НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

НЕОПРЕДЁЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания

Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

УДК 517.3(075)
ББК В161.67я73-4
П909

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ им. Г.Р. Державина
А.И. Булгаков

Составители :

Н.П. Пучков, А.В. Щербакова, И.В.Петрова

П909 Неопределённый интеграл : методические указания / сост. : Н.П. Пучков, А.В. Щербакова, И.В.Петрова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 20 с. – 300 экз.

Содержат необходимый справочный материал и рекомендации для решения типовых задач способом непосредственного интегрирования и интегрирования по частям.

Предназначены для студентов 1 курса инженерных и экономических специальностей.

УДК 517.3(075)
ББК В161.67я73-4

Учебное издание

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания

Составители:

ПУЧКОВ Николай Петрович,
ЩЕРБАКОВА Антонина Васильевна,
ПЕТРОВА Ирина Владимировна

Редактор Т.М. Глинкина
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 30.06.2009
Формат 60 × 84 / 16. 1,16 усл. печ. л. Тираж 300 экз. Заказ № 283

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прежде чем приступить к решению задач на нахождение неопределённого интеграла, постарайтесь внимательно прочитать и усвоить то, что написано ниже.
Неопределённый интеграл – одно из основных понятий математики, используемое для решения многих математических задач и задач прикладного характера в технике, физике и других областях человеческих знаний.
В вузовском курсе математики неопределённый интеграл изучается не только для того, чтобы освоить механизм решения прикладных задач, а и для того, чтобы развивать сообразительность, логику мышления и т.п.
Способность находить неопределённые интегралы расценивается как способность глубоко и целенаправленно мыслить, находить пути решения (строить алгоритмы) трудных, «осложнённых неопределённостью» задач. Недаром, как говорят, академик Л.Д. Ландау, лауреат Нобелевской премии по физике, выбирая себе учеников, в качестве вступительных (для занятия наукой) испытаний ставил задачу нахождения неопределённого интеграла.
Нередко от студентов можно слышать такие реплики-обиды, как: «я не нашёл какой-то интеграл, который мне предложил преподаватель, и из-за этого он не поставил мне положительную оценку; как будто от этого интеграла зависит моя будущая специальность». Предлагая найти неопределённый интеграл, преподаватель не только проверяет знание вами стандартных математических формул (хотя эти знания – первичны и необходимы), но и вашу способность мыслить. Это равносильно тому, как, например, при приёме на работу соискателю предлагают (в качестве испытания) разрешить нестандартную ситуацию или, обучая военнослужащих, оперативных работников милиции и т.п., «дают вводную» и оценивают дальнейшие действия.
Таким образом, нахождение неопределённых интегралов – это нахождение способа выхода из ситуации, осложненной неопределённостями. Такую способность специалистов называют сейчас компетентностью, без такой способности очень трудно работать в условиях рыночной экономики.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Математическая операция нахождения неопределённого интеграла для данной функции $f(x)$ имеет в своей основе понятие *первообразной* этой функции.
Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого $x \in X$ функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.
Первообразная данной функции обладает свойством «неопределённости» в том плане, что если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ может быть представлена в виде $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – некоторое число, т.е. множество функций $F(x) + C$ образует семейство первообразных для функции $f(x)$.
Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения первообразной по её производной (неопределённого интеграла по заданной подынтегральной функции) называется *интегрированием* этой функции.
Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию. Для проверки правильности выполнения интегрирования нужно найти производную от результата и получить при этом подынтегральную функцию.

Примеры.

1. $\int\left(3x^2+1\right)dx = x^3 + x + C$. Проверка $\left(x^3+x+C\right)' = 3x^2+1$.

2. $\int\frac{2dx}{1+4x^2} = \operatorname{arctg}2x + C$. Проверка $(\operatorname{arctg}2x) = \frac{2}{1+4x^2}$.

3. $\int\frac{dx}{2x^2+2x+1} = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} + C$.

Проверка:

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}+C\right)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2+x^2} = \frac{1}{2x^2+2x+1}.$$

4. $\int\frac{dx}{2x^2+2x+1} = \operatorname{arctg}(2x+1) + C$.

Проверка: $\left(\operatorname{arctg}(2x+1)+C\right)' = \frac{1}{1+(2x+1)^2}\cdot 2 = \frac{1}{2x^2+2x+1}$.

