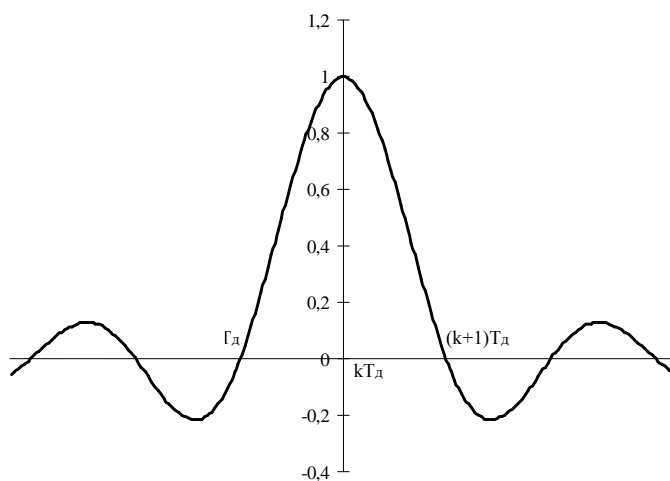


ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ



Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Методические указания
для студентов 3 курса специальности 210201 всех форм обучения,
бакалавров, обучающихся по направлению 210200



Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

УДК 681.511.22
ББК Φ 811.3я73-5
М915

Рецензент

Доктор технических наук, профессор
кафедры "Информационные процессы и управление" ТГТУ
В.А. Погонин

Составители:

Д.Ю. Муромцев, Е.Н. Яшин

М915 Дискретные системы : методические указания / сост. : Д.Ю. Муромцев, Е.Н. Яшин. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 32 с. – 100 экз.

Содержат комплекс лабораторных работ по предмету "Дискретные системы" и включают следующие темы: дискретизация, математическое описание и анализ дискретных систем, методы спектрального представления сигналов.

Предназначены для студентов 3 курса всех форм обучения специальности 210201 "Проектирование и технология радиоэлектронных средств", а также бакалавров, обучающихся по направлению 210200 "Проектирование и технология электронных средств".

УДК 681.511.22

ББК Φ 811.3я73-5

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный
технический университет» (ТГТУ), 2009

Учебное издание

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Методические указания

Составители:

МУРОМЦЕВ Дмитрий Юрьевич,
ЯШИН Евгений Николаевич

Редактор Л.В. Комбарова

Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсеева

Подписано в печать 16.11.2009.

Формат 60×84/16. 1,86 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 511.

Издательско-полиграфический центр

Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Предметом дисциплины "Дискретные системы" являются основные методы и технические приёмы цифровой фильтрации, обработки и преобразований информационных данных в современных информационных системах регистрации, накопления, обработки и представления данных, изучение методов реализации в информационных системах и на современных персональных компьютерах эффективных алгоритмов преобразования и анализа информационных данных.

Целью дисциплины "Дискретные системы" является формирование основ знаний в области теории и техники дискретных методов формирования, передачи и обработки информации.

Изучение дисциплины основывается на знаниях, полученных студентами при изучении следующих дисциплин: "Математика", "Информатика", "Физика", "Общая электротехника и электроника", "Метрология, стандартизация и технические измерения".

Знания, умения и навыки, получаемые при изучении дисциплины, могут использоваться студентами при проектировании цифровых электронных систем, разработке алгоритмического обеспечения обработки данных, эксплуатации, техническом обслуживании и ремонте радиоэлектронных средств на предприятиях радиотехнического профиля, занимающихся разработкой и изготовлением радиоэлектронных и электронных средств, бытовой радиоаппаратуры.

Лабораторная работа № 1

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА

ПО ЕГО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ

Цель работы: изучение и практическое применение теоремы Котельникова при исследовании дискретных сигналов.

Исходные данные: задан некоторый дискретный процесс $X = x_k$; $x_k \in [-5,5]$; $k = \overline{0, K}$; $K = 7$. Каждый отсчёт x_k представляет собой случайно сгенерированное число. Период дискретизации T_d принять равным двум последним цифрам зачётной книжки студента с единицей измерения микросекунда.

Порядок выполнения

1. Считая, что дискретизация исходного сигнала проводилась в соответствии с теоремой Котельникова, найти верхнюю частоту исходного сигнала F_B .
2. Найти значение исходного сигнала в моменты времени между интервалами дискретизации.
3. Отобразить графики дискретного и восстановленного сигнала.

Методические указания

Согласно теореме Котельникова непрерывный сигнал можно полностью восстановить по его дискретным отсчётам, если частота дискретизации в два раза превышает верхнюю частоту непрерывного сигнала $F_B \leq \frac{1}{2T_d}$.

Из теоремы Котельникова непосредственно следует, что непрерывный процесс $x(t)$ полностью определяется совокупностью её дискретных значений амплитуды в отсчётные моменты времени $t = kT_d$. А восстановление непрерывного сигнала производится по формуле

$$x(t) = \sum_{k=0}^K x_k \frac{\sin \omega_B(t - kT_d)}{\omega_B(t - kT_d)}, \quad (1.1)$$

где $\omega_B = 2\pi F_B$ – верхняя круговая частота исходного сигнала.

Простейшие сигналы вида

$$s_k(t) = \frac{\sin \omega_B(t - kT_d)}{\omega_B(t - kT_d)}, \quad (1.2)$$

ортогональные друг другу на интервале времени $[-\infty, \infty]$, называются функциями отсчётов, базисными функциями, или функциями Котельникова (рис. 1.1). Каждая из базисных функций $s_k(t)$ сдвинута относительно подобной соседней функции $s_{k-1}(t)$ и функции $s_{k+1}(t)$ на интервал дискретизации T_d . Чем больше таких функций используется для восстановления сигнала, тем более точным получается результат. Количество таких функций равно количеству отсчётов рассматриваемого дискретного процесса.

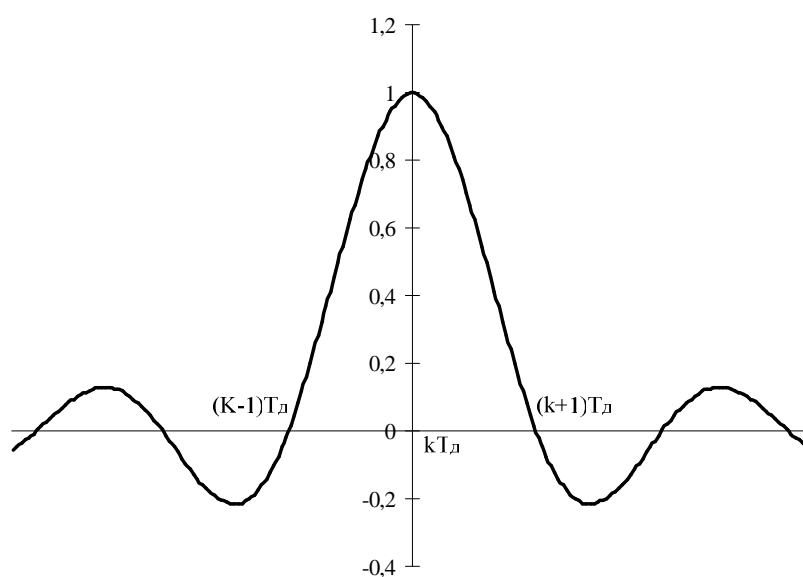


Рис. 1.1. График базисной функции Котельникова

Пример. Дискретизированный в соответствии с теоремой Котельникова непрерывный сигнал имеет 3 отсчёта на временной оси (рис. 1.2).

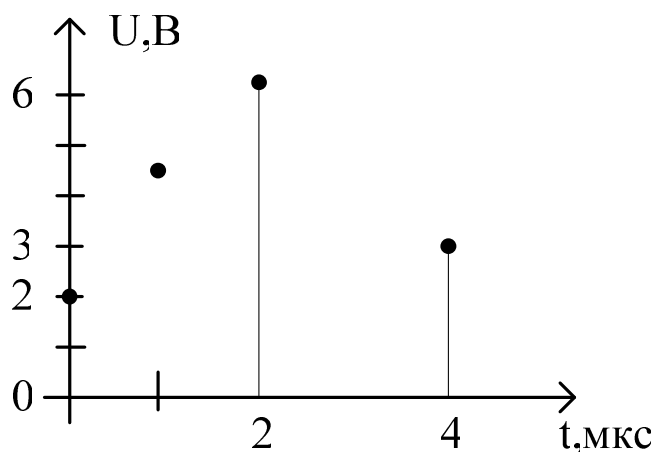


Рис. 1.2. Дискретный процесс x

Вычислить мгновенное значение непрерывного сигнала в момент времени $t = 1$ мкс.

