В.И. ФОМИН

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Тамбов
♦ Издательство ГОУ ВПО ТГТУ ♦
2010

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК В161.5я73
Ф762

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий лабораторией компьютерных
алгебраических вычислений ТГУ им. Г.Р. Державина
Г.И. Малашонок

Доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
«Распределённые вычислительные системы» ГОУ ВПО ТГТУ
С.М. Дзюба

Фомин, В.И.
Ф762 Теория функций комплексного переменного : учеб. пособие / В.И. Фомин. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 296 с. – 125 экз. – ISBN 978-5-8265-0909-8.

Изложен теоретический материал по дисциплине "Теория функций комплексного переменного", предусмотренный Государственным образовательным стандартом для специальности 090105. Теоретические положения иллюстрируются конкретными примерами и рисунками.

Предназначено для студентов второго курса инженерных специальностей вузов.

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК В161.5я73

ISBN 978-5-8265-0909-8

© Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Тамбовский государственный технический университет (ГОУ ВПО ТГТУ), 2010

Министерство образования и науки Российской Федерации
**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Тамбовский государственный технический университет**

В.И. Фомин

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

*Рекомендовано Учёным советом университета
в качестве учебного пособия для студентов 2 курса
инженерных специальностей вузов*

Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2010

Учебное издание

ФОМИН Василий Ильич

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Редактор З.Г. Ч е р н о в а
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Р ы ж к о в а

Подписано в печать 01.04.2010
Формат 60 × 84 / 16. 17,2 усл. печ. л. Тираж 125 экз. Заказ № 204

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

В данном учебном пособии изложен теоретический материал по дисциплине "Теория функций комплексного переменного", предусмотренный Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования для студентов второго курса инженерных специальностей вузов.

В параграфах 1 – 4 рассматриваются алгебраические операции над комплексными числами, расширенная комплексная плоскость, свойства числовых последовательностей и рядов с комплексными членами.

В параграфах 5 – 9 вводятся понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и аналитичности для функций комплексного переменного; изучаются свойства аналитических функций; рассматриваются основные элементарные функции.

В параграфах 10 – 13 изучаются свойства интегралов функций комплексного переменного; доказываются интегральная теорема Коши для односвязной и многосвязной области, интегральная формула Коши, бесконечная дифференцируемость аналитической функции, принцип максимума модуля аналитической функции.

В параграфах 14 – 18 излагаются свойства функциональных рядов с комплексными членами; находятся разложение аналитической в открытом круге функции в ряд Тейлора, разложение аналитической в кольце функции в ряд Лорана; изучается связь между типом изолированной особой точки функции и видом лорановского разложения этой функции в проколотой окрестности данной точки.

Учебное пособие снабжено необходимым справочным материалом: списком обозначений, биографическим справочником и предметным указателем.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$::=$	– оператор определения ("это по определению")
▶ и ◀	– начало и конец доказательства
ПП	– предположение противного ("предположим противное")
$\overline{\text{ПП}}$	– отрицание предположения противного ("предположение противного неверно")
$\Rightarrow$	– знак логического следования ("следует", "вытекает")
$\Leftrightarrow$	– знак равносильности (эквивалентности) ("тогда и только тогда")
$\forall$	– квантор общности ("для любого", "для каждого", "для всякого")
$\exists$	– квантор существования ("существует", "найдётся")
$\in$	– знак принадлежности ("принадлежит")
$\overline{\in}$ или $\notin$	– знак непринадлежности ("не принадлежит")
$\wedge$	– конъюнкция ("и")
$\vee$	– дизъюнкция ("или")
$\mid$ (или :)	– "такой (такая, такое), что"
$\varnothing$	– пустое множество
$\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ или $\{z_i\}_{i=1}^{n}$	– конечное множество, состоящее из элементов $z_1, z_2, ..., z_n$
$\{z \mid P(z)\}$	– множество элементов z, удовлетворяющих условию $P(z)$
$A \subset B$	– множество A включено во множество B и $A \neq B$
$A \subseteq B$	– множество A включено во множество B (возможно, что $A = B$)
$A \cup B$	– объединение множеств A и B
$A \cap B$	– пересечение множеств A и B
$A \setminus B$	– разность множеств A и B
□	– множество натуральных чисел
□	– множество целых чисел
□	– множество вещественных (действительных) чисел
$□_+$	– множество неотрицательных вещественных (действительных) чисел
R_-	– множество отрицательных вещественных (действительных) чисел
R^2	– множество всевозможных упорядоченных пар вещественных (действительных) чисел
C	– поле комплексных чисел (комплексная плоскость)
$\overline{\mathrm{C}}$	– расширенное множество комплексных чисел (расширенная комплексная плоскость)
i	– мнимая единица
$\operatorname{Re} z$	– действительная часть комплексного числа z

$\operatorname{Im} z$	– мнимая часть комплексного числа z
$\bar{z}$	– комплексно сопряжённое числу z
$\lvert z\rvert$ (или ρ)	– модуль комплексного числа z
$\operatorname{Arg} z$	– аргумент комплексного числа z
$\arg z$ (или φ)	– главное значение аргумента комплексного числа z
$S_R(z_0)$	– окружность с центром в точке z_0 радиуса R
$O_R(z_0)$	– открытый круг с центром в точке z_0 радиуса R
$\bar{O}_R(z_0)$	– замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса R
$\mathrm{C} \setminus O_R(z_0)$	– внешность открытого круга $O_R(z_0)$
$\mathrm{C} \setminus \bar{O}_R(z_0)$	– внешность замкнутого круга $\bar{O}_R(z_0)$
$O_\varepsilon(a)$	– ε-окрестность точки a
$\dot{O}_\varepsilon(a)$	– проколотая ε-окрестность точки a
∞	– несобственное комплексное число
$O_{i_E}(\infty)$	– i_E-окрестность несобственного комплексного числа ∞
$f(D)$	– образ множества D при отображении f
$p(w_0)$	– полный прообраз точки w_0 при заданном отображении
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n$	– предел последовательности $\{z_n\}$
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$	– предел функции $f(z)$ в точке z_0
Δz	– приращение независимого переменного z
Δw	– приращение функции $w=f(z)$
$\operatorname{sh} z$	– гиперболический синус z
$\operatorname{ch} z$	– гиперболический косинус z
$\operatorname{th} z$	– гиперболический тангенс z
$\operatorname{cth} z$	– гиперболический котангенс z
$\bar{\gamma}$	– ориентированная кривая с ориентацией, соответствующей убыванию параметра кривой
Γ_D	– граница множества D
E_D	– внешность множества D
I_Γ	– внутренность замкнутой простой кривой Γ
E_Γ	– внешность замкнутой простой кривой Γ
$f'(z_0)$, $w'(z_0)$, $\dfrac{df(z_0)}{dz}$, $\dfrac{dw(z_0)}{dz}$, $\left.\dfrac{df}{dz}\right\rvert_{z=z_0}$, $\left.\dfrac{dw}{dz}\right\rvert_{z=z_0}$	– производная функции $w=f(z)$ в точке z_0
$f'(z)$	– производная функции $f(z)$
б.б.в.	– бесконечно большая величина
б.м.в.	– бесконечно малая величина
$dw(z_0)$, $df(z_0)$	– дифференциал функции $w=f(z)$ в точке z_0
$dw(z)$, $df(z)$	– дифференциал функции $w=f(z)$
dz	– дифференциал независимого переменного z
$o(\Delta z)$	– бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с Δz при $\Delta z\to 0$
$\int\limits_\gamma f(z)dz$	– интеграл функции $f(z)$ вдоль кривой γ
$\oint\limits_\gamma f(z)dz$	– контурный интеграл функции $f(z)$ вдоль положительно ориентированного контура γ
$\oint\limits_\gamma f(z)dz$	– контурный интеграл функции $f(z)$ вдоль отрицательно ориентированного контура γ
$\operatorname{res}[f(z);z_0]$	– вычет функции $f(z)$ относительно точки z_0

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Понятие комплексного числа; операции сложения и умножения комплексных чисел, их свойства; алгебраическая форма записи комплексного числа; операции вычитания и деления комплексных чисел; модуль и аргумент комплексного числа; тригонометрическая форма записи комплексного числа; геометрическая интерпретация арифметических действий над комплексными числами; формула Муавра; извлечение корня натуральной степени из комплексного числа.

При исследовании различных физических процессов, например, при решении задач гидродинамики и газовой динамики [1.1, с. 309], приходится рассматривать преобразования плоских областей, т.е. изучать отображения вида

$$f:\ D\subseteq \mathrm{R}^2 \to G\subseteq \mathrm{R}^2, \tag{1.1}$$

где $\mathrm{R}^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in \mathrm{R}\}$ − множество всевозможных упорядоченных пар действительных чисел (рис. 1.1).

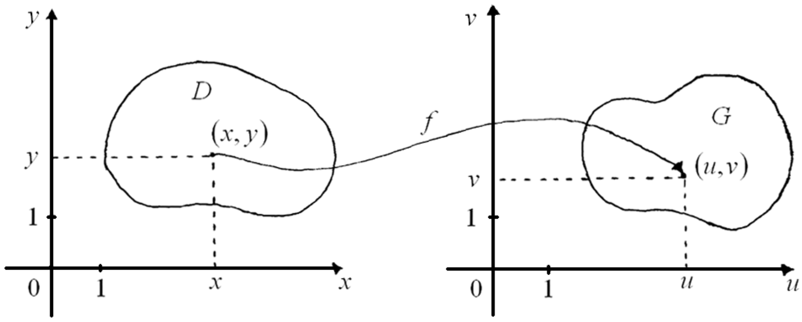

Рис. 1.1

Для того чтобы при построении теории функций, имеющих вид (1.1), прослеживалась аналогия с теорией вещественнозначных функций вещественной переменной, необходимо, во-первых, ввести во множестве R^2 операции сложения и умножения элементов таким образом, чтобы это множество стало полем (известно [2.11, с. 146], что множество R вещественных чисел является полем), и, во-вторых, элементы (x,y) поля R^2 (значения аргумента функции f) рассматривать как новые числа.

Определение 1.1. *Комплексным числом* называется упорядоченная пара действительных чисел (обозначение: $z=(x,y)$).

В силу определения 1.1 R^2 представляет собой множество всех комплексных чисел.

Определение 1.2. Два *комплексных числа* $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$ называются *равными*, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Определение 1.3. *Суммой комплексных чисел* $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ называется комплексное число вида

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\,. \tag{1.2}$$

Операция сложения комплексных чисел обладает следующими свойствами [2.12, с. 99]:

1°. $z_1+z_2=z_2+z_1$, $\forall z_1,z_2\in \mathrm{R}^2$ (*свойство коммутативности* или *переместительности операции сложения*);

2°. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $\forall z_1,z_2,z_3\in \mathrm{R}^2$ (*свойство ассоциативности* или *сочетательности операции сложения*; в силу этого свойства допустима запись $z_1+z_2+z_3$);

3°. $z+0=z$, $\forall z\in \mathrm{R}^2$, где $0=(0,0)$ (*существование нулевого элемента*);

4°. $z+(-z)=0$, $\forall z\in \mathrm{R}^2$, где $z=(x,y)$, $-z=(-x,-y)$, $0=(0,0)$ (*существование противоположного элемента*).

Свойства 1° – 4° устанавливаются непосредственно, при этом используются соответствующие свойства операции сложения действительных чисел [2.13, с. 29].

Определение 1.4. *Произведением комплексных чисел* $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ называется комплексное число вида

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)\,. \tag{1.3}$$

Операция умножения комплексных чисел обладает следующими свойствами [2.12, с. 99]:

5°. $z_1z_2=z_2z_1$, $\forall z_1,z_2\in \mathrm{R}^2$ (*свойство коммутативности* или *переместительности операции умножения*);

6°. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$, $\forall z_1,z_2,z_3\in \mathrm{R}^2$ (*свойство ассоциативности* или *сочетательности операции умножения*; в силу этого свойства допустима запись $z_1z_2z_3$);

7°. $z\cdot 1=z$, $\forall z\in \mathrm{R}^2$, где $1=(1,0)$ (*существование единичного элемента*);

8°. $\forall z\in \mathrm{R}^2$, $z\neq(0,0)$ $\exists\, z^{-1}\in \mathrm{R}^2\,|\,z\cdot z^{-1}=1$, где $1=(1,0)$ (*существование обратного элемента*).

Замечание 1.1. Непосредственно проверяется, что для комплексного числа $z=(x,y)$, $z\neq(0,0)$, обратным ему числом является комплексное число вида

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2} \right). \qquad (1.4)$$

Выполнимость свойств 5° – 8° проверяется непосредственно.

В силу свойств 1° – 8° множество R^2, наделённое операцией сложения (1.2) и операцией умножения (1.3), является полем (определение поля см. в [2.11, с. 145]). Обозначим это поле символом C и назовём *полем комплексных чисел*.

Рассмотрим множество комплексных чисел вида $H = \{(x,0) \mid x \in R\}$. Между множеством H и множеством R действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие

$$(x,0) \leftrightarrow x,\ \forall x \in R\,. \qquad (1.5)$$

Заметим, что в силу определений 1.3, 1.4 и соответствия (1.5) для любых $(x_1,0)$, $(x_2,0) \in H$

$$(x_1,0)+(x_2,0) = (x_1+x_2,0) \leftrightarrow x_1+x_2\,,$$

$$(x_1,0)(x_2,0) = (x_1x_2,0) \leftrightarrow x_1x_2\,,$$

т.е. комплексные числа из множества H складываются и перемножаются друг с другом так же, как соответствующие им действительные числа. Следовательно, любое комплексное число $(x,0) \in H$ можно отождествить с соответствующим ему действительным числом $x \in R$:

$$(x,0) = x,\ \forall x \in R\,, \qquad (1.6)$$

в частности, $(0,0)=0,\ (1,0)=1$.

В силу (1.6) можно считать, что $R \subset C$, т.е. поле комплексных чисел является расширением поля действительных чисел.

Любое комплексное число $z=(x,y)$ можно представить в виде

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)\,. \qquad (1.7)$$

Из (1.7) видно, что комплексное число $(0,1)$ имеет особое значение в поле C. Это число принято обозначать символом i и называть *мнимой единицей*. Заметим, что в силу (1.3), (1.6)

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1\,.$$

В силу соглашения (1.6) формула (1.7) принимает вид

$$z = x+iy\,. \qquad (1.8)$$

Выражение (1.8) называется *алгебраической формой записи* (*представления*) *комплексного числа* $z=(x,y)$, при этом число x называется *действительной частью комплексного числа* z и обозначается $\operatorname{Re} z$ (Re – начальные буквы французского слова reele – действительный), число y называется *мнимой частью комплексного числа* z и обозначается $\operatorname{Im} z$ (Im – начальные буквы французского слова imagimaire – мнимый). Например, для комплексного числа $z=2-3i$ имеем $\operatorname{Re} z=2$, $\operatorname{Im} z=-3$. Если $y=\operatorname{Im} z=0$, то $z=x$ является действительным числом. Если $x=\operatorname{Re} z=0$ и $y\neq 0$, то $z=iy$ (числа такого вида называются *чисто мнимыми числами*).

Условие равенства комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, принимает вид

$$x_1+iy_1 = x_2+iy_2\text{, если } x_1=x_2 \text{ и } y_1=y_2\,, \qquad (1.9)$$

т.е. если $\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im} z_2$.

Замечание 1.2. Понятия "больше" и "меньше" для комплексных чисел не определены (эти понятия сохраняют силу лишь для комплексных чисел вида $z=x$, где $x\in R$).

Правило (1.2) сложения комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, принимает вид

$$z_1+z_2 = (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\,, \qquad (1.10)$$

т.е. при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части.

Правило (1.3) умножения комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, принимает вид

$$z_1z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)\,. \qquad (1.11)$$

Заметим, что правая часть формулы (1.11) получается, если в её левой части применить обычное алгебраическое правило умножения многочлена на многочлен (заменив при этом i^2 на –1).

Операция вычитания комплексных чисел вводится как операция, обратная операции сложения: по определению, $z_1-z_2 = z_3 \mid z_2+z_3=z_1$. Следовательно,

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \qquad (1.12)$$

т.е. при вычитании комплексных чисел вычитаются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части.

Операция деления комплексных чисел вводится как операция, обратная операции умножения: по определению, если $z_2 \neq 0$, то $\frac{z_1}{z_2} = z_3 \mid z_2 z_3 = z_1$. Следовательно, [2.12, с. 100],

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (1.13)$$

Формула (1.13) громоздка, поэтому не обязательно её запоминать. Укажем простое правило, позволяющее находить частное двух комплексных чисел.

Определение 1.5. Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *комплексно сопряженным числу* $z = x + iy$.

В силу (1.11)

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2, \qquad (1.14)$$

т.е. произведение комплексного числа z и комплексно сопряженного ему числа $\overline{z}$ равно сумме квадратов действительной и мнимой частей числа z.

Используя формулу (1.14), деление комплексных чисел можно производить по следующему правилу: чтобы найти частное двух комплексных чисел, достаточно числитель и знаменатель дроби умножить на число, комплексно сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad (1.15)$$

т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Пример 1.1. Пусть $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 4 - i$. Тогда

$$z_1 + z_2 = (-3 + 4) + i(2 + (-1)) = 1 + i;$$

$$z_1 - z_2 = (-3 - 4) + i(2 - (-1)) = -7 + 3i;$$

$$z_1 z_2 = (-3 + 2i)(4 - i) = -12 + 3i + 8i - 2i^2 = -10 + 11i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3 + 2i}{4 - i} = \frac{(-3 + 2i)(4 + i)}{(4 - i)(4 + i)} = \frac{-12 - 3i + 8i + 2i^2}{4^2 + (-1)^2} = -\frac{14}{17} + i \cdot \frac{5}{17}.$$

Непосредственной проверкой устанавливаются следующие соотношения:

$$\overline{\overline{z}} = z, \ \forall z \in \mathrm{C};$$

$$\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathrm{R};$$

для $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{C}$ (в случае частного $z_2 \neq 0$)

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2;$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2;$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2;$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат xOy (рис. 1.2). Тогда каждое комплексное число $z=(x,y)=x+iy$ изображается на этой плоскости точкой M с абсциссой x и ординатой y или радиус-вектором $\overrightarrow{OM}=\{x,y\}$ точки M. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами, называется *комплексной плоскостью* и обозначается тем же символом $\mathbb{C}$, что и поле комплексных чисел; при этом ось Ox называется *действительной осью* (на ней изображаются действительные числа), ось Oy называется *мнимой осью* (на ней изображаются чисто мнимые числа). Тот факт, что данная плоскость рассматривается как плоскость комплексного переменного z, отмечается значком ⓩ в первой четверти.

Определение 1.6. *Модулем комплексного числа* $z=x+iy$ называется расстояние от точки $M=(x,y)$, изображающей это число на комплексной плоскости, до начала координат $O=(0,0)$ (или, другими словами, длина вектора $\overrightarrow{OM}$) (обозначение: $|z|$ или ρ).

По определению, $|z|\ge 0$ и $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$.

Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ выражается формулой $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$, следовательно,

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{1.16}$$

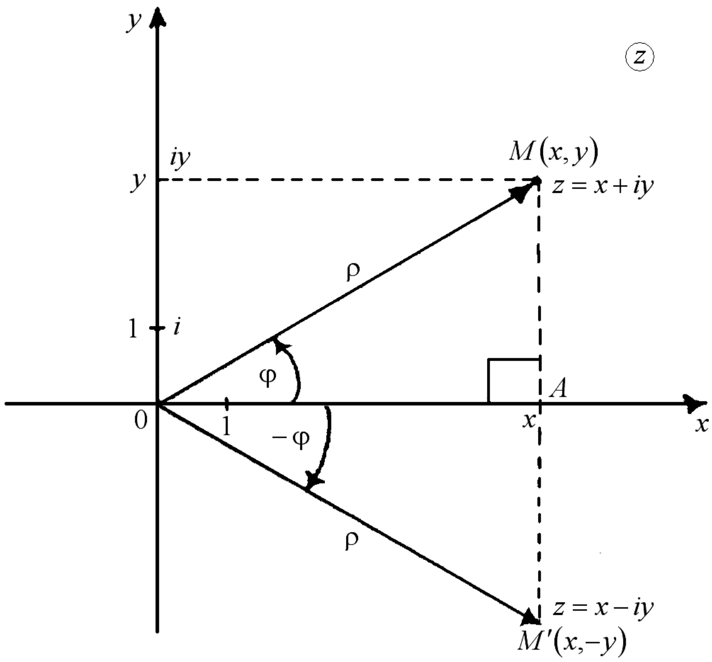

Рис. 1.2

В силу (1.16) формулу (1.14) можно записать в виде

$$z\cdot\overline{z}=|z|^2\,.$$

Определение 1.7. *Аргументом комплексного числа* $z=x+iy$, $z\ne 0$, называется величина угла наклона вектора $\overrightarrow{OM}=\{x,y\}$, изображающего число z на комплексной плоскости, к положительному направлению действительной оси (обозначение: $\operatorname{Arg} z$).

Величина такого угла имеет бесконечное множество значений, которое можно записать в виде

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

где $\arg z$ – значение аргумента числа z, выбранное из полуинтервала $(-\pi,\pi]$ (величина $\arg z$ определяется однозначно и называется *главным значением аргумента комплексного числа* z; в целях краткости будем также $\arg z$ обозначать через φ).

Заметим, что комплексно сопряжённые числа $z=x+iy$ и $\overline{z}=x-iy$ изображаются на комплексной плоскости точками, симметричными относительно действительной оси, следовательно, $|\overline{z}|=|z|$, $\arg\overline{z}=-\arg z$ для $\forall z\in\mathbb{C}\mid z\ne 0$, $z\,\overline{\in}\,\mathbb{R}_-$, где $\mathbb{R}_-=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}$ (рис. 1.2).

Замечание 1.3. Для комплексного числа $z=0$ понятие аргумента не определено.

Из прямоугольного ΔOAM (рис. 1.2) получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Учитывая, что

$$\alpha = \operatorname{arctg} a \ ::= \left(\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \wedge \left(\operatorname{tg}\alpha = a\right),$$

получаем следующую формулу для нахождения φ:

$$\varphi = \begin{cases} y - \text{любое}; & \text{если } x > 0,\ y\text{-любое}; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0,\ y \geq 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0,\ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Из ΔOAM имеем

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi. \tag{1.17}$$

Тогда комплексное число $z = x + iy$ принимает вид

$$z = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \tag{1.18}$$

Выражение (1.18) называется *тригонометрической формой записи* (*представления*) *комплексного числа* z.

Пример 1.2. Пусть $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = 2i$, $z_5 = -2i$, $z_6 = 2$, $z_7 = -2$. Тогда тригонометрическая форма записи этих чисел имеет вид:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), \quad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),\ z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$z_5 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad z_6 = 2\left(\cos 0 + i\sin 0\right),$$

$$z_7 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$

Условие равенства двух комплексных чисел можно записать в следующем виде: $z_1 = z_2$, если $|z_1| = |z_2|$ и $\arg z_1 = \arg z_2$.

Используя равенство (1.11) и формулы тригонометрии $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$, $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$, получаем правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = \left[\rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\right]\cdot\left[\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\right] =$$
$$= \rho_1\rho_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right], \tag{1.19}$$

т.е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \tag{1.20}$$

$$\operatorname{Arg}\left(z_1 z_2\right) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k,\ \ k \in \mathrm{Z}. \tag{1.21}$$

Используя равенство (1.15) и формулы тригонометрии $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$, $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получаем правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right], \quad (1.22)$$

т.е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются при условии, что $z_2 \neq 0$:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.23)$$

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi k, \ \ k \in \mathrm{Z}\ . \quad (1.24)$$

Пример 1.3. Пусть $z_1 = 1+\sqrt{3}i$, $z_2 = 1+i$. Запишем z_1 и z_2 в тригонометрической форме: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда по формулам (1.19), (1.22) получаем

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right), \ \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

На геометрическом языке правила (1.19), (1.22) выражаются так: чтобы найти произведение комплексных чисел z_1 и z_2, нужно радиус-вектор $\overrightarrow{OM_1}$ (изображающий число z_1) повернуть на угол φ_2 (против часовой стрелки при $\varphi_2 > 0$ и по часовой стрелке при $\varphi_2 < 0$) и затем "растянуть" его в ρ_2 раз (при $\rho_2 > 1$ это действительно будет растяжение, при $\rho_2 < 1$ – сжатие); чтобы найти частное комплексных чисел z_1 и z_2, нужно радиус-вектор $\overrightarrow{OM_1}$ повернуть на угол φ_2 (по часовой стрелке при $\varphi_2 > 0$ и против часовой стрелки при $\varphi_2 < 0$), а затем "сжать" его в ρ_2 раз (при $\rho_2 > 1$ это действительно будет сжатием, при $\rho_2 < 1$ – растяжение) (рис. 1.3).

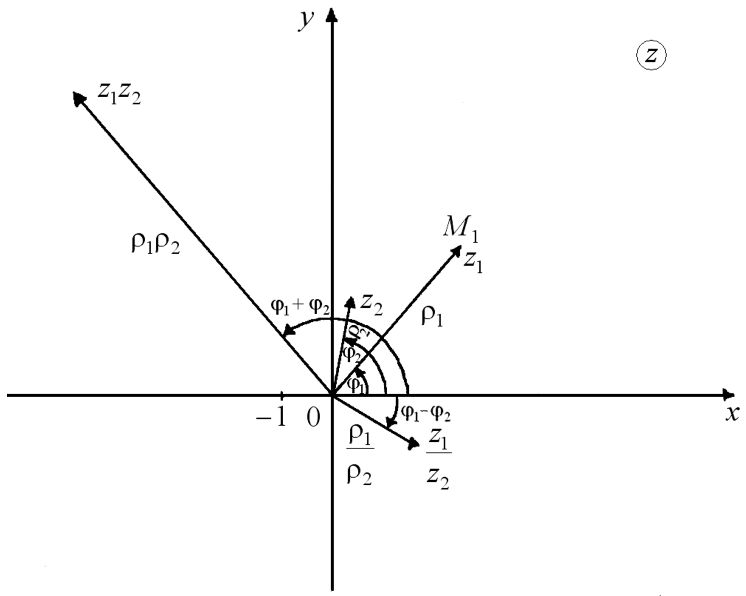

Рис. 1.3

В силу (1.10), (1.12) сумма и разность комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ представляют собой на геометрическом языке соответственно сумму и разность векторов $\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1\}$ и $\overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2\}$, изображающих эти числа на комплексной плоскости (рис. 1.4).

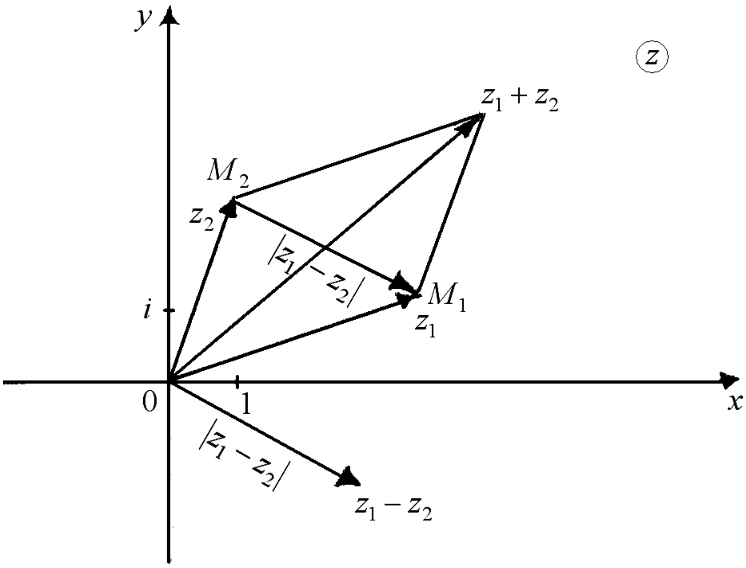

Рис. 1.4

Из рисунка 1.4 видно, что

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \tag{1.25}$$

(длина любой стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон).

Методом математической индукции свойство (1.25) распространяется на любое конечное число слагаемых: $\forall z_1, z_2, ..., z_n \in \mathrm{C}$ справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \le |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|. \tag{1.26}$$

Используя (1.25) и учитывая, что $|-z_2| = |z_2|$, получаем $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$, т.е.

$$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{1.27}$$

Далее, в силу (1.27) $|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \le |z_1 + z_2| + |z_2|$, откуда получаем

$$|z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|. \tag{1.28}$$

В силу (1.28) $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \ge |z_1| - |-z_2| = |z_1| - |z_2|$, т.е.

$$|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|. \tag{1.29}$$

В силу (1.12), (1.16)

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

т.е. модуль разности чисел z_1 и z_2 равен расстоянию между точками z_1 и z_2. Следовательно, если $z_0 \in \mathrm{C}$? $R > 0$, то $S_R(z_0) = \{z \in \mathrm{C} : |z - z_0| = R\}$ − *окружность* с центром в точке z_0 радиуса R; $O_R(z_0) = \{z \in \mathrm{C} : |z - z_0| < R\}$ − *открытый круг* с центром в точке z_0 радиуса R (т.е. круг без окружности $S_R(z_0)$); $\bar{O}_R(z_0) = \{z \in \mathrm{C} : |z - z_0| \le R\}$ − *замкнутый круг* с центром в точке z_0 радиуса R (т.е. круг вместе с окружностью $S_R(z_0)$); $\{z \in \mathrm{C} : |z - z_0| \ge R\} = \mathrm{C} \setminus O_R(z_0)$ − *внешность открытого круга* $O_R(z_0)$; $\{z \in \mathrm{C} : |z - z_0| > R\} = \mathrm{C} \setminus \bar{O}_R(z_0)$ − *внешность замкнутого круга* $\bar{O}_R(z_0)$.

Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathrm{N}, n \ge 2$. Тогда, используя равенство (1.19) и метод математической индукции, получаем следующую формулу, называемую *формулой Муавра*:

$$z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{1.30}$$

т.е. при возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени:

$$|z^n| = |z|^n,$$

$$\mathrm{Arg}(z^n) = n\arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Пример 1.4. Пусть $z=-1+\sqrt{3}i$. Запишем z в тригонометрической форме: $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Тогда по формуле Муавра

$$z^{12}=2^{12}\left(\cos 8\pi+i\sin 8\pi\right)=2^{12}.$$

Операция извлечения корня натуральной степени из комплексного числа вводится как операция, обратная операции возведения в степень: по определению, $\sqrt[n]{z}=w\mid w^n=z$. Пусть $w=r\left(\cos\Theta+i\sin\Theta\right)$. Тогда в силу формулы (1.30) равенство $w^n=z$ принимает вид

$$r^n\left(\cos n\Theta+i\sin n\Theta\right)=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right),$$

откуда $r=\sqrt[n]{\rho}$, где $\sqrt[n]{\rho}$ − арифметическое (т.е. неотрицательное) значение корня n-й степени из ρ; $n\Theta=\varphi+2\pi k$, $k\in Z$, т.е. $\Theta=\Theta_k=\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$, $k\in Z$. Получили формулу

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\Theta_k+i\sin\Theta_k\right),\ k\in Z. \tag{1.31}$$

Покажем, что формула (1.31) даёт ровно n различных значений, которые можно получить при k = 0, 1, …, n – 1. Возьмём произвольные целые k_1, k_2, удовлетворяющие условиям $0\le k_1,\ k_2\le n-1,\ k_1\ne k_2$. Пусть для определённости, $k_1<k_2$. Тогда

$$\Theta_{k_2}-\Theta_{k_1}=\frac{\varphi+2\pi k_2}{n}-\frac{\varphi+2\pi k_1}{n}=\frac{2\pi\left(k_2-k_1\right)}{n}<2\pi, \tag{1.32}$$

так как $k_2-k_1<n$. Из (1.31), (1.32) следует, что $w_{k_2}\ne w_{k_1}$. Возьмём произвольное целое $k\ge n$, т.е. $k=ln+s$, где $l,s\in N,\ 0\le s\le n-1$.
Тогда

$$\Theta_k-\Theta_s=\frac{\varphi+2\pi(ln+s)}{n}-\frac{\varphi+2\pi s}{n}=2\pi l\ \Rightarrow\Theta_k=\Theta_s+2\pi l\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sin\Theta_k=\sin\Theta_s,\cos\Theta_k=\cos\Theta_s\ \Rightarrow\ w_k=w_s.$$

Итак, корень n-й степени из комплексного числа $z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$, $z\ne 0$, имеет n различных значений, которые можно найти по формуле

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right);.\ k=0,1,\ldots,n-1. \tag{1.33}$$

Из формулы (1.33) видно, что все значения w_k ($0\le k\le n-1$) имеют один и тот же модуль, равный $\sqrt[n]{\rho}$; а аргументы любых двух соседних значений w_{k+1} и w_k отличаются на величину $\dfrac{2\pi}{n}$. Следовательно, на комплексной плоскости значения $\sqrt[n]{z}$ являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке $z_0=0$, при этом одной из вершин этого многоугольника является точка $w_0=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$.

Пример 1.5. Пусть $z=\sqrt{3}+i$. Запишем число z в тригонометрической форме: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Тогда, согласно (1.33) все значения кубического корня из z получаются по формуле

$$w_k=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

Имеем

$$w_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right),$$

$$w_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right),$$

$$w_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}\right).$$

2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Понятие числовой последовательности; предел последовательности; сходящиеся и расходящиеся последовательности; бесконечно малые последовательности; теорема о единственности предела; ограниченные и неограниченные последовательности; необходимый признак сходимости последовательности; признак сходимости последовательности; основная теорема о пределах последовательностей.

При построении теории функций комплексного переменного (ТФКП) важную роль имеют последовательности и ряды, членами которых являются комплексные числа.

Определение 2.1. Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие по заданному закону (правилу) f некоторое число $z_n \in \mathrm{C}$, то говорят что задана *числовая последовательность* (ч.п.) *с комплексным членами*

$$z_1, z_2, ..., z_n, ...$$

(z_1 − первый член ч.п.; z_2 − второй член ч.п.; …, z_n − n-й (или общий) член ч.п., …).

Краткое обозначение ч.п.: $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{z_n\}$.

Замечание 2.1. В этом параграфе будут рассматриваться только ч.п., поэтому в целях краткости будем называть их последовательностями.

Последовательность $\{z_n\}$ считается заданной, если указан закон f, по которому можно найти любой её член z_n.

Последовательность можно задать, указав явную формулу для её общего члена: $z_n = f(n)$, $n \in \mathrm{N}$.

Пример 2.1. $z_n = n + 5i$, $n \in \mathrm{N}$. Это последовательность вида

$$1+5i,\ 2+5i,\ 3+5i,\ ...,\ n+5i,\ ... .$$

Определение 2.2. Комплексное число $a = \mu + i\nu$ называется *пределом последовательности комплексных чисел* $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathrm{N}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся номер N, определяемый в зависимости от взятого числа ε, такой, что для любого номера $n > N$ соответствующий член последовательности z_n отличается от числа a по модулю на величину, меньшую взятого числа ε.

Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \tag{2.1}$$

или $z_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, или $z_n \to a$ при $n \to \infty$.

Итак, запись (2.1) означает, по определению, следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Сформулируем определение предела последовательности на геометрическом языке.

Определение 2.3. ε-*окрестностью точки* a называется открытый круг с центром в точке a радиуса ε (обозначение: $O_\varepsilon(a)$).

По определению, $O_\varepsilon(a) = \{z \in \mathrm{C} : |z - a| < \varepsilon\}$.

Условие $|z_n - a| < \varepsilon$ из (2.2) означает, что $z_n \in O_\varepsilon(a)$. Следовательно, (2.2) равносильно следующему определению.

Определение 2.4. Точка $a = \mu + i\nu$ комплексной плоскости C называется *пределом последовательности точек* $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathrm{N}$, если для любой сколь угодно малой ε-окрестности точки a найдётся номер N, определяемый в зависимости от радиуса взятой ε-окрестности, такой, что для любого $n > N$ соответствующая точка z_n принадлежит взятой ε-окрестности точки a.

Таким образом, запись (2.1) означает на геометрическом языке следующее:

$$\forall O_\varepsilon(a) \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow z_n \in O_\varepsilon(a),$$

т.е. если взять любую сколь угодно малую ε-окрестность точки a, то вне этой окрестности может оказаться лишь конечное число членов последовательности $\{z_n\}$ (рис. 2.1).

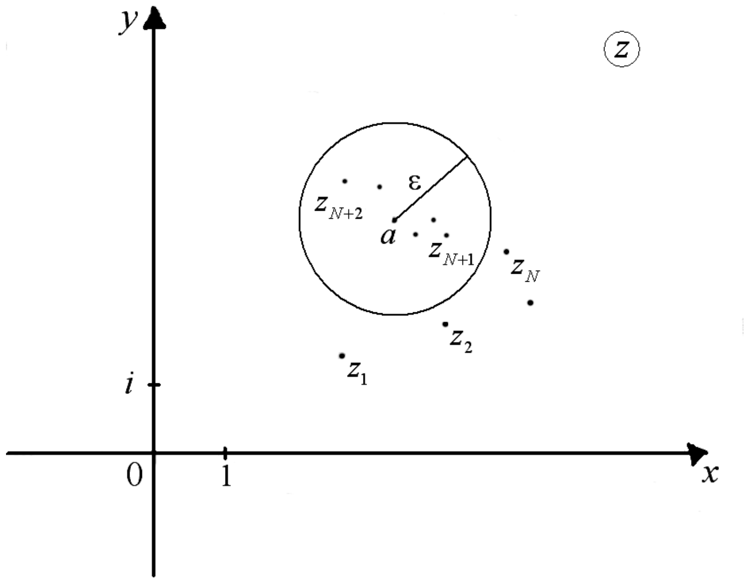

Рис. 2.1

Определение 2.5. Последовательность $\{z_n\}$ называется *сходящейся*, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \mathrm{C}$, т.е. если она имеет конечный предел.

Определение 2.6. Последовательность $\{z_n\}$ называется *расходящейся*, если она не имеет конечного предела.

Среди сходящихся последовательностей выделяют бесконечно малые последовательности.

Определение 2.7. Последовательность $\{z_n\}$ называется *бесконечно малой*, если её предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, т.е. по определению предела,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |z_n - 0| = |z_n| < \varepsilon . \tag{2.3}$$

Условие (2.3) означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |z_n| = 0 . \tag{2.4}$$

Пример 2.2. Последовательность $z_n = \dfrac{1}{(1-i)^n}$, $n \in \mathrm{N}$, является бесконечно малой.

Действительно,

$$|z_n| = \left|\frac{1}{(1-i)^n}\right| = \frac{|1|}{\left|(1-i)^n\right|} = \frac{1}{|1-i|^n} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} ,$$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = 0 ,$$

следовательно, в силу (2.4) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Теорема 2.1. Если

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a , \tag{2.5}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = |a| . \tag{2.6}$$

► При $a = 0$ теорема 2.1 следует из (2.4). Пусть $a \neq 0$. Соотношение (2.5) означает, по определению предела, что для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N$ выполняется

$$|z_n - a| < \varepsilon . \tag{2.7}$$

В силу (1.29)

$$|z_n - a| \ge |z_n| - |a|, \tag{2.8}$$

$$|z_n - a| = |a - z_n| \ge |a| - |z_n|. \tag{2.9}$$

В силу (2.7) – (2.9)

$$\begin{cases} |z_n| - |a| < \varepsilon \\ |a| - |z_n| < \varepsilon, \end{cases}$$

следовательно, $-\varepsilon < |z_n| - |a| < \varepsilon$, т.е. $\big||z_n| - |a|\big| < \varepsilon$. Получили $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow \big||z_n| - |a|\big| < \varepsilon$, а это означает, по определению предела, что выполняется (2.6).

Замечание 2.2. Утверждение, обратное теореме 2.1, неверно (рис. 2.2).

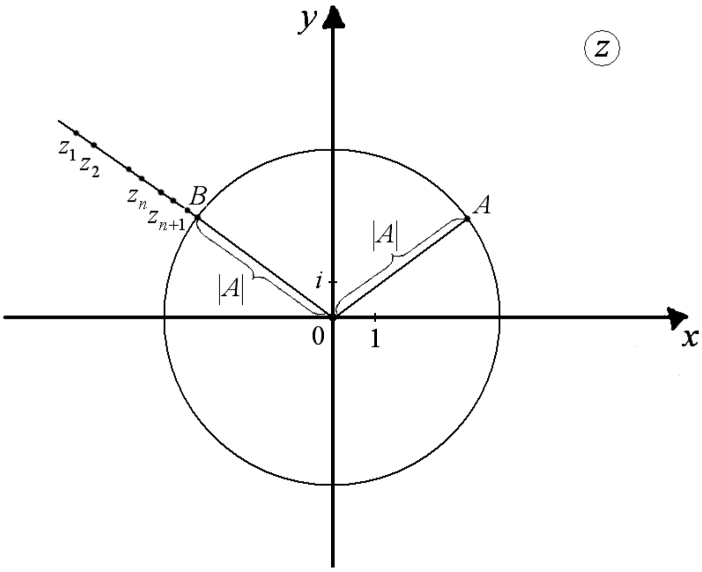

Рис. 2.2

Из рис. 2.2 видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |A|$, но $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = B \ne A$.

Для последовательностей комплексных чисел справедлива *теорема о единственности предела*.

Теорема 2.2. Всякая сходящаяся последовательность комплексных чисел имеет единственный предел.

Теорема 2.2 доказывается точно так же, как соответствующая теорема о единственности предела последовательности вещественных чисел [2.11, с. 222].

Определение 2.8. Последовательность $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists\, M \in \mathrm{P}?\, M > 0 : |z_n| \le M, \forall n \in \mathrm{N}, \tag{2.10}$$

т.е., если существует замкнутый круг $\overline{O}_M(0)$, содержащий все точки этой последовательности.

Определение 2.9. Последовательность $\{z_n\}$ называется *неограниченной*, если

$$\forall\, M \in \mathrm{P}?\, M > 0 \;\; \exists n \in \mathrm{N} : |z_n| > M,$$

т.е., если взять замкнутый круг с центром в точке $z_0 = 0$ сколь угодно большого радиуса *M*, то найдутся точки этой последовательности, не принадлежащие взятому кругу.

Укажем *необходимый признак сходимости последовательности комплексных чисел*.

Теорема 2.3. Всякая сходящаяся последовательность комплексных чисел ограничена.

Пусть $\{z_n\}$ − сходящаяся последовательность, т.е.

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = a. \tag{2.11}$$

Покажем, что последовательность $\{z_n\}$ ограничена, т.е. выполняется (2.10). Возьмём фиксированное $\varepsilon > 0$. Тогда из (2.11) следует в силу (2.2), что $\exists\, N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N$ выполняется

$$|z_n - a| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

В силу (1.29)

$$|z_n - a| \ge |z_n| - |a|. \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.13) получаем $|z_n|-|a|<\varepsilon$, т.е.

$$|z_n|<|a|+\varepsilon,\ \forall n>N. \tag{2.14}$$

Положим $M=\max\{|a|+\varepsilon, |z_1|, |z_2|, ..., |z_N|\}$. Тогда с учётом (2.14) имеем $|z_n|\le M$, $\forall n\in \mathrm{N}$. ◄

Замечание 2.3. Не всякая ограниченная последовательность комплексных чисел является сходящейся.

Например, последовательность $z_n=(-1)^n i$, $n\in \mathrm{N}$, ограничена ($|z_n|\le 1$, $\forall n\in \mathrm{N}$), но не является сходящейся, так как на комплексной плоскости нет такой точки, в любой сколь угодно малой ε-окрестности которой содержались бы все члены последовательности $\{z_n\}$, начиная с некоторого номера.

Установим *признак сходимости последовательности комплексных чисел*.

Теорема 2.4. Сходимость последовательности комплексных чисел $z_n=x_n+iy_n$, $n\in \mathrm{N}$, к комплексному числу $a=\mu+i\nu$ равносильна сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных и мнимых частей членов последовательности $\{z_n\}$ соответственно к числам μ и ν.

► **Необходимость.** Пусть

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n=a. \tag{2.15}$$

Покажем, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n=\mu, \tag{2.16}$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n=\nu. \tag{2.17}$$

По определению предела, условие (2.15) означает, что для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\, N=N(\varepsilon)\,|\,\forall n>N$ выполняется

$$|z_n-a|<\varepsilon. \tag{2.18}$$

Имеем $z_n-a=(x_n-\mu)+i(y_n-\nu)$, $|z_n-a|=\sqrt{(x_n-\mu)^2+(y_n-\nu)^2}$ и неравенство (2.18) принимает вид

$$\sqrt{(x_n-\mu)^2+(y_n-\nu)^2}<\varepsilon. \tag{2.19}$$

Заметим, что

$$|x_n-\mu|=\sqrt{(x_n-\mu)^2}\le\sqrt{(x_n-\mu)^2+(y_n-\nu)^2}. \tag{2.20}$$

В силу (2.19), (2.20) справедливо неравенство $|x_n-\mu|<\varepsilon$. Получили следующее: для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\, N=N(\varepsilon)\,|\,\forall n>N\Rightarrow|x_n-\mu|<\varepsilon$, а это означает, по определению предела последовательности вещественных чисел, что выполняется (2.16). Аналогично показывается выполнимость (2.17).

Достаточность. Пусть выполнены условия (2.16), (2.17). Покажем, что справедливо (2.15). Зафиксируем произвольное сколь угодно малое $\varepsilon>0$. По определению предела, в силу (2.16) для числа $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ $\exists\, N_1=N_1\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)=N_1(\varepsilon)\,|\ \forall\, n>N_1\Rightarrow|x_n-\mu|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$; в силу (2.17) для числа $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ $\exists\, N_2=N_2\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)=N_2(\varepsilon)\,|\ \forall\, n>N_2\Rightarrow|y_n-\nu|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Положим $N=\max\{N_1, N_2\}$. Заметим, что $N=N(\varepsilon)$, ибо $N_1=N_1(\varepsilon)$, $N_2=N_2(\varepsilon)$. Тогда для $\forall\, n>N$

$$|z_n-a|=\sqrt{(x_n-\mu)^2+(y_n-\nu)^2}=\sqrt{|x_n-\mu|^2+|y_n-\nu|^2}<$$
$$<\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2}=\varepsilon.$$

Получили следующее: для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\, N=N(\varepsilon)\,|\,\forall n>N\Rightarrow\ \Rightarrow|z_n-a|<\varepsilon$, а это означает по определению предела последовательности комплексных чисел, что выполняется (2.15). ◄

Пример 2.3. Рассмотрим последовательность $z_n=\dfrac{n+2i}{1+ni}$, $n\in \mathrm{N}$. Найдём действительные и мнимые части членов последовательности $\{z_n\}$. Пусть $z_n=x_n+iy_n$, тогда

$$x_n + iy_n = \frac{n+2i}{1+ni} = \frac{(n+2i)(1-ni)}{(1+ni)(1-ni)} = \frac{n - n^2 i + 2i - 2ni^2}{1+n^2} =$$

$$= \frac{3n}{1+n^2} + i \cdot \frac{2-n^2}{1+n^2},$$

т.е. $x_n = \frac{3n}{1+n^2}$, $y_n = \frac{2-n^2}{1+n^2}$, $n \in \mathrm{N}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{1+n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2-n^2}{1+n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}-1}{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Следовательно, в силу теоремы 2.4 (достаточность) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 - i = -i$.

Докажем *основную теорему о пределах последовательностей комплексных чисел*, согласно которой в результате арифметических операций над сходящимися последовательностями получаются последовательности, которые тоже сходятся.

Теорема 2.5. Пусть последовательность $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathrm{N}$, сходится к числу $a = \mu + i\nu$, а последовательность $\zeta_n = p_n + iq_n$, $n \in \mathrm{N}$, сходится к числу $b = \gamma + i\lambda$. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих последовательностей, т.е. последовательности $\{z_n + \zeta_n\}$, $\{z_n - \zeta_n\}$, $\{z_n \zeta_n\}$, $\left\{\frac{z_n}{\zeta_n}\right\}$ тоже сходятся и

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + \zeta_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} \zeta_n, \tag{2.21}$$

$$\lim_{n\to\infty} (z_n - \zeta_n) = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} \zeta_n, \tag{2.22}$$

$$\lim_{n\to\infty} (z_n \zeta_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} \zeta_n, \tag{2.23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n}, \tag{2.24}$$

при этом, в случае частного предполагается, что $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n \neq 0$.

В силу теоремы 2.4 (необходимость) существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mu$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \nu$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lambda$. Следовательно, в силу основной теоремы о пределах последовательностей вещественных чисел [2.11, с. 224] существуют

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + p_n) = \mu + \gamma, \ \lim_{n\to\infty} (y_n + q_n) = \nu + \lambda.$$

Тогда, в силу теоремы 2.4 (достаточность) последовательность

$$z_n + \zeta_n = (x_n + p_n) + i(y_n + q_n), \ n \in \mathrm{N},$$

сходится и

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + \zeta_n) = (\mu + \gamma) + i(\nu + \lambda) = (\mu + i\nu) + (\gamma + i\lambda) =$$

$$= a + b = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} \zeta_n,$$

т.е. справедлива формула (2.21). Аналогично доказываются оставшиеся части утверждения теоремы.

Если $z_n = c$ для $\forall n \in \mathrm{N}$, где $c = \mathrm{const}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} c = c\,. \tag{2.25}$$

Если последовательность $\{z_n\}$ сходится, то для $\forall c \in \mathrm{X}$ последовательность $c\cdot\{z_n\} = \{c\, z_n\}$ тоже сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(c\, z_n) = c \lim_{n\to\infty} z_n \tag{2.26}$$

(соотношение (2.26) следует из (2.23), (2.25)).

3. РАСШИРЕННАЯ КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Бесконечно удалённая окружность комплексной плоскости; понятие несобственного комплексного числа; расширенное множество комплексных чисел; расширенная комплексная плоскость; бесконечно большая последовательность; окрестность несобственного комплексного числа; сферическое изображение комплексных чисел.

Введём понятие несобственного комплексного числа. Числовой луч L можно "пополнить" единственной бесконечно удалённой точкой ∞_L, которую можно условно считать образом точки $N(0;1)$ при отображении полуокружности $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $x \ge 0$, на луч L (рис. 3.1).

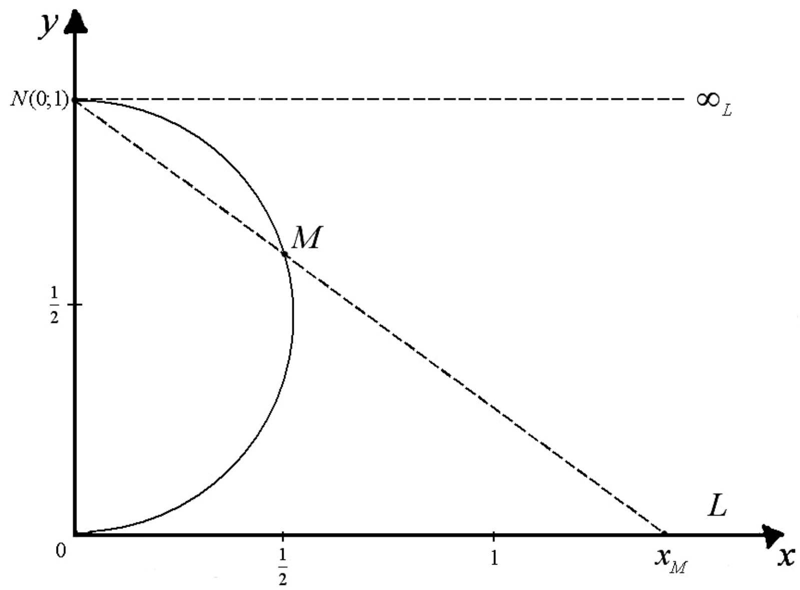

Рис. 3.1

Так как $\mathrm{P} = L_0 \cup L_{-\pi}$, где $L_0 = \{x \in \mathrm{P} \,|\, x \ge 0\}$, $L_{-\pi} = \{x \in \mathrm{P} \,|\, x \le 0\}$, то числовую прямую можно "пополнить" двумя бесконечно удалёнными точками $\infty_{L_0} = +\infty$ и $\infty_{L_{-\pi}} = -\infty$. Комплексную плоскость можно представить в виде $\mathrm{X} = \bigcup\limits_{\varphi\in[-\pi;\pi)} L_\varphi$, где L_φ − луч, исходящий из точки $z = 0$ с углом наклона φ к положительному направлению действительной оси. Для каждого $\varphi \in [-\pi;\pi)$ луч L_φ можно "пополнить" бесконечно удалённой точкой $\infty_{L\varphi}$. Следовательно, комплексную плоскость можно "пополнить" бесконечным множеством бесконечно удалённых точек, точнее, к комплексной плоскости можно "присоединить" множество вида $O_\infty(0) = \left\{\infty_{L_\varphi} \,|\, \varphi \in [-\pi;\pi)\right\}$. С другой стороны, $\mathrm{X} = \bigcup\limits_{\substack{r\in\mathrm{P},\\ r\ge 0}} O_r(0)$, где $O_r(0) = \left\{z \in \mathrm{C} : |z| = r\right\}$. В силу этого множество $O_\infty(0)$ можно условно назвать *бесконечно удалённой окружностью комплексной плоскости*.

Определение 3.1. *Несобственным комплексным числом* называется символ ∞, отождествляемый с бесконечно удалённой окружностью комплексной плоскости.

Замечание 3.1. Общепринято считать, что несобственное комплексное число $z = \infty$ является единственной бесконечно удалённой точкой на комплексной плоскости [1.4, с. 27].

Расширенное множество комплексных чисел получается в результате присоединения ко множеству X несобственного комплексного числа $z = \infty$: $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \cup \{\infty\}$.

Соответственно, *расширенная комплексная плоскость* получается в результате присоединения к комплексной плоскости X бесконечно удалённой окружности.

Определение 3.2. Несобственное комплексное число ∞ называется пределом последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, если для любого сколь угодно большого положительного числа *E* найдётся номер *N*, определяемый в зависимости от взятого числа *E*, такой, что для любого номера $n > N$ модуль соответствующего члена последовательности z_n больше взятого числа *E*.

Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \tag{3.1}$$

или $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, или $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Итак, запись (3.1) означает, по определению, следующее:

$$\forall E > 0 \quad \exists\, N = N(E) \,|\, \forall n > N \Rightarrow |z_n| > E\,. \tag{3.2}$$

О последовательности $\{z_n\}$, для которой выполняется (3.2), говорят, что её предел равен бесконечности или что она стремится к бесконечности. Такую последовательность называют *бесконечно большой*.

Условие (3.2) означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|z_n| = +\infty\,. \tag{3.3}$$

Пример 3.1. Последовательность $z_n = (1-i)^n$, $n \in \mathrm{N}$, является бесконечно большой.

Действительно,

$$|z_n| = \left|(1-i)^n\right| = |1-i|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty,$$

следовательно, в силу (3.3) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Дадим геометрическую трактовку соотношения (3.1). Пусть $E \in \mathrm{P}$, $E > 0$. Положим $i_E = +\infty - E$ (от англ. слова infinity – бесконечность).

Определение 3.3 i_E*-окрестностью несобственного комплексного числа* ∞ называется множество всех точек комплексной плоскости, "расстояние" от которых до бесконечно удалённой окружности "меньше" i_E (обозначение: $O_{i_E}(\infty)$).

Итак, по определению, $O_{i_E}(\infty) = \left\{z \in \mathrm{C} : |z| > E\right\}$ − внешность замкнутого круга $\overline{O}_E(0)$, т.е. $O_{i_E}(\infty) = \mathrm{X} \setminus \overline{O}_E(0)$.

Запись (3.1) означает на геометрическом языке следующее:

$$\forall O_{i_E}(\infty) \quad \exists\, N = N(E) \,|\, \forall n > N \Rightarrow z_n \in O_{i_E}(\infty)\,. \tag{3.4}$$

Для различения окрестностей несобственного комплексного числа ∞ удобно ввести во множестве $\{i_E \,|\, E \in \mathrm{R}, E > 0\}$ отношение порядка: условимся считать, что $i_{E_1} < i_{E_2}$, если $E_1 > E_2$ (рис. 3.2).

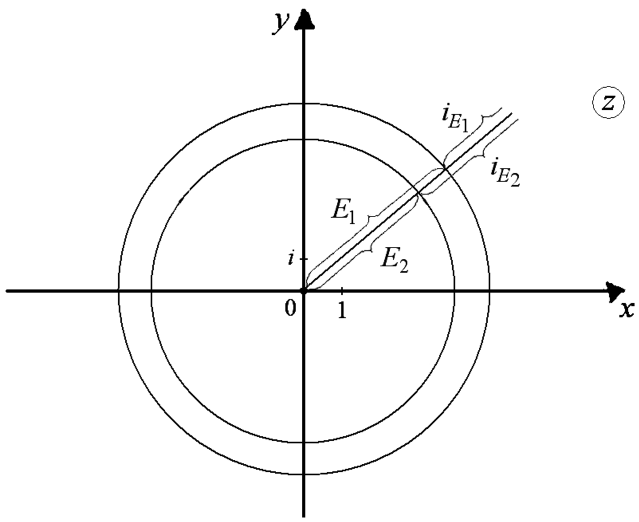

Рис. 3.2

Следовательно, $O_{i_{E_1}} \subset O_{i_{E_2}}$, если $E_1 > E_2$.

Укажем геометрическую интерпретацию расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathrm{X}}$. Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат $Oxyh$, где Ox, Oy − соответственно действительная и мнимая оси комплексной плоскости X. Пусть S − сфера с центром в точке $M_0\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$ радиуса $R = \dfrac{1}{2}$ (рис 3.3).

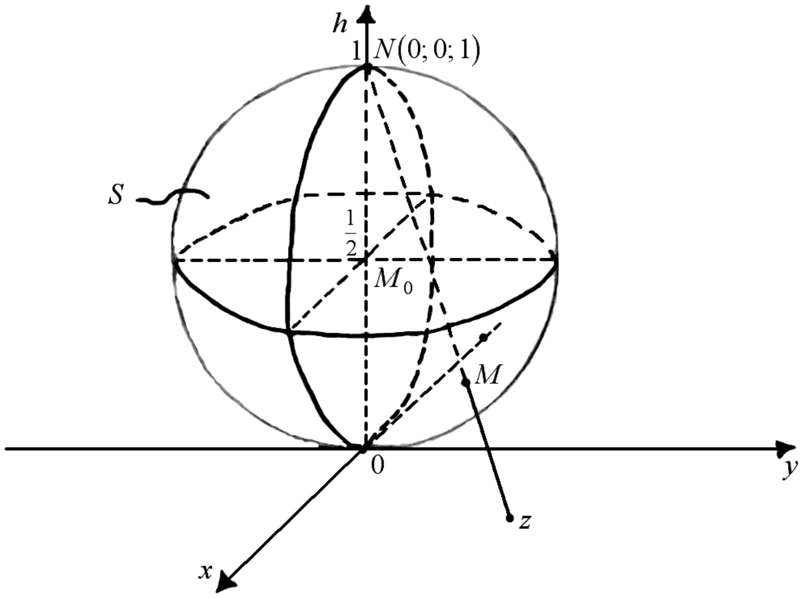

Рис. 3.3

Уравнение сферы S имеет вид $x^2+y^2+\left(h-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Каждой точке z комплексной плоскости X поставим в соответствие точку M, которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и N. Точка M называется *сферическим изображением комплексного числа* z. Заметим, что точке $z=0$ будет соответствовать точка $O(0;\,0;\,0)$ сферы S. Обратно, каждой точке $M\in S\setminus\{N\}$ можно поставить в соответствие точку $z\in\mathrm{X}$, которая является точкой пересечения продолжения отрезка NM с комплексной плоскостью X. Таким образом, между множеством точек комплексной плоскости X и множеством точек $S\setminus\{N\}$ существует взаимно однозначное соответствие. Точке N не соответствует ни одна точка $z\in\mathrm{X}$. Окружности $O_r(0)$ на комплексной плоскости X при $r\to+\infty$ "стремятся " к бесконечно удалённой окружности $O_\infty(0)$, при этом их образы на поверхности S ("параллели" на поверхности S) "стягиваются" в точку N. В силу этого можно условно считать, что точке N соответствует бесконечно удалённая окружность $O_\infty(0)$. При таком соглашении установлено взаимно однозначное соответствие между множеством $\overline{\mathrm{X}}$ и множеством S. Это соответствие называется *стереографической проекцией*. Сфера S, точки которой отождествлены с элементами расширенной комплексной плоскости, называется *сферой комплексных чисел* или *сферой Римана*.

Итак, геометрической интерпретацией несобственного комплексного числа $z=\infty$ можно считать "северный полюс" $N(0;\,0;\,1)$ сферы Римана.

4. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Числовой ряд, частичная сумма ряда; понятия сходящегося и расходящегося ряда; признак сходимости ряда; линейные операции над рядами, их свойства; произведение рядов; необходимый признак сходимости ряда; достаточный признак расходимости ряда; достаточный признак сходимости ряда; абсолютно сходящиеся и условно сходящиеся ряды; признак абсолютной сходимости ряда; переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда; свойство произведения абсолютно сходящихся рядов.

При исследовании свойств функций комплексного переменного используются разложения этих функций в функциональные ряды с комплексными членами. Кроме того, некоторые основные элементарные функции комплексного переменного определяются как суммы степенных рядов. В связи с этим возникает необходимость изучения числовых и функциональных рядов с комплексными членами.

Определение 4.1. *Числовым рядом с комплексными членами* называется любое выражение вида

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots, \tag{4.1}$$

где $z_1,\,z_2,\,\ldots,\,z_n,\,\ldots$ − последовательность комплексных чисел, которые называются членами ряда (z_1 − первый член ряда; z_2 − второй член ряда, …, z_n − n-й или общий член ряда, …).

Краткое обозначение числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n\,. \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. В дальнейшем в целях краткости числовой ряд будем называть рядом.

Определение 4.2. n-й частичной суммой ряда называется сумма его первых n членов (обозначение: S_n):

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

или

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \ .$$

Рассмотрим частичные суммы ряда (4.1):

$$S_1 = z_1 ,$$

$$S_2 = z_1 + z_2 ,$$

$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3 ,$$

....

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n ,$$

....

Они образуют числовую последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ с комплексными членами.

Определение 4.3. Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n , \tag{4.3}$$

при этом, предел S называется *суммой ряда*.

Обозначение:

$$S = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

или

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \ .$$

Определение 4.4. Ряд называется *расходящимся*, если последовательность его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет конечного предела.

Иными словами, ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм является сходящейся; ряд называется расходящимся, если последовательность его частичных сумм является расходящейся.