Сравнивая результаты нахождения одного и того же интеграла в примерах 3 и 4, замечаем их различие. Приравнивать ответы в этих примерах, в буквальном смысле при одном и том же значении C:

$\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} + C = \operatorname{arctg}(2x+1) + C$ нельзя, тогда $\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} - \operatorname{arctg}(2x+1) = 0$,

хотя на самом деле

$$\operatorname{arctg}(2x+1) - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} = \operatorname{arctg}\frac{2x+1-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{(2x+1)x}{x+1}} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4},$$

т.е. разность первообразных в примерах 3 и 4 есть отличное от нуля постоянное число (что соответствует свойству первообразных одной и той же функции). Поэтому равенство интегралов можно рассматривать не при фиксированных значениях постоянной C, а на множестве её всевозможных значений (с точностью до произвольного слагаемого).

В ы в о д. Если полученный Вами результат интегрирования не совпадает с ответом, указанным в задачнике, не огорчайтесь, Ваш результат может быть верным. Достаточно сделать проверку, чтобы убедиться в правильности Вашего решения.

При нахождении производных от функций таких «разночтений» быть не может.

Необходимо знать ещё два существенных различия между операциями нахождения производной и интегрирования.

1. Производная от элементарной функции* всегда есть функция элементарная; интеграл же от элементарной функции может не являться элементарной функцией**. Существуют различные классы так называемых специальных функций. Например, интегральный синус, интегральный логарифм, эллиптические функции, с которыми вы можете при необходимости познакомиться в других учебниках.

---

* Элементарные функции – класс функций, состоящий из многочленов, степенных функций, рациональных функций, показательных функций, логарифмических функций, тригонометрических функций и обратных тригонометрических функций, а также функций, полученных из перечисленных выше с помощью четырёх арифметических действий и суперпозиций (образование сложной функции), применённых конечное число раз: например, $y = \frac{e^{x^2}-1}{\operatorname{tg}^3 5x}$, $y = x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$ и т.д.

** В школьном курсе математики учащиеся (и учителя) имеют дело только с функциями элементарными, поэтому могло создаться впечатление, что математика не нуждается ни в каких других функциях. Ошибочность этого мнения выясняется, например, при изучении интегрального исчисления.

2. Даже в тех случаях, когда неопределённый интеграл представим в виде элементарной функции, алгоритм её нахождения не очевиден и не универсален, в то время как правила, изученные в дифференциальном исчислении, позволяют для каждой элементарной функции найти её производную алгоритмически, не прибегая ни к каким искусственным приёмам.

В интегральном исчислении нет общих методов, с помощью которых можно было бы найти для любой элементарной функции её первообразную; их отсутствие вызвано не несовершенством теории интегрирования, а именно тем обстоятельством, что первообразная элементарной функции, вообще говоря, функция неэлементарная.

В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые нами интегралы имеют представление в виде элементарных функций и наша цель – их найти.

Начинать осваивать методы интегрирования необходимо, естественно, на простейших задачах. Данные методические указания дают рекомендации по применению трёх методов: «непосредственного интегрирования», «подведение функции под знак дифференциала» (замены переменной) и «интегрирования по частям».

Нахождение интегралов с использованием основных свойств неопределённых интегралов и таблицы простейших (табличных) интегралов называется непосредственным интегрированием.

Свойства неопределённого интеграла

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
2. $\int d\big(f(x)\big) = f(x) + C$.

Эти свойства непосредственно следуют из определения первообразной.

3. Если k – постоянная величина, то

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k \text{ – постоянная.}$$

Постоянный множитель выносится за знак интеграла.

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Интеграл от алгебраической суммы двух (или нескольких) функций равен сумме интегралов от этих функций (при условии их существования).

Таблица интегралов является обращением таблицы производных (дифференциалов).

Например: $d\left(x^{\alpha+1}\right) = \left(x^{\alpha+1}\right)' dx = (\alpha+1)x^{\alpha}dx$, откуда

$$x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}d\left(x^{\alpha+1}\right), \ \alpha \neq -1.$$

Если найти интегралы от обеих частей этого равенства (проинтегрировать это равенство), то они будут отличаться на постоянную величину:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}\int d\left(x^{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \ .$$

Это один из табличных интегралов – интеграл от степенной функции при отличном от (–1) показателе.