Непосредственно из рис. 1.2 видно, что период дискретизации $T_d = 2$ мкс. Соответственно $\omega_B = 2\pi F_B = 2\pi \frac{1}{2T_d} = \frac{\pi}{T_d} = 1\,570\,796,33$. Согласно (1.1) ряд Котельникова имеет вид:

$$x(t) = 2 \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B t} + 6 \frac{\sin(\omega_B t - \pi)}{\omega_B t - \pi} + 3 \frac{\sin(\omega_B t - 2\pi)}{\omega_B t - 2\pi}.$$

Откуда $x(10^{-6}) = 1,273 + 3,829 - 0,637 = 4,456$ В.

Контрольные вопросы

1. Объясните основной смысл теоремы Котельникова.
2. Каким образом ограничить максимальную частоту в исходном сигнале?
3. Что называется квантованием?
4. Как квантование влияет на результат дискретизации?
5. Какие устройства осуществляют дискретизацию сигнала?
6. Какие устройства восстанавливают сигнал?
7. В чём различие между импульсными, релейными и цифровыми системами?

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Цель работы: изучение методов частотного анализа дискретных сигналов с помощью дискретного преобразования Фурье.

Исходные данные взять из лабораторной работы № 1.

Порядок выполнения

1. Найти коэффициенты Фурье.
2. Представить график частотного спектра сигнала.
3. Найти обратное преобразование Фурье.

Методические указания

Спектральное преобразование функций представляет собой описание функций в новой системе координат, т.е. перевод исходных функций на новый координатный базис. В радиотехнике наибольшее распространение получило преобразование сигналов в базисах гармонических функций. Это объясняется тем, что гармонические колебания являются функциями времени, сохраняющими свою форму при прохождении через любую линейную цепь, изменяются только амплитуда и начальная фаза колебаний, что очень удобно для анализа систем преобразования сигналов.

Как и периодический непрерывный сигнал дискретную функцию $x[k]$ можно разложить в комплексный ряд Фурье

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_n k T_d}, \quad (2.1)$$

где $\omega_n = \frac{2\pi}{NT_d}$ – интервал дискретизации спектра дискретного сигнала; C_n – комплексные коэффициенты дискретного преобразования Фурье (ДПФ), которые находятся по формуле

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi nk/N}. \quad (2.2)$$

ДПФ обладает следующими свойствами:

1. Линейность – сумме (разности) дискретных сигналов соответствует сумма (разность) их ДПФ.
2. Коэффициент $C_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k$ представляет собой среднее значение (постоянную составляющую) всех дискретных отсчётов сигнала.
3. Число определяемых коэффициентов C_n равно числу отсчетов N сигнала.
4. Дискретизация сигнала во временной области приводит к дискретизации спектра и его периодизации, т.е. $C_{0+n} = C_{N+n} = C_{2N+n} = \dots, \quad n = \overline{0, N-1}$.

Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) представляет собой процедуру нахождения дискретных отсчётов сигнала по его спектральным составляющим:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j2\pi nk/N}. \quad (2.3)$$

Выражения (2.2) и (2.3) показывают, что для нахождения одного коэффициента или отсчёта необходимо выполнить N операций умножения на комплексное число и столько же операций сложения. Для определения всех коэффициентов или отсчётов потребуется около N^2 вычислений. При такой вычислительной сложности обработка больших массивов данных в реальном времени является трудно решаемой задачей и предъявляет высокие требования к вычислительному устройству по быстродействию и объёмам оперативной памяти. Поэтому для практической реализации такие алгоритмы малоприменимы.

Пример. Найти ДПФ для дискретного процесса, заданного $N=4$ дискретными отсчётами $X = \{2, -1, 1, 4\}$, следующими с периодом дискретизации $T_d = 2$ мкс.

Решение. Для выполнения ДПФ используется формула (2.2), где комплексная экспонента заменяется выражением Эйлера

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k [\cos(2\pi nk/N) - j \sin(2\pi nk/N)]. \quad (2.4)$$

Подставляя исходные данные в (2.4) найдём

$$C_0 = \frac{1}{4} [2 - 1 + 1 + 4] - j0 = 1,5;$$

$$C_1 = \frac{1}{4} [2 - 1 \cos(2\pi/4) + 1 \cos(2\pi 2/4) + 4 \cos(2\pi 3/4)] -$$

$$- j \frac{1}{4} [2 \sin 0 - 1 \sin(2\pi/4) + 1 \sin(2\pi 2/4) + 4 \sin(2\pi 3/4)] = 0,25 + j1,25;$$

$$C_2 = \frac{1}{4} [2 - 1 \cos(2\pi 2/4) + 1 \cos(2\pi 2 \cdot 2/4) + 4 \cos(2\pi 2 \cdot 3/4)] -$$

$$- j \frac{1}{4} [2 \sin 0 - 1 \sin(2\pi 2/4) + 1 \sin(2\pi 2 \cdot 2/4) + 4 \sin(2\pi 2 \cdot 3/4)] = 0;$$

$$C_3 = \frac{1}{4} [2 - 1 \cos(2\pi 3/4) + 1 \cos(2\pi 3 \cdot 2/4) + 4 \cos(2\pi 3 \cdot 3/4)] -$$

$$- j \frac{1}{4} [2 \sin 0 - 1 \sin(2\pi 3/4) + 1 \sin(2\pi 3 \cdot 2/4) + 4 \sin(2\pi 3 \cdot 3/4)] = 0,25 - j1,25.$$

Спектральные составляющие отстоят друг от друга на расстоянии $F_n = \frac{1}{NT_n} = \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 125 \text{ кГц}$.

При построении графика по оси ординат откладывают модуль комплексного коэффициента Фурье. Также возможно представлять спектр сигнала в виде двух графиков – для действительной и мнимой частей коэффициентов. Внешний вид полученного спектра сигнала в виде модуля комплексного числа представлен на рис. 2.1. Показанный на рисунке спектр по сути является аппроксимацией спектра исходного непрерывного сигнала.

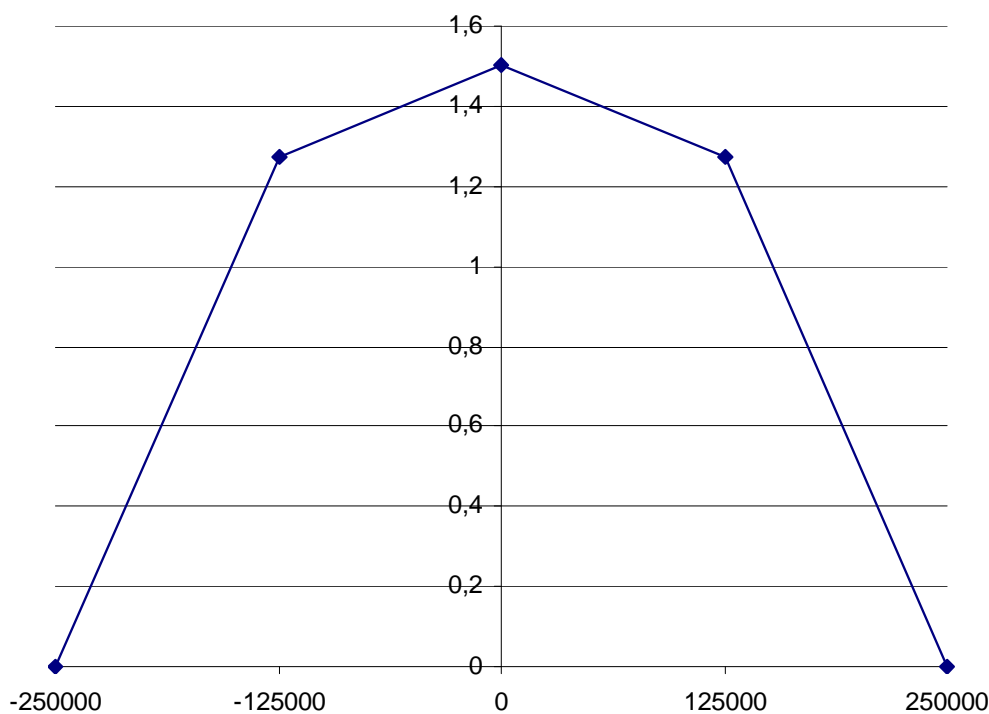


Рис. 2.1. Спектр дискретного сигнала

ОДПФ проводится по аналогии с ДПФ по формуле (2.3), путём нахождения действительной и мнимой частей с помощью выражения Эйлера.