Установим *признак сходимости числового ряда с комплексными членами*. Запишем члены ряда (4.2) в алгебраической форме: $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathrm{N}$.

Теорема 4.1. Сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) \tag{4.4}$$

к сумме $S = S^{(1)} + iS^{(2)}$ равносильна сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n , \tag{4.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n , \tag{4.6}$$

составленных из действительных и мнимых частей членов ряда (4.4), соответственно к числам $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$.

► Имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i\sum_{k=1}^{n} y_k = S_n^{(1)} + iS_n^{(2)} ,$$

где $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ − n-е частичные суммы соответственно рядов (4.5) и (4.6). Тогда формулировка теоремы 4.1 равносильна следующему утверждению:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(S_n^{(1)}+iS_n^{(2)}\right)=S^{(1)}+iS^{(2)} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)}=S^{(1)} \text{ и } \exists \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)}=S^{(2)},$$

которое справедливо в силу теоремы 2.4. ◀

В силу теоремы 4.1 сумму ряда (4.4) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n+iy_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n+i\sum_{n=1}^{\infty}y_n . \tag{4.7}$$

Определение 4.5. *Суммой рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{4.8}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \tag{4.9}$$

называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n+\zeta_n\right). \tag{4.10}$$

Определение 4.6. *Разностью рядов* (4.7) и (4.8) называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n-\zeta_n\right)$.

Определение 4.7. *Произведением ряда* (4.8) *на комплексное число* ζ называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\zeta z_n . \tag{4.11}$$

В силу определений 4.5, 4.7 ряд (4.4) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n+iy_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n+i\sum_{n=1}^{\infty}y_n . \tag{4.12}$$

Заметим, что совершенно одинаковые записи (4.7) и (4.12) имеют различное смысловое содержание.

Теорема 4.2. Если сходятся ряды (4.8), (4.9) и их суммы равны соответственно S и H, то сходится также ряд (4.10) и его сумма равна $S+H$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n+\zeta_n\right)=S+H .$$

Теорема 4.3. Если сходится ряд (4.8) и его сумма равна S, то сходится также ряд (4.11) и его сумма равна ζS:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\zeta z_n=\zeta S .$$

Теоремы 4.2, 4.3 доказываются точно так же, как соответствующие теоремы для числовых рядов с вещественными членами [2.8, с. 453], при этом используются свойства (2.21), (2.26) пределов последовательностей комплексных чисел.

Таким образом, сумма двух сходящихся рядов и произведение сходящегося ряда на число являются сходящимися рядами. Следовательно, разность двух сходящихся рядов, которую можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n-\zeta_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}z_n+(-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n ,$$

тоже является сходящимся рядом и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n-\zeta_n\right)=S-H .$$

Операции сложения и вычитания рядов, а также умножения ряда на число называются *линейными операциями над рядами*.

При определении произведения рядов (4.8), (4.9) исходят из правила умножения конечных сумм:

$$\left(\sum_{n=1}^{N_1}z_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{N_2}\zeta_n\right)=\sum_{\substack{1\le k\le N_1\\ 1\le l\le N_2}}z_k\zeta_l . \tag{4.13}$$

В правой части равенства (4.13) записана конечная сумма слагаемых вида $z_k\zeta_l$, поэтому неважно в каком порядке перечислены эти слагаемые. Иначе обстоит дело, если речь идёт об умножении рядов.

Под произведением рядов (4.8), (4.9) естественно понимать ряд, членами которого являются всевозможные слагаемые вида $z_k\zeta_l$ ($1 \le k < \infty$, $1 \le l < \infty$). Эти слагаемые можно перечислять различными способами. Каждому такому способу будет отвечать свой ряд

$$\sum_{1\le k,l<\infty} z_k\zeta_l \,. \qquad (4.14)$$

Например, можно группировать слагаемые $z_k\zeta_l$ с одинаковой суммой индексов $k+l=n$ ($n = 2, 3, \ldots$):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k+l=n} z_k\zeta_l\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} z_k\zeta_{n-k}\right) =$$

$$= z_1\zeta_1 + \left(z_1\zeta_2 + z_2\zeta_1\right) + \left(z_1\zeta_3 + z_2\zeta_2 + z_3\zeta_1\right) + \ldots \,. \qquad (4.15)$$

Определение 4.8. *Произведением рядов* (4.8), (4.9), отвечающим данному порядку следования слагаемых $z_k\zeta_l$ ($1 \le k, l < \infty$), называется ряд вида (4.14), в котором члены ряда записаны в данном порядке.

Например, произведение рядов, взятое в виде (4.15), называется *произведением рядов в форме Коши*.

Вопрос об условиях, при которых произведение рядов сходится, будет рассмотрен ниже (см. теорему 4.8).

Укажем *необходимый признак сходимости ряда с комплексными членами*.

Теорема 4.4. Если ряд с комплексными членами сходится, то предел его общего члена равен нулю.

Пусть ряд (4.4) сходится. Тогда в силу теоремы 4.1 ряды (4.5) и (4.6) тоже сходятся. Следовательно, в силу необходимого признака сходимости числовых рядов с вещественными членами [2.8, с. 430] $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Тогда в силу теоремы 2.4 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 + i\cdot 0 = 0$.

Как следствие теоремы 4.4 получаем *достаточный признак расходимости ряда*: если предел общего члена ряда отличен от нуля или не существует, то ряд расходится. В силу (2.4) этот признак можно сформулировать в виде: если предел модуля общего члена ряда отличен от нуля или не существует, то ряд расходится.

Докажем *достаточный признак сходимости ряда с комплексными членами*. Для этого запишем ряд, составленный из модулей членов ряда (4.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n + iy_n\right| \,. \qquad (4.16)$$

Замечание 4.2. Ряд (4.16) − это знакоположительный ряд и для исследования его на сходимость можно применять известные признаки сходимости знакоположительных рядов, например, первый признак сравнения [2.8, с. 433], второй (или предельный) признак сравнения [2.8, с. 434], признак Даламбера [2.8, с. 436], признак Коши [2.8, с. 437].

Теорема 4.5. Пусть ряд с комплексными членами таков, что ряд, составленный из модулей его членов, сходится. Тогда исходный ряд тоже сходится.

Пусть ряд (4.16) сходится. Покажем, что ряд (4.4) сходится. Для $\forall n \in \mathrm{N}$ имеем

$$\left|x_n\right| \le \sqrt{\left|x_n\right|^2 + \left|y_n\right|^2} = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \left|z_n\right| ,$$

$$\left|y_n\right| \le \sqrt{\left|x_n\right|^2 + \left|y_n\right|^2} = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \left|z_n\right| .$$

Следовательно, по первому признаку сравнения, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right| , \qquad (4.17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|y_n\right| , \qquad (4.18)$$

сходятся а, значит, в силу достаточного признака сходимости знакопеременных рядов с вещественными членами [2.8, с. 446] ряды (4.5) и (4.6) сходятся. Тогда по теореме 4.1 (достаточность) ряд (4.4) сходится.

Замечание 4.3. Утверждение, обратное теореме 4.5, неверно, т.е. если сходится ряд (4.4), то это вовсе не означает, что сходится и ряд (4.16).

Рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}} \,. \qquad (4.19)$$

Пусть $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathrm{N}$. Тогда, используя тригонометрическую форму комплексного числа i и формулу Муавра (см. (1.30)), имеем

$$z_n = x_n + iy_n = \frac{i^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{2} + i\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2},$$

т.е.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{2}, \ y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Учитывая соотношения

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{если } n = 2k+1, \quad k \in Z, \\ (-1)^k, \text{если } n = 2k, k \in Z, \end{cases}$$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{если } n = 2k, k \in Z, \\ (-1)^{k-1}, \text{если } n = 2k-1, \quad k \in Z, \end{cases}$$

получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k}}, \tag{4.20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{2k-1}}. \tag{4.21}$$

Ряды (4.20), (4.21) − это знакочередующиеся ряды с вещественными членами. По признаку Лейбница [2.8, с. 455] они сходятся. Следовательно, по теореме 4.1 ряд (4.19) сходится. Далее,

$$|z_n| = \left|\frac{i^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|\, i \,|^n}{|\sqrt{n}\,|} = \frac{1^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{4.22}$$

Ряд (4.22) − это ряд Дирихле (или обобщённый гармонический ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \tag{4.23}$$

при $\alpha = \frac{1}{2}$. Известно [2.8, с. 435, с. 441], что ряд (4.23) при $\alpha > 1$ сходится, при $\alpha \le 1$ расходится. Следовательно, ряд (4.22) расходится. Итак, ряд (4.19) сходится, а ряд, составленный из модулей членов ряда (4.19) расходится.

Чтобы различать ряды, для которых соответствующие ряды из модулей сходятся, и ряды, для которых соответствующие ряды из модулей расходятся, введём следующие определения.

Определение 4.9. *Ряд с комплексными членами* называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей членов исходного ряда.

В силу теоремы 4.5 абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение 4.10. *Ряд с комплексными членами* называется *условно сходящимся* (или *неабсолютно сходящимся*), если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Итак, для произвольного числового ряда с комплексными членами существуют всего три взаимоисключающие друг друга возможности: ряд либо сходится абсолютно, либо сходится условно, либо расходится (рис. 4.1).

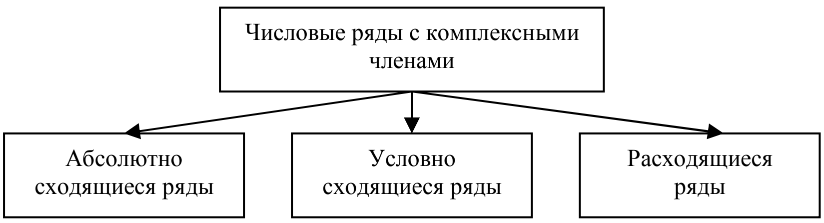

Рис. 4.1

Укажем *критерий абсолютной сходимости ряда с комплексными членами.*

Теорема 4.6. Абсолютная сходимость ряда с комплексными членами равносильна абсолютной сходимости ряда, составленного из действительных частей, и ряда, составленного из мнимых частей членов исходного ряда.

▶ **Необходимость.** Пусть ряд (4.4) сходится абсолютно, т.е. сходится ряд (4.16). Тогда (см. доказательство теоремы 4.5) ряды (4.17) и (4.18) сходятся, а это означает, по определению, что ряды (4.5) и (4.6) сходятся абсолютно.

Достаточность. Пусть ряды (4.5) и (4.6) сходятся абсолютно, т.е. сходятся ряды (4.17) и (4.18). Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|x_n|+|y_n|\right) \tag{4.24}$$

сходится как сумма двух сходящихся рядов [2.8, с. 453].
Заметим, что

$$\sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|, \forall a,b \in \mathrm{P} \ . \tag{4.25}$$

(действительно, $a^2+b^2 \le a^2+2|a|\cdot|b|+b^2 = |a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2 = \ =\left(|a|+|b|\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|$). В силу (4.25)

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2+y_n^2} \le |x_n|+|y_n|, \forall n \in \mathrm{N} \, . \tag{4.26}$$

Из (4.26) и сходимости ряда (4.24) следует, в силу первого признака сравнения, что ряд (4.16) сходится. А это означает, по определению, что ряд (4.4) сходится абсолютно. ◄

Докажем, что абсолютно сходящийся ряд с комплексными членами обладает *переместительным свойством*.

Теорема 4.7. Если данный ряд с комплексными членами сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного ряда посредством произвольной перестановки его членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и данный ряд.

► Пусть ряд (4.4) сходится абсолютно и сумма этого ряда равна $S = S^{(1)} + iS^{(2)}$. Тогда в силу теоремы 4.6 (необходимость) ряды (4.5) и (4.6) сходятся абсолютно. Рассмотрим ряд, полученный из ряда (4.4) посредством некоторой перестановки его членов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{n_k} + iy_{n_k}\right). \tag{4.27}$$

В силу абсолютной сходимости рядов (4.5), (4.6) и переместительного свойства для абсолютно сходящегося ряда с действительными членами [2.8, с. 450] ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} \ , \ \ \sum_{k=1}^{\infty} y_{n_k} \tag{4.28}$$

сходятся абсолютно и

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ , \ \ \sum_{k=1}^{\infty} y_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \ . \tag{4.29}$$

В силу теоремы 4.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S^{(1)}, \ \ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = S^{(2)} . \tag{4.30}$$

В силу (4.29), (4.30)

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} = S^{(1)}, \ \ \sum_{k=1}^{\infty} y_{n_k} = S^{(2)} . \tag{4.31}$$

Итак, ряды (4.28) сходятся абсолютно. Следовательно, в силу теоремы 4.6 (достаточность) ряд (4.27) сходится абсолютно. Кроме того, в силу (4.31) и теоремы 4.1 сумма ряда (4.27) равна $S^{(1)} + iS^{(2)} = S$.◄

Укажем условия, при которых сумма произведения рядов

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n\right) = \sum_{1\le k,l<\infty} z_k \zeta_l$$

не зависит от порядка следования слагаемых $z_k \zeta_l$ $(1 \le k,\, l < \infty)$.

Теорема 4.8. Если перемножаемые ряды с комплексными членами абсолютно сходятся, то произведение этих рядов, отвечающее любому порядку следования слагаемых $z_k \zeta_l$ $(1 \le k,\, l < \infty)$, является абсолютно сходящимся рядом, сумма которого равна произведению сумм перемножаемых рядов.

Теорема 4.8 доказывается точно так же, как и соответствующее утверждение для числовых рядов с вещественными членами [2.8, с. 453].

Замечание 4.4. Если ставится задача об исследовании ряда на абсолютную и условную сходимость, то её решение удобно начинать с исследования на сходимость ряда (4.16), ибо 1) если окажется, что $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| \ne 0$ или такой предел не существует, то по достаточному признаку расходимости ряд (4.4) расходится; 2) если ряд (4.16) окажется сходящимся, то ряд (4.4) сходится абсолютно; 3) если при исследовании ряда (4.16) применялся признак Даламбера или признак Коши и оказалось, что $D = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$ или $K = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} > 1$, то из любого из этих неравенств вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| \ne 0$, следовательно, ряд (4.4) расходится.

Пример 4.1. Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^2}. \tag{4.32}$$

Имеем $|z_n|=\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Получили ряд Дирихле с $\alpha=2>1$, следовательно, он сходится. А это означает, что ряд (4.32) сходится абсолютно.

Пример 4.2. Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n. \tag{4.33}$$

Имеем

$$|z_n|=\left|(1+i)^n\right|=|\,1+i\,|^{\,n}=\left(\sqrt{2}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}|z_n|=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}z_n\neq 0.$$

Следовательно, по достаточному признаку расходимости ряд (4.33) расходится.

Примером условно сходящегося ряда является ряд (4.19).

5. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Понятие функции комплексного переменного; определение обратной функции; действительная и мнимая части функции; определение сложной функции; понятие предельной точки множества; предел функции; теорема о единственности предела; бесконечный предел функции; признак существования предела функции; основная теорема о пределах функций; непрерывность функции в точке; непрерывность функции на множестве; признак непрерывности функции в точке; основная теорема о непрерывных функциях.

Пусть D − некоторое подмножество множества комплексных чисел X (в частности, D может совпадать со всем X).

Определение 5.1. Говорят, что на множестве D задана *функция* $w=f(z)$ *комплексного переменного* z, если каждому числу $z\in D$ поставлено в соответствие по некоторому закону f одно или более одного комплексных чисел.

Если каждому $z\in D$ соответствует одно w, то *функция* $w=f(z)$ называется *однозначной*. Если хотя бы одному $z\in D$ соответствует более одного w, то *функция* $w=f(z)$ называется *многозначной*.

Множество D называется *областью определения функции* $w=f(z)$, множество $G=\{w\in \mathrm{X}\mid w=f(z), z\in D\}$ − её *множеством* (*областью*) *значений*.

Будем изображать значения аргумента z на комплексной плоскости ⓩ, а значения функции $w=f(z)$ на комплексной плоскости ⓦ (рис. 5.1).

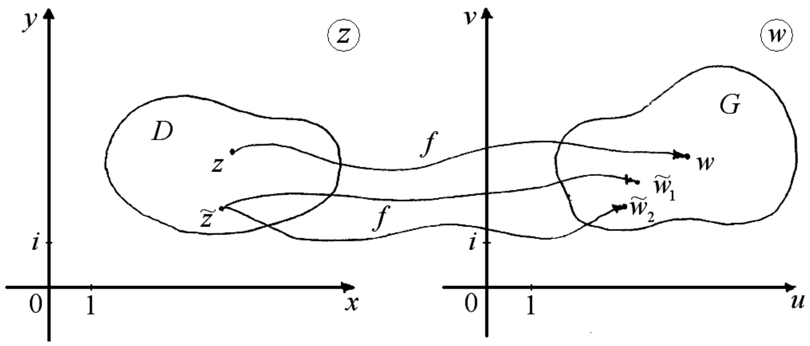

Рис. 5.1

Геометрически функцию $w=f(z)$ можно понимать как *отображение множества* D комплексной плоскости ⓩ на множество G комплексной плоскости ⓦ. При этом говорят, что множество G является *образом множества* D при отображении f и записывают: $G=f(D)$.

Пусть z_0 − произвольная фиксированная точка из D, тогда соответствующее значение $w_0=f(z_0)$ называется *образом точки* z_0 при отображении f.

Если отображение f однозначно, то образ любой точки $z\in D$ состоит из одной точки. В случае многозначности отображения f образ хотя бы одной точки $z\in D$ состоит более чем из одной точки.

Пусть w_0 − произвольная фиксированная точка из G. *Прообразом точки* w_0 при отображении f называется любая точка $z\in D$, которая отображается в точку w_0: $f(z)=w_0$.

Полным прообразом точки w_0 при отображении f называется совокупность всех её прообразов при этом отображении (обозначение: $p(w_0)$).

По определению,

$$p(w_0)=\{z\in D \mid f(z)=w_0\}.$$

Определение 5.2. *Обратной функцией* к функции $w=f(z)$, $z\in D$, называется функция $z=f^{-1}(w)$, которая каждой точке $w\in G$ ставит в соответствие её полный прообраз при отображении f: для $\forall w\in G$ $\quad f^{-1}(w)=p(w)$, где $p(w)=\{z\in D \mid f(z)=w\}$.

Пример 5.1. Рассмотрим функцию $w=z^2$, $z\in \mathrm{X}$ (здесь $D=\mathrm{X}$). Эта функция является однозначной, так как каждому $z\in \mathrm{X}$ соответствует только одно значение z^2. Например, при $z_0=2+3i$ получаем $w_0=(2+3i)^2=4-9+12i=-5+12i$. Точка $w_0=-5+12i$ является образом точки $z_0=2+3i$ при отображении $w=z^2$. Из формулы для извлечения корня натуральной степени из комплексного числа (см. (1.33)) следует, что $\sqrt{w_0}$ имеет два значения: одно из них уже указано: $z_0=2+3i$; другим значением является $z_1=-2-3i$. Следовательно, полный прообраз точки $w_0=-5+12i$ имеет вид $p(w_0)=\{2+3i;-2-3i\}$.

Пример 5.2. Рассмотрим функцию $w=\sqrt{z}$, $z\in \mathrm{X}$. В силу формулы (1.33) эта функция является многозначной, а именно двузначной: если $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt{z}=\left\{\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right);\ \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{2}\right)\right\}$$

или в силу формул приведения $\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)=-\cos\frac{\varphi}{2}$, $\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)=-\sin\frac{\varphi}{2}$,

$$\sqrt{z}=\left\{\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right);\ -\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right\}.$$

Например, образом точки $z_0=1+i$ при отображении $w=\sqrt{z}$ является совокупность двух точек

$$\left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right);\ -\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right\}.$$

Заметим, что образом точки $z_0=0$ при отображении $w=\sqrt{z}$ является одна точка $w_0=0$.

Из примеров 5.1, 5.2 видно, что обратной функцией к функции $w=z^2$ является функция $z=\sqrt{w}$.

Среди однозначных функций комплексного переменного выделяют однолистные функции.

Определение 5.3. Однозначная *функция* $w=f(z)$, $z\in D$, называется *однолистной* (или *взаимно однозначной*) *на множестве* D, если выполняется следующее условие:

$$\forall z_1,z_2\in D, z_1\neq z_2 \Rightarrow f(z_1)\neq f(z_2). \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. Однолистность функции $w=f(z)$ на множестве D равносильна существованию однозначной обратной к ней функции $z=f^{-1}(w)$, $w\in G$, где $G=f(D)$ − множество значений функции $f(z)$.

Определение 5.4. Однозначная *функция* $w=f(z)$, $z\in D$, называется *многолистной на множестве* D, если выполняется следующее условие:

$$\exists z_1,z_2\in D, z_1\neq z_2 \mid f(z_1)=f(z_2). \tag{5.2}$$

Примером однолистной функции является функция $w=2z+5$, $z\in \mathrm{X}$. Обратная к ней функция имеет вид $z=\dfrac{w-5}{2}$, $w\in \mathrm{X}$.

Примером многолистной функции является функция $w=\sqrt{z}$, $z\in \mathrm{X}$ из примера 5.2 (эта функция является двулистной).

Пусть задана функция комплексного переменного $w=f(z)$, $z\in D$. Представляя z и w в алгебраической форме: $z=x+iy$, $w=u+iv$, получаем $u+iv=f(x+iy)$, т.е. $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Следовательно, функцию $w=f(z)$ можно представить в виде

$$w = u(x, y) + iv(x, y).$$

Вещественные функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ двух вещественных переменных x, y называются соответственно *действительной частью* и *мнимой частью функции* $w = f(z)$.

Например, функцию $w = z^2$ можно записать в виде

$$w = (x + iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xyi,$$

т.е. $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

Введём понятие сложной функции комплексного переменного.

Пусть задана функция $h = \varphi(z)$, $z \in D \subseteq \mathrm{X}$, а на множестве $G_\varphi = \{h \in \mathrm{X} \mid h = \varphi(z), z \in D\}$ задана функция $w = f(h)$. Тогда можно рассмотреть функцию $F : D \to G$, где $G = \left\{w \in \mathrm{C} \mid w = f(h),\ h \in G_\varphi\right\}$, которая каждому $z \in D$ ставит в соответствие $w = f(\varphi(z))$ (рис. 5.2).

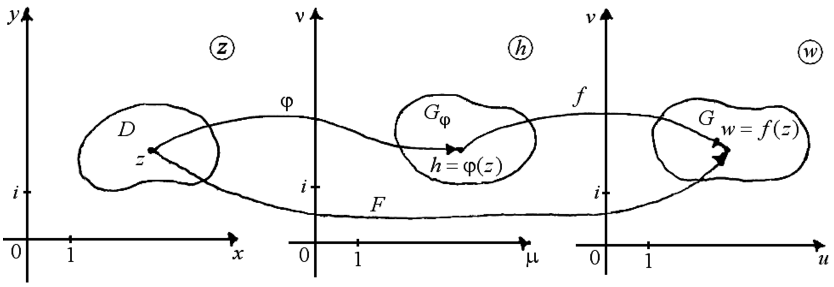

Рис. 5.2

Полученная функция $F(z) = f(\varphi(z))$ представляет собой функцию от функции и называется *сложной функцией* (*суперпозицией* или *композицией функций* f и φ; обозначение: $f \circ \varphi$; по определению, $(f \circ \varphi)(z) = f(\varphi(z))$), при этом функция $h = \varphi(z)$ называется *проме-жуточным переменным* (или *промежуточным аргументом*); z − *независимым переменным* (или *внутренним аргументом*).

Другое обозначение сложной функции: $w = w(h(z))$.

Сложную функцию $w = f(\varphi(z))$ можно записать в виде отдельных звеньев (в виде цепочки равенств): $w = f(h)$, $h = \varphi(z)$.

Сложная функция может состоять более чем из двух звеньев, в частности, может иметь вид: $w = w(q(h(z)))$.

Пусть $D \subset \mathrm{X}$. Введём понятие предельной точки множества D.

Определение 5.5. Точка $z_0 \in \mathrm{X}$ называется *предельной точкой множества* D, если в любой её сколь угодно малой δ-окрестности найдётся точка $z \in D$, отличная от точки z_0.

Замечание 5.2. Множество может иметь предельные точки, принадлежащие этому множеству, и предельные точки, не принадлежащие ему.

Например, пусть $D = O_1(0) = \{z \in \mathrm{C} : |z| < 1\}$ − открытый круг с центром в точке $z_* = 0$ радиуса $R = 1$. Тогда $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = i$ − предельные точки множества D, при этом $z_1 \in D$, $z_2 \overline{\in} D$ (рис. 5.3).

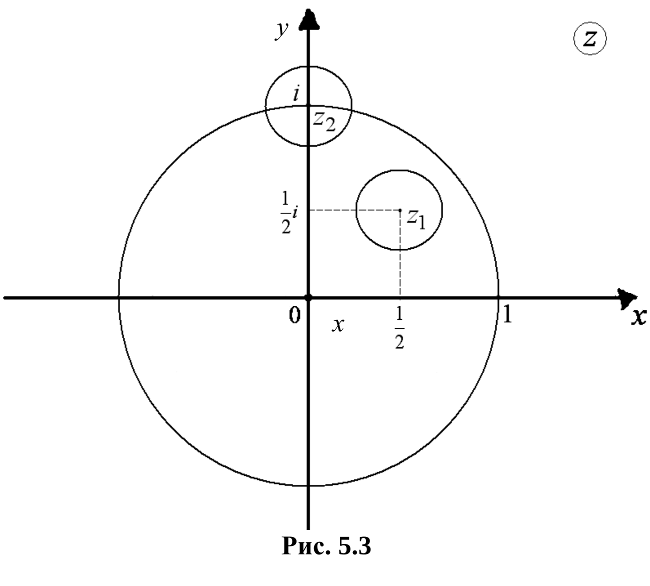

Рис. 5.3

Замечание 5.3. Если z_0 − предельная точка множества D, то в любой её сколь угодно малой δ-окрестности найдётся бесконечно много точек множества D, отличных от z_0.

Действительно, для взятой $O_\delta(z_0)$ $\exists \tilde{z} \in \dot{O}_\delta(z_0) \cap D$, где $\dot{O}_\delta(z_0) = O_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ ($\dot{O}_\delta(z_0)$ называется *проколотой* δ-*окрестностью точки* z_0). Рассмотрим $O_{\delta_1}(z_0) \mid \tilde{z} \overline{\in} O_{\delta_1}(z_0)$ (для этого достаточно взять $\delta_1 < |\tilde{z} - z_0|$). Тогда $\exists z_1 \in \dot{O}_{\delta_1}(z_0) \cap D$. По построению, $z_1 \neq \tilde{z}$. Рассмотрим $O_{\delta_2}(z_0) \mid z_1 \overline{\in} O_{\delta_2}(z_0)$. Тогда $\exists z_2 \in \dot{O}_{\delta_2}(z_0) \cap D$, при этом $z_2 \neq z_1$, $z_2 \neq \tilde{z}$ и т.д. (рис. 5.4).

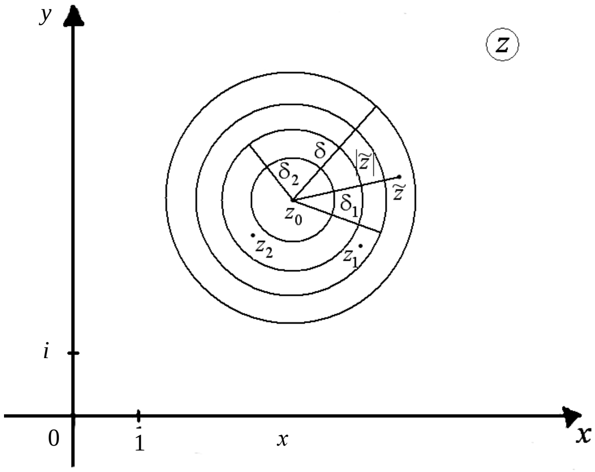

Рис. 5.4

Замечание 5.4. Если z_0 − предельная точка множества D, то $\exists$ последовательность $\{z_n\} \subset D$, $z_n \neq z_0$, $\forall n \in \mathrm{N} \mid \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Действительно, рассмотрим последовательность окрестностей с центром в точке z_0 радиуса $\frac{1}{n}$: $O_{\frac{1}{n}}(z_0), n \in \mathrm{N}$. Так как z_0 − предельная точка множества, то $\exists z_1 \in \dot{O}_1(z_0) \cap D$; $\exists z_2 \in \dot{O}_{\frac{1}{2}}(z_0) \cap D \mid z_2 \neq z_1$; $\exists z_3 \in \dot{O}_{\frac{1}{3}}(z_0) \cap D \mid z_3 \neq z_1, z_3 \neq z_2$; … ; $\exists z_n \in \dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap D \mid$

$$z_n \neq z_k, \forall 1 \leq k \leq n-1; \tag{5.3}$$

… (возможность выбора точек, удовлетворяющих условию (5.3), осуществима в силу замечания 5.3). Получили последовательность $z_n \in \dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap D$, $n \in \mathrm{N}$. Её члены удовлетворяют условию

$$|z_n - z_0| < \frac{1}{n},\ n \in \mathrm{N}. \tag{5.4}$$

Зафиксируем произвольное сколь угодно малое положительное число ε. Положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ − целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда, используя неравенство (5.4), имеем для $\forall n > N$:

$$|z_n - z_0| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Получили $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon$, а это означает, по определению предела числовой последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Пусть задана однозначная функция $w = f(z)$, $z \in D$ и z_0 − предельная точка множества D.

Определение 5.6. Комплексное число A называется *пределом функции* $f(z)$ в точке z_0 (или при z, стремящемся к z_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся положительное число δ, определяемое в зависимости от взятого числа ε, такое что для любого $z \in D$, не равного z_0 и отличного от z_0 по модулю на величину, меньшую δ, соответствующее значение функции $f(z)$ отличается от числа A по модулю на величину, меньшую взятого числа ε.

Обозначение:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \tag{5.5}$$

или $f(z)\underset{z\to z_0}{\to} A$, или $f(z)\to A$ при $z\to z_0$.

Итак, запись (5.5) означает, по определению, следующее:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0 \mid \forall z\in D: 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-A|<\varepsilon. \tag{5.6}$$

Условия $0<|z-z_0|<\delta$, $|f(z)-A|<\varepsilon$ из (5.6) означают соответственно, что $z_0\in\dot{O}_\delta(z_0)$, $f(z)\in O_\varepsilon(A)$. Следовательно, определение предела функции в точке можно сформулировать на геометрическом языке.

Определение 5.7. Точка A комплексной плоскости X называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0 (или при $z\to z_0$), если

$$\forall O_\varepsilon(A) \ \exists\, O_\delta(z_0), \delta=\delta(\varepsilon) \mid \forall z\in D\cap\dot{O}_\delta(z_0) \Rightarrow f(z)\in O_\varepsilon(A) \tag{5.7}$$

(рис. 5.5).

Для функций комплексного переменного справедлива *теорема о единственности предела*.

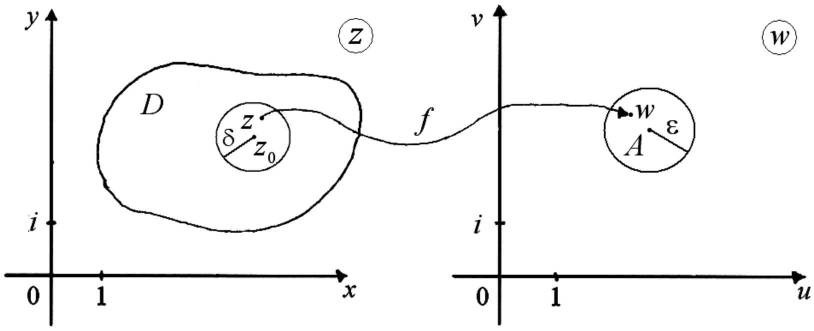

Рис. 5.5

Теорема 5.1. Функция комплексного переменного не может иметь в точке двух различных пределов.

Теорема 5.1 доказывается точно так же, как соответствующее утверждение для вещественной функции вещественной переменной [2.6, с. 131].

Укажем *необходимый признак существования конечного предела функции в точке*.

Теорема 5.2. Функция, имеющая конечный предел в точке, ограничена по модулю в некоторой окрестности этой точки.

▶ Пусть $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$. Возьмём какое-либо конкретное число $\varepsilon>0$. Тогда в силу (5.7) $\exists O_\delta(z_0) \mid \forall z\in D\cap\dot{O}_\delta(z_0)$ выполняется неравенство

$$|f(z)-A|<\varepsilon. \tag{5.8}$$

В силу (1.29)

$$|f(z)-A|\ge|f(z)|-|A|. \tag{5.9}$$

В силу (5.8), (5.9) получаем

$$|f(z)|<\varepsilon+|A|,\ \forall z\in D\cap\dot{O}_\delta(z_0),$$

а это означает, что функция $f(z)$ ограничена в $O_\delta(z_0)$ в случае, когда $z_0\,\overline{\in}\,D$. Если $z_0\in D$, то функция $f(z)$ тоже ограничена по модулю в $O_\delta(z_0)$, ибо

$$|f(z)|\le M,\ \forall z\in D\cap O_\delta(z_0),$$

где $M=\max\left\{\varepsilon+|A|, |f(z_0)|\right\}$. ◀

Определение 5.8. Функция $f(z)$ называется *бесконечно малой величиной* (б.м.в.) *в точке* z_0 (или при $z\to z_0$), если её предел в этой точке равен нулю: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=0$, т.е. по определению предела,

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0 \mid \forall z\in D: 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(z)-0|=|f(z)|<\varepsilon. \tag{5.10}$$

Условие (5.10) означает, что $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=0$. Таким образом,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}|f(z)|=0. \qquad (5.11)$$

Замечание 5.5. Если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A\neq 0$, то $\exists O_\delta(z_0)\,|\ \forall z\in D\cap \dot{O}_\delta(z_0)\Rightarrow f(z)\neq 0$.

Действительно, по определению предела для числа $\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}$ $\exists O_\delta(z_0)\,|\,\forall z\in D\cap\dot{O}_\delta(z_0)\Rightarrow |f(z)-A|<\dfrac{|A|}{2}$. В силу (1.29) $|f(z)-A|= \ =|A-f(z)|\geq |A|-|f(z)|$. Из последних двух неравенств получаем $|A|-|f(z)|<\dfrac{|A|}{2}$, откуда $|f(z)|>\dfrac{|A|}{2}>0$, следовательно, $f(z)\neq 0$ для $\forall z\in D\cap\dot{O}_\delta(z_0)$.

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 5.3.

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow f(z)=A+\alpha(z),$$

где $\alpha(z)$ − б.м.в. при $z\to z_0$.

Теорема 5.3 доказывается точно так же, как соответствующее утверждение для вещественной функции вещественной переменной [2.11, с. 275].

Определение 5.9. Несобственное комплексное число ∞ называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0 (или при $z\to z_0$), если для любого сколь угодно большого положительного числа E найдётся положительное число δ, определяемое в зависимости от взятого числа E, такое что для любого $z\in D$, не равного z_0 и отличного от z_0 по модулю на величину, меньшую δ, модуль соответствующего значения функции $f(z)$ больше взятого числа E.

Обозначение:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \qquad (5.12)$$

или $f(z)\underset{z\to z_0}{\to}\infty$, или $f(z)\to\infty$ при $z\to z_0$.

Итак, запись (5.12) означает на символическом языке следующее:

$$\forall E>0 \ \ \exists\,\delta=\delta(E)>0\,|\,\forall z\in D: 0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow |f(z)|>E. \qquad (5.13)$$

О функции, для которой выполняется (5.12), говорят, что её предел при $z\to z_0$ равен бесконечности или что она стремится к ∞ при $z\to z_0$. Такую *функцию* называют *бесконечно большой величиной* (б.б.в.) при $z\to z_0$.

Условие (5.13) означает, что $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$, следовательно,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty. \qquad (5.14)$$

Условие $|f(z)|>E$ из (5.13) означает, что $f(z)\in O_{i_E}(\infty)$, где $O_{i_E}(\infty)=\{z\in \mathrm{X}: |z|>E\}$ − i_E-окрестность несобственного комплексного числа ∞ (см. § 3). Следовательно, на геометрическом языке запись (5.12) означает, что

$$\forall O_{i_E}(\infty) \ \ \exists\, O_\delta(z_0), \delta=\delta(E)\,|\,\forall z\in D\cap\dot{O}_\delta(z_0)\Rightarrow f(z)\in O_{i_E}(\infty).$$

Замечание 5.6. Если $f(z)$ − б.м.в. в точке z_0, то $1/f(z)$ − б.б.в. в этой точке.

Замечание 5.7. Если $f(z)$ − б.б.в. в точке z_0, то $1/f(z)$ − б.м.в. в этой точке.

Замечания 5.6, 5.7 справедливы в силу (5.11), (5.14) и верности этих замечаний для вещественных функций вещественных переменных [2.11, с. 278].

Теорема 5.4. Произведение б.б.в. в данной точке и функции, ограниченной и отличной от нуля в некоторой проколотой окрестности этой точки, есть б.б.в. в этой точке.

Доказательство теоремы 5.4 аналогично доказательству соответствующего утверждения для вещественных функций вещественной переменной [2.11, с. 276, 278].

Пусть область определения D функции $f(z)$ является неограниченным множеством. Тогда можно ставить вопрос о поведении функции $f(z)$ при стремлении аргумента z к несобственному комплексному числу ∞.

Определение 5.10. Комплексное число A называется пределом функции $f(z)$ при $z\to\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists\,\Delta=\Delta(\varepsilon)>0\,|\,\forall z\in D: |z|>\Delta\Rightarrow |f(z)-A|<\varepsilon. \qquad (5.15)$$

Обозначение:

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A \qquad (5.16)$$

или $f(z)\underset{z\to\infty}{\to}A$, или $f(z)\to A$ при $z\to\infty$.

Условие $|z|>\Delta$ из (5.15) означает, что $z\in O_{i_\Delta}(\infty)$, где $O_{i_\Delta}(\infty)=\{z\in X:|z|>\Delta\}-i_\Delta$-окрестность несобственного комплексного числа ∞. Следовательно, на геометрическом языке запись (5.16) означает, что

$$\forall O_\varepsilon(A)\quad \exists\, O_{i_\Delta}(\infty), \Delta=\Delta(\varepsilon) \mid \forall z\in D\cap O_{i_\Delta}(\infty) \Rightarrow f(z)\in O_\varepsilon(A).$$

Укажем *признак существования предела функции комплексного переменного в точке*.

Теорема 5.5. Существование предела $A=\mu+i\nu$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексного переменного $z=x+iy$ в точке $z_0=x_0+iy_0$ равносильно существованию предела μ её действительной части $u(x,y)$ и предела ν её мнимой части $v(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Необходимость. Пусть

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z)=A. \tag{5.17}$$

Покажем, что

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=\mu. \tag{5.18}$$

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=\nu. \tag{5.19}$$

По определению предела, условие (5.17) означает, что выполняется (5.6). Имеем $z-z_0=(x-x_0)+i(y-y_0)$, $f(z)-A=[u(x,y)-\mu]+\ +i[v(x,y)-\nu]$. Следовательно,

$$|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho[(x,y),(x_0,y_0)], \tag{5.20}$$

$$|f(z)-A|=\sqrt{[u(x,y)-\mu]^2+[v(x,y)-\nu]^2}, \tag{5.21}$$

В силу (5.21) неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$ из (5.6) принимает вид

$$\sqrt{[u(x,y)-\mu]^2+[v(x,y)-\nu]^2}<\varepsilon. \tag{5.22}$$

Далее,

$$|u(x,y)-\mu|=\sqrt{[u(x,y)-\mu]^2}\le\sqrt{[u(x,y)-\mu]^2+[v(x,y)-\nu]^2}. \tag{5.23}$$

В силу (5.22), (5.23) справедливо неравенство

$$|u(x,y)-\mu|<\varepsilon. \tag{5.24}$$

Учитывая (5.6), (5.20) и (5.24) получаем для $\forall\varepsilon>0\quad \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0 \mid\ \forall(x,y)\in D: 0<\rho[(x,y),(x_0,y_0)]<\delta \Rightarrow |u(x,y)-\mu|<\varepsilon$, а это означает, по определению предела вещественной функции двух вещественных переменных, что выполняется (5.18). Аналогично показывается выполнимость (5.19).

Достаточность. Пусть выполнены условия (5.18), (5.19). Покажем, что справедливо (5.17). Зафиксируем произвольное сколь угодно малое $\varepsilon>0$. В силу (5.18) для числа

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt2}\ \exists\,\delta_1=\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt2}\right)=\delta_1(\varepsilon)>0 \mid\ \forall(x,y)\in D: 0<\rho[(x,y),(x_0,y_0)]<\delta_1 \Rightarrow |u(x,y)-\mu|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}.$$

В силу (5.19) для числа

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt2}\ \exists\,\delta_2=\delta_2\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt2}\right)=\delta_2(\varepsilon)>0 \mid \forall(x,y)\in D: 0<\rho[(x,y),(x_0,y_0)]<\delta_2 \Rightarrow |v(x,y)-\nu|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}.$$

Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Заметим, что $\delta=\delta(\varepsilon)$, ибо $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$. Тогда для $\forall(x,y)\in D: 0<\rho[(x,y),(x_0,y_0)]<\delta$ имеем

$$|f(z)-A|=\sqrt{[u(x,y)-\mu]^2+[v(x,y)-\nu]^2}=\sqrt{|u(x,y)-\mu|^2+|v(x,y)-\nu|^2}<$$

$$<\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt2}\right)^2}=\varepsilon.$$

Получили: для $\forall\varepsilon>0\quad \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0 \mid \forall z\in D: 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow\ \Rightarrow |f(z)-A|<\varepsilon$, а это означает по определению предела функции комплексного переменного, что выполняется (5.17).

Замечание 5.8. Если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то $\exists \lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|$ и

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \left|\lim_{z\to z_0} f(z)\right|. \qquad (5.25)$$

Действительно, пусть функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексного переменного $z=x+iy$ имеет в точке $z_0=x_0+iy_0$ предел $A=\mu+i\nu$. Тогда в силу теоремы 5.5 выполняются соотношения (5.18), (5.19). Используя теорему о пределе сложной функции двух вещественных переменных [2.9, с. 51], свойства пределов вещественных функций двух вещественных переменных [2.9, с. 49] и соотношения (5.18), (5.19), получаем

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{[u(x,y)]^2+[v(x,y)]^2} =$$

$$= \sqrt{\left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)\right]^2 + \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\mu^2+\nu^2} = |\mu+i\nu| = \left|\lim_{z\to z_0} f(z)\right|.$$

Собирая начало и конец записи, получаем формулу (5.25).

Пример 5.3. Рассмотрим функцию $f(z)=z^2+4$, $z\in \mathrm{X}$. Полагая $z=x+iy$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, получаем

$$u(x,y)+iv(x,y) = (x+iy)^2+4 = \left(x^2-y^2+4\right)+2xyi,$$

т.е. $u(x,y)=x^2-y^2+4$, $v(x,y)=2xy$. Рассмотрим $z_0=x_0+iy_0=2i$, т.е. $x_0=0$, $y_0=2$. Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ непрерывны на P^2, в частности, они непрерывны в точке $(x_0,y_0)=(0,2)$. Тогда по определению непрерывности вещественной функции

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) = u(0,2) = 0^2-2^2+4=0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0) = v(0,2) = 2\cdot 0\cdot 2 = 0.$$

Тогда в силу теоремы 5.5 (достаточность)

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 2i}\left(z^2+4\right) = 0+i\cdot 0 = 0. \qquad (5.26)$$

Согласно определению 5.8, соотношение (5.26) означает, что данная функция $f(z)$ является бесконечно малой в точке $z_0=2i$.

Докажем *основную теорему о пределах функций комплексного переменного*, согласно которой в результате арифметических операций над функциями, имеющими конечный предел в данной точке, получаются функции, которые тоже имеют конечный предел в этой точке.

Теорема 5.6. Пусть функции $f_1(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y)$ и $f_2(z)=u_2(x,y)+iv_2(x,y)$ имеют соответственно конечные пределы $A_1=\mu_1+i\nu_1$ и $A_2=\mu_2+i\nu_2$ в точке $z_0=x_0+iy_0$:

$$\exists \lim_{z\to z_0} f_1(z) = A_1, \qquad (5.27)$$

$$\exists \lim_{z\to z_0} f_2(z) = A_2. \qquad (5.28)$$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное, т.е. функции $f_1(z)+f_2(z)$, $f_1(z)-f_2(z)$, $f_1(z)\cdot f_2(z)$, $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ тоже имеют конечные пределы в точке z_0 и

$$\lim_{z\to z_0}[f_1(z)+f_2(z)] = \lim_{z\to z_0} f_1(z) + \lim_{z\to z_0} f_2(z), \qquad (5.29)$$

$$\lim_{z\to z_0}[f_1(z)-f_2(z)] = \lim_{z\to z_0} f_1(z) - \lim_{z\to z_0} f_2(z), \qquad (5.30)$$

$$\lim_{z\to z_0}[f_1(z)\cdot f_2(z)] = \lim_{z\to z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z\to z_0} f_2(z), \qquad (5.31)$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)}, \tag{5.32}$$

при этом в случае частного предполагается, что $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)\neq 0$.

Из (5.27), (5.28) следует в силу теоремы 5.5 (необходимость), что существуют

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u_1(x,y)=\mu_1,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v_1(x,y)=\nu_1,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u_2(x,y)=\mu_2,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v_2(x,y)=\nu_2.$$

Следовательно, в силу основной теоремы о пределах вещественных функций двух вещественных переменных [2.8, с. 487] существуют

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[u_1(x,y)+u_2(x,y)\right]=\mu_1+\mu_2,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[v_1(x,y)+v_2(x,y)\right]=\nu_1+\nu_2.$$

Тогда в силу теоремы 5.5 (достаточность) функция

$$f_1(z)+f_2(z)=\left[u_1(x,y)+u_2(x,y)\right]+i\left[v_1(x,y)+v_2(x,y)\right]$$

имеет конечный предел в точке z_0 и

$$\lim_{z\to z_0}\left[f_1(z)+f_2(z)\right]=(\mu_1+\mu_2)+i(\nu_1+\nu_2)=(\mu_1+i\nu_1)+(\mu_2+i\nu_2)=$$
$$=A_1+A_2=\lim_{z\to z_0} f_1(z)+\lim_{z\to z_0} f_2(z),$$

т.е. справедлива формула (5.29). Аналогично доказываются оставшиеся части утверждения теоремы.

Если $f(z)=c$, $\forall z\in D$ и z_0 – предельная точка множества D, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$, т.е.

$$\lim_{z\to z_0} c=c. \tag{5.33}$$

Если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то для $\forall c\in \mathrm{X}$, $\exists \lim\limits_{z\to z_0}\left[c\, f(z)\right]$ и

$$\lim_{z\to z_0}\left[c\, f(z)\right]=c\lim_{z\to z_0} f(z). \tag{5.34}$$

Следствие 5.1. Сумма любого конечного числа функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_s(z)$, имеющих конечный предел в точке z_0, есть функция, имеющая конечный предел в этой точке и

$$\lim_{z\to z_0}\left[\sum_{i=1}^{s} f_i(z)\right]=\sum_{i=1}^{s}\lim_{z\to z_0} f_i(z).$$

Утверждение следствия 5.1 получается из теоремы 5.6 методом математической индукции.

Следствие 5.2. Если функции $f_1(z), f_2(z), \dots, f_s(z)$ имеют конечный предел в точке z_0, то их линейная комбинация $\lambda_1 f_1(z)+\lambda_2 f_2(z)+\dots+\lambda_s f_s(z)$ с любыми коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2, \dots, \lambda_s\in \mathrm{C}$ имеет конечный предел в точке z_0 и

$$\lim_{z\to z_0}\left[\sum_{i=1}^{s}\lambda_i f_i(z)\right]=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\lim_{z\to z_0} f_i(z).$$

Справедливо следующее утверждение, называемое *теоремой о пределе сложной функции*.

Теорема 5.7. Пусть для сложной функции $w=f\left(\varphi(z)\right)$ выполняются следующие условия:

$$\exists \lim_{z\to z_0}\varphi(z)=h_*;$$

$$\exists O_\delta(z_0)\mid \varphi(z)\neq h_*, \forall z\in \dot{O}_\delta(z_0);$$

$$\exists \lim_{h\to h_*} f(h) = A.$$

Тогда

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(\varphi(z)) = A.$$

Доказательство теоремы 5.7 аналогично доказательству соответствующего утверждения для сложной функции вещественной переменной [2.1, с. 69].

Пусть задана функция комплексного переменного $w = f(z)$, $z \in D$, и z_0 − предельная точка множества D, принадлежащая D.

Определение 5.11. *Функция* $w = f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если существует предел этой функции в точке z_0, равный её значению в данной точке:

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{5.35}$$

Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0, т.е. выполняется соотношение (5.35). В силу (5.30), (5.33) равенство (5.35) можно записать в виде

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z) - f(z_0)\right] = 0. \tag{5.36}$$

Положим $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = f(z) - f(z_0)$. Комплексное число Δz называется *приращением независимого переменного* z *в точке* z_0, а комплексное число Δw − *приращением функции* $w = f(z)$ *в точке* z_0, соответствующим приращению Δz. В этих обозначениях равенство (5.36) принимает вид

$$\lim_{\Delta z\to 0} \Delta w = 0, \tag{5.37}$$

и определение непрерывности функции в точке можно сформулировать следующим образом.

Определение 5.12. *Функция* $w = f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если приращение Δw этой функции в данной точке, соответствующее приращению Δz независимого переменного z, является б.м.в. при $\Delta z \to 0$.

Определение 5.13. *Функция* $w = f(z)$ называется *непрерывной на множестве* $D_1 \subseteq D$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Замечание 5.9. Если функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, то функция $|f(z)|$ тоже непрерывна в точке z_0.

Действительно, пусть функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, т.е. выполняется соотношение (5.35). Тогда в силу замечания 5.8

$$\exists \lim_{z\to z_0} |f(z)| = \left|\lim_{z\to z_0} f(z)\right| = |f(z_0)|.$$

Получили $\exists \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |f(z_0)|$, а это означает, по определению, что функция $|f(z)|$ непрерывна в точке z_0.

Замечание 5.10. Если функция $f(z)$ непрерывна на некотором множестве, то функция $|f(z)|$ непрерывна на этом множестве.

Укажем *признак непрерывности функции комплексного переменного в точке*.

Теорема 5.8. Непрерывность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильна непрерывности её действительной и мнимой частей в точке (x_0, y_0).

► **Необходимость**. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, т.е. имеет место соотношение (5.35). Заметим, что $f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$. Тогда в силу теоремы 5.5 (необходимость)

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0),\ \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0), \tag{5.38}$$

а это означает, по определению непрерывности вещественной функции двух вещественных переменных в точке, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Достаточность. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), т.е. выполняются соотношения (5.38). Тогда в силу теоремы 5.5 (достаточность) $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = f(z_0)$, т.е. функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0. ◄

Следствие 5.3. Непрерывность функции комплексного переменного на некотором множестве равносильна непрерывности её действительной и мнимой частей на этом множестве.

Например, в силу следствия 5.3 функция $f(z) = z^2 + 4$, $z \in \mathrm{X}$, из примера 5.3 непрерывна на X, ибо её действительная часть $u(x, y) = x^2 - y^2 + 4$ и мнимая часть $v(x, y) = 2xy$ непрерывны на P^2.

Для функций комплексного переменного справедлива *основная теорема о непрерывных функциях*, согласно которой в результате арифметических операций над функциями, непрерывными в данной точке, получаются функции, которые также непрерывны в этой точке.

Теорема 5.9. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны в точке z_0. Тогда их сумма, разность, произведение и частное, т.е. функции $f_1(z)+f_2(z)$, $f_1(z)-f_2(z)$, $f_1(z)\cdot f_2(z)$, $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ тоже непрерывны в точке z_0, при этом в случае частного предполагается, что $f_2(z_0)\neq 0$.

Теорема 5.9. доказывается точно так же, как соответствующее утверждение для вещественных функций вещественной переменной [2.8, с. 112], при этом используется теорема 5.6.

Следствие 5.4. Сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных на некотором множестве функций комплексного переменного являются непрерывными функциями на этом множестве, при этом в случае частного предполагается, что знаменатель отличен от нуля на данном множестве.

Следствие 5.5. Линейная комбинация любого конечного числа функций, непрерывных на некотором множестве, является непрерывной функцией на этом множестве.

Справедливо следующее утверждение, называемое *теоремой о непрерывности сложной функции*.

Теорема 5.10. Пусть для сложной функции $F(z)=f\big(\varphi(z)\big)$ выполняются следующие условия:

а) функция $h=\varphi(z)$ непрерывна в точке z_0;

б) функция $w=f(h)$ непрерывна в точке $h_0=\varphi(z_0)$.

Тогда сложная функция $F(z)=f\big(\varphi(z)\big)$ непрерывна в точке z_0.

Доказательство теоремы 5.10 аналогично доказательству соответствующего утверждения для сложной функции вещественной переменной [2.13, с. 156].

Следствие 5.6. Пусть для сложной функции $F(z)=f\big(\varphi(z)\big)$ выполняются следующие условия:

1) функция $h=\varphi(z)$ непрерывна на множестве $D_1\subseteq D(\varphi)$;

2) функция $w=f(h)$ непрерывна на множестве $\Omega_1=\varphi(D_1)$ (Ω_1 – образ множества D_1 при отображении φ).

Тогда сложная функция $F(z)=f\big(\varphi(z)\big)$ непрерывна на множестве D_1.

6. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$; *формула Эйлера; формулы, выражающие* $\sin z$, $\cos z$ *через* e^z; *показательная форма записи комплексного числа; основное свойство показательной функции; тригонометрические тождества; гиперболические функции; формулы, связывающие* $\sin z$, $\cos z$ *с* $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$; *периодичность функций* e^z, $\sin z$, $\cos z$; *функции* $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$; *формулы, связывающие* $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ *с* $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$; *логарифмическая функция, её стандартные ветви; главная ветвь логарифмической функции; свойства логарифмической функции; общая показательная функция, её главное значение; целая степенная функция; общая степенная функция; обратные тригонометрические функции, их выражение через логарифмическую функцию; непрерывность основных элементарных функций; некоторые элементарные функции: целая рациональная функция, линейная функция, дробно-рациональная функция, дробно-линейная функция.*

Введём понятия основных элементарных функций комплексного переменного. Естественно, что такие функции при действительных значениях аргумента должны совпадать с соответствующими функциями действительного переменного. Прямой перенос определений основных элементарных функций действительного аргумента x заменой в них x на комплексный аргумент z в большинстве случаев невозможен, ибо при такой замене аргумента данные определения теряют смысл. Несмотря на это, имеющаяся информация об основных элементарных функциях действительного переменного позволяет разумным образом определить такие функции для комплексного переменного. Например, известны разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ в ряд Маклорена [2.2, с. 185]: для $\forall x\in$ Р

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ ; \qquad (6.1)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\ ; \qquad (6.2)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (6.3)$$

(напомним, что записи (6.1) – (6.3) означают, что функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ представлены в виде сумм соответствующих степенных рядов).

Чтобы определить *показательную функцию* e^z и *тригонометрические функции* $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного z по формулам (6.1) – (6.3) и чтобы эти функции обладали свойствами, аналогичными соответствующим свойствам функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, необходимо чтобы ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ \ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (6.4)$$

при каждом $z\in X$ сходились абсолютно.

Замечание 6.1. Для $\forall z\in X$ каждый из рядов (6.4) сходится абсолютно.

Покажем, например, абсолютную сходимость первого их этих рядов (для оставшихся двух рядов это делается аналогично). При $z=0$ ряд имеет вид $1+0+0+\ldots$ и сходится к 1. Пусть $z\neq 0$. Тогда

$$\zeta_n=\frac{z^n}{n!},\ |\zeta_n|=\frac{|z|^n}{n!},\ \sum_{n=0}^{\infty}|\zeta_n|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}.$$

Применим признак Даламбера:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{|\zeta_{n+1}|}{|\zeta_n|}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{|z|^n}{n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0.$$

Получили $D=0<1\Rightarrow$ ряд с $|\zeta_n|$ сходится $\Rightarrow$ ряд с ζ_n сходится абсолютно.

Положим, по определению, для $\forall z\in X$

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots; \qquad (6.5)$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots; \ (6.6) \quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots. \qquad (6.7)$$

В силу замечания 6.1 такое определение функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ корректно.

Из (6.6), (6.7) следует, что

$$\sin(-z)=-\sin z,\ \cos(-z)=\cos z,\ \forall z\in X \qquad (6.8)$$

(аналог свойств $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\forall x\in P$).

Укажем формулы, связывающие показательную функцию e^z и тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$.

В силу (6.6) и теоремы 4.3

$$i\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{iz^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad (6.9)$$

В силу (6.7), (6.9) и теоремы 4.2

$$\cos z+i\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\frac{iz^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

или с учётом того, что $(-1)^n=i^{2n}$

$$\cos z+i\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}+\frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]=e^{iz}.$$

Получили равенство

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,\ \forall z\in X, \qquad (6.10)$$

которое называется формулой Эйлера. В силу (6.8), (6.10)

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \qquad (6.11)$$

Из (6.10), (6.11) следуют соотношения

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad (6.12)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \qquad (6.13)$$

Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. В силу (6.10) $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$. Тогда

$$z = \rho e^{i\varphi}. \qquad (6.14)$$

Выражение (6.14) называется *показательной формой записи* (*представления*) *комплексного числа* z.

В силу (6.10) формулы (1.19), (1.22), (1.30), (1.33) принимают соответственно следующий вид:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi};$$

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Докажем *основное свойство показательной функции*:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}, \; \forall z_1, z_2 \in \mathrm{X}. \qquad (6.15)$$

Действительно, пусть $z_1, z_2 \in \mathrm{X}$; z_1, z_2 фиксированы. В силу замечания 6.1 ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}, \; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!} \qquad (6.16)$$

сходятся абсолютно. Запишем произведение рядов в форме Коши [2.2, с. 90]:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+k=n}\frac{z_1^l}{l!}\frac{z_2^k}{k!}\right). \qquad (6.17)$$

Используя бином Ньютона для комплексных чисел [2.12, с. 106]

$$(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^{n-k} z_2^k \qquad (6.18)$$

и формулу для биномиальных коэффициентов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

получаем

$$\sum_{l+k=n}\frac{z_1^l}{l!}\frac{z_2^k}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^{n-k} z_2^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^{n-k} z_2^k = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}. \qquad (6.19)$$

В силу (6.17), (6.19)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}. \qquad (6.20)$$

В силу теоремы 4.8 ряд в правой части (6.20) сходится абсолютно и

$$(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\right)\cdot\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}\right). \qquad (6.21)$$

(в целях лучшего понимания существа дела здесь использовано обозначение: $(s)\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ − сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$).

В силу (6.5)

$$(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2},\ (s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}=e^{z_1},\ (s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=e^{z_2}. \qquad (6.22)$$

Из (6.21), (6.22) следует, в силу произвольности выбора z_1, z_2 формула (6.15).

В силу (6.10), (6.15) для $\forall z = x+iy \in \mathrm{X}$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y), \qquad (6.23)$$

откуда видно, что действительная и мнимая части функции e^z имеют вид

$$u(x,y) = e^x \cos y,\ v(x,y) = e^x \sin y, \qquad (6.24)$$

кроме того,

$$\left|e^z\right| = e^x,\ \operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}.$$

В силу (6.23)

$$e^z \neq 0,\ \forall z \in \mathrm{X}, \qquad (6.25)$$

ибо $e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathrm{P}$; $\sin^2 y + \cos^2 y = 1, \forall y \in \mathrm{P}$.

С помощью формулы (6.23) можно вычислять значения показательной функции e^z для конкретных значений аргумента z (задача вычисления значения функции $f(z)$ при заданном значении аргумента z_0 предполагает, что $f(z_0)$ нужно представить в алгебраической или тригонометрической форме).

Пример 6.1. Вычислим значения функции e^z при $z = 5+2i$, $z = 3i$, $z = \frac{\pi i}{6}$:

$$e^{5+2i} = e^5 e^{2i} = e^5(\cos 2 + i\sin 2),$$

$$e^{3i} = \cos 3 + i\sin 3,$$

$$e^{\frac{\pi i}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Зная способ вычисления значений показательной функции e^z, значения тригонометрических функций $\sin z$ и $\cos z$ можно находить соответственно по формулам (6.12) и (6.13).

Пример 6.2. Вычислим значения функций $\sin z$ и $\cos z$ при $z = 2-3i$:

$$\sin(2-3i) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(2-3i)} - e^{-i(2-3i)}\right] = -\frac{i}{2}\left[e^{3+2i} - e^{-3-2i}\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[e^3 e^{2i} - e^{-3}e^{-2i}\right] = -\frac{i}{2}\left[e^3(\cos 2 + i\sin 2) - e^{-3}(\cos(-2) + i\sin(-2))\right] =$$

$$= \frac{e^3+e^{-3}}{2}\sin 2 - i\frac{e^3-e^{-3}}{2}\cos 2 = \sin 2\,\mathrm{ch}3 - i\cos 2\,\mathrm{sh}3,$$

$$\cos(2-3i) = \frac{1}{2}\left[e^{i(2-3i)} + e^{-i(2-3i)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^3(\cos 2 + i\sin 2) + e^{-3}(\cos 2 - i\sin 2)\right] =$$

$$= \frac{e^3+e^{-3}}{2}\cos 2 + i\frac{e^3-e^{-3}}{2}\sin 2 = \cos 2\,\mathrm{ch}3 + i\sin 2\,\mathrm{sh}3.$$

Получили

$$\sin(2-3i) = \sin 2\,\mathrm{ch}3 - i\cos 2\,\mathrm{sh}3,$$

$$\cos(2-3i) = \cos 2\,\mathrm{ch}3 + i\sin 2\,\mathrm{sh}3.$$

Значения функций $\sin z$ и $\cos z$ можно находить более простым способом.