Таблица производных	Таблица интегралов
1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in R$;	1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$;
2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$; $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;	2. $\int a^{x} dx = \frac{1}{\ln a} a^{x} + C$; $\int e^{x} dx = e^{x} + C$;
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;	3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C^{*}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;	4°. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;	5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^{2} x}$;	6. $\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C$;
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^{2} x}$;	7. $\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$;	8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$;
9. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^{2}}$.	9. $\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \operatorname{arctg} x + C$.

---

[*] В этой формуле $x \neq 0$; в то же время она справедлива как при $x > 0$, так и при $x < 0$. При $x > 0$ $\ln\lvert x\rvert = \ln x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; при $x < 0$ $\ln\lvert x\rvert = \ln(-x)$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Как и таблицу производных в дифференциальном исчислении, так и таблицу интегралов необходимо знать наизусть.

Рассмотрим несколько примеров нахождения неопределённых интегралов, используя только их свойства и таблицу основных интегралов.

Приведённые ниже интегралы (1 – 6) содержат степенную функцию x^{a}, $a \in R$; к такому виду следует приводить подынтегральную функцию, используя свойства степеней:

$$\frac{1}{x^{a}} = x^{-a}; \quad x^{a} \cdot x^{b} = x^{a+b}; \quad \sqrt[n]{x^{m}} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Нахождение таких интегралов основано на использовании формулы 1 из таблицы интегралов

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

1. $\int x dx = \frac{x^{2}}{2} + C$.

2. $\int x^{7} dx = \int \frac{x^{8}}{8} + C$.

3. $\int \frac{dx}{x^{4}} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^{3}} + C$.

4. $\int \sqrt[5]{x^{3}} dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + C = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^{8}} + C^{*}$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$.

6. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^{2/3}}{x^{3/2}}dx = \int x^{-5/6}dx = \frac{x^{1/6}}{1/6} + C = 6\sqrt[6]{x} + C$.

Нахождение интегралов (7 – 10) предполагает использование первых двух свойств неопределённого интеграла.

---

* Деление на дробь заменяется умножением на обратную дробь, чтобы избежать громоздких записей.

7. $\int \left(3x^3 - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx = 3\int x^3dx - 5\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{3}{4}x^4 + C_1 - 5\ln|x| +$

$+ C_2 + \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C = \frac{3}{4}x^4 - 5\ln|x| + \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C^{**}$.

8. $\int (3\sqrt{x} - 4x)dx = 3\int x^{1/2}dx - 4\int xdx = 3\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - 4\frac{x^2}{2} + C = 2\sqrt{x^3} - 2x^2 + C$.

9. $\int (2\sin x - 3\cos x)dx = 2\int \sin x dx - 3\int \cos x dx = -2\cos x - 3\sin x + C$.

10. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$

$= 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= 2\mathrm{tg}x - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + \frac{1}{3}\arcsin x + C$.

Метод непосредственного интегрирования может удачно сочетаться с тождественными преобразованиями подынтегральной функции, которые сводят искомый интеграл к одному или нескольким табличным интегралам. В примерах (11 – 19) используются тождественные преобразования: раскрытие скобок (11, 12, 15, 16), почленное деление слагаемых числителя дроби на общий знаменатель (13, 14, 15, 16); группировка слагаемых (18); применение тригонометрических формул (17).

11. $\int (2x^2 + 1)^2 dx = \int (4x^4 + 4x^2 + 1)dx = 4\int x^4dx + 4\int x^2dx + \int dx =$

$= \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x + C$.

12. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x)(1-x)}dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

13. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}dx = \int \sin x dx + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cos x - \mathrm{ctg}x + C$.

** Произвольную постоянную можно при выполнении промежуточного интегрирования вовсе не учитывать, а приписывать её лишь тогда, когда все первообразные найдены; здесь формально $C = C_1 + C_2 + C_3$.