Контрольные вопросы

1. Как изменится спектр сигнала при его дискретизации?
2. Как частота дискретизации влияет на спектр дискретного сигнала?
3. Почему при практической дискретизации частоту дискретизации выбирают в 3 – 5 раз выше верхней частоты сигнала?
4. Каков физический смысл коэффициента Фурье на нулевой частоте?
5. Чем объяснить периодизацию спектра при дискретизации?
6. Можно ли использовать ДПФ и ОДПФ для фильтрации сигналов?
7. Какие основные свойства имеют ДПФ и ОДПФ?

Лабораторная работа № 3

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Цель работы: исследование практических методов спектрального анализа.

Исходные данные из лабораторной работы № 1.

Порядок выполнения

1. Реализовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).
2. Сравнить данный алгоритм с методом, представленным в лабораторной работе № 2 по скорости и вычислительной сложности.
3. Составить блок-схему реализации БПФ и оценить количество вычислений данного метода.

Методические указания

Идея БПФ состоит в представлении исходного ДПФ большой размерности несколькими ДПФ меньшей размерности. В преобразовании участвует массив данных размером $N=2^r$. Если количество

выборки исходного сигнала меньше этой величины, то он искусственно дополняется нулями до заданного количества. Введя обозначение $\omega_r = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{2^r}}$, выражение (2.2) запишется в виде:

$$C_n = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{2^r-1} x_k \omega_r^{nk}. \quad (3.1)$$

Разделим общую сумму выражения (3.1) на две части, одна содержит слагаемые с чётными номерами, а другая с нечётными:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{2^r-1} x_k \omega_r^{nk} = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} [x_{2k} \omega_r^{2kn} + x_{2k+1} \omega_r^{(2k+1)n}] = \\ &= \frac{1}{2^r} \left[\sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} x_k^{\text{ч}} \omega_{r-1}^{kn} + \omega_r^n \sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} x_k^{\text{н}} \omega_{r-1}^{kn} \right] = C_n^{\text{ч}} + \omega_r^n C_n^{\text{н}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $n = \overline{0, 2^r - 1}$; $x_k^{\text{ч}} \in X^{\text{ч}} = \{x_0, x_2, \dots, x_{2^{r-2}}\} = \{x_0^{\text{ч}}, x_1^{\text{ч}}, \dots, x_{2^{r-1}-1}^{\text{ч}}\}$ – элемент массива чётных номеров; $x_k^{\text{н}} \in X^{\text{н}} = \{x_1, x_3, \dots, x_{2^{r-1}-1}\} = \{x_0^{\text{н}}, x_1^{\text{н}}, \dots, x_{2^{r-1}-1}^{\text{н}}\}$ – элемент массива нечётных номеров; $C_n^{\text{ч}}$, $C_n^{\text{н}}$ – коэффициенты Фурье, соответственно, для массивов чётных и нечётных элементов. То есть спектр исходного сигнала состоит из двух спектров, образованных прореживанием по времени выборок исходного сигнала. Коэффициенты $C_n^{\text{ч}}$, $C_n^{\text{н}}$ являются периодическими с периодом 2^{r-1} , т.е. $C_n^{\text{ч}} = C_{n+2^{r-1}}^{\text{ч}}$ и $C_n^{\text{н}} = C_{n+2^{r-1}}^{\text{н}}$ при $n = \overline{0, 2^{r-1} - 1}$. Учитывая, что $\omega_r^{2^{r-1}+n} = e^{-j\frac{2\pi}{2^r}(2^{r-1}+n)} = e^{-j\pi} e^{-j\frac{2\pi}{2^r}n} = -\omega_r^n$ при $n = \overline{0, 2^{r-1} - 1}$, выражение (3.2) можно представить в форме:

$$\begin{cases} C_n = C_n^{\text{ч}} + \omega_r^n C_n^{\text{н}}; \\ C_{n+2^{r-1}} = C_n^{\text{ч}} - \omega_r^n C_n^{\text{н}}; \\ n = \overline{0, 2^{r-1} - 1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь массив чётных номеров $X^{\text{ч}} = \{x_0, x_2, \dots, x_{2^{r-2}}\} = \{x_0^{\text{ч}}, x_1^{\text{ч}}, \dots, x_{2^{r-1}-1}^{\text{ч}}\}$. Спектр этого массива также можно представить как сумму спектров чётных и нечётных составляющих этого массива размерности 2^{r-2} . Вычисления производятся по формулам (3.2) и (3.3). Обозначим уровень разбиения исходного массива l , тогда на каждом уровне необходимо будет находить ДПФ для массива из 2^{r-l} элементов. Такое разбиение можно продолжать до тех пор, пока массив не будет состоять из одного элемента при $l=r$, ДПФ которого равно, согласно (3.1), $C_n = \frac{1}{2^r} x_n$. На уровне $l=r$ можно принять, что ДПФ отсчёта равно самому отсчёту $C_n = x_n$, однако после выполнения всех операций ($l=0$), полученные коэффициенты Фурье необходимо разделить на 2^r . Для массива нечётных номеров $X^{\text{н}}$ поступают аналогично.

Таким образом, алгоритм БПФ состоит из r уровней, на каждом уровне l формируется массив значений $C^l = \{C_0^l, C_1^l, \dots, C_{N-1}^l\}$ по формулам:

$$l=0, \text{ тогда } \begin{cases} C_n = C_{2n}^{l+1} + \omega_r^n C_{2n+1}^{l+1}; \\ C_{\overline{n+2^{r-1}}} = C_{2n}^{l+1} - \omega_r^n C_{2n+1}^{l+1}; \\ n = 0, 2^{r-1} - 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

$$r > l > 0, \text{ тогда } \begin{cases} C_{2n}^l = C_{2n}^{l+1} + \omega_{r-l}^n C_{2n+2^l}^{l+1}; \\ C_{2n+2^{r-1}}^l = C_{2n}^{l+1} - \omega_{r-l}^n C_{2n+2^l}^{l+1}; \\ C_{2n+1}^l = C_{2n+1}^{l+1} + \omega_{r-l}^n C_{2n+1+2^l}^{l+1}; \\ C_{\overline{2n+1+2^{r-1}}}^l = C_{2n+1}^{l+1} - \omega_{r-l}^n C_{2n+1+2^l}^{l+1}; \\ n = 0, 2^{r-1-l} - 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

$$l=r, \text{ тогда } \begin{cases} C_n^l = \frac{X_n}{2^r}; \\ n = 0, 2^r - 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Пример. Найти БПФ для массива данных $X = \{2, -1, 1, 4\}$.

Решение. Для данного количества отсчётов принимается $r=2$, задаваясь различными значениями l формируются массивы C^l на каждом уровне l в соответствии с формулами (3.4 – 3.6).

$l=r=2$, тогда по (3.6)

$$C^2 = \{2/4, -1/4, 1/4, 4/4\} = \{0,5, -0,25, 0,25, 1\}.$$

$$l=1, \text{ тогда } \begin{cases} C_0^1 = C_0^2 + \omega_1^0 C_2^2; \\ C_2^1 = C_0^2 - \omega_1^0 C_2^2; \\ C_1^1 = C_1^2 + \omega_1^0 C_3^2; \\ C_3^1 = C_1^2 - \omega_1^0 C_3^2; \\ n=0. \end{cases} \quad \omega_1^0 = 1,$$

$$C^1 = \{0,5 + 0,25, -0,25 + 1, 0,5 - 0,25, -0,25 - 1\} = \{0,75, 0,75, 0,25, -1,25\}.$$

$$l=0, \text{ тогда } \begin{cases} C_n = C_{2n}^1 + \omega_2^n C_{2n+1}^1; \\ C_{n+2} = C_{2n}^1 - \omega_2^n C_{2n+1}^1; \\ n = \overline{0,1}. \end{cases}$$

$$\omega_2^0 = 1, \quad \omega_2^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j,$$

$$C^0 = \{1, 0, 25 + j1, 25, 0, 0, 25 - j1, 25\}.$$

Сравнивая полученное значение с результатами примера лабораторной работы № 2, можно убедиться в идентичности полученных результатов.

Контрольные вопросы

1. Какова практическая значимость БПФ?
2. Изобразите алгоритм БПФ в виде графа.
3. На сколько БПФ эффективнее ДПФ?
4. Возможно ли создания быстрого обратного дискретного преобразования Фурье?
5. Какова будет структура устройства, выполняющего БПФ?
6. При спектральном анализе бесконечной последовательности, на что будет влиять количество отсчётов в выборке?
7. Из каких основных действий состоит процедура БПФ?
8. Можно ли строить быстрые алгоритмы Фурье при различных способах прореживания по времени исходных данных?