Действительно, для $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{X}$ справедливы формулы

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \qquad (6.26)$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \qquad (6.27)$$

Докажем, например, формулу (6.26) (формула (6.27) доказывается аналогично). Используя (6.12), (6.13) и (6.15), получаем

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} +$$

$$+ \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \frac{1}{4i} \Big[e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} -$$

$$- e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} \Big] =$$

$$= \frac{1}{2i} \Big[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} \Big] = \sin(z_1 + z_2).$$

Собирая начало и конец записи, получаем формулу (6.26). Заменяя в формулах (6.26), (6.27) z_2 на $-z_2$ и используя (6.8), получаем для $\forall z_1, z_2 \in X$

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2, \tag{6.28}$$

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2. \tag{6.29}$$

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$ (*гиперболический синус*), $\operatorname{ch} z$ (*гиперболический косинус*), $\operatorname{th} z$ (*гиперболический тангенс*), $\operatorname{cth} z$ (*гиперболический котангенс*) *комплексного переменного* z определяются по формулам

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{6.30}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{6.31}$$

Из (6.12), (6.13) следуют формулы, выражающие тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ через гиперболические функции:

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \tag{6.32}$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz. \tag{6.33}$$

Заменяя в равенствах (6.32), (6.33) z на $-iz$ и записывая их справа- налево, имеем $-i\operatorname{sh} z = \sin(-iz)$, $\operatorname{ch} z = \cos(-iz)$, откуда с учётом (6.8) получаем формулы, выражающие гиперболические функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ через тригонометрические функции:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \tag{6.34}$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz. \tag{6.35}$$

Следовательно,

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \tag{6.36}$$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z. \tag{6.37}$$

Используя формулы (6.28), (6.29), (6.36), (6.37), получаем более простое решение примера 6.2:

$$\sin(2-3i) = \sin 2 \cos 3i - \cos 2 \sin 3i = \sin 2 \operatorname{ch} 3 - i \cos 2 \operatorname{sh} 3,$$

$$\cos(2-3i) = \cos 2 \cos 3i + \sin 2 \sin 3i = \cos 2 \operatorname{ch} 3 + i \sin 2 \operatorname{sh} 3.$$

Значения гиперболических функций комплексного переменного можно находить, используя последовательно формулы (6.34), (6.35), (6.26) – (6.29), (6.36), (6.37).

Например,

$$\operatorname{sh}(3+2i) = -i \sin[i(3+2i)] = -i \sin(-2+3i) =$$

$$= -i\,[\sin(-2)\cos 3i + \cos(-2)\sin 3i] = -i\,[-\sin 2 \operatorname{ch} 3 + i \cos 2 \operatorname{sh} 3] =$$

$$= \cos 2 \operatorname{sh} 3 + i \sin 2 \operatorname{ch} 3.$$

Получили $\operatorname{sh}(3+2i) = \cos 2 \operatorname{sh} 3 + i \sin 2 \operatorname{ch} 3$.

Исследуем функцию e^z на периодичность. Для этого нужно выяснить, существует ли комплексное число $T = T_1 + iT_2, T \neq 0 \mid \ \forall z \in X \Rightarrow$

$$e^{z+T} = e^z. \tag{6.38}$$

Умножая обе части равенства (6.38) на e^{-z} и используя формулу (6.15), получаем

$$e^T = e^0. \quad (6.39)$$

В силу (6.23)

$$e^T = e^{T_1 + iT_2} = e^{T_1}\left(\cos T_2 + i\sin T_2\right)$$

и равенство (6.39) принимает вид

$$e^{T_1}\left(\cos T_2 + i\sin T_2\right) = 1,$$

откуда получаем $\left|e^T\right| = e^{T_1} = 1$, следовательно, $T_1 = 0$; $T_2 = 0 + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. Итак, комплексное число $T = T_1 + iT_2 \neq 0$ является периодом функции e^z только в том случае, когда $T_1 = 0$, $T_2 = 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, $k \neq 0$.

Получили: любое комплексное число вида $T = 2\pi ki$, $k \in \mathrm{Z}$, $k \neq 0$, является периодом функции e^z:

$$e^{z+2\pi ki} = e^z, \ \forall z \in \mathrm{X}, \ \forall k \in \mathrm{Z}. \quad (6.40)$$

В качестве *основного периода функции* e^z берётся число $T_0 = 2\pi i$, получаемое при $k = 1$.

Из (6.40) видно, что $w = e^z$, $z \in \mathrm{X}$, является многолистной функцией.

Определение 6.1. *Областью однолистности многолистной функции* $w = f(z)$ называется область $D \subset \mathrm{X} \mid \forall z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$.

Согласно определению 6.1 областями однолистности показательной функции $w = e^z$ являются области комплексной плоскости ⓩ, которые отображение $w = f(z)$ переводит взаимно однозначно в соответствующие области комплексной переменной ⓦ.

Простейшей областью однолистности функции $w = e^z$ является прямоугольная горизонтальная полоса шириной h ($0 < h \leq 2\pi$)

$$D_h = \{z \in \mathrm{X} \mid \varphi < \operatorname{Im} z < \varphi + h\}$$

(рис. 6.1).

Действительно,

$\forall z_1, z_2 \in D_h \Rightarrow \left|\operatorname{Im}(z_1 - z_2)\right| < h \leq 2\pi \Rightarrow \arg z_1 - \arg z_2 \neq 2\pi ki$, $\forall k \in \mathrm{Z} \Rightarrow e^{z_1} \neq e^{z_2}$.

Образом полосы D_h при отображении $w = f(z)$ является угол G_h раствора h с вершиной в начале координат, стороны которого образуют с действительной осью углы φ и $\varphi + h$ [1.2, с. 84] (рис. 6.2).

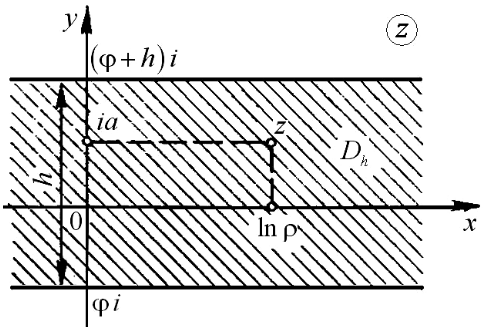

Рис. 6.1

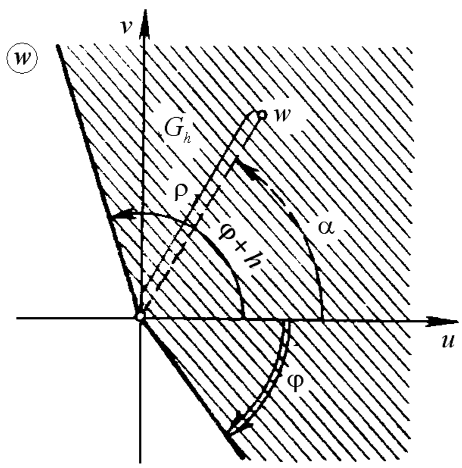

Рис. 6.2

В силу (6.12), (6.40) имеем $\forall z \in \mathrm{X}$, $\forall k \in \mathrm{Z}$, $k \neq 0$:

$$\sin(z + 2\pi k) = \frac{1}{2i}\left[e^{iz+2\pi ki} - e^{-iz-2\pi ki}\right] = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z ,$$

т.е.

$$\sin(z + 2\pi k) = \sin z .$$

Аналогично доказывается, что

$$\cos(z + 2\pi k) = \cos z .$$

Таким образом, любое число вида $T = 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, $k \neq 0$, является периодом функций $\sin z$ и $\cos z$. В качестве основного периода этих функций берётся число $T_0 = 2\pi$.

Из формул (6.12), (6.13) следует основное тригонометрическое тождество для функций комплексного переменного:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \forall z \in \mathrm{X} .$$

Из равенств (6.26), (6.27) следуют формулы приведения аргумента: $\forall z \in \mathrm{X}$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z ,\ \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z ,$$

$$\sin(z + \pi) = -\sin z ,\ \cos(z + \pi) = -\cos z .$$

По определению,

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} ,\ \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z} .$$

Заметим, что области определения функций $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{ctg}\, z$ имеют вид

$$D(\mathrm{tg}\, z) = \{z \in \mathrm{X} \mid \cos z \neq 0\},\ D(\mathrm{ctg}\, z) = \{z \in \mathrm{X} \mid \sin z \neq 0\}.$$

Уточним вид множеств $D(\mathrm{tg}\, z)$, $D(\mathrm{ctg}\, z)$.

Определение 6.2. *Нулём функции* $w = f(z)$, $z \in D$, называется значение $z_0 \in D$, при котором данная функция обращается в нуль: $f(z_0) = 0$.

Замечание 6.2. Существуют функции, у которых нет нулей.

Например, в силу (6.25), функция $w = e^z$, $z \in \mathrm{X}$, не имеет нулей.

Замечание 6.3. Множество нулей функции $\cos z$ имеет вид

$$N(\cos z) = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathrm{Z}\right\}. \tag{6.41}$$

Действительно, множество нулей функции $\cos z$ совпадает с множеством решений уравнения

$$\cos z = 0 . \tag{6.42}$$

Используя формулы (6.27), (6.36), (6.37), получаем

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x\, \mathrm{ch}\, y - i \sin x\, \mathrm{sh}\, y . \tag{6.43}$$

В силу (6.43) уравнение (6.42) равносильно системе двух уравнений

$$\cos x\, \mathrm{ch}\, y = 0 , \tag{6.44}$$

$$\sin x\, \mathrm{sh}\, y = 0 . \tag{6.45}$$

Из (6.44) вытекает, что $\cos x = 0$, ибо $\mathrm{ch}\, y = \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) \neq 0$ для $\forall y \in \mathrm{P}$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. Подставляя такие значения x в уравнение (6.45), получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \mathrm{sh}\, y = 0 .$$

Но $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=(-1)^k \neq 0$, $\forall k \in \mathrm{Z}$. Значит, $\operatorname{sh} y = 0$, т.е. $\frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right)=0$, следовательно, $y=0$. Таким образом, множество решений уравнения (6.42) имеет вид $z=\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)+i\cdot 0=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathrm{Z}$. А это означает, что справедливо соотношение (6.41).

Замечание 6.4. Множество нулей функции $\sin z$ имеет вид

$$N(\sin z)=\{\pi k,\, k\in \mathrm{Z}\}. \tag{6.46}$$

Действительно, множество нулей функции $\sin z$ совпадает с множеством решений уравнения

$$\sin z = 0. \tag{6.47}$$

В силу формулы (6.29) справедливо равенство $\sin z=\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда уравнение (6.47) принимает вид

$$\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{6.48}$$

В силу замечания 6.3 множество решений уравнения (6.48) имеет вид $z-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathrm{Z}$ или $z=\pi(m+1)$, $m\in\mathrm{Z}$, или, полагая $m+1=k$, $z=\pi k$, $k\in\mathrm{Z}$. А это означает, что справедливо соотношение (6.46).

В силу замечаний 6.3, 6.4

$$D(\operatorname{tg} z)=\left\{z\in \mathrm{X} \mid z\neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\, k\in\mathrm{Z}\right\},$$

$$D(\operatorname{ctg} z)=\{z\in\mathrm{X}\mid z\neq \pi k,\, k\in \mathrm{Z}\}.$$

В силу (6.8)

$$\operatorname{tg}(-z)=-\operatorname{tg} z,\ \operatorname{ctg}(-z)=-\operatorname{ctg} z. \tag{6.49}$$

Из (6.32), (6.33) следуют формулы, выражающие тригонометрические функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ через гиперболические функции:

$$\operatorname{tg} z=-i\operatorname{th} iz, \tag{6.50}$$

$$\operatorname{ctg} z = i\operatorname{cth} iz. \tag{6.51}$$

Заменяя в равенствах (6.50), (6.51) z на $-iz$ и учитывая соотношения (6.49), получаем формулы, выражающие гиперболические функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ через тригонометрические функции:

$$\operatorname{th} z=-i\operatorname{tg} iz,$$

$$\operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz,$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} iz = i\operatorname{th} z,$$

$$\operatorname{ctg} iz=-i\operatorname{cth} z.$$

Логарифмическая функция комплексного переменного определяется как функция, обратная показательной функции.

Определение 6.3. *Логарифмом комплексного числа* $z\in\mathrm{X}$, $z\neq 0$, называется любое комплексное число $w \mid e^w = z$.

Замечание 6.5. Условие $z\neq 0$ в определении 6.3 указывается в связи с тем, что в силу (6.25) значение $z=0$ не принадлежит области значений показательной функции, поэтому логарифм числа $z=0$ не существует.

Замечание 6.6. Число $w_0=\ln\rho+i\varphi$ является логарифмом комплексного числа $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (здесь $\rho=|z|,\ \varphi=\arg z$).

Действительно, применяя формулу (6.23), получаем

$$e^{w_0}=e^{\ln\rho+i\varphi}=e^{\ln\rho}(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z. \tag{6.52}$$

Число $w_0=\ln\rho+i\varphi$ называется *главным значением логарифма* комплексного числа z и обозначается $\ln z$:

$$\ln z=\ln\rho+i\varphi$$

или в других обозначениях

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z\,. \qquad (6.53)$$

Замечание 6.7. Любое число вида $w_k = w_0 + 2\pi ki$, $k \in \mathrm{Z}$, является логарифмом комплексного числа z.

Действительно, в силу (6.40) (6.52)

$$e^{w_k} = e^{w_0 + 2\pi ki} = e^{w_0} = z\,.$$

Замечание 6.8. Если w_1, w_2 − логарифмы комплексного числа z, то $w_1 - w_2 = 2\pi ki$, где $k \in \mathrm{Z}$.

Действительно, по определению логарифма $e^{w_1} = z$, $e^{w_2} = z$. Следовательно,

$$e^{w_1} = e^{w_2}\,. \qquad (6.54)$$

Умножая обе части равенства (6.54) на e^{-w_2} и используя формулу (6.15), получаем

$$e^{w_1 - w_2} = e^0\,. \qquad (6.55)$$

Пусть $w_1 = a_1 + ib_1$, $w_2 = a_2 + ib_2$. Тогда $w_1 - w_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$ и в силу (6.23)

$$e^{w_1 - w_2} = e^{(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)} = e^{a_1 - a_2}\left[\cos(b_1 - b_2) + i\sin(b_1 - b_2)\right].$$

Равенство (6.55) принимает вид

$$e^{a_1 - a_2}\left[\cos(b_1 - b_2) + i\sin(b_1 - b_2)\right] = 1\,,$$

откуда получаем $e^{a_1 - a_2} = 1$, следовательно $a_1 - a_2 = 0$; $b_1 - b_2 = \; = 0 + 2\pi k = 2\pi k$, где $k \in \mathrm{Z}$. Значит, $w_1 - w_2 = 0 + i2\pi k = 2\pi ki$, $k \in \mathrm{Z}$.

В силу замечаний 6.6 – 6.8 множество всех логарифмов данного комплексного числа z задаётся формулой

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2\pi ki\,, k \in \mathrm{Z}\,,$$

или, в силу (6.53)

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)\,, k \in \mathrm{Z}\,, \qquad (6.56)$$

или, в силу равенства $\arg z + 2\pi k = \mathrm{Arg}\, z$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z\,. \qquad (6.57)$$

Определение 6.4. *Логарифмической функцией комплексного переменного* z называется функция, определённая на множестве $D = \mathrm{X} \setminus \{0\}$ по формуле (6.56).

Из определения 6.4 видно, что логарифмическая функция является многозначной, точнее, бесконечнозначной функцией, ибо каждому $z \in D$ соответствует бесконечное множество значений $w_k = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$, $k \in \mathrm{Z}$, при этом действительные части этих значений одинаковы, а их мнимые части отличаются между собой на слагаемые, кратные 2π.

При каждом фиксированном $k \in \mathrm{Z}$ функция вида

$$(\mathrm{Ln}\, z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)\,, k \in \mathrm{Z} \qquad (6.58)$$

является однозначной функцией, ибо аргумент $\varphi \in (-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$ комплексного переменного z при фиксированном k определяется однозначно. Каждая из функций вида (6.58) называется *стандартной ветвью логарифмической функции*. Таким образом, логарифмическая функция имеет бесконечное число стандартных ветвей $(\mathrm{Ln}\, z)_k$, $k \in \mathrm{Z}$.

Определение 6.5. *Главной ветвью* (или *главным значением*) *логарифмической функции* $\mathrm{Ln}\, z$ называется её стандартная ветвь при $k = 0$:

$$(\mathrm{Ln}\, z)_0 = \ln|z| + i\arg z\,.$$

Из (6.53) видно, что главная ветвь логарифмической функции $\mathrm{Ln}\, z$ совпадает с главным значением логарифма комплексного переменного z: $(\mathrm{Ln}\, z)_0 = \ln z$, т.е. в качестве главной ветви логарифмической функции $\mathrm{Ln}\, z$ выступает функция

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z\,.$$

Таким образом, главное значение логарифмической функции $\mathrm{Ln}\, z$ получается из выражения для этой функции при $k = 0$, т.е. отвечает выбору главного значения аргумента комплексного переменного z.

Замечание 6.9. Значение функции $\ln z$ при $z = x$, где $x \in \mathrm{P}$, $x > 0$, является действительным числом и совпадает с натуральным логарифмом этого числа: $\ln z\,|_{z=x} = \ln x$.

Например,

$$\text{Ln}\, z\,|_{z=7} = \ln 7 + i(0 + 2\pi k) = \ln 7 + 2\pi k i\,,\ k \in \mathrm{Z}\,;\ \ln z\,|_{z=7} = \ln 7\,.$$

Пример 6.3. Вычислим значения функций $\text{Ln}\, z$ и $\ln z$ при $z = 3 + 4i$, $z = -2i$, $z = -4$:

$$\text{Ln}\,(3+4i) = \ln 5 + i\left(\text{arctg}\,\frac{4}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathrm{Z}\,;$$

$$\ln(3+4i) = \ln 5 + i\,\text{arctg}\,\frac{4}{3}\,;$$

$$\text{Ln}\,(-2i) = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathrm{Z}\,;$$

$$\ln(-2i) = \ln 2 - i\,\frac{\pi}{2}\,;$$

$$\text{Ln}\,(-4) = \ln 4 + i\,(\pi + 2\pi k)\,, k \in \mathrm{Z}\,;$$

$$\ln(-4) = \ln 4 + i\,\pi\,.$$

Для $\forall z_1, z_2 \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$ справедливы равенства

$$\text{Ln}\,(z_1 z_2) = \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2\,, \tag{6.59}$$

$$\text{Ln}\,\frac{z_1}{z_2} = \text{Ln}\, z_1 - \text{Ln}\, z_2\,. \tag{6.60}$$

Действительно, по определению

$$\text{Ln}\, z_1 = \ln|z_1| + i(\arg z_1 + 2\pi p),\ \ p \in \mathrm{Z}\,;$$

$$\text{Ln}\, z_2 = \ln|z_2| + i(\arg z_2 + 2\pi q),\ \ q \in \mathrm{Z}\,.$$

Тогда

$$\text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2 = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi(p+q));\ \ p, q \in \mathrm{Z}\,. \tag{6.61}$$

Учитывая замечание 6.9 а также свойство $\ln b_1 + \ln b_2 = \ln(b_1 b_2)$ натуральных логарифмов и равенство (1.20), получаем $\ln|z_1| + \ln|z_2| = \ln|z_1 z_2|$. Заметим, что когда величины p и q изменяются на множестве Z, множество всех значений величины $k = p + q$ совпадает со множеством Z. Тогда формулу (6.61) можно записать в виде

$$\text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2 = \ln|z_1 z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k),\ \ k \in \mathrm{Z}\,.$$

Или в силу (1.21)

$$\text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2 = \ln|z_1 z_2| + i\,\text{Arg}(z_1 z_2)\,. \tag{6.62}$$

В силу (6.57)

$$\ln|z_1 z_2| + i\,\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Ln}\,(z_1 z_2)\,. \tag{6.63}$$

Из (6.62), (6.63) следует формула (6.59).

Аналогично доказывается равенство (6.60), при этом используются свойство $\ln b_1 - \ln b_2 = \ln\dfrac{b_1}{b_2}$ натуральных логарифмов и формулы (1.23), (1.24).

Из (6.59) вытекает формула

$$\text{Ln}\, z^m = m\text{Ln}\, z\,,\ \forall m \in \mathrm{N}\,. \tag{6.64}$$

Определение 6.6. *Общей показательной функцией* с основанием $a \in \mathrm{X}$, $a \neq 0$, называется функция, определённая на множестве X по формуле

$$a^z = e^{z\,\text{Ln}\, a}\,. \tag{6.65}$$

Используя определение логарифма комплексного числа, формулу (6.65) можно записать в виде

$$a^z = e^{z\left[\ln|a| + i(\arg a + 2\pi k)\right]},\ k \in \mathrm{Z}. \tag{6.66}$$

Из (6.66) видно, что общая показательная функция является бесконечнозначной функцией.

Определение 6.7. *Главной ветвью* (или *главным значением*) общей *показательной функции* называется функция, определённая на множестве X по формуле

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

Главная ветвь функции a^z является однозначной функцией, она получается из выражения для общей показательной функции при $k = 0$, т.е. отвечает выбору главного значения логарифма комплексного числа *a*.

Пример 6.4. Вычислим значение функции $\left(1+\sqrt{3}i\right)^z$, при $z = 2+2i$:

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2+2i} = e^{(2+2i)\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{3}i\right)} = e^{(2+2i)\left[\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\right]} =$$

$$= e^{2\ln 2 - 2\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right) + i\left(2\ln 2 + \frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right)} =$$

$$= e^{2\ln 2} e^{-2\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}\left[\cos\left(2\ln 2 + \frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right) + i\sin\left(2\ln 2 + \frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right)\right] =$$

$$= 4e^{-2\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}\left[\cos\left(2\ln 2 + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\ln 2 + \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Получили

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2+2i} =$$

$$= 4e^{-2\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}\left[\cos\left(2\ln 2 + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\ln 2 + \frac{2\pi}{3}\right)\right],\ k \in \mathrm{Z}. \tag{6.67}$$

Главное значение функции $\left(1+\sqrt{3}i\right)^z$ при $z = 2+2i$ равно комплексному числу

$$4e^{-\frac{2\pi}{3}}\left[\cos\left(2\ln 2 + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\ln 2 + \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Определение 6.8. *Целой степенной функцией* с показателем степени $n \in \mathrm{N}$ называется функция, определённая на множестве X по формуле

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ \text{раз}}.$$

Функция z^n является однозначной функцией, её значения можно вычислять по формуле Муавра (см. (1.30)). Функция z^n непрерывна на X как натуральная степень непрерывной на X функции $w = z$ (функция $w = z$ непрерывна в любой точке $z_0 \in \mathrm{X}$ согласно определению 5.12, ибо $\Delta w = w(z_0 + \Delta z) - w(z_0) = z_0 + \Delta z - z_0 = \Delta z$ и $\Delta w \to 0$, при $\Delta z \to 0$).

Определение 6.9. *Общей степенной функцией* с показателем степени $a \in \mathrm{X}$ называется функция, определённая на множестве $\mathrm{X} \setminus \{0\}$ формулой

$$z^a = e^{a \mathrm{Ln}\, z}. \tag{6.68}$$

Учитывая (6.56), формулу (6.68) можно записать в виде

$$z^a = e^{a\left[\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)\right]}, k \in \mathrm{Z}. \tag{6.69}$$

Из (6.69) видно, что общая степенная функция является бесконечнозначной функцией.

Например, значение функции z^{2+2i} при $z = 1+\sqrt{3}i$ выражается формулой (6.67).

Функции $w = \mathrm{Arcsin}\, z$, $w = \mathrm{Arccos}\, z$, $w = \mathrm{Arctg}\, z$, $w = \mathrm{Arcctg}\, z$ определяются как функции, обратные соответствующим тригонометрическим функциям $z = \sin w$, $z = \cos w$, $z = \mathrm{tg}\, w$, $z = \mathrm{ctg}\, w$.

Определим, например, функцию $w = \mathrm{Arcsin}\, z$ как функцию, обратную функции $z = \sin w$.

Определение 6.10. *Арксинусом комплексного числа* $z \in \mathrm{X}$ называется любое комплексное число $w \mid \sin w = z$.

Чтобы найти множество всех арксинусов данного комплексного числа z, нужно решить уравнение

$$\sin w = z,$$

которое в силу (6.12) можно записать в виде

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z .$$

Полагая $e^{iw} = t$, получаем

$$\frac{t - t^{-1}}{2i} = z$$

или

$$t^2 - 2izt - 1 = 0,$$

$$t = iz + \sqrt{-z^2 + 1} .$$

Итак,

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2} . \tag{6.70}$$

Заметим, что для $\forall z \in \mathrm{X}$ правая часть равенства (6.70) отлична от нуля (действительно, : $iz + \sqrt{1 - z^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - z^2} = -iz \Rightarrow 1 - z^2 = -z^2 \Rightarrow$
$1 = 0$ − неверно.).

Соотношение (6.70) означает, что $iw = \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$, откуда

$$w = \frac{1}{i} \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Таким образом, множество всех арксинусов данного комплексного числа z задаётся формулой

$$\mathrm{Arcsin}\, z = \frac{1}{i} \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right). \tag{6.71}$$

Замечание 6.10. В формуле (6.71) для корня берутся оба его значения, ибо функция $\sqrt{z}$ является двузначной (см. пример 5.2).

Формула (6.71) задаёт функцию $w = \mathrm{Arcsin}\, z$, $z \in \mathrm{X}$, обратную тригонометрической функции $z = \sin w$.

Пример 6.5. Вычислим значение функции $\mathrm{Arcsin}\, z$ при $z = i$:

$$\mathrm{Arcsin}\, i = \frac{1}{i} \mathrm{Ln}\left(i^2 + \sqrt{1 - i^2} \right) = \frac{1}{i} \mathrm{Ln}\left(-1 \pm \sqrt{2} \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{i} \mathrm{Ln}\left(-1 + \sqrt{2} \right) \\ \frac{1}{i} \mathrm{Ln}\left(-1 - \sqrt{2} \right) \end{array} \right. = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{i} \left[\ln\left(\sqrt{2} - 1 \right) + i\left(0 + 2\pi k \right) \right], k \in \mathrm{Z}, \\ \frac{1}{i} \left[\ln\left(\sqrt{2} + 1 \right) + i\left(\pi + 2\pi k \right) \right], k \in \mathrm{Z}, \end{array} \right. =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 2\pi k - i \ln\left(\sqrt{2} - 1 \right), k \in \mathrm{Z}, \\ \pi\left(2k + 1 \right) - i \ln\left(\sqrt{2} + 1 \right), k \in \mathrm{Z}. \end{array} \right.$$

Получили

$$\mathrm{Arcsin}\, i = \left[\begin{array}{l} 2\pi k - i \ln\left(\sqrt{2} - 1 \right), k \in \mathrm{Z}, \\ \pi\left(2k + 1 \right) - i \ln\left(\sqrt{2} + 1 \right), k \in \mathrm{Z}. \end{array} \right.$$

Аналогично формуле (6.71) получаются формулы, выражающие остальные обратные тригонометрические функции комплексного переменного через логарифмическую функцию:

$$\mathrm{Arccos}\, z = \frac{1}{i} \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), z \in \mathrm{X}; \tag{6.72}$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}\,,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{i,-i\}; \qquad (6.73)$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i}\,,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{i,-i\}. \qquad (6.74)$$

Из формул (6.71) – (6.74) видно, что $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ являются бесконечнозначными функциями, ибо они выражаются через бесконечнозначную логарифмическую функцию.

Введённые выше функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, $\operatorname{Ln} z$, a^z, z^a, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ называются *основными элементарными функциями комплексного переменного*.

Непрерывность основных элементарных функций (для многозначных функций − их однозначных ветвей) можно проверять с помощью признака непрерывности функций комплексного переменного (см. теорему 5.8 и следствие 5.3) и основной теоремы о непрерывных функциях комплексного переменного (см. теорему 5.9 и следствие 5.4).

Пример 6.6. Функция $w = \sin z$ непрерывна на $\mathbb{C}$.

Действительно, пусть $z = x + iy$, $w = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда, используя формулы (6.26), (6.36), (6.37), получаем

$$u(x, y) + iv(x, y) = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y\,,$$

откуда $u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$, $v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$, следовательно, функция $\sin z$ непрерывна на $\mathbb{C}$.

Пример 6.7. Функция $w = \cos z$ непрерывна на $\mathbb{C}$, ибо её действительная часть $u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ и мнимая часть $v(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$ (вид $u(x, y)$ и $v(x, y)$ получен из (6.43)).

Пример 6.8. Функции $w = \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ и $w = \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ непрерывны соответственно на $D(\operatorname{tg} z)$ и $D(\operatorname{ctg} z)$ как отношение двух непрерывных на этих множествах функций.

Элементарными функциями комплексного переменного называются функции, полученные из основных элементарных функций комплексного переменного с помощью конечного числа алгебраических операций и конечного числа операций взятия функции от функции (конечного числа суперпозиций).

Приведём несколько примеров элементарных функций комплексного переменного, используемых в различных приложениях.

Пример 6.9. *Целая рациональная функция* $::=$ функция вида $w = P_n(z)$, где $P_n(z)$ − многочлен степени n комплексного переменного z:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n\,;$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ (числа a_i, $0 \le i \le n$, называются коэффициентами многочлена $P_n(z)$). Отметим, что $D(w) = \mathbb{C}$.

Целая рациональная функция непрерывна на множестве $\mathbb{C}$ как линейная комбинация непрерывных на этом множестве целых степенных функций (см. следствие 5.5).

Замечание 6.11. Часть слагаемых в выражении для многочлена может отсутствовать. Это означает, что коэффициенты при соответствующих степенях z равны нулю.

Частным случаем целой рациональной функции является *линейная функция* $w = a_0 z + a_1$, $a_0 \neq 0$.

Пример 6.10. *Дробно-рациональная функция* $::=$ функция вида $w = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$, $Q_m(z)$ − многочлены степени n и m соответственно. Заметим, что $D(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid Q_m(z) \neq 0\}$.

Дробно-рациональная функция непрерывна на своей области определения как отношение двух непрерывных на этой области целых рациональных функций (см. следствие 5.4).

Частным случаем дробно-рациональной функции является *дробно-линейная функция*

$$w = \frac{a_0 z + a_1}{b_0 z + b_1}\,,\ b_0 \neq 0\,.$$

Замечание 6.12. Дробно-рациональную функцию называют также рациональной функцией.

7. НЕКОТОРЫЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Непрерывная кривая; ориентация кривой; ориентированная кривая; точки самопересечения кривой; простая кривая; замкнутая простая кривая; положительно ориентированная замкнутая простая кривая; отрицательно ориентированная замкнутая простая кривая; внутренние и граничные точки множества; граница множества; внешние точки множества; внешность множества; открытые и замкнутые множества; связное множество; область; ограниченное множество; теорема Жордана; внутренность и внешность замкнутой простой кривой; односвязная область; многосвязная область, её внешняя и внутренняя границы.

При введении понятия функции комплексного переменного в качестве её области определения рассматривалось произвольное множество D точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В различных конкретных вопросах в качестве D приходится брать множества специального вида. Например, при определении интеграла функции комплексного переменного в качестве

D рассматривается кривая (путь интегрирования); при изучении свойств аналитических функций в качестве D выступает односвязная или многосвязная область. Введём соответствующие определения.

Определение 7.1. *Непрерывной кривой* (*линией* или *дугой*) γ называется геометрическое место точек z комплексной плоскости X, изображающих все значения непрерывной комплексной функции

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \tag{7.1}$$

вещественной переменной $t \in [\alpha, \beta]$, при этом, переменная t называется *параметром*, соотношение (7.1) – *параметрическим уравнением кривой* γ.

Замечание 7.1. В силу следствия 5.3 непрерывность функции (7.1) на множестве $[\alpha, \beta]$ означает, что вещественные функции $x(t)$, $y(t)$ вещественной переменной t непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$.

В дальнейшем в целях краткости непрерывную кривую будем называть кривой.

При изменении параметра t в возрастающем порядке (от α к β) точка $z(t)$ совершает обход кривой γ от точки $z_0 = z(\alpha)$ до точки $z_* = z(\beta)$, при этом точки z_0 и z_* называются соответственно *начальной* и *конечной точками* (*началом* и *концом*) кривой γ.

При изменении параметра t в убывающем порядке (от β к α) точка $z(t)$ совершает обход кривой γ от точки z_* до точки z_0.

Таким образом, возможны два варианта направления обхода кривой γ. Выбор определённого направления обхода кривой γ называется *ориентацией кривой* γ, а кривая с выбранной ориентацией называется *ориентированной кривой* или *контуром*. Ориентированную кривую с направлением обхода от z_0 к z_* будем обозначать тем же символом γ, что и саму кривую, а ориентированную кривую с направлением обхода от z_* к z_0 символом $\bar{\gamma}$ (рис. 7.1).

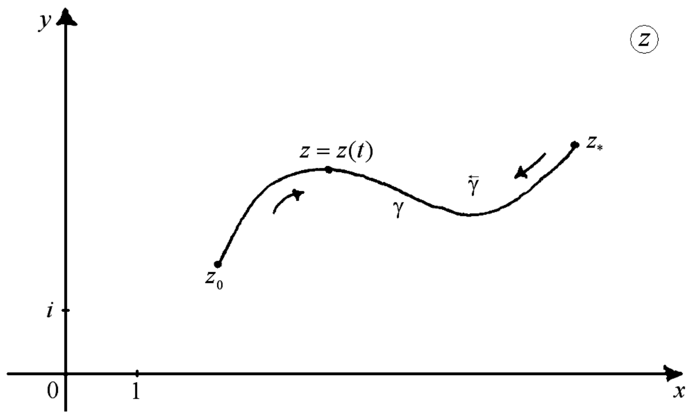

Рис. 7.1

Определение 7.2. *Точкой самопересечения* (или *кратной точкой*) *кривой* γ называется точка этой кривой, соответствующая двум или более различным значениям параметра t, из которых, по крайней мере, одно отлично от α и от β (рис. 7.2, 7.3).

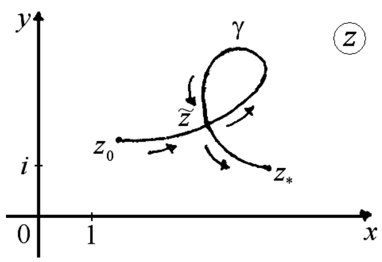

Рис. 7.2

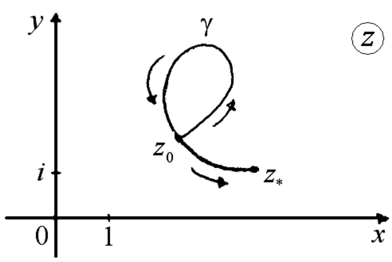

Рис. 7.3

Точкой самопересечения кривой γ является на рис. 7.2 точка $\tilde{z}$, на рис. 7.3 – точка z_0.

Согласно определению 7.2, точка $\tilde{z} \in \gamma$ является точкой самопересечения кривой γ, если $\exists t_1,\ t_2 \in [\alpha, \beta],\ t_1 \neq t_2$, хотя бы одно из t_1, t_2 отлично от α и от $\beta \mid z(t_1) = z(t_2) = \tilde{z}$.

Определение 7.3. *Простой* (или *жордановой*) кривой называется кривая, не имеющая точек самопересечения.

Например, кривая γ, изображенная на рис. 7.1, является простой.

Определение 7.4. *Замкнутой простой кривой* (или *замкнутым простым контуром*) называется простая кривая начальная и конечная точки которой совпадают (рис. 7.4).

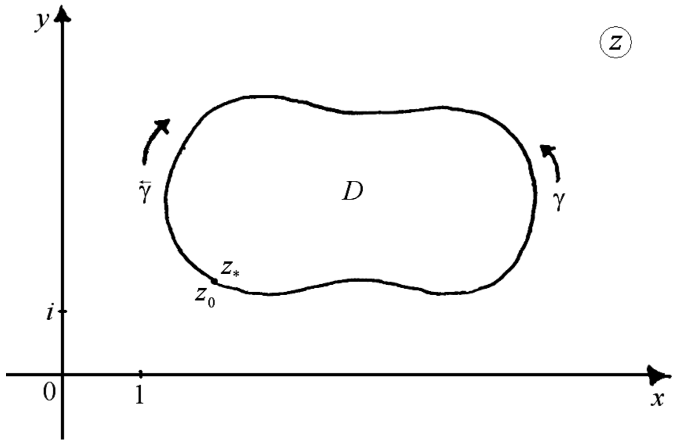

Рис. 7.4

Из рисунка 7.4 видно, что возможны следующие направления обхода замкнутой простой кривой γ :

а) обход кривой γ из z_0 в точку z_* таким образом, что множество D, ограниченное этой кривой, остается слева (обход против движения (хода) часовой стрелки или, более кратко, обход против часовой стрелки); такой обход называется *положительным обходом замкнутой простой кривой* γ ; кривая γ с положительным направлением обхода называется *положительно ориентированной замкнутой простой кривой* (или *положительно ориентированным замкнутым простым контуром*) и обозначается тем же символом γ , что и сама кривая;

б) обход кривой γ из z_0 в точку z_* таким образом, что указанное множество D, остается справа (обход по движению (ходу) часовой стрелки или, более кратко, обход по часовой стрелке); такой обход называется *отрицательным обходом замкнутой простой кривой* γ ; кривая γ с отрицательным направлением обхода называется *отрицательно ориентированной замкнутой простой кривой* (или *отрицательно ориентированным замкнутым простым контуром*) и обозначается символом $\bar{\gamma}$ (см. рис. 7.4).

Рассмотрим некоторое множество D на комплексной плоскости X .

Определение 7.5. *Точка* $z_0 \in D$ называется *внутренней точкой множества*, если

$$\exists O_\delta(z_0) \subset D .$$

Определение 7.6. *Точка* $z_0 \in \mathrm{X}$ называется *граничной точкой множества* D, если $\forall O_\delta(z_0)$

$$\exists\, z_1 \in O_\delta(z_0) \,|\, z_1 \in D \text{ и } \exists\, z_2 \in O_\delta(z_0) \,|\, z_2 \overline{\in} D .$$

Определение 7.7. *Границей множества* D называется совокупность всех граничных точек этого множества (обозначение: Γ_D или Γ).

Определение 7.8. *Точка* $z_0 \in \mathrm{X} \setminus D$ называется *внешней точкой множества* D, если $\exists O_\delta(z_0) \,|\, O_\delta(z_0) \cap D = \varnothing$.

Определение 7.9. *Внешностью множества* D называется совокупность всех внешних точек этого множества (обозначение: E_D (E – начальная буква английского слова exterior – внешность)).

Определение 7.10. *Множество* D называется *открытым,* если каждая точка $z \in D$ является внутренней точкой множества D, т.е. $\forall\, z \in D \ \ \exists O_\delta(z),\ \delta = \delta(z) \,|\, O_\delta(z) \subset D$.

Пример 7.1. Пусть $D = O_R(z_0) = \{z \in \mathrm{X} : |z - z_0| < R\}$ – открытый круг с центром в точке z_0 радиуса R (рис. 7.5).

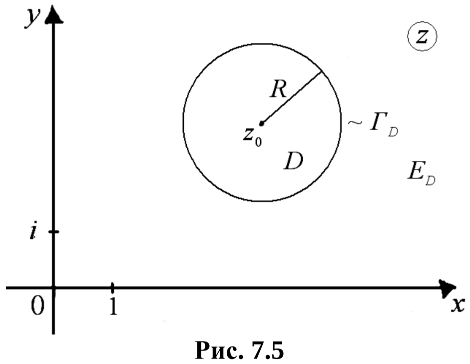

Рис. 7.5

Множество D является открытым, для него $\Gamma_D = \{z \in \mathrm{X} : |z - z_0| = R\}$ – окружность с центром в точке z_0 радиуса R , $E_D = \{z \in \mathrm{X} : |z - z_0| > R\}$ – внешность замкнутого круга $\overline{O}_R(z_0) = \ = \{z \in \mathrm{X} : |z - z_0| \le R\}$.

Определение 7.11. *Множество* D называется *замкнутым,* если оно содержит все свои предельные точки.

Пример 7.2. Множество $D_1 = \overline{O}_R(z_0)$ является замкнутым, для него $\Gamma_{D_1} = S_R(z_0)$, $E_{D_1} = \mathrm{X} \setminus \overline{O}_R(z_0)$.

Замечание 7.2. Из примеров 7.1, 7.2 видно, что два различных множества могут иметь одинаковую границу и одинаковую внешность.

Определение 7.12. *Множество* D называется *связным*, если любые две точки $z_1, z_2 \in D$ можно соединить ломаной, расположенной в D (в частности, ломаная может состоять из одного отрезка).

Определение 7.13. *Множество* D называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение 7.14. *Множество* D называется *ограниченным*, если $\exists \overline{O}_R(0) \mid D \subset \overline{O}_R(0)$, т.е. $\exists R > 0 \mid \forall z \in D \Rightarrow |z| \le R$.

Определение 7.15. *Множество* D называется *неограниченным*, если для $\forall \overline{O}_R(0)$ $\exists z \in D \mid z \overline{\in} \overline{O}_R(0)$, т.е. если для $\forall R > 0$ $\exists z \in D$: $|z| > R$.

В курсах топологии доказывается следующее утверждение.

Теорема Жордана. Каждая замкнутая простая кривая Γ делит комплексную плоскость X на две различные области D и G, общей границей которых она является. При этом одна из этих областей ограничена, другая не ограничена (рис. 7.6).

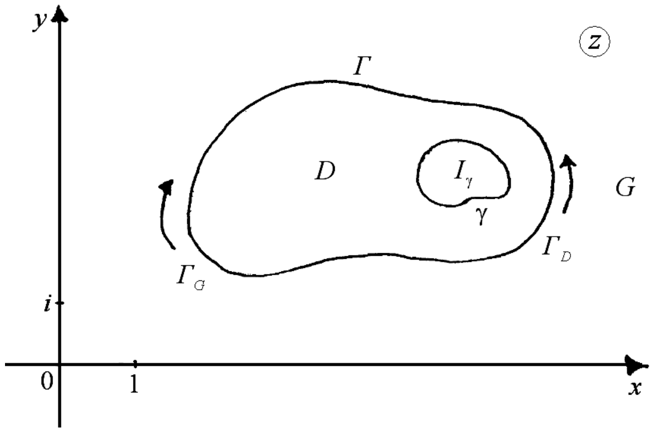

Рис. 7.6

На рисунке 7.6 D – ограниченная область, G – неограниченная область.

Области D и G называются соответственно *внутренностью* и *внешностью замкнутой простой кривой* Γ и обозначаются I_Γ и E_Γ (I – начальная буква английского слова interior – внутренность).

Если некоторая точка z_0 принадлежит I_Γ, то будем говорить, что *замкнутая простая кривая* Γ *охватывает* (*окаймляет*, *окружает*) *точку* z_0.

Заметим, что внешность границы Γ_D области D совпадает с внешностью области D: $E_{\Gamma_D} = E_D$.

Положительная ориентированность границ Γ_D и Γ_G означает, что их обход совершается соответственно против движения и по движению часовой стрелки (см. рис. 7.6).

Определение 7.16. Множество, состоящее из области D и её границы Γ_D, называется *замкнутой областью* (обозначение: $\overline{D}$; по определению, $\overline{D} = D \cup \Gamma_D$).

Заметим, что замкнутая область $\overline{D}$ не является областью в смысле определения 7.13, ибо $\overline{D}$ не является открытым множеством (каждая точка множества $\overline{D}$, принадлежащая Γ_D, не является внутренней точкой множества $\overline{D}$).

Замкнутая область $\overline{D}$ является замкнутым множеством.

Определение 7.17. Область D называется *односвязной*, если для любой замкнутой простой кривой γ, расположенной в D, внутренность кривой γ расположена в D: для $\forall \gamma \subset D \Rightarrow I_\gamma \subset D$.

На рисунке 7.6 область D является односвязной; область G не является односвязной; область G не является односвязной, ибо можно указать замкнутую простую кривую $\tilde{\gamma}$, расположенную в G, внутренность которой $I_{\tilde{\gamma}}$ не входит в G (в качестве $\tilde{\gamma}$ можно взять любую замкнутую простую кривую, расположенную в G, внутренность которой содержит кривую Γ).

Определение 7.18. Область D называется *n-связной* ($n \in \mathrm{N}$, $n \ge 2$), если её граница имеет вид

$$\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_{n-1},$$

где Γ_i, ($0 \le i \le n-1$) – замкнутые простые кривые, такие что

а) $\Gamma_i \subset I_{\Gamma_0}$, $\forall 1 \le i \le n-1$;

б) $\forall\ 1 \le i \le n-1 \Rightarrow \Gamma_i \subset E_{\Gamma_j}$, $\forall\ 1 \le j \le n-1,\ j \ne i$,

при этом кривая Γ_0 называется *внешней границей,* а объединение $\bigcup_{i=1}^{n-1} \Gamma_i$ – *внутренней границей n-связной области* D (рис. 7.7).

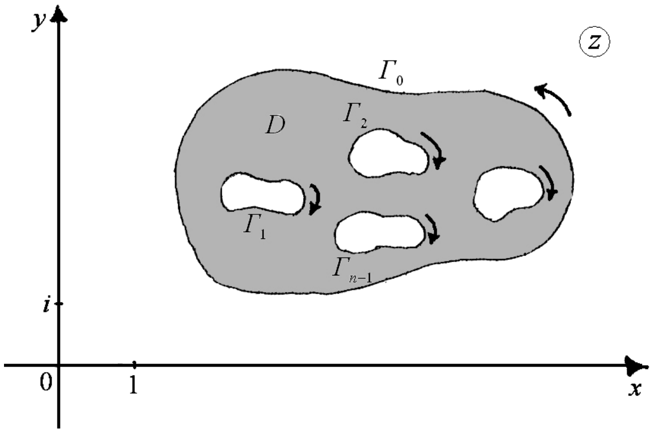

Рис. 7.7

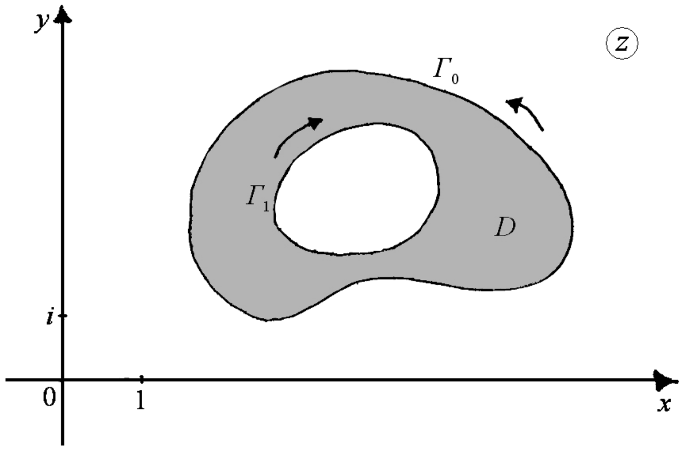

Рис. 7.8

Положительная ориентированность границы Γ_D *n*-связной области D означает, что обход её внешней границы совершается против движения часовой стрелки, а обход кривых, составляющих её внутреннюю границу – по движению часовой стрелки (см. рис. 7.7).

Граница Γ_D *n*-связной области D называется *составным контуром*.

Простейшим примером *n*-связной области является *двусвязная область* (рис. 7.8).

n-связную область также называют *многосвязной областью*.

8. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Производная функции в точке; производная функции; дифференцируемость функции в точке, дифференциал функции в точке; дифференцируемость функции на множестве; связь между дифференцируемостью и существованием производной функции в точке; необходимое условие дифференцируемости функции в точке; признак дифференцируемости функции в точке и на множестве; условия Коши-Римана; основная теорема о производных функций комплексного переменного; правило дифференцирования сложной функции; правило дифференцирования обратной функции.

Пусть дана однозначная функция $w = f(z)$, $z \in D$ и z_0 – внутренняя точка множества D, т.е. $\exists O_\delta(z_0) \mid O_\delta(z_0) \subset D$.

Придадим z_0 приращение Δz, т.е. рассмотрим точку $z_0 + \Delta z$ (модуль приращения Δz должен быть достаточно малым, а именно, таким, чтобы $z_0 + \Delta z \in O_\delta(z_0)$). Тогда функция $w = f(z)$ получит приращение $\Delta w(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$.

Определение 8.1. *Производной функции* $w = f(z)$ в *точке* z_0 называется конечный предел отношения приращения этой функции в данной точке к приращению независимого переменного при стремлении приращения независимого переменного к нулю, если такой предел существует.

Для обозначения производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 можно использовать любой из символов:

$$f'(z_0),\ w'(z_0),\ \frac{df(z_0)}{dz},\ \frac{dw(z_0)}{dz},\ \left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0},\ \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}.$$

Итак, по определению,

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \qquad (8.1)$$

Если окажется, что

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\infty,$$

то говорят, что функция $f(z)$ имеет *бесконечную производную в точке* z_0.

Пусть функция $w=f(z)$ имеет производную в каждой точке некоторого множества $D_1\subseteq D$. Тогда каждому $z\in D_1$ можно поставить в соответствие производную $f'(z)$ функции $f(z)$ во взятой точке z. Тем самым на множестве D_1 задана функция $w'=f'(z)$, называемая *производной функции* $w=f(z)$. Производную $w'=f'(z)$ обозначают также символом $\frac{dw}{dz}$.

Пример 8.1. Найдём производную функции $f(z)=z$, $z\in \mathrm{X}$. Используя определение 8.1 и соотношение (5.33), получаем

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z+\Delta z-z}{\Delta z}\lim_{\Delta z\to 0}1=1.$$

Итак,

$$(z)'=1. \qquad (8.2)$$

Пример 8.2. Найдём производную целой степенной функции $f(z)=z^n$, $z\in \mathrm{X}$, $n\in \mathrm{N}$, при $n\ge 2$. Используя бином Ньютона (см. (6.18)) и следствие 5.2, получаем

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\\&=\lim_{\Delta z\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta z}\left[z^n+C_n^1z^{n-1}\Delta z+C_n^2z^{n-2}(\Delta z)^2+\ldots\right.\right.\\&\qquad\left.\left.\ldots+C_n^{n-1}z(\Delta z)^{n-1}+C_n^n(\Delta z)^n-z^n\right]\right\}=\\&=\lim_{\Delta z\to 0}\left[nz^{n-1}+C_n^2z^{n-2}\Delta z+\ldots+C_n^{n-1}z(\Delta z)^{n-2}+(\Delta z)^{n-1}\right]=nz^{n-1}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\left(z^n\right)'=nz^{n-1}. \qquad (8.3)$$

Пусть функция $w=f(z)$ непрерывна в точке z_0. Тогда в силу (5.37) приращение Δw функции $w=f(z)$ в точке z_0 является б.м.в. при $\Delta z\to 0$. В некоторых вопросах необходима более подробная информация о природе б.м.в. Δw при $\Delta z\to 0$. В связи с этим вводится понятие дифференцируемости функции в точке.

Определение 8.2. *Функция* $w=f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0, если приращение Δw этой функции в данной точке, отвечающее приращению Δz независимого переменного z, представимо в виде

$$\Delta w=A\Delta z+o(\Delta z), \qquad (8.4)$$

где *A* – некоторая комплексная константа, не зависящая от Δz; $o(\Delta z)$– б.м.в. высшего порядка по сравнению с Δz при $\Delta z\to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{o(\Delta z)}{\Delta z}=0,$$

при этом выражение $A\Delta z$ называется *дифференциалом функции* $w=f(z)$ *в точке* z_0 и обозначается символом $dw(z_0)$ (или $df(z_0)$):

$$dw(z_0) = A\Delta z\ . \qquad (8.5)$$

Определение 8.3. *Функция* $w = f(z)$, $z \in D$, называется *дифференцируемой на множестве* $D_1 \subseteq D$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием конечной производной этой функции в данной точке устанавливается следующим утверждением.

Теорема 8.1. Дифференцируемость функции $w = f(z)$ в точке z_0, т.е. справедливость равенства (8.4) равносильна существованию конечной производной $f'(z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0, при этом $A = f'(z_0)$.

Теорема 8.1 доказывается точно так же, как соответствующее утверждение для вещественной функции вещественной переменной [2.7, с. 31], при этом используется теорема 5.3.

В силу теоремы 8.1 определение дифференцируемости функции в точке можно сформулировать в следующем виде.

Определение 8.4. *Функция* $w = f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0, если она имеет конечную производную в этой точке.

В силу равенства $A = f'(z_0)$ соотношения (8.4), (8.5) можно записать соответственно в виде

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z),$$

$$dw(z_0) = f'(z_0)\Delta z\ . \qquad (8.6)$$

Учитывая, что $dz = \Delta z$, формулу (8.6) можно записать в виде

$$dw(z_0) = f'(z_0)dz\ .$$

Укажем *необходимое условие дифференцируемости функции комплексного переменного в точке.*

Теорема 8.2. Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то она непрерывна в этой точке.

▶ Используя представление (8.4), имеем:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0}\left[A\Delta z + o(\Delta z)\right] = A\lim_{\Delta z \to 0}\Delta z + \lim_{\Delta z \to 0} o(\Delta z) = 0\ .$$

Получили $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$, а это означает, согласно определению 5.12, что функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0. ◀

Следствие 8.1. Если функция $w = f(z)$ дифференцируема на некотором множестве $D_1 \subseteq D$, то она непрерывна на этом множестве.

Докажем *признак дифференцируемости функции комплексного переменного в точке*.

Теорема 8.3. Дифференцируемость функции $f(z) = u(x,\ y) + \ + iv(x,\ y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильна дифференцируемости её действительной и мнимой частей в точке (x_0, y_0) и выполнению условий:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad (8.7)$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\ . \qquad (8.8)$$

▶ **Необходимость.** Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, т.е. выполняется соотношение (8.1). Тогда в силу теоремы 5.3

$$\frac{\Delta w(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) + \alpha(\Delta z)$$

или

$$\Delta w(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z\ , \qquad (8.9)$$

где $\alpha(\Delta z)$ – б.м.в. при $\Delta z \to 0$. Пусть $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, тогда $z_0 + \Delta z = (x_0 + \Delta x) + i(y_0 + \Delta y)$,

$$\Delta w(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)] -$$

$$-[u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] = [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] +$$

$$+ i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)] = \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0)\ .$$

Получили

$$\Delta w(z_0)=\Delta u(x_0,y_0)+i\Delta v(x_0,y_0), \tag{8.10}$$

где $\Delta u(x_0,y_0)$ и $\Delta v(x_0,y_0)$ – полные приращения вещественных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ двух вещественных переменных в точке (x_0,y_0). Пусть

$$f'(z_0)=a+ib, \tag{8.11}$$

Тогда

$$f'(z_0)\Delta z=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)=a\Delta x-b\Delta y+i(b\Delta x+a\Delta y). \tag{8.12}$$

Пусть $\alpha(\Delta z)=\alpha_1(\Delta z)+i\alpha_2(\Delta z)$. Так как $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z)=0$, то в силу теоремы 5.5

$$\lim_{\Delta z\to 0}\alpha_1(\Delta z)=0,\ \lim_{\Delta z\to 0}\alpha_2(\Delta z)=0, \tag{8.13}$$

т.е. $\alpha_1(\Delta z)$, $\alpha_2(\Delta z)$ – б.м.в. при $\Delta z\to 0$. Далее,

$$\alpha(\Delta z)\Delta z=(\alpha_1(\Delta z)+i\alpha_2(\Delta z))(\Delta x+i\Delta y)=$$
$$=\left[\alpha_1(\Delta z)\Delta x-\alpha_2(\Delta z)\Delta y\right]+i\left[\alpha_2(\Delta z)\Delta x+\alpha_1(\Delta z)\Delta y\right]. \tag{8.14}$$

Покажем, что при $\rho=|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$

$$\alpha_1(\Delta z)\Delta x-\alpha_2(\Delta z)\Delta y=o_1(\rho), \tag{8.15}$$

$$\alpha_2(\Delta z)\Delta x+\alpha_1(\Delta z)\Delta y=o_2(\rho). \tag{8.16}$$

Действительно, используя (1.20), (1.23), (1.27), получаем

$$0\le\left|\frac{\alpha_1(\Delta z)\Delta x-\alpha_2(\Delta z)\Delta y}{\rho}\right|\le|\alpha_1(\Delta z)|\cdot\frac{|\Delta x|}{\rho}+|\alpha_2(\Delta z)|\cdot\frac{|\Delta y|}{\rho}\le$$
$$\le|\alpha_1(\Delta z)|+|\alpha_2(\Delta z)|\to 0, \tag{8.17}$$

ибо в силу (5.11), (8.13) $\lim\limits_{\Delta z\to 0}|\alpha_1(\Delta z)|=0$, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}|\alpha_2(\Delta z)|=0$.

Из (8.17) следует, что

$$\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{\alpha_1(\Delta z)\Delta x-\alpha_2(\Delta z)\Delta y}{\rho}\right|=0,$$

откуда в силу (5.11)

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha_1(\Delta z)\Delta x-\alpha_2(\Delta z)\Delta y}{\rho}=0,$$

а это означает справедливость (8.15). Аналогично показывается (8.16). В силу (8.14) – (8.16)

$$\alpha(\Delta z)\Delta z=o_1(\rho)+io_2(\rho). \tag{8.18}$$

В силу (8.9), (8.10), (8.12), (8.18)

$$\Delta u(x_0,y_0)+i\Delta v(x_0,y_0)=a\Delta x-b\Delta y+i(b\Delta x+a\Delta y)+o_1(\rho)+o_2(\rho),$$

откуда получаем

$$\Delta u(x_0,y_0)=a\Delta x-b\Delta y+o_1(\rho), \tag{8.19}$$

$$\Delta v(x_0,y_0)=b\Delta x+a\Delta y+o_2(\rho), \tag{8.20}$$

где $o_1(\rho)$, $o_2(\rho)$ – б.м.в. высшего порядка по сравнению с ρ при $\rho\to 0$. Соотношения (8.19), (8.20) означают по определению дифференцируемости вещественной функции двух вещественных переменных [2.8, с. 500], что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0). Кроме того, в силу необходимого признака дифференцируемости вещественной функции двух вещественных переменных [2.8, с. 501] существуют частные производные первого порядка функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по обоим аргументам и справедливы равенства

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = a, \; \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -b; \tag{8.21}$$

$$\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = b, \; \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} = a. \tag{8.22}$$

Из (8.21), (8.22) следуют равенства (8.7), (8.8).

Достаточность. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполняются условия (8.7), (8.8). Тогда полные приращения этих функций в точке (x_0, y_0) имеют вид

$$\Delta u(x_0, y_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + o_1(\rho), \tag{8.23}$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + o_2(\rho), \tag{8.24}$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$; $o_1(\rho)$, $o_2(\rho)$ – б.м.в. высшего порядка по сравнению с ρ при $\rho \to 0$, т.е.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{o_1(\rho)}{\rho} = 0, \; \lim_{\rho\to 0}\frac{o_2(\rho)}{\rho} = 0. \tag{8.25}$$

Используя условия (8.7), (8.8), заменим в формуле (8.23) $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$, а в формуле (8.24) $\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$ на $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}$. После чего, учитывая (8.10), получаем

$$\Delta w(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + o_1(\rho) + io_2(\rho) =$$
$$= \left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\right]\Delta z + o_1(\rho) + io_2(\rho).$$

Тогда

$$\frac{\Delta w(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{o_1(\rho) + io_2(\rho)}{\Delta z}. \tag{8.26}$$

Заметим, что

$$0 \le \left|\frac{o_1(\rho) + io_2(\rho)}{\Delta z}\right| = \frac{|o_1(\rho) + io_2(\rho)|}{|\Delta z|} \le \frac{|o_1(\rho)| + |o_2(\rho)|}{\rho} =$$
$$= \left|\frac{o_1(\rho)}{\rho}\right| + \left|\frac{o_2(\rho)}{\rho}\right| \underset{\rho\to 0}{\to} 0, \tag{8.27}$$

ибо в силу (5.11), (8.25)

$$\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{o_1(\rho)}{\rho}\right| = 0, \; \lim_{\rho\to 0}\left|\frac{o_2(\rho)}{\rho}\right| = 0.$$

Учитывая, что

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z| \to 0 \Leftrightarrow \Delta z \to 0, \tag{8.28}$$

получаем из (8.27)

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{o_1(\rho) + io_2(\rho)}{\Delta z}\right| = 0,$$

откуда в силу (5.11)

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{o_1(\rho) + io_2(\rho)}{\Delta z} = 0. \tag{8.29}$$

Из (8.26), (8.29) следует, что

$$\exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x},$$

а это означает, согласно определению 8.4, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0. ◀

Следствие 8.2. Если функция $f(z)= u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то её производную в этой точке можно вычислять по любой из следующих формул:

$$f'(z_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x},$$

$$f'(z_0)=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x},$$

$$f'(z_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}-i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y},$$

$$f'(z_0)=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

Следствие 8.3. Дифференцируемость функции $f(z)=u(x,y)+ \ +iv(x,y),\ \ z\in D,$ на некотором множестве $D_1 \subseteq D$ равносильна дифференцируемости её действительной и мнимой частей на этом множестве и выполнению на этом множестве соотношений

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \tag{8.30}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{8.31}$$

Равенства (8.30), (8.31) называются *условиями Коши-Римана* (или *условиями Даламбера-Эйлера*). Краткая запись этих условий:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следствие 8.4. Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ \ z\in D,$ дифференцируема на множестве $D_1 \subseteq D$, то её производную на этом множестве можно вычислять по любой из следующих формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \tag{8.32}$$

$$f'(z)=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \tag{8.33}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \tag{8.34}$$

$$f'(z)=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{8.35}$$

В силу теоремы 8.3 и следствия 8.3 проверка функции $f(z)= \ =u(x,y)+iv(x,y)$, $z\in D$, комплексного переменного $z=x+iy$ на дифференцируемость в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ (на данном множестве $D_1 \subseteq D$) сводится к проверке вещественных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ вещественных переменных x, y на дифференцируемость в точке (x_0, y_0) (на множестве D_1).

В свою очередь, при исследовании функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ на дифференцируемость в точке (x_0, y_0) используется *достаточный признак дифференцируемости вещественной функции двух вещественных переменных* [2.8, с. 503]:

Теорема 8.4. Если вещественная функция $h=h(x,y)$ двух вещественных переменных x, y имеет в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0) частные производные $\dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial y}$ и эти частные производные непрерывны в точке (x_0, y_0), то функция $h(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Следствие 8.5. Если вещественная функция $h = h(x, y)$ двух вещественных переменных x, y имеет на некотором открытом множестве $D \subseteq \mathrm{P}^2$ непрерывные частные производные $\dfrac{\partial h(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial h(x, y)}{\partial y}$, то эта функция дифференцируема на множестве D.

Используя следствия 8.3, 8.5 получаем *достаточный признак дифференцируемости функции комплексного переменного на открытом множестве* (в частности, *в области*).

Теорема 8.5. Если действительная и мнимая части функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$, $z \in D$, имеют на открытом множестве $D_1 \subseteq D$ непрерывные частные производные первого порядка и на этом множестве выполняются условия Коши-Римана, то функция $f(z)$ дифференцируема на множестве D_1.