14. $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3\sqrt[3]{x} + 1}{x^3} = \int dx - 2\int \frac{dx}{x} - 3\int x^{-8/3}dx + \int x^{-3}dx =$

$$= x - 2\ln|x| - 3\frac{x^{-5/3}}{-5/3} + \frac{x^{-2}}{-2} + C = x - 2\ln|x| + \frac{9}{5\sqrt[3]{x^5}} - \frac{2}{x^2} + C.$$

15. $$\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx = \int \frac{x^3 - 3x + x^2 - 3}{3x^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int x dx - \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int dx - \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{3}x + \frac{1}{x} + C.$$

16. $$\int \frac{(2-\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{4 - 4x^{1/3} + x^{2/3}}{\sqrt{x}}dx = 4\int x^{-1/2}dx - 4\int x^{-1/6}dx + \int x^{1/6}dx =$$

$$= 4\frac{x^{1/2}}{1/2} - 4\frac{x^{5/6}}{5/6} + \frac{x^{7/6}}{7/6} + C = 8\sqrt{x} - \frac{24}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C.$$

17. $$\int\left(\cos^2\frac{x}{2} + \frac{2}{1+x^2}\right)dx = \int\frac{1+\cos x}{2}dx + 2\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx +$$

$$+ 2\operatorname{arctg}x + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + 2\operatorname{arctg}x + C.$$

18. $$\int\frac{2x^4 + 2x^2 + 1}{x^2+1}dx = \int\frac{2x^2(x^2+1)+1}{x^2+1}dx = 2\int x^2 dx + \int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \operatorname{arctg}x + C.^{*}$$

19. $$\int\frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = \int dx - \int\frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg}x + C.^{**}$$

Неопределённый интеграл обладает ещё одним очень важным свойством – *инвариантности* (*неизменности*) *формулы интегрирования.*

---

[*] Существует общее правило интегрирования рациональных дробей (дробных выражений, числитель и знаменатель которых – многочлены); здесь мы используем искусственные приёмы. Такие приёмы иногда более оперативно позволяют получить результат.

[**] В примере 19 тождественные преобразования числителя – добавление единицы и её вычитание позволяют выделить в числителе знаменатель (в скобках, как это сделано и в примере 18), а затем, выполнив деление каждого из слагаемых числителя на знаменатель, получить два табличных интеграла.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u(x)$ – дифференцируемая функция, то $\int f(u(x))\,d(u(x)) = F(u(x)) + C$, т.е. форма (формула) интеграла не изменится, если независимую переменную заменить на (дифференцируемую) функцию. Например, так как $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, то, заменяя x на $\sin x$, получим $\int \sin^3 x\,d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$, аналогично для $\ln x$ и $\operatorname{tg}x$:

$$\int \ln^3 x\,d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C, \quad \int \operatorname{tg}^3 x\,d(\operatorname{tg}x) = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$$

Таким образом, в таблице интегралов (стр. 6–7) вместо независимой переменной x может находиться любая дифференцируемая функция. Пусть, например, это $\ln x$, тогда можно записать, что:

1. $\int (\ln x)^a d(\ln x) = \frac{(\ln x)^{a+1}}{a+1} + C$, $a \neq -1$;

2. $\int a^{\ln x} d(\ln x) = \frac{1}{\ln a} a^{\ln x} + C$;

3. $\int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$;

4. $\int \frac{d(\ln x)}{\cos^2(\ln x)} = \mathrm{tg}(\ln x) + C$;

5. $\int \frac{d(\ln x)}{\sin^2(\ln x)} = -\mathrm{ctg}(\ln x) + C$;

6. $\int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x) + C$.

Потренироваться в таких представлениях весьма полезно, т.к. расширяет «глубину» таблицы интегралов, позволяет раньше увидеть табличный интеграл*. Например $\int \frac{dx}{x \ln x}$ не является табличным, но представление подынтегрального выражения $\frac{dx}{x \ln x}$ в виде $\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{\ln x} d(\ln x)$ приводит исходный интеграл к виду $\int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$.

---

* Аналогичные подходы имеют место в процессе изучения шахматной игры, когда учатся разыгрывать окончания (эндшпиль), т.е. ситуации, к которым сводятся шахматные партии.

Аналогично, интеграл $\int \mathrm{tg} x dx$ не является табличным, но

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Здесь $\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$ аналогичен $\int \frac{dx}{x}$, в котором x заменен на $\cos x$.

Таким же образом можно найти, что $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}$; последний интеграл представляет собой не что иное, как табличный интеграл для функции $\mathrm{arctg} x$, где вместо x присутствует $\sin x$ и, поэтому, интеграл равен $\mathrm{arctg}(\sin x) + C$.