Лабораторная работа № 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Цель работы: изучение методов математического описания дискретных систем.

Исходные данные: система описывается дифференциальным уравнением $a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_3 x^{(3)} + b_2 x^{(2)} + b_1 x^{(1)} + b_0 x$, период дискретизации равен двум последним цифрам зачётной книжки студента с размерностью мкс.

Порядок выполнения

1. Преобразовать исходное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в конечно-разностную форму путём замены производных конечной разностью соответствующего порядка.
2. Привести разностное уравнение к каноническому виду.

3. Для 15 случайных входных воздействий x рассчитать выход системы, считая, что до момента поступления входного воздействия она находилась в состоянии покоя.

4. Изобразить графики входного и выходного процесса.

Методические указания

Математическое описание линейных дискретных систем производится с помощью, так называемых, разностных уравнений. По своей структуре эти уравнения во многом напоминают дифференциальные уравнения непрерывных систем. Для лучшего понимания теории о конечных разностях, изобразим на рис. 4.1 дискретную функцию $x(iT_{\Pi})$. Нулевой конечной разностью называется само значение дискретной функции и обозначается через $\Delta_0 x[iT_{\Pi}] = x[iT_{\Pi}]$. Это понятие аналогично нулевой производной непрерывной функции.

Первой конечной разностью называется выражение

$$\Delta_1 x[iT_{\Pi}] = (x[iT_{\Pi}] - x[(i-1)T_{\Pi}]) / T_{\Pi}, \quad (4.1)$$

где $x[(i-1)T_{\Pi}]$ – значение функции в предшествующем периоде следования (рис. 4.1). Первая конечная разность определяет приращение функции на период и по смыслу близко к понятию первой производной непрерывных функций.

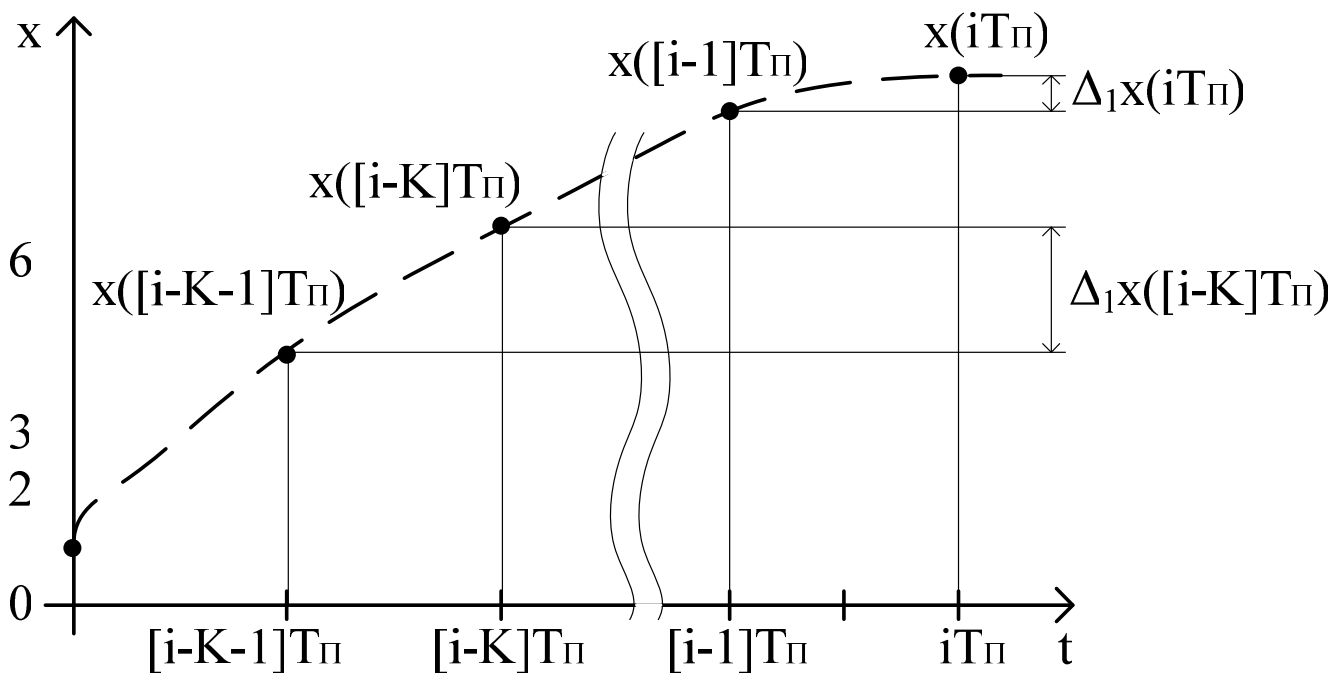


Рис. 4.1. Определение конечных разностей

Вторая разность равна разности первых разностей:

$$\begin{aligned}\Delta_2 x[iT_n] &= (\Delta_1 x[iT_n] - \Delta_1 x[(i-1)T_n]) / T_n = \\ &= (x[iT_n] - 2x[(i-1)T_n] + x[(i-2)T_n]) / T_n^2.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Третья разность равна разности вторых разностей:

$$\begin{aligned}\Delta_3 x[iT_n] &= (\Delta_2 x[iT_n] - \Delta_2 x[(i-1)T_n]) / T_n = \\ &= (x[iT_n] - 3x[(i-1)T_n] + 3x[(i-2)T_n] - x[(i-3)T_n]) / T_n^3,\end{aligned}$$

и, в общем случае, разность k -го порядка

$$\Delta_k x[iT_n] = (\Delta_{k-1} x[iT_n] - \Delta_{k-1} x[(i-1)T_n]) / T_n, \quad (4.3)$$

или для частного случая $T_n = 1$

$$\Delta_k x[i] = \Delta_{k-1} x[i] - \Delta_{k-1} x[i-1]. \quad (4.3a)$$

Этой разности можно сопоставить понятие k -й производной непрерывной функции, то k -ю разность можно выразить через значения дискретной функции следующим образом:

$$\Delta_k x[i] = x[i] - kx[i-1] + C_k^2 x[i-2] - C_k^3 x[i-3] + \dots - C_k^{k-1} x[i-k+1] + x[i-k], \quad (4.4)$$

где $C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}$ – число сочетаний из k по r ($k \geq r$).

Разностное уравнение дискретной системы устанавливает соответствие между входным и выходным дискретными процессами и их разностями. Линейным системам соответствует линейное соотношение между этими переменными, которое имеет вид:

$$\overline{a_0}y[l] + \overline{a_1}\Delta_1 y[l] + \dots + \overline{a_n}\Delta_n y[l] = \overline{b_0}x[l] + \overline{b_1}\Delta_1 x[l] + \dots + \overline{b_m}\Delta_m x[l]. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) называется линейным конечно-разностным уравнением и по своей структуре соответствует линейному дифференциальному уравнению

$$a_0 y + a_1 y^{(1)} + \dots + a_n y^{(n)} = b_0 x + b_1 x^{(1)} + \dots + b_m x^{(m)}. \quad (4.6)$$

Коэффициенты $\overline{a_i} = \frac{a_i}{T_n^i}$, $\overline{b_j} = \frac{b_j}{T_n^j}$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$ определяются параметрами системы, в том числе они зависят от периода квантования T_n . Если параметры системы не зависят от времени, то коэффициенты уравнения (4.5) будут постоянными и система называется стационарной. Максимальный порядок n разности выходного процесса называется порядком уравнения или порядком дискретной системы.

Решение разностного уравнения можно записать в виде суммы:

$$y[l] = y_n[l] + y_x[l], \quad (4.7)$$

которая состоит из дискретного переходного процесса $y_n[l]$ и вынужденного процесса $y_x[l]$. Переходный процесс находится из решения однородного уравнения

$$\overline{a_0}y[l] + \overline{a_1}\Delta_1 y[l] + \dots + \overline{a_n}\Delta_n y[l] = 0, \quad (4.8)$$

при начальных условиях $y[0], \Delta_1 y[0], \dots, \Delta_{n-1} y[0]$ для момента включения системы $t = 0$. Вынужденный процесс $y_x[l]$ является частным решением уравнения (4.5) при нулевых начальных условиях и заданном воздействии $x[l]$.

Таким образом, как с точки зрения структуры уравнений, так и с точки зрения характера решения линейные дифференциальные и конечно-разностные уравнения имеют много общего, что и приводит ко многим аналогиям в методиках исследования непрерывных и дискретных систем. Линейное разностное уравнение можно представить в рекуррентной форме записи, для чего в уравнении (4.5) надо раскрыть конечные разности по формуле (4.4) и сгруппировать все слагаемые с общими множителями вида $y[i-k]$ и $x[i-r]$, где $k = \overline{0, n}$; $r = \overline{0, m}$. После группировки уравнение примет следующий вид:

$$\overline{A_0}y[l] + \overline{A_1}y[l-1] + \dots + \overline{A_n}y[l-n] = \overline{B_0}x[l] + \overline{B_1}x[l-1] + \dots + \overline{B_m}x[l-m], \quad (4.9)$$

где коэффициенты \overline{A} и \overline{B} определяются коэффициентами \overline{a} и \overline{b} уравнения (4.5). В уравнение (4.9) вошли входная и выходная переменные с учётом их запаздывания на конечное число периодов. Для практического использования выразим из уравнения (4.9) значение выходной переменной

$$y[i] = \frac{1}{A_0} (\overline{B}_0 x[i] + \overline{B}_1 x[i-1] + \dots + \overline{B}_m x[i-m] - (\overline{A}_1 y[i-1] + \dots + \overline{A}_n y[i-n])). \quad (4.10)$$

Очевидно, что полученную формулу можно рассматривать как алгоритм вычисления выходной переменной по значениям входной переменной в m предшествующих моментах времени и $(n-1)$ значениям выходной переменной, найденным на предыдущих этапах вычислений.

Уравнение (4.10) описывает рекурсивную дискретную систему. Если в (4.10) выходное значение $y[i]$ зависит только от входных воздействий $x[i]$ в текущий и предшествующие моменты, то дискретная система будет нерекурсивной (без обратных связей):

$$y[i] = \frac{1}{A_0} (\overline{B}_0 x[i] + \overline{B}_1 x[i-1] + \dots + \overline{B}_m x[i-m]).$$

Так как уравнения (4.5) и (4.6) по своему содержанию подобны, то решение рекуррентного уравнения полностью совпадает с решением (4.6) конечно-разностного уравнения. При этом переходный процесс находится из решения однородного уравнения

$$\overline{A}_0 y[i] + \overline{A}_1 y[i-1] + \dots + \overline{A}_n y[i-n] = 0, \quad (4.11)$$

с начальными условиями $y[0], y[-1], y[-2], \dots, y[1-n]$. Вынужденный процесс является решением уравнения (4.9) при нулевых начальных условиях и заданной функции $x[i]$. Для исследования дискретных систем используются обе формы записи разностного уравнения в зависимости от конкретных решаемых задач.

Пример. Пусть система описывается дифференциальным уравнением $2y' + 5y = x' - 6x$. Требуется найти эквивалентную дискретную систему и рассчитать её отклик на входное воздействие $X = \{2, 1, 2, 0, -1, -2, 1, 3\}$, частоту дискретизации принять $T_d = 2$ с, если система в начальный момент времени находилась в покое.

Решение. Производится замена производной конечной разностью соответствующего порядка:

$$2\Delta_1 y/2 + 5y = \Delta_1 x/2 - 6x \quad \text{или}$$

$$y[i] - y[i-1] + 5y[i] = 0,5x[i] - 0,5x[i-1] - 6x[i].$$

Группируя соответствующие отсчёты, получим:

$$6y[i] - y[i-1] = -5,5x[i] - 0,5x[i-1],$$

откуда
$$y[i] = \frac{1}{6}(y[i-1] - 5,5x[i] - 0,5x[i-1]).$$

Решение задачи приводится в табл. 4.1, а график решения на рис. 4.2.

Таблица 4.1

i	x	y
-1	0	0
0	2	-1,83333
1	1	-1,38889
2	2	-2,14815
3	0	-0,52469
4	-1	0,829218
5	-2	2,05487
6	1	-0,40752
7	3	-2,90125

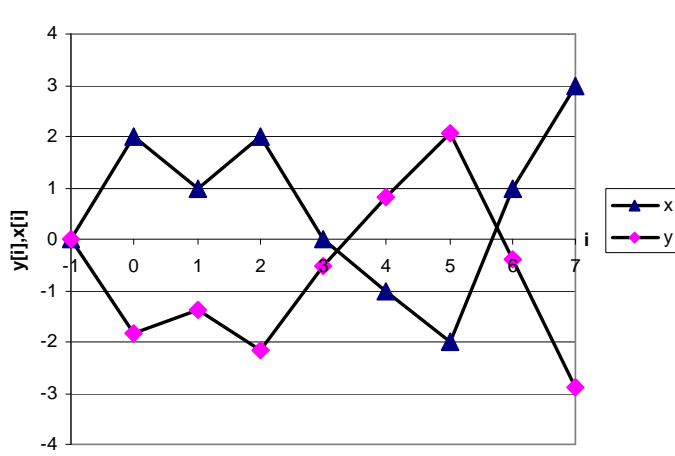


Рис. 4.2. График входного и выходного дискретных процессов

Контрольные вопросы

1. Что называют конечной разностью?
2. Чем отличаются стационарная система от нестационарной?
3. В чём особенность рекуррентной формы уравнения системы?
4. В чём отличие рекурсивных и нерекурсивных систем?
5. Что подразумевается под состоянием покоя дискретной системы?
6. Как влияет период дискретизации на конечно-разностное уравнение дискретной системы?
7. Как правильно выбрать период дискретизации для конкретной дискретной системы?
8. В чём состоит свойство линейности?
9. Будет ли система линейна, если использовать квантование входного сигнала?
10. Из каких процессов состоит решение конечно-разностного уравнения дискретной системы?

Лабораторная работа № 5

СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Цель работы: изучение способов математического анализа характеристик дискретных систем.

Исходные данные: в качестве исходных данных взять исходные данные и результаты выполнения лабораторной работы № 4.

Порядок выполнения

1. Определить импульсную характеристику дискретной системы $h[l]$.
2. Найти дискретную свёртку при воздействии на систему входного сигнала $x[l]$ из лабораторной работы № 1 и сравнить полученные результаты.
3. Провести z -преобразования дискретных процессов.
4. Определить передаточную функцию дискретной системы.
5. Определить частотную характеристику дискретной системы.
6. Найти нули и полюсы дискретной системы.

Методические указания

Импульсная характеристика $h[i]$ есть реакция системы на воздействие в виде единичного импульса $e = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$ при условии, что до начала этого воздействия система находилась в покое (по аналогии с реакцией непрерывной системы на дельта-импульс). Зная уравнение системы в конечно-разностном виде можно определить $h[i]$, если в качестве воздействия рассматривать $e[i]$.

Импульсная характеристика дискретной системы играет важную роль при анализе дискретных систем и цифровой фильтрации. Рассмотрим, например, вопрос нахождения реакции дискретной системы на произвольное входное воздействие $x[i]$. Любой дискретный сигнал можно представить в виде линейной комбинации единичных отсчётов $x[i] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e[i-m]$. Следовательно, выходной сигнал $y[i]$, ввиду линейности и стационарности рассматриваемой системы, должен представлять линейную комбинацию импульсных характеристик

$$y[i] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] h[i-m]. \quad (5.1)$$

Соотношение (5.1) называется дискретной свёрткой и представляет собой, по сути, сумму реакций системы в рассматриваемый момент времени i на воздействия в предыдущие моменты времени $i-m$ (по аналогии с интегралом Дюамеля в непрерывных системах). При анализе выражения (5.1) видно, что используются только значения в предыдущие моменты времени $h[k]=0, k < 0$, т.е. рассматриваются физически реализуемые системы, тогда верхний предел интегрирования можно заменить на i :

$$y[i] = \sum_{m=-\infty}^i x[m] h[i-m]. \quad (5.2)$$

При вычислении дискретной свёртки нижний предел следует брать в момент времени, когда система находилась в покое. При вычислении импульсной характеристики возможны следующие ситуации:

1. Импульсная характеристика содержит конечное количество членов.
2. Содержит бесконечное число членов, которые бесконечно убывают по своей величине.
3. Содержит бесконечное число членов, которые бесконечно возрастают по своей величине.
4. Бесконечное число членов образуют колебательный процесс, который может затухать со временем, либо возрастать.

Удобным способом анализа дискретных систем является z -преобразование, определяемое следующим образом:

$$X[z] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] e^{-piT_n} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] z^{-i}. \quad (5.3)$$

Функция $X[z]$ определена только для тех значений z , при которых ряд (5.3) сходится. То есть последовательности отсчётов $x[i]$ ставится в соответствие функция комплексной переменной z , которая обладает для дискретных сигналов похожими свойствами с преобразованием Лапласа для непрерывных сигналов.