Пример 8.3. Функция $f(z) = e^z$, $z \in \mathrm{X}$, дифференцируема на X и

$$\left(e^z\right)' = e^z. \tag{8.36}$$

На самом деле, действительная и мнимая части этой функции имеют вид $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ (см. (6.24)). Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ имеют на множестве P^2 частные производные

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = e^x \sin y, \tag{8.37}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = e^x \cos y. \tag{8.38}$$

Частные производные (8.37), (8.38) непрерывны на X, значит, в силу следствия 8.5, функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы на X. Кроме того, в силу (8.37), (8.38) на X выполняются условия Коши-Римана (8.30), (8.31). Следовательно, в силу следствия 8.3 функция $f(z) = e^z$ дифференцируема на множестве X и в силу (8.32), (8.37)

$$f'(z) = \left(e^z\right)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Пример 8.4. Аналогично показывается, что функции $\sin z$, $\cos z$ дифференцируемы на X и

$$(\sin z)' = \cos z, \tag{8.39}$$

$$(\cos z)' = -\sin z. \tag{8.40}$$

Пример 8.5. Главная ветвь $w = \ln z$ логарифмической функции $\mathrm{Ln}\, z$ дифференцируема на множестве $D = \mathrm{X} \setminus \{0\}$ и

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

[1.4, с. 120].

При дифференцировании функций комплексного переменного применяется следующее утверждение, называемое *основной теоремой о производных функций комплексного переменного*.

Теорема 8.6. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы на множестве $D \subseteq D(f) \cap D(g)$. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций тоже дифференцируемы на множестве D (в случае частного предполагается, что $g(z) \neq 0, \forall z \in D$) и справедливы формулы

$$[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z), \tag{8.41}$$

$$[f(z) - g(z)]' = f'(z) - g'(z), \tag{8.42}$$

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \tag{8.43}$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}. \tag{8.44}$$

Доказательство теоремы 8.6 аналогично доказательству соответствующего утверждения для производных вещественных функций вещественного переменного [2.8, с. 166], при этом используются теоремы 5.6, 8.2.

Замечание 8.1. Если $f(z) = c = \mathrm{const}$, $\forall z \in D$, то $f'(z) = 0$, т.е.

$$(c)' = 0. \tag{8.45}$$

Утверждение замечания 8.1 следует из определения производной функции в точке.

Замечание 8.2. Если функция $f(z)$, $z \in D$, дифференцируема на множестве $D_1 \subseteq D$, то для любого $c \in \mathrm{X}$ функция $c\,f(z)$ дифференцируема на множестве D_1 и справедлива формула

$$\left[c\,f(z)\right]' = c\,f'(z)\,. \tag{8.46}$$

Утверждение замечания 8.2 следует из (8.43), (8.45).

Следствие 8.6. Сумма любого конечного числа функций $f_1(z),\ f_2(z),\ \dots,\ f_s(z)$, дифференцируемых на множестве $D \subseteq \mathrm{X}$, есть функция, дифференцируемая на множестве D и

$$\left[\sum_{i=1}^{s} f_i(z)\right]' = \sum_{i=1}^{s} f_i'(z)\,.$$

Утверждение следствия 8.6 получается из теоремы 8.6 методом математической индукции.

Следствие 8.7. Если функции $f_1(z),\ f_2(z),\ \dots,\ f_s(z)$ дифференцируемы на множестве $D \subseteq \mathrm{X}$, то их линейная комбинация $\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z) + \dots + \lambda_s f_s(z)$ с любыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathrm{C}$ дифференцируема на D и

$$\left[\sum_{i=1}^{s} \lambda_i f_i(z)\right]' = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i f_i'(z)\,.$$

Следствие 8.7 вытекает из следствия 8.6 и замечания 8.2.

Пример 8.6. В силу дифференцируемости целой степенной функции (см. примеры 8.1, 8.2) и следствия 8.7 целая рациональная функция

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-2} z^2 + a_{n-1} z + a_n\,,\ z \in \mathrm{X}\,,$$

дифференцируема на X и

$$P_n'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \dots + 2 a_{n-2} z + a_{n-1}\,. \tag{8.47}$$

Укажем *правило дифференцирования сложной функции*.

Теорема 8.7. Пусть для сложной функции $F(z) = f(\varphi(z))$ ($w = f(h)$, $h = \varphi(z)$) выполняются следующие условия:

а) функция $h = \varphi(z)$ дифференцируема в точке z_0, т.е.

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta h(z_0)}{\Delta z} = \varphi'(z_0)\,;$$

б) функция $w = f(h)$ дифференцируема в соответствующей точке $h_0 = \varphi(z_0)$, т.е.

$$\exists \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta w(h_0)}{\Delta h} = f'(h_0)\,.$$

Тогда сложная функция $F(z) = f(\varphi(z))$ дифференцируема в точке z_0 и справедлива формула

$$F'(z_0) = f'(h_0)\varphi'(z_0)\,.$$

Доказательство теоремы 8.7 аналогично доказательству соответствующего утверждения для сложной функции вещественной переменной [2.7, с. 42], при этом используются теоремы 5.3, 5.6, 8.2.

Следствие 8.8. Пусть для сложной функции $F(z) = f(\varphi(z))$ выполняются следующие условия:

1) функция $h = \varphi(z)$ дифференцируема на множестве $D_1 \subseteq D(\varphi)$;

2) функция $w = f(h)$ дифференцируема на множестве $\Omega_1 = \varphi(D_1)$ (Ω_1 – образ множества D_1 при отображении φ).

Тогда сложная функция $F(z) = f(\varphi(z))$ дифференцируема на множестве D_1 и справедлива формула

$$F'(z) = f'(h)\varphi'(z)\,.$$

Если сложную функцию записать в виде $w = w(h(z))$, то правило дифференцирования сложной функции принимает вид

$$w_z' = w_h' h_z'\,. \tag{8.48}$$

Пример 8.7. Сложная функция $w = \cos^3 z$, $z \in X$, дифференцируема на X и
$$w' = -3\cos^2 z \sin z.$$

Действительно, эту функцию можно записать в виде
$$w = h^3, \ h = \cos z. \tag{8.49}$$
Каждая из функций (8.49) дифференцируема на X и $w'_h = 3h^2$, $h'_z = -\sin z$ (см. примеры 8.2, 8.4). Тогда в силу следствия 8.8 сложная функция $w = \cos^3 z$ дифференцируема на X и по формуле (8.48)
$$w' = 3\cos^2 z(-\sin z) = -3\cos^2 z \sin z.$$

Замечание 8.3. Теорема 8.7 и следствие 8.8 сохраняют силу для сложной функции, являющейся суперпозицией любого конечного числа функций.

Например, если $w = w(q(h(z)))$ и соответствующие функции $h = h(z)$, $q = q(h)$, $w = w(q)$ дифференцируемы на соответствующих множествах, то сложная функция $w = w(q(h(z)))$ дифференцируема на соответствующем множестве и справедлива формула
$$w'_z = w'_q q'_h h'_z.$$

Укажем *правило дифференцирования обратной функции.*

Теорема 8.8. Пусть функция $w = f(z)$ однолистна на множестве D и обратная ей функция $z = f^{-1}(w)$ непрерывна на множестве $G = f(D)$. Тогда, если функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$, то обратная функция $z = f^{-1}(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = f(z_0)$ и справедлива формула
$$\left[f^{-1}(w_0)\right]' = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Доказательство теоремы 8.8 аналогично доказательству соответствующего утверждения для обратной функции вещественной переменной [2.7, с. 48], при этом существование обратной функции следует из замечания 5.1.

Следствие 8.9. Пусть функция $w = f(z)$ однолистна на множестве D и обратная ей функция $z = f^{-1}(w)$ непрерывна на множестве $G = f(D)$. Тогда, если функция $f(z)$ дифференцируема на множестве D и $f'(z) \neq 0$ для $\forall z \in D$, то обратная функция $z = f^{-1}(w)$ дифференцируема на множестве G и
$$\left[f^{-1}(w)\right]' = \frac{1}{f'(z)}. \tag{8.50}$$

9. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Аналитичность функции в точке; необходимое условие аналитичности функции в точке; признак аналитичности функции в точке; аналитичность функции на открытом множестве; признак аналитичности функции на открытом множестве; достаточный признак аналитичности функции на открытом множестве; основная теорема об аналитических функциях; правильные и особые точки функции; изолированные особые точки функции; понятие целой функции; связь аналитических функций с гармоническими функциями.

Одним из фундаментальных понятий теории функций комплексного переменного является понятие аналитической функции.

Пусть дана однозначная функция $w = f(z)$, $z \in D$, и z_0 – внутренняя точка множества D.

Определение 9.1. *Функция* $f(z)$ называется *аналитической* (*голоморфной* или *регулярной*) *в точке* z_0, если она дифференцируема в некоторой δ-окрестности этой точки (в том числе и в самой точке z_0).

Из определения 9.1 видно, что требование аналитичности функции в точке является более жёстким, чем требование дифференцируемости функции в точке. Таким образом, если функция $f(z)$ не аналитична в точке z_0, то это вовсе не означает, что она не дифференцируема в этой точке, ибо нарушение аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 означает лишь следующее: $\forall O_\delta(z_0)\ \exists\, z_* = z_*(\delta) \in O_\delta(z_0) \mid$ в точке z_* функция $f(z)$ не дифференцируема.

Определение 9.2. *Функция* $w = f(z)$, $z \in D$, называется *анали-тической* (*голоморфной* или *регулярной*) *на открытом множестве* $D_1 \subseteq D$, если она аналитична в каждой точке этого множества.

Заметим, что в определении 9.2 равенство $D_1 = D$ допустимо лишь в том случае, когда D – открытое множество, в частности, если D – область.

Замечание 9.1. Из аналитичности функции в точке следует её аналитичность в некоторой окрестности этой точки.

Действительно, пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z_0, т.е. по определению, дифференцируема в некоторой $O_\delta(z_0)$. Множество $O_\delta(z_0)$ является открытым, следовательно, каждая точка $z \in O_\delta(z_0)$ входит в $O_\delta(z_0)$ с некоторой своей окрестностью $O_{\delta_1}(z)$ ($\delta_1 = \delta_1(z)$), в которой функция $f(z)$ дифференцируема и, следовательно, аналитична в точке z (рис. 9.1).

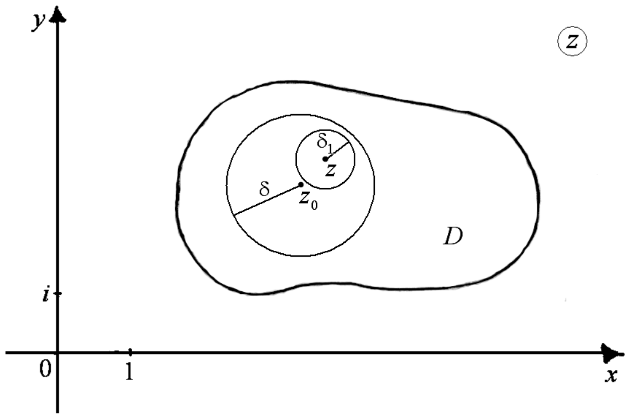

Рис. 9.1

В силу замечания 9.1 вместо выражения “функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 ” можно говорить “ функция $f(z)$ аналитична в некоторой δ -окрестности точки z_0 ”.

Используя следствие 8.1, получаем *необходимое условие аналитичности функции в точке*.

Теорема 9.1. Если функция $w = f(z)$ аналитична в точке z_0 , то она непрерывна в некоторой δ-окрестности этой точки.

Используя теорему 8.3, получаем *признак аналитичности функции в точке*.

Теорема 9.2. Аналитичность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильна дифференцируемости её действительной и мнимой частей в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0) и выполнению в этой δ-окрестности условий Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \tag{9.2}$$

Замечание 9.2. Аналитичность функции на открытом множестве (в частности, в области) равносильна дифференцируемости этой функции на данном множестве.

Замечание 9.3. Если функция $f(z)$ аналитична на открытом множестве, то она непрерывна на этом множестве.

Утверждение замечания 9.3 следует из замечания 9.2 и следствия 8.1.

Используя замечание 9.2 и следствие 8.3, получаем *признак аналитичности функции на открытом множестве* (в частности, *в области*).

Теорема 9.3. Аналитичность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy,\ z \in D,$ на открытом множестве $D_1 \subseteq D$ равносильна дифференцируемости её действительной и мнимой частей на множестве D_1 и выполнению на этом множестве условий Коши-Римана (9.1), (9.2).

Используя замечание 9.2 и теорему 8.5, получаем *достаточный признак аналитичности функции на открытом множестве* (в частности, *в области*).

Теорема 9.4. Если действительная и мнимая части функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy,\ z \in D,$ имеют на открытом множестве $D_1 \subseteq D$ непрерывные частные производные первого порядка и на этом множестве выполняются условия Коши-Римана (9.1), (9.2), то функция $f(z)$ аналитична на множестве D_1.

Используя замечание 9.2 и теорему 8.6, получаем следующее утверждение, называемое *основной теоремой об аналитических функциях.*

Теорема 9.5. Сумма, разность, произведение и частное двух аналитических на открытом множестве (в частности, в области) функций являются аналитическими на этом множестве (в этой области) функциями, при этом в случае частного предполагается, что знаменатель отличен от нуля на данном множестве.

В силу замечания 9.2 и следствия 8.7 справедливо.

Замечание 9.4. Линейная комбинация любого конечного числа аналитических на открытом множестве функций является аналитической на этом множестве функцией.

Точки комплексной плоскости X, в которых однозначная функция $w = f(z)$ является аналитической, называются *правильными точками* этой *функции*, а точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, – *особыми точками* этой *функции*. Особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *изолированной особой точкой* этой *функции*, если существует δ-окрестность точки z_0 , в которой нет других особых точек функции $f(z)$, кроме самой точки z_0 , т.е. если

$$\exists O_\delta(z_0) \mid \text{функция } f(z) \text{ аналитична в } \dot{O}_\delta(z_0).$$

Среди аналитических функций выделяют класс целых функций.

Определение 9.3. *Функция* $w = f(z),\ z \in \mathbf{X}$, называется *целой*, если она аналитична на всей комплексной плоскости X.

Замечание 9.5. Если говорят, что функция $f(z)$ аналитична в области D и на её границе $\varGamma_D$, т.е. аналитична на замкнутом множестве $\overline{D} = D \cup \varGamma_D$ (в замкнутой области $\overline{D}$), то это означает, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой области $D_* \supset \overline{D}$.

Пример 9.1. Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ дифференцируемы на открытом множестве X (см. примеры 8.3, 8.4), следовательно, в силу замечания 9.2 эти функции аналитичны на X, т.е. являются целыми функциями. Эти функции не имеют особых точек.

Пример 9.2. Главная ветвь $w = \ln z$ логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$ дифференцируема на открытом множестве $D = X \setminus \{0\}$ (см. пример 8.5), следовательно, в силу замечания 9.2 аналитична на этом множестве. Точка $z_0 = 0$ является изолированной особой точкой функции $w = \ln z$.

Пример 9.3. Целая рациональная функция

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

дифференцируема на X (см. пример 8.6), следовательно, аналитична на X, т.е. является целой функцией.

Пример 9.4. Рассмотрим дробно-рациональную функцию

$$w = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \tag{9.3}$$

её область определения имеет вид $D = X \setminus N(Q_m(z))$, где $N(Q_m(z)) = \{z \in X \mid Q_m(z) = 0\}$ – множество нулей функции $Q_m(z)$ (множество корней многочлена $Q_m(z)$). Множество $N(Q_m(z))$ состоит из конечного числа точек, ибо известно [2.10, с. 157], что уравнение $Q_m(z) = 0$ имеет в поле комплексных чисел m корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность. Следовательно, множество $D = X \setminus N(Q_m(z))$ является областью. В силу теоремы 9.5 функция (9.3) аналитична в D как частное двух аналитических в D функций. Функция (9.3) имеет конечное множество изолированных особых точек, совпадающее со множеством $N(Q_m(z))$.

Пример 9.5. Функция $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ аналитична в области $D = X \setminus N(\cos z)$, где $N(\cos z) = \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right\}$ (см. замечание 6.3) как отношение двух аналитических в этой области функций. Функция $\operatorname{tg} z$ имеет бесконечное множество изолированных особых точек, совпадающее со множеством $N(\cos z)$.

Пример 9.6. Функция $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ аналитична в области $D = X \setminus N(\sin z)$, где $N(\sin z) = \{\pi k,\ k \in Z\}$ (см. замечание 6.4) как отношение двух аналитических в этой области функций. Функция $\operatorname{ctg} z$ имеет бесконечное множество изолированных особых точек, совпадающее со множеством $N(\sin z)$.

Пример 9.7. Исследуем на аналитичность функцию

$$w = \bar{z} \operatorname{Re} z,\ z \in \mathbf{X}. \tag{9.4}$$

Найдём действительную и мнимую части этой функции. Пусть $z = x + iy$, $w = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда

$$u(x,y) + iv(x,y) = (x - iy)x = x^2 - ixy,$$

откуда $u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = -xy$. Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ имеют на множестве P^2 непрерывные частные производные

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -y,\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -x,$$

значит, в силу следствия 8.5, функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы на P^2. Выясним, на каком множестве выполняются условия Коши-Римана (9.1), (9.2). В нашем случае условия (9.1), (9.2) принимают вид

$$\begin{cases} 2x = -x, \\ 0 = y, \end{cases}$$

откуда $x = 0$, $y = 0$. Итак, условия Коши-Римана выполняются в единственной точке $(0, 0)$. В силу следствия 8.3 функция (9.4) дифференцируема в единственной точке $z_0 = 0 + i \cdot 0$ и, согласно формуле (8.32),

$$w'(0)=\frac{\partial u(0,0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(0,0)}{\partial x}=2\cdot 0+i\cdot(-0)=0\,.$$

Функция (9.4) не имеет точек, в которых она является аналитической, т.е. не имеет правильных точек.

Теорема 9.6. Действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексного переменного $z=x+iy$ являются в этой области решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}=0\,. \tag{9.5}$$

В силу теоремы 9.3 в области D выполняются условия Коши-Римана (9.1), (9.2). Ниже будет доказано (см. теорему 12.4), что аналитическая в области функция бесконечно дифференцируема в этой области, т.е. существует производная любого порядка аналитической в области функции и эта производная аналитична в данной области.

В частности, в области D существует $f''(z)=\left[f'(z)\right]'$, следовательно, в силу формул (8.32) – (8.35) в области D существуют непрерывные частные производные второго порядка функций $u(x,y)$, $v(x,y)$. Кроме того, в силу достаточного признака равенства смешанных производных [2.9, с.99], в области D выполняются соотношения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x}, \tag{9.6}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y\partial x}. \tag{9.7}$$

Дифференцируя равенство (9.1) по переменной x, а равенство (9.2) по переменной y, получаем

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y\partial x}, \tag{9.8}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x\partial y}. \tag{9.9}$$

Складывая равенства (9.8), (9.9) и используя (9.7), имеем

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\,,$$

т.е. функция $u(x,y)$ является решением уравнения (9.5). Дифференцируя равенство (9.1) по переменной y, а равенство (9.2) по переменной x, получаем

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}, \tag{9.10}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}. \tag{9.11}$$

Вычитая из равенства (9.10) равенство (9.11) и используя (9.6), имеем

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}=0\,,$$

т.е. функция $v(x,y)$ является решением уравнения (9.5).

Уравнение (9.5) называется *уравнением Лапласа*. Вещественная функция $h=h(x,y)$ двух вещественных переменных x, y, имеющая непрерывные частные производные второго порядка и являющаяся решением уравнения Лапласа в некоторой области, называется *гармонической функцией* в этой *области*. Две гармонические функции в некоторой области, связанные между собой в этой области условиями Коши-Римана, называются *сопряжёнными гармоническими функциями* в данной *области*.

Таким образом, в силу теорем 9.3, 9.6 действительная и мнимая части аналитической в данной области функции являются сопряженными гармоническими функциями в этой области. В силу теоремы 9.3 верно обратное утверждение: если $u(x,y)$, $v(x,y)$ – сопряжённые гармонические функции в данной области, то функция $f(z)==u(x,y)+iv(x,y)$

комплексного переменного $z = x + iy$ является аналитической в этой области. Получили следующий *признак аналитичности функции в области*.

Теорема 9.7. Аналитичность функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ в области D равносильна тому, что её действительная и мнимая части являются сопряжёнными гармоническими функциями в этой области.

Ставится вопрос: для всякой ли гармонической в данной области функции существует сопряжённая с ней гармоническая в этой области функция, другими словами, всякая ли гармоническая в данной области функция является действительной (мнимой) частью некоторой аналитической в этой области функции.

Теорема 9.8 [1.4, с. 135]. Для всякой гармонической в односвязной области D функции $\varphi(x, y)$ существует сопряженная с ней гармоническая в D функция $\psi(x, y)$, при этом функция $\psi(x, y)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Таким образом, всякая гармоническая в односвязной области D функция $\varphi(x, y)$ является действительной (мнимой) частью некоторой аналитической в D функции.

Если известна действительная (мнимая) часть аналитической в области функции, то с помощью условий Коши-Римана можно найти её мнимую (действительную) часть и тем самым восстановить аналитическую функцию.

Пример 9.8. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$, если $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 2i - 1$.

Решение. По условию задачи $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$, следовательно,

$$f(z) = \left(x^2 - y^2 + 2x\right) + iv(x, y). \tag{9.12}$$

Для нахождения $v(x, y)$ воспользуемся условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \tag{9.13}$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \tag{9.14}$$

Имеем

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2 + 2x\right) = 2x + 2,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2 + 2x\right) = -2y$$

и соотношения (9.13), (9.14) принимают вид

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2x + 2, \tag{9.15}$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y. \tag{9.16}$$

Из уравнения (9.16) (берём наиболее простое уравнение) находим

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + \psi(y) = \int 2y dx + \psi(y) = 2xy + \psi(y).$$

Получили

$$v(x, y) = 2xy + \psi(y). \tag{9.17}$$

Тогда

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + \psi(y)\right) = 2x + \psi'(y)$$

и соотношение (9.15) принимает вид $2x + \psi'(y) = 2x + 2$, откуда $\psi'(y) = 2$, $\psi(y) = \int 2dy = 2y + C$. Получили

$$\psi(y) = 2y + C. \tag{9.18}$$

В силу (9.17), (9.18)

$$v(x, y) = 2xy + 2y + C. \tag{9.19}$$

В силу (9.12), (9.19)

$$f(z) = \left(x^2 - y^2 + 2x\right) + i\left(2xy + 2y + C\right). \tag{9.20}$$

Подберём значение постоянной C таким образом, чтобы выполнялось условие $f(i)=2i-1$. Имеем $z=i=0+i\cdot 1$, т.е. $x=0$, $y=1$, следовательно, $f(i)=\left(0^2-1^2+2\cdot 0\right)+i\left(2\cdot 0\cdot 1+2\cdot 1+C\right)=-1+i(2+C)$. По условию $-1+i(2+C)=2i-1$, откуда $C=0$. Подставляя $C=0$ в формулу (9.20), получаем

$$f(z)=\left(x^2-y^2+2x\right)+i(2xy+2y). \tag{9.21}$$

Функцию (9.21) можно записать как функцию аргумента z. Действительно, подставив в (9.21) вместо x, y их выражения из формул

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}\ , \quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

и приведя подобные члены, получаем

$$f(z)=z^2+2z\ .$$

10. ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Гладкая кривая; кусочно-гладкая кривая; интеграл функции комплексного переменного вдоль кривой; достаточное условие существования интеграла, формула для его вычисления через криволинейные интегралы второго рода; свойства интегралов; оценки сверху модуля интеграла.

При построении интеграла от функции $w=f(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$ вдоль кривой γ будет показано (см. теорему 10.2 и замечание 10.3), что такой интеграл существует при условии, что γ является гладкой или кусочно-гладкой кривой и функция $f(z)$ непрерывна на γ. Введём соответствующие определения.

Определение 10.1. Непрерывная кривая

$$\gamma:\ z=z(t)=x(t)+iy(t)\ ,\ t\in[\alpha,\beta], \tag{10.1}$$

называется *гладкой кривой*, если функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$ и

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t)\neq 0\ ,\ \forall t\in[\alpha,\beta], \tag{10.2}$$

причём если кривая γ замкнута, то $z'(\alpha+0)=z'(\beta-0)$.

Геометрически гладкая кривая (10.1) характеризуется тем, что в каждой точке $M(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, она имеет касательную $K(t)$ с направляющим вектором $\vec{a}(t)=\{x'(t),y'(t)\}$ [2.7, с.251] и, в силу непрерывности производных $x'(t),\ y'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, при перемещении точки касания $M(t)$ по кривой γ угол наклона $\varphi(t)$ касательной $K(t)$ к действительной оси изменяется непрерывно (рис. 10.1, 10.2).

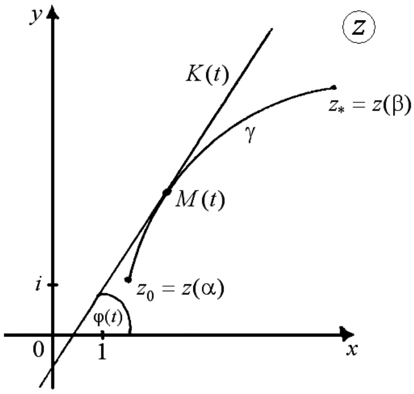

Рис. 10.1

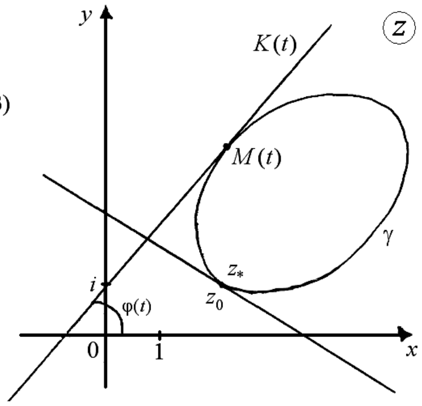

Рис. 10.2

Определение 10.2. Непрерывная кривая (10.1) называется *кусочно-гладкой кривой*, если

$$\exists\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{i-1}<t_i<\ldots<t_{m-1}<t_m=\beta\ |$$

каждая из кривых

$$\gamma_i: z=z(t)=x(t)+iy(t)\ ,\ t\in\left[t_{i-1},t_i\right],\ 1\leq i\leq m\ , \tag{10.3}$$

является гладкой кривой.

Таким образом, кусочно-гладкая кривая – это непрерывная кривая, которую можно представить в виде объединения конечного числа гладких кривых вида (10.3): $\gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\gamma_i$ (рис. 10.3).

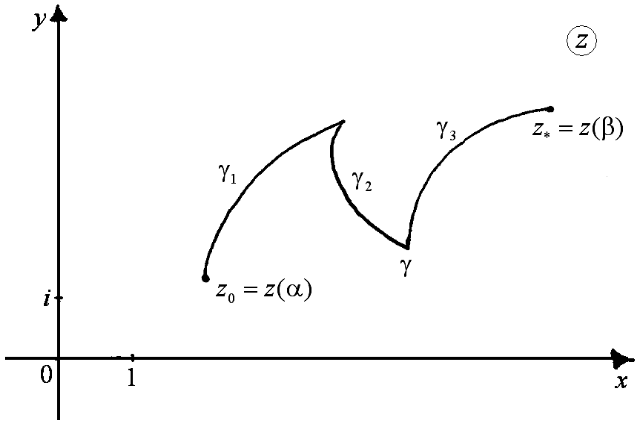

Рис. 10.3

Пусть функция $w=f(z)$ определена и непрерывна на гладкой кривой γ вида (10.1). Кривую γ будем рассматривать как ориентированную кривую с направлением обхода от точки $z_0=z(\alpha)$ к точке $z_*=z(\beta)$. Разобьём отрезок $[\alpha,\beta]$ произвольной системой точек

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{k-1}<t_k<\ldots<t_{n-1}<t_n=\beta$$

на n частей. Такому разбиению отвечает разбиение кривой γ на n частей (n дуг кривой γ) вида

$$\gamma_k: z=z(t)=x(t)+iy(t)\,,\ t\in[t_{k-1},t_k],\ 1\le k\le n\,.$$

Положим $z_k=z(t_k)$, $0\le k\le n$ (заметим, что $z_n=z(t_n)=z(\beta)=z_*$). Таким образом, z_{k-1} и z_k – соответственно начальная и конечная точки дуги γ_k ($1\le k\le n$). Пусть $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$, $1\le k\le n$. Заметим, что Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в точку z_k, а $|\Delta z_k|$ – длина этого вектора, т.е. длина хорды, стягивающей дугу γ_k, $1\le k\le n$ (рис. 10.4).

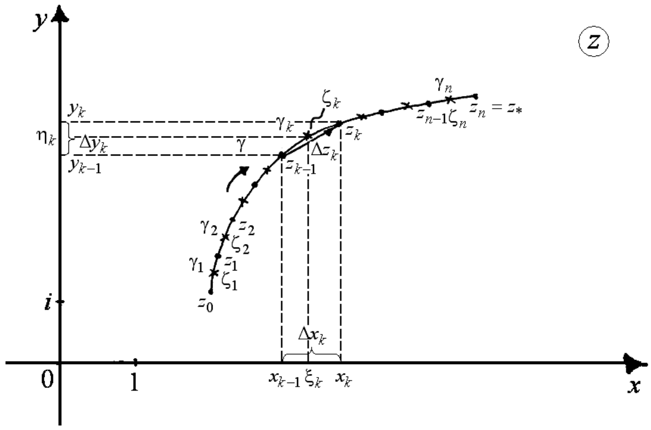

Рис. 10.4

Выберем на каждой части разбиения $[t_{k-1},t_k]$ отрезка $[\alpha,\beta]$ произвольным образом по одной точке τ_k; такому выбору отвечает выбор по одной точке $\zeta_k=z(\tau_k)$ на каждой дуге γ_k, $1\le k\le n$ (рис. 10.4). Составим сумму вида

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k\,. \tag{10.4}$$

Выражение (10.4) называется *интегральной суммой функции* $f(z)$, соответствующей данному разбиению кривой γ на части γ_k и данному выбору точек ζ_k ($1\le k\le n$). Обозначим через l_k длину дуги γ_k ($1\le k\le n$). Положим $l=\max\limits_{1\le k\le n} l_k$, т.е. l – максимальная из длин дуг разбиения γ_k.

Определение 10.3. *Интегралом функции* $f(z)$ *вдоль кривой* γ (*по кривой* γ) называется конечный предел интегральной суммы S_n при стремлении l к нулю при условии, что такой предел существует и не зависит от способа разбиения кривой γ на части γ_k и выбора точек ζ_k ($1\le k\le n$).

Обозначение:

$$\int\limits_{\gamma}f(z)dz\,.$$

Таким образом, по определению,

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{l\to 0} S_n$$

или в более подробной записи

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\max\limits_{1\le k\le n} l_k\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k . \qquad (10.5)$$

Если существует интеграл (10.5), то *функция* $f(z)$ называется *интегрируемой вдоль кривой* γ (*по кривой* γ). Кривая γ называется *путём* или *контуром интегрирования*.

Заметим, что $l_k \to 0 \Leftrightarrow \Delta z_k \to 0 \Leftrightarrow |\Delta z_k| \to 0$. Следовательно, $l \to 0 \Leftrightarrow \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k| \to 0$. Тогда соотношение (10.5) можно записать в виде

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\max\limits_{1\le k\le n} |\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k . \qquad (10.6)$$

Положим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $1\le k\le n$, $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta t_k$. Заметим, что $l_k \to 0 \Leftrightarrow \Delta t_k \to 0$. Следовательно, $l\to 0 \Leftrightarrow \lambda \to 0$. Тогда соотношение (10.5) можно записать в виде

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\max\limits_{1\le k\le n} \Delta t_k\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))\Delta z(\tau_k) . \qquad (10.7)$$

Вычисление интеграла функции комплексного переменного вдоль кривой сводится, как будет показано ниже, к вычислению двух криволинейных интегралов второго рода по данной кривой. В свою очередь, вычисление каждого из этих криволинейных интегралов сводится к вычислению определённого интеграла вещественной функции вещественной переменной. В связи с этим напомним необходимые сведения о криволинейных интегралах второго рода, известные из курса математического анализа.

Теорема 10.1. [2.3, с. 279]. Пусть вещественные функции $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ двух вещественных переменных x, y определены и непрерывны на гладкой кривой

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta].$$

Тогда существует криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

и справедлива формула

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_\alpha^\beta \left[P\left(x(t), y(t)\right)x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right)y'(t)\right]dt .$$

(10.8)

Если гладкая кривая L задана уравнением в явном виде $y = y(x)$, $x\in[a,b]$, то в качестве параметра t можно взять переменную x и формула (10.8) принимает вид

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right)y'(x)\right]dx . \qquad (10.9)$$

Теорема 10.2. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ определена и непрерывна на гладкой кривой γ вида (10.1), то она интегрируема вдоль этой кривой и справедлива формула

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_\gamma v(x, y)dx + u(x, y)dy . \quad (10.10)$$

Нужно доказать, что существует конечный предел в правой части равенства (10.6) и этот предел равен правой части формулы (10.10). Положим $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $1\le k\le n$, тогда $f(\zeta_k) = = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)$. Пусть $z_k = x_k + iy_k$, $0\le k\le n$, тогда $\Delta z_k = = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ (см. рис. 10.4). При каждом $1\le k\le n$ получаем

$$f(\zeta_k)\Delta z_k = \left[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)\right](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] +$$
$$+ i\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]. \tag{10.11}$$

Заметим, что $|\Delta z_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$, $1 \le k \le n$. Следовательно,

$$|\Delta z_k| \to 0 \ \Leftrightarrow \ |\Delta x_k| \to 0 \ \text{и} \ |\Delta y_k| \to 0,$$

и, значит,

$$\max_{1\le k\le n}|\Delta z_k| \to 0 \ \Leftrightarrow \ \max_{1\le k\le n}|\Delta x_k| \to 0 \ \text{ и } \ \max_{1\le k\le n}|\Delta y_k| \to 0. \tag{10.12}$$

В силу (10.11), (10.12) предел в правой части (10.6) принимает вид

$$\lim_{\substack{\max\limits_{1\le k\le n} |\Delta x_k|\to 0 \\ \max\limits_{1\le k\le n} |\Delta y_k|\to 0}} \left[\sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] + \right.$$
$$\left. + i\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]\right]. \tag{10.13}$$

По условию теоремы функция $f(z)$ непрерывна на кривой γ . Значит, в силу следствия 5.3, её действительная и мнимая части непрерывны на кривой γ . Следовательно, в силу теоремы 10.1 существуют пределы вида

$$\lim_{\substack{\max\limits_{1\le k\le n} |\Delta x_k|\to 0 \\ \max\limits_{1\le k\le n} |\Delta y_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] =$$
$$= \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy, \tag{10.14}$$

$$\lim_{\substack{\max\limits_{1\le k\le n} |\Delta x_k|\to 0 \\ \max\limits_{1\le k\le n} |\Delta y_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] =$$
$$= \int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy. \tag{10.15}$$

Из (10.13) – (10.15) вытекает в силу теоремы 5.5 существование конечного предела в правой части (10.6), равного правой части формулы (10.10). А это означает, по определению, что функция $f(z)$ интегрируема вдоль кривой γ и справедлива формула (10.10). ◄

Краткая запись формулы (10.10):

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy. \tag{10.16}$$

Формально получить формулу (10.16) можно, положив в её левой части $f(z) = u + iv$, $dz = dx + idy$:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma \left[(udx - vdy) + i(vdx + udy)\right] =$$
$$= \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy.$$

Замечание 10.1. При выполнении условий теоремы 10.2 справедлива формула

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)dt. \tag{10.17}$$

Действительно, используя формулы (10.10), (10.8) и соотношения (10.1), (10.2) получаем

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy =$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left[u\left(x(t),y(t)\right)x'(t)-v\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right]dt+$$
$$+i\int_{\alpha}^{\beta}\left[v\left(x(t),y(t)\right)x'(t)+u\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right]dt=$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left[u\left(x(t),y(t)\right)+iv\left(x(t),y(t)\right)\right]\left[x'(t)+iy'(t)\right]dt=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(z(t)\right)z'(t)dt\,.$$

Собирая начало и конец записи, получаем формулу (10.17).

Пример 10.1. Вычислить $\int\limits_{\gamma}\left(3z^2+2z\right)dz$, где $\gamma: y=x^2,\ x\in[0;1]$.

Решение. Изобразим путь интегрирования γ на чертеже (рис. 10.5).

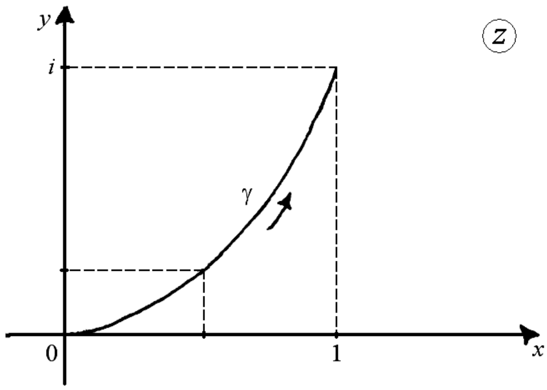

Рис. 10.5

Заметим, что кривую γ можно задать в параметрической форме:

$$\gamma:\begin{cases}x=t,\\ y=t^2,\end{cases}\quad t\in[0;1],$$

или в комплексной параметрической форме вида (10.1):

$$\gamma: z=z(t)=t+it^2,\ t\in[0;1].$$

Функции $x(t)=t$, $y(t)=t^2$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0;1]$ и $z'(t)=x'(t)+iy'(t)=1+2it\neq 0$, $\forall t\in[0;1]$. Следовательно, γ является гладкой кривой. Подынтегральная функция $f(z)=3z^2+2z$ непрерывна на кривой γ, ибо она непрерывна на множестве X как целая рациональная функция (см. пример 6.9). Найдём действительную и мнимую части функции $f(z)$. Пусть $z=x+iy$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Тогда

$$u(x,y)+iv(x,y)=3(x+iy)^2+2(x+iy)=\left(3x^2-3y^2+2x\right)+i\left(6xy+2y\right),$$

т.е. $u(x,y)=3x^2-3y^2+2x$, $v(x,y)=6xy+2y$. По формуле (10.10)

$$I=\int\limits_{\gamma}\left(3z^2+2z\right)dz=\int\limits_{\gamma}\left(3x^2-3y^2+2x\right)dx-\left(6xy+2y\right)dy+$$
$$+i\int\limits_{\gamma}\left(6xy+2y\right)dx+\left(3x^2-3y^2+2x\right)dy\,. \qquad (10.18)$$

По формуле (10.9)

$$I_1=\int\limits_{\gamma}\left(3x^2-3y^2+2x\right)dx-\left(6xy+2y\right)dy=$$
$$=\int_0^1\left[\left(3x^2-3\left(x^2\right)^2+2x\right)-\left(6x\cdot x^2+2x^2\right)2x\right]dx=$$

$$=\int_0^1 \left[3x^2-3x^4+2x-12x^4-4x^3\right]dx=\int_0^1 \left[2x+3x^2-4x^3-15x^4\right]dx=$$

$$=\left(x^2+x^3-x^4-3x^5\right)\Big|_0^1=-2\ ;$$

$$I_2=\int_\gamma (6xy+2y)\,dx+\left(3x^2-3y^2+2x\right)dy=$$

$$=\int_0^1 \left[\left(6x\cdot x^2+2x^2\right)+\left(3x^2-3\left(x^2\right)^2+2x\right)2x\right]dx=$$

$$=\int_0^1 \left[6x^3+2x^2+6x^3-6x^5+4x^2\right]dx=\int_0^1\left(6x^2+12x^3-6x^5\right)dx=$$

$$=\left(2x^3+3x^4-x^6\right)\Big|_0^1=4\,.$$

Получили $I_1=-2$, $I_2=4$. В силу (10.18) $I=I_1+iI_2$, т.е. $I=-2+4i$.

Справедливы следующие свойства интегралов от функций комплексного переменного (их доказательство аналогично доказательству соответствующих свойств для определённых интегралов от функций вещественной переменной [2.8, с. 344]).

10.1. Если функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ непрерывны на гладкой кривой γ, то

$$\int_\gamma \left[f_1(z)+f_2(z)\right]dz=\int_\gamma f_1(z)dz+\int_\gamma f_2(z)dz\,, \tag{10.19}$$

$$\int_\gamma \left[f_1(z)-f_2(z)\right]dz=\int_\gamma f_1(z)dz-\int_\gamma f_2(z)dz\,. \tag{10.20}$$

10.2. Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой γ, то для любой константы $c\in \mathrm{X}$

$$\int_\gamma c\,f(z)dz=c\int_\gamma f(z)dz\,. \tag{10.21}$$

10.3. Если функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ непрерывны на гладкой кривой γ, то для любых $c_1,c_2\in \mathrm{X}$

$$\int_\gamma \left[c_1 f_1(z)+c_2 f_2(z)\right]dz=c_1\int_\gamma f_1(z)dz+c_2\int_\gamma f_2(z)dz\,. \tag{10.22}$$

10.4. Если функции $f_1(z), f_2(z),\dots, f_n(z)$ непрерывны на гладкой кривой γ, то для любых $c_1,c_2,\dots,c_n\in \mathrm{X}$

$$\int_\gamma \left[c_1 f_1(z)+c_2 f_2(z)+\ldots+c_n f_n(z)\right]dz=$$

$$=c_1\int_\gamma f_1(z)dz+c_2\int_\gamma f_2(z)dz+\ldots+c_n\int_\gamma f_n(z)dz \tag{10.23}$$

или в более краткой записи

$$\int_\gamma \left[\sum_{i=1}^n c_i f_i(z)\right]dz=\sum_{i=1}^n c_i\int_\gamma f_i(z)dz\,.$$

10.5. Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой γ, то

$$\int_\gamma f(z)dz=-\int_{\bar\gamma} f(z)dz\,, \tag{10.24}$$

где γ – кривая вида (10.1) с направлением обхода от точки $z_0=z(\alpha)$ к точке $z_*=z(\beta)$; $\bar\gamma$ – кривая вида (10.1) с направлением обхода от точки $z_*=z(\beta)$ к точке $z_0=z(\alpha)$.

10.6. Для гладкой кривой γ справедлива формула

$$\int_\gamma dz=z_*-z_0\,, \tag{10.25}$$

где z_0, z_* – соответственно начальная и конечная точки кривой γ.

10.7. Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой γ и кривая γ разбита на две части γ_1, γ_2 так, что конец γ_1 совпадает с началом γ_2, то

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz\,. \tag{10.26}$$

10.8. Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой γ и кривая γ разбита на n частей $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ так, что конец γ_i совпадает с началом γ_{i+1} $(1 \le i \le n-1)$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz + ... + \int\limits_{\gamma_n} f(z)dz \tag{10.27}$$

или в более краткой записи

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\gamma_i} f(z)dz .$$

Свойство 10.8 называется *свойством аддитивности интеграла функции комплексного переменного*.

Замечание 10.2. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ непрерывна на гладкой кривой γ, то вещественная функция

$$|f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2} \tag{10.28}$$

двух вещественных переменных x, y непрерывна на этой кривой.

Действительно, из непрерывности функции $f(z)$ на кривой γ вытекает в силу следствия 5.3 непрерывность $u(x, y)$ и $v(x, y)$ на γ, что влечёт за собой непрерывность функции (10.28).

Укажем некоторые оценки сверху модуля интеграла функции комплексного переменного.

10.9. Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой γ, то

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)| dl , \tag{10.29}$$

где в правой части записан криволинейный интеграл первого рода от функции (10.28) вдоль кривой γ.

Действительно, оценим сверху модуль интегральной суммы (10.4) функции $f(z)$. Используя (1.26), (1.20), получаем

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\Delta z_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\, l_k ,$$

ибо $|\Delta z_k| \le l_k$, $1 \le k \le n$ (см. рис. 10.4). Получили оценку

$$|S_n| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\, l_k . \tag{10.30}$$

В правой части (10.30) записана интегральная сумма функции (10.28) вдоль кривой γ. По достаточному признаку существования криволинейного интеграла первого рода [2.3, с. 258]

$$\exists \lim_{\substack{\max l_k \to 0 \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| l_k = \int\limits_{\gamma} |f(z)| dl . \tag{10.31}$$

В силу замечания 5.8

$$\exists \lim_{\substack{\max l_k \to 0 \\ 1 \le k \le n}} |S_n| = \left|\lim_{\substack{\max l_k \to 0 \\ 1 \le k \le n}} S_n\right| = \left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| . \tag{10.32}$$

Переходя в неравенстве (10.30) к пределу при $\max\limits_{1 \le k \le n} l_k \to 0$ и учитывая соотношения (10.31), (10.32), получаем оценку (10.29).

10.10. Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой γ и

$$|f(z)| \le M, \ \forall z \in \gamma , \tag{10.33}$$

то

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \le M\ l_{\gamma} , \tag{10.34}$$

где l_{γ} – длина кривой γ.

Действительно, в силу (10.30), (10.33)

$$\left|S_n\right| \le M\sum_{k=1}^{n} l_k ,$$

или в силу того, что $\sum\limits_{k=1}^{n} l_k = l_\gamma$,

$$\left|S_n\right| \le M\ l_\gamma . \qquad (10.35)$$

Переходя в неравенстве (10.35) к пределу при $\max\limits_{1\le k\le n} l_k \to 0$, получаем оценку (10.34).

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ непрерывна на гладкой кривой γ. Тогда в силу замечания 5.10 вещественная функция (10.28) двух вещественных переменных x, y непрерывна на кривой γ. Заметим, что гладкая кривая γ является замкнутым ограниченным множеством. Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса для функций двух переменных [2.8, с. 496] $\exists \max\limits_{z\in\gamma}\left|f(z)\right|$.

10.11. Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой γ, то

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \max_{z\in\gamma}\left|f(z)\right|\cdot l_\gamma . \qquad (10.36)$$

Заметим, что оценка (10.36) является частным случаем оценки (10.34).

Замечание 10.3. Если функция $w = f(z)$ определена и непрерывна на кусочно-гладкой кривой $\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{m}\gamma_i$, то интеграл функции $f(z)$ вдоль кривой γ можно определить формулой

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_m} f(z)dz$$

или в краткой записи

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma_i} f(z)dz .$$

Замечание 10.4. Свойства 10.1 – 10.11 интегралов функций комплексного переменного сохраняют силу также в случае, когда в качестве пути интегрирования выступает кусочно-гладкая кривая, а подынтегральная функция непрерывна на этой кривой.

Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна на гладком или кусочно-гладком положительно ориентированном замкнутом простом контуре γ. Тогда для интеграла функции $f(z)$ вдоль контура γ используют обозначение

$$\oint_\gamma f(z)dz \qquad (10.37)$$

а для интеграла функции $f(z)$ вдоль отрицательно ориентированного замкнутого простого контура $\overleftarrow{\gamma}$ – обозначение

$$\oint_\gamma f(z)dz . \qquad (10.38)$$

Интегралы вида (10.37), (10.38) называют *контурными интегралами*.

11. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

Формула Грина; интегральная теорема Коши для односвязной области; независимость интеграла аналитической функции от пути интегрирования; теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом интегрирования; формула Ньютона-Лейбница; формула интегрирования по частям; интегральная теорема Коши для многосвязной области.

При доказательстве интегральной теоремы Коши для односвязной области будет использована формула Грина [2.3, с. 288], позволяющая выразить криволинейный интеграл второго рода вдоль замкнутой простой кривой через двойной интеграл по области, ограниченной этой кривой: пусть вещественные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вещественных переменных x, y определены и непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в односвязной области D и на её гладкой или кусочно-гладкой границе Γ_D; тогда справедлива формула

$$\oint_{\Gamma_D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right]dxdy . \quad (11.1)$$

Докажем *интегральную теорему Коши для односвязной области.*

Теорема 11.1. Пусть функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексного переменного $z=x+iy$ определена в односвязной области D и удовлетворяет следующим условиям:

а) $f(z)$ аналитична в области D;

б) $f'(z)$ непрерывна в области D.

Тогда интеграл функции $f(z)$ вдоль любого положительно ориентированного замкнутого простого гладкого или кусочно-гладкого контура $\gamma\subset D$ равен нулю:

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz=0\,. \tag{11.2}$$

Пусть γ – положительно ориентированный замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур, расположенный в D; D_1 – внутренность контура γ (рис. 11.1).

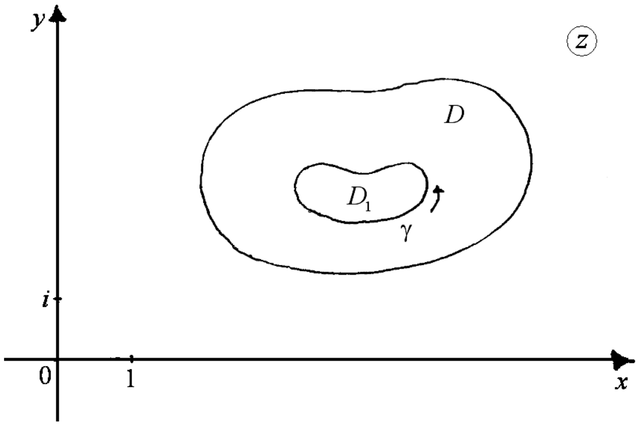

Рис. 11.1

В силу односвязности области D справедливо включение $D_1\subset D$. Следовательно, в силу условия а) функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D_1}=D_1\cup\gamma$. Тогда в силу следствий 8.1, 5.3 функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в $\overline{D_1}$, в частности, непрерывны на γ. По формуле (10.10)

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz=\oint\limits_{\gamma} u(x,y)\,dx-v(x,y)\,dy+i\oint\limits_{\gamma} v(x,y)\,dx+u(x,y)\,dy\,. \tag{11.3}$$

Из формул (8.32), (8.35), условия б) и следствия 5.3 вытекает, что частные производные первого порядка функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в $\overline{D_1}$. Следовательно, к каждому из интегралов в правой части (11.3) можно применить формулу (11.1):

$$I_1=\oint\limits_{\gamma} u(x,y)\,dx-v(x,y)\,dy=\iint\limits_{D_1}\left[-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]dxdy\,, \tag{11.4}$$

$$I_2=\oint\limits_{\gamma} v(x,y)\,dx+u(x,y)\,dy=\iint\limits_{D_1}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]dxdy\,. \tag{11.5}$$

В силу условия а) и теоремы 9.3 в области D, в частности, в замкнутой области $\overline{D_1}$ выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,. \tag{11.6}$$

В силу (11.6) подынтегральные функции в правых частях формул (11.4), (11.5) равны нулю, следовательно, $I_1=0$, $I_2=0$. Тогда, в силу (11.3), справедлива формула (11.2).

Теорему 11.1 можно сформулировать в следующем виде [1.4, с. 153]:

Теорема 11.1′. Пусть

а′) функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и на ограничивающем её замкнутом простом гладком или кусочно-гладком контуре Γ_D, т.е. аналитична в замкнутой области $\overline{D_1}=D\cup\Gamma_D$;

б′) производная $f'(z)$ непрерывна в $\overline{D}$.

Тогда

$$\oint_{\Gamma_D} f(z)\,dz = 0 .$$

Замечание 11.1. Условие а′) означает, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой области D_*, включающей в себя $\overline{D}$: $D_* \supset \overline{D}$.

Замечание 11.2. Теорема 11.1 (теорема 11.1′) сохраняют силу без условия б) (условия б′), однако доказательство теоремы 11.1 (теоремы 11.1′), не использующее условие б) (условие б′), существенно усложняется [1.2, с. 145].

Следствие 11.1. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то для произвольных точек $z_1, z_2 \in D$ и любых простых гладких или кусочно-гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, соединяющих точки z_1 и z_2, выполняется равенство

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz . \tag{11.7}$$

Действительно, пусть $z_1, z_2 \in D$; γ_1, γ_2 – простые гладкие или кусочно-гладкие кривые, соединяющие точки z_1 и z_2 и расположенные в области D (рис. 11.2).

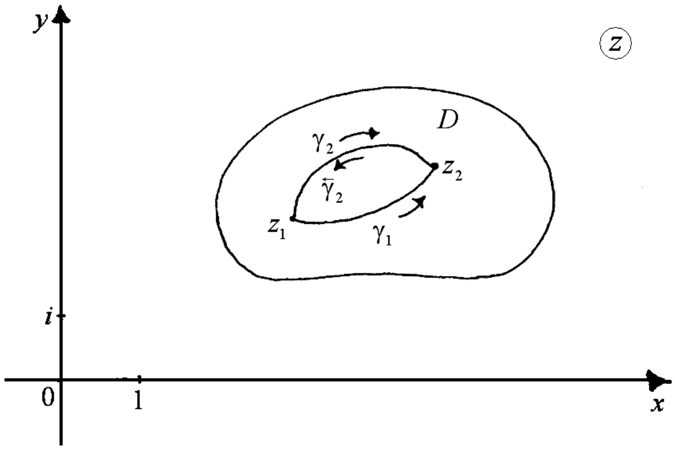

Рис. 11.2

Рассмотрим замкнутый простой контур $\gamma = \gamma_1 \cup \bar{\gamma}_2$. Контур γ является гладким или кусочно-гладким как объединение двух гладких или кусочно-гладких кривых.

В силу теоремы 11.1

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0 . \tag{11.8}$$

В силу (10.26)

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\bar{\gamma}_2} f(z)\,dz . \tag{11.9}$$

В силу (10.24)

$$\int_{\bar{\gamma}_2} f(z)dz = -\int_{\gamma_2} f(z)dz . \tag{11.10}$$

В силу (11.8) – (11.10)

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0 ,$$

откуда следует равенство (11.7).

Таким образом, если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то для любой простой гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset D$, соединяющей две данные точки $z_1, z_2 \in D$, выполняется соотношение

$$\int_{\gamma} f(z)dz \equiv c - \mathrm{const} , \tag{11.11}$$

т.е. такой интеграл не зависит от выбора пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования. Следовательно, такой интеграл можно обозначить как

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz , \tag{11.12}$$

при этом z_1 и z_2 называются *пределами интегрирования* (соответственно, *нижним* и *верхним*).

Интеграл (11.11) можно вычислить по *формуле Ньютона-Лейбница*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)\,, \qquad (11.13)$$

где $\Phi(z)$ – первообразная функции $f(z)$ в области D (это означает, по определению, что $\Phi(z)$ аналитична в D и $\Phi'(z) = f(z)$).

Покажем справедливость формулы (11.13). Для этого докажем вначале *теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом интегрирования*.

Теорема 11.2. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и для произвольных точек $z_1, z_2 \in D$ и любых простых гладких или кусочно-гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, соединяющих точки z_1 и z_2, выполняется условие (11.7). Тогда при любом фиксированном $z_0 \in D$ функция

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\,,\ z \in D\,, \qquad (11.14)$$

аналитична в области D и

$$F'(z) = f(z)\,. \qquad (11.15)$$

Пусть z – произвольная фиксированная точка из D. По определению производной

$$F'(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z}\,.$$

Следовательно, нужно показать, что

$$\exists \lim_{z_1 \to z} \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} = f(z)\,, \qquad (11.16)$$

т.е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\, O_\delta(z), \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall z_1 \in \dot{O}_\delta(z) \Rightarrow$

$$\left| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right| < \varepsilon\,. \qquad (11.17)$$

Возьмём произвольное фиксированное $\varepsilon > 0$. По условию теоремы функция $f(\zeta)$ непрерывна в области D, в частности, она непрерывна во взятой точке $z \in D$. Следовательно,

$$\text{для } \frac{\varepsilon}{2}\ \ \exists\, O_\delta(z), \delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \delta(\varepsilon) \mid \forall \zeta \in O_\delta(z) \Rightarrow \left| f(\zeta) - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \quad (11.18)$$

Рассмотрим произвольное фиксированное $z_1 \in \dot{O}_\delta(z)$. В качестве кривой, соединяющей точки z_0 и z_1 рассмотрим кривую $L = \gamma \cup \gamma_1$, где γ – какая-либо гладкая кривая, соединяющая точки z_0 и z; γ_1 – прямолинейный отрезок, соединяющий точки z и z_1 (рис. 11.3).

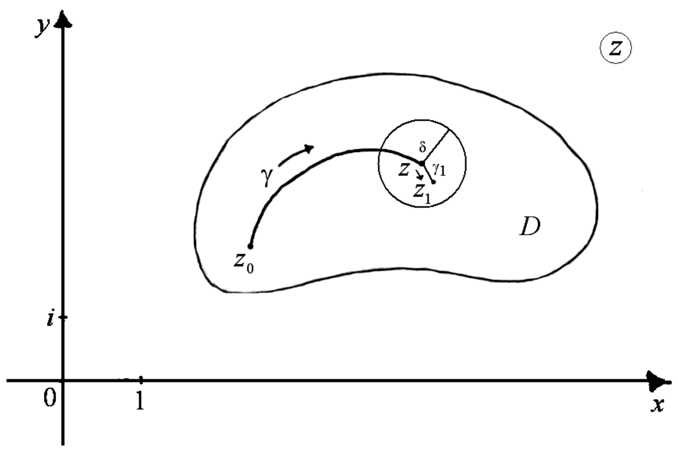

Рис. 11.3

Используя формулу (10.26), получаем

$$F(z_1)=\int\limits_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta=\int\limits_{L} f(\zeta)d\zeta=\int\limits_{\gamma} f(\zeta)d\zeta+\int\limits_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta=$$

$$=\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta+\int\limits_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta=F(z)+\int\limits_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta .$$

Тогда

$$F(z_1)-F(z)=\int\limits_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta . \tag{11.19}$$

В силу (10.21), (10.25)

$$f(z)=\frac{1}{z_1-z}\int\limits_{\gamma_1} f(z)d\zeta . \tag{11.20}$$

В силу (11.19), (11.20) и формулы (10.20)

$$\frac{F(z_1)-F(z)}{z_1-z}-f(z)=\frac{1}{z_1-z}\int\limits_{\gamma_1}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta .$$

В силу включения $\gamma\subset O_\delta(z)$ и соотношения (11.18)

$$|f(\zeta)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall\zeta\in\gamma_1 .$$

Тогда, используя оценку (10.34) и учитывая равенство $l_{\gamma_1}=|z_1-z|$, имеем

$$\left|\frac{F(z_1)-F(z)}{z_1-z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{z_1-z}\int\limits_{\gamma_1}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right|=$$

$$=\frac{1}{|z_1-z|}\left|\int\limits_{\gamma_1}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right|\le\frac{1}{|z_1-z|}\ \frac{\varepsilon}{2}l_{\gamma_1}=\frac{1}{|z_1-z|}\ \frac{\varepsilon}{2}|z_1-z|=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon ,$$

т.е.

$$\left|\frac{F(z_1)-F(z)}{z_1-z}-f(z)\right|<\varepsilon .$$

Утверждение (11.17) доказано.◄

В силу теоремы 11.2 функция (11.14) является первообразной функции $f(z)$ в области D.

Замечание 11.3. Если $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ – первообразные для функции $f(z)$ в области D, то $\Phi_1(z)-\Phi_2(z)=C-\text{const}$, $\forall z\in D$.

Действительно, положим $g(z)=\Phi_1(z)-\Phi_2(z)$. Тогда $g'(z)=$ $=[\Phi_1(z)-\Phi_2(z)]'=\Phi_1'(z)-\Phi_2'(z)=f(z)-f(z)=0$. Получили $g'(z)=0,\ \ \forall z\in D$. Пусть $g(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Тогда в силу формул (8.32), (8.35)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0\ \Rightarrow u(x,y)=C_1-\text{const},\ \forall(x,y)\in D;$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=0\ \Rightarrow v(x,y)=C_2-\text{const},\ \forall(x,y)\in D.$$

Следовательно, $g(z)=u(x,y)+iv(x,y)=C_1+iC_2=C-\text{const}$,

$\forall(x,y)\in D$, т.е. $\Phi_1(z)-\Phi_2(z)=C-\text{const}$, $\forall z\in D$.

Теорема 11.3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, а $\Phi(z)$ – некоторая первообразная функции $f(z)$ в D. Тогда для любых $z_1,z_2\in D$ справедлива формула (11.13).

► Рассмотрим произвольные фиксированные $z_1,z_2\in D$. В силу замечания 9.3 функция $f(z)$ непрерывна в области D. Следовательно, в силу теоремы 11.2 функция

$$F(z)=\int\limits_{z_1}^{z} f(\zeta)d\zeta,\ z\in D,$$

является первообразной функции $f(z)$ в области D.

В силу замечания 11.3 $F(z) = \Phi(z) + C$, где $C - \text{const}$, т.е.

$$\int_{z_1}^{z} f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) + C \, . \tag{11.21}$$

Полагая в (11.21) $z = z_1$, получаем $0 = \Phi(z_1) + C$, откуда $C = -\Phi(z_1)$. Тогда (11.21) принимает вид

$$\int_{z_1}^{z} f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_1). \tag{11.22}$$

Полагая в (11.22) $z = z_2$, получаем формулу (11.13). ◄

Пример 11.1. Вычислим

$$\int_{\gamma} \left(z^2 + \cos z \right) dz \, ,$$

где γ – ломаная, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$ (рис.11.4).

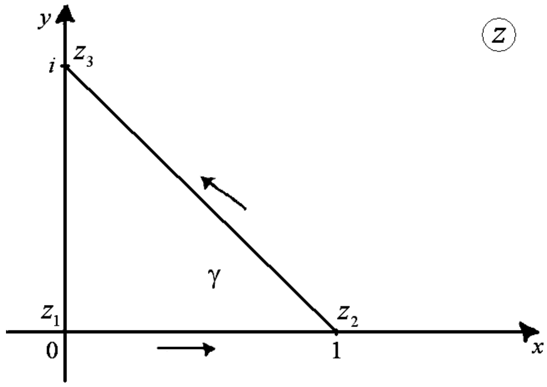

Рис. 11.4

Подынтегральная функция $f(z) = z^2 + \cos z$ аналитична на комплексной плоскости X как сумма двух аналитических на X функций (см. примеры 9.1, 9.3, теорему 9.5). Кривая γ является простой кусочно-гладкой кривой. Следовательно, применима формула Ньютона-Лейбница. Первообразной функции $f(z)$ является функция $\Phi(z) = \frac{1}{3} z^3 + \sin z$. Действительно, применяя формулы (8.41), (8.46), (8.3), (8.39), получаем $\Phi'(z) = z^2 + \cos z = f(z)$.

По формуле (11.13)

$$I = \int_{\gamma} \left(z^2 + \cos z \right) dz = \int_{0}^{i} \left(z^2 + \cos z \right) dz = \left(\frac{1}{3} z^3 + \sin z \right) \Bigg|_0^i =$$

$$= \left(\frac{1}{3} i^3 + \sin i \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + \sin 0 \right) = -\frac{1}{3} i + i \text{ sh} 1 = i \left(\text{sh}1 - \frac{1}{3} \right)$$

(использована формула (6.36)). Получили $I = i \left(\text{sh}1 - \frac{1}{3} \right)$.