С целью получения определённых навыков интегрирования, основанного на использовании свойства инвариантности формы интеграла, надо самостоятельно выполнить много заданий; для примера внимательно рассмотрите процесс нахождения следующих интегралов:

1. $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$.

2. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3} \int (1+x^3)^{-1/2} d(1+x^3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+x^3)^{1/2}}{1/2} + C =$
$= \frac{2}{3} \sqrt{1+x^3} + C$.

3. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \mathrm{arctg} x} = \int \frac{d(\mathrm{arctg} x)}{\mathrm{arctg} x} = \ln|\mathrm{arctg} x| + C$.

4. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2+e^x}} = \int (2+e^x)^{-1/2} d(2+e^x) = 2\sqrt{2+e^x} + C$.

5. $\int \frac{3^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int 3^{\arcsin x} d(\arcsin x) = \frac{1}{\ln 3} 3^{\arcsin x} + C$.

Самостоятельно найдите следующие интегралы:

$$\int\frac{\ln^2 x}{x}dx;\ \int\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx;\ \int\cos x\sin^5 x dx;\ \int\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx;\ \int\left(3x^2-6\right)^4\cdot x dx;\ \int e^{x^3}x^2dx;\ \int\frac{dx}{(2x-1)\ln^3(2x-1)};\ \int\frac{x^3}{1+x^4}dx;$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};\ \int\frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2+\sin 3x}}.$$

Правило интегрирования, основанное на этом свойстве, носит название «правило подведения вспомогательной функции под знак дифференциала». Это правило можно изложить следующим образом: если подынтегральное выражение разбивается на два сомножителя, один из которых есть дифференциал такой функции, через которую легко выражается другой сомножитель, то эту функцию можно принять за вспомогательную.*

Пример. $\int\left(e^{\sin x}+\sin x\right)\cos x dx=\int\left(e^{\sin x}+\sin x\right)d(\sin x)$.

Если в качестве вспомогательной функции взять $\sin x$, то искомый интеграл равен $e^{\sin x}+\frac{\sin^2 x}{2}+C$.

В общем случае выбор вспомогательной функции не является простым, однако есть случай, когда такой выбор не представляет трудности.

Правило. Если подынтегральная функция имеет вид $f(ax+b)$, где a и b – некоторые числа, то в качестве вспомогательной функции можно выбрать $u(x)=ax+b$. В этом случае $du=d(ax+b)=adx$, и $\int f(ax+b)dx=$ $=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, если $\int f(x)dx=F(x)+C$. Например $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$.

Примеры:

1. $\int\cos(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int\cos(2x-1)d(2x-1)=\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$.
2. $\int\frac{dx}{3x+5}=\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C$.
3. $\int\frac{dx}{1+4x^2}=\int\frac{dx}{1+(2x)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+C$.
4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}=\frac{1}{1/3}\arcsin\frac{x}{3}+C=3\arcsin\frac{x}{3}+C$.
5. $\int(5-x)^{10}dx=-\frac{1}{11}(5-x)^{11}+C$.

---

* Искусственно выбранная функция, которая «помогает» найти интеграл.

Найдите самостоятельно следующие интегралы:

$$\int\frac{dx}{2-5x};\quad \int\sqrt[3]{4x-7}\,dx;\quad \int(3x-1)^5dx;\quad \int\frac{dx}{\sqrt{8x+5}};\quad \int\operatorname{tg}(2-3x)dx;$$

$$\int\frac{dx}{4x^2+3};\quad \int\frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}.$$

На практике это правило приходится комбинировать с такими тождественными преобразованиями подынтегральной функции, которые способствуют («подготовляют почву») для введения вспомогательной функции.

Например, в нижеследующих интегралах вынесение в подынтегральной функции постоянного числа a^2 за скобки позволяет свести их к табличным. Это интегралы часто относят к категории основных (опорных) и включают в таблицу интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1/a} \arcsin\frac{x}{a} + C = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1/a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Использование приёма, применённого в примере 19 на стр. 9, (тождественное преобразование числителя дроби с целью дальнейшего получения двух, более простых, дробей), позволяет найти, что:

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a}\int \frac{(a+x)-x}{x(x+a)}dx = \frac{1}{a}\left[\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+a}\right] =$$

$$\frac{1}{a}\left[\ln|x| - \ln|x+a|\right] + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{x+a}\right| + C.$$