По аналогии с непрерывным преобразованием Лапласа для аналоговых сигналов возможно отыскание оригинала, т.е. исходной функции отсчётов $x[i]$ по заданному изображению $X[z]$:

$$x[i] = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{i-1} X[z] dz, \quad (5.4)$$

где контурный интеграл ведётся по любому замкнутому контуру для z -плоскости в области сходимости, охватывающему точку начала координат. Обход контура интегрирования проводится в положительном направлении (против часовой стрелки).

Основные свойства z -преобразования:

1. Линейность: $Z(ax_1[i] + bx_2[i]) = aX_1[z] + bX_2[z]$.
2. Задержанный сигнал: если $y[i] = x[i - K]$, тогда

$$Y[z] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y[i] z^{-i} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] z^{-i} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i - K] z^{-(i-K)} z^{-K} = z^{-K} X[z],$$

т.е. z -преобразование задержанного сигнала равно z -преобразованию самого сигнала, умноженному на оператор задержки z^{-K} дискретной последовательности на K тактов.

3. Свёртке дискретных последовательностей соответствует произведение их z -преобразований

$$Y[z] = Z(y[i]) = Z\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] h[i - m]\right) = Z[x] H[z]. \quad (5.5)$$

4. Z -преобразование импульсной характеристики $Z(h[i]) = H[z]$ есть передаточная функция дискретной системы, которая непосредственно следует из (5.5)

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]}. \quad (5.6)$$

Таким образом, передаточная функция дискретной системы определяется отношением z -преобразований выходного дискретного процесса к входному.

Чтобы получить комплексный коэффициент передачи (частотную характеристику) дискретной системы воспользуемся связью преобразования Фурье и z -преобразованием:

$$\dot{K}(\omega) = H[e^{j\omega T_d}] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i] e^{-j\omega T_d} . \quad (5.7)$$

Из (5.7) видно, что частотная характеристика системы получается заменой $z = e^{j\omega T_d}$ в передаточной функции дискретной системы $H[z]$ и является периодической (как и спектры дискретных сигналов) с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$.

Разложив числитель и знаменатель функции передачи на множители, получим функцию передачи в следующем виде:

$$H[z] = k \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_n z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_m z^{-1})} , \quad (5.8)$$

где k – коэффициент усиления; z_i – нули функции передачи; p_i – полюсы функции передачи. В точках нулей $H(z_i) = 0$, а в точках полюсов $H(p_i) \rightarrow \infty$. Таким образом дискретную систему можно описать набором параметров $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, k . Нули и полюсы функции передачи могут быть вещественными, либо составлять комплексно-сопряжённые пары, а коэффициент усиления всегда вещественный.

Пример. Пусть задана дискретная система, описываемая в примере лабораторной работы № 4.

Решение.

1. Импульсную характеристику системы найдём, подав на её вход единичный импульс $x[l] = e = \{1, 0, 0, \dots\}$. Решение приведено в табл. 5.1 и показано графически на рис. 5.1.

Таблица 5.1

i	x	h
-1	0	0
0	1	-0,91667
1	0	-0,23611
2	0	-0,03935

3	0	-0,00656
4	0	-0,00109
5	0	-0,00018
6	0	-3E - 05

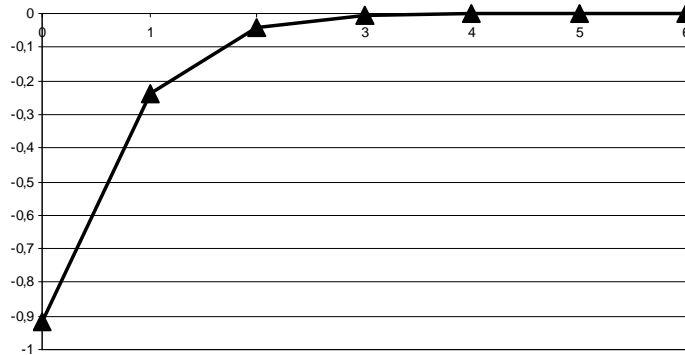


Рис. 5.1. Импульсная характеристика системы

В данном случае импульсная характеристика представляет бесконечно убывающую последовательность. Ограничиваясь точностью 0,001, импульсная характеристика рассматриваемой системы будет иметь вид $h[i] = \{-0,917; -0,236; -0,039; -0,007; -0,001\}$.

2. Дискретная свертка импульсной характеристики и входного процесса $X = \{2, 1, 2, 0, -1, -2, 1, 3\}$ будет находиться по формуле $y[i] = \sum_{m=0}^i x[m] h[i-m]$. Задаваясь различными значениями $i = \overline{0,7}$, найдём выходной процесс рассматриваемой системы. Результаты расчёта приведены в табл. 5.2.

5.2. Расчёт дискретной свёртки

i	Выражение	$y[i]$
0	$2 \cdot (-0,917)$	- 1,834
1	$2 \cdot (-0,236) + 1 \cdot (-0,917)$	- 1,388
2	$2 \cdot (-0,039) + 1 \cdot (-0,236) + 2 \cdot (-0,917)$	- 2,148
3	$2 \cdot (-0,007) + 1 \cdot (-0,039) + 2 \cdot (-0,236) + 0 \cdot (-0,917)$	- 0,525
4	$2 \cdot (-0,001) + 1 \cdot (-0,007) + 2 \cdot (-0,039) + 0 \cdot (-0,236) + 1 \cdot 0,917$	0,829
5	$1 \cdot (-0,001) + 2 \cdot (-0,007) + 0 + 1 \cdot 0,236 + 2 \cdot 0,917$	2,055

6	$2 \cdot (-0,001) + 0 + 1 \cdot 0,039 + 2 \cdot 0,236 + 1 \cdot (-0,917)$	- 0,407
7	$0 + 1 \cdot 0,007 + 2 \cdot 0,039 + 1 \cdot (-0,236) + 3 \cdot (-0,917)$	- 2,900

3. Найдём z -преобразования дискретных процессов $x[i]$, $y[i]$ и $h[i]$ по формуле (5.3)

$$X[z] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]z^{-i} = \sum_{i=0}^7 x[i]z^{-i} = 2z^0 + z^{-1} + 2z^{-2} - 1z^{-4} - 2z^{-5} + z^{-6} + 3z^{-7};$$

$$Y[z] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y[i]z^{-i} = \sum_{i=0}^7 y[i]z^{-i} = -1,834z^0 - 1,388z^{-1} - 2,148z^{-2} -$$

$$-0,525z^{-3} + 0,829z^{-4} + 2,055z^{-5} - 0,407z^{-6} - 2,9z^{-7};$$

$$H[z] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]z^{-i} = \sum_{i=0}^7 h[i]z^{-i} =$$

$$= -0,917z^0 - 0,236z^{-1} - 0,039z^{-2} - 0,007z^{-3} + 0,001z^{-4}. \quad (5.9)$$

4. Если обозначить $Z(x[i]) = X[z]$ и $Z(y[i]) = Y[z]$, то передаточную функцию можно выразить из уравнения (4.10) воспользовавшись свойствами линейности z -преобразования и задержки:

$$6Y[z] - z^{-1}Y[z] = -5,5X[z] - 0,5z^{-1}X[z];$$

$$Y[z](6 - z^{-1}) = X[z](-5,5 - 0,5z^{-1});$$

$$\frac{Y[z]}{X[z]} = H[z] = \frac{-5,5 - 0,5z^{-1}}{6 - z^{-1}}. \quad (5.10)$$

5. Комплексная частотная характеристика

$$\dot{K}(\omega) = H[e^{j\omega T_d}] = \frac{-5,5 - 0,5e^{-j\omega T_d}}{6 - e^{-j\omega T_d}} =$$

$$= \frac{(-5,5 - 0,5 \cos(\omega T_d) + j0,5 \sin(\omega T_d))(6 + \cos(\omega T_d) - j \sin(\omega T_d))}{(6 - \cos(\omega T_d) + j \sin(\omega T_d))(6 + \cos(\omega T_d) - j \sin(\omega T_d))} =$$

$$= \frac{-33 - 8,5 \cos(\omega T_d) - 0,5 \cos^2(\omega T_d) + 0,5 \sin^2(\omega T_d)}{36 + \sin^2(\omega T_d) - \cos^2(\omega T_d)} + j \frac{8,5 \sin(\omega T_d) + \sin(\omega T_d) \cos(\omega T_d)}{36 + \sin^2(\omega T_d) - \cos^2(\omega T_d)}. \quad (5.11)$$

Непосредственно из (5.11) видно, что комплексная частотная характеристика состоит из тригонометрических функций, а это означает её периодичность с периодом $\omega T_d = 2\pi$. Таким образом, частотную характеристику можно построить, принимая $0 \leq \omega \leq 2\pi / T_d$. Приняв $T_d = 1$ с построим график комплексной частотной характеристики (рис. 5.2).