Для функций, аналитических в односвязной области, справедлива *формула интегрирования по частям*.

Теорема 11.4. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в одно-связной области D . Тогда для любой простой гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset D$, соединяющей две данные точки $z_1, z_2 \in D$ справедлива формула

$$\int_{\gamma} f(z) d\left[g(z) \right] = \int_{z_1}^{z_2} f(z) d\left[g(z) \right] = f(z) g(z) \Bigg|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g(z) d\left[f(z) \right] . \tag{11.23}$$

► Пусть $z_1, z_2 \in D$; γ – простая гладкая или кусочно-гладкая кривая с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 , расположенная в D. Позже будет показано (см. следствие 12.1), что производная аналитической в односвязной области функции является аналитической функцией в этой области. В силу этого производные $f'(z)$, $g'(z)$ аналитичных в D функций $f(z)$, $g(z)$ аналитичны в D . Следовательно, в силу теоремы 9.5 функции $f'(z) g(z)$, $f(z) g'(z)$, $f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$, $f(z) g(z)$ аналитичны в области D . В силу следствия 11.1

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f'(z)g(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} g(z)d\left[f(z)\right],$$

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)d\left[g(z)\right].$$

Тогда

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z)dz + \int_{\gamma} f(z)g'(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} g(z)d\left[f(z)\right] + \int_{z_1}^{z_2} f(z)d\left[g(z)\right]. \quad (11.24)$$

С другой стороны, используя формулы (10.19), (8.43), (11.13), получаем

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z)dz + \int_{\gamma} f(z)g'(z)dz = \int_{\gamma}\left[f'(z)g(z) + f(z)g'(z)\right]dz =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2}\left[f'(z)g(z) + f(z)g'(z)\right]dz =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2}\left[f(z)g(z)\right]'dz = \int_{z_1}^{z_2} d\left[f(z)g(z)\right] = f(z)g(z)\Big|_{z_1}^{z_2}. \quad (11.25)$$

В силу (11.24), (11.25)

$$\int_{z_1}^{z_2} g(z)d\left[f(z)\right] + \int_{z_1}^{z_2} f(z)d\left[g(z)\right] = f(z)g(z)\Big|_{z_1}^{z_2},$$

откуда следует формула (11.23).

Пример 11.2. Вычислим

$$\int_{\gamma} z\cos z dz,$$

где γ – правая половина окружности $S_{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)$ с началом в точке $z_1 = i$ и концом в точке $z_2 = 0$ (рис.11.5).

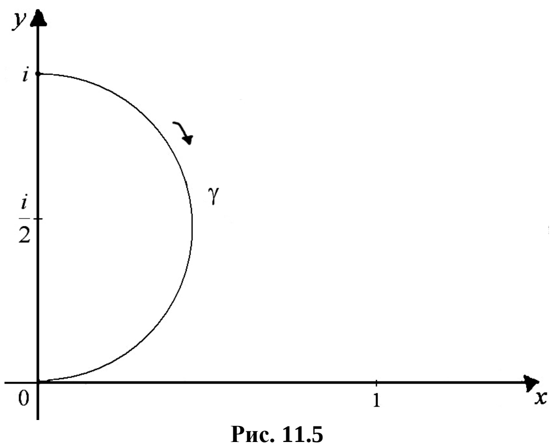

Рис. 11.5

В силу (8.39) $\cos z dz = d(\sin z)$. Функции z, $\sin z$ аналитичны на комплексной плоскости X (см. примеры 9.1, 9.3). Кривая γ является простой гладкой кривой. Следовательно, применима формула (11.23):

$$I = \int_{\gamma} z\cos z dz = \int_{i}^{0} z d\left(\sin z\right) = z\sin z\Big|_{i}^{0} - \int_{i}^{0}\sin z dz =$$

$$= 0\sin 0 - i\sin i + \cos z\Big|_{i}^{0} = -i\sin i + \cos 0 - \cos i = \text{sh}1 + 1 - \text{ch}1 =$$

$$= 1 + \frac{e^1 - e^{-1}}{2} - \frac{e^1 + e^{-1}}{2} = 1 - \frac{1}{e}$$

(использованы формулы (8.40), (6.36), (6.37), (6.30)). Получили $I = 1 - \frac{1}{e}$.

Докажем *интегральную теорему Коши для многосвязной области* (*интегральную теорему Коши о составном контуре*).

Теорема 11.5. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области G; D – n-связная область с положительно ориентированной границей

$$\varGamma_D = \varGamma_0 \cup \bar{\varGamma}_1 \cup \bar{\varGamma}_2 \cup \ldots \cup \bar{\varGamma}_{n-1},$$

расположенная вместе со своей границей в области G, т.е. $\overline{D} = D \cup \varGamma_D \subset G$ (рис. 11.6). Тогда

$$\int\limits_{\varGamma_D} f(z)dz = 0\,. \tag{11.26}$$

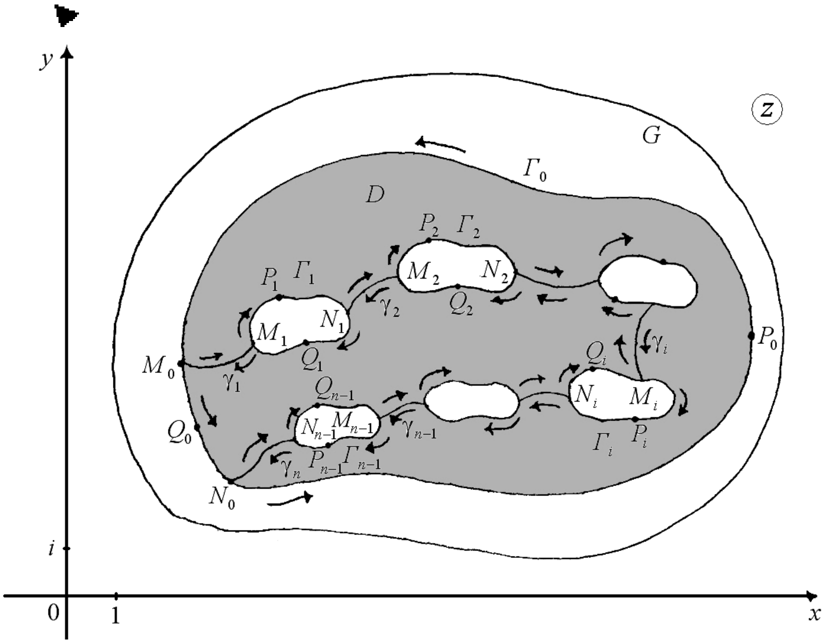

Рис. 11.6

Выберем на контуре $\varGamma_0$ точку M_0 и соединим её простой гладкой кривой γ_1 с некоторой точкой M_1 на контуре $\varGamma_1$; выберем на контуре $\varGamma_1$ точку N_1 и соединим её простой гладкой кривой γ_2 с некоторой точкой M_2 на контуре $\varGamma_2$ и т.д. Рассмотрим положительно ориентированные замкнутые простые кусочно-гладкие контуры

$$L_1 = \gamma_1 \cup M_1P_1N_1 \cup \gamma_2 \cup M_2P_2N_2 \cup \ldots \cup \gamma_i \cup M_iP_iN_i \cup \ldots \cup \gamma_n \cup N_0P_0M_0\,,$$

$$L_2 = M_0Q_0N_0 \cup \bar{\gamma}_n \cup N_{n-1}Q_{n-1}M_{n-1} \cup \ldots \cup N_iQ_iM_i \cup \bar{\gamma}_i \cup \ldots$$

$$\ldots \cup N_2Q_2M_2 \cup \bar{\gamma}_2 \cup N_1Q_1M_1 \cup \bar{\gamma}_1\,.$$

В силу теоремы 11.1 и замечания 11.2

$$\oint\limits_{L_1} f(z)dz = 0\,,\ \oint\limits_{L_2} f(z)dz = 0\,,$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz = 0\,. \tag{11.27}$$

С другой стороны, используя свойства (10.27), (10.24), получаем

$$\oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz = \oint\limits_{\varGamma_0} f(z)dz + \oint\limits_{\varGamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\varGamma_2} f(z)dz + \ldots$$

$$\ldots + \oint\limits_{\varGamma_{n-1}} f(z)dz = \int\limits_{\varGamma_0 \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \bar{\varGamma}_i\right)} f(z)dz = \int\limits_{\varGamma_D} f(z)dz\,. \tag{11.28}$$

Из (11.27), (11.28) следует формула (11.26).

В более подробной записи формула (11.26) имеет вид

$$\oint\limits_{\varGamma_0} f(z)dz + \oint\limits_{\varGamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\varGamma_2} f(z)dz + \ldots + \oint\limits_{\varGamma_{n-1}} f(z)dz = 0\,. \tag{11.29}$$

В силу (11.29)

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)\,dz = -\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz - \ldots - \oint_{\Gamma_{n-1}} f(z)\,dz$$

или в силу свойства (10.24)

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{\Gamma_{n-1}} f(z)\,dz\,. \tag{11.30}$$

Таким образом, если функция $f(z)$ аналитична в n-связной области D и на её границе Γ_D, то интеграл функции $f(z)$ вдоль положительно ориентированной внешней границы Γ_0 равен сумме интегралов функции $f(z)$ вдоль положительно ориентированных замкнутых контуров Γ_i, $1 \le i \le n-1$, составляющих внутреннюю границу области D.

В частности, если функция $f(z)$ аналитична в двусвязной области D и на её границе $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, то

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz \tag{11.31}$$

(рис. 11.7).

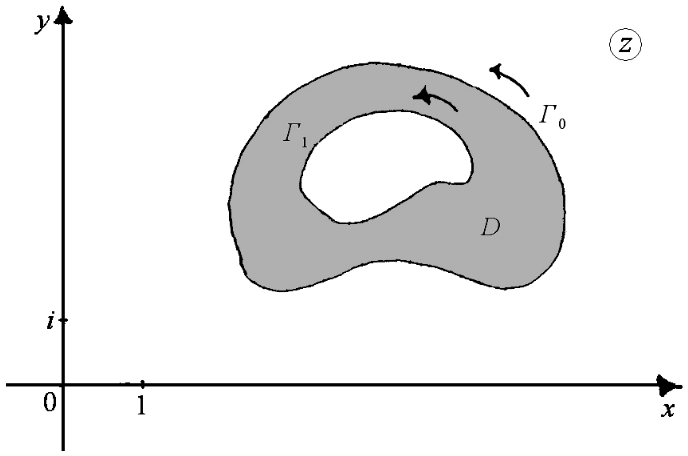

Рис. 11.7

12. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ. ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА МОРЕРА

Интегральная формула Коши; интеграл Коши; интеграл типа Коши; теорема о бесконечной дифференцируемости интеграла типа Коши; теорема о бесконечной дифференцируемости аналитической функции; обобщённая интегральная формула Коши; теорема Морера.

В дальнейшем понадобится следующий факт: если γ – окружность с центром в точке z_0 радиуса ρ, то

$$\oint_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 2\pi i\,. \tag{12.1}$$

Действительно,

$$\oint_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \left| \begin{array}{l} \zeta - z_0 = \rho e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \zeta = z_0 + \rho e^{i\varphi} \\ d\zeta = \rho e^{i\varphi} i\,d\varphi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\varphi} i\,d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = i\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i\,.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 12.1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и на её границе Γ. Тогда справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta\,,\ \forall z_0 \in D\,. \tag{12.2}$$

Зафиксируем произвольное $z_0 \in D$. Рассмотрим окружность γ с центром в точке z_0 радиуса ρ, такую что $\gamma \subset D$ (рис. 12.1).

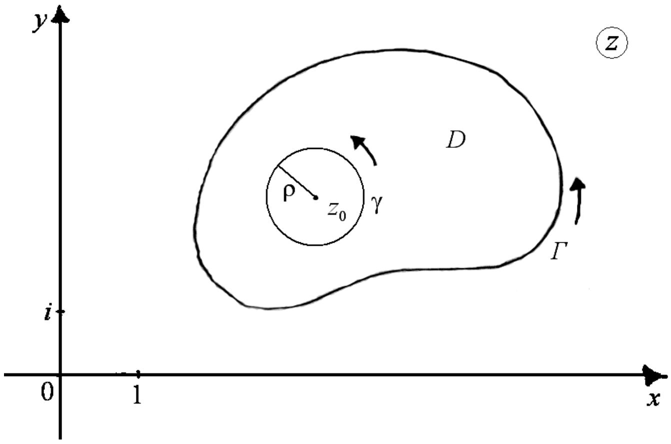

Рис. 12.1

Рассмотрим двусвязную область G с границей $\Gamma_G = \Gamma \cup \gamma$. Подынтегральная функция $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$ имеет особую точку $\zeta = z_0$, но $z_0 \overline{\in} \overline{G} = G \cup \Gamma_G$. Следовательно, $g(\zeta)$ аналитична в $\overline{G}$. В силу формулы (11.31)

$$\oint_{\Gamma} g(\zeta)\,d\zeta = \oint_{\gamma} g(\zeta)\,d\zeta .$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta . \tag{12.3}$$

$$\forall \gamma = S_\rho(z_0) \mid \gamma \subset D . \tag{12.4}$$

Так как z_0 фиксировано, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = A - \mathrm{const} . \tag{12.5}$$

В силу (12.3), (12.5)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = A - \mathrm{const}$$

для любой окружности γ, удовлетворяющей условию (12.4).

Для справедливости (12.2) осталось показать, что $A = f(z_0)$. Π: $A \neq f(z_0)$. Тогда $A - f(z_0) \neq 0$, следовательно, $\left|A - f(z_0)\right| > 0$. Возьмём произвольное фиксированное $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon < \left|A - f(z_0)\right| . \tag{12.6}$$

По условию теоремы функция $f(\zeta)$ аналитична в области D, в частности, она аналитична в точке z_0. Следовательно, в силу теоремы 9.1 $f(\zeta)$ непрерывна в некоторой окрестности точки z_0, в частности, непрерывна в точке z_0. По определению непрерывности функции в точке, для взятого числа $\varepsilon > 0$ $\exists O_\delta(z_0) \mid$

$$\forall \zeta \in O_\delta(z_0) \Rightarrow \left|f(\zeta) - f(z_0)\right| < \varepsilon . \tag{12.7}$$

Возьмём радиус ρ окружности $\gamma = S_\rho(z_0)$, удовлетворяющей условию (12.4), таким что $\rho < \delta$. Тогда $\gamma \subset O_\delta(z_0)$, следовательно, в силу (12.7)

$$\forall \zeta \in \gamma \Rightarrow \left|f(\zeta) - f(z_0)\right| < \varepsilon . \tag{12.8}$$

В силу формулы (12.1) справедливо представление

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0}\,d\zeta .$$

Тогда

$$A - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta .$$

Используя оценки (10.36), (12.8) и равенства $l_\gamma = 2\pi\rho$, $|\zeta - z_0| = \rho$, $\forall \zeta \in \gamma$, имеем

$$\left|A - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} l_\gamma \cdot \max_{\zeta \in \gamma} \left|\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}\right| = \frac{1}{2\pi} l_\gamma \cdot \max_{\zeta \in \gamma} \frac{\left|f(\zeta) - f(z_0)\right|}{|\zeta - z_0|} \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} l_\gamma \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{1}{2\pi} 2\pi\rho \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon .$$

Получили $\left|A - f(z_0)\right| \le \varepsilon$, что противоречит условию (12.6).

Соотношение (12.2) называется *интегральной формулой Коши*.

Таким образом, если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и на её границе Γ, то интегральная формула Коши позволяет восстановить значение этой функции в произвольной точке области D через её значения на границе Γ, ибо для вычисления интеграла в правой части формулы (12.2) достаточно знать значения функции $f(z)$ на границе Γ.

Заменяя в формуле (12.2.) z_0 на z, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta , \quad \forall z \in D . \tag{12.9}$$

Правая часть формулы (12.9) называется *интегралом Коши по контуру Γ от функции $f(z)$*. Обозначение:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta . \tag{12.10}$$

Заметим, что интеграл Коши (12.10) определён для любого $z \in \mathrm{X} \setminus \Gamma$. Если $z \in D$, то в силу (12.9) $I(z) = f(z)$. Если $z \in \mathrm{X} \setminus \overline{D}$, где $\overline{D} = D \cup \Gamma$, то подынтегральная функция

$$g(z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

аналитична в замкнутой области $\overline{D}$. Следовательно, в силу теоремы 11.1′ и замечания 11.2 $\oint_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$ и, значит, $I(z) = 0$. Получили

$$I(z) = \begin{cases} f(z), z \in D, \\ 0, \quad z \in \mathrm{X} \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Из (12.2) следует, что

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i f(z_0) . \tag{12.11}$$

Формула (12.11) называется *следствием интегральной формулы Коши*.

Заменяя в формулах (12.2), (12.11) ζ на z, получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz , \quad \forall z_0 \in D , \tag{12.12}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) , \quad \forall z_0 \in D . \tag{12.13}$$

Формула (12.13) применяется при вычислении *контурных интегралов*, т.е. интегралов по замкнутым контурам.

Ещё раз подчеркнём, что формула (12.13) справедлива при условии, что функция $f(z)$ аналитична на замкнутом простом контуре Γ и в односвязной области D, ограниченной этим контуром, т.е. не имеет особых точек в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Пример 12.1. Вычислим контурный интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{z dz}{z^2 - 1} ,$$

где Γ – окружность с центром в точке $z_* = -2$ радиуса 2. Подынтегральная функция

$$g(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

аналитична на множестве $X\setminus\{-1;1\}$ как частное двух аналитических на этом множестве функций (см. теорему 9.5, пример 9.3), т.е. $g(z)$ имеет лишь две особые точки $z_1=-1,\ z_2=1$ (z_1 и z_2 являются изолированными особыми точками функции $g(z)$). Пусть D – внутренность кривой Γ (рис. 12.2).

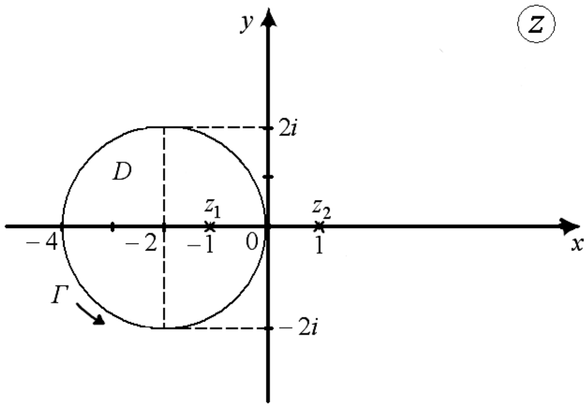

Рис. 12.2

Запишем функцию $g(z)$ в виде

$$g(z)=\frac{\frac{z}{z-1}}{z-(-1)}.$$

Функция $f(z)=\frac{z}{z-1}$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}=D\cup\Gamma$ (функция $f(z)$ имеет единственную особую точку $z_2=1$, но $z_2\,\overline{\in}\,\overline{D}$). Следовательно, применима формула (12.13):

$$I=\oint_\Gamma\frac{zdz}{z^2-1}=\oint_\Gamma\frac{\frac{z}{z-1}}{z-(-1)}dz=2\pi i f(-1)=2\pi i\cdot\frac{-1}{-1-1}=\pi i;\ I=\pi i.$$

Пусть требуется вычислить контурный интеграл вида

$$\oint_\Gamma\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz, \qquad (12.14)$$

где Γ – замкнутый простой контур; функция $f(z)$ аналитична на Γ и в односвязной области D, ограниченной кривой Γ; $z_1,z_2\in D$. Построим непересекающиеся между собой и не выходящие за пределы области D замкнутые простые гладкие или кусочно-гладкие контуры Γ_1 и Γ_2, охватывающие соответственно точки z_1 и z_2 (в качестве контуров Γ_1 и Γ_2 можно взять две непересекающиеся между собой окружности с центрами в точках z_1 и z_2 соответственно, не выходящие за пределы области D) (рис. 12.3).

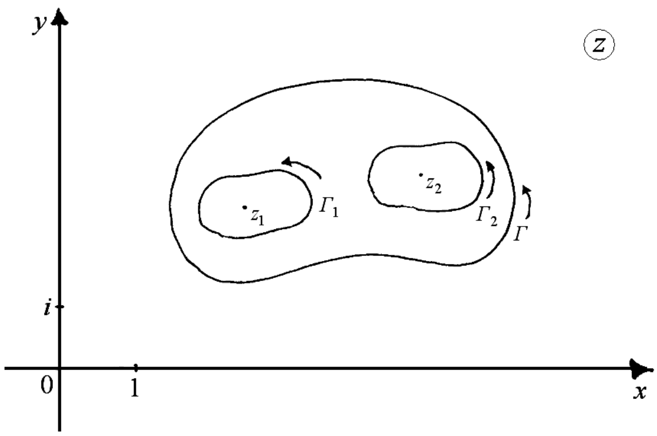

Рис. 12.3

Рассмотрим трёхсвязную область Ω с границей $\Gamma_\Omega=\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Подынтегральная функция

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

аналитична на $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma_\Omega$, т.е. аналитична в некоторой области $G\supset\overline{\Omega}$. Следовательно, в силу интегральной теоремы Коши для многосвязной области (см. формулу (11.30))

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz . \quad (12.15)$$

Каждый из интегралов в правой части (12.15) вычисляется по формуле (12.13):

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{f(z)}{z-z_2}}{z-z_1} dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{f(z)}{z-z_2} \right|_{z=z_1} ,$$

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = \oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{f(z)}{z-z_1}}{z-z_2} dz = 2\pi i \cdot \left. \frac{f(z)}{z-z_1} \right|_{z=z_2} .$$

Аналогично поступают, если в знаменателе подынтегрального выражения в интеграле типа (12.14) содержится более двух множителей.

Пример 12.2. Вычислим контурный интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2+9)(z+5)} ,$$

где Γ – окружность с центром в точке $z_* = 0$ радиуса 4. Подынтегральная функция

$$g(z) = \frac{1}{(z^2+9)(z+5)}$$

аналитична на множестве $\mathrm{X} \setminus \{-3i; 3i; -5\}$, т.е. $g(z)$ имеет лишь три особые точки $z_1 = -3i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -5$. Пусть D – внутренность кривой Γ. Рассмотрим окружности Γ_1, Γ_2 с центром в точках $z_1 = -3i$ и $z_2 = 3i$ соответственно, такие что $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset D$. Пусть D_1 и D_2 – внутренности кривых Γ_1 и Γ_2 соответственно (рис. 12.4).

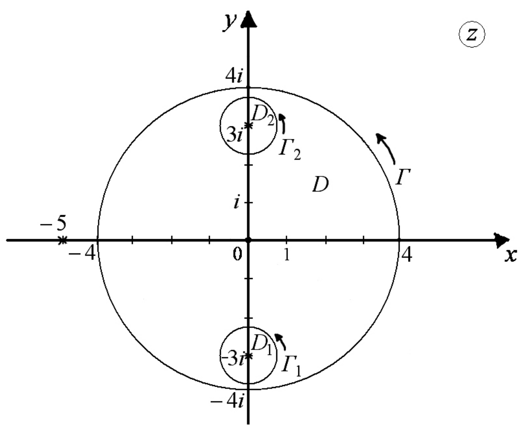

Рис. 12.4

Рассмотрим трёхсвязную область Ω с границей $\Gamma_{\Omega} = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Функция $g(z)$ аналитична на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma_{\Omega}$, ибо её особые точки $z_1 = -3i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -5$ не принадлежат множеству $\overline{\Omega}$. По формуле (11.30)

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2+9)(z+5)} = \oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z^2+9)(z+5)} + \oint_{\Gamma_2} \frac{dz}{(z^2+9)(z+5)} .$$

Вычислим

$$I_1 = \oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z^2+9)(z+5)} .$$

Запишем функцию $g(z)$ в виде

$$g(z) = \frac{\frac{1}{(z-3i)(z+5)}}{z-(-3i)} .$$

Функция $f_1(z)=\dfrac{1}{(z-3i)(z+5)}$ аналитична в замкнутой области $\overline{D_1}=D_1\cup\Gamma_1$ (функция $f_1(z)$ имеет две особые точки $z_2=3i$, $z_3=-5$, но $z_2, z_3 \,\overline{\in}\, \overline{D_1}$). По формуле (12.13)

$$I_1=\oint_{\Gamma_1}\frac{\dfrac{1}{(z-3i)(z+5)}}{z-(-3i)}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{1}{(z-3i)(z+5)}\right|_{z=-3i}=$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{(-3i-3i)(-3i+5)}=-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{5-3i}=-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{5+3i}{5^2+(-3)^2}=-\frac{\pi}{102}(5+3i);$$

$I=-\dfrac{\pi}{102}(5+3i)$.

Вычислим

$$I_2=\oint_{\Gamma_2}\frac{dz}{(z^2+9)(z+5)}.$$

Запишем функцию $g(z)$ в виде

$$g(z)=\frac{\dfrac{1}{(z+3i)(z+5)}}{z-3i}.$$

Функция $f_2(z)=\dfrac{1}{(z+3i)(z+5)}$ аналитична в замкнутой области $\overline{D_2}=D_2\cup\Gamma_2$ (функция $f_2(z)$ имеет две особые точки $z_1=-3i,\;\; z_3=-5$, но $z_1, z_3 \,\overline{\in}\, \overline{D_2}$). По формуле (12.13):

$$I_2=\oint_{\Gamma_2}\frac{\dfrac{1}{(z+3i)(z+5)}}{z-3i}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{1}{(z+3i)(z+5)}\right|_{z=3i}==2\pi i\cdot\frac{1}{(3i+3i)(3i+5)}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{5+3i}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{5-3i}{5^2+3^2}=\frac{\pi}{102}(5-3i);$$

$I_2=\dfrac{\pi}{102}(5-3i)$.

$$I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{102}(5+3i)+\frac{\pi}{102}(5-3i)=-\frac{\pi i}{17};$$

$I=-\dfrac{\pi i}{17}$.

Пусть функция $w=f(z)$ определена и непрерывна на гладкой или кусочно-гладкой кривой γ.

Определение 12.1. *Интегралом типа Коши от функции* $f(z)$ *вдоль кривой* γ называется интеграл вида

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\; z\in \mathrm{X}\setminus\gamma. \tag{12.16}$$

Определение 12.1 корректно, ибо при произвольном фиксированном $z\in \mathrm{X}\setminus\gamma$ и любом $\zeta\in\gamma$ выполняется условие $\zeta-z\neq 0$, следовательно, подынтегральная функция $g(\zeta)=f(\zeta)/(\zeta-z)$ непрерывна на γ как отношение двух непрерывных на γ функций (см. следствие 5.4), а, значит, существует интеграл вида (12.16) (см. теорему 10.2, замечание 10.3).

Таким образом, формула (12.16) определяет функцию $I:\mathrm{X}\setminus\gamma\to\mathrm{X}$.

Теорема 12.2. Функция $I(z)$ дифференцируема на множестве $\mathrm{X}\setminus\gamma$ и её производная выражается формулой

$$I'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta. \tag{12.17}$$

► Зафиксируем произвольную точку $z\in\mathrm{X}\setminus\gamma$. По определению производной функции в точке, нужно показать, что

$$\exists\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta I(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta, \tag{12.18}$$

где $\Delta I(z)=I(z+\Delta z)-I(z)$. Пусть $d=\inf\limits_{\zeta\in\gamma}|z-\zeta|$, т.е. d – расстояние от точки z до кривой γ. Тогда

$$|\zeta-z|\geq d,\;\forall\zeta\in\gamma. \tag{12.19}$$

Возьмём $\delta > 0 \mid \delta < \dfrac{d}{2}$. Рассмотрим приращение $\Delta z \mid z + \Delta z \in O_\delta(z)$. Тогда

$$\left|\zeta - (z+\Delta z)\right| > \frac{d}{2}, \ \forall \zeta \in \gamma \tag{12.20}$$

(рис. 12.5).

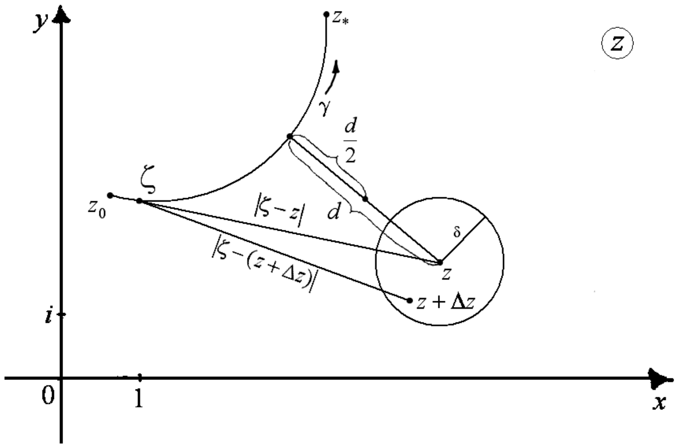

Рис. 12.5

Используя формулы (10.20), (10.21), получаем

$$\Delta I(z) = I(z+\Delta z) - I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right]d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\Delta z}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)}d\zeta =$$

$$= \frac{\Delta z}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)}d\zeta;$$

$$\frac{\Delta I(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)}d\zeta;$$

$$\frac{\Delta I(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)}d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{f(\zeta)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right]d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\Delta z}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)^2}d\zeta = \frac{\Delta z}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)^2}d\zeta.$$

Итак,

$$\frac{\Delta I(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta = \frac{\Delta z}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)^2}d\zeta.$$

Используя формулы (1.20), (1.23), получим

$$\left|\frac{\Delta I(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right| = \frac{|\Delta z|}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)^2}d\zeta\right|. \tag{12.21}$$

Подынтегральная функция

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{[\zeta-(z+\Delta z)](\zeta-z)^2}$$

непрерывна на кривой γ как отношение двух непрерывных на γ функций. Следовательно, (см. замечание 5.10) её модуль

$$|g(\zeta)| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-(z+\Delta z)||\zeta-z|^2}, \tag{12.22}$$

тоже является непрерывной функцией на ограниченном замкнутом множестве γ (напомним, что $|g(\zeta)|$ – вещественная функция двух вещественных переменных). Тогда по первой теореме Вейерштрасса для функций нескольких переменных [2.8, с. 496] $\exists K>0\,|$

$$|f(\zeta)|\le K,\ \forall\zeta\in\gamma. \tag{12.23}$$

Из (12.22) следует в силу (12.19), (12.20), (12.23), что

$$|g(\zeta)|\le\frac{2K}{d^3},\ \forall\zeta\in\gamma.$$

Следовательно, в силу (10.34)

$$\left|\int_\gamma g(\zeta)d\zeta\right|\le\frac{2K}{d^3}l_\gamma, \tag{12.24}$$

где l_γ – длина кривой γ. В силу (12.21), (12.24)

$$\left|\frac{I(\Delta z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|\le\frac{Kl_\gamma}{\pi d^3}|\Delta z|. \tag{12.25}$$

Если $\Delta z=\Delta x+i\Delta y\to 0$, то $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$. Следовательно, при $\Delta z\to 0$ правая часть неравенства (12.25) стремится к нулю. Тогда и левая часть неравенства (12.25) при $\Delta z\to 0$ стремится к нулю, а это означает в силу (5.11) справедливость утверждения (12.18). ◀

Справедливо более сильное утверждение[1.5, с. 45].

Теорема 12.3. Функция $I(z)$ бесконечно дифференцируема на множестве $\mathrm{X}\setminus\gamma$ и для её производной n-го порядка $(n\in\mathrm{N})$ справедлива формула

$$I^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \tag{12.26}$$

Теорема 12.3 доказывается методом математической индукции: при $n=1$ теорема 12.3 доказана (см. теорему 12.2); предполагается, что теорема верна при $n=k$, т.е.

$$\exists\, I^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta$$

и доказывается, что теорема верна при $n=k+1$:

$$\exists\, I^{(k+1)}(z)=\left[I^{(k)}(z)\right]'=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta,$$

т.е. доказывается, что

$$\exists\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta I^{(k)}(z)}{\Delta z}=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta,$$

где $\Delta I^{(k)}(z)=I^{(k)}(z+\Delta z)-I^{(k)}(z)$ (такое доказательство аналогично доказательству теоремы 12.2, однако, из-за увеличения показателя степени в знаменателе подынтегральной функции доказательство усложняется, при этом используется бином Ньютона для комплексных чисел).

С помощью теоремы 12.3 доказывается следующий фундаментальный факт теории функций комплексного переменного.

Теорема 12.4. Аналитическая в области D функция $w=f(z)$ бесконечно дифференцируема в этой области и её производная n-го порядка ($n\in\mathrm{N}$) представима в виде

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, \tag{12.27}$$

где γ – любой замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур, расположенный в области D и охватывающий точку z, внутренность которого содержится в D.

▶ Зафиксируем произвольную точку $z\in D$. Возьмём какой-либо контур γ, удовлетворяющий условиям, указанным в формулировке теоремы. Пусть $I_\gamma=D_1$, где I_γ – внутренность контура γ (рис. 12.6).

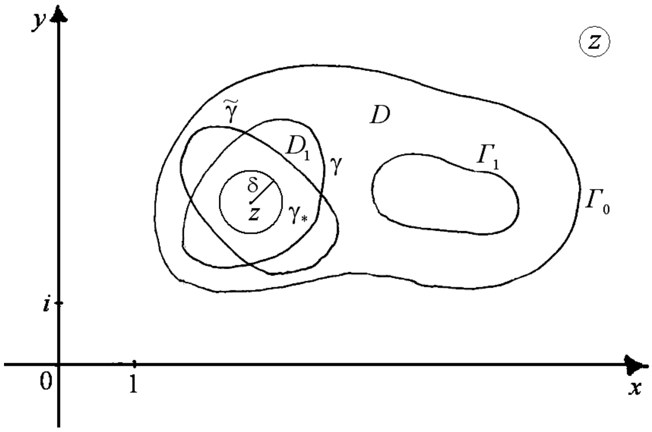

Рис. 12.6

(на рис. 12.6 в качестве D изображена двусвязная область D с границей $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$). По условию теоремы функция $f(\zeta)$ аналитична в области D, в частности, она аналитична в односвязной области D_1 и на её границе γ. Следовательно, применима интегральная формула Коши, в силу которой

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \qquad (12.28)$$

Функция $f(\zeta)$ аналитична на γ, следовательно, в силу замечания 9.3. $f(\zeta)$ непрерывна на γ, а, значит, выражение в правой части (12.28) есть интеграл типа Коши по контуру γ от функции $f(z)$. Тогда, в силу теоремы 12.3, для $\forall n \in \mathrm{N}$ $\exists f^{(n)}(z)$ и в силу (12.26) справедлива формула (12.27). ◄

Замечание 12.1. Значение интеграла в правой части формулы (12.27) не зависит от выбора контура γ (важно лишь, чтобы контур γ удовлетворял условиям теоремы 12.4).

Действительно, пусть $\tilde{\gamma}$ – какой-либо другой контур, удовлетворяющий условиям теоремы 12.4. Возьмём окружность γ_* с центром в точке z, такую что $\gamma_* \subset I_\gamma$ и $\gamma_* \subset I_{\tilde{\gamma}}$. Рассмотрим двусвязные области $\tilde{G}$ с границей $\Gamma_{\tilde{G}} = \tilde{\gamma} \cup \gamma_*$ и G с границей $\Gamma_G = \gamma \cup \gamma_*$. По интегральной теореме Коши для двусвязной области (см. формулу (11.31)) получаем

$$\oint_{\tilde{\gamma}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta = \oint_{\gamma_*}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta,$$

$$\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta = \oint_{\gamma_*}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$$

Следовательно,

$$\oint_{\tilde{\gamma}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta = \oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$$

Замечание 12.2. В случае односвязной области D требование о том, чтобы внутренность контура γ содержалась в D, становится в формулировке теоремы 12.4 лишним (оно выполняется в силу односвя-зности области D).

В качестве контура интегрирования в формуле (12.27) удобно рассматривать окружность γ с центром в точке z, такую что $\gamma \subset D$ и $I_\gamma \subset D$.

Следствие 12.1. Производная любого порядка аналитической в области функции является аналитической функцией в этой области.

Следствие 12.2. Для функции $f(z)$, аналитической в односвя-зной области D и на её границе Γ, т.е. аналитической в некоторой области $G \supset \overline{D}$, где $\overline{D} = D \cup \Gamma$, справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta, \ \forall z_0 \in D, \forall n \in \mathrm{N}. \qquad (12.29)$$

Действительно, чтобы получить формулу (12.29) достаточно в равенстве (12.27) взять в качестве z точку z_0, а в качестве γ контур Γ.

Назовём соотношение (12.29) *обобщённой интегральной формулой Коши*.

Следствие 12.3. Для функции $f(z)$, аналитической в односвязной области D и на её границе Γ справедлива формула

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0), \forall z_0 \in D, \forall n \in \mathrm{N}. \qquad (12.30)$$

Формула (12.30) называется *следствием обобщённой интегральной формулы Коши*.

Заменяя в формулах (12.29), (12.30) переменную интегрирования ζ на z, получаем

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ \forall z_0\in D,\ \forall n\in \mathrm{N}. \qquad (12.31)$$

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0),\ \forall z_0\in D,\ \forall n\in \mathrm{N}. \qquad (12.32)$$

Формула (12.32) применяется при вычислении контурных интегралов (ещё раз подчеркнём, что эта формула справедлива при условии, что функция $f(z)$ аналитична на замкнутом простом гладком или кусочно-гладком контуре Γ и в односвязной области D, ограниченной этим контуром, т.е. $f(z)$ не имеет особых точек в замкнутой области $\overline{D}=D\cup\Gamma$).

Пример 12.3. Вычислим контурный интеграл

$$\oint_{\Gamma}\frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)},$$

где Γ – окружность с центром в точке $z_*=3$ радиуса 6. Подынтегральная функция

$$g(z)=\frac{z}{(z-2)^3(z+4)}$$

аналитична на множестве $\mathrm{X}\setminus\{-4;2\}$ как частное двух аналитических на этом множестве функций, т.е. $g(z)$ имеет лишь две особые точки $z_1=-4$, $z_2=2$. Пусть D – внутренность кривой Γ (рис. 12.7).

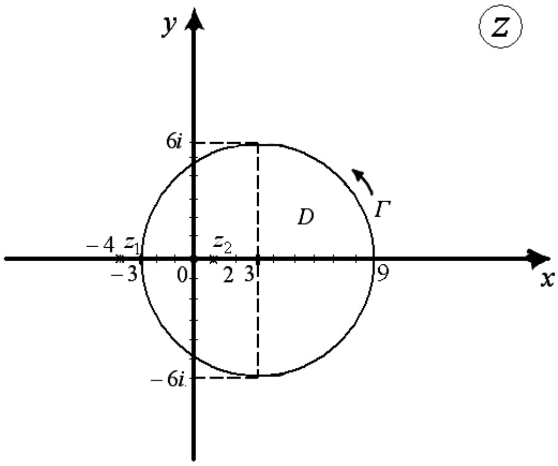

Рис. 12.7

Запишем функцию $g(z)$ в виде

$$g(z)=\frac{\frac{z}{z+4}}{(z-2)^{2+1}}.$$

Функция $f(z)=\dfrac{z}{z+4}$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}=D\cup\Gamma$ ($f(z)$ имеет единственную особую точку $z_1=-4$, но $z_1\overline{\in}\,\overline{D}$). Следовательно, применима формула (12.32):

$$I=\oint_{\Gamma}\frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}=\oint_{\Gamma}\frac{\frac{z}{z+4}}{(z-2)^{2+1}}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(2).$$

Применяя формулу (8.44), получаем

$$f'(z)=\frac{1\cdot(z+4)-z\cdot 1}{(z+4)^2}=\frac{4}{(z+4)^2},$$

$$f''(z)=-\frac{4}{(z+4)^4}\cdot 2(z+4)=-\frac{8}{(z+4)^3}.$$

Тогда $f''(2)=-\dfrac{1}{27}$, $I=\dfrac{2\pi i}{2!}\cdot\left(-\dfrac{1}{27}\right)$, $I=-\dfrac{\pi i}{27}$.

Если требуется вычислить контурный интеграл вида

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_k)^{m_k}}dz,$$

где Γ – замкнутый простой контур; функция $f(z)$ аналитична на Γ и в односвязной области D, ограниченной кривой Γ; $z_1, z_2, ..., z_k \in D$, $m_1, m_2, ..., m_k \in \mathrm{N}$, то применяют тот же способ, каким вычисляется контурный интеграл вида (12.14).

Докажем достаточное условие аналитичности функции в односвязной области.

Теорема 12.5. (*теорема Морера*). Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D, а интеграл от этой функции по любому замкнутому простому гладкому или кусочно-гладкому контуру γ, расположенному в D, равен нулю:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{12.33}$$

Тогда функция $f(z)$ аналитична в области D.

► Из условия (12.33) следует, что для произвольных точек $z_1, z_2 \in D$ и любых простых гладких или кусочно-гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, соединяющих точки z_1 и z_2 выполняется равенство

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

(см. обоснование следствия 11.1). Следовательно, зафиксировав некоторую точку $z_0 \in D$, можно рассмотреть интеграл с переменным верхним пределом интегрирования:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,\ z \in D.$$

В силу теоремы 11.2 функция $F(z)$ аналитична в области D и $F'(z) = f(z)$, т.е. функция $f(z)$ равна производной аналитической функции $F(z)$, а, значит, в силу следствия 12.1 $f(z)$ аналитична в D. ◄

13. ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

Докажем вначале два вспомогательных утверждения.

Лемма 13.1. Если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ аналитична в области D и

$$u(x,y) \equiv \mathrm{const},\ \forall z \in D, \tag{13.1}$$

то $f(z) \equiv \mathrm{const}$, $\forall z \in D$.

► Пусть выполнено условие (13.1). Тогда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0,\ \forall z \in D. \tag{13.2}$$

По условию функция $f(z)$ аналитична в области D, следовательно, в силу теоремы 9.3 в области D выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x},\ \forall z \in D. \tag{13.3}$$

В силу (13.2), (13.3)

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0,\ \forall z \in D,$$

следовательно, $v(x,y) \equiv \mathrm{const},\ \forall z \in D.$ Имеем $u(x,y) \equiv \mathrm{const}$ и $v(x,y) \equiv \mathrm{const}$ $\forall z \in D$ $\Rightarrow f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \equiv \mathrm{const}$ для $\forall z \in D$. ◄

Лемма 13.2. Если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ аналитична в области D и

$$|f(z)| \equiv \mathrm{const},\ \forall z \in D, \tag{13.4}$$

то $f(z) \equiv \mathrm{const}$, $\forall z \in D$.

► Пусть выполнено условие (13.4): $|f(z)| \equiv M$ для $\forall z \in D$, где M – константа. Если $M = 0$, то $|f(z)| \equiv 0, \forall z \in D \Rightarrow f(z) \equiv 0, \forall z \in D$. Пусть $M \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \ln f(z) = \ln\left|f(z)\right| + i\arg f(z) = \ln M + i\arg f(z).$$

В силу аналитичности главной ветви $w = \ln z$ логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$ на множестве $\mathrm{X}\setminus\{0\}$ (см. пример 9.2), аналитичности функции $f(z)$ в области D и следствия 8.8 сложная функция $g(z) = \ln f(z)$ аналитична в области D. Её действительная часть $\tilde{u}(x, y)$ имеет вид $\tilde{u}(x, y) \equiv \ln M = \text{const}$, $\forall z \in D$. Следовательно, в силу леммы 13.1 $g(z) \equiv \text{const}$, $\forall z \in D$ $\Rightarrow f(z) \equiv \text{const}$, $\forall z \in D$. ◀

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ аналитична в ограниченной области D и непрерывна на её границе Γ. Из аналитичности функции $f(z)$ в области D следует её непрерывность в D (см. замечание 9.3). Таким образом, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Следовательно, в силу замечания 5.10 модуль функции $f(z)$, т.е. вещественная функция

$$\left|f(z)\right| = \sqrt{\left[u(x, y)\right]^2 + \left[v(x, y)\right]^2} \tag{13.5}$$

двух вещественных переменных x, y непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\overline{D}$. По второй теореме Вейерштрасса для функций нескольких переменных [2.8, с. 496] функция (13.5) достигает на множестве $\overline{D}$ своих наибольшего и наименьшего значений.

Докажем *принцип максимума модуля аналитической функции*.

Теорема 13.1. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ аналитична в ограниченной области D и непрерывна на её границе Γ. Тогда, если функция $f(z)$ не равна тождественно постоянной в области D, то её модуль достигает своего наибольшего значения M на множестве $\overline{D} = D \cup \Gamma$ лишь в точках границы Γ области D, т.е.

$$\left|f(z)\right| < M, \ \forall z \in D. \tag{13.6}$$

▶ ПП: $\exists\, z \in D \mid \left|f(z)\right| = M$. Пусть $G = \left\{z \in D \mid \left|f(z)\right| = M\right\}$. Если предположить, что $G = D$, т.е. $\left|f(z)\right| \equiv M$ для $\forall z \in D$, то в силу леммы 13.2 $f(z) \equiv \text{const}$, $\forall z \in D$, а это противоречит условию теоремы. Значит, $G \neq D$ (рис. 13.1).

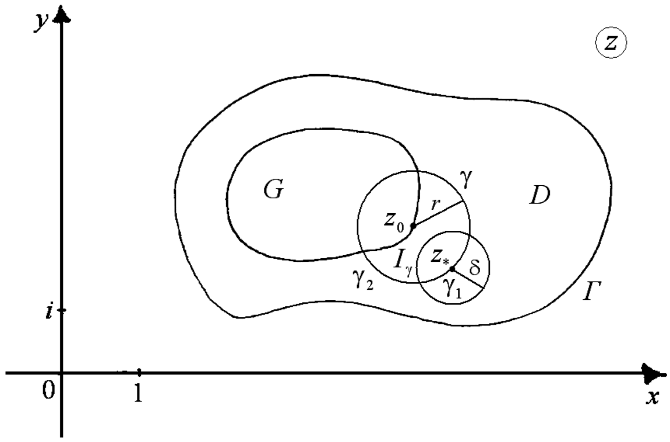

Рис. 13.1

Тогда существует граничная точка z_0 множества G, принадлежащая области D. Пусть $n \in \mathrm{N}$. По определению граничной точки множества, для

$$\forall O_{\frac{1}{n}}(z_0) \ \exists\, z_n \in O_{\frac{1}{n}}(z_0) \mid z_n \in G.$$

Получили последовательность $\{z_n\} \subset G \mid z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0$, ибо $\dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Функция $\left|f(z)\right|$ непрерывна в точке z_0, т.е.

$$\lim_{z\to z_0}\left|f(z)\right| = \left|f(z_0)\right|.$$

Тогда [2.8, с. 486]

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(z_n)\right| = \left|f(z_0)\right|. \tag{13.7}$$

Имеем $z_n \in G$, т.е. $\left|f(z_n)\right| = M$, $\forall n \in \mathrm{N}$. Тогда в силу (13.7)

$$\left| f\left(z_0\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left| f\left(z_n\right)\right| = \lim_{n\to\infty} M = M \ .$$

Получили

$$\left| f\left(z_0\right)\right| = M \ . \tag{13.8}$$

Имеем $z_0 \in D$, следовательно, $\exists\, O_{\tilde{\delta}}\left(z_0\right) \mid O_{\tilde{\delta}}\left(z_0\right) \subset D$. Так как z_0 – граничная точка множества G, то $\exists\, z_* \in O_{\tilde{\delta}}\left(z_0\right) \mid z_* \overline{\in}\, G$. Следовательно,

$$\left| f\left(z_*\right)\right| < M \ . \tag{13.9}$$

Рассмотрим окружность γ с центром в точке z_0 радиуса $r = \left|z_* - z_0\right|$. Заметим, что γ, $I_\gamma \subset O_{\tilde{\delta}}\left(z_0\right)$, следовательно, γ, $I_\gamma \subset D$. Функция $f(z)$ аналитична в односвязной области I_γ и на её границе γ. Следовательно, по интегральной формуле Коши

$$f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f\left(\zeta\right)}{\zeta - z_0} d\zeta \ . \tag{13.10}$$

Функция $\left| f(z)\right|$ непрерывна в точке z_*, т.е.

$$\lim_{z\to z_*}\left| f\left(z\right)\right| = \left| f\left(z_*\right)\right| . \tag{13.11}$$

Возьмём $\varepsilon > 0 \mid \left| f\left(z_*\right)\right| < M - \varepsilon$ (такой выбор возможен в силу (13.9)) (рис. 13.2).

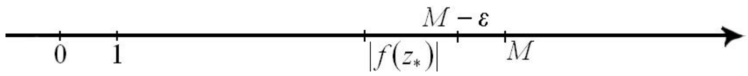

Рис. 13.2

Тогда, в силу (13.11), для числа $M - \varepsilon$ $\exists O_\delta\left(z_*\right) \mid \ \forall z \in O_\delta\left(z_*\right) \Rightarrow \ \Rightarrow \left| f\left(z\right)\right| < M - \varepsilon$. Пусть $\gamma_1 = \gamma \cap O_\delta\left(z_*\right)$, $\gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1$. Тогда

$$\left| f\left(z\right)\right| < M - \varepsilon \ , \forall z \in \gamma_1 ; \tag{13.12}$$

$$\left| f\left(z\right)\right| \le M \ , \forall z \in \gamma_2 \ . \tag{13.13}$$

В силу свойства аддитивности интеграла (см. формулу (10.26)) равенство (13.10) можно записать в виде

$$f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \ . \tag{13.14}$$

Используя формулы (1.25), (1.20), (1.23), получаем из (13.14)

$$\left| f\left(z_0\right)\right| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta\right| . \tag{13.15}$$

Заметим, что

$$\left|\zeta - z_0\right| = r \ , \forall \zeta \in \gamma \ , \tag{13.16}$$

в частности, для $\forall \zeta \in \gamma_1$, $\forall \zeta \in \gamma_2$. В силу (13.12), (13.16)

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\right| = \frac{\left|f(\zeta)\right|}{\left|\zeta - z_0\right|} < \frac{M - \varepsilon}{r} \ , \ \forall \zeta \in \gamma_1 \ .$$

В силу (13.13), (13.16)

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\right| = \frac{\left|f(\zeta)\right|}{\left|\zeta - z_0\right|} \le \frac{M}{r} \ , \ \forall \zeta \in \gamma_2 \ .$$

Тогда в силу оценки (10.34)

$$\left|\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta\right| \le \frac{M - \varepsilon}{r} \ l_{\gamma_1} \ , \tag{13.17}$$

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta\right|\le\frac{M}{r}\;l_{\gamma_2}\,, \tag{13.18}$$

где l_{γ_1} и l_{γ_2} – длины кривых γ_1 и γ_2 соответственно.
В силу (13.15), (13.17), (13.18)

$$\left|f(z_0)\right|\le\frac{1}{2\pi}\left[\frac{M-\varepsilon}{r}\;l_{\gamma_1}+\frac{M}{r}\;l_{\gamma_2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{M}{r}\left(l_{\gamma_1}+l_{\gamma_2}\right)\;-\;\frac{\varepsilon}{r}\;l_{\gamma_1}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{M}{r}\;l_{\gamma}-\;\frac{\varepsilon}{r}\;l_{\gamma_1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{M}{r}\;2\pi r\;-\;\frac{\varepsilon}{r}\;l_{\gamma_1}\right]=M-\;\frac{\varepsilon}{2\pi r}\;l_{\gamma_1}<M\;.$$

Получили $\left|f(z_0)\right|<M$, что противоречит (13.8). $\overline{\sqcap}$. ◄

Следствие 13.1. Если модуль аналитической в области D и непрерывной на границе Γ области D функции $f(z)$ принимает наибольшее значение в точке $z_0\in D$, то $f(z)\equiv\text{const}$ в области D .

Следствие 13.2. Пусть функция $f(z)$ не является постоянной в области D , аналитична в D , непрерывна на границе Γ области D и, кроме того, $f(z)\ne 0$ для $\forall z\in\overline{D}=D\cup\Gamma$. Тогда модуль функции $f(z)$ достигает своего наименьшего значения m на множестве $\overline{D}=D\cup\Gamma$ лишь в точках границы Γ области D , т.е.

$$\left|f(z)\right|>m\,,\ \forall z\in D\,.$$

Действительно, рассмотрим функцию $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. Функция $g(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 13.1. Следовательно, $\left|g(z)\right|=\dfrac{1}{\left|f(z)\right|}$ достигает своего наибольшего значения на множестве $\overline{D}=D\cup\Gamma$ лишь в точках границы Γ . Но $\left|g(z)\right|$ достигает своего наибольшего значения в тех точках, в каких $\left|f(z)\right|$ достигает своего наименьшего значения. Следовательно, $\left|f(z)\right|$ достигает своего наименьшего значения на множестве $\overline{D}=D\cup\Gamma$ лишь в точках границы Γ .

Следствие 13.3. Если функция $f(z)$ аналитична в области D , непрерывна на границе Γ области D , не имеет нулей в замкнутой области $\overline{D}=D\cup\Gamma$ и её модуль принимает наименьшее значение в точке $z_0\in D$, то $f(z)\equiv\text{const}$ в области D .

14. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Функциональный ряд; точки сходимости и область сходимости функционального ряда; частичная сумма и сумма функционального ряда; остаток функционального ряда; связь между сходимостью функционального ряда и сходимостью его остатка; точки абсолютной сходимости и область абсолютной сходимости функционального ряда; равномерно сходящиеся ряды; мажорируемые ряды; признак Вейерштрасса; теорема о непрерывности суммы функционального ряда; теорема о почленном интегрировании функционального ряда; теорема о почленном дифференцировании функционального ряда; степенные ряды: теорема Абеля; интервал сходимости, радиус сходимости; теорема о равномерной сходимости степенного ряда; теорема о непрерывности суммы степенного ряда; теорема о почленном интегрировании степенного ряда; теорема о почленном дифференцировании степенного ряда.

Рассмотрим функциональный ряд с комплексными членами

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots$$

или в более краткой записи

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)\,, \tag{14.1}$$

где $f_n(z)$ ($n\in\mathrm{N}$) – некоторые заданные функции комплексного переменного $z\in G$, $G\subseteq\mathrm{X}$, называемые членами ряда.

Основные понятия для ряда (14.1) вводятся точно так же, как и для функционального ряда с вещественными членами.

Каждому фиксированному значению $z_0\in G$ соответствует числовой ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z_0)\,. \tag{14.2}$$

Этот числовой ряд либо сходится, либо расходится.

Значение $z_0 \in G$ называется *точкой сходимости функционального ряда* (14.1), если соответствующий числовой ряд (14.2) сходится.

Областью сходимости функционального ряда (14.1) называется множество всех его точек сходимости.

Заметим, что область сходимости функционального ряда не обязательно является открытым множеством, т.е. не обязательно является областью в смысле определения 7.13.

Обозначим область сходимости функционального ряда (14.1) через *D*. Ясно, что $D \subseteq G$.

n-й частичной суммой функционального ряда (14.1) называется сумма его первых *n* членов:

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z).$$

Если $z \in D$, то соответствующий числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

сходится. Следовательно, по определению сходимости числового ряда, существует конечный предел $S(z)$ *n*-й частичной суммы $S_n(z)$ при $n \to \infty$:

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z). \tag{14.3}$$

Суммой функционального ряда (14.1) называется функция $S(z)$, определяемая на области сходимости этого ряда с помощью соотношения (14.3)

Если $S(z)$ – сумма функционального ряда (14.1), то используют обозначение

$$S(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

или

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

n-м остатком (или *остатком после n-го члена*) *функционального ряда* (14.1) называется функциональный ряд, получаемый из ряда (14.1) путём отбрасывания его первых *n* членов, т.е. функциональный ряд вида

$$f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+m}(z) + \ldots$$

или в более краткой записи

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{n+m}(z). \tag{14.4}$$

Теорема 14.1. Если $z \in D$, то при любом фиксированном n *-й* остаток (14.4) функционального ряда (14.1) сходится и его сумма $r_n(z)$ выражается формулой

$$r_n(z) = S(z) - S_n(z),\ z \in D. \tag{14.5}$$

Теорема 14.2. Если $z \in G$ и при некотором фиксированном n *-й* остаток (14.4) функционального ряда (14.1) сходится, то сходится также ряд (14.1) и его сумма $S(z)$ выражается формулой

$$S(z) = S_n(z) + r_n(z).$$

Доказательство теорем 14.1, 14.2 аналогично доказательству соответствующих утверждений для рядов с вещественными членами [2.14, с. 260].

В силу (14.3), (14.5) получаем

$$\lim_{n\to\infty} r_n(z) = 0,\ \forall z \in D. \tag{14.6}$$

Значение $z_0 \in G$ называется *точкой абсолютной сходимости функционального ряда* (14.1), если соответствующий числовой ряд (14.2) сходится абсолютно, т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(z_0) \right|.$$

Областью абсолютной сходимости функционального ряда (14.1) называется множество всех его точек абсолютной сходимости.

Обозначим область абсолютной сходимости функционального ряда (14.1) через D_a. В силу теоремы 4.5 справедливо включение $D_a \subseteq D$.

Согласно данному выше определению, функциональный ряд (14.1) сходится на множестве D, если он сходится в каждой точке этого множества. Такая сходимость функционального ряда называется *поточечной сходимостью*. В силу (14.3) поточечная сходимость означает следующее:

$$\forall z \in D \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(z,\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow \left| S_n(z) - S(z) \right| < \varepsilon. \quad (14.7)$$

Заметим, что в силу (14.5) и равенства $\left| S_n(z) - S(z) \right| = \left| S(z) - S_n(z) \right|$ вместо (14.7) можно записать

$$\forall z \in D \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(z,\varepsilon) \mid \forall n > N \Rightarrow \left| r_n(z) \right| < \varepsilon. \quad (14.8)$$

В некоторых случаях для любого заданного $\varepsilon > 0$ удаётся указать такой номер N, который пригоден сразу для всех $z \in D$.

Дадим соответствующее определение.

Функциональный ряд (14.1) называется *равномерно сходящимся* на *множестве* $\Omega \subseteq D$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon),\, N \text{ не зависит от } z \mid \forall n > N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left| S_n(z) - S(z) \right| < \varepsilon, \;\; \forall z \in \Omega, \quad (14.9)$$

или в силу (14.5)

$$\left| r_n(z) \right| < \varepsilon, \;\; \forall z \in \Omega. \quad (14.10)$$

В дальнейшем неоднократно будет использовано следующее утверждение.

Теорема 14.3. Если функциональный ряд (14.1) равномерно сходится на множестве Ω к функции $S(z)$, то для любой функции $\varphi(z)$, ограниченной по модулю на множестве Ω, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z) f_n(z) \quad (14.11)$$

равномерно сходится на множестве Ω к функции $\tilde{S}(z) = \varphi(z) S(z)$.

▶ Пусть функция $\varphi(z)$ ограничена по модулю на множестве Ω, т.е. $\exists M > 0 \mid$

$$\left| \varphi(z) \right| \le M, \;\; \forall z \in \Omega. \quad (14.12)$$

Зафиксируем произвольное сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу равномерной сходимости ряда (14.1) на множестве Ω, для числа

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M} \;\; \exists N = N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) = N(\varepsilon),\; N \text{ не зависит от } z \mid$$
$$\forall n > N \Rightarrow \left| S_n(z) - S(z) \right| < \frac{\varepsilon}{M}, \;\; \forall z \in \Omega. \quad (14.13)$$

Заметим, что n-я частичная сумма ряда (14.11) имеет вид

$$\tilde{S}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(z) f_k(z) = \varphi(z) \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = \varphi(z) S_n(z).$$

Тогда

$$\tilde{S}_n(z) - \tilde{S}(z) = \varphi(z)\left[S_n(z) - S(z) \right].$$

Используя оценки (14.12), (14.13), получаем для $\forall n > N$, $\forall z \in \Omega$:

$$\left| \tilde{S}_n(z) - \tilde{S}(z) \right| = \left| \varphi(z)\left[S_n(z) - S(z) \right] \right| = \left| \varphi(z) \right| \cdot \left| S_n(z) - S(z) \right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Получили следующее: для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon)$, N не зависит от $z \mid \forall n > N \Rightarrow \left| \tilde{S}_n(z) - \tilde{S}(z) \right| < \varepsilon$, $\forall z \in \Omega$, а это означает, что ряд (14.11) равномерно сходится на множестве Ω к функции $\varphi(z) S(z)$. ◀

Функциональный ряд (14.1) называется *мажорируемым на множестве* $G_1 \subseteq G$, если существует сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,,\; a_n \geq 0 \,, \tag{14.14}$$

такой, что

$$\left| f_n(z) \right| \leq a_n \,,\; \forall z \in G_1 \,,\; \forall n \in \mathrm{N} \,, \tag{14.15}$$

при этом, числовой ряд (14.14) называется *мажорантным рядом* или *мажорантой функционального ряда* (14.1).

Укажем *достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда* (14.1).

Теорема 14.4 (*признак Вейерштрасса*). Если функциональный ряд (14.1) мажорируется на множестве $G_1 \subseteq G$, то он равномерно сходится на этом множестве.

Теорема 14.4 доказывается точно так же, как соответствующее утверждение для функциональных рядов с вещественными членами [2.5, с. 127].

Укажем некоторые свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 14.5. Если члены ряда (14.1) непрерывны на множестве $D_1 \subseteq D$ и этот ряд сходится равномерно на D_1, то сумма ряда $S(z)$ непрерывна на D_1.

Теорема 14.5 называется *теоремой о непрерывности суммы функционального ряда*. Её доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для функциональных рядов с вещественными членами [2.5, с. 128].

Следствие 14.1. Если члены ряда (14.1) непрерывны на множестве D_1 и этот ряд сходится равномерно на D_1, то предел его суммы $S(z)$ в произвольной фиксированной точке $z_0 \in D_1$ равен сумме ряда, составленного из пределов членов ряда (14.1) в этой точке z_0:

$$\lim_{z \to z_0} S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \to z_0} f_n(z). \tag{14.16}$$

Действительно, в силу теоремы 14.5 сумма ряда $S(z)$ непрерывна во взятой точке z_0, т.е.

$$\lim_{z \to z_0} S(z) = S(z_0). \tag{14.17}$$

В силу непрерывности $f_n(z)$ в точке z_0

$$\lim_{z \to z_0} f_n(z) = f_n(z_0),\; n \in \mathrm{N}.$$

Тогда

$$S(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \to z_0} f_n(z). \tag{14.18}$$

Из (14.17), (14.18) следует (14.16).

Соотношение (14.16) записывают также в виде

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \to z_0} f_n(z) \tag{14.19}$$

и говорят о *почленном переходе к пределу в равномерно сходящемся ряде*.

Равенство (14.19) означает, что для равномерно сходящегося ряда знак предела и знак суммирования можно переставлять местами.

Ещё раз подчеркнём, что запись (14.19) понимается так: предел суммы ряда (14.1) в точке z_0 равен сумме ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \to z_0} f_n(z)$ (в этой записи суммы рядов обозначены теми же символами, что и сами ряды).

Теорема 14.6. Пусть все члены функционального ряда (14.1) непрерывны на гладкой или кусочно-гладкой кривой γ и этот ряд сходится равномерно на γ. Тогда числовой ряд, составленный из интегралов от членов ряда (14.1) вдоль кривой γ, сходится и его сумма равна интегралу от суммы $S(z)$ ряда (14.1) вдоль кривой γ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)\,dz = \int_{\gamma} S(z)\,dz \,. \tag{14.20}$$

Доказательство теоремы 14.6 аналогично доказательству соответствующего утверждения для функциональных рядов с вещественными членами [2.5, с. 129].

Соотношение (14.20) записывается также в виде

$$\int\limits_{\gamma}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right]dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma} f_n(z)\,dz \tag{14.21}$$

и говорят о *почленном интегрировании функционального ряда*.

Равенство (14.21) означает, что для равномерно сходящегося ряда знак интеграла и знак суммирования можно переставлять местами.

Теорема 14.6 называется *теоремой о почленном интегрировании функционального ряда*.

Теорема 14.7 (*теорема Вейерштрасса*). Если члены ряда (14.1) аналитичны в односвязной области D и этот ряд сходится равномерно в D, то его сумма $S(z)$ аналитична в D и справедлива формула

$$S^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).\ \forall k\in \mathrm{N}\ . \tag{14.22}$$

Покажем, что сумма $S(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Морера (см. теорему 12.5). Из аналитичности членов ряда в области D следует, в силу замечания 9.3, их непрерывность в D. По условию теоремы ряд сходится равномерно на D. Тогда в силу теоремы 14.5 его сумма $S(z)$ непрерывна в D. Пусть γ – любой замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур, расположенный в D. Члены ряда непрерывны на контуре γ. Из равномерной сходимости ряда на D следует его равномерная сходимость на γ. Тогда в силу теоремы 14.6

$$\oint\limits_{\gamma} S(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\oint\limits_{\gamma} f_n(z)\,dz\,. \tag{14.23}$$

В силу теоремы 11.1 и замечания 11.2

$$\oint\limits_{\gamma} f_n(z)\,dz=0\,,\ \forall n\in \mathrm{N}\,. \tag{14.24}$$

В силу (14.23), (14.24)

$$\oint\limits_{\gamma} S(z)\,dz=0\,.$$

Итак, функция $S(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Морера, следовательно, $S(z)$ аналитична в *D*. Значит, в силу теоремы 12.4 $S(z)$ бесконечно дифференцируема в области *D*. Докажем справедливость формулы (14.22). Зафиксируем произвольную точку $z_0\in D$ и произвольный замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур $L\subset D$, охватывающий точку $z_0\in I_L$, где I_L – внутренность контура L (рис. 14.1).

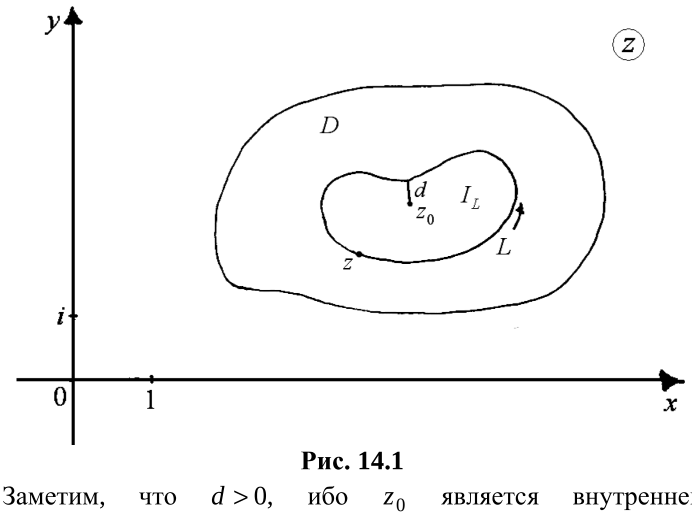

Рис. 14.1

Положим $d=\min\limits_{z\in L}|z-z_0|$. Заметим, что $d>0$, ибо z_0 является внутренней точкой области I_L, т.е. $\exists O_\delta(z_0)\,|\,O_\delta(z_0)\subset I_L\Rightarrow d>\delta>0.$ Имеем

$$|z-z_0|\ge d>0\,,\ \forall z\in L\,. \tag{14.25}$$

Пусть $k \in \mathrm{N}$, k фиксировано. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}. \tag{14.26}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(z) = 1/(z-z_0)^{k+1}$. В силу (14.25) для $\forall z \in L$ получаем

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} \right| = \frac{1}{|z-z_0|^{k+1}} \le \frac{1}{d^{k+1}},$$

т.е. функция $\varphi(z)$ ограничена по модулю на множестве L. По условию теоремы ряд (14.1) сходится равномерно в D, в частности, он сходится равномерно на $L \subset D$. Следовательно, в силу теоремы 14.3, ряд (14.26) сходится равномерно на L к функции $\tilde{S}(z) = S(z)/(z-z_0)^{k+1}$.

Имеем:

а) члены

$$g_n(z) = \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}, \ n \in \mathrm{N},$$

ряда (14.26) непрерывны на кривой L (каждая функция $g_n(z)$ аналитична на L как отношение двух аналитических на L функций, следовательно, в силу замечания 9.3, $g_n(z)$ непрерывна на L);

б) ряд (14.26) сходится равномерно на L. Следовательно, в силу теоремы 14.6

$$\oint_L \tilde{S}(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_L g_n(z)\,dz,$$

т.е.

$$\oint_L \frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_L \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz. \tag{14.27}$$

Функции $S(z)$, $f_n(z)$, $n \in \mathrm{N}$, аналитичны в области D, в частности, они аналитичны в односвязной области $I_L \subset D$ и на её границе L. Тогда в силу следствия 12.3

$$\oint_L \frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{k!} S^{(k)}(z_0),$$

$$\oint_L \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{k!} f_n^{(k)}(z_0), \ \forall n \in \mathrm{N},$$

и соотношение (14.27) принимает вид

$$S^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0).$$

Значит, в силу произвольности выбора $z_0 \in D$, справедлива формула (14.22).

Соотношение (14.22) записывают также в виде

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right]^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \ \forall k \in \mathrm{N}, \tag{14.28}$$

и говорят о *почленном дифференцировании функционального ряда*.

Равенство (14.28) означает, что для равномерно сходящегося ряда знак производной и знак суммирования можно переставлять местами.

Теорема 14.7 называется также *теоремой о почленном дифференцировании функционального ряда*.

Замечание 14.1. Теорема Вейерштрасса сохраняет силу, если в качестве D выступает многосвязная область.

Действительно, пусть D – многосвязная область. Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in D$. Рассмотрим $O_\delta(z_0) \subset D$. В силу теоремы 14.7 сумма $S(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$, в частности, $S(z)$ аналитична в точке z_0. Следовательно, в силу произвольности выбора точки $z_0 \in D$, $S(z)$ аналитична в D.

Частным случаем функциональных рядов с комплексными членами являются степенные ряды.

Степенным рядом с комплексными членами называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{14.29}$$

или ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n , \tag{14.30}$$

где $c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ...$ – некоторые заданные комплексные числа, называемые *коэффициентами степенного ряда*; z_0 – некоторое заданное комплексное число.

Ряд вида (14.30) с помощью замены $z-z_0=\zeta$ сводится к ряду вида (14.29), поэтому можно ограничиться изучением рядов вида (14.29) а затем полученные результаты перенести на ряды вида (14.30).

Замечание 14.2. Любой степенной ряд вида (14.29) сходится в точке $z=0$, причём сходится абсолютно, и его сумма в этой точке равна c_0.

Действительно, при $z=0$ ряд (14.29) принимает вид $c_0+0+0+...+0+...$. Такой числовой ряд сходится и его сумма равна c_0. Ряд из модулей $|c_0|+|0|+|0|+...+|0|+...$ тоже сходится и его сумма равна $|c_0|$.

При $z \neq 0$ поведение ряда (14.29) в смысле сходимости может быть различным – он может сходиться, а может и расходиться.

При изучении степенных рядов весьма важным является следующее утверждение.

Теорема 14.8 (*теорема Абеля*). Пусть степенной ряд (14.29) сходится в некоторой точке $z_* \neq 0$. Тогда он сходится, причём абсолютно, в открытом круге $O_{|z_*|}(0)=\{z \in \mathrm{C} : |z|<|z_*|\}$.

◆ Зафиксируем произвольное $z \in O_{|z_*|}(0)$. В силу замечания 14.2 можно считать, что $z \neq 0$. Запишем ряд (14.29) во взятой точке z в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n z_*^n\right)\left(\frac{z}{z_*}\right)^n . \tag{14.31}$$

Исследуем ряд (14.31) на абсолютную сходимость, т.е. исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(c_n z_*^n\right)\left(\frac{z}{z_*}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n z_*^n\right| \cdot \left|\frac{z}{z_*}\right|^n . \tag{14.32}$$

По условию теоремы, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_*^n$ сходится, следовательно, по необходимому признаку сходимости числового ряда (см. теорему 4.4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_n z_*^n\right)=0 .$$

В силу необходимого признака сходимости последовательности комплексных чисел (см. теорему 2.3)

$$\exists M>0 : \left|c_n z_*^n\right| \leq M , \ \forall n \in \mathrm{N} .$$

Так как $|z|<|z_*|$, то

$$\left|\frac{z}{z_*}\right| = \frac{|z|}{|z_*|} < 1 .$$

Тогда общий член ряда (14.32) допускает оценку вида

$$\left|\left(c_n z_*^n\right)\left(\frac{z}{z_*}\right)^n\right| < Mq^n ,$$

где $q = \left|\frac{z}{z_*}\right| < 1$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$ сходится как ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$ [2.5, с. 112]. Следовательно, по первому признаку сравнения для знакопо-ложительных рядов [2.8, с. 433] ряд (14.32) сходится, а это означает абсолютную сходимость ряда (14.31). ◄

Следствие 14.2. Пусть степенной ряд (14.29) расходится, или условно сходится в некоторой точке $\hat{z} \neq 0$. Тогда он расходится в любой точке $z \in \mathrm{C} \setminus \overline{O}_{|\hat{z}|}(0)$, где $\overline{O}_{|\hat{z}|}(0) = \left\{z \in \mathrm{C} : |z| \leq |\hat{z}|\right\}$.

Действительно, $\boxed{\Pi}$: $\exists\, z_* \in \mathrm{C} \setminus \overline{O}_{|\hat{z}|}(0) \,|$ ряд (14.29) сходится в точке z_* (рис. 14.2). Тогда $\hat{z} \in O_{|z_*|}(0)$ и по теореме Абеля ряд (14.29) в точке $\hat{z}$ сходится абсолютно. Противоречие. $\overline{\boxed{\Pi}}$.

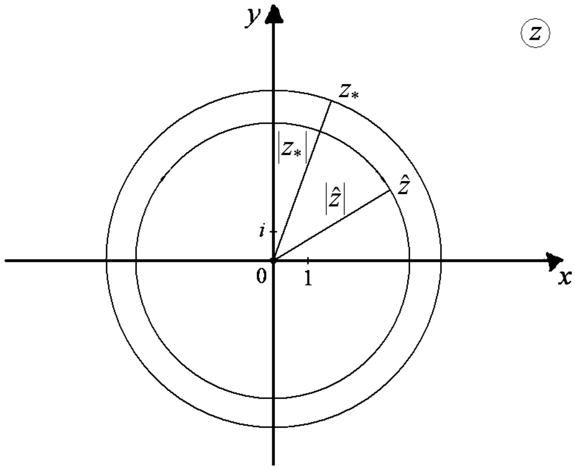

Рис. 14.2

Рассмотрим положительную полуось (луч) $\mathrm{P}_+ = \{x \in \mathrm{P} \mid x > 0\}$ действительной оси Ox. Возможны три случая.

1) На луче P_+ имеются точки сходимости и точки расходимости степенного ряда (14.29), т.е. $\mathrm{P}_+ = \Omega \cup H$, где Ω и H – соответственно множество точек сходимости и множество точек расходимости ряда (14.29). По условию $\Omega \neq \varnothing$ и $H \neq \varnothing$. Возьмём какое-либо $h \in H$. Тогда, в силу следствия 14.2, для $\forall x > h \Rightarrow x \in H$. Значит, для $\forall \omega \in \Omega \Rightarrow \omega < h$, т.е. множество Ω ограничено сверху. Следовательно, [2.8, с. 48], множество Ω имеет точную верхнюю границу R. Покажем, что ряд (14.29) сходится, причём абсолютно, в открытом круге $O_R(0)$. Зафиксируем произвольное $z \in O_R(0)$. Положим $r = \frac{|z| + R}{2}$, т.е. r – середина отрезка $\left[|z|,\ R\right]$. Заметим, что $z \in O_r(0)$ (рис. 14.3).

Ряд (14.29) сходится в точке $z_* = r$, следовательно, по теореме Абеля он сходится, причём абсолютно, в открытом круге $O_r(0)$, в частности, сходится абсолютно во взятой точке z. В силу произвольности выбора z ряд (14.29) сходится абсолютно в открытом круге $O_R(0)$. Покажем, что ряд (14.29) расходится вне замкнутого круга $\overline{O}_R(0)$, т.е. расходится на множестве $\mathrm{X} \setminus \overline{O}_R(0)$. Зафиксируем произвольное $z \in \mathrm{X} \setminus \overline{O}_R(0)$. Положим $\tilde{R} = \frac{|z| + R}{2}$, т.е. $\tilde{R}$ – середина отрезка $\left[R,\ |z|\right]$ (рис. 14.4).

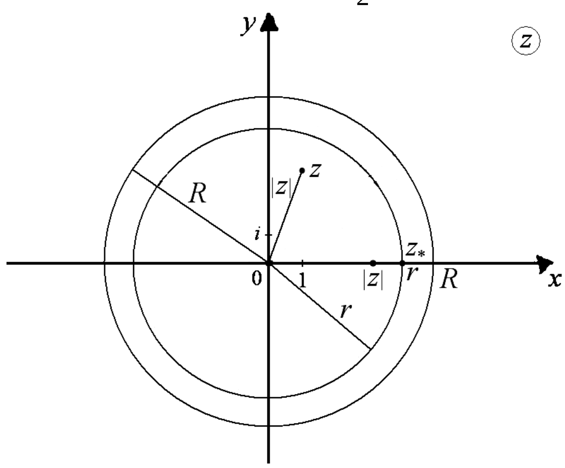

Рис. 14.3

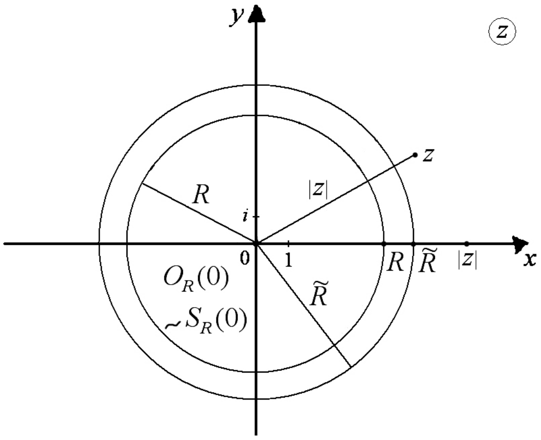

Рис. 14.4

Ряд (14.29) расходится в точке $\hat{z} = \tilde{R}$. Тогда, в силу следствия 14.2, он расходится на множестве $\mathrm{X} \setminus \overline{O}_{\tilde{R}}(0)$, в частности, расходится во взятой точке z. В силу произвольности выбора z ряд (14.29) расходится на множестве $\mathrm{X} \setminus \overline{O}_R(0)$. На границе круга $O_R(0)$, т.е. на окружности $S_R(0) = \{z \in \mathrm{X} : |z| = R\}$ поведение ряда (14.29) в смысле сходимости может быть различным. Открытый круг $O_R(0)$ называется *кругом сходимости степенного ряда* (14.29), число R – *радиусом сходимости степенного ряда* (14.29). Область сходимости степенного ряда (14.29) имеет вид $D = O_R(0) \cup W$, где W – множество всех точек окружности $S_R(0)$, в которых ряд (14.29) сходится. Если окажется, что $W = \varnothing$, то $D = O_R(0)$. Заметим, что область сходимости степенного ряда не обязательно является открытым множеством, т.е. не обязательно является областью в смысле определения 7.13. Точно так же, как в случае степенных рядов с вещественными членами [2.5, с.133], получаются следующие формулы для нахождения радиуса сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \tag{14.33}$$

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{14.34}$$

2) Степенной ряд (14.29) сходится в каждой точке луча P_+. Тогда он сходится, причём абсолютно на всей комплексной плоскости X, т.е. его область сходимости имеет вид $D = \mathrm{X}$. Действительно, зафиксируем произвольное $z \in \mathrm{X}$, $z \neq 0$ (напомним, что в точке $z = 0$ ряд (14.29) сходится (см. замечание 14.2)). Возьмём какое-либо $r \in \mathrm{P}_+ \mid |z| < r$. Ряд (14.29) сходится в точке $z_* = r$, следовательно, по теореме Абеля он сходится, причём абсолютно, в открытом круге $O_r(0)$, в частности, сходится абсолютно во взятой точке z. В силу произвольности выбора z ряд (14.29) сходится абсолютно на всей комплексной плоскости X. В этом случае говорят, что радиус сходимости степенного ряда равен бесконечности: $R = \infty$.

3) Степенной ряд (14.29) расходится в каждой точке луча P_+. Тогда он расходится на всей комплексной плоскости X, кроме точки $z_0 = 0$, т.е. его область сходимости имеет вид $D = \{0\}$. Действительно, зафиксируем произвольное $z \in \mathrm{X}$, $z \neq 0$. Возьмём какое-либо $r \in \mathrm{P}_+ \mid |z| > r$. Ряд (14.29) расходится в точке $\hat{z} = r$. Тогда, в силу следствия 14.2, он расходится на множестве $\mathrm{X} \setminus \overline{O}_r(0)$, в частности, расходится во взятой точке z. В силу произвольности выбора z ряд (14.29) расходится на множестве $\mathrm{X} \setminus \{0\}$. В этом случае говорят, что радиус сходимости степенного ряда равен нулю: $R = 0$.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 14.9. Степенной ряд (14.29) сходится, причём абсолютно, в открытом круге $O_R(0) = \{z \in \mathrm{X} : |z| < R\}$, где R вычисляется по любой из формул (14.33), (14.34). Вне замкнутого круга $\overline{O}_R(0) = \{z \in \mathrm{X} : |z| \le R\}$, т.е. на множестве $\mathrm{X} \setminus \overline{O}_R(0)$ степенной ряд (14.29) расходится.

Пример 14.1. Найдём круг сходимости и сумму степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n. \tag{14.35}$$

Имеем $c_n = 1$, $\forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. Следовательно, в силу формулы (14.33) $R = 1$, т.е. кругом сходимости степенного ряда (14.35) является круг $O_1(0) = \{z \in \mathrm{X} : |z| < 1\}$. Применяя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии [2.8, с. 427], получаем

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1} z^n=\frac{1-z^n}{1-z}.$$

Если $z\in O_1(0)$, т.е. $|z|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|z^n\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|z|^n=0$, следовательно, в силу (5.11) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n=0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1}{1-z},$$

а это означает, что сумма ряда (14.35) равна $\dfrac{1}{1-z}$:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ z\in O_1(0). \tag{14.36}$$

Пример 14.2. Найдём круг сходимости и сумму степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n. \tag{14.37}$$

Ряд (14.37) можно записать в виде (14.35):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n.$$

Учитывая, что $-z\in O_1(0)\Leftrightarrow z\in O_1(0)$ и заменяя в формуле (14.36) z на $-z$, приходим к выводу: кругом сходимости ряда (14.37) является круг $O_1(0)$; сумма ряда (14.37) равна

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ z\in O_1(0). \tag{14.38}$$

Пример 14.3. Найдём круг сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n+1} z^n. \tag{14.39}$$

Имеем $c_n=\dfrac{i^n}{n+1}$, $|c_n|=\left|\dfrac{i^n}{n+1}\right|=\dfrac{|\,i\,|^n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$.

По формуле (14.33)

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n+2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1.$$

Получили $R=1$. Следовательно, кругом сходимости степенного ряда (14.39) является круг $O_1(0)$ (рис. 14.5).

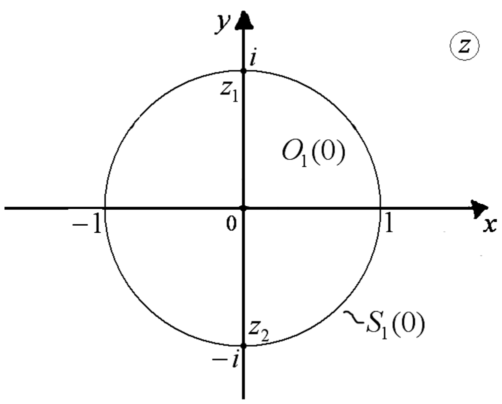

Рис. 14.5

На границе круга сходимости, т.е. на окружности $S_1(0)$ имеются точки сходимости и точки расходимости ряда (14.39). Например, в точке $z_1=i$ ряд (14.39) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n+1}i^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i^2\right)^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}. \qquad (14.40)$$

Получили знакочередующийся ряд. Следовательно, можно применить признак Лейбница [2.8, с. 455]:

$$b_k=\frac{(-1)^k}{k},\ |b_k|=\frac{1}{k},\ |b_{k+1}|=\frac{1}{k+1};$$

$$\text{а) } |b_k|>|b_{k+1}|,\ \forall k\in \mathrm{N};\quad \text{б) } \lim_{k\to\infty}|b_k|=0.$$

Следовательно, по признаку Лейбница ряд (14.40) сходится. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

это гармонический ряд. Известно [2.8, с. 431], что он расходится. Таким образом, числовой ряд (14.40) сходится условно, т.е. степенной ряд (14.39) в точке $z_1=i$ сходится условно. Рассмотрим ряд (14.39) в точке $z_2=-i$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n+1}(-i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-i^2\right)^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Получили гармонический ряд, он расходится. Таким образом, степенной ряд (14.39) в точке $z_2=-i$ расходится.

Область сходимости D степенного ряда (14.39) не является областью в смысле определения 7.13, ибо точка $z_1=i\in D$ не является внутренней точкой множества D.

Замечание 14.3. Любой степенной ряд вида (14.30) сходится абсолютно в точке $z=z_0$ и его сумма в этой точке равна c_0.

Сводя степенной ряд вида (14.30) к степенному ряду вида (14.29) и применяя полученные выше результаты для ряда (14.29), приходим к следующему утверждению.

Теорема 14.10. Степенной ряд (14.30) сходится, причём абсолютно, в открытом круге $O_R(z_0)=\{z\in \mathrm{X}:|z-z_0|<R\}$, где R вычисляется по любой из формул (14.33), (14.34). Вне замкнутого круга $\overline{O}_R(z_0)=\{z\in \mathrm{X}:|z-z_0|\le R\}$, т.е. на множестве $\mathrm{X}\setminus\overline{O}_R(z_0)$ степенной ряд (14.30) расходится.

Таким образом, радиус сходимости степенного ряда (14.30) вычисляется по любой из формул (14.33), (14.34), а его кругом сходимости является открытый круг $O_R(z_0)$ (рис. 14.6).

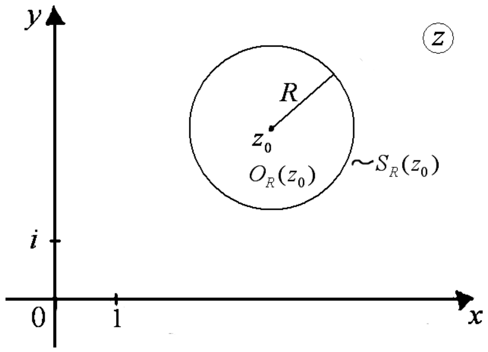

Рис. 14.6

На границе круга сходимости, т.е. на окружности $S_R(z_0)=\{z\in \mathrm{X}:|z-z_0|=R\}$ поведение степенного ряда (14.30) в смысле сходимости может быть различным.

Пример 14.4. Найдём круг сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}{4^n}(z-1-i). \qquad (14.41)$$

Имеем $z_0 = 1+i$,

$$c_n = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}{4^n}, \ |c_n| = \left|\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}{4^n}\right| = \frac{\left|1+i\sqrt{3}\right|^n}{4^n} = \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

По формуле (14.34)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Получили $R = 2$. Следовательно, кругом сходимости степенного ряда (14.41) является круг $O_2(1+i)$ (рис. 14.7).

Степенные ряды обладают некоторыми замечательными свойствами, обеспечивающими широкое применение степенных рядов в различных вопросах.

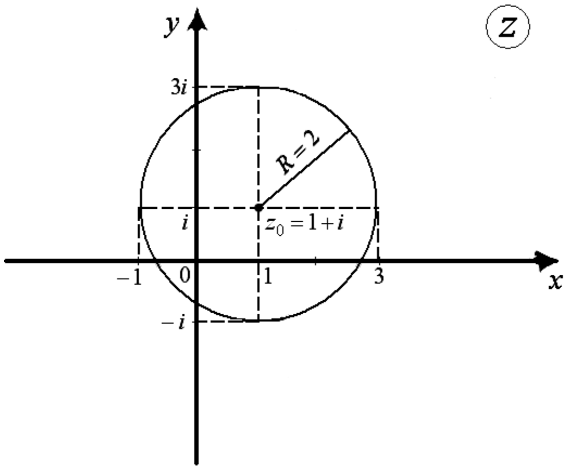

Рис. 14.7

Теорема 14.11. Степенной ряд (14.30) сходится равномерно в любом замкнутом круге $\overline{O}_r(z_0)$, содержащемся в его круге сходимости $O_R(z_0)$ (предполагается, что $0 < R < \infty$).

▶ Зафиксируем произвольный замкнутый круг $\overline{O}_r(z_0) \mid \overline{O}_r(z_0) \subset O_R(z_0)$ (рис. 14.8).

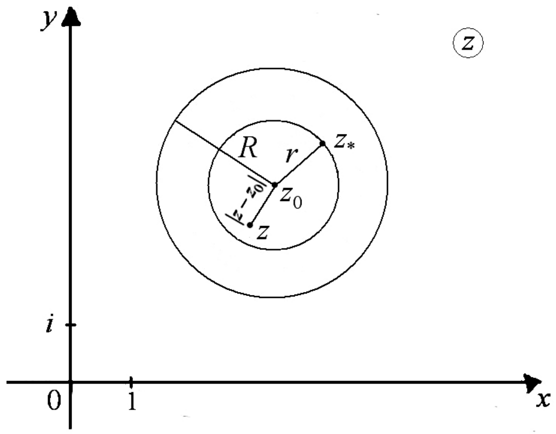

Рис. 14.8

Возьмём какую-либо точку $z_* \in S_r(z_0)$. В силу теоремы 14.10 степенной ряд (14.30) сходится абсолютно в круге сходимости $O_R(z_0)$, в частности, он сходится абсолютно во взятой точке z_*, а это означает, по определению абсолютной сходимости, что сходится знакоположительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n\left(z_* - z_0\right)^n\right|. \tag{14.42}$$

Заметим, что для $\forall z \in \overline{O}_r(z_0) \Rightarrow |z - z_0| \le |z_* - z_0|$. Тогда для $\forall z \in \overline{O}_r(z_0)$, $\forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ имеем

$$\left|c_n (z - z_0)^n\right| = |c_n| \cdot |z - z_0|^n \le |c_n| \cdot |z_* - z_0|^n = \left|c_n (z_* - z_0)^n\right|,$$

т.е. степенной ряд (14.30) мажорируется на множестве $\overline{O}_r(z_0)$ сходящимся знакоположительным рядом (14.42). Следовательно, по признаку Вейерштрасса (см. теорему 14.4) ряд (14.30) равномерно сходится на $\overline{O}_r(z_0)$. ◀

Теорема 14.11 называется *теоремой о равномерной сходимости степенного ряда.*

Следствие 14.3. Степенной ряд (14.30) сходится равномерно на любом замкнутом ограниченном множестве G, содержащемся в его круге сходимости $O_R(z_0)$.

Действительно, рассмотрим замкнутый круг $\overline{O}_r(z_0) \mid G \subset \overline{O}_r(z_0) \subset O_R(z_0)$ (рис. 14.9).

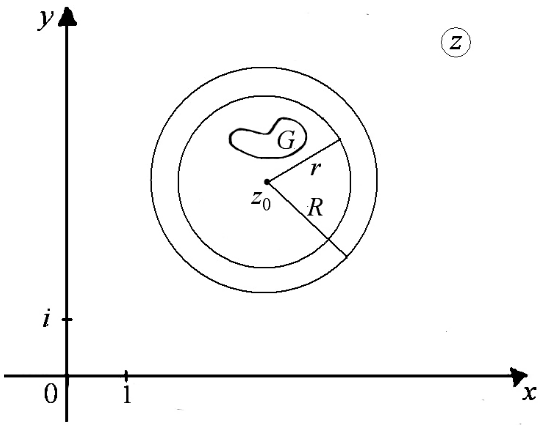

Рис. 14.9

По теореме 14.11 ряд (14.30) сходится равномерно в замкнутом круге $\overline{O}_r(z_0)$, следовательно, он сходится равномерно на множестве $G \subset \overline{O}_r(z_0)$.

Теорема 14.12. Сумма степенного ряда непрерывна в его круге сходимости.

▶ Пусть $O_R(z_0)$ – круг сходимости степенного ряда (14.30). Зафиксируем произвольную точку $z_* \in O_R(z_0)$. Покажем, что сумма $S(z)$ ряда (14.30) непрерывна в точке z_*. Рассмотрим замкнутый круг $\overline{O}_r(z_0) \mid \overline{O}_r(z_0) \subset O_R(z_0)$ и $z_* \in \overline{O}_r(z_0)$. Члены $f_n(z) = c_n (z - z_0)^n$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, ряда (14.30) непрерывны на всей комплексной плоскости как степенные функции, в частности, они непрерывны на множестве $\overline{O}_r(z_0)$. В силу теоремы 14.11 ряд (14.30) сходится равномерно на множестве $\overline{O}_r(z_0)$. Следовательно, в силу теоремы 14.5 сумма $S(z)$ ряда (14.30) непрерывна на $\overline{O}_r(z_0)$, в частности, непрерывна во взятой точке z_*. В силу произвольности выбора точки $z_* \in O_R(z_0)$ сумма $S(z)$ непрерывна в круге сходимости $O_R(z_0)$. ◀

Теорема 14.12 называется *теоремой о непрерывности суммы степенного ряда*.

Теорема 14.13. Сумма $S(z)$ степенного ряда (14.30) интегрируема вдоль любой гладкой или кусочно-гладкой кривой γ, расположенной в круге сходимости $O_R(z_0)$ этого ряда, и

$$\int_\gamma S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma c_n (z - z_0)^n\,dz. \tag{14.43}$$

▶ Зафиксируем произвольную гладкую или кусочно-гладкую кривую $\gamma \subset O_R(z_0)$. Пусть z_1 и z_2 – соответственно начальная и конечная точки этой кривой. Рассмотрим замкнутый круг $\overline{O}_r(z_0) \mid \overline{O}_r(z_0) \subset O_R(z_0)$ и $\gamma \subset \overline{O}_r(z_0)$ (рис. 14.10). Члены ряда (14.30) непрерывны на кривой γ. По теореме 14.11 ряд (14.30) сходится равномерно на множестве $\overline{O}_r(z_0)$, в частности, он сходится равномерно на кривой $\gamma \subset \overline{O}_r(z_0)$. Следовательно, в силу теоремы 14.6 его сумма $S(z)$ интегрируема вдоль кривой γ и справедлива формула (14.43). ◀

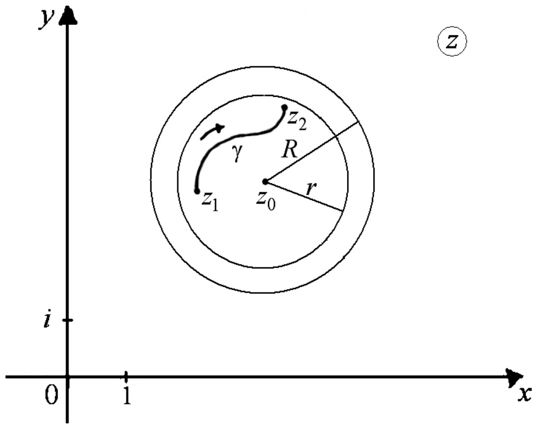

Рис. 14.10

Теорема 14.13 называется *теоремой о почленном интегрировании степенного ряда*.

Члены $f_n(z)=c_n(z-z_0)^n$, $n\in \mathrm{N}\cup\{0\}$, ряда (14.30) аналитичны на всей комплексной плоскости X как степенные функции. Следовательно, в силу теоремы 11.3

$$\int_\gamma c_n(z-z_0)^n\,dz=c_n\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{z_1}^{z_2}$$

и формулу (14.43) можно записать в виде

$$\int_\gamma S(z)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{z_1}^{z_2}.$$

В частности, в случае степенного ряда (14.29) для $\forall z\in O_R(0)$ и любой гладкой или кусочно-гладкой кривой γ, соединяющей точки 0 и z и расположенной в круге сходимости $O_R(0)$, справедлива формула

$$\int_0^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n\right)d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}.$$

Теорема 14.14. Сумма степенного ряда аналитична в круге сходимости этого ряда.

Пусть $O_R(z_0)$ – круг сходимости степенного ряда (14.30). Зафиксируем произвольную точку $z_*\in O_R(z_0)$. Покажем, что сумма $S(z)$ ряда (14.30) аналитична в точке z_*. Рассмотрим замкнутый круг $\overline{O}_r(z_0)\mid \overline{O}_r(z_0)\subset O_R(z_0)$ и $z_*\in O_r(z_0)$. Члены ряда (14.30) анали-тичны в односвязной области $O_r(z_0)$. В силу теоремы 14.11 ряд (14.30) сходится равномерно на множестве $\overline{O}_r(z_0)$, в частности, он сходится равномерно в односвязной области $O_r(z_0)\subset\overline{O}_r(z_0)$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса (см. теорему 14.7) его сумма $S(z)$ аналитична на множестве $O_r(z_0)$, в частности, $S(z)$ аналитична во взятой точке z_*, ибо $z_*\in O_r(z_0)$. В силу произвольности выбора точки $z_*\in O_R(z_0)$ сумма $S(z)$ ряда (14.30) аналитична в круге сходимости $O_R(z_0)$.

Теорема 14.14 называется *теоремой об аналитичности суммы степенного ряда*.

В силу теорем 14.14, 12.4, 14.7 справедливо следующее утверждение.

Теорема 14.15. Сумма $S(z)$ степенного ряда (14.30) бесконечно дифференцируема в его круге сходимости $O_R(z_0)$ и справедлива формула

$$S^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n(z-z_0)^n\right]^{(k)},\ \forall z\in O_R(z_0),\ \forall k\in \mathrm{N}, \qquad (14.44)$$

в частности,

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-z_0)^{n-1},\ \forall z\in O_R(z_0). \qquad (14.45)$$

Соотношения (14.44), (14.45) записывают также в виде

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\right]^{(k)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n(z-z_0)^n\right]^{(k)}, \qquad (14.46)$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z-z_0\right)^n\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \left(z-z_0\right)^{n-1}, \tag{14.47}$$

и говорят о *почленном дифференцировании степенного ряда*.

В случае $z_0 = 0$ формулы (14.46), (14.47) принимают вид

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n z^n\right)^{(k)},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

Теорема 14.15 называется *теоремой о почленном дифференцировании степенного ряда*.

Замечание 14.4. Коэффициенты степенного ряда (14.30) выражаются через его сумму $S(z)$ и производные $S^{(n)}(z)$ в точке z_0 формулой

$$c_n = \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!},\ n \in \mathrm{N} \cup \{0\}. \tag{14.48}$$

Действительно, так как

$$S(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(z-z_0\right)^n,$$

то $S(z_0) = c_0$, т.е.

$$c_0 = S(z_0) \tag{14.49}$$

(см. замечание 14.3). Далее, в силу (14.44) для $\forall k \in \mathrm{N}$

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{k-1}\left[c_n \left(z-z_0\right)^n\right]^{(k)} + \sum_{n=k}^{\infty}\left[c_n \left(z-z_0\right)^n\right]^{(k)} =$$

$$= 0 + \sum_{n=k}^{\infty}\left[c_n n(n-1)\cdot\ldots\cdot\left(n-(k-1)\right)\left(z-z_0\right)^{n-k}\right].$$

Получили

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty}\left[c_n n(n-1)\cdot\ldots\cdot\left(n-(k-1)\right)\left(z-z_0\right)^{n-k}\right].$$

При $z = z_0$

$$S^{(k)}(z_0) = c_k k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1 = c_k k!,$$

откуда $c_k = S^{(k)}(z_0)/k!$, $\forall k \in \mathrm{N}$. Переобозначая k через n и учитывая договорённости о том, что $S^{(0)}(z_0) = S(z_0)$, $0! = 1$, получаем формулу (14.48).

15. РЯД ТЕЙЛОРА

Разложение аналитической функции в ряд Тейлора; единственность представления аналитической в открытом круге функции в виде суммы степенного ряда; неравенства Коши; теорема Лиувилля; основная теорема алгебры комплексных чисел; разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора.

В предыдущем параграфе было установлено, что сумма произвольного степенного ряда является аналитической функцией в круге сходимости этого ряда (см. теорему 14.14). Возникает обратный вопрос: всякую ли аналитическую в открытом круге функцию можно представить в виде суммы степенного ряда. Ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение.

Теорема 15.1. Если функция $w = f(z)$ аналитична в открытом круге $O_R(z_0) = \{z \in \mathrm{X} : |z-z_0| < R\}$, то она представима в этом круге в виде суммы степенного ряда:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z-z_0\right)^n,\ z \in O_R(z_0), \tag{15.1}$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \tag{15.2}$$

где γ – произвольный замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур, расположенный в открытом круге $O_R(z_0)$ и охватывающий точку z_0.

Замечание 15.1. Значение интеграла (15.2) не зависит от выбора контура γ (важно лишь, чтобы контур γ удовлетворял условиям теоремы 15.1) (см. замечание 12.1), в частности, в качестве γ можно взять любую окружность $S_r(z_0) = \{z \in \mathrm{X} : |z - z_0| = r\}$ с $r < R$.

Доказательство теоремы. Зафиксируем произвольную точку $z \in O_R(z_0)$. Рассмотрим окружность $\gamma = S_r(z_0)$ | $\gamma \subset O_R(z_0)$ и $z \in O_r(z_0)$ (рис. 15.1).

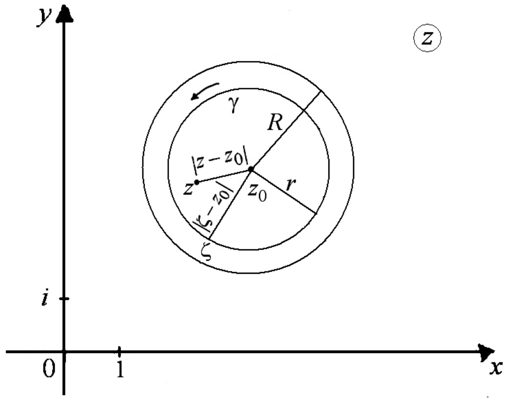

Рис. 15.1

По условию теоремы функция $f(\zeta)$ аналитична в открытом круге $O_R(z_0)$, в частности, она аналитична в замкнутой области $\overline{O}_r(z_0) = O_r(z_0) \cup \gamma$, ибо $\overline{O}_r(z_0) \subset D$. Следовательно, применима интегральная формула Коши (см. (12.2)), в силу которой

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{15.3}$$

Для любого $\zeta \in \gamma$ имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \tag{15.4}$$

Заметим, что для $\forall \zeta \in \gamma$

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1.$$

Следовательно, в силу (14.36)

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n. \tag{15.5}$$

В силу (15.4), (15.5)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{15.6}$$

Оценим общий член ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{15.7}$$

(z_0 и z фиксированы, поэтому члены ряда (15.7) являются функциями комплексного переменного $\zeta \in \gamma$). Для $\forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ и $\forall \zeta \in \gamma$ получаем

$$|g_n(\zeta)| = \left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|z - z_0|^n}{|\zeta - z_0|^{n+1}} = \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n = \frac{1}{r}\, q^n \text{, где } q = \frac{|z - z_0|}{r} < 1 .$$

Знакоположительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{r} \tag{15.8}$$

сходится как ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \in (0;1)$ [2.5, с. 112]. Итак, ряд (15.7) мажорируется на множестве γ сходящимся числовым рядом (15.8). Следовательно, по признаку Вейерштрасса (см. теорему 14.4) ряд (15.7) сходится равномерно на окружности γ. В силу (15.6) соотношение (15.3) принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] d\zeta . \tag{15.9}$$

Функция $f(\zeta)$ аналитична на γ, следовательно, в силу теоремы 9.1 она непрерывна на γ. Тогда в силу замечания 5.10 её модуль $|f(\zeta)|$ является непрерывной на γ функцией.

Заметим, что окружность γ является замкнутым ограниченным множеством. Следовательно, по первой теореме Вейерштрасса для вещественных функций двух вещественных переменных [2.8, с. 496] функция $|f(\zeta)|$ ограничена на γ, т.е. функция $f(\zeta)$ ограничена по модулю на γ, и по второй теореме Вейерштрасса [2.8, с. 496] функция $|f(\zeta)|$ достигает на γ своей точней верхней грани, т.е.

$$\exists\, \zeta^* \in \gamma \,|\, M^* = f(\zeta^*) = \max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta)| . \tag{15.10}$$

Заметим, что M^* зависит от взятой окружности γ, т.е. $M^* = M^*(\gamma)$. Из равномерной сходимости ряда (15.7) на γ и ограниченности функции $f(\zeta)$ по модулю на γ вытекает в силу теоремы 14.3 равномерная сходимость на γ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \tag{15.11}$$

к функции $\tilde{S}(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Следовательно, соотношение (15.9) можно записать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] d\zeta . \tag{15.12}$$

Члены ряда (15.11) непрерывны на γ и этот ряд сходится равномерно на γ. Следовательно, в силу теоремы 14.6

$$\oint_{\gamma} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma} \frac{(z - z_0)^n f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(z - z_0)^n \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] . \tag{15.13}$$

В силу (15.12), (15.13)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right],$$

т.е. справедлива формула (15.1) с коэффициентами c_n, имеющими вид (15.2). ◀

В условиях теоремы 15.1 функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $O_r(z_0)$ и на её границе γ. Значит, в силу следствия 12.3

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

и формула для коэффициентов степенного ряда (15.1) принимает вид

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \tag{15.14}$$

(по определению, $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$). Тогда соотношение (15.1) можно записать в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \ z \in O_R(z_0). \tag{15.15}$$

В случае $z_0 = 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \ z \in O_R(0). \tag{15.16}$$

Степенной ряд в правой части представления (15.1) с коэффициентами, вычисляемыми по формуле (15.2) (или по формуле (15.14)) называется *рядом Тейлора функции* $f(z)$ в *R-окрестности точки* z_0 . Соотношение (15.1), представляющее аналитическую функцию $f(z)$ в виде суммы её ряда Тейлора, называется *разложением функции* $f(z)$ в *ряд Тейлора в R-окрестности точки* z_0 .

Из замечания 14.4 следует

Замечание 15.2. Всякий степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

имеющий положительный радиус сходимости *R*, является рядом Тейлора своей суммы $S(z)$ в *R*-окрестности точки z_0 .

В силу замечания 15.2 справедливо

Замечание 15.3. Если функция $w = f(z)$ аналитична в открытом круге $O_R(z_0)$ и представима в этом круге в виде суммы степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ z \in O_R(z_0), \tag{15.17}$$

то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(z)$ в *R*-окрестности точки z_0, т.е. коэффициенты этого ряда вычисляются по формуле (15.14).

В силу теоремы 15.1 и замечания 15.3 справедливо следующее утверждение.

Теорема 15.2. Функция $f(z)$, аналитическая в открытом круге $O_R(z_0)$, единственным образом представима в этом круге в виде суммы степенного ряда по степеням $z - z_0$ и этот степенной ряд является рядом Тейлора функции $f(z)$ в *R*-окрестности точки z_0 .

Следствие 15.1. Функция $f(z)$, аналитическая в точке z_0 , единственным образом представима в некоторой δ-окрестности точки z_0 в виде суммы степенного ряда по степеням $z - z_0$ и этот степенной ряд является рядом Тейлора функции $f(z)$ в δ-окрестности точки z_0 .

Действительно, из аналитичности функции $f(z)$ в точки z_0 следует её аналитичность в некоторой δ-окрестности этой точки (см. замечание 9.1). Таким образом, функция $f(z)$ аналитична в открытом круге $O_\delta(z_0)$. Значит, в силу теоремы 15.2 справедливо утверждение следствия 15.1.

Замечание 15.4. Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и множество её особых точек непусто, то радиус сходимости *R* ряда Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей к ней особой точки $\hat{z}$ функции $f(z)$:

$$R = |\hat{z} - z_0|. \tag{15.18}$$

Действительно, из аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 следует её разложимость в ряд Тейлора в некоторой δ-окрестности точки z_0 (см. следствие 15.1). Тогда $R = \max\{\delta \mid$ функция $f(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)\}$, следовательно, $R = |\hat{z} - z_0|$, где $\hat{z}$ – ближайшая к z_0 особая точка функции $f(z)$ (таких ближайших к z_0 особых точек функции $f(z)$ может быть несколько, в этом случае они расположены на одной и той же окружности с центром в точке z_0).

Замечание 15.5. При любом фиксированном $z_0 \in \mathrm{X}$ целая функция $f(z)$ представима на всей комплексной плоскости X в виде суммы своего ряда Тейлора по степеням $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (15.19)$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \qquad (15.20)$$

или

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \ n \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \qquad (15.21)$$

где γ – произвольный замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур, охватывающий точку z_0 (в частности, в качестве γ можно брать любую окружность с центром в точке z_0).

Действительно, зафиксируем произвольное $z_* \in \mathrm{X}$. Рассмотрим какой-либо открытый круг $O_R(z_0) \mid z_* \in O_R(z_0)$ (для этого достаточно взять $R > |z_* - z_0|$). По определению целой функции, $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости X, в частности, она аналитична в открытом круге $O_R(z_0)$. Следовательно, в силу теоремы 15.1 функция $f(z)$ представима в виде суммы своего ряда Тейлора в R-окрестности точки z_0, т.е. в круге $O_R(z_0)$ справедливо представление (15.19), в частности, такое представление имеет место во взятой точке z_*, ибо $z_* \in O_R(z_0)$. В силу произвольности выбора z_* представление (15.19) справедливо на всей комплексной плоскости X.

Часто приходится использовать утверждение замечания 15.5 при $z_0 = 0$, поэтому выделим этот случай отдельно.

Замечание 15.6. Целая функция $f(z)$ представима на всей комплексной плоскости X в виде суммы своего ряда Тейлора по степеням z:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad (15.22)$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ n \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \qquad (15.23)$$

или

$$c_n = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \ n \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \qquad (15.24)$$

где γ – произвольный замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур, охватывающий точку $z_0 = 0$.

Теорема 15.3. Если функция $f(z)$ аналитична в открытом круге $O_R(z_0)$, то для коэффициентов её ряда Тейлора в R-окрестности точки z_0 справедлива оценка

$$|c_n| \le \frac{M^*(\gamma)}{r^n}, \ n \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \qquad (15.25)$$

где r – любое положительное число, меньшее числа R; $\gamma = S_r(z_0)$ – окружность с центром в точке z_0 радиуса r;

$$M^*(\gamma) = \max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta)|. \qquad (15.26)$$

► Зафиксируем произвольное $r \in (0, R)$. Возьмём в формуле (15.2) в качестве контура γ окружность $S_r(z_0)$. Тогда $\forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ получаем

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right|. \qquad (15.27)$$

В силу (15.26)

$$\left| f(\zeta) \right| \le M^*(\gamma)\,,\ \forall \zeta \in \gamma\ . \tag{15.28}$$

Заметим, что

$$\left| \zeta - z_0 \right| = r\,,\ \forall \zeta \in \gamma\ . \tag{15.29}$$

Используя (15.28), (15.29), оценим модуль подынтегральной функции $g(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{n+1}$: для $\forall \zeta \in \gamma$ имеем

$$\left| g(\zeta) \right| = \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{\left| f(\zeta) \right|}{\left| \zeta - z_0 \right|^{n+1}} = \frac{\left| f(\zeta) \right|}{r^{n+1}} \le \frac{M^*(\gamma)}{r^{n+1}}\,.$$

В силу оценки (10.34) получаем

$$\left| \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right| \le \frac{M^*(\gamma)}{r^{n+1}}\ l_\gamma\,, \tag{15.30}$$

где l_γ – длина окружности γ. Заметим, что $l_\gamma = 2\pi r$. Тогда, в силу (15.27), (15.30)

$$\left| c_n \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M^*(\gamma)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M^*(\gamma)}{r^n}\,,$$

т.е. справедлива оценка (15.25).

Неравенства (15.25) называются *неравенствами Коши*.

Теорема 15.4 (*теорема Лиувилля*). Любая целая функция, ограниченная по модулю на всей комплексной плоскости, постоянна.

Пусть целая функция $f(z)$ ограничена по модулю на X, т.е.

$$\exists\, M > 0 : \left| f(z) \right| \le M\ ,\ \forall z \in \mathrm{X}\ . \tag{15.31}$$

В силу замечания 15.5 функция $f(z)$ представима в виде (15.19). Рассмотрим окружность γ произвольного радиуса $r > 0$ с центром в точке $z_0 = 0$. Возьмём открытый круг $O_R(0) \mid \gamma \subset O_R(0)$. Функция $f(z)$ аналитична на X, в частности она аналитична в открытом круге $O_R(0)$. Следовательно, в силу теоремы 15.3 для коэффициентов в разложении (15.19) справедлива оценка (15.25). В силу (15.31)

$$M^*(\gamma) \le M\ ,\ \forall \gamma = S_r(0)\ . \tag{15.32}$$

В силу (15.25), (15.32)

$$0 \le \left| c_n \right| \le \frac{M}{r^n}\,,\ \forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\},\ \forall r > 0\,. \tag{15.33}$$

Заметим, что $\lim\limits_{r \to +\infty} \left(M / r^n \right) = 0$ для $\forall n \in \mathrm{N}$. Тогда, переходя в (15.33) к пределу при $r \to +\infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{r \to +\infty} \left| c_n \right| = \left| c_n \right|$, получаем в силу теоремы о предельном переходе в неравенствах [2.8, с. 72]: $\left| c_n \right| = 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$, т.е. $c_n = 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$. Следовательно, в силу (15.19) $f(z) \equiv c_0$.

Следствие 15.2. Целые функции $\sin z$ и $\cos z$ (см. пример 9.1) не являются ограниченными по модулю функциями на всей комплексной плоскости.

Напомним, что эти функции при действительных значениях аргумента ограничены по модулю на P : $\left| \sin x \right| \le 1$, $\left| \cos x \right| \le 1,\ \forall x \in \mathrm{P}$.

С помощью теоремы Лиувилля легко доказать следующее утверждение, называемое *основной теоремой алгебры комплексных чисел* [2.10, с. 147].

Теорема 15.5. Всякий многочлен

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

степени $n \ge 1$, $a_0 \ne 0$, с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один корень (один нуль) в поле комплексных чисел.

П: $P(z) \ne 0$, $\forall z \in \mathrm{X}$. Многочлен $P(z)$ является целой функцией (см. пример 9.3). В силу теоремы 9.5 функция $f(z) = 1/P(z)$ аналитична на X как частное двух аналитических на X функций, следовательно, $f(z)$ является целой функцией. Заметим, что

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0\,,$$

а это означает, что по определению предела (см. (5.15)), что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, O_{\Delta}(0), \Delta = \Delta(\varepsilon) \mid \forall z \in \mathrm{C} \setminus \overline{O}_{\Delta}(0) \Rightarrow \left| f(z) \right| < \varepsilon ,$$

в частности,

$$\text{для} \quad \varepsilon = 1 \quad \exists\, O_{\Delta}(0) \mid \forall z \in \mathrm{C} \setminus \overline{O}_{\Delta}(0) \Rightarrow \left| f(z) \right| < 1 . \qquad (15.34)$$

Функция $f(z)$ аналитична на X, следовательно, в силу замечания 9.3 она непрерывна на X, в частности, $f(z)$ непрерывна на $\overline{O}_{\Delta}(0)$. Тогда, в силу замечания 5.10 её модуль $\left| f(z) \right|$ является непрерывной функ-цией на замкнутом ограниченном множестве $\overline{O}_{\Delta}(0)$. Следовательно, в силу первой теоремы Вейерштрасса для вещественных функций двух вещественных переменных [2.8, с. 496] функция $\left| f(z) \right|$ ограничена на $\overline{O}_{\Delta}(0)$, т.е.

$$\exists\, M > 0 : \left| f(z) \right| \le M \;, \; \forall z \in \overline{O}_{\Delta}(0) \;. \qquad (15.35)$$

Положим $\tilde{M} = \max\{1,\, M\}$. Тогда в силу (15.34), (15.35) $\left| f(z) \right| \le \tilde{M}$, $\forall z \in \mathrm{X}$, т.е. целая функция $f(z)$ ограничена по модулю на всей комплексной плоскости. Следовательно, по теореме Лиувилля $f(z) \equiv \mathrm{const}$, $\forall z \in \mathrm{X}$. Противоречие, ибо $f(z) = 1/P(z) \not\equiv \mathrm{const}$, $\forall z \in \mathrm{X}$, так как степень n многочлена $P(z)$ удовлетворяет условию $n \ge 1$.

Укажем разложения некоторых функций в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$, т.е. по степеням z. В примерах 14.1, 14.2 были получены разложения вида

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \;, \; z \in O_1(0) ; \qquad (15.36)$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \;, \; z \in O_1(0) . \qquad (15.37)$$

Разложения (15.36), (15.37) являются частными случаями следующего разложения [1.3, с. 151]:

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-(n-1))}{n!} z^n \;, \; z \in O_1(0) . \qquad (15.38)$$

Используя замечание 15.6 и находя коэффициенты c_n по формуле (15.23), получаем следующие разложения целых функций e^z, $\sin z$, $\cos z$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;, \; z \in \mathrm{X} ; \qquad (15.39)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;, \; z \in \mathrm{X} ; \qquad (15.40)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \;, \; z \in \mathrm{X} . \qquad (15.41)$$

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ были определены в § 6 по формулам (6.5) – (6.7), которые совпадают соответственно с формулами (15.39) – (15.41). Таким образом, каждая из этих функций была опреде-лена с помощью суммы своего ряда Тейлора по степеням z.

Используя определения гиперболического синуса и гиперболического косинуса: $\operatorname{sh} z = \left(e^z - e^{-z}\right)/2$, $\operatorname{ch} z = \left(e^z + e^{-z}\right)/2$ а также разложение (15.39), получаем следующие разложения целых функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$:

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;, \; z \in \mathrm{X} ; \qquad (15.42)$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \;, \; z \in \mathrm{X} . \qquad (15.43)$$

Для главной ветви логарифмической функции справедливо разложение [1.3, с. 150]

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1},\ z\in O_1(0). \qquad (15.44)$$

Используя разложения (15.36) – (15.44), можно получать разложения в ряд Тейлора различных элементарных функций комплексного переменного.

Пример 15.1. Найдём разложение функции $f(z)=1/(3z+1)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=-2$, т.е. по степеням $z+2$.

Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{3z+1}=\frac{1}{3(z+2)-5}=-\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{3(z+2)}{5}}.$$

Воспользуемся разложением (15.36), взяв в нём в качестве z выражение $\frac{3(z+2)}{5}$:

$$f(z)=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3(z+2)}{5}\right]^n=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n(z+2)^n. \qquad (15.45)$$

Разложение (15.36) справедливо при $|z|<1$, следовательно, разложение (15.45) справедливо при $\left|\frac{3(z+2)}{5}\right|<1$ или $|z+2|<\frac{5}{3}$, т.е. в открытом круге $O_{\frac{5}{3}}(-2)$. Итак,

$$\frac{1}{3z+1}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n(z+2)^n,\ z\in O_{\frac{5}{3}}(-2). \qquad (15.46)$$

Заметим, что радиус сходимости степенного ряда в правой части (15.46) можно было найти по формуле (15.18): функция $f(z)$ имеет единственную особую точку $\hat{z}=-\frac{1}{3}$, следовательно, $R=|\hat{z}-z_0|=\ =\left|-\frac{1}{3}-(-2)\right|=\frac{5}{3}$.

Пример 15.2. Найдём разложение функции

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$, т.е. по степеням z.

Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}=\frac{z+1}{(z+5)(z-1)}=\frac{A}{z+5}+\frac{B}{z-1}=$$

$$=\frac{2}{3}\frac{1}{z+5}+\frac{1}{3}\frac{1}{z-1}=\frac{2}{15}\frac{1}{1+\frac{z}{5}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-z}.$$

Воспользуемся разложениями (15.36), (15.37):

при $\left|\frac{z}{5}\right|<1$, т.е. при $|z|<5$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{5}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{5}\right)^n;$$

при $|z|<1$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Тогда при $|z|<1$, т.е. $z\in O_1(0)$

$$f(z)=\frac{2}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}z^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2\cdot(-1)^n}{5^{n+1}}-1\right]z^n .$$

Итак,

$$\frac{z+1}{z^2+4z-5}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2\cdot(-1)^n}{5^{n+1}}-1\right]z^n ,\ z\in O_1(0) . \qquad (15.47)$$

Как и в предыдущем примере, радиус сходимости степенного ряда в правой части (15.47) можно найти по формуле (15.18): функция $f(z)$ имеет две особые точки $\hat{z}_1=-5$, $\hat{z}_2=1$. Ближайшей из них к точке $z_0=0$ является точка $\hat{z}_2=1$, следовательно, $R=|\hat{z}_2-z_0|= =|1-0|=1$.

16. РЯД ЛОРАНА

Ряд по отрицательным степеням $z-z_0$; понятие двустороннего степенного ряда; разложение аналитической функции в ряд Лорана; единственность представления аналитической в кольце функции в виде суммы двустороннего степенного ряда.

Пусть функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, кроме двух точек z_1 и z_2, т.е. z_1, z_2 – изолированные особые точки функции $f(z)$. Зафиксируем произвольную точку $z_0\in \mathrm{X}\ |\ z_0\neq z_1$, $z_0\neq z_2$. Положим $r=|z_1-z_0|$, $R=|z_2-z_0|$. Пусть, для определённости, $r<R$ (для точек z_1, z_2 возможен также случай $r=R$, т.е. особые точки z_1, z_2 расположены на одной и той же окружности с центом в точке z_0, но такой случай мы не рассматриваем). Возьмём окружности $\gamma=S_r(z_0)$, $\Gamma=S_R(z_0)$ (рис. 16.1).

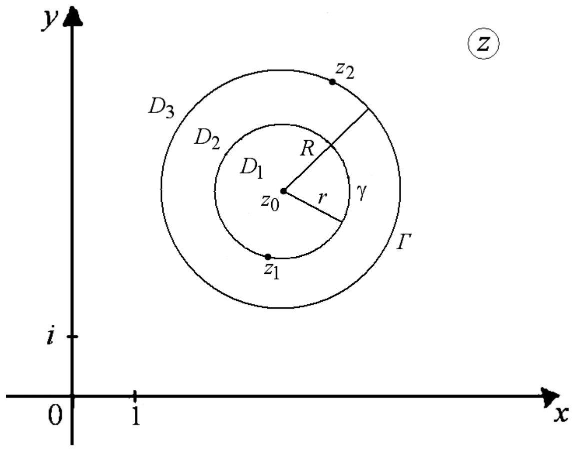

Рис. 16.1

Окружности γ и Γ выделяют три области аналитичности функции $f(z)$: $D_1=O_r(z_0),\ D_2=\{z\in \mathrm{X}: r<|z-z_0|<R\},\ D_3=\{z\in \mathrm{X}:\ \ R<|z-z_0|<+\infty\}$. В области D_1 функция $f(z)$ представима в виде суммы своего ряда Тейлора по степеням $z-z_0$ (см. теорему 15.2). При решении некоторых задач необходимо знать представление функции $f(z)$ в виде суммы ряда в областях D_2 и D_3, т.е. в конечном кольце $K=\{z\in \mathrm{X}: r<|z-z_0|<R\}$ и бесконечном кольце $\tilde{K}=\{z\in \mathrm{C}:\ R<|z-z_0|<+\infty\}$ (для него $\tilde{r}=R,\ \tilde{R}=+\infty$).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} , \qquad (16.1)$$

содержащий целые отрицательные степени $z-z_0$.

Теорема 16.1. Ряд (16.1) абсолютно сходится на множестве $X \setminus \overline{O}_r(z_0)$ и расходится в открытом круге $O_r(z_0)$, где r вычисляется по любой из формул

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}, \tag{16.2}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}. \tag{16.3}$$

Положим $1/(z - z_0) = w$. Тогда ряд (16.1) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n. \tag{16.4}$$

В силу теоремы 14.9 степенной ряд (16.4) абсолютно сходится в своём круге сходимости $O_{\tilde{R}}(0)$, т.е. сходится в любой точке $w: |w| < \tilde{R}$, и расходится вне замкнутого круга $\overline{O}_{\tilde{R}}(0)$, т.е. расходится в любой точке $w: |w| > \tilde{R}$, при этом в силу формул (14.33), (14.34)

$$\tilde{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{-n}|}{|c_{-n-1}|}, \tag{16.5}$$

или

$$\tilde{R} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}}. \tag{16.6}$$

Учитывая, что $|w| = 1/|z - z_0|$, приходим к следующему выводу: ряд (16.1) абсолютно сходится при любом $z: |z - z_0| > \dfrac{1}{\tilde{R}}$ и расходится при любом $z: |z - z_0| < \dfrac{1}{\tilde{R}}$. Полагая $\dfrac{1}{\tilde{R}} = r$, получаем: ряд (16.1) абсолютно сходится на множестве $X \setminus \overline{O}_r(z_0)$ и расходится в открытом круге $O_r(z_0)$. Из формул (16.5), (16.6) следуют формулы (16.2), (16.3) для определения r.

На окружности $S_r(z_0)$ поведение ряда (16.1) в смысле сходимости может быть различным.

Область сходимости ряда (16.1) имеет вид $D_1 = E_{S_r(z_0)} \cup H$, где $E_{S_r(z_0)}$ – внешность окружности $S_r(z_0)$; H – множество всех точек окружности $S_r(z_0)$, в которых ряд (16.1) сходится.

Множество $E_{S_r(z_0)} = X \setminus \overline{O}_r(z_0)$ называется *множеством внутренних точек области сходимости ряда* (16.1).

Определение 16.1. *Двусторонним степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{16.7}$$

Определение 16.2. Значение $z_* \in X$ называется *точкой сходимости двустороннего степенного ряда* (16.7), если в этой точке сходятся оба ряда в правой части (16.7), т.е. в точке z_* сходится рад (16.1) и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{16.8}$$

Определение 16.3. Значение $z_* \in X$ называется *точкой абсолютной сходимости двустороннего степенного ряда* (16.7), если в этой точке абсолютно сходятся оба ряда в правой части (16.7).

В силу определения 16.2 область сходимости ряда (16.7) имеет вид $D = D_1 \cap D_2$, где D_1 и D_2 – области сходимости соответственно рядов (16.1) и (16.8).

Замечание 16.1. Для двустороннего степенного ряда (16.7) выполняется:

а) ряд по отрицательным степеням $z - z_0$, т.е. ряд (16.1) абсолютно сходится на множестве $X \setminus \overline{O}_r(z_0)$ (r вычисляется по любой из формул (16.2), (16.3));

б) ряд по неотрицательным степеням $z - z_0$, т.е. ряд (16.8) абсолютно сходится в своём круге сходимости $O_R(z_0)$ (R вычисляется по любой из формул (14.33), (14.34)).

Действительно, утверждение а) установлено выше; утверждение б) выполняется в силу теоремы 14.10.

Возможны следующие случаи:

1) $r > R$, тогда $D = D_1 \cap D_2 = \varnothing$, т.е. ряд (16.7) расходится на всей комплексной плоскости X.

2) $r < R$, тогда множеством внутренних точек области сходимости ряда (16.7) является кольцо

$$K_{r,R}(z_0)=\{z\in \mathrm{X}: r<|z-z_0|<R\},$$

называемое кольцом *сходимости двустороннего степенного ряда* (16.7) (см. рис. 16.1).

На границе $\Gamma_K=S_r(z_0)\cup S_R(z_0)$ кольца $K_{r,R}(z_0)$ поведение рядов (16.1), (16.8) в смысле сходимости может быть различным.

В случае 2) возможны следующие вырожденные ситуации:

а) $r>0$, $R=\infty$, т.е. $K_{r,\infty}=\{z\in \mathrm{X}:|z-z_0|>r\}$ – внешность окружности $S_r(z_0)$;

б) $r=0$, $R=\infty$, т.е. $K_{0,\infty}=\{z\in \mathrm{X}:|z-z_0|>0\}$ – вся комплексная плоскость, за исключением точки z_0;

в) $r=0$, $R>0$, т.е. $K_{0,R}=\{z\in \mathrm{X}:0<|z-z_0|<R\}$ – проколотый круг $\dot{O}_R(z_0)$.

Теорема 16.2. Если функция $w=f(z)$ аналитична в кольце $K_{r,R}(z_0)=\{z\in \mathrm{X}:r<|z-z_0|<R\}$, то она представима в этом кольце в виде суммы двустороннего степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \qquad (16.9)$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n\in\mathbb{Z}, \qquad (16.10)$$

где L – произвольный замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур, расположенный в кольце $K_{r,R}(z_0)$ и охватывающий точку z_0.

Замечание 16.2. Значение интеграла (16.10) не зависит от выбора контура L (важно лишь, чтобы контур L удовлетворял условиям теоремы 16.2) (см. замечание 12.1), в частности, в качестве L можно взять любую окружность с центром в точке z_0, расположенную в кольце $K_{r,R}(z_0)$.

Доказательство теоремы. Зафиксируем произвольную точку $z\in K_{r,R}(z_0)$. Рассмотрим две окружности $L_1=S_{r_1}(z_0)$ и $L_2=S_{R_1}(z_0)|\ L_1,L_2\subset K_{r,R}(z_0)$ и $z\in E_{L_1}$, $z\in I_{L_2}$, где E_{L_1} – внешность окружности L_1, I_{L_2} – внутренность окружности L_2. Возьмём замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур $\gamma|\ \gamma\subset E_{L_1}\cap I_{L_2}$ и γ охватывает точку z (рис. 16.2).

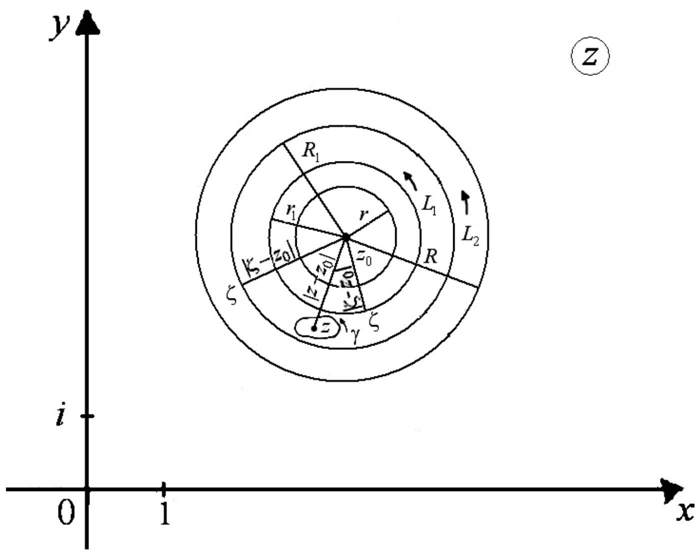

Рис. 16.2

Рассмотрим трёхсвязную область G с границей $\Gamma_G=L_2\cup L_1\cup\gamma$. Функция $h(\zeta)=f(\zeta)/(\zeta-z)$ аналитична в области G как отношение двух аналитических функций в этой области (см. теорему 9.5). Следовательно, в силу интегральной теоремы Коши для многосвязной области (см. теорему 11.5)

$$\oint_{L_2}h(\zeta)d\zeta=\oint_{L_1}h(\zeta)d\zeta+\oint_{\gamma}h(\zeta)d\zeta,$$

или после умножения обеих частей равенства на постоянную $\dfrac{1}{2\pi i}$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\,. \tag{16.11}$$

Функция $f(\zeta)$ аналитична на контуре γ и в односвязной области, ограниченной этим контуром. Следовательно, применима интегральная формула Коши (см. формулу (12.2)), в силу которой

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)\,. \tag{16.12}$$

Из (16.11), (16.12) получаем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\,. \tag{16.13}$$

Для любого $\zeta\in L_2$ имеем

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\,. \tag{16.14}$$

Заметим, что для $\forall\zeta\in L_2$

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}=\frac{|z-z_0|}{R_1}<1\,.$$

Следовательно, в силу (14.36)

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\,. \tag{16.15}$$

В силу (16.14), (16.15)

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,. \tag{16.16}$$

Оценим общий член $g_n(\zeta)$ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \tag{16.17}$$

(z_0 и z фиксированы, поэтому члены ряда (16.17) являются функциями комплексного переменного $\zeta\in L_2$). Для $\forall n\in \mathrm{N}\cup\{0\}$ и $\forall\zeta\in L_2$ получаем

$$|g_n(\zeta)|=\left|\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|=\frac{|z-z_0|^n}{|\zeta-z_0|^{n+1}}=\frac{|z-z_0|^n}{R_1^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{R_1}\left(\frac{|z-z_0|}{R_1}\right)^n=\frac{1}{R_1}q_1^n=a_n\,,\ q_1=\frac{|z-z_0|}{R_1}<1\,.$$

Знакоположительный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_1^n}{R_1} \tag{16.18}$$

сходится как ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q_1\in(0;1)$ [2.5, с. 112]. Итак, ряд (16.17) мажорируется на множестве L_2 сходящимся числовым рядом (16.18). Следовательно, по признаку Вейерштрасса (см. теорему 14.4) ряд (16.17) сходится равномерно на окружности L_2. В силу (16.16) первое слагаемое в правой части (16.13) принимает вид

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\left[f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]d\zeta\,. \tag{16.19}$$

Функция $f(\zeta)$ аналитична на L_2, следовательно, в силу теоремы 9.1 она непрерывна на L_2, а, значит, в силу замечания 5.10, её модуль $|f(\zeta)|$ является непрерывной на L_2 функцией. Заметим, что окружность L_2 является замкнутым ограниченным множеством. Следовательно, по первой теореме Вейерштрасса для вещественных функций двух вещественных переменных [2.8, с. 496] функция $\left|f(\zeta)\right|$ ограничена на L_2, т.е. функция $f(\zeta)$ ограничена по модулю на L_2. Из равномерной сходимости ряда (16.17) на L_2 и ограниченности по модулю функции $f(\zeta)$ на L_2 вытекает в силу теоремы 14.3 равномерная сходимость на L_2 ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \qquad (16.20)$$

к функции $\tilde{S}(\zeta)=f(\zeta)/(\zeta-z)$. Следовательно, соотношение (16.19) можно записать в виде

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]d\zeta\,. \qquad (16.21)$$

Члены ряда (16.20) непрерывны на L_2 и этот ряд сходится равномерно на L_2. Следовательно, в силу теоремы 14.6

$$\oint_{L_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{L_2}\frac{(z-z_0)^n f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(z-z_0)^n\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right]. \qquad (16.22)$$

В силу (16.21), (16.22)

$$I_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\,, \qquad (16.23)$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\,,\ n\in \mathrm{N}\cup\{0\}. \qquad (16.24)$$

Далее, для $\forall\zeta\in L_1$ имеем

$$-\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}\,. \qquad (16.25)$$

Заметим, что для $\forall\zeta\in L_1$

$$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\frac{|\zeta-z_0|}{|z-z_0|}=\frac{r_1}{|z-z_0|}<1\,.$$

Следовательно, в силу (14.36)

$$\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{n-1}. \qquad (16.26)$$

В силу (16.25), (16.26)

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\,. \qquad (16.27)$$

Оценим общий член $\chi_n(\zeta)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \qquad (16.28)$$

Для $\forall n\in \mathrm{N}$ и $\forall\zeta\in L_1$ получаем

$$\left|\chi_n(\zeta)\right| = \left|\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}\right| = \frac{\left|\zeta - z_0\right|^{n-1}}{\left|z - z_0\right|^n} = \frac{r_1^{n-1}}{\left|z - z_0\right|^n} =$$

$$= \frac{1}{\left|z - z_0\right|}\left(\frac{r_1}{\left|z - z_0\right|}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left|z - z_0\right|} q_2^{n-1} = b_n\,,\ q_2 = \frac{r_1}{\left|z - z_0\right|} < 1\,.$$

Знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_2^{n-1}}{\left|z - z_0\right|} \qquad (16.29)$$

сходится как ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q_2 \in (0;1)$. Итак, ряд (16.28) мажорируется на множестве L_1 сходящимся числовым рядом (16.29). Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (16.28) сходится равномерно на окружности L_1. В силу (16.27) второе слагаемое в правой части (16.13) принимает вид

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\left[f(\zeta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}\right] d\zeta\,. \qquad (16.30)$$

Из равномерной сходимости ряда (16.28) на L_1 и ограниченности по модулю функции $f(\zeta)$ на L_1 вытекает в силу теоремы 14.3 равномерная сходимость на L_1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta)\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} \qquad (16.31)$$

к функции $\tilde{\tilde{S}}(\zeta) = -f(\zeta)/(\zeta - z)$. Следовательно, соотношение (16.30) можно записать в виде

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta)}{(z - z_0)^n}\right] d\zeta\,. \qquad (16.32)$$

Члены ряда (16.31) непрерывны на L_1 и этот ряд сходится равномерно на L_1. Следовательно, в силу теоремы 14.6

$$\oint_{L_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta)}{(z - z_0)^n}\right] d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\oint_{L_1}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta)}{(z - z_0)^n} d\zeta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z - z_0)^n}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta\right]. \qquad (16.33)$$

В силу (16.32), (16.33)

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}\,, \qquad (16.34)$$

где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta\,,\ n \in \mathrm{N} \cup \{0\}. \qquad (16.35)$$

В силу (16.13), (16.23), (16.34)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}\,, \qquad (16.36)$$

где коэффициенты c_n, c_{-n} выражаются соответственно формулами (16.24), (16.35). Заменяя в формулах (16.24), (16.35) окружности L_1, L_2 на произвольный контур L, удовлетворяющий условиям теоремы (это можно сделать в силу замечания 16.2) и объединяя полученные формулы, приходим к формуле (16.10) для вычисления коэффициентов c_n в представлении (16.36). $\blacktriangleleft$

Двусторонний степенной ряд в правой части представления (16.9) с коэффициентами, вычисляемыми по формуле (16.10), называется *рядом Лорана функции* $f(z)$ *в кольце* $K_{r,R}(z_0)$ (*по степеням* $z - z_0$ или *с центром в точке* z_0). Соотношение (16.9) представляющее аналитическую функцию в виде суммы её ряда Лорана, называется *разложением* *функции* $f(z)$ *в ряд Лорана в кольце* $K_{r,R}(z_0)$ (или *лорановским разложением функции* $f(z)$ *в кольце* $K_{r,R}(z_0)$) (*по степеням* $z-z_0$ *или с центром в точке* z_0), при этом кольцо $K_{r,R}(z_0)$ называется *кольцом сходимости ряда Лорана*.

Первый ряд в представлении (16.9), т.е. ряд по неотрицательным степеням $z-z_0$ называется *правильной частью ряда Лорана* (*правильной частью лорановского разложения*); второй ряд в представлении (16.9), т.е. ряд по отрицательным степеням $z-z_0$ называется *главной частью ряда Лорана* (*главной частью лорановского разложения*) функции $f(z)$ в кольце $K_{r,R}(z_0)$.

Замечание 16.3. Ряд Лорана аналитической в кольце $K_{r,R}(z_0)$ функции $f(z)$ абсолютно сходится в этом кольце.

Действительно, в силу замечания 16.1 правильная часть ряда Лорана абсолютно сходится в открытом круге $O_R(z_0)$, главная часть ряда Лорана абсолютно сходится на множестве $\mathrm{X}\setminus\overline{O}_r(z_0)$. Следовательно, ряд Лорана абсолютно сходится в кольце $K_{r,R}(z_0)$.

Замечание 16.4. Ряд Лорана аналитической в кольце $K_{r,R}(z_0)$ функции $f(z)$ сходится равномерно на любом замкнутом ограниченном множестве $G\subset K_{r,R}(z_0)$ (см. следствие 14.3).

Аналогом замечания 15.2 является следующее утверждение [1.4, с. 227].

Теорема 16.3. Всякий двусторонний степенной ряд (16.7), сходящийся в кольце $K_{r,R}(z_0)$, является рядом Лорана своей суммы $S(z)$ в этом кольце.

В силу теорем 16.2, 16.3 справедливо следующее утверждение.

Теорема 16.4. Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $K_{r,R}(z_0)$, единственным образом представима в этом кольце в виде суммы двустороннего степенного ряда по степеням $z-z_0$ и этот двусторонний степенной ряд является рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце $K_{r,R}(z_0)$.

В силу теоремы 16.4 разложение аналитической в кольце $K_{r,R}(z_0)$ функции $f(z)$ в ряд Лорана единственно. Поэтому, чтобы получить такое разложение, не обязательно искать его коэффициенты по формуле (16.10). Достаточно применить какой-либо другой приём (например, использовать известные стандартные разложения), позволяющий представить функцию $f(z)$ как сумму ряда по неотрицательным и отрицательным степеням $z-z_0$.

В дальнейшем будет показано (см. § 17), что характер изолированной особой точки z_0 функции $f(z)$ определяется видом лорановского разложения этой функции в окрестности точки z_0. В связи с этим необходимо уметь решать следующие задачи.

Задача 16.1. Найти представление функции $f(z)$ в виде суммы степенного ряда или двустороннего степенного ряда по степеням $z-z_0$ (z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости), т.е. найти разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора или ряд Лорана по степеням $z-z_0$ в её областях аналитичности.

Задача 16.2. Найти представление функции $f(z)$ в виде суммы двустороннего степенного ряда, т.е. найти разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности её изолированной особой точки z_0 (тем самым будет определён тип изолированной особой точки z_0).

План решения задачи 16.1 таков: находят изолированные особые точки функции $f(z)$. Пусть, например, функция $f(z)$ имеет две изолированные особые точки z_1 и z_2. Тогда возможны следующие случаи:

I. $z_1\neq z_0$, $z_2\neq z_0$; $|z_1-z_0|\neq|z_2-z_0|$.

II. $z_1\neq z_0$, $z_2\neq z_0$; $|z_1-z_0|=|z_2-z_0|$.

III. Одна из точек z_1, z_2 совпадает с z_0.

В случае I предположим для определённости, что $|z_1-z_0|< \ <|z_2-z_0|$. Рассмотрим окружности $S_r(z_0)$, $S_R(z_0)$, где $r=|z_1-z_0|$, $R=|z_2-z_0|$. Тогда областями аналитичности функции $f(z)$ являются следующие области: $D_1=O_r(z_0)$, $D_2=K_{r,R}(z_0)$, $D_3=K_{R,\infty}(z_0)$ (рис. 16.3).

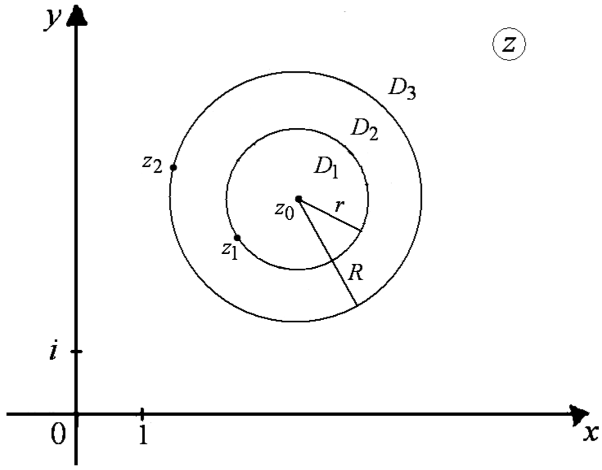

Рис. 16.3

В случае II в качестве областей аналитичности функции $f(z)$ выступают области: $D_1 = O_r(z_0)$, $D_2 = K_{r,\infty}(z_0)$, где $r = |z_1 - z_0| = \ = |z_2 - z_0|$ (рис. 16.4).

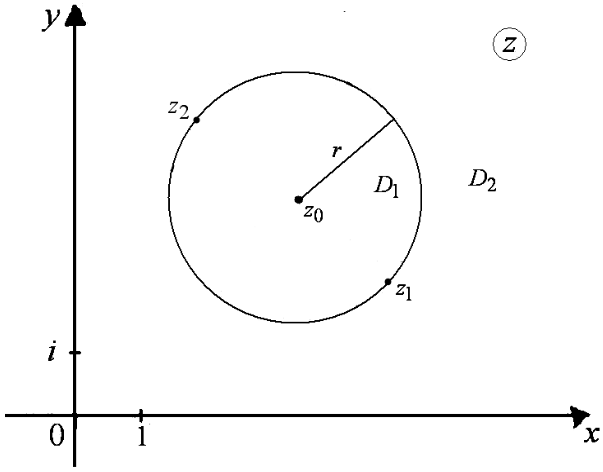

Рис. 16.4

В случае III предположим для определённости, что $z_1 = z_0$. Тогда областями аналитичности функции $f(z)$ являются области: $D_1 = K_{0,r}(z_0)$, $D_2 = K_{r,\infty}(z_0)$, где $r = |z_2 - z_0|$ (рис. 16.5).

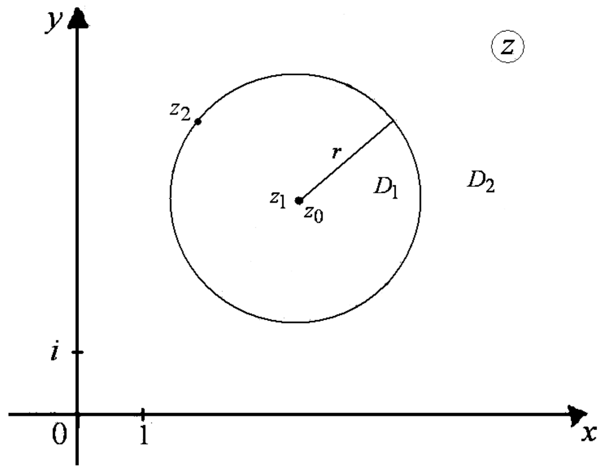

Рис. 16.5

Далее, находят разложение функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$ в каждой из её областей аналитичности (в случае I в ряд Тейлора в открытом круге $O_r(z_0)$ и в ряд Лорана в каждом из колец $K_{r,R}(z_0)$, $K_{R,\infty}(z_0)$; в случае II в ряд Тейлора в открытом круге $O_r(z_0)$ и в ряд Лорана в кольце $K_{r,\infty}(z_0)$; в случае III в ряд Лорана в каждом из колец $K_{0,r}(z_0)$, $K_{r,\infty}(z_0)$).

Пример 16.1. Найти разложение функции

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2} \tag{16.37}$$

по степеням z в её областях аналитичности.

В качестве центра разложения выступает точка $z_0 = 0$. Функция $f(z)$ имеет две изолированные особые точки $z_1 = -1$ и $z_2 = -2$ (это значения z, при которых знаменатель дроби в правой части (16.37) обращается в нуль). Областями аналитичности функции $f(z)$ являются области $D_1 = O_1(0)$, $D_2 = K_{1,2}(0)$, $D_3 = K_{2,\infty}(0)$ (рис. 16.6).

Используя известный способ разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей [2.8, с. 220], представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}. \tag{16.38}$$

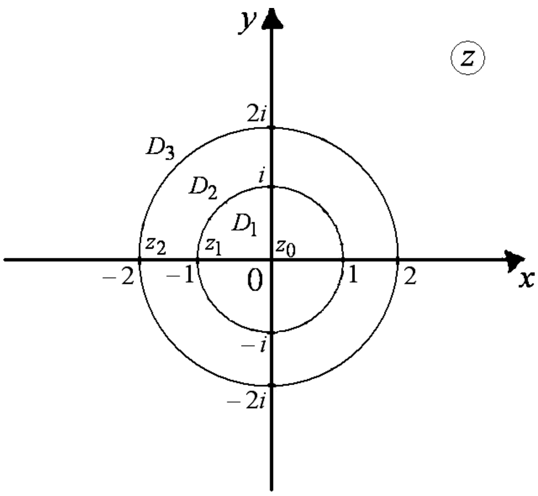

Рис. 16.6

Используя стандартное разложение (15.37) получаем при $|z| < 1$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n; \tag{16.39}$$

при $|z| > 1$ (т.е. $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$)

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}; \tag{16.40}$$

при $|z| < 2$ (т.е. $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$)

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n; \tag{16.41}$$

при $|z| > 2$ (т.е. $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$)

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}. \tag{16.42}$$

Учитывая (16.38) получаем:

в открытом круге $O_1(0)$ (в силу (16.39), (16.41))

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n;$$

в кольце $K_{1,2}(0)$ (в силу (16.40), (16.41))

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n;$$

в кольце $K_{2,\infty}(0)$ (в силу (16.40), (16.42))

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(1+2^{n-1}\right)}{z^n}.$$

Итак,

$$f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,\ z\in O_1(0);\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{z^n},\ z\in K_{1,2}(0);\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\left(1+2^{n-1}\right)}{z^n},\ z\in K_{2,\infty}(0).\end{cases}$$

При решении задачи 16.2 находят разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $K_{0,R}(z_0)=\{z\in \mathrm{X}:0<|z-z_0|<R\}$, где R – расстояние от точки z_0 до ближайшей к ней изолированной особой точке $\hat{z}$ функции $f(z)$: $R=|\hat{z}-z_0|$ (если функция $f(z)$ имеет единственную изолированную особую точку z_0, то $R=\infty$ и разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана находят в кольце $K_{0,\infty}$).

Пример 16.2. Найти разложение функции

$$f(z)=z^3\sin\frac{1}{z}$$

в ряд Лорана в окрестности её изолированной особой точки $z_0=0$.

Функция $f(z)$ имеет единственную изолированную особую точку $z_0=0$. Следовательно, она разложима в ряд Лорана в кольце $K_{0,\infty}(0)=\ =\{z\in \mathrm{X}:0<|z|<\infty\}$. Используя стандартное разложение (15.40), получаем для $\forall z\in K_{0,\infty}(0)$

$$f(z)=z^3\sin\frac{1}{z}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-2}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-2}}=-\frac{1}{6}+z^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n-2}}.$$

Итак,

$$f(z)=-\frac{1}{6}+z^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n-2}},\ z\in K_{0,\infty}(0). \tag{16.43}$$

Заметим, что правильная часть лорановского разложения (16.43) содержит два члена, а главная часть – бесконечно много членов.

17. КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИИ

Устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка; связь между типом особой точки и видом главной части лорановского разложения в проколотой окрестности этой точки; порядок полюса; признак наличия полюса; кратность нуля функции; признак наличия кратного нуля функции; связь между нулями и полюсами функций; теорема Сохоцкого; случай несобственного комплексного числа $z=\infty$; разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$; понятие мероморфной функции, её представление в виде суммы целой части и простейших рациональных дробей.

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$. Это означает по определению, что $\exists O_\delta(z_0)$, в которой нет других особых точек функции $f(z)$, т.е. функция $f(z)$ аналитична в проколотой δ-окрестности точки z_0. Тогда в силу теоремы 16.2 функция $f(z)$ представима в кольце $K_{0,\delta}(z_0)=\dot{O}_\delta(z_0)=\{z\in \mathrm{X}:0<|z-z_0|<\delta\}$ в виде суммы своего ряда Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},\ z\in\dot{O}_\delta(z_0), \tag{17.1}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n\in \mathrm{Z}, \tag{17.2}$$

где L – произвольный замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур, расположенный в $\dot{O}_\delta(z_0)$ и охватывающий точку z_0 (в частности, в качестве L можно взять любую окружность с центром в точке z_0 и радиусом, меньшим δ).

Замечание 17.1. Разложение (17.1) справедливо в максимальном кольце $K_{0,R}(z_0)=\{z\in \mathrm{X} : 0<|z-z_0|<R\}$ (с центром в точке z_0) аналитичности функции $f(z)$ (здесь $R=|\hat{z}-z_0|$ – расстояние от точки z_0 до ближайшей к ней изолированной особой точки $\hat{z}$ функции $f(z)$). При этом если z_0 – единственная особая точка функции $f(z)$, то $R=\infty$, т.е. разложение (17.1) справедливо на всей комплексной плоскости, кроме точки z_0.

При изучении функции $f(z)$ в окрестности её изолированной особой точки z_0 необходимо знать поведение этой функции при $z\to z_0$. В связи с этим вводятся следующие понятия.

Определение 17.1. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$;

2) *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

3) *существенно особой точкой*, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при $z\to z_0$.

Теорема 17.1. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой особой точкой этой функции тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения (17.1) функции $f(z)$ в некоторой проколотой δ-окрестности точки z_0 равна нулю, т.е. $c_{-n}=0$, $\forall n\in \mathrm{N}$.

Необходимость. Пусть z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, т.е.

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z)=A\neq\infty. \tag{17.3}$$

Покажем, что

$$c_{-n}=0,\ \forall n\in \mathrm{N}. \tag{17.4}$$

Из (17.3) следует в силу теоремы 5.2, что функция $f(z)$ ограничена по модулю в некоторой проколотой δ_1-окрестности точки z_0, т.е. $\exists M>0\ |$

$$|f(z)|\leq M,\ \forall z\in \dot{O}_{\delta_1}(z_0). \tag{17.5}$$

Положим $\delta_2=\min\{\delta,\delta_1\}$. Возьмём в формуле (17.2) в качестве L окружность $\gamma=S_\rho(z_0)$ с $\rho<\delta_2$. Тогда в силу (17.5)

$$|f(z)|\leq M,\ \forall z\in\gamma. \tag{17.6}$$

При любом $n\in \mathrm{N}$ получаем

$$|c_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}d\zeta\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint\limits_\gamma f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta\right|. \tag{17.7}$$

Учитывая (17.6) и равенство $|\zeta-z_0|=\rho$, $\forall\zeta\in\gamma$, оценим модуль подынтегральной функции $g(\zeta)=f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}$ на окружности γ:

$$|g(\zeta)|=\left|f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}\right|=|f(\zeta)||\zeta-z_0|^{n-1}\leq M\rho^{n-1}.$$

Получили $|g(\zeta)|\leq M\rho^{n-1}$, $\forall\zeta\in\gamma$. Тогда, в силу (10.34)

$$\left|\oint\limits_\gamma g(\zeta)d\zeta\right|\leq M\rho^{n-1}l_\gamma=M\rho^{n-1}2\pi\rho=2\pi M\rho^n. \tag{17.8}$$

В силу (17.7), (17.8)

$$0\leq|c_{-n}|\leq M\rho^n,\ \forall n\in \mathrm{N},\ \forall 0<\rho<\delta_2. \tag{17.9}$$

Заметим, что $\lim\limits_{\rho\to 0+0}(M\rho^n)=0$ для $\forall n\in \mathrm{N}$. Тогда, переходя в (17.9) к пределу при $\rho\to 0+0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\rho\to 0+0}|c_{-n}|=|c_{-n}|$, получаем $|c_{-n}|=0$, $\forall n\in \mathrm{N}$, т.е. $c_{-n}=0$, $\forall n\in \mathrm{N}$.

Достаточность. Пусть выполняется (17.4). Покажем, что справедливо утверждение (17.3). В силу (17.4) разложение (17.1) принимает вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \ z\in \dot{O}_\delta(z_0), \tag{17.10}$$

где c_n находятся по формуле (17.2). В силу теоремы 14.12 сумма $S(z)$ степенного ряда в правой части (17.10) непрерывна в его круге сходимости $O_R(z_0)\supseteq O_\delta(z_0)$ (здесь $R=|\hat{z}-z_0|$ – расстояние от точки z_0 до ближайшей к ней изолированной особой точки $\hat{z}$ функции $f(z)$). В частности, $S(z)$ непрерывна в точке z_0, т.е.

$$\lim_{z\to z_0} S(z)=S(z_0). \tag{17.11}$$

В силу (17.10) $S(z)=f(z)$, $\forall z\in \dot{O}_\delta(z_0)$. В силу замечания 14.3 $S(z_0)=c_0$. Тогда соотношение (17.11) принимает вид $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$. ◀

Пусть z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$. Тогда справедливо разложение (17.10). В силу теоремы 14.14 сумма $S(z)$ степенного ряда в правой части (17.10) является аналитической функцией в своём круге сходимости $O_R(z_0)\supseteq O_\delta(z_0)$, в частности, $S(z)$ аналитична в точке z_0. Учитывая, что $S(z_0)=c_0$, доопределим функцию $f(z)$ в точке z_0, т.е. рассмотрим "расширенную" функцию

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z), \ z\in \dot{O}_\delta(z_0), \\ c_0, z=z_0. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{f}(z)=S(z)$ для $\forall z\in O_\delta(z_0)$, следовательно, $\tilde{f}(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$, т.е. доопределив функцию $f(z)$ в точке z_0, мы устранили особую точку z_0.

Пример 17.1. Определим тип изолированной особой точки $z_0=0$ функции

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}.$$

Точка $z_0=0$ является единственной особой точкой функции $f(z)$. Следовательно, $f(z)$ разложима в ряд Лорана в кольце $K_{0,\infty}(0)=\mathrm{X}\setminus\{0\}$. Используя стандартное разложение (15.40), получаем для $\forall z\in \mathrm{X}\setminus\{0\}$

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Итак,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}, \ z\in \mathrm{X}\setminus\{0\}.$$

Мы видим, что главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 равна нулю, следовательно, в силу теоремы 17.1 z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$. Заметим, что $S(0)=1$. Тогда "расширенная" функция

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, \ z\in \mathrm{C}\setminus\{0\}, \\ 1, \ z=0 \end{cases}$$

аналитична на всей комплексной плоскости X.

Теорема 17.2. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом этой функции тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения (17.1) функции $f(z)$ в некоторой проколотой окрестности точки z_0 имеет конечное число ненулевых членов, т.е.

$$\exists m\in \mathrm{N} \mid c_{-m}\neq 0; c_{-n}=0, \forall n>m. \tag{17.12}$$

▶ **Необходимость.** Пусть z_0 – полюс функции $f(z)$, т.е.

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty. \tag{17.13}$$

Тогда, по определению предела (см. (5.13))

$$\forall E > 0 \ \exists\, O_{\delta_*}(z_0), \delta_* = \delta_*(E) \mid \forall z \in \dot{O}_{\delta_*}(z_0) \Rightarrow |f(z)| > E,$$

в частности, для числа $E = 1 \ \exists O_{\delta_*}(z_0) \mid \forall z \in O_{\delta_*}(z_0) \Rightarrow |f(z)| > 1$. Положим $h = \min\{\delta, \delta_*\}$. Тогда

$$|f(z)| > 1, \ \forall z \in \dot{O}_h(z_0). \tag{17.14}$$

В силу (17.14) $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \dot{O}_h(z_0)$. Следовательно, можно рассмотреть функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, $z \in \dot{O}_h(z_0)$. В силу теоремы 9.5 функция $g(z)$ аналитична в $\dot{O}_h(z_0)$ как отношение двух аналитических в $\dot{O}_h(z_0)$ функций. В силу (17.13) и замечания 5.7

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = 0, \tag{17.15}$$

а это означает, что точка z_0 является устранимой особой точкой функции $g(z)$. Следовательно, в силу теоремы 17.1

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ z \in \dot{O}_h(z_0). \tag{17.16}$$

Заметим, что $a_0 = 0$. Действительно, в силу теоремы 14.12 сумма $\tilde{S}(z)$ степенного ряда в правой части (17.16) непрерывна в его круге сходимости $O_{\tilde{R}}(z_0) \supseteq O_h(z_0)$, в частности, $\tilde{S}(z)$ непрерывна в точке z_0, т.е.

$$\lim_{z \to z_0} \tilde{S}(z) = \tilde{S}(z_0). \tag{17.17}$$

В силу (17.16) $\tilde{S}(z) = g(z)$, $\forall z \in \dot{O}_h(z_0)$. В силу замечания 14.3 $\tilde{S}(z_0) = a_0$. Тогда соотношение (17.17) принимает вид

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = a_0. \tag{17.18}$$

Из (17.15), (17.18) следует, в силу теоремы о единственности предела (см. теорему 5.1), что $a_0 = 0$. Тогда разложение (17.16) можно записать в виде

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ z \in \dot{O}_h(z_0), \tag{17.19}$$

где m – некоторое натуральное число, $a_m \neq 0$.

Запишем разложение (17.19) в виде

$$g(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}, \quad z \in \dot{O}_h(z_0). \tag{17.20}$$

В силу теоремы 14.14 сумма $\hat{S}(z)$ степенного ряда

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}$$

аналитична в $O_h(z_0)$. В силу теоремы 14.12 $\hat{S}(z)$ непрерывна в $O_h(z_0)$, в частности, $\hat{S}(z)$ непрерывна в точке z_0, т.е. $\lim\limits_{z \to z_0} \hat{S}(z) = \hat{S}(z_0)$. Заметим, что $\hat{S}(z_0) = a_m$. Имеем

$$\lim_{z \to z_0} \hat{S}(z) = a_m \neq 0. \tag{17.21}$$

Из (17.21) получаем в силу замечания 5.5:

$$\exists O_{\delta_1}(z_0) \mid \forall z \in O_{\delta_1}(z_0) \Rightarrow \hat{S}(z) \neq 0.$$

Положим $p = \min\{h, \delta_1\}$. Тогда $\hat{S}(z)$ аналитична и отлична от нуля в $O_p(z_0)$. Следовательно, функция

$$\psi(z) = \frac{1}{\hat{S}(z)} \tag{17.22}$$

аналитична в $O_p(z_0)$ и $\psi(z_0) = 1/\hat{S}(z_0) = 1/a_m \neq 0$. Так как $f(z) = 1/g(z)$, то в силу (17.20), (17.22)

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},\ z\in\dot{O}_p(z_0). \tag{17.23}$$

В силу теоремы 15.1

$$\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n,\ z\in O_p(z_0), \tag{17.24}$$

при этом $b_0=\psi(z_0)=1/a_m\neq 0$. В силу (17.23), (17.24) для $\forall z\in\dot{O}_p(z_0)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^{n-m}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b_n}{(z-z_0)^{m-n}}+\sum_{n=m}^{\infty}b_n(z-z_0)^{n-m}. \tag{17.25}$$

Преобразуем конечную сумму в правой части (17.25):

$$\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b_n}{(z-z_0)^{m-n}}=\left|k=n+1\right|=\sum_{k=1}^{m}\frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^{m-(k-1)}}=\left|n=m-(k-1)\right|=$$

$$=\sum_{n=m}^{1}\frac{b_{m-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{m}\frac{b_{m-n}}{(z-z_0)^n}=\left|b_{m-n}=c_{-n}\right|=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Получили

$$\sum_{n=0}^{m-1}\frac{b_n}{(z-z_0)^{m-n}}=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \tag{17.26}$$

при этом, $c_{-m}=b_0\neq 0$. Далее,

$$\sum_{n=m}^{\infty}b_n(z-z_0)^{n-m}=\left|k=n-m\right|=\sum_{k=0}^{\infty}b_{m+k}(z-z_0)^k=$$

$$=\left|b_{m+k}=c_k\right|=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Получили

$$\sum_{n=m}^{\infty}b_n(z-z_0)^{n-m}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \tag{17.27}$$

В силу (17.25) – (17.27) для $\forall z\in\dot{O}_p(z_0)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \tag{17.28}$$

при этом $c_{-m}\neq 0$.

Достаточность. Пусть главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в некоторой проколотой δ-окрестности точки z_0 имеет конечное число ненулевых членов, т.е. справедливо разложение (17.28), в котором $c_{-m}\neq 0$. Покажем, что точка z_0 является полюсом функции $f(z)$, т.е. выполняется (17.13). Запишем (17.28) в виде

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\Big[c_{-m}+c_{-(m-1)}(z-z_0)+\ldots$$

$$\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{m+n}\Big]. \tag{17.29}$$

В силу теоремы 14.12 сумма $\psi(z)$ степенного ряда, записанного в квадратных скобках в правой части (17.29), непрерывна в его круге сходимости, в частности, $\psi(z)$ непрерывна в точке z_0, т.е. $\lim\limits_{z\to z_0}\psi(z)=\psi(z_0)$. Заметим, что $\psi(z_0)=c_{-m}\neq 0$. Получили

$$\lim_{z\to z_0}\psi(z)=c_{-m}\neq 0. \tag{17.30}$$

Из (17.30) следует в силу теоремы 5.2 и замечания 5.5, что $\exists O_{\delta_2}(z_0)$, в которой функция $\psi(z)$ ограничена по модулю и отлична от нуля. Функция $(z-z_0)^m$ при $m \geq 1$ является бесконечно малой величиной при $z \to z_0$, следовательно, в силу замечания 5.6 функция $1/(z-z_0)^m$ является бесконечно большой величиной при $z \to z_0$. Тогда в силу теоремы 5.4 функция

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m} \tag{17.31}$$

является бесконечно большой величиной при $z \to z_0$, т.е. выполняется (17.13), а это означает, что z_0 есть полюс функции $f(z)$. ◀

Пусть z_0 – полюс функции $f(z)$. Тогда, в силу теоремы 17.2 в некоторой проколотой δ-окрестности точки z_0 справедливо разложение (17.28) функции $f(z)$ в ряд Лорана, при этом первый ряд в правой части (17.28) является правильной частью лорановского разложения, второй ряд – главной частью лорановского разложения.

Старшим членом главной части лорановского разложения (17.28) называется слагаемое

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}.$$

Определение 17.2. *Порядком* (или *кратностью*) *полюса* z_0 *функции* $f(z)$ называется показатель степени в знаменателе старшего члена главной части лорановского разложения функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки z_0.

Согласно определению 17.2, порядок полюса z_0 функции $f(z)$, имеющей разложение (17.28), равен числу m.

Полюс порядка $m=1$ функции $f(z)$ *называется простым полюсом* этой *функции*.

Теорема 17.3. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом порядка m этой функции тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ представима в некоторой проколотой δ-окрестности точки z_0 в виде

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{17.32}$$

где $\psi(z)$ – некоторая аналитическая в $O_\delta(z_0)$ функция, отличная от нуля в точке z_0.

▶ **Необходимость.** Пусть z_0 – полюс порядка m функции $f(z)$, т.е. в некоторой $\dot{O}_\delta(z_0)$ справедливо разложение (17.28) с $c_{-m} \neq 0$. Тогда (см. доказательство теоремы 17.2) в $\dot{O}_\delta(z_0)$ справедливо представление (17.31), где $\psi(z)$ – сумма степенного ряда, записанного в квадратных скобках в правой части (17.29). В силу теоремы 14.14 $\psi(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$ и $\psi(z_0) = c_{-m} \neq 0$.

Достаточность. Пусть справедливо представление (17.32). В силу теоремы 15.1 в $O_\delta(z_0)$ справедливо разложение

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n, \tag{17.33}$$

при этом $d_0 = \psi(z_0) \neq 0$. В силу (17.32), (17.33) для $\forall z \in \dot{O}_\delta(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^{n-m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{(z-z_0)^{m-n}} + \sum_{n=m}^{\infty} d_n (z-z_0)^{n-m}. \tag{17.34}$$

Аналогично тому, как получено (17.26), имеем

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{(z-z_0)^{m-n}} = \sum_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \tag{17.35}$$

где $c_{-n} = d_{m-n}$, $\forall 1 \leq n \leq m$, в частности, $c_{-m} = d_0 \neq 0$.
Аналогично тому, как получено (17.27), имеем

$$\sum_{n=m}^{\infty} d_n (z-z_0)^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{17.36}$$

где $c_n = b_{m+n}$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. В силу (17.34) – (17.36) для $\forall z \in \dot{O}_\delta(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где $c_{-m} \neq 0$, а это означает, по определению, что точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$.

Пусть m – некоторое натуральное число.

Определение 17.3. Нуль z_0 аналитической в окрестности $O_\delta(z_0)$ функции $f(z)$ называется *нулём кратности m* (или *порядка m*), если в этой окрестности функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \tag{17.37}$$

где $\varphi(z)$ – некоторая аналитическая в $O_\delta(z_0)$ функция, отличная от нуля в точке z_0.

Нуль кратности $m = 1$ функции $f(z)$ *называется простым нулём* этой *функции*.

Теорема 17.4. Точка z_0 является нулём кратности m аналитической в $O_\delta(z_0)$ функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \text{ но } f^{(m)}(z_0) \neq 0. \tag{17.38}$$

Необходимость. Пусть z_0 – нуль кратности m функции $f(z)$, т.е. выполняется (17.37). Тогда $f(z_0) = (z_0 - z_0)^m \varphi(z_0) = 0$;

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} \varphi(z) + (z - z_0)^m \varphi'(z) = (z - z_0)^{m-1} \varphi_1(z),$$

где $\varphi_1(z) = m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)$, $\varphi_1(z_0) = m\varphi(z_0) \neq 0$;

$$f''(z) = (m-1)(z - z_0)^{m-2} \varphi_1(z) + (z - z_0)^{m-1} \varphi_1'(z) = (z - z_0)^{m-2} \varphi_2(z),$$

где $\varphi_2(z) = (m-1)\varphi_1(z) + (z - z_0)\varphi_1'(z)$, $\varphi_2(z_0) = (m-1)\varphi_1(z_0) \neq 0$;

…………………………………………………………………………...

$$f^{(m-1)}(z) = (z - z_0)\varphi_{m-1}(z), \text{ где } \varphi_{m-1}(z) \mid \varphi_{m-1}(z_0) \neq 0;$$

$$f^{(m)}(z) = \varphi_{m-1}(z) + (z - z_0)\varphi_{m-1}'(z).$$

Получаем

$$f(z_0) = 0, \ f'(z_0) = 0, \ f''(z_0) = 0, \ \ldots, \ f^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

$$\text{но} \quad f^{(m)}(z_0) = \varphi_{m-1}(z_0) \neq 0.$$

Достаточность. Пусть выполняется (17.38). В силу теоремы 15.1 справедливо разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \ z \in O_\delta(z_0). \tag{17.39}$$

В силу (17.38) разложение (17.39) принимает вид

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m}. \tag{17.40}$$

В силу теоремы 14.14 сумма $\varphi(z)$ степенного ряда в правой части (17.40) аналитична в $O_\delta(z_0)$ и $\varphi(z_0) = c_0 = \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. В силу (17.40) $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $z \in O_\delta(z_0)$, где $\varphi(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$ и $\varphi(z_0) \neq 0$, а это означает, по определению, что точка z_0 является нулём кратности m функции $f(z)$.

Теорема 17.5. Если точка z_0 является нулём кратности m аналитической в $O_\delta(z_0)$ функции $g(z)$, то эта точка является полюсом порядка m функции $f(z) = 1/g(z)$.

В силу определения 17.3 $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, следовательно, функция $f(z) = 1/g(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m},$$

где $\psi(z) = 1/\varphi(z)$. По условию $\varphi(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$. Следовательно, в силу замечания 9.3 $\varphi(z)$ непрерывна в $O_\delta(z_0)$, в частности, $\varphi(z)$ непрерывна в точке z_0, т.е. $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0) \neq 0$. Тогда, в силу замечания 5.5

$$\exists O_{\delta_1}(z_0) \mid \forall z \in O_{\delta_1}(z_0) \Rightarrow \varphi(z) \neq 0.$$

Следовательно, функция $\psi(z)=1/\varphi(z)$ определена и аналитична в $O_{\delta_1}(z_0)$ как отношение двух аналитических в $O_{\delta_1}(z_0)$ функций (см. теорему 9.5) . Кроме того, $\psi(z_0)=\dfrac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0$. Итак,

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},\ z\in \dot{O}_{\delta_1}(z_0),$$

где $\psi(z)$ аналитична в $O_{\delta_1}(z_0)$ и $\psi(z_0)\neq 0$. Следовательно, в силу теоремы 17.3 точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$. ◄

В силу теоремы 17.5, чтобы найти полюсы функции $f(z)=1/g(z)$ и определить их порядок, достаточно найти нули функции $g(z)$ и определить их кратность.

Теорема 17.6. Если точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$, то эта точка является нулём кратности m функции $g(z)=1/f(z)$.

Доказательство теоремы 17.6 аналогично доказательству теоремы 17.5 (нужно провести такие же рассуждения, но только в обратном порядке).

Теорема 17.7. Пусть функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)},$$

где $p(z)$, $q(z)$ – аналитические в $O_\delta(z_0)$ функции и точка z_0 является нулём кратности m функции $p(z)$ и нулём кратности k функции $q(z)$. Тогда при $m\geq k$ точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$, при $m<k$ точка z_0 является полюсом порядка $k-m$ функции $f(z)$.

► По условию теоремы

$$p(z)=(z-z_0)^m\varphi_1(z), \tag{17.41}$$

где $\varphi_1(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$ и $\varphi_1(z_0)\neq 0$;

$$q(z)=(z-z_0)^k\varphi_2(z), \tag{17.42}$$

где $\varphi_2(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$ и $\varphi_2(z_0)\neq 0$.

Пусть $m\geq k$, т.е. $m-k\geq 0$. Тогда, в силу (17.41), (17.42)

$$f(z)=(z-z_0)^{m-k}\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}. \tag{17.43}$$

Функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ аналитичны в $O_\delta(z_0)$ следовательно, в силу замечания 9.3, эти функции непрерывны в $O_\delta(z_0)$, в частности, они непрерывны в точке z_0 , т.е. $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi_1(z)=\varphi_1(z_0)$, $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi_2(z)=\varphi_2(z_0)$. Тогда, в силу теоремы 5.6

$$\exists\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}=\frac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2(z_0)}.$$

Следовательно, в силу (17.43)

$$\exists\lim_{z\to z_0}f(z)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2(z_0)}, m=k,\\ 0,\quad m>k,\end{cases}$$

а это означает, по определению, что точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

Пусть $m<k$, тогда в силу (17.41), (17.42)

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{k-m}}, \tag{17.44}$$

где $\psi(z)=\varphi_1(z)/\varphi_2(z)$. Так как $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi_2(z)=\varphi_2(z_0)\neq 0$, то в силу замечания 5.5

$$\exists O_{\delta_1}(z_0)\mid \forall z\in O_{\delta_1}(z_0)\Rightarrow \varphi_2(z)\neq 0.$$

Следовательно, функция $\psi(z)=\varphi_1(z)/\varphi_2(z)$ определена и аналитична в $O_{\delta_1}(z_0)$ как отношение двух аналитических в $O_{\delta_1}(z_0)$ функций (см. теорему 9.5). Кроме того, $\psi(z_0)=\varphi_1(z_0)/\varphi_2(z_0)\neq 0$. Итак, функция $f(z)$ представима в виде (17.44), где $\psi(z)$ аналитична в $O_{\delta_1}(z_0)$ и $\psi(z_0)\neq 0$. Следовательно, в силу теоремы 17.3 точка z_0 является полюсом порядка $k-m$ функции $f(z)$. ◄

Пример 17.2. Определим тип изолированной особой точки $z_0=0$ функции

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^5}. \qquad (17.45)$$

Точка $z_0=0$ является единственной особой точкой функции $f(z)$. Следовательно, $f(z)$ разложима в ряд Лорана в кольце $K_{0,\infty}(0)=\mathrm{X}\setminus\{0\}$. Используя стандартное разложение (15.41), получаем для $\forall z\in \mathrm{X}\setminus\{0\}$

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{z^5}-\frac{\frac{1}{2!}}{z^3}+\frac{\frac{1}{4!}}{z}\right]+\left[-\frac{1}{6!}z+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n-5}+\ldots\right]. \qquad (17.46)$$

Главная часть лорановского разложения (17.46) содержит три ненулевых члена, при этом в его старшем члене $1/z^5$ показатель степени в знаменателе равен пяти. Следовательно, в силу теоремы 17.2 точка $z_0=0$ является полюсом порядка $m=5$ функции (17.45).

Пример 17.3. Найдём особые точки функции

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2+1} \qquad (17.47)$$

и определим их тип.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=i$, $z_2=-i$ (это те значения z, при которых знаменатель в (17.47) равен нулю) (рис. 17.1).

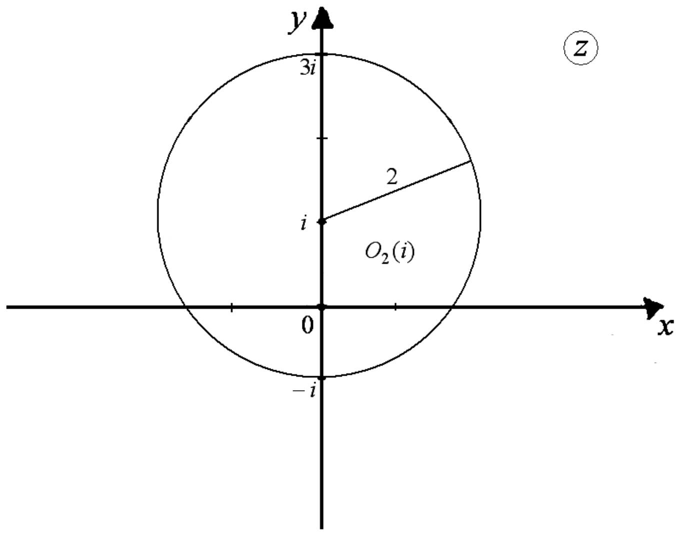

Рис. 17.1

Запишем функцию $f(z)$ в $\dot{O}_2(i)$ в виде

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{z-i},$$

где $\psi(z)=e^z/(z+i)$. Функция e^z аналитична на всей комплексной плоскости X (см. пример 9.1); функция $w(z)=z+i$ аналитична на C и $w(z)\neq 0$, $\forall z\in \mathrm{C}\setminus\{-i\}$. Следовательно, функция $\psi(z)$ аналитична в $O_2(i)$ как отношение двух аналитических в $O_2(i)$ функций. Кроме того, $\psi(i)=\dfrac{e^i}{2i}\neq 0$, ибо $e^z\neq 0$, $\forall z\in \mathrm{X}$ (см. (6.25)). Следовательно, в силу теоремы 17.3 точка $z_1=i$ является простым полюсом функции (17.47). Аналогично показывается, что точка $z_2=-i$ тоже является простым полюсом этой функции.

Пример 17.4. Определим тип особой точки $z_0=0$ функции

$$f(z)=\frac{\sin 2z}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}\,. \tag{17.48}$$

Используя стандартное разложение (15.40), получаем для $\forall z\in \mathrm{X}$

$$p(z)=\sin 2z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}z^{2n}}{(2n+1)!}=z\varphi_1(z),$$

где $\varphi_1(z)$ – сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}z^{2n}}{(2n+1)!}\,.$$

В силу теоремы 14.14 $\varphi_1(z)$ аналитична на X. Кроме того, $\varphi_1(0)=c_0=2\neq 0$. Получили $p(z)=z\varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z)$ аналитична на X и $\varphi_1(0)\neq 0$. Следовательно, точка $z_0=0$ является нулём кратности $m=1$ (т.е. простым нулём) функции $p(z)$. Далее, используя стандартное разложение (15.41), получаем для $\forall z\in \mathrm{X}$

$$q(z)=\cos z-1+\frac{z^2}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}-1+\frac{z^2}{2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=z^4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n)!}=z^4\varphi_2(z),$$

где $\varphi_2(z)$ – сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n)!}\,.$$

В силу теоремы 14.14 $\varphi_2(z)$ аналитична на X. Кроме того, $\varphi_2(0)=\frac{1}{4!}\neq 0$. Получили $q(z)=z^4\varphi_2(z)$, где $\varphi_2(z)$ аналитична на X и $\varphi_2(0)\neq 0$. Следовательно, точка $z_0=0$ является нулём кратности $k=4$ функции $q(z)$. Тогда в силу теоремы 17.7 точка $z_0=0$ является полюсом порядка 3 функции $f(z)=p(z)/q(z)$.

Теорема 17.8. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой точкой этой функции тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения (17.1) функции $f(z)$ в некоторой проколотой δ-окрестности точки z_0 содержит бесконечное число ненулевых членов.

Необходимость. Пусть z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда главная часть лорановского разложения (17.1) содержит бесконечное число ненулевых членов, ибо в противном случае точка z_0 была бы в силу теорем 17.1, 17.2 либо устранимой особой точкой, либо полюсом функции $f(z)$.

Достаточность. Пусть главная часть лорановского разложения (17.1) содержит бесконечное число ненулевых членов. Тогда z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, ибо в противном случае в силу теорем 17.1, 17.2 главная часть лорановского разложения (17.1) либо равнялась бы нулю, либо содержала бы конечное число ненулевых членов.

Пример 17.5. Определим тип особой точки $z_0=0$ функции

$$f(z)=z^3e^{\frac{7}{z^2}}\,. \tag{17.49}$$

Точка $z_0=0$ является единственной особой точкой функции $f(z)$. Следовательно, $f(z)$ разложима в ряд Лорана в кольце $K_{0,\infty}(0)=\mathrm{X}\setminus\{0\}$. Используя стандартное разложение (15.39), получаем для $\forall z\in \mathrm{X}\setminus\{0\}$

$$f(z)=z^3e^{\frac{7}{z^2}}=z^3\left(1+\frac{7}{z^2}+\frac{\left(\frac{7}{z^2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{7}{z^2}\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(\frac{7}{z^2}\right)^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=\left[7z+z^3\right]+\left[\frac{\frac{7^2}{2!}}{z}+\frac{\frac{7^3}{3!}}{z^3}+\ldots+\frac{\frac{7^n}{n!}}{z^{2n-3}}+\ldots\right]. \tag{17.50}$$

Главная часть лорановского разложения (17.50) содержит бесконечное число ненулевых членов, следовательно, в силу теоремы 17.8 точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой функции (17.49).

Поведение функции в окрестности её существенно особой точки уточняет следующее утверждение, называемое *теоремой Сохоцкого*.

Теорема 17.9. Пусть z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для $\forall A \in \overline{\mathrm{C}}\ \ \exists \{z_n\} \subset \mathrm{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \mid \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

▶ 1) Пусть $A = \infty$. Функция $f(z)$ не ограничена в любой $\dot{O}_\delta(z_0)$. Действительно, $\sqcap\!\sqcap$: $\exists \dot{O}_{\delta_1}(z_0)$: $|f(z)| \le M$, $\forall z \in \dot{O}_{\delta_1}(z_0)$. Тогда (см. доказательство необходимости в теореме 17.1) все коэффициенты c_{-n}, $n \in \mathrm{N}$, главной части лорановского разложения функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки z_0 равны нулю. Следовательно, в силу теорему 17.1 (см. достаточность) z_0 является устранимой особой точкой $f(z)$. Противоречие. $\overline{\sqcap\!\sqcap}$. Итак, функция $f(z)$ не ограничена в $\dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0)$ при любом $n \in \mathrm{N}$. Следовательно,

$$\forall \dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0)\ \ \exists z_n \in \dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0) : |f(z_n)| > n.$$

Имеем $z_n \in \dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0) \Leftrightarrow 0 < |z_n - z_0| < \dfrac{1}{n}$.

Переходя в последних неравенствах к пределу при $n \to \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(z_n - z_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Переходя в неравенстве $|f(z_n)| > n$ к пределу при $n \to \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = +\infty \Rightarrow\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$. Итак, построена последовательность $\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \mid \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

2) Пусть $A \ne \infty$. Возможны два случая

2.1) $\forall \dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0)\ \ \exists z_n \in \dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0) \mid f(z_n) = A$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A = A$, что и требовалось доказать.

2.2) $\exists \dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0) \mid \forall z \in \dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0) \Rightarrow f(z) \ne A$. Тогда функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

определена и аналитична в $\dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0)$ как отношение двух аналитических в $\dot{O}_{\frac{1}{n}}(z_0)$ функций (см. теорему 9.5). Так как функция $f(z)$ не имеет предела при $z \to z_0$, то функция $g(z)$ тоже не имеет предела при $z \to z_0$, т.е. z_0 является существенно особой точкой функции $g(z)$. Тогда по уже доказанному в пункте 1) $\exists \{z_n\} \subset \mathrm{X}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \mid \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} [1/g(z_n)] = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} [f(z_n) - A] = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$. ◀

Если рассматривать расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \cup \{\infty\}$, то естественно ввести следующие определения.

Определение 17.4. Несобственное комплексное число $z = \infty$ называется изолированной особой точкой функции $w = f(z)$, если $\exists O_{i_E}(\infty) = \{z \in \mathrm{X} : |z| > E\}$, в которой нет особых точек функции $f(z)$, т.е. в которой эта функция аналитична.

Определение 17.5. Изолированная особая точка $z = \infty$ функции $f(z)$ называется:

1) устранимой особой точкой, если существует конечный $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$;

2) полюсом, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$;

3) существенно особой точкой, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при $z \to \infty$.

Замечание 17.2. Если $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то можно доопределить эту функцию при $z = \infty$, положив $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$. Тогда "расширенную" функцию

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z),\ z \in \mathrm{C}, \\ A,\ z = \infty \end{cases}$$

можно считать аналитической на $\overline{\mathrm{X}}$.

Пусть $z = \infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, т.е. функция $f(z)$ аналитична в некотором кольце $K_{E,\infty}(0) = \{z \in \mathrm{X} : |z| > E\}$. Положим $w = \dfrac{1}{z}$. Заметим, что при таком отображении образом кольца $K_{E,\infty}(0)$ является кольцо

$K_{0,\delta}(0)=\{w\in \mathrm{X}:0<|w|<\delta\}=\dot{O}_\delta(0)$, где $\delta=1/E$. Положим $h(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$, $w\in\dot{O}_\delta(0)$. Функция $h(w)$ аналитична в кольце $K_{0,\delta}(0)$, следовательно, в силу теоремы 16.2, $h(w)$ разложима в этом кольце в ряд Лорана

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{c}_n w^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{c}_{-n}}{w^n},\ w\in K_{0,\delta}(0), \tag{17.51}$$

где

$$\hat{c}_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta,$$

γ – любая окружность в центром в нуле радиуса $r<\delta$. Возвращаясь к переменной z и введя обозначения $\hat{c}_n=c_{-n}$, $\hat{c}_{-n}=c_n$, получаем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n,\ z\in K_{E,\infty}(0). \tag{17.52}$$

Двусторонний степенной ряд в правой части представления (17.52) называется рядом Лорана функции $f(z)$ в i_E-окрестности изолированной особой точки $z=\infty$, а само представление (17.52) называется разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана (или лорановским разложением функции $f(z)$) в i_E-окрестности изолированной особой точки $z=\infty$.

Заметим, что поведение функции $f(z)$ при $z\to\infty$ определяется поведением ряда по положительным степеням z. По этой причине главной частью лорановского разложения функции $f(z)$ в i_E-окрестности изолированной особой точки $z=\infty$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n, \tag{17.53}$$

правильной частью этого разложения называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}. \tag{17.54}$$

Напомним, что если z_0 – конечная изолированная особая точка $f(z)$, то главной частью её лорановского разложения в кольце $K_{0,\delta}(z_0)=\dot{O}_\delta(z_0)$ мы называли ряд по отрицательным степеням $z-z_0$, а правильной частью – ряд по неотрицательным степеням $z-z_0$.

Замечание 17.3. Представление вида (17.52) единственно.

Действительно, в силу теоремы 16.4 представление вида (17.51) единственно, откуда следует единственность представления (17.52).

Замечание 17.4. Правильная и главная часть разложения (17.51) переходят соответственно в правильную и главную часть разложения (17.52).

Замечание 17.5. Если $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ равна нулю: $c_n=0$, $\forall n\in\mathrm{N}$, т.е. справедливо разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n},\ z\in K_{E,\infty}(0). \tag{17.55}$$

Действительно, пусть $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$. Тогда точка $w_0=0$ является устранимой особой точкой функции $h(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$, ибо $\lim\limits_{w\to 0}h(w)=\lim\limits_{w\to 0}f\left(\frac{1}{w}\right)=A\neq\infty$. Следовательно, в силу теоремы 17.1 главная часть лорановского разложения (17.51) равна нулю. Значит, в силу замечания 17.4 главная часть лорановского разложения (17.52) тоже равна нулю.

Замечание 17.6. Если $z=\infty$ является полюсом функции $f(z)$, то главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ содержит конечное число ненулевых членов: $\exists m\in\mathrm{N}\mid c_m\neq 0; c_n=0$, $\forall n>m$, т.е.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{m}c_n z^n,\ z\in K_{E,\infty}(0). \tag{17.56}$$

Действительно, пусть $z=\infty$ является полюсом функции $f(z)$. Тогда точка $w_0=0$ является полюсом функции $h(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$, ибо $\lim\limits_{w\to 0}h(w)=\lim\limits_{w\to 0}f\left(\frac{1}{w}\right)=\infty$. Следовательно, в силу теоремы 17.2 главная часть лорановского разложения

(17.51) содержит конечное число ненулевых членов. $\exists m \in \mathrm{N} \mid c_{-m} \neq 0; \hat{c}_{-n} = 0$, $\forall n > m$. Значит, в силу замечания 17.4 главная часть лорановского разложения (17.52) тоже имеет конечное число ненулевых членов: $c_m \neq 0$; $c_n = 0$, $\forall n > m$, т.е. справедливо разложение (17.56).

Замечание 17.7. Если $z = \infty$ является существенно особой точкой функции $f(z)$, то главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ содержит бесконечное число ненулевых членов.

Действительно, пусть $z = \infty$ является существенно особой точкой функции $f(z)$. Тогда точка $w_0 = 0$ является существенно особой точкой функции $h(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$, ибо если не существует предел функции $f(z)$ при $w \to 0$, то не существует предел функции $h(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ при $w \to 0$. В силу теоремы 17.8 главная часть лорановского разложения (17.51) имеет бесконечное число ненулевых членов. Значит, в силу замечания 17.4 главная часть лорановского разложения (17.52) имеет бесконечное число ненулевых членов, т.е. справедливо разложение (17.52), в котором среди коэффициентов c_n, $n \in \mathrm{N}$, найдётся бесконечное число ненулевых коэффициентов.

Пусть $f(z)$ целая функция. Тогда в силу замечания 15.6 $f(z)$ представима на X в виде суммы своего ряда Тейлора по степеням z:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \; z \in \mathrm{X}. \tag{17.57}$$

В частности, представление (17.57) справедливо в произвольно взятой i_E-окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \; z \in O_{i_E}(\infty). \tag{17.58}$$

В силу замечания 17.3 соотношение (17.58) является лорановским разложением функции $f(z)$ в i_E-окрестности точки $z = \infty$. Правильной частью этого разложения является число c_0, главной частью – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$.

Замечание 17.8. Если $z = \infty$ является устранимой особой точкой целой функции $f(z)$, то эта функция является константой.

Действительно, в силу замечания 17.5 главная часть лорановского разложения (17.58) равна нулю, следовательно $f(z) \equiv c_0$.

Замечание 17.9. Если $z = \infty$ является полюсом целой функции $f(z)$, то эта функция является многочленом ненулевой степени.

Действительно, в силу замечания 17.6 главная часть лорановского разложения (17.58) содержит конечное число ненулевых членов, следовательно,

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{m} c_n z^n = P_m(z).$$

Замечание 17.10. Если $z = \infty$ является существенно особой точкой целой функции $f(z)$, то эта функция не является многочленом.

Действительно, в силу замечания 17.7 главная часть лорановского разложения (17.58) содержит бесконечное число ненулевых членов, т.е. выражение в правой части (17.58) не является многочленом.

Определение 17.6. *Целой трансцендентной функцией* называется целая функция, для которой несобственное число $z = \infty$ является существенно особой точкой.

К целым трансцендентным функциям относятся, например, функции e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Определение 17.7. Функция $w = f(z)$ называется *мероморфной*, если она аналитична на всей комплексной плоскости X, за исключением, быть может, конечного или счётного числа изолированных особых точек, являющихся её полюсами.

Пример 17.6. Любая целая функция (например, e^z, $\sin z$, $\cos z$) является мероморфной функцией, ибо у неё вообще нет особых точек.

Пример 17.7. Дробно-рациональная функция $f(z) = P_n(z)/Q_l(z)$, где $P_n(z), Q_l(z)$ – многочлены степени m и l соответственно, является мероморфной функцией, ибо она имеет конечное число особых точек, являющихся её полюсами.

Действительно, особыми точками функции $f(z)$ являются нули многочлена $Q_l(z)$. Если z_0 – нуль кратности k многочлена $Q_l(z)$ и не является нулём многочлена $P_n(z)$, то в силу теоремы 17.7, z_0 – полюс порядка k функции $f(z)$. Если z_0 – нуль кратности k многочлена $Q_l(z)$ и нуль кратности m многочлена $P_n(z)$ и $k > m$, то, в силу теоремы 17.7, z_0 – полюс порядка $k - m$ функции $f(z)$. Если же в предыдущей ситуации окажется $m \geq k$, то z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$. В этом случае такую точку "устраняют", полагая

$$f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{P_n(z)}{Q_l(z)},$$

и считают, что $f(z)$ аналитична в точке z_0.

Пример 17.8. Функция $\operatorname{tg} z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$ является мероморфной функцией, ибо она имеет счётное число полюсов $z_k=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in \mathrm{Z}$.

Замечание 17.11. В любом круге $O_R(0)$ мероморфная функция $f(z)$ может иметь лишь конечное число полюсов.

Действительно, $\boxed{\Pi}$: $\exists O_R(0) \mid \exists$ последовательность полюсов $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset O_R(0)$. Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, ибо $|z_n|\le R$, $\forall n\in \mathrm{N}$. Тогда, в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса для вещественных функций двух вещественных переменных [2.8, с.485] из последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left\{z_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}=z_*$. Точка z_* является неизолированной особой точкой функции $f(z)$, ибо в любой её сколь угодно малой δ-окрестности есть другие особые точки функции $f(z)$. А это противоречит определению мероморфной функции. $\overline{\boxed{\Pi}}$.

Теорема 17.10. Если для мероморфной функции $f(z)$ точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой или полюсом, то $f(z)$ является дробно-рациональной функцией.

▶ По условию теоремы точка $z=\infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, т.е. $\exists O_{i_E}(\infty)$, в которой функция $f(z)$ аналитична. Тогда в силу замечания 17.11 функция $f(z)$ имеет конечное число полюсов. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{l}$ – множество всех конечных полюсов функции $f(z)$. Рассмотрим систему окрестностей

$$\left\{ O_{\delta_k}(z_k)\right\}_{k=1}^{l} \mid O_{\delta_i}(z_i)\cap O_{\delta_j}\left(z_j\right)\ne 0,\ \forall 1\le i, j\le l, i\ne j.$$

В силу теорем 16.2, 17.2 получаем для $\forall 1\le k\le l$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}(z-z_k)^n+\sum_{n=1}^{m_k}\frac{c_{-n}^{(k)}}{(z-z_k)^n},\ z\in \dot{O}_{\delta_k}(z_k), \tag{17.59}$$

или, в более краткой записи,

$$f(z)=p_k(z)+q_k(z),\ z\in \dot{O}_{\delta_k}(z_k), \tag{17.60}$$

где $p_k(z)$, $q_k(z)$ – соответственно суммы правильной и главной части лорановского разложения (17.59) функции $f(z)$ в $\dot{O}_{\delta_k}(z_k)$. Рассмотрим функцию вида

$$\varphi(z)=f(z)-Q(z), \tag{17.61}$$

где

$$Q(z)=\sum_{i=1}^{l}q_i(z).$$

В силу (17.60), (17.61) при фиксированном k $(1\le k\le l)$

$$\varphi(z)=p_k(z)-\sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{l}q_i(z),\ z\in O_{\delta_k}(z_k). \tag{17.62}$$

Функция $p_k(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}(z-z_k)^n$ аналитична в $O_{\delta_k}(z_k)$ как сумма степенного ряда (см. теорему 14.14). Функция

$$\psi(z)=\sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{l}q_i(z)$$

аналитична в $O_{\delta_k}(z_k)$, ибо её особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_l$ не принадлежат окружности $O_{\delta_k}(z_k)$. Следовательно, функция (17.62) аналитична в $O_{\delta_k}(z_k)$ как разность двух аналитических в этой окрестности функций (см. теорему 9.5). Итак, функция (17.61) аналитична в каждой точке z_k $(1\le k\le l)$. В каждой точке $z_*\in \mathrm{X}$, отличной от полюсов $z_1, z_2, \ldots, z_l$, функция $\varphi(z)$ тоже аналитична как разность аналитических в этой точке функций. Таким образом, $\varphi(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, т.е. является целой функцией.

Заметим, что для $\forall\ 1 \le k \le l$

$$\lim_{z\to\infty} q_k(z) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{-n}^{(k)}}{(z - z_k)^n} = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{z\to\infty} Q(z) = \lim_{z\to\infty} \sum_{k=1}^{l} q_k(z) = 0. \tag{17.63}$$

Пусть $z = \infty$ – устранимая особая точка функции $f(z)$, т.е. $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A \ne \infty$. Тогда, учитывая (17.63), получаем

$$\exists \lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \lim_{z\to\infty} [f(z) - Q(z)] = A,$$

т.е. точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой целой функции $\varphi(z)$. Следовательно, в силу замечания 17.8 функция $\varphi(z)$ является константой: $\varphi(z) \equiv a_0$. Тогда в силу (17.61)

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{l} q_k(z). \tag{17.64}$$

Пусть $z = \infty$ – полюс функции $f(z)$, т.е. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Тогда

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \lim_{z\to\infty} [f(z) - Q(z)] = \infty,$$

т.е. $z = \infty$ является полюсом целой функции $\varphi(z)$. Следовательно, в силу замечания 17.9 функция $\varphi(z)$ является многочленом ненулевой степени:

$$\varphi(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n z^n. \tag{17.65}$$

В силу (17.61), (17.65)

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n z^n + \sum_{k=1}^{l} q_k(z). \tag{17.66}$$

Объединяя формулы (17.64), (17.66), получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n + \sum_{k=1}^{l} \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{-n}^{(k)}}{(z - z_k)^n}. \tag{17.67}$$

Приведя слагаемые в правой части формулы (17.67) к общему знаменателю, получим дробно-рациональную функцию. ◄

Формула (17.67) означает, что мероморфную функцию $f(z)$, для которой $z = \infty$ является устранимой особой точкой или полюсом, можно представить в виде суммы целой части и правильных простейших дробей.

18. ВЫЧЕТЫ

Вычет функции относительно точки, его выражение через коэффициенты лорановского разложения; вычет функции относительно устранимой особой точки; вычет функции относительно простого полюса; вычет функции относительно кратного полюса; основная теорема о вычетах; вычет логарифмической производной функции относительно кратного полюса и относительно кратного нуля этой функции; логарифмический вычет функции относительно контура; теорема о логарифмическом вычете; принцип аргумента.

Рассмотрим функцию $w = f(z)$, $z \in D$. Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$. Это означает, по определению, что $\exists O_\delta(z_0)$, в которой нет других особых точек функции $f(z)$, кроме самой точки z_0, т.е. функция $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности $\dot{O}_\delta(z_0)$ (рис. 18.1).

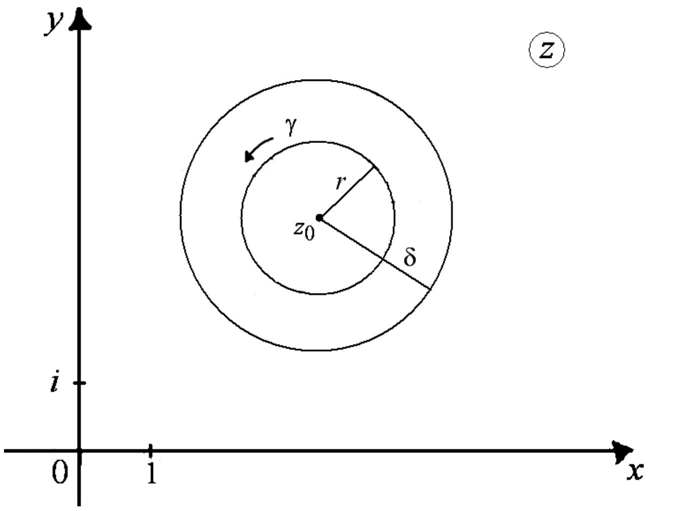

Рис. 18.1

Определение 18.1. *Вычетом функции* $f(z)$ *относительно точки* z_0 называется интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz\,, \tag{18.1}$$

где γ – произвольный замкнутый простой гладкий или кусочно-гладкий контур, расположенный в $O_\delta(z_0)$ и охватывающий точку z_0 (в частности, в качестве γ можно взять любую окружность с центром в точке z_0 радиуса $r<\delta$).

Обозначение:

$$\operatorname{res}\left[f(z);z_0\right],\ \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z),\ \operatorname{res} f(z_0)$$

(от французского слова residu – остаток).

По определению,

$$\operatorname{res}\left[f(z);z_0\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz\,. \tag{18.2}$$

Замечание 18.1. Вычет функции относительно данной точки определяется однозначно, так как значение интеграла (18.1) не зависит от выбора контура γ (важно лишь, чтобы контур γ удовлетворял условиям из определения 18.1) (см. замечание 12.1).

Теорема 18.1. Вычет функции $f(z)$ относительно её изолированной особой точки z_0 равен коэффициенту c_{-1} лорановского разложения этой функции в проколотой δ-окрестности точки z_0:

$$\operatorname{res}\left[f(z);z_0\right]=c_{-1}\,. \tag{18.3}$$

▶ В силу теоремы 16.2 функция $f(z)$ разложима в ряд Лорана в $\dot{O}_\delta(z_0)$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n}\,,\ z\in\dot{O}_\delta(z_0), \tag{18.4}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}\,dz\,, \tag{18.5}$$

в качестве γ берётся любой контур, удовлетворяющий условиям из определения 18.1. В силу (18.5)

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz\,. \tag{18.6}$$

Из (18.2), (18.6) следует формула (18.3). ◀

Следствие 18.1. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}\left[f(z);z_0\right]=0\,. \tag{18.7}$$

Действительно, в этом случае, в силу теоремы 17.1, главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в $\dot{O}_\delta(z_0)$ равна нулю: $c_{-n}=0$, $\forall n\in \mathrm{N}$. В частности, $c_{-1}=0$ и из (18.3) следует (18.7).

Пример 18.1. Точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ (см. пример 17.1). Следовательно, в силу (18.7) $\operatorname{res}\left[f(z);0\right]=0$.

Пример 18.2. Точка $z_0=0$ является полюсом порядка $m=5$ функции $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^5}$ (см. пример 17.2). Из лорановского разложения (17.46) функции $f(z)$ в кольце $K_{0,\infty}(0)=\mathrm{X}\setminus\{0\}$ видно, что $c_{-1}=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$. Следовательно, в силу (18.3) $\operatorname{res}\left[f(z);0\right]=\dfrac{1}{24}$.

Укажем формулу для вычисления вычета функции относительно её полюса.

Теорема 18.2. Вычет функции $f(z)$ относительно её простого полюса z_0 вычисляется по формуле

$$\operatorname{res}\left[f(z);z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]. \tag{18.8}$$

► По условию теоремы z_0 – полюс порядка $m=1$ функции $f(z)$. Следовательно, в силу теоремы 17.2 лорановское разложение функции $f(z)$ в $\dot{O}_\delta(z_0)$ имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}, \tag{18.9}$$

где $c_{-1}\neq 0$. Пусть $\varphi(z)$ – сумма правильной части лорановского разложения (18.9):

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n .$$

Функция $\varphi(z)$ непрерывна в $O_\delta(z_0)$ как сумма степенного ряда (см. теорему 14.12), в частности, она непрерывна в точке z_0, т.е.

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0)=c_0 . \tag{18.10}$$

Соотношение (18.9) принимает вид

$$f(z)=\varphi(z)+\frac{c_{-1}}{z-z_0},$$

откуда получаем

$$c_{-1}=f(z)(z-z_0)-\varphi(z)(z-z_0). \tag{18.11}$$

Переходя в неравенстве (18.11) к пределу при $z\to z_0$ и учитывая (18.10), имеем

$$c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)-\varphi(z)(z-z_0)\right]=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]-\lim_{z\to z_0}\left[\varphi(z)(z-z_0)\right]=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]-c_0\cdot 0=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right].$$

Собирая начало и конец записи, получаем

$$c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]. \tag{18.12}$$

Из (18.3), (18.12) следует формула (18.8). ◄

Следствие 18.2. Если z_0 – простой полюс функции $f(z)$ и функция $f(z)$ представлена а виде

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

где $f_1(z)$, $f_2(z)$ – функции, аналитические в точке z_0, при этом $f_1(z_0)\neq 0$ и точка z_0 является простым нулём функции $f_2(z)$, т.е. в силу теоремы 17.4 $f_2(z_0)=0$, но $f_2'(z_0)\neq 0$, то

$$\operatorname{res}\left[f(z); z_0\right] = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}. \tag{18.13}$$

Действительно, по формуле (18.8)

$$\operatorname{res}\left[f(z); z_0\right] = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right] = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}(z-z_0)\right] =$$

$$= \lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)}{\dfrac{f_2(z)}{z-z_0}} = \lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)}{\dfrac{f_2(z)-f_2(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f_2(z)-f_2(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}.$$

Собирая начало и конец записи, получаем формулу (18.13).

Пример 18.3. Точки $z_1 = i$, $z_2 = -i$ являются простыми полюсами функции $f(z) = e^z/\left(z^2+1\right)$ (см. пример 17.3). Следовательно, по формуле (18.8)

$$\operatorname{res}\left[f(z); z_1\right] = \lim_{z\to z_1}\left[f(z)(z-z_1)\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}(z-i)\right] =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{e^z}{z+i} = \frac{e^i}{i+i} = \frac{1}{2i}(\cos 1 + i\sin 1) = -\frac{i}{2}(\cos 1 + i\sin 1) = \frac{\sin 1}{2} - i\frac{\cos 1}{2};$$

$$\operatorname{res}\left[f(z); z_2\right] = \lim_{z\to z_2}\left[f(z)(z-z_2)\right] = \lim_{z\to -i}\left[\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}(z+i)\right] =$$

$$= \lim_{z\to -i}\frac{e^z}{z-i} = \frac{e^{-i}}{-i-i} = -\frac{1}{2i}(\cos 1 - i\sin 1) = \frac{i}{2}(\cos 1 - i\sin 1) = \frac{\sin 1}{2} + i\frac{\cos 1}{2}.$$

Получили $\operatorname{res}\left[f(z); i\right] = \dfrac{\sin 1}{2} - i\dfrac{\cos 1}{2}$, $\operatorname{res}\left[f(z); -i\right] = \dfrac{\sin 1}{2} + i\dfrac{\cos 1}{2}$.

Пример 18.4. Вычислим вычет функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{\left(z^2+1\right)(z-3)} \tag{18.14}$$

относительно её особой точки $z_0 = 3$. Определим тип особой точки $z_0 = 3$. Помимо этой особой точки функция $f(z)$ имеет ещё две особые точки $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Рассмотрим $O_\delta(3) \mid i, -i \,\overline{\in}\, O_\delta(3)$. Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^2+1}}{z-3}.$$

Функция $f_1(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{z^2+1}$ аналитична в $O_\delta(3)$ ($f_1(z)$ имеет две особые точки $z_1 = i$, $z_2 = -i$, но $z_1, z_2 \,\overline{\in}\, O_\delta(3)$). Далее,

$$f_1(z_0) = f_1(3) = \frac{\operatorname{ch} 3}{3^2+1} = \frac{\operatorname{ch} 3}{10} \neq 0.$$

Следовательно, в силу теоремы 17.3 изолированная особая точка $z_0 = 3$ функции $f(z)$ является простым полюсом. Для функции $f_2(z) = z-3$ точка $z_0 = 3$ является простым нулём. Значит, применима формула (18.13):

$$\operatorname{res}\left[f(z); z_0\right] = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)} = \frac{f_1(3)}{f_2'(3)} = \frac{\dfrac{\operatorname{ch} 3}{10}}{1} = \frac{\operatorname{ch} 3}{10}$$

($f_2'(z)=1$, $f_2'(3)=1$). Итак, $\operatorname{res}\left[f(z);3\right]=\dfrac{\operatorname{ch}3}{10}$. Аналогично вычисляются вычеты функции (18.14) относительно её изолированных особых точек i и $-i$:

$$\operatorname{res}\left[f(z);i\right]=-\frac{1-3i}{20}\cos 1;\ \operatorname{res}\left[f(z);-i\right]=-\frac{1+3i}{20}\cos 1.$$

Теорема 18.3. Вычет функции $f(z)$ относительно её полюса z_0 порядка m вычисляется по формуле

$$\operatorname{res}\left[f(z);z_0\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]. \qquad (18.15)$$

По условию теоремы z_0 – полюс порядка m функции $f(z)$. Следовательно, в силу 17.2 лорановское разложение функции $f(z)$ в $\dot{O}_\delta(z_0)$ имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}, \qquad (18.16)$$

где $c_{-m}\neq 0$. Пусть $\varphi(z)$ – сумма правильной части лорановского разложения (18.16). Тогда

$$f(z)=\varphi(z)+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$$

или

$$f(z)(z-z_0)^m=\varphi(z)(z-z_0)^m+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\ldots+c_{-m}.$$

Следовательно,

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]=\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\varphi(z)(z-z_0)^m\right]+$$

$$+\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\ldots+c_{-m}\right]. \qquad (18.17)$$

Заметим, что

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\ldots+c_{-m}\right]=(m-1)!\ c_{-1}.$$

Тогда равенство (18.17) принимает вид

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]=\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\varphi(z)(z-z_0)^m\right]+(m-1)!\ c_{-1}.$$

Перейдём в этом неравенстве к переделу при $z\to z_0$:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\varphi(z)(z-z_0)^m\right]+(m-1)!\ c_{-1}. \qquad (18.18)$$

Для функции $g(z)=\varphi(z)(z-z_0)^m$ точка z_0 является нулём кратности не ниже, чем m. Следовательно, в силу теоремы 17.4 $g(z_0)=0$, $g'(z_0)=0$, $g''(z_0)=0$, …, $g^{(m-1)}(z_0)=0$. Функция $\varphi(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$ как сумма степенного ряда (см. теорему 14.14). Тогда функция $g(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$ как произведение двух аналитических в $O_\delta(z_0)$ функций (см. теорему 9.5). Значит, в силу следствия 12.1 производная $g^{(m-1)}(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$, следовательно, в силу замечания 9.3 $g^{(m-1)}(z)$ непрерывна в $O_\delta(z_0)$, в частности, $g^{(m-1)}(z)$ непрерывна в точке z_0, т.е.

$$\lim_{z\to z_0}g^{(m-1)}(z)=g^{(m-1)}(z_0).$$

Следовательно, в силу равенства $g^{(m-1)}(z_0)=0$

$$\lim_{z\to z_0} g^{(m-1)}(z)=0\,. \tag{18.19}$$

В силу (18.18), (18.19)

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big[f(z)(z-z_0)^m\Big]=(m-1)!\;c_{-1}\,,$$

откуда получаем

$$c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\;\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big[f(z)(z-z_0)^m\Big]. \tag{18.20}$$

Из (18.3), (18.20) следует формула (18.15). ◀

Пример 18.5. Вычислим вычет функции

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2} \tag{18.21}$$

относительно её особой точки $z_0=-1$. Определим тип особой точки $z_0=-1$. Помимо этой особой точки функция $f(z)$ имеет ещё одну особую точку $z_1=2$. Рассмотрим $O_\delta(-1)\,|\,2\,\overline{\in}\,O_\delta(-1)$. Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{\dfrac{z}{(z-2)^2}}{(z-(-1))^3}\,.$$

Функция $f_1(z)=\dfrac{z}{(z-2)^2}$ аналитична в $O_\delta(-1)$ ($f_1(z)$ имеет одну особую точку $z_1=2$, но $z_1\,\overline{\in}\,O_\delta(-1)$).

Заметим, что

$$f_1(z_0)=f_1(-1)=\frac{-1}{(-1-2)^2}=-\frac{1}{9}\neq 0\,.$$

Следовательно, в силу теоремы 17.3 изолированная особая точка $z_0=-1$ является полюсом порядка $m=3$ функции $f(z)$. По формуле (18.15)

$$\operatorname{res}\big[f(z);-1\big]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\Big[f(z)(z+1)^3\Big]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z}{(z-2)^2}\right]\boxed{=}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-2)^2}\right]=\frac{1\cdot(z-2)^2-z\cdot 2(z-2)}{(z-2)^4}=-\frac{z+2}{(z-2)^3}\,;$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z}{(z-2)^2}\right]=\frac{d}{dz}\left[-\frac{z+2}{(z-2)^3}\right]=-\frac{1\cdot(z-2)^3-(z+2)\cdot 3(z-2)^2}{(z-2)^6}==\frac{2(z+4)}{(z-2)^4}\,;$$

$$\boxed{=}\;\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{2(z+4)}{(z-2)^4}=\frac{1}{2}\,\frac{2(-1+4)}{(-1-2)^4}=\frac{1}{27}\,.$$

Итак, $\operatorname{res}\big[f(z);-1\big]=\dfrac{1}{27}$. Аналогично вычисляется вычет функции (18.21) относительно её изолированной особой точки 2: $\operatorname{res}\big[f(z);2\big]=-\dfrac{1}{27}$.

При вычислении контурных интегралов от функций, имеющих внутри контура интегрирования конечное число изолированных особых точек, можно применять следующее утверждение, называемое *основной теоремой о вычетах*.

Теорема 18.4. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2,\ \dots,z_n\in D$, и аналитична на границе Γ области D. Тогда

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\big[f(z);z_k\big]. \tag{18.22}$$

Рассмотрим окружности $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ с центрами соответственно в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$, не выходящие за пределы области D и не пересекающиеся между собой (рис. 18.2).

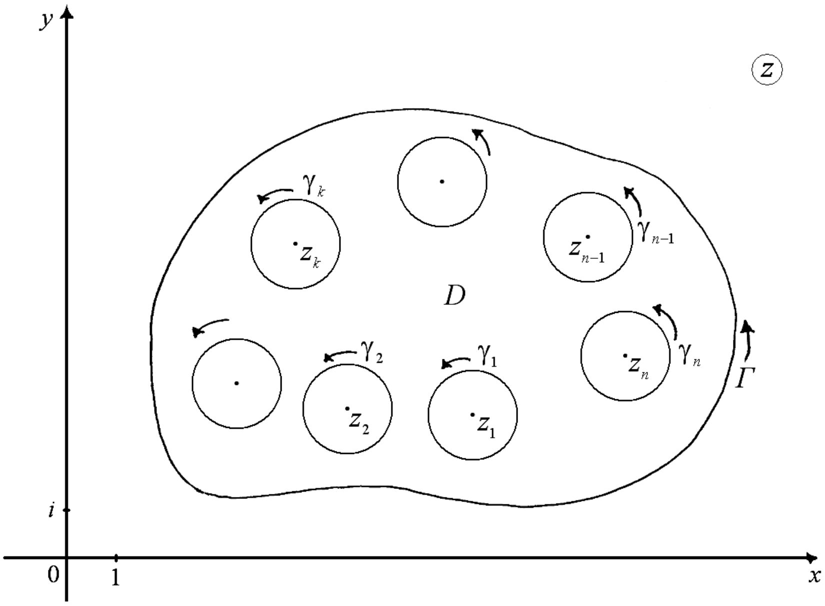

Рис. 18.2

Функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области G с границей $\Gamma_G = \Gamma \cup \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \ldots \cup \bar{\gamma}_n$. Следовательно, в силу интегральной теоремы Коши для многосвязной области (см. теорему 11.5)

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz. \qquad (18.23)$$

По определению вычета

$$\operatorname{res}\left[f(z); z_k\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz,\ 1 \le k \le n.$$

Тогда

$$\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}\left[f(z); z_k\right],\ 1 \le k \le n,$$

и соотношение (18.23) принимает вид

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \cdot \operatorname{res}\left[f(z); z_k\right],$$

откуда следует формула (18.22).

Пример 18.6. Вычислим

$$\oint_{L} \frac{e^z}{z^3(z+1)}\,dz$$

где $L: |z| = 2$.

Подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3(z+1)}$$

имеет две изолированные особые точки $z_1 = 0$, $z_2 = -1$ (рис. 18.3).

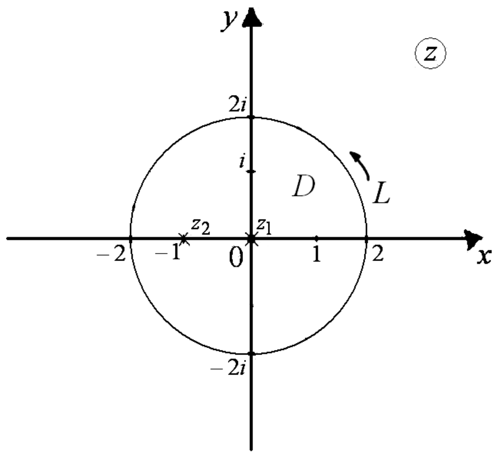

Рис. 18.3

Эти точки принадлежат области D, ограниченной контуром L. По формуле (18.22)

$$I=\oint_L \frac{e^z}{z^3(z+1)}dz=\oint_L f(z)\,dz=$$

$$=2\pi i\Big[\operatorname{res}\big[f(z);0\big]+\operatorname{res}\big[f(z);-1\big]\Big]. \qquad (18.24)$$

Представляя функцию $f(z)$ поочерёдно в виде

$$f(z)=\frac{\dfrac{e^z}{z+1}}{(z-0)^3},\quad f(z)=\frac{\dfrac{e^z}{z^3}}{z-(-1)}$$

и используя теорему 17.3, приходим к выводу, что точка $z_1=0$ является полюсом порядка $m=3$, а точка $z_2=-1$ – простым полюсом функции $f(z)$. По формуле (18.15)

$$\operatorname{res}\big[f(z);0\big]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\Big[f(z)\cdot z^3\Big]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z+1}\right)\boxed{=}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z+1}\right)=\frac{e^z(z+1)-e^z\cdot 1}{(z+1)^2}=\frac{ze^z}{(z+1)^2};$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z+1}\right)=\frac{d}{dz}\left[\frac{ze^z}{(z+1)^2}\right]=\frac{\left(e^z+ze^z\right)(z+1)^2-ze^z\cdot 2(z+1)}{(z+1)^4}=$$

$$=\frac{e^z(z+1)^2-2ze^z}{(z+1)^3}=\frac{e^z\left(z^2+1\right)}{(z+1)^3};$$

$$\boxed{=}\ \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z\left(z^2+1\right)}{(z+1)^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^0(0+1)}{(0+1)^3}=\frac{1}{2}.$$

Итак,

$$\operatorname{res}\big[f(z);0\big]=\frac{1}{2}. \qquad (18.25)$$

По формуле (18.8)

$$\operatorname{res}\big[f(z);-1\big]=\lim_{z\to -1}\big[f(z)(z+1)\big]=\lim_{z\to -1}\frac{e^z}{z^3}=\frac{e^{-1}}{(-1)^3}=-\frac{1}{e}.$$

Получили

$$\operatorname{res}\big[f(z);-1\big]=-\frac{1}{e}. \qquad (18.26)$$

В силу (18.24) – (18.26)

$$I = i\pi\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

Пусть дана функция $w = f(z)$. Рассмотрим *логарифмическую производную функции* $f(z)$:

$$\left[\mathrm{Ln}\, f(z)\right]' = \frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{18.27}$$

Из (18.27) видно, что особыми точками логарифмической производной функции $f(z)$ являются особые точки и нули этой функции.

Лемма 18.1. Пусть z_0 – полюс порядка m функции $f(z)$. Тогда

$$\mathrm{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}; z_0\right] = -m. \tag{18.28}$$

► В силу теоремы 17.3 функция $f(z)$ представима в некоторой $\dot{O}_\delta(z_0)$ в виде

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где $\psi(z)$ – некоторая аналитическая в $O_\delta(z_0)$ функция, отличная от нуля в точке z_0. Используя (6.60), (6.64), получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \left[\mathrm{Ln}\, f(z)\right]' = \left[\mathrm{Ln}\ \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}\right]' =$$

$$= \left[\mathrm{Ln}\,\psi(z) - m\mathrm{Ln}(z-z_0)\right]' = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{m}{z-z_0}. \tag{18.29}$$

Функция $\psi'(z)$ аналитична в $O_\delta(z_0)$ как производная аналитической в $O_\delta(z_0)$ функции $\psi(z)$ (см. следствие 12.1) Так как $\psi(z_0) \neq 0$, то функция $\varphi(z) = \dfrac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ аналитична в окрестности $O_\delta(z_0)$ как частное двух аналитических в этой окрестности функций (см. теорему 9.5). В силу теоремы 15.1 функция $\varphi(z)$ разложима в ряд Тейлора в $O_\delta(z_0)$:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n. \tag{18.30}$$

В силу (18.29), (18.30)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \frac{-m}{z-z_0},\ z \in \dot{O}_\delta(z_0). \tag{18.31}$$

В силу теоремы 16.4 представление (18.31) является лорановским разложением логарифмической производной функции $f(z)$ в $\dot{O}_\delta(z_0)$. Главная часть этого разложения состоит из одного члена $-m/(z-z_0)$, значит, $c_{-1} = -m$. В силу (18.3)

$$\mathrm{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}; z_0\right] = c_{-1}. \tag{18.32}$$

Подставляя в (18.32) вместо коэффициента c_{-1} его значение $-m$, получаем формулу (18.28). ◄

Лемма 18.2. Пусть ζ_0 – нуль кратности m функции $f(z)$. Тогда

$$\mathrm{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \zeta_0\right] = m. \tag{18.33}$$

► По определению нуля кратности m функция $f(z)$ представима в некоторой $O_\delta(\zeta_0)$ в виде

$$f(z) = (z-\zeta_0)^m\,\varphi(z), \tag{18.34}$$

где $\varphi(z)$ – некоторая аналитическая в $O_\delta(\zeta_0)$ функция, отличная от нуля в точке ζ_0. Рассмотрим функцию $F(z) = 1/f(z)$. В силу (18.34)

$$F(z)=\frac{\psi(z)}{(z-\zeta_0)^m},$$

где $\psi(z)=1/\varphi(z)$. Функция $\psi(z)$ аналитична в окрестности $O_\delta(\zeta_0)$ как частное двух аналитических в этой окрестности функций (см. теорему 9.5). Кроме того, $\psi(\zeta_0)=1/\varphi(\zeta_0)\neq 0$. Следовательно, в силу теоремы 17.3 точка ζ_0 является полюсом порядка m функции $F(z)$. Тогда, в силу леммы 18.1

$$\operatorname{res}\left[\frac{F'(z)}{F(z)};\zeta_0\right]=-m. \tag{18.35}$$

Используя (6.64), получаем

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\left[\operatorname{Ln}F(z)\right]'=\left[\operatorname{Ln}\frac{1}{f(z)}\right]'=-\left[\operatorname{Ln}f(z)\right]'=-\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{18.36}$$

В силу (18.35), (18.36)

$$\operatorname{res}\left[-\frac{f'(z)}{f(z)};\zeta_0\right]=-m. \tag{18.37}$$

Заметим, что для любой функции $g(z)$

$$\operatorname{res}\left[-g(z);z_0\right]=-\operatorname{res}\left[g(z);z_0\right]. \tag{18.38}$$

Действительно, по определению вычета

$$\operatorname{res}\left[-g(z);z_0\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\left(-g(z)\right)dz=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma g(z)\,dz=-\operatorname{res}\left[g(z);z_0\right].$$

В силу (18.38)

$$\operatorname{res}\left[-\frac{f'(z)}{f(z)};\zeta_0\right]=-\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};\zeta_0\right]. \tag{18.39}$$

Из (18.37), (18.39) следует формула (18.33). ◄

Пусть функция $w=f(z)$ аналитична на замкнутом простом гладком или кусочно-гладком контуре L и не имеет нулей на этом контуре: $f(z)\neq 0$, $\forall z\in L$.

Определение 18.2. *Логарифмическим вычетом функции* $f(z)$ *относительно контура* L называется величина вида

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(z)$ аналитична в односвязной области D, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1,z_2,\dots,z_l\in D$, являющихся её полюсами порядка соответственно $m_1,m_2,\dots,m_l$;

2) $f(z)$ имеет в области D s нулей $\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_s$ с кратностями соответственно $k_1,k_2,\dots,k_s$;

3) $f(z)$ аналитична на границе L области D и не имеет нулей на L, т.е. $f(z)\neq 0$, $\forall z\in L$.

Справедливо следующее утверждение, называемое *теоремой о логарифмическом вычете*.

Теорема 18.5. При выполнении условий 1) – 3) справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P, \tag{18.40}$$

где

$$N=\sum_{i=1}^{s}k_i, \tag{18.41}$$

$$P=\sum_{j=1}^{l}m_j, \tag{18.42}$$

т.е. логарифмический вычет функции $f(z)$ относительно замкнутого контура L равен разности между количеством нулей и количеством полюсов функции $f(z)$, расположенных внутри данного контура, при условии, что каждый нуль и каждый полюс считаются столько раз, какова их кратность.

Для логарифмической производной $\frac{f'(z)}{f(z)} = \left[\operatorname{Ln} f(z)\right]'$ функции $f(z)$ особыми точками, расположенными внутри контура L, являются полюсы $\{z_j\}_{j=1}^{l}$ и нули $\{\zeta_i\}_{i=1}^{s}$ функции $f(z)$ (рис. 18.4).

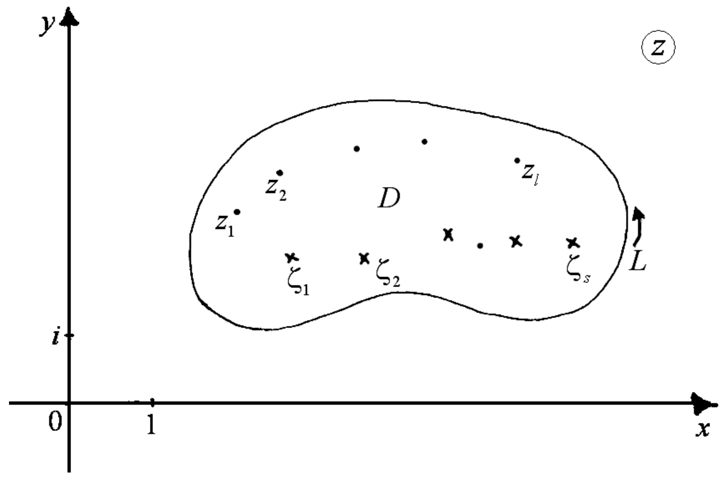

Рис. 18.4

В силу основной теоремы о вычетах (см. теорему 18.4)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{s}\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};\zeta_i\right] + \sum_{j=1}^{l}\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};z_j\right]. \qquad (18.43)$$

По формуле (18.33)

$$\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};\zeta_i\right] = k_i,\ 1 \le i \le s. \qquad (18.44)$$

По формуле (18.28)

$$\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};z_j\right] = -m_j,\ 1 \le j \le l. \qquad (18.45)$$

В силу (18.43) – (18.45)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{s}k_i - \sum_{j=1}^{l}m_j,$$

т.е. выполняется (18.40) с N и P, вычисляемым соответственно по формулам (18.41) и (18.42).

Следствие 18.3. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и на её границе L, а так же не имеет нулей на L, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N,$$

т.е. логарифмический вычет аналитической функции $f(z)$ относительно замкнутого контура L равен числу нулей функции $f(z)$, расположенных внутри контура L, при условии, что каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

Рассмотрим целую рациональную функцию, т.е. функцию, задаваемую многочленом

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$$

степени n ($n \ge 1, a_0 \ne 0$). Функция $P_n(z)$ является целой функцией (см. пример 9.3), т.е. не имеет особых точек в $\mathbb{X}$. В силу основной теоремы алгебры комплексных чисел (см. теорему 15.5) справедливо представление $P_n(z)$ в виде

$$P_n(z) = a_0 (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z-z_s)^{k_s} \qquad (18.46)$$

($s \le n$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$). В силу (18.46) многочлен $P_n(z)$ имеет n нулей, если каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

В некоторых задачах приходится определять число нулей многочлена $P_n(z)$ (с учётом их кратности) внутри какого-либо замкнутого простого гладкого или кусочно-гладкого контура L.

Следствие 18.4. Число нулей многочлена $P_n(z)$ (при условии, что каждый нуль считается столько раз, какова его кратность) в односвязной области D с границей L, на которой нет нулей многочлена $P_n(z)$, равно логарифмическому вычету этого многочлена относительно контура L:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} dz .$$

Выясним геометрический смысл логарифмического вычета функции $f(z)$ относительно замкнутого контура L, т.е. геометрический смысл левой части формулы (18.40). Запишем логарифмический вычет в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{d}{dz} \left[\mathrm{Ln}\, f(z) \right] dz . \qquad (18.47)$$

Возьмём в качестве начальной точки контура L некоторую фиксированную точку $z_0 \in L$. Тогда при полном обходе контура L в положительном направлении, т.е. при движении точки z из точки z_0 в точку $z_* = z_0$ (z_* – конечная точка контура L) соответствующая точка $w = f(z)$ опишет некоторую замкнутую кривую Γ ($w_0 = f(z_0)$ и $w_* = f(z_*) = f(z_0)$ – соответственно начальная и конечная точки кривой Γ) (рис. 18.5, 18.6).

Пусть φ_0 – значение $\mathrm{Arg}\, f(z)$, отвечающее начальной точке $w_0 = f(z_0)$ кривой Γ; φ_1 – значение $\mathrm{Arg}\, f(z)$, отвечающее конечной точке $w_* = w_0$ кривой Γ. По определению логарифмической функции

$$\mathrm{Ln}\, f(z) = \ln \left| f(z) \right| + i \mathrm{Arg}\, z .$$

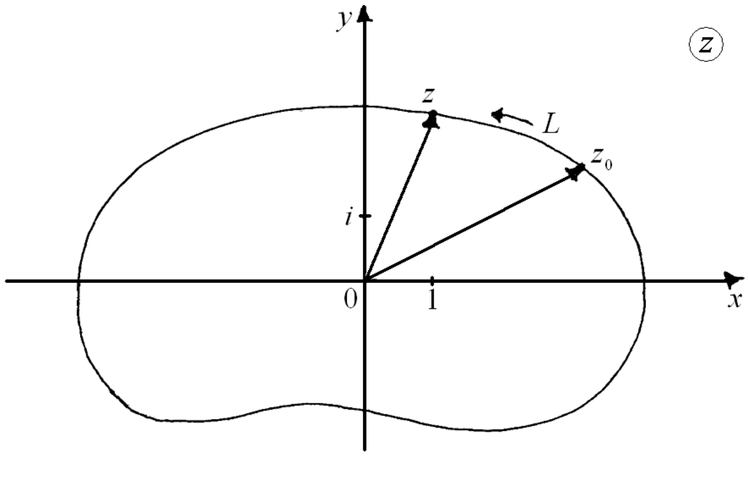

Рис. 18.5

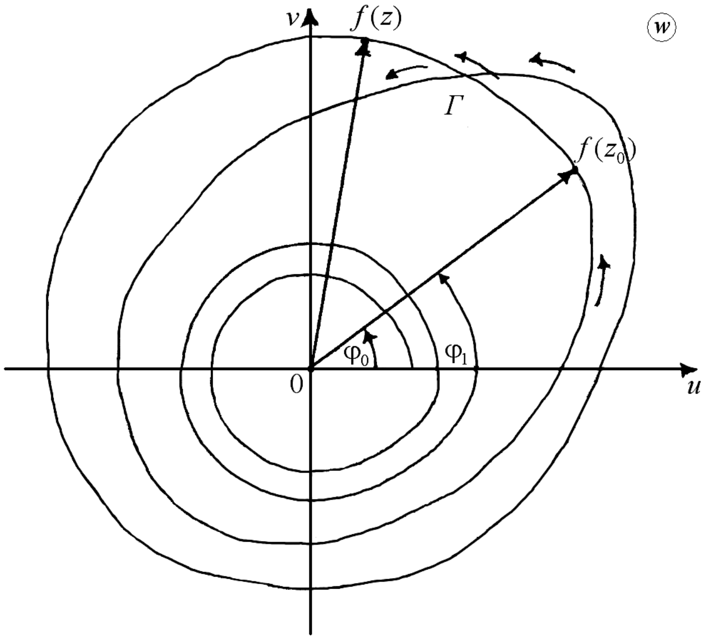

Рис. 18.6

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{d}{dz}\left[\operatorname{Ln} f(z)\right]dz = \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln} z\Big|_{z_0}^{z_*=z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\left|f(z)\right| + i\operatorname{Arg} z\right]\Big|_{z_0}^{z_*=z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\left(\ln\left|f(z_0)\right| + i\varphi_1\right) - \left(\ln\left|f(z_0)\right| + i\varphi_0\right)\right] = \frac{\varphi_1-\varphi_0}{2\pi}.$$

Получили

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{d}{dz}\left[\operatorname{Ln} f(z)\right]dz = \frac{\varphi_1-\varphi_0}{2\pi}. \tag{18.48}$$

В силу (18.47), (18.48)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{\varphi_1-\varphi_0}{2\pi}.$$

Величина $\varphi_1-\varphi_0$ – это изменение $\operatorname{Arg} f(z)$ при однократном обходе точкой z контура L в положительном направлении. Положим $\varphi_1-\varphi_0 = \operatorname{Var}_L \operatorname{Arg} f(z)$ (от латинского слова variatio – изменение). Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}_L \operatorname{Arg} f(z). \tag{18.49}$$

В силу (18.49) формула (18.40) принимает вид

$$N-P = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}_L \operatorname{Arg} z. \tag{18.50}$$

Равенство (18.50) называется *принципом аргумента*.

Согласно (18.50) принцип аргумента состоит в следующем: при выполнении условий теоремы 18.5 *разность между количеством нулей и количеством полюсов функции* $f(z)$, *расположенных внутри замкнутого контура* L (при условии, что каждый нуль и каждый полюс считаются столько раз, какова их кратность) *равна значению* $\operatorname{Arg} f(z)$ *при обходе точкой* z *контура* L *в положительном направлении, делённому на* 2π.

Из рисунка 18.6 видно, что

$$\varphi_1 - \varphi_0 = 2\pi k ,$$

где k – число полных оборотов, совершаемых радиус-вектором точки $f(z)$ вокруг начала координат при однократном обходе точкой z контура L в положительном направлении (на рис. 18.6 $k = 2$). Формула (18.50) принимает вид

$$N - P = k . \tag{18.51}$$

Согласно (18.51) принцип аргумента можно сформулировать в следующем виде: при выполнении условий теоремы 18.5 *разность между количеством нулей и количеством полюсов функции* $f(z)$, *расположенных внутри замкнутого контура* L (при условии, что каждый нуль и каждый полюс считаются столько раз, какова их кратность), *равна числу полных оборотов, совершаемых радиус-вектором точки* $f(z)$ *вокруг начала координат при однократном обходе точкой* z *контура* L *в положительном направлении.*

В частности, если $f(z)$ не имеет полюсов внутри контура L, то *количество нулей функции* $f(z)$, *расположенных внутри замкнутого контура* L (при условии, что каждый нуль считается столько раз, какова его кратность), *равно числу полных оборотов, совершаемых радиус-вектором точки* $f(z)$ *вокруг начала координат при однократном обходе точкой* z *контура* L *в положительном направлении.*

Замечание 18.2. Если при однократном обходе точкой z контура L в положительном направлении радиус-вектор точки $f(z)$ поворачивается по часовой стрелке, то число полных оборотов, совершаемых радиус-вектором точки $f(z)$ вокруг начала координат, берётся со знаком "минус".

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данного учебного пособия является формирование у студентов инженерных специальностей вузов основных понятий и методов теории функций комплексного переменного, что послужит им в дальнейшем базой для изучения других математических дисциплин, а также специальных дисциплин, использующих математический аппарат. Всё это будет способствовать подготовке высококвалифицированных инженерных кадров для различных отраслей промышленности и сельского хозяйства.

ПРИЛОЖЕНИЕ

БИОГРАФИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

АБЕЛЬ Нильс Хенрик (5.8.1802–6.4.1829) – норвежский математик. Род. близ Ставангера. Обучался в кафедральной школе, а затем в ун-те Христиании (Осло). В 1824 опубликовал доказательство неразрешимости в радикалах общего алгебр, ур-ния 5-й степени. В 1825–27 А. был за границей, в частности в Берлине, Париже. В Берлине А. познакомился с нем. математиком *А.Л. Креллем* и стал сотрудником его журнала. Мн. классические труды А. были опубликованы в 1826, но в то время они не принесли автору известности. А. жил в жестокой нужде. Возвратившись на родину, давал частные уроки, в 1828 получил должность доц. в ун-те и инженерной школе Осло. В дек. 1828 А. простудился, заболел пневмонией и 6 апр. 1829 умер. В 1830 Париж. АН присудила ему (посмертно) и нем. математику *К. Г. Якоби* премию за развитие эллиптических функций. Собр. соч. А. вышло на франц. яз. в 1839.

За свою короткую жизнь А. сделал важнейшее для дальнейшего развития математики открытие. Пытаясь решить и радикалах общее ур-ние 5-й степени, он выдвинул такую общую идею: вместо того чтобы искать зависимость, само существование к-рой остаётся недоказанным, следует поставить вопрос, возможна ли в действительности такая зависимость. Руководствуясь этой идеей, А. выяснил, почему ур-ния 2-й, 3-й и 4-й степеней решаются в радикалах, т.е. почему ур-ния с коммутативной группой подстановок корней разрешимы в радикалах. (Коммутативные группы называют теперь абелевыми.) А. обнаружил также ряд алгебр. функций, к-рые не интегрируются с помощью элементарных функций; их интегрирование приводит к новым трансцендентным функциям. Эти иссл. привели А. к созданию теории эллиптических и гиперэллиптических функций, в к-рую он внес большой вклад независимо от *К.Г. Якоби*. А. – основатель общей теории интегралов алгебр. функций. Др. важные работы А. относятся к теории рядов. Его именем названа теорема о непрерывности функций во всем круге сходимости соотв. Ряда. Есть абелевы дифференциалы, интегралы, ур-ния, функции, признаки сходимости, многообразия, метод суммирования и др. Именем А. назван кратер на обратной стороне Луны.

ВЕЙЕРШТРАСС Карл Теодор Вильгельм (31.10.1815–19. 2.1897) – немецкий математик, чл. Берлин. АН (1856). Род. в Остенфельде. Спец. высшего образования не имел. Изучал юридические науки в Бонне, но, увлекшись математикой, оставил юридический ф-т. В 1841 сдал экзамены на звание учителя. В 1842–55 – преподаватель математики в католических ср. уч. заведениях Дейч-Кронса и Броунберга. С 1856 – экстраординарный, с 1865 – ординарный проф. Берлин, ун-та. Большинство работ напечатано после его смерти, а при жизни идеи В. распространяли многочисленные слушатели его лекций из разных стран. Лекции В. имели огромное значение для развития математики. В них впервые с достаточной строгостью рассматривался ряд осн. матем. понятий. Лекции и науч. статьи В. посвящены матем. анализу, теории аналитических функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре. Большое значение для математики имеет разрабатывавшаяся В. система логического обоснования матем. анализа, основанная на построенной им теории действительных чисел. Значительны результаты В. в области матем. анализа: систематическое использование понятий верхней и нижней граней числовых множеств, учение о предельных точках, строгое обоснование свойств непрерывных функций, построение примера непрерывной функции, нигде не имеющей производной (во всем этом предшественником В. был чеш. математик *Б. Больцано*), доказательство теоремы о возможности разложения любой непрерывной на отрезке функции в равномерно сходящийся ряд многочленов, науч. критика тех доказательств, к-рые основываются на допущении существования функции, реализующей экстремум нек-рого функционала, и др. Именем В. названы апроксимационная теорема, признак равномерной сходимости, функция; есть также функция *В.–Стоуна.* Значительное место в работах В. занимает теория аналитических функций. Ему принадлежат: теорема о том, что функцию, аналитическую в круговом кольце, можно разложить в степенной ряд по целым положительным и отрицательным степеням переменной (эту теорему независимо от В. доказал франц. математик *П. Лоран,* его именем она и названа), построение теорем об аналитическом продолжении, теорема об аналитичности суммы равномерно сходящегося в нек-рой области ряда аналитических функций, разложение целых функций в бесконечные произведения (обобщение разложения многочленов на множители), новое построение теории эллиптических функций (на основе введённых им функций $\sigma(z),\xi(z)$ и $\gamma(z)$, создание основ теории аналитических функций мн. переменных, работы по теории алгебр. функций и абелевых интегралов. К вариационному исчислению относятся: исследование достаточных условий экстремума интеграла (условие В.), построение вариационного исчисления для случая параметрического задания функций, когда все ф-лы приобретают особенно симметричный вид и вместе с тем достигают наибольшей общности, изучение "разрывных" решений в задачах вариационного исчисления и др. В дифференциальной геометрии В. изучал геодезические линии и минимальные поверхности. В линейной алгебре В. принадлежит построение теории элементарных делителей, относящейся к приведению матриц к каноническому виду и имеющей большое значение для теории систем линейных, в том числе дифференциальных, ур-ний. В. доказал теорему о том, что комплексные числа образуют над полем действительных чисел единственную коммутативную алгебру без делителей нуля (1872). В. занимался приложениями математики к механике и физике и поощрял своих многочисленных учеников работать в этом направлении. Учениками В. были: С.*В. Ковалевская, Г. Миттаг-Леффлер, К. Шварц, И. Фукс, Ф. Шоттки, Л. Кёнигсбергер* и др. В.– почетный чл. Петерб. АН (1895), чл. Париж. АН (1868). В 1967 были изданы его труды (т. I–VII). Именем В. назван кратер на обратной стороне Луны.

ГРИН Джордж (14.7.1793–31.3.1841) – английский математик и физик. Род. в Снейтоне (бл. Ноттингема). Математику изучал самостоятельно. Окончил Кембриджский ун-т (1837). В 1828 опубл. своё гл. соч. "Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма". В нём ввел понятие потенциала и развил теорию электричества и магнетизма, опираясь на найденное им соотношение между интегралами по объёму и по поверхности (ф-лы Г.). Здесь же впервые рассматривается частный случай функции, связанной с аналитическим представлением решений краевых задач матем. физики (функция Г.). Кн. Г., вышедшая незначительным тиражом, была мало известна до её переиздания (1845) даже в самой Англии. В матем. физике особое значение имеют работы Г. об отражении и преломлении света в кристаллических средах (1839), в к-рых он попутно вывел осн. ур-ния теории упругости, исходя фактически из закона сохранения энергии, примененного к деформированному упругому телу. Немногочисленные, но в высшей степени важные, его труды были изданы в 1871 в Лондоне. Талантливого учёного заметили довольно поздно, только в 1839 он был приглашён на кафедру в Кембриджский ун-т. В наст. время труды Г. относятся к классическим работам по матем. физике. Именем Г. названы кратеры на обратной стороне Луны и на Марсе.

Д'АЛАМБЕР Жан Лерон (16.11.1717–29.10.1783) – французский математик, механик и философ, чл. Париж. АН (1741). Род. в Париже. Уже в раннем детстве поражал умом и наблюдательностью. Получил прекрасное образование. Изучив юриспруденцию, стал адвокатом. Много времени уделял медицине и естественным наукам. В 1739 и 1740 представил в Париж. АН два трактата о движении твёрдых тел в жидкостях и об интегральном исчислении, за что был избран в число её членов. В "Трактате о динамике" (1743) Д. впервые сформулировал свой знаменитый принцип (принцип Д.). За "Рассуждения об общей причине ветров" (1744 и 1747) Д. получил премию Берлин. АН и был избран её членом. В астрономии Д. обосновал теорию возмущений движения планет и первый строго объяснил теорию равнодействий и нутации. Осн. матем. исследования Д. относятся к теории дифференциальных ур-ний в частных производных 2-го порядка, выражающих поперечные колебания струны. Работы Д., а также *Л. Эйлера* и *Д. Бернулли* заложили основы матем. физики. Именем Д. названы оператор и парадокс. При решении одного встретившегося в гидродинамике дифференциального ур-ния в частных производных эллиптического типа Д. впервые применил функции комплексного переменного. Д. и Эйлер первыми нашли те основные ур-ния, связывающие действительную и мнимую части аналитической функции, к-рые впоследствии стали называть ур-ниями Коши-Римана. Д. получил ценные результаты в теории обыкновенных дифференциальных линейных ур-ний с постоянными коэфф. и систем таких ур-ний 1-го и 2-го порядка, предложил способ решения дифференциально-функциональных ур-ний. Исчисление бесконечно малых Д. пытался обосновать с помощью теории пределов. В теории рядов его имя носит достаточный признак сходимости. В алгебре Д. дал первое, правда, не вполне строгое, доказательство осн. теоремы алгебры, к-рая наз. сейчас леммой Д.

Д. работал вместе с Д. Дидро над созданием "Энциклопедии наук, искусств и ремесел". В первых её томах он поместил ст. "Дифференциалы", "Уравнения", "Динамика", "Геометрия" и др. Здесь в совр. смысле встречается термин "натуральное число". В ст. "Размерность", написанной для "Энциклопедии", Д. впервые высказал идею о времени как о четвёртом измерении. Написал также вступительную ст. к "Энциклопедии" – "Очерк происхождения и развития науки" (1750), в к-рой дал классификацию наук, и "Элементы философии" (1759). Издатели "Энциклопедии" вызывали недовольство правящих кругов. Не выдержав преследований реакции, Д. отошел от изд. "Энциклопедии" (1757). Занимался также лит. деятельностью, был избран чл. Франц. Академии "Сорока бессмертных". Писал работы по вопросам музыкальной теории и музыкальной эстетике. Почётный чл. Петерб. АН (1764) и ряда др. академий. Именем Д. названы горный хребет на видимой стороне Луны и кратер на обратной стороне Луны.

ДИРИХЛЕ Петер Густав Лежен (13.2.1805–5.5.1859) – немецкий математик. Род. в Дюрене. В 1822–27 был домашним учителем в Париже. Входил в кружок молодых учёных, к-рые группировались вокруг *Ж. Фурье.* В 1827 занял место доц. в Бреславе; с 1829 работал в Берлине. В 1831–55 – проф. Берлин, ун-та, после смерти *К. Гаусса* (1855) – Гёттингенского ун-та. Сделал ряд крупных открытий в теории чисел; установил ф-лы для числа классов бинарных квадратичных форм с заданным определителем и доказал теорему о бесконечности кол-ва простых чисел в арифметической прогрессии из целых чисел, первый чл. и разность к-рой взаимно просты. К решению этих задач применил аналитические функции, названные функциями (рядами) Д. Создал общую теорию алгебр. единиц в алгебр. числовом поле. В области матем. анализа впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций, что послужило обоснованием для мн. дальнейших исследований. Значительны труды Д. в механике и матем. физике, в частности в теории потенциала. С именем Д. связаны задача, интеграл (ввёл интеграл с ядром Д.), принцип, характер, ряды и мн. др. Лекции Д. имели огромное, влияние на выдающихся математиков более позднего времени, в т.ч. на *Г. Римана, Ф. Эйзенштейна, Л Кронекера, Ю. Дедекинда* и др. На рус. яз. перев. кн. Д. "Лекции по теории чисел" (М., 1936). Иностр. чл.-кор. Петерб. АН (1837), чл. Париж. АН (1854).

ЖОРДАН Камиль Мари Эдмон (5.1.1838–21.1.1922) – французский математик. Чл. Париж. АН (1881). Род. в Лионе. Окончил Политехн. и Горную школы в Париже. Работал в Политехн. школе и в Коллеж де Франс. Труды по алгебре, теории чисел, теории функций, геометрии, топологии, дифференциальным ур-ниям и кристаллографии. Известны теорема *Ж.–Гёльдера* о композиционных рядах групп, нормальная (жорданова) форма матриц, кривая Ж., теорема Ж., мера Ж. и др. Ввел понятие функций с ограниченным изменением. Написал первый систематический курс теории групп и теории *Галуа* (1870). "Трактат о подстановках", разъяснивший и дополнивший краткие и сжатые иссл. Э. Галуа, сделал их достоянием широких матем. кругов. Изучал линейные группы и их подгруппы, ввёл понятие факторгруппы. Первый исследовал бесконечные группы. По 3-томному "Курсу анализа" Ж. (1882–87) в Петерб. ун-те изучали дифференциальное и интегральное исчисления, а также приложения анализа к геометрии. В геометрии Ж. исследовал вращения n-мерного пространства, ф-лы *Френе* в n-мерном пространстве и др. В 1895–1921 был ред. и издателем франц. матем. журнала. Иностр. чл.-кор. Петерб. АН (1895).

КОШИ Огюстен Луи (21.8.1789–23.5.1857) – французский математик. Чл. Париж. АН (1816). Род. в Париже. Окончил Политехн. школу (1807) и Школу мостов и дорог (1810) в Париже. Нек-рое время работал инженером путей сообщения, с 1813 занялся наукой и преподаванием. Его назначили чл. АН вместо Г. *Монжа.* В 1816 мемуар К. по теории волн на поверхности тяжёлой жидкости на конкурсе Париж. АН получил первую премию; после этого К. приглашают в Политехн. школу, Сорбонну и Коллеж де Франс. В 1830–38 К. путешествовал по Европе. Возвратившись в Париж, из-за неприятия нового режима отказался от разл. учёных должностей, не желая приносить присягу, пока ему не предложили кафедру "без условий". Труды относятся к разл. областям математики. Были периоды, когда К. каждую неделю представлял в Париж. АН новый мемуар. Всего же он опубл. свыше 800 работ по арифметике и теории чисел, алгебре, матем. анализу, дифференциальным ур-ниям, теоретической и небесной механике, матем. физике. Быстрота, с к-рой К. переходил от одного предмета к другому, отчасти дала ему возможность проложить в математике множество новых путей. Его "Курс анализа" (1821), "Резюме лекций по исчислению бесконечно малых" (1823), "Лекции по приложениям анализа к геометрии" (1826–28), основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. В них К. дал определение понятия непрерывности функции, чёткое построение теории сходящихся рядов (в частности, впервые установил точные условия сходимости ряда *Тейлора* к данной функции и провёл отчётливое различие между сходимостью этого ряда вообще и сходимостью к данной функции; ввёл понятие радиуса сходимости, доказал теорему о произведении двух абсолютно сходящихся рядов), определение интеграла как предела сумм и доказательство существования интегралов от непрерывной функции. Большой заслугой К. является то, что он развил основы теории аналитических функций комплексного переменного, заложенные ещё в XVIII в. *Л. Эйлером* и Ж. *Д'Аламбером.* Особенно важное значение имеют такие результаты, полученные К.: геом. представление комплексного переменного как точки, перