значение погрешности ИК. Величину этой погрешности находим из выражения:

$$\delta_{\text{ИК}} = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2}, \qquad (6.1)$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ – пределы допускаемых приведенных погрешностей СИ, входящих в структуру ИК.

Использование данного способа корректно в том случае, если предельные погрешности $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ независимы и их значения соответствуют одинаковым доверительным вероятностям при однотипных законах распределения.

Для большинства практических задач применение такого способа оценки погрешности ИК дает удовлетворительные результаты. Однако при наличии корреляции погрешностей СИ одного ИК, вызванной изменением общей для этих СИ влияющей величины, формула (6.1) не обеспечивает требуемой точности расчета погрешности ИК. Это обусловлено тем, что погрешности отдельных СИ одного ИК могут иметь различные знаки, что не исключает возможности появления результирующей погрешности ИК, превышающей рассчитанную по выражению (6.1).

6.2.2. Способ 2

Использование этого способа позволяет рассчитать интервалы, в которых погрешность ИК находится с заданной вероятностью. Этот интервал охватывает подавляющее большинство возможных действительных значений погрешности ИК в реальных условиях. Часть значений погрешности, не охватываемых данным интервалом, определяется задаваемой при расчете величиной вероятности. Способ заключается в статистическом объединении характеристик всех существенных составляющих погрешности СИ ИК. Общий подход заключается в следующем.

Математическое ожидание $M[\Delta_{ИК}]$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma[\Delta_{ИК}]$ погрешности ИК $\Delta_{ИК}$, состоящего из нескольких последовательно включенных СИ с коэффициентом преобразования равным единице, соответственно имеет вид:

$$M[\Delta_{ИК}] = \sum_{i=1}^{n} M[\Delta_{СИi}]; \tag{6.2}$$

$$\sigma[\Delta_{ИК}] = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2[\Delta_{СИi}], \tag{6.3}$$

где $M[\Delta_{СИi}]$ и $\sigma[\Delta_{СИi}]$ – математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение погрешности СИ, входящих в ИК.

$M[\Delta_{СИn}]$ и $\sigma[\Delta_{СИn}]$ при реальных значениях влияющих величин определяются по формулам:

$$M[\Delta_{СИi}] = M[\Delta_{\xi i}]; \tag{6.4}$$

$$\sigma[\Delta_{СИi}] = \sqrt{D[\Delta_{\xi i}] + D[\Delta_{dyn.i}]}, \tag{6.5}$$

где $D[\Delta_{dyn.i}]$ – дисперсия приведенной к выходу динамической составляющей $\Delta_{dyn.i}$ аналогового СИ.

Для реализации этого способа по моделям (6.2. – 6.5) необходима информация о рассматриваемых метрологических характеристиках СИ, которая может быть получена из нормативно-технических документов для типа СИ, т.е. множества идентичных СИ.

6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Внедрение информационных технологий в эконометрику финансово-экономических исследований требует детального рассмотрения преобразования показателя в типовом информационно-измерительном канале со структурой, показанной на рис. 6.6, причем наиболее часто измеряемый показатель рассматривается как эргодический стационарный случайный процесс [11].

Входной сигнал АСК $z(t)$ содержит полезную составляющую $y(t)$ и адитивную помеху, поэтому:

$$z(t) = y(t) + e(t). \tag{6.6}$$

Непрерывная функция (6.6) преобразуется в коммутаторе К (рис. 6.6) в последовательность импульсов, модулированных по амплитуде функцией $z(t)$ (рис. 6.7).

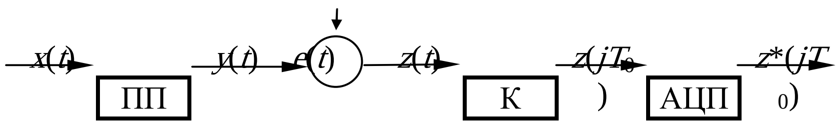


Рис. 6.6. Структурная схема информационно-измерительного канала АСК:
$x(t)$, $y(t)$ – входной и выходной сигналы; $e(t)$ – эквивалентная помеха;
К – коммутатор; $z(t)$, $z(jT_0)$ – входной и выходной сигналы коммутатора;
T_0 – период квантования; $z^*(jT_0)$ – оценка выходного сигнала
аналого-цифрового преобразователя

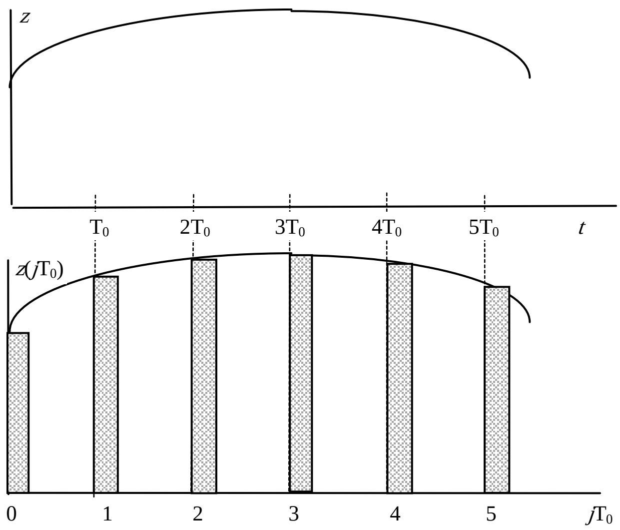


Рис. 6.7. Преобразование входного сигнала $z(t)$

Квантование сигнала $z(jT_0)$ коммутатора по уровню заключается в том, что формируется величина:

$$z^*(jT_0) = \Delta z F\left[\frac{z(jT_0)}{\Delta z}\right], \qquad (6.7)$$

где $\Delta z = (z_{\max} - z_{\min}) / 2^n$ – шаг квантования по уровню; $z_{\max}$ и $z_{\min}$ – предельные значения величины z; $F[q]$ – обозначение функции “целая часть от числа q”; n – число разрядов в двоичном коде чисел.

Полученное число $z^*(jT_0)$ вводится в ячейку ОЗУ системы для исследований финансово-экономических показателей и в дальнейшем представляет в ЭВМ значение функции $x(t)$ в момент времени $t = jT_0$.

Следовательно, первичная обработка исходной информации, как правило, включает следующие этапы:

1. Определение оценки $\bar{y}(jT_0)$ величины $z(jT_0)$ по $z^*(jT_0)$:

$$\bar{y}(jT_0) = z(jT_0) - e(jT_0); \qquad (6.8)$$

2. Определение оценки измеренного показателя $x(jT_0)$ по градуированной характеристике ПП:

$$\bar{x}(jT_0) = f_0^{-1}\left[\bar{y}(jT_0)\right]; \mid t = jT_0 ; \qquad (6.9)$$

3. Определение оценки измеряемого показателя в произвольный момент времени $jT_0 \le t \le (j+1)T_0$:

$$\bar{x}(t) = \Phi\left[\bar{x}(jT_0)\right], \qquad (6.10)$$

где Φ – функционал (экстраполирующая функция).

Для использования выражений (6.8), (6.9) и (6.10) в практике финансово-экономических исследований необходимо оценить погрешности квантования по уровню и по времени, определяющие достоверность получаемой информации.

Оценка погрешности по уровню не превышает величины

$$\delta_1 = \frac{\Delta z}{z_{\max} - z_{\min}} = \frac{1}{2^n}.$$

Квантование непрерывной функции $z(t)$ во времени связано с потерей информации и сопровождается изменением спектра функции $z(t)$ от непрерывного до дискретного (решетчатого). Применяя теорему Котельникова-Шеннона, можно показать, что если функция $z(t)$ имеет ограниченный спектр и частота квантования удовлетворяет условию, что $\omega_0 \ge 2\omega_c$ ($\omega_0 = 2\pi \mid T_0$, ω_c – частота среза), то с учетом использования "идеального" фильтра, выходной сигнал которого будет иметь спектр, совпадающий со спектром функции $z(t)$, погрешностями пренебрегают. При использовании реальных фильтров, например, с характеристикой

$$\bar{z}(t) = \begin{cases} z(jT_0); & jT_0 \le t < (j+1)T_0; \\ 0; & t \ge (j+1)T_0, \end{cases}$$

что соответствует модели экстраполятора нулевого порядка, возникает погрешность экстраполяции: $e_э(t) = \bar{z}(t) - z(t)$. С учетом модели фильтра и для новой переменной $\tau = t - jT_0$, получаем, что $e_э(\tau) = z(0) - z(\tau)$.

Для стационарной случайной функции $z(t)$ математическое ожидание погрешности $e_э(t)$ равно нулю, а дисперсия этой погрешности определяется по формуле:

$$D[e_э(\tau)] = 2[R_z(0) - R_z(\tau)],$$

где $R_z(\tau)$ – автокорреляционная функция случайного процесса $z(t)$.