К аналогичным результатам можно прийти, если использовать z -преобразование от импульсной характеристики $h[j]$ (5.9) (которая является разложением (5.10) в степенной ряд), однако из-за принятого ограничения членов ряда импульсной характеристики, полученные результаты не будут точно соответствовать результатам по (5.11). В таблице 5.3 приведены сравнительные расчёты с использованием формул (5.11) и (5.12), из которых видно, что с достаточной степенью точности результаты совпадают.

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) = H[e^{j\omega T_d}] = & -0,917 - 0,236 \cos(\omega T_d) - 0,039 \cos(2\omega T_d) - \\ & -0,007 \cos(3\omega T_d) + 0,001 \cos(4\omega T_d) + \\ & + j(0,236 \sin(\omega T_d) + 0,039 \sin(2\omega T_d) + 0,007 \sin(3\omega T_d) - 0,001 \sin(4\omega T_d)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.1. К расчёту комплексной частотной характеристики

ω	по (5.11)		по (5.12)	
	$\text{Re}(\dot{K}(\omega))$	$\text{Im}(\dot{K}(\omega))$	$\text{Re}(\dot{K}(\omega))$	$\text{Im}(\dot{K}(\omega))$
0	-1,2	0	-1,198	0
0,4	-1,16639	0,10392	-1,16411	0,125404
0,8	-1,07989	0,18311	-1,07612	0,213066
1,2	-0,97207	0,224841	-0,96739	0,244203
1,6	-0,87173	0,228853	-0,87079	0,226533
2	-0,7949	0,200543	-0,80016	0,182134
2,4	-0,74559	0,146004	-0,75163	0,126289
2,8	-0,72049	0,071875	-0,72104	0,061399
3,2	-0,71446	-0,01251	-0,71227	-0,01068
3,6	-0,72564	-0,09507	-0,72799	-0,08131
4	-0,75725	-0,16428	-0,76393	-0,14349
4,4	-0,81449	-0,21179	-0,81816	-0,19667

4,8	-0,89906	-0,2313	-0,89649	-0,23548
5,2	-1,00385	-0,21671	-0,9991	-0,24096
5,6	-1,10886	-0,16357	-1,10564	-0,19298
6	-1,18282	-0,07519	-1,18071	-0,09122
6,4	-1,19703	0,031588	-1,19501	0,038487

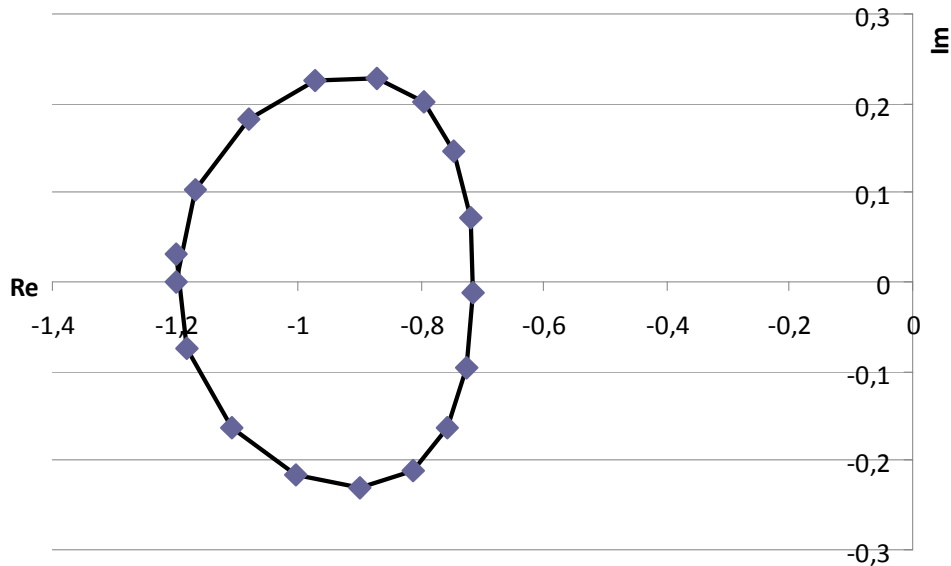


Рис. 5.2. Комплексная частотная характеристика дискретной системы

Непосредственно из рис. 5.2 видна траектория вектора модуля комплексной частотной характеристики $|\dot{K}(\omega)|$, проведённого из начала координат в зависимости от частоты входного сигнала.

6. Для представления дискретной системы в виде нулей и полюсов разложим функцию (5.9) на простые множители:

$$H[z] = \frac{-5,5 - 0,5z^{-1}}{6 - z^{-1}} = \frac{-5,5 \left(1 + \frac{1}{11}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{6}z^{-1}\right)},$$

откуда $k = -\frac{5,5}{6}$, $z_1 = -\frac{1}{11}$, $p_1 = \frac{1}{6}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется импульсной характеристикой дискретной системы?
2. Каково назначение дискретной свёртки?

3. В чём преимущество z -преобразования?
4. Что называют областью сходимости z -преобразования?
5. Каковы основные свойства z -преобразования?
6. Дать определение передаточной характеристики дискретной системы.
7. Как передаточная характеристика связана с импульсной характеристикой дискретной системы?
8. Что называют комплексной частотной характеристикой дискретной системы?
9. Что характеризуют нули и полюсы дискретной системы?
10. Как находится z -преобразование задержанного сигнала?
11. Что понимается под физически реализуемым процессом?
12. Какой может быть реакция дискретной системы на единичный импульс?
13. Как найти комплексную частотную характеристику системы?
14. Как дискретная система преобразует спектр входного сигнала?
15. Какая связь между передаточной функцией дискретной системы и её конечно-разностным представлением?

Лабораторная работа № 6

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Цель работы. изучение способов анализа устойчивости дискретных систем.

Исходные данные. в качестве исходных данных взять исходные данные и результаты выполнения лабораторных работ № 4 и № 5.

Порядок выполнения

1. Определить устойчивость рассматриваемой дискретной системы по её импульсной характеристике.
2. Определить устойчивость по передаточной функции дискретной системы.
3. Определить устойчивость дискретной системы по алгебраическому критерию Рауса.
4. Определить устойчивость дискретной системы по частотному критерию Михайлова.

Методические указания

Под устойчивостью системы понимается такие её качества, при которых обеспечивается завершение её переходного процесса с течением времени. Этим самым обеспечивается переход в установившееся состояние выхода дискретной системы при подаче на её вход ограниченного по амплитуде входного сигнала. То есть, будучи выведенной из равновесия, дискретная система, после снятия с неё входного воздействия, должна вернуться в состояние покоя $\lim_{i \rightarrow \infty} y(i) = 0$. Непосредственное суждение об устойчивости дискретной системы можно получить из анализа её импульсной характеристики $h(i)$, которая для устойчивых систем должна представлять затухающий со временем периодический или аperiodический процессы.

Более формализовано исследование на устойчивость можно провести по передаточной характеристике дискретной системы $H(z)$, представленной в виде нулей и полюсов (5.8). Полюсы являются корнями знаменателя передаточной характеристики (характеристического уравнения (4.11)), при которых $H[z = p_i] \rightarrow \infty$. Система считается устойчивой, если все полюсы дискретной системы располагаются внутри единичной окружности на комплексной плоскости z , т.е. $|p_i| < 1$. Если полюс находится на границе единичной окружности $|p_i| = 1$, то система находится на границе устойчивости. Если для неустойчивой системы имеются чисто мнимые полюса, то возникают незатухающие гармонические колебания.

При больших степенях полинома знаменателя $H(z)$ возникают значительные трудности при нахождении его корней (полюсов), поэтому используют более удобный инструмент, который составляют различные критерии устойчивости.

Алгебраический критерий Рауса. Для вычисления по данному алгоритму необходимо предварительно провести билинейное преобразование (w -преобразование, преобразование Мизеса), путём замены $z = \frac{1+w}{1-w}$. Из теории функций комплексного переменного известно, что билинейное преобразование отображает круг единичного радиуса в плоскости Z во всю левую полуплоскость плоскости W . Таким образом, дискретная система автоматического управления устойчива, если все корни её характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости плоскости W (по аналогии с устойчивостью непрерывных систем).

Алгоритм основан на заполнении специальной таблицы (5.1), построенной на основании коэффициентов характеристического уравнения по следующему алгоритму:

- 1) в первой строке записываются коэффициенты уравнения с чётными индексами в порядке их возрастания;
- 2) во второй строке – аналогично коэффициенты с нечётными индексами;
- 3) остальные элементы таблицы определяется по формуле:

$$c_{i,j} = c_{i-2,j+1} - r_i c_{i-1,j+1}; \quad r_i = c_{i-2,1} / c_{i-1,1}, \quad (6.1)$$

где $i \geq 3$ – номер строки; j – номер столбца;

- 4) число строк таблицы на единицу больше порядка характеристического уравнения.

r_i		1	2	3	...
–	1	$c_{1,1} = \bar{A}_0$	$c_{1,2} = \bar{A}_2$	$c_{1,3} = \bar{A}_4$...
–	2	$c_{2,1} = \bar{A}_1$	$c_{2,2} = \bar{A}_3$	$c_{2,3} = \bar{A}_5$...
$r_3 = c_{1,1}/c_{2,1}$	3	$c_{3,1} = c_{1,2} - r_3 c_{2,2}$	$c_{3,2} = c_{1,3} - r_3 c_{2,3}$	$c_{3,3} = c_{1,4} - r_3 c_{2,4}$...
$r_4 = c_{2,1}/c_{3,1}$	4	$c_{4,1} = c_{2,2} - r_4 c_{3,2}$	$c_{4,2} = c_{2,3} - r_4 c_{3,3}$	$c_{4,3} = c_{2,4} - r_4 c_{3,4}$...
...

Для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса $c_{1,1}; c_{2,1}; c_{3,1}; \dots$ были положительными. Если это не выполняется, то система неустойчива, а количество полюсов, расположенных за границей области устойчивости равно числу перемен знака в первом столбце.

Более простую и наглядную форму исследования устойчивости дают частотные критерии. Эти методы основаны на связи расположения корней характеристического полинома с годографом этого полинома на комплексной плоскости. Годографом называется график функции на комплексной плоскости координат.

Критерий устойчивости Михайлова. Если обозначить характеристический полином дискретной системы $D(z)$, то система будет устойчивой, если вектор $D(e^{j\omega})$ при изменении частоты $0 \leq \omega \leq \pi/T_d$ последовательно проходит n квадрантов.

Пример. Исследовать устойчивость дискретной системы, описываемой в примере лабораторной работы № 4.

Решение.

1. Импульсная характеристика представляет бесконечно убывающую последовательность

$$h[l] = \{-0,917; -0,236; -0,039; -0,007; -0,001, \dots\}.$$

Таким образом, дискретная система устойчива.

2. Непосредственно из пункта 6 лабораторной работы № 5 следует, что дискретная система имеет один вещественный полюс $p_1 = \frac{1}{6}$, который располагается на действительной оси внутри единичной окружности, таким образом, система будет устойчивой.

3. Для исследования алгебраическим критерием Рауса проводится билинейное преобразование знаменателя (5.10)

$$6 - z^{-1} \rightarrow 6 - \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^{-1} = 6 - \frac{1-w}{1+w} = 5 + 5w.$$

В соответствии с методом Рауса система будет устойчивой, так как коэффициенты первого столбца положительны $c_{1,1} = 5$; $c_{2,1} = 5$.

4. В соответствии с методом критерия Михайлова проводится замена $z = e^{j\omega T_d}$ в характеристическом уравнении

$$6 - z^{-1} \rightarrow 6 - e^{-j\omega T_d} = 6 - \cos(\omega T_d) + j \sin(\omega T_d), \quad 0 \leq \omega \leq \pi/T_d.$$

Принимая $T_d = 1$ с, строится годограф Михайлова (рис. 6.1).

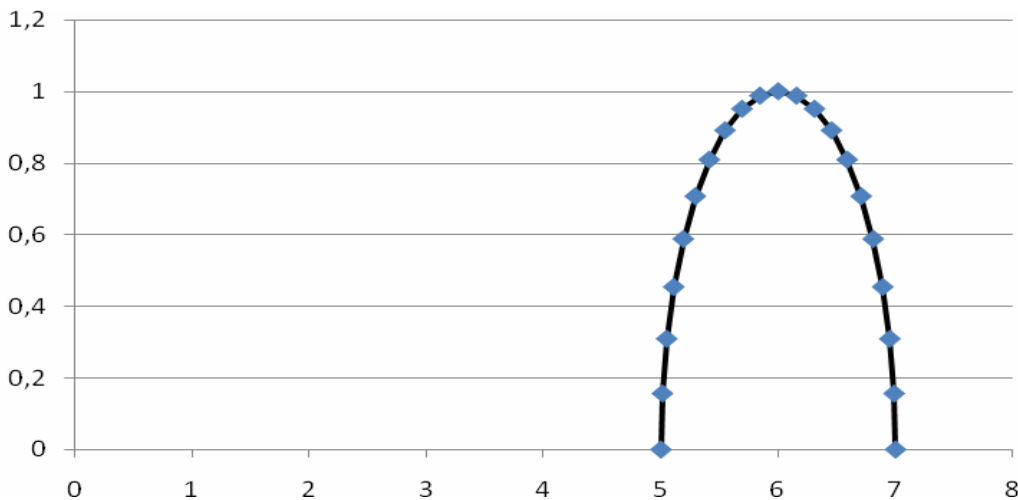


Рис. 6.1. Годограф Михайлова

Непосредственно из рис. 6.1 видно, что годограф Михайлова последовательно охватывает $n=1$ квадрант, а это значение соответствует степени характеристического уравнения, поэтому система является устойчивой.

Контрольные вопросы

1. Что характеризует устойчивость дискретной системы?
2. Что называют характеристическим уравнением?
3. Как расположение полюсов системы определяет её устойчивость?
4. Какие существуют виды критериев устойчивости?

5. В каком случае для неустойчивой системы при выведении её из равновесия возникают незатухающие гармонические колебания?

6. Что понимается под годографом?

7. Укажите назначение билинейного преобразования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нефёдов, В.И. Основы радиоэлектроники : учебник для вузов / В.И. Нефёдов. – М. : Высшая школа, 2000. – 708 с.

2. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / С.И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 1998. – 574 с.

3. Угрюмов, Е.П. Цифровая схемотехника / Е.П. Угрюмов. – СПб., 2000. – 670 с.

4. Радиотехнические системы передачи информации : учебное пособие для вузов / под ред. В.В. Калмыкова. – М. : Радио и связь, 1990. – 340 с.

5. Бродин, В.Б. Микроконтроллеры. Архитектура, программирование, интерфейс / В.Б. Бродин, М.И. Шагурин. – М. : ЭКОМ, 1999. – 546 с.

6. Устройства генерирования и формирования радиосигналов : учебник для вузов / под ред. Г.М. Уткина, В.И. Кулешова и М.В. Благовещенского. – М. : Радио и связь, 1994. – 305 с.

7. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов : учебник для вузов / А.Б. Сергиенко. – СПб. : Питер, 2003. – 608 с.

8. Основы цифровой обработки сигналов : учебное пособие / А.И. Солонина и др. – СПб. : БХВ Петербург, 2005. – 768 с.

9. Прэтт, У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт ; пер. с англ. – М. : Мир, 1992. – 428 с.

10. Птачек, М. Цифровое телевидение. Теория и техника / М. Птачек ; под ред. Л.С. Виленчик. – М. : Радио и связь, 1990. – 344 с.

11. Цифровая обработка телевизионных и компьютерных изображений / под ред. Ю.Б. Зубарева, В.П. Дворковича. – М., 1997. – 536 с.

12. Шелухин, О.И. Цифровая обработка и передача речи / О.И. Шелухин, А.П. Лукьянцев. – М. : Радио и связь, 2000. – 652 с.

13. Нефёдов, В.И. Современная система мобильной радиосвязи / В.И. Нефёдов. – М. : МИРЭА, 1999. – 432 с.

14. Передача дискретных сообщений / под ред. В.П. Шувалова. – М. : Радио и связь, 1990. – 610 с.

15. Барыбин, А.А. Физико-технологические основы электронных средств / А.А. Барыбин, В.Г. Сидоров. – СПб. : Лань, 2001. – 736 с.

16. Айфичер, Э. Цифровая обработка сигналов. Практический подход / Э. Айфичер, Б. Джервис. – М. : Вильямс, 2004. – 992 с.

17. Дьяконов, В.П. Вейвлеты. От теории к практике / В.П. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.