РЯДЫ.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

ББК В17я73-5
УДК 517.537:511.37:519.22/25(07)
Н349

Рекомендовано Редакционно-издательским советом университета

Р е ц е н з е н т

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики ТГТУ
В.В. Васильев

С о с т а в и т е л и :
А.Д. Нахман, И.В. Косенкова

Н349 Ряды. Теория вероятностей и математическая статистика : методические разработки / сост. : А.Д. Нахман, И.В. Косенкова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 32 с. – 100 экз.

Изложены основные теоретические сведения, типовые задачи (с образцами решений) и контрольные задания по курсу: «Ряды. Функции комплексного переменного. Элементы теории вероятностей и математической статистики».

Предназначены для студентов 2-го курса инженерно-технических специальностей заочной формы обучения.

ББК В17я73-5
УДК 517.537:511.37:519.22/25(07)

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

РЯДЫ.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические разработки
для студентов 2 курса инженерно-технических специальностей
заочной формы обучения

Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

Учебное издание

РЯДЫ.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические разработки

Составители:
НАХМАН Александр Давидович
КОСЕНКОВА Инна Викторовна

Редактор Л.В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию М.А. Филатова

Подписано в печать 31.08.2009.
Формат 60 × 84/16. 1,39 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 324.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Методические разработки содержат основные сведения по следующим разделам курса математики: «Числовые ряды. Степенные ряды», «Функции комплексного переменного», «Элементы теории вероятностей и математической статистики». Предложены типовые задачи и образцы их решений, ознакомившись с которыми, студент может приступать к выполнению контрольных заданий. Контрольная работа по теме «Ряды» содержит задания на исследование сходимости знакоположительных и знакочередующихся рядов, а также на применение разложений Маклорена функций действительного переменного к решению задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Задания контрольной работы по теме «Функции комплексного переменного» объединены общей идеей представления аналитических функций степенными рядами. В общем случае, здесь необходимы умения вычислять значения степенных функций и производных элементарных функций комплексного переменного. Работа содержит также задания на нахождение круга сходимости степенного ряда, разложения аналитических функций в ряды Маклорена и Лорана.

В работе по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики» контролируются умения оперировать с формулами вычисления вероятностей случайных событий, распределением Пуассона, вычислять числовые характеристики непрерывной случайной величины. Предлагаются задания на вычисление выборочной средней и выборочной дисперсии, а также на нахождение интервальных оценок неизвестного параметра нормального распределения.

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1.1. *Основные понятия.* Пусть дана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$. Числовым рядом называется формально составленная бесконечная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad . \qquad (1)$$

Ряд (1) называется сходящимся (и имеющим сумму S), если существует и конечен предел вида $S = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ и расходящимся в противном случае.

1.2. *Достаточный признак расходимости ряда.* Если

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

то ряд (1) расходится. В случае же $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся (его поведение зависит от вида последовательности $\{a_n\}$).

1.3. «*Обобщённый гармонический ряд*»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

является сходящимся при $p > 1$ и расходящимся при $p \le 1$.

1.4. *Достаточные признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с положительными членами.* Пусть дан ряд (1), в котором $a_n > 0$.

Признак Даламбера. Если существует предел вида

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

то при $D < 1$ ряд – сходящийся, при $D > 1$ – расходящийся.

Признак Коши. Если существует предел вида

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

то при $K < 1$ ряд – сходящийся, при $K > 1$ – расходящийся.

З а м е ч а н и е . В случаях $D = 1$ или $K = 1$ соответствующий признак не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда; требуется применить другие признаки.

1.5. *Признак сравнения знакоположительных рядов.* Предположим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ b_n > 0 \ \ (n = 1, 2, ...) \qquad (2)$$

имеет заранее известное поведение и существует предел вида

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Если $L \neq 0$ и $L \neq \infty$, то поведение ряда такое же, как и ряда (2).

З а м е ч а н и е . Ряд (2), определяющий поведение данного ряда, называют эталонным. Часто в качестве эталона выбирают обобщённый гармонический ряд.

1.6. *Достаточный интегральный признак* (Коши) сходимости знакоположительных рядов. Построим функцию $f(x)$, заменив n на x в аналитическом выражении общего члена a_n.

Если $f(x)$ непрерывна и убывает на $[1; +\infty)$, то знакоположительный ряд является сходящимся в случае сходимости несобственного интеграла

$$J = \int_1^{\infty} f(x)dx, \qquad (3)$$

(т.е. в случае, если J – число). Если же интеграл (3) является расходящимся ($J = +\infty$), то ряд расходится. Если члены ряда нумеруются, начиная с $n = \ell$ ($\ell > 1$), то интеграл вида (3) берётся по $x \in [\ell; \infty)$.

1.7. *Сравнительная характеристика признаков*. При исследовании конкретного ряда следует удачно выбрать соответствующий признак. Здесь можно пользоваться следующими рекомендациями:

1) если члены ряда быстро убывают (растут), то бывает эффективен признак Даламбера;

2) если выражение для a_n имеет вид блока в степени, кратной n (так что легко извлекается корень n-й степени), то эффективен признак Коши;

3) если выражение для a_n содержит арифметические действия над степенными функциями, то при больших значениях n члены ряда ведут себя как $\frac{1}{n^p}$, и, следовательно, в качестве эталона для сравнения выбирают обобщённый гармонический ряд с соответствующим значением p. Обычно эффективен признак сравнения в предельной форме;

4) если для функции $f(x)$, полученной при замене n на x в выражении a_n, достаточно легко вычисляется первообразная $F(x)$, то бывает эффективен интегральный признак.

Указанные рекомендации не охватывают, естественно, все возможные случаи и служат лишь в качестве наводящих соображений.