Аналогично

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{2a}\int \frac{2a\,dx}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{2a}\int \frac{\big((a-x)+(a+x)\big)dx}{(a-x)(a+x)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x}\right] = \frac{1}{2a}\left[\ln|a+x| - \ln|a-x|\right] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

Здесь последовательно использованы тождественные преобразования числителя дроби, стоящей под знаком интеграла: умножение и одновременное деление на число $2a$, прибавление и одновременное вычитание переменной x; в результате в числителе образовалась сумма двучленов $a - x$ и $a + x$, стоящих произведением в знаменателе и после деления каждого из слагаемых двучленов числителя на знаменатель, неизвестный интеграл удалось свести к сумме двух известных интегралов.

Хотелось бы отметить, что в учебниках изложены общие правила интегрирования рациональных дробей, какой является и дробь $\frac{1}{a^2 - x^2}$; однако здесь мы стараемся не просто показать формальные алгоритмы интегрирования, а «заставить думать» на несложных примерах.

Очевидно, что $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Этот интеграл также относят к категории табличных.

В частности:

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 5} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 - \left(\sqrt{5/3}\right)^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{2\cdot\sqrt{5/3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5/3}}{x+\sqrt{5/3}}\right| + C = \frac{\sqrt{15}}{30}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{5}}{\sqrt{3}x+\sqrt{5}}\right| + C.$$

В методе подведения вспомогательной функции $v(x)$ под знак дифференциала мы стремились подынтегральное выражение $f(x)dx$ представить в виде произведения двух новых сомножителей $f_1(v(x))$ и $dv(x)$ полагая, что $\int f_1(v)dv$ должен стать табличным.

Например, если в интеграле $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$ за вспомогательную функцию выбрать $v(x)=\sin x$, то

$\cos x dx = d(\sin x)$, $\frac{1}{1+\sin^2 x} = f_1(\sin x)$ и $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} = \ = \int \frac{dv}{1+v^2} = \operatorname{arctg} v + C = \operatorname{arctg}(\sin x) + C$.

Представление подынтегрального выражения в виде произведения некоторой функции $u(x)$ и дифференциала $dv(x)$ другой функции $v(x)$ бывает полезным даже в том случае, когда $u(x)$ не имеет явного выражения через $v(x)$ и, таким образом, метод подведения вспомогательной функции под знак дифференциала «не работает», С таким представлением связана формула «интегрирования по частям».
Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые функции от x, имеющие непрерывные производные, тогда

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)^{*}.$$

Эта формула полезна в тех случаях, когда интеграл $\int v(x)du(x)$ находится проще (например, становится табличным), чем исходный интеграл $\int u(x)dv(x)$.

Например:

$\int \ln x \cdot x dx$. Если принять $u(x)=\ln x$, $dv(x) = x dx$, тогда

$$du(x) = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x},\ \ v(x) = \int dv(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} \ \ (C=0)$$

и

$$\int \ln x \cdot x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \ \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx.$$

Последний интеграл – табличный: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, поэтому такая замена оказалась успешной и

---

* Вывод этой формулы основан на почленном интегрировании формулы дифференцирования произведения двух функций:

$$d\big(u(x)v(x)\big) = du(x)v(x) + u(x)dv(x):$$
$$\int d\big(u(x)v(x)\big) = \int v(x)du(x) + \int u(x)dv(x).$$

откуда, учитывая, что $\int d\big(u(x)\,v(x)\big) = u(x)\,v(x)$ получается формула интегрирования по частям.

$$\int \ln x \cdot x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C^{**}.$$

Способ разделения подынтегрального выражения на две части весьма принципиален, например, если в том же интеграле $\int x \cdot \ln x dx$ примем $u(x) = x;\ dv(x) = \ln x \cdot dx$, тогда $du(x) = (x)' dx = dx$; $v(x) = \int dv(x) = \int \ln x dx$ – не является табличным, хотя и более простой интеграл, чем исходный.
Поэтому, прежде чем применять метод интегрирования по частям, следует мысленно прикинуть, что даёт нам то или иное расщепление подынтегрального выражения на два множителя.