Для практического использования рекомендуется применять выражение для расчета средней квадратической погрешности, возникающей при квантовании сигнала $z(t)$ по времени с периодом T_0 и последующим восстановлением функции $z(t)$ экстраполятором нулевого порядка:

$$\sigma\left[e_э(t)\right] = \sigma_2 = \sqrt{2\left[R_z(0) - \frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0} R_z(\tau)\,d\tau\right]}.$$

Применяя способ 1 оценки погрешности ИК АСК можно записать, что общая погрешность $\sigma_И$, вызванная потерей информации при первичной обработке показателей в системах современных информационных технологий, равна $\sigma_И = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азизов, А.М. Точность измерительных преобразователей / А.М. Азизов, А.Н. Гордов. – Л. : Энергия, Ленингр. отд-ние, 1975. – 256 с.
2. Браславский, Д.А. Точность измерительных устройств / Д.А. Браславский, В.В. Петров. – М. : Машиностроение, 1976. – 312 с.
3. Бренер, М.Д. Методы определения динамических характеристик средств измерений / М.Д. Бренер, Г.Н. Солопченко, В.М. Хрумало // Измерения, контроль, автоматизация : сб. – 1979. – Вып. 1. – С. 19 – 29.
4. Бурдун, Г.Д. Основы метрологии / Г.Д. Бурдун, Б.Н. Марков. – М. : Стандарты, 1975. – 336 с.
5. Воскрокнутов, Н.Г. Информационно-измерительная техника / Н.Г. Воскрокнутов, Н.Н. Евтихиев. – М. : Высшая школа, 1977. – 232 с.
6. Грановский, В.А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л. : Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1984. – 224 с.
7. Елисеева, И.И. Эконометрия / И.И. Елисеева, В.П. Чернов, Ю.Н. Эйсснер. – М. : Финансы и статистика, 1997.
8. Иванцов, А.И. Основы теории чувствительности измерительных устройств / А.И. Иванцов. – М. : Стандарты, 1972. – 212 с.
9. Казаков, А.В. Методика оптимального параметрического синтеза измерительного преобразователя / А.В. Казаков // Автоматизация : науч. техн. реф. сб. НИИТЭХИМ. – М., 1975. – Вып. 3. – С. 39 – 46.
10. Казаков, А.В. О задаче оптимального проектирования (параметрического синтеза) измерительного преобразователя / А.В. Казаков // Автоматизация : науч. техн. реф. сб. НИИТЭХИМ. – М., 1975. – Вып. 8. – С. 25 – 34.
11. Казаков, А.В. Первичная обработка информации в информационной подсистеме АСУ ТП : в кн. Автоматизация технологических процессов пищевых производств / А.В. Казаков. – М. : Агропромиздат, 1985. – С. 318 – 334.
12. Кини, Л.Р. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Л.Р. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.
13. Кнут, Д.Е. Искусство программирования для ЭВМ. Сортировка и поиск / Д.Е. Кнут. – Т. 3. – М. : Мир, 1978. – 843 с.
14. Кораблев, И.В. Расчет и проектирование аналитических приборов на основе точностных критериев / И.В Кораблев. – М. : НИИТЭХИМ, 1982. – 34 с.
15. Кораблев, И.В. Использование статистических методов при проектировании и оптимизации эксплуатационных режимов аналитических приборов / И.В. Кораблев. – М. : ЦНИИТЭнефтехим, 1983. – 43 с.
16. Костенко, С.В. Выбор структуры измерительного устройства по трем показателям качества / С.В. Костенко // Автоматизация : науч. техн. реф. сб. НИИТЭХИМ. – М., 1981. – Вып. 1. – С. 24 – 29.
17. Моисеев, Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. – М. : Наука, 1981. – 488 с.
18. Новицкий, П.В. Динамика погрешностей средств измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф, В.С. Лабунец. – Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1990. – 192 с.
19. Рабинович, С.Г. Погрешности измерений / С.Г. Рабинович. – Л. : Энергия, Ленингр. отд-ние, 1978. – 262 с.
20. Салуквадзе, М.Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления / М.Е. Салуквадзе. – Тбилиси : Мецниереба, 1975. – 201 с.
21. Свешников, А.А. Основы теории ошибок / А.А. Свешников. – Л. : ЛГУ, 1972. – 126 с.
22. Серегина, Н.И. Определение погрешностей прямых измерений изменяющихся величин / Н.И. Серегина, Г.Н. Солопченко, В.Н. Хрумало // Измерения, контроль, автоматизация : сб. – 1978. – Вып. 4. – С. 14 – 27.
23. Соболь, И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболь, Р.Б. Статников. – М. : Наука, 1981. – 110 с.
24. Субетто, А.И. Квалиметрия в приборостроении и машиностроe-нии / А.И. Субетто, Ю.Н. Андрианов. – Л. : Машиностроение, 1990. – 216 с.
25. Шаттелес, Т. Современные эконометрические методы / Т. Шаттелес. – М. : Статистика, 1975. – 240 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