П р и м е р . Исследовать сходимость ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)5^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$; в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Р е ш е н и е . а) Общий член знакоположительного ряда

$$a_n = \frac{(2n+1)5^n}{n^2}$$

содержит множителем показательную функцию. Согласно п. 1.7, целесообразно применить признак Даламбера (1.4). Найдём a_{n+1}, взяв $(n + 1)$ вместо n в аналитическом выражении для a_n:

$$a_{n+1} = \frac{(2(n+1)+1)5^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Теперь вычисляем соответствующий предел:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{(2n+1)5^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{5^{n+1}}{5^n} =$$

$$= 5 \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 5 \cdot \frac{2}{2} \cdot 1 = 5 > 1.$$

Имеем: $D > 1$; согласно признаку Даламбера, ряд расходится.

Р е ш е н и е . б) Имеем, очевидно, ряд с положительными членами. При больших значениях n поведение общего члена a_n определяется старшими степенями n (см. п. 1.7). Выбираем эталон для сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} \text{ (поскольку } a_n \approx \frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}} \text{ при } n\to\infty);$$

этот ряд – сходящийся $p=3/2>1$. Согласно признаку сравнения в предельной форме (п. 1.5, б)) находим

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+2}:\frac{1}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}}=1.$$

Поскольку $L = 1$, т.е. $L\neq 0$, $L\neq\infty$, то поведение исходного ряда – такое же, как и эталонного. Итак, ряд сходится.

Р е ш е н и е . в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Функция $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ непрерывна при $x\geq 3$ и убывает с ростом x (так как растёт знаменатель дроби).

Применяем интегральный признак:

$$J=\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_3^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|\Big|_3^{\infty}=\ln(\ln\infty)-\ln(\ln 3)=\ln\infty-\ln(\ln 3)=\infty .$$

Несобственный интеграл оказался расходящимся, следовательно, ряд – расходится.

Перейдём к рассмотрению рядов с произвольными членами.

1.8. *Достаточный признак сходимости.* Если дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ } (u_n \text{ – произвольны, } n=1, 2, ...) \qquad (4)$$

и если ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \qquad (5)$$

– сходящийся, то и данный ряд (4) – сходящийся. Его сходимость в этом случае называется *абсолютной* (согласно этому определению сходимость ряда с положительными членами есть сходимость абсолютная).

Однако возможен случай, когда ряд (4) – сходящийся, тогда как соответствующий ряд из модулей (5) – расходится. Сходимость ряда (4) в этом случае называется *условной*.

Возможен, конечно, и третий случай – ряд (4) – расходящийся.

Исследование обычно начинают с рассмотрения ряда из модулей. В случае его сходимости делают вывод: данный ряд сходится абсолютно. Иначе – ряд (7) абсолютной сходимостью не обладает. Чтобы проверить, обладает ли он условной сходимостью (или расходится), следует обратиться к исследованию данного ряда (4).

В случае «чередования знаков» его членов используют следующий результат.

1.9. *Достаточный призрак Лейбница* сходимости знакочередуюшихся рядов. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, \quad u_n>0,\ n=1, 2, \dots . \qquad (6)$$

Если (с ростом n) последовательность $\{u_n\}$ – убывающая и

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0, \qquad (7)$$

то ряд (6) – сходится.

Заметим, что:

а) признак не указывает на характер сходимости (абсолютная или условная) ряда (6);

б) если условие (7) не выполнено (см. п. 1.2), то ряд (6) – расходящийся.

П р и м е р . Исследовать ряд на абсолютную (условную) сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{12\sqrt{n}+5}.$$

Р е ш е н и е . Имеем знакочередующийся ряд. Запишем общий член ряда из модулей

$$a_n=\frac{\left|(-1)^n\right|}{12\sqrt{n}+5}=\frac{1}{12\sqrt{n}+5}.$$

Применив признак сравнения в предельной форме (пп. 1.7, 1.5) к полученному знакоположительному ряду, убеждаемся, что он расходится.

Для выяснения вопроса об условной сходимости используем признак Лейбница.

Последовательность $\{a_n\}$, $a_n=\dfrac{1}{12\sqrt{n}+5}$, убывает с ростом n (так как знаменатель дроби растёт, а числитель постоянен) и

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{12\sqrt{n}+5}=0.$$

Следовательно (согласно признаку Лейбница) ряд сходится. Поскольку абсолютной сходимостью он не обладает, то сходится условно.

1.10. Ряд вида

$$\sum_{n-0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

построенный по степенным функциям $y=x^n$ и заданной числовой последовательности $\{a_n\}$, $n=0$, 1, 2, ... является важнейшим представителем функциональных рядов. Точка $x=x_0$ называется точкой сходимости, если соответствующий числовой ряд сходится. Областью сходимости степенного ряда, т.е. совокупностью всех его точек сходимости, является интервал с центром в начале координат радиуса R («радиус сходимости»), т.е. $(-R, R)$ либо $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$. Вне этого интервала степенной ряд расходится.

Заметим, что в интервале $(-R, R\,)$ степенной ряд сходится абсолютно.

1.11. Рассмотрим задачу: функцию $y=y(x)$, дифференцируемую сколь угодно много раз в точке x_0 и некоторой её окрестности $(-R, R)$, представить в виде суммы степенного ряда:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ x\in(-R,\ R).$$

Оказывается, что такое представление (разложение), если оно возможно, должно иметь вид:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots. \qquad (8)$$

Разложение (8) называется рядом Маклорена.

П р и м е р . Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ задачи Коши:

$$\begin{cases}y'=1+e^{-y}+xy;\\ y(0)=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е . Разложение в степенной ряд всякой (дифференцируемой сколь угодно много раз) функции (если это разложение возможно), должно иметь вид (8). Поэтому достаточно найти лишь его коэффициенты:

$$a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!},$$

т.е. определить числа $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$ и т.д. Значение $y(0)=0$ – дано; зависимость y' от x и y известна:

$$y'=1+e^{-y}+xy.$$

В точке $x=0$ имеем: $y'(0)=1+e^{-y(0)}+0\cdot y(0)=1+e^0=2.$

Далее,

$$y''=\left(1+e^{-y}+xy\right)'=0+e^{-y}(-y)'+x'y+xy'=-e^{-y}y'+y+xy'$$

(использована формула дифференцирования сложной функции, поскольку y является функцией от x). Подставляя $x=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$ получаем:

$$y''(0) = -e^0 \cdot 2 + 0 + 0 = -2\,.$$

Осталось найти ещё один ненулевой коэффициент. Имеем:

$$y''' = \left(-e^{-y}y' + y + xy'\right)' = -\left(e^{-y}(-y)'y' + e^{-y}(-y')'\right) + y' + x'y' + x(y')' =$$
$$= e^{-y}(y')^2 - e^{-y}y'' + 2y' + xy''$$

и $y'''(0) = e^0 \cdot 2^2 - e^0(-2) + 2\cdot 2 + 0 = 10.$

Подставляя найденные значения в разложение (8), получаем

$$y(x) = 2x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \dots\ .$$

2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Приступая к выполнению контрольных зданий по данной теме, читателю следует повторить:

а) понятие комплексного числа (в алгебраической форме), его действительной и мнимой части, геометрическую интерпретацию на координатной плоскости;

б) определение равенства комплексных чисел;

в) определение и свойства операций сложения, вычитания, умножения, а также определение натуральной степени и частного комплексных чисел.

Напомним, что произвольное комплексное число $z = x + yi$, $z \neq 0$, записанное в алгебраической форме (где x и y – действительные числа, $i^2 = -1$), может быть также представлено в тригонометрической форме:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа (иначе обозначаемый также $|z|$), а действительное число φ $(0 \le \varphi < 2\pi$ или $0 \le \varphi \le 2\pi)$ определяется соотношениями $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$.

Тогда формула возведения в натуральную степень имеет вид:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n = 1, 2, \dots .$$

С помощью этой формулы можно вычислять значения степенной функции $w = z^n$.

П р и м е р . Вычислить значение функции $w = z^4$, в точке $z_o = -3 + 3i$.

Р е ш е н и е . Найдём модуль и аргумент числа z_o. Имеем $\rho = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Поскольку точка z_o расположена во 2-й четверти, то $\varphi = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, в тригонометрической форме $z_o = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$. По формуле возведения в степень получаем:

$$z_o^4 = \left(3\sqrt{2}\right)^4\left(\cos 4\cdot\frac{3\pi}{4} + \sin 4\cdot\frac{3\pi}{4}\right)$$

или (исключая период $T = 2\pi$ под знаком каждой из тригонометрических функций) $z_o^4 = 324(\cos\pi + i\sin\pi)$. В алгебраической форме $z_o^4 = -324.$

2.2. Показательная функция (комплексная экспонента) и основные тригонометрические функции для всякого $z = x + iy$, определяются, соответственно, в виде:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \quad x, y \in R\,;$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

(во всех точках z, где знаменатель соответствующей дроби не обращается в ноль). Гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс – функции определения которых имеют следующий вид:

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2};\quad \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z};\ \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

В последних двух случаях исключаются из рассмотрения те значения z, для которых знаменатели обращаются в ноль.

2.3. Пусть однозначная функция $w=f(z)$ определена в точке $z=x+yi$ и некоторой её окрестности (т.е. в некотором круге с центром в указанной точке). Ели x и y получают, соответственно, приращения Δx и Δy, то $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ – соответствующее приращение переменной z. При переходе от точки z к точке $z+\Delta z$ (значения $\Delta x,\ \Delta y$ предполагаем столь малыми, что точка $z+\Delta z$ расположена в той же окрестности) значение $w=f(z)$ получает некоторое приращение $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$.

О п р е д е л е н и е. Пусть существует предел вида:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Он называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$ либо w'. Функция же $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z.

Имеют место правила дифференцирования (аналогичные случаю функций действительного переменного):

а) если $C=\text{const}$ (постоянное комплексное число), то $C'=0$;

б) $(Cf(z))'=Cf'(z),\ \ C=\text{const}$;

в) $(f(z)+g(z))'=f'(z)+g'(z)$;

г) $(f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$;

д) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ в точках, где $g(z)\neq 0$.

Справедливо правило дифференцирования сложной функции:

$$(\varphi(f(z)))'=\varphi'(f(z))\,f'(z).$$

Сохраняется и таблица производных:

1) $z'=1$;

2) $\left(z^n\right)'=nz^{n-1}$;

3) $\left(e^z\right)'=e^z$;

4) $(\sin z)'=\cos z$;

5) $(\cos z)'=-\sin z$;

6) $(\operatorname{tg} z)'=\dfrac{1}{\cos^2 z}$;

7) $(\operatorname{ctg} z)'=-\dfrac{1}{\sin^2 z}$;

8) $(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$;

9) $(\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z$;

10) $(\operatorname{th} z)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$;

11) $(\operatorname{cth} z)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$.

П р и м е р. Вычислить значение производной функции $w=z\operatorname{sh} z$, в точке $z_o=i\dfrac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. По формуле производной произведения получаем

$$w' = \text{sh}\, z + z\,\text{ch}\, z,$$

а тогда $w'\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \text{sh}\left(i\frac{\pi}{2}\right) + i\frac{\pi}{2}\text{ch}\left(i\frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку

$$\text{sh}\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = i$$

и $\text{ch}\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$,

то $w'\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$.

2.4. Рассмотрим теперь последовательность $\{z^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ степенных функций переменного $z = x + yi$ (где $x, y \in R$, $i^2 = -1$) и произвольную последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел; $n = 0, 1, 2 \ldots$ Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

называется степенным. При каждом значении z ряд обращается в числовой с комплексными членами, определение сходимости и суммы которого даётся в точности так же, как в п. 1.1. Областью сходимости степенного ряда является круг $|z| < R$ радиусом R с центром в начале координат. Как оказывается, внутри этого круга он сходится абсолютно, вне круга – расходится, возможны случаи круга сходимости «нулевого радиуса» (единственной точкой сходимости служит $z_0 = 0$) и «бесконечного радиуса» (областью сходимости является вся комплексная плоскость).

Радиус сходимости можно найти по одной из формул:

$$R = \frac{1}{D} \text{ или } R = \frac{1}{K},$$

где D и K – соответственно, числа Даламбера и Коши (см. п. 1.4).

Пример. Найти круг сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2n+3}.$$

Решение. Запишем общий член ряда в виде $\frac{1}{2n+3} z^n$;

можно считать, что $a_0 = 0$; $a_n = \frac{1}{2n+3}$; $n = 1, 2, \ldots$. Число Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)+3} : \frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+5} = 1;$$

теперь $R = \frac{1}{D}$, т.е. $R = 1$. Круг сходимости определяется неравенством $|z| < 1$.

2.5. Функция $f(z)$ называется аналитической (аналитичной) в точке z_o, если она дифференцируема как в этой точке, так и некоторой её окрестности (т.е. в некотором круге $|z - z_o| < r$, $r > 0$). Функция $f(z)$ аналитична в области G (например, в круге, кольце, во всей комплексной плоскости), если она аналитична во всякой точке этой области G. Функцию, аналитичную в точке $z_o = 0$, можно в некоторой окрестности этой точки представить в виде суммы степенного ряда (так называемого ряда Маклорена). Приведём разложения некоторых из основных элементарных функций комплексной переменной в ряд Маклорена:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots;$$

$$\text{sh}\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots;$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ \ldots .$$

Каждый из указанных рядов абсолютно сходится во всей комплексной плоскости и имеет своей суммой соответствующую функцию. Справедливо также разложение:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ \ldots + (-1)^n z^n + \ \ldots \quad |z| < 1.$$

Точку z_0, в которой функция $f(z)$ неаналитична, но аналитична в некоторой её окрестности (т.е. при $0 < |z - z_o| < r,\ r > 0$), называют изолированной особой точкой для $f(z)$. Например, функция $\frac{1+z^2}{z}$ обладает изолированной особой точкой $z_0 = 0$ (в ней функция даже не определена). В общем случае разложение по степеням z в окрестности изолированной особой точки $z_o = 0$ имеет вид

$$f(z) = \ldots + c_{-m} z^{-m} + c_{-m+1} z^{-m+1} + \ldots \ + c_{-2} z^{-2} + c_{-1} z^{-1} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots;$$

и представляет собой частный случай так называемого ряда Лорана. Члены с отрицательными степенями z образуют часть степенного ряда, которая называется главной. Пусть $m > 0$ (главная часть содержит какие-либо члены). Если $c_{-n} \neq 0,$ тогда как $c_{-m} = 0$ при $m > n,$ то особая точка z_0 называется полюсом n-го порядка.

П р и м е р 1. Представить функцию $f(z) = z^2(e^{-z} - 1)$ в виде суммы ряда по степеням z (ряда Маклорена).

Р е ш е н и е . В стандартном разложении $w = e^Z$ выберем $Z = -z$:

$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \ \ldots + \frac{(-z)^n}{n!} + \ \ldots$$

Вычитая единицу из обеих частей этого соотношения, получаем (во всех точках комплексной плоскости):

$$e^{-z} - 1 = -\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \ \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \ \ldots .$$

Умножим теперь обе части разложения на z^2; левая часть тогда совпадёт с данной $f(z)$ и, следовательно,

$$f(z) = -\frac{z^3}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \ \ldots + (-1)^n \frac{z^{n+2}}{n!} + \ \ldots .$$

во всех точках комплексной плоскости.

П р и м е р 2. Разложить данную функцию

$$f(z) = \frac{4}{z^2(2+z)}$$

в ряд по степеням z (ряд Лорана) и определить порядок полюса $z = 0$.

Р е ш е н и е . Воспользуемся вышеприведённым стандартным разложением функции $w = \frac{1}{1+Z}$. Для этого данную функцию $f(z)$ представим в виде:

$$f(z) = \frac{4}{z^2 2\left(1 + \frac{z}{2}\right)} = \frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}},$$

выберем (в стандартном разложении) значение $Z = \frac{z}{2}$, $|Z| < 1$ и умножим обе части на $\frac{2}{z^2}$. Имеем (при $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$):

$$\frac{2}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{2^n} \cdot \frac{2}{z^2} + \ldots,$$

т.е.

$$f(z) = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{n-2}}{2^{n-1}} + \ldots$$

для всех $z \neq 0$ из круга $|z| < 2$; особая точка $z = 0$ (в силу вышеприведённого определения), является полюсом порядка $m = 2$.

3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3.1. Основными понятиями теории вероятностей являются понятия события и его вероятности. Случайным называется такое событие, которое (при осуществлении некоторых условий) как результат опыта может произойти или не произойти. Каждому опыту сопоставим множество всех элементарных исходов $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ ...,\ \omega_n\}$, дающее полную информацию о предполагаемых результатах. Здесь ω_i удовлетворяют следующим условиям:

а) обязательно произойдёт один из исходов ω_i (т.е. имеется «полная группа» результатов ω_i);

б) ω_i, ω_k для всех i, k, $i\neq k$ несовместны, т.е. появление одного исхода исключает возможность появления любого другого;

в) ω_i – равновозможны.

Среди элементов множества Ω имеются исходы благоприятствующие событию A, т.е. те, в результате которых событие A наступает.

3.2. Вероятностью (классической вероятностью) события A называется отношение числа m благоприятных результатов к числу n всевозможных исходов:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

3.3. Для вычисления количества всевозможных и благоприятных исходов опыта часто пользуются следующими формулами комбинаторики. Рассмотрим произвольную совокупность из N элементов и всевозможные выборки (подмножества), содержащие k элементов; $1\le k\le N$.

Упорядоченные выборки (важен порядок следования элементов в наборе) называют размещениями; число всевозможных размещений из N по k элементов вычисляется по формуле:

$$A_N^k=\frac{N!}{(N-k)!}.$$

В частности, размещения из N по N элементов называют перестановками; число всевозможных перестановок

$$P_N=N!$$

Неупорядоченные выборки (порядок следования элементов неважен) называют сочетаниями; число всевозможных сочетаний из N по k есть:

$$C_N^k=\frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

3.4. Суммой n событий A_1, A_2, ..., A_n называется событие B, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Обозначение:

$$B=A_1+A_2+...+A_n.$$

Произведением n событий A_1, A_2, ..., A_n называется событие B, состоящее в совместном появлении этих событий. Обозначение:

$$B=A_1A_2\cdot...\cdot A_n.$$

Случайные события A_1, A_2, ..., A_n называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе.

События A и $\overline{A}$ называются противоположными, если они несовместны и образуют полную группу.

3.5. Теоремы сложения и умножения вероятностей событий.

1) Если A и B несовместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

2) Если события A и $\overline{A}$ противоположны, то

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

3) Пусть $P_A(B)$ означают вероятность события B, вычисленную при условии, что A произошло; тогда

$$P(AB)=P(A)P_A(B).$$

Если же вероятность события B постоянна в условиях данного опыта (не зависит от наступления или ненаступления A), то A и B называются независимыми событиями; тогда

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

4) Если A и B совместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Пример 1. В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Наудачу извлекли два шара. Найти вероятность следующих событий:

а) оба шара белых;

б) только один шар белый;

в) хотя бы один шар белый.

Решение. а) Событие A – оба извлечённых шара – белые. Исходы опыта – выборки.

Используем определение вероятности и комбинаторные формулы. Так как набор из двух шаров неупорядочен, то число возможных исходов $n=C_{10}^2=\frac{10!}{8!2!}=45$. Число благоприятных исходов $m=C_6^2=\frac{6!}{4!2!}=15$ (выбор двух шаров из шести белых). Следовательно,

$$P(A)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$$

б) Событие B – только один извлечённый шар – белый, тогда $m=m_1m_2=6\cdot 4=24$;

$$P(B)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}.$$

в) C – хотя бы один шар белый. Противоположным к C является событие $\overline{C}$ – оба шара чёрных. Следовательно,

$$P(\overline{C})=P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15},\ P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}.$$

3.6 Формула Бернулли (повторные испытания). Рассмотрим задачу: имеется n испытаний (событий). Вероятность появления события A в каждом отдельном испытании постоянна и равна p. Тогда вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится ровно k раз в n испытаниях, можно найти по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ \text{где}\ q=1-p. \qquad (2)$$

3.7. При больших значениях n и $0 < p < 1$ значение $P_n(k)$ можно приближённо вычислить по «локальной» формуле Лапласа:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_k),$$

где $x_k=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ находятся по таблицам, имеющимся во многих учебных пособиях. При этом используется чётность функции φ: $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Если количество n опытов велико, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A произойдёт не менее k_1 и не более k_2 раз, можно найти по интегральной формуле Лапласа:

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi\left(x_{k_2}\right)-\Phi\left(x_{k_1}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$.

Значения $\Phi(x)$ находят по таблицам. При этом используется нечётность $\Phi(x)$: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

3.8. Пусть в каждой данной серии из n опытов вероятность p события A постоянна, но от серии к серии опытов с ростом n эта вероятность убывает обратно пропорционально числу n опытов с постоянным коэффициентом λ, т.е $p=\frac{\lambda}{n}$. При сформулированных условиях для вероятности Бернулли $P_n(k)$ имеет место соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-k}}{k!}.$$

Отсюда следует, что если вероятность p появления события A в каждом из n опытов мала (n – велико) и $\lambda = np$, то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ (формула Пуассона).}$$

Пример 1. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых опытах: а) два раза; б) менее двух раз, если вероятность появления события A в одном опыте $p = 0{,}4$.

Решение. а) Пусть событие B состоит в появлении A ровно два раза в пяти опытах. Тогда по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_5(2) = C_5^2 (0{,}4)^2 (0{,}6)^2 = 0{,}3456.$$

б) Если событие C означает появление A менее двух раз, т.е. или ни разу ($k = 0$) или один раз ($k = 1$), то

$$P(C) = P_5(k=0 \text{ или } k=1) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 + C_5^1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 =$$
$$= 0{,}14256 + 0{,}4752 = 0{,}61776.$$

Пример 2. В течение года из аэропорта города N отправляется 1200 авиарейсов. Вероятность задержки каждого вылета по метеоусловиям равна 0,005. Какова вероятность задержки по метеоусловиям в течение года ровно 4 рейсов?

Решение. По условию задачи, вероятность наступления события в единичном опыте (задержки рейса по метеоусловиям) мала: $p = 0{,}005$, тогда как число опытов (число рейсов) велико: $n = 1200$. Следовательно, возможно использование формулы Пуассона при $k = 4$. Имеем $\lambda = np = 1200 \cdot 0{,}005 = 6$ и

$$p_{1500}(4) = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} \approx 0{,}134.$$

3.9. Случайной величиной называется числовая величина X, которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, наперёд неизвестное и зависящее от случайных причин. Если все возможные значения величины X образуют числовую последовательность $\{x_n\}$, n = 1, 2, ... (конечную или бесконечную), то X называется дискретной; если же возможные значения X заполняют целиком некоторый числовой интервал, то величина X называется непрерывно распределённой на этом интервале.

3.10. Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между её возможными значениями x_k и вероятностями $p_k = P(X = x_k)$ события, состоящего в принятии величиной X значения именно x_k. Обычный способ задания такого закона – ряд (таблица) распределения. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Числовыми характеристиками дискретной величины X являются её математическое ожидание (среднее значение), дисперсия и среднее квадратическое отклонение; соответственно,

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k, \quad D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 p_k - (M(X))^2, \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)}.$$

3.11. Универсальным способом описания всякой случайной величины X является функция распределения (синонимы: интегральный закон распределения, интегральная функция), имеющая вид:

$$F(x) = P(X < x),$$

т.е. соотносящая каждому $x \in (-\infty; +\infty)$ вероятность события, состоящая в принятии величиной X значения левее точки x.

Из свойств $F(x)$ отметим возможность определять с её помощью вероятность попадания значений X в заданный интервал:

$$F(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Плотностью распределения (дифференциальной функцией) назовём функцию вида:

$$f(x) = F'(x).$$

Числовыми характеристиками непрерывных случайных величин являются её математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx,\ \ D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2,$$

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}.$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ 1-x^2, & -1<x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Имеем:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ -2x, & -1<x\le 0;\\ 0, & x>0\end{cases}$$

далее,

$$M(X)=\int_{-1}^{0} x(-2x)dx=-\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}=-\frac{2}{3};$$

$$D(X)=\int_{-1}^{0} x^2(-2x)dx-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{2}{4}x^4\Big|_{-1}^{0}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

3.12. Генеральная совокупность и выборка. Пусть имеется множество, состоящее из конечного (но достаточно большого) или бесконечного числа некоторых объектов и изучается количественный признак X, так что каждый объект характеризуется одним из возможных значений x_i величины X. Такое множество назовём генеральной совокупностью; в свою очередь, совокупность из n случайно отобранных объектов назовём выборкой объёма n. Пусть n_1 объектов из выборки характеризуются значением x_1, n_2 объектов – значением x_2, ..., n_k – объектов – значением x_k. Числа x_1, x_2, ..., x_k называются вариантами; соответственно, n_1, n_2, ..., n_k – их частотами, а таблица, задающая соответствие между ними – вариационным рядом.

Относительными частотами значений x_i называются соответствующие числа вида $w_i=\dfrac{n_i}{n}$, где $n=n_1+n_2+...+n_k$; справедливо соотношение

$$w_1 + w_2 + ... + w_k = 1.$$

3.13. Выборочная средняя $\bar{x}_{\text{в}}$ есть среднее арифметическое всех наблюдаемых (в выборке) значений x_i. Нетрудно установить, что:

$$\bar{x}_{\text{в}}=\sum_{i=1}^{k} x_i w_i \quad \text{или} \qquad \bar{x}_{\text{в}}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+...+x_k\frac{n_k}{n}.$$

Степень рассеяния значений x_i относительно их средней $\bar{x}_{\text{в}}$ характеризуется выборочной дисперсией:

$$D_{\text{в}}=(x_1)^2\frac{n_1}{n}+(x_2)^2\frac{n_2}{n}+...+(x_k)^2\frac{n_k}{n}-(\bar{x}_{\text{в}})^2.$$

3.14. Статистические оценки параметров распределения. Предположим, что нас интересует неизвестное значение θ некоторого параметра, характеризующего количественный признак X генеральной совокупности. Проводятся эксперименты, в результате которых получаем соответствующие значения параметра θ^*, дающие некоторое представление о величине θ. Точечной оценкой параметра θ называют оценку, которая определяется одним числом (например, оценка среднего значения X генеральной совокупности есть выборочная средняя). Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Надёжностью (доверительной вероятностью) оценки θ по θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\theta - \theta^*| < \gamma$. Наиболее часто задают надёжность, равную 0,95; 0,99; 0,995. Интервал ($\theta^* - \delta$, $\theta^* + \delta$) называют доверительным интервалом.

3.15. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ. Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён с плотностью $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ («нормальное распределение»); здесь параметр a есть значение математического ожидания, σ – среднее квадратическое отклонение (для X). Предположим, что среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, и извлечена выборка объёма n. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}_в$ с заданной надёжностью γ. Пусть t – значение аргумента функции Лапласа Φ(t) (п.3.7), для которого γ = 2Φ(t). Тогда:

$$P\left(|\bar{x}_в - a| < t\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Число t определяется из равенства $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. Следовательно, с надёжностью γ доверительный интервал $\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки есть $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

П р и м е р 1. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Известен вариационный ряд

i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	25	40	15	10

Найти: а) выборочную среднюю $\bar{x}_в$; б) выборочную дисперсию $D_в$.

Р е ш е н и е . Объём выборки

$$n = 10 + 25 + 40 + 15 + 10 = 100.$$

Согласно 3.13 имеем

$$\bar{x}_в = 1{,}1\cdot\frac{10}{100} + 1{,}2\cdot\frac{25}{100} + 1{,}3\cdot\frac{40}{100} + 1{,}4\cdot\frac{15}{100} + 1{,}5\cdot\frac{10}{100} = 1{,}29$$

и

$$D_в = (1{,}1)^2\cdot 0{,}1 + (1{,}2)^2\cdot 0{,}25 + (1{,}3)^2\cdot 0{,}4 + (1{,}4)^2\cdot 0{,}15 +$$
$$+ (1{,}5)^2\cdot 0{,}1 - (1{,}29)^2 = 0{,}0319.$$

П р и м е р 2. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратичным отклонением σ = 4. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_в = 3{,}6$, если объём выборки 64 и задана надёжность оценки γ = 0,95.

Р е ш е н и е . Найдём t из соотношения $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$; соответствует t = 1,96; точность оценки $\delta = \frac{1{,}96\cdot 4}{\sqrt{64}} = 0{,}98$. Следовательно, имеем доверительный интервал (3,6 – 0,98; 3,6 + 0,98), т.е. 2,62 < a < 4,58.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «РЯДЫ»

1 – 10. Исследовать сходимость числового ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+4n}{8^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+3)^n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+n)!}{2^n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(9n+1)4^n$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n}{(n+1)!}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)^n$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{8n+1}}{3^n}$.

11 – 20. Исследовать сходимость числового ряда:

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n}$; 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n+2}}$; 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3}$; 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5n+2}$;

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$; 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n}$; 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+\sqrt{n}}$; 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+2}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2+n\right)^2}$; 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n\sqrt{n}}$.

21 – 30. С помощью интегрального признака сходимости исследовать сходимость числового ряда:

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6+\ln n}{n}$; 22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{1-n^2}$; 23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$;

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2n}$; 25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; 26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5n^4+1}$;

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}$; 28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$; 29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{1+\ln n}}$;

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^3+1\right)^3}$.

31 – 40. Исследовать ряд на сходимость (абсолютная, условная или расходимость):

31. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+5}$; 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{n^2+1}}$; 33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n-1}}$;

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)^n}$; 35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+8}}$; 36. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$;

37. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n^2+16}$; 38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}}{n(n+1)}$; 39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}$;

40.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)\sqrt{n+3}}$.

41 – 50. Найти три первых отличных от нуля члена разложения ряд $y=y(x)$ следующей задачи Коши:

41. $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 + 3x + 2; \\ y(0) = 0. \end{cases}$ 42. $\begin{cases} y' = x^2 + 9y + e^y + 4; \\ y(0) = 0. \end{cases}$

43. $\begin{cases} y' = 11 + 2y^2 + x^2 + 4x; \\ y(0) = 0. \end{cases}$ 44. $\begin{cases} y' = 2e^y + x + 3y; \\ y(0) = 0. \end{cases}$

45. $\begin{cases} y' = 7\cos x - 3x + \cos y + 7; \\ y(0) = 0. \end{cases}$ 46. $\begin{cases} y' = e^x + 2xy + \sin x + 2; \\ y(0) = 0. \end{cases}$

47. $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{2} + 5\sin y + 4; \\ y(0) = 0. \end{cases}$ 48. $\begin{cases} y' = \dfrac{x^3}{3} + e^{2x} + 6y; \\ y(0) = 0. \end{cases}$

49. $\begin{cases} y' = 2\sin 2x + 3e^y + 1; \\ y(0) = 0. \end{cases}$ 50. $\begin{cases} y' = \sin x + 3\sin y - 6; \\ y(0) = 0. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

51 – 60. Вычислить значения степенной функции $f(z)$ в точке z_0

51. $f(z) = z^{10},\ z_0 = 1 + i\sqrt{3}$; 52. $f(z) = z^7,\ z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

53. $f(z) = z^4,\ z_0 = \sqrt{7} + i\sqrt{7}$; 54. $f(z) = z^6,\ z_0 = 3 - i\sqrt{3}$;

55. $f(z) = z^8,\ z_0 = 1 - i$; 56. $f(z) = z^6,\ z_0 = 6 + i2\sqrt{3}$;

57. $f(z) = z^5,\ z_0 = 2 - 2i$; 58. $f(z) = z^5,\ z_0 = 2 - i2\sqrt{3}$;

59. $f(z) = z^6,\ z_0 = \sqrt{3} + i$; 60. $f(z) = z^9,\ z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

61 – 70. Вычислить значение производной данной функции в точке $z = z_0$:

61. $w = \mathrm{sh} z,\ z_0 = 2 - i$; 62. $w = e^{5z},\ z_0 = -1 - i\sqrt{2}$;

63. $w = \sin 2z,\ z_0 = \dfrac{1}{2} i$; 64. $w = \cos z,\ z_0 = i$;

65. $w = \mathrm{sh} z,\ z_0 = 1 + \dfrac{\pi}{4} i$; 66. $w = \mathrm{ch} z,\ z_0 = 1 - \dfrac{\pi}{2} i$;

67. $w = \mathrm{ch} z - 2z,\ z_0 = 1 + i$; 68. $w = \cos 3z,\ z_0 = \dfrac{1}{3} i$;

69. $w = \sin 7z,\ z_0 = \dfrac{1}{7} - i$; 70. $w = e^{4z},\ z_0 = -7 - 19i$.

71 – 80. Найти круг сходимости степенного ряда (z – комплексная переменная) и изобразить его на комплексной плоскости:

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{5n}$; 72. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n z^n}{n}$; 73. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nz^n}{n+1}$; 74. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$;

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n\sqrt{n}}$; 76. $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n n z^n$; 77. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{(n+1)(n+2)}$; 78. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n z^n}{n \cdot 7^{n+1}}$;

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{4^{2n-1}}$; 80. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n-1} z^n}{(n+1)^2}$.

81 – 90. Представить функцию в виде суммы ряда по степеням z (ряд Маклорена):

81. $f(z) = \dfrac{z^3}{1+2z}$; 82. $f(z) = z^2 \mathrm{sh} z$; 83. $f(z) = ze^{2z}$;

84. $f(z)=\frac{z^2}{1+z}$; 85. $f(z)=z\sin z$; 86. $f(z)=\frac{z}{1-2z}$;

87. $f(z)=z^4e^{-z}$; 88. $f(z)=z^3\mathrm{ch}2z$; 89. $f(z)=z^2e^z$;

90. $f(z)=\frac{z^7}{1-4z}$.

91 – 100. Разложить данную функцию в ряд по степеням z (ряд Лорана) и определить порядок полюса $z=0$:

91. $f(z)=\frac{1}{2z}e^{-z}$; 92. $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$; 93. $f(z)=\frac{1}{z(1-2z)}$;

94. $f(z)=\frac{\sin 2z}{z^4}$; 95. $f(z)=\frac{1}{z^3}\frac{1}{(1+z)}$; 96. $f(z)=\frac{\cos 2z}{z^2}$;

97. $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$; 98. $f(z)=\frac{e^{3z}}{z^3}$; 99. $f(z)=\frac{\cos 5z}{z}$;

100. $f(z)=\frac{\sin 5z}{z^2}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

101. По прогнозам экономистов, ежегодная инфляция не превысит заданного процента с вероятностью $p=0{,}8$. Какова вероятность того, что в течение всех трёх ближайших лет оправдается указанный экономический прогноз?

102. В течение часа на сайт интернет-магазина заходит в среднем пять человек. Вероятность того, что будет сделан заказ на товар для каждого из посетителей равна $\frac{1}{3}$. Какова вероятность того, что в течение часа три из пяти посетителей сделают заказ?

103. В комплекте из десяти дискет ровно две заражены вирусом. Какова вероятность того, что обе наугад взятые дискеты окажутся без вируса?

104. Каждый из трёх независимо работающих сигнализаторов своевременно сообщает о нарушении заданного режима работы реактора с вероятностью, соответственно, $p_1=0{,}9$; $p_2=0{,}8$; $p_3=0{,}75$. Какова вероятность того, что при нарушении заданного режима работы ни один сигнал не поступит?

105. Среди пяти одинаковых по внешнему виду саженцев три – элитных. Наугад взяты два саженца. Какова вероятность, что оба элитных?

106. По данным социологов, в городе А данный кандидат в депутаты будет поддержан на выборах большей частью населения с вероятностью $p_1=0{,}6$; в городе В – с вероятностью $p_2=0{,}7$. Какова вероятность, что на выборах кандидат одержит победу хотя бы в одном из городов А и В?

107. На пути автомобиля четыре светофора, каждый из которых может его задержать с вероятностью $p=\frac{1}{3}$. Какова вероятность, что автомобиль не будет задержан ни одним из светофоров?

108. Партия из пяти изделий забраковывается, если хотя бы одно из них окажется нестандартным. Каждое из производимых изделий удовлетворяет требованиям стандарта с вероятностью $p=\frac{4}{5}$. Какова вероятность, что партия будет забракована?

109. Вероятности своевременной доставки денежного перевода в города А, Б равны соответственно $p_1=0{,}7$, $p_2=0{,}9$. В каждый из этих городов отправлены по одному переводу. Какова вероятность того, что ровно в один из городов перевод будет доставлен своевременно?

110. Что вернее: выиграть у равносильного шахматиста три партии из шести или четыре из восьми?

111. Вероятность неправильного соединения для данного оператора сотовой связи равна 0,0001. Какова вероятность, что из 10 000 соединений неправильными окажутся 5 соединений?

112. Вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,0005. Какова вероятность, что из 10 000 билетов выигрыш выпадет на 3 билета?

113. В продажу поступила партия из 5000 телефонов новой модели. Вероятность того, что телефон содержит скрытый дефект равна 0,0002. Найти вероятность того, что 5 телефонов этой модели содержат скрытый дефект.

114. Вероятность опечатки на каждой странице при наборе в типографии равна 0,002. Найти вероятность того, что книга объёмом 1500 страниц содержит опечатки на 4-х страницах.

115. Найти вероятность того, что из 50 000 избирательных бюллетеней 5 бюллетеней будут признаны недействительными, если вероятность признания недействительным для одного бюллетеня равна 0,0001.

116. Вероятность опоздания перевода денег на счёт составляет 0,003. Найти вероятность того, что 2 перевода из 2000 поступят с опозданием.

117. Гирлянда состоит из 500 независимо работающих электролампочек. Найти вероятность того, что 7 лампочек перегорят за первый час работы гирлянды, если вероятность для одной лампочки перегореть за первый час работы составляет 0,002.

118. Вероятность ошибочного знака в статье составляет 0,0004. Найти вероятность того, что статья, содержащая 15 000 знаков, содержит 3 ошибочных.

119. Вероятность того, что кредит будет оформлен неверно равна 0,001. Найти вероятность того, что из 1000 кредитов 10 будут оформлены неверно.

120. Вероятность возврата железнодорожного билета в кассу в течение первых суток после покупки равна 0,002. Найти вероятность того, что из 500 проданных билетов 3 будут сданы в кассу в течение первых суток после покупки.

121 – 130. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения) $F(x)$. Требуется: а) найти дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность распределения); б) найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; в) вероятность попадания значений X в интервал $(0;1)$.

121. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{x^2-4x+4}{4}, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$; 122. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}, & -1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$;

123. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{8}, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$; 124. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{x}{6}, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$;

125. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\\ \dfrac{x-3}{7}, & 3<x\le 10\\ 1, & x>10\end{cases}$; 126. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5}, & 2<x\le 7\\ 1, & x>7\end{cases}$;

127. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^3-x}{24}, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$; 128. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\\ \dfrac{x^2-x-6}{6}, & 3<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$;

129. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ \frac{x}{6}+\frac{3}{6}, & -3<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$; 130. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0{,}5\\ \frac{2x^2-x}{6}, & 0{,}5<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$.

131 – 140. Из генеральной совокупности металлических шайб сделана выборка. Известны внутренние диаметры x_i и частоты n_i этих значений в выборочной совокупности. Найти выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение (размеры даны в миллиметрах).

131.

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	26	12	18	16	18

132.

x_i	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
n_i	18	10	16	24	24	8

133.

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
n_i	5	10	30	25	15	5	10

134.

x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	30
n_i	26	15	12	18	16	13

135.

x_i	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
n_i	10	18	24	24	8	16

136.

x_i	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
n_i	15	5	40	25	4	8	3

137.

x_i	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
n_i	21	20	12	18	16	13

138.

x_i	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
n_i	10	20	32	16	8	14

139.

x_i	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
n_i	10	5	30	25	15	5	10

140.

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
n_i	20	13	12	16	15	24

141 – 150. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0{,}95$, зная выборочную среднюю $\bar{x}_B$, объём выборки n и среднее квадратичное отклонение σ.

141. $\bar{x}_B = 30{,}28$; $\sigma = 2$; $n = 64$;

142. $\bar{x}_B = 65{,}88$; $\sigma = 4$; $n = 144$;

143. $\bar{x}_B = 25{,}24$; $\sigma = 8$; $n = 64$;

144. $\bar{x}_B = 39{,}14$; $\sigma = 9$; $n = 81$;

145. $\bar{x}_B = 58{,}85$; $\sigma = 3$; $n = 144$;

146. $\bar{x}_B = 40{,}88$; $\sigma = 4$; $n = 64$;

147. $\bar{x}_B = 82{,}51$; $\sigma = 11$; $n = 121$;

148. $\bar{x}_B = 32{,}29$; $\sigma = 3$; $n = 144$;

149. $\bar{x}_B = 26{,}84$; $\sigma = 6$; $n = 144$;

150. $\bar{x}_B = 19{,}86$; $\sigma = 2$; $n = 144$.