Примеры:

1. $\int x\cdot e^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} = x\cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

2. $\int x^2 \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ \cos x dx = dv & v = \int \cos x dx = \sin x \end{vmatrix} = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx =$

$$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx.$$

Последний интеграл проще исходного, но не является табличным. Применим к его нахождению ещё раз метод «интегрирования по частям».

$$\int x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x dx, & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -x\cos x - \int (-\cos x)\, dx = -x\cos x + \sin x.$$

Окончательно имеем:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2[-x\cos x + \sin x] + C = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

** Произвольную постоянную C можно приписать после нахождения последней первообразной.

3. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \begin{vmatrix} u(x) = x, & du = dx \\ dv(x) = \frac{dx}{\cos^2 x}, & v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx =$

$$= x\operatorname{tg} x - \int \frac{-d(\cos)}{\cos x} = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

Найдите самостоятельно следующие интегралы:

$\int x \sin 2x dx$; $\int x^4 \ln x dx$; $\int e^x x^2 dx$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти интегралы методом непосредственного интегрирования:

1) $\int \frac{dx}{x^5}$;	9) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}$;	17) $\int \frac{1}{3x-4}\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}\, dx$;
2) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^5}}$;	10) $\int \frac{dx}{7-5x^2}$;	18) $\int 4^{3x} dx$;
3) $\int \left(x^5 - 3\sqrt{x} + 5\right) dx$;	11) $\int \frac{dx}{4x^2+1}$;	19) $\int 8^x 3^{3x} dx$;

4) $\int \frac{3x-4\sqrt{x}+2}{x^3}dx$; 12) $\int \frac{dx}{3-4x^2}$; 20) $\int \cos\frac{x+5}{3}dx$;

5) $\int \frac{\left(7x-\sqrt[3]{x^4}\right)^2}{2x}dx$; 13) $\int \frac{dx}{(6-8x)^7}$; 21) $\int \mathrm{ctg}\,9x\,dx$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-7}}$; 14) $\int \sqrt[9]{(4-3x)}\,dx$; 22) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-4)}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}$; 15) $\int \frac{dx}{5+3x}$; 23) $\int \frac{\left(x^2+4x+4\right)^{3/4}}{x+2}dx$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+7}}$; 16) $\int (x-4)^8\,dx$; 24) $\int \frac{6^x-5\cdot 3x^{x+3}}{7^{x-2}}dx$.

2. Найти интегралы методом подведения под дифференциал:

1. $\int e^{x^2}x\,dx$;
2. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos x}}$;
3. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$;
4. $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$;
5. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{1+x^3}}$;
6. $\int \frac{\cos x\,dx}{3-\sin x}$;
7. $\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x\,dx$;
8. $\int \frac{2^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;
10. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\mathrm{arctg}^3 x}$;
11. $\int \frac{e^x dx}{3+e^x}$;
12. $\int e^{\cos 3x}\sin 3x\,dx$;
13. $\int \cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}dx$;
14. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2+e^x}}$;
15. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}\,5x}}{\sin^2 5x}dx$;
16. $\int \frac{\arccos^3 3x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}$;
17. $\int \frac{x\,dx}{5-2x^2}$;
18. $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$;
19. $\int \frac{3^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
20. $\int \frac{\mathrm{tg}^6 3x}{\cos^2 3x}dx$;
21. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x\sqrt{\mathrm{ctg}\,4x}}$;
22. $\int e^{3\cos x}\sin x\,dx$;
23. $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$;
24. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)e^{\mathrm{arctg}\,x}}$.

3. Найдите интегралы методом интегрирования по частям:

1. $\int \ln x\,dx$;
2. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx$;
3. $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$;
4. $\int \left(2x^2+x\right)\ln x\,dx$;
5. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;
6. $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

ЛИТЕРАТУРА, КОТОРАЯ ПОМОЖЕТ БОЛЕЕ ГЛУБОКО ИЗУЧИТЬ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1988.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 1 – 3 / под ред. А.П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1991.
3. Линьков, В.М. Высшая математика в примерах и задачах. Компьютерный практикум : учеб. пособие / В.М. Линьков, Н.Н. Яремко ; под ред. А.А. Емельянова. – М. : Финансы и статистика, 2006.
4. Каплан, И.А. Практикум по высшей математике : учебное пособие. В 2 т. Т. 2 / И.А. Каплан, В.И. Пустынников ; под общ. ред. проф. В.И. Пустынникова. – М. : Эксмо, 2006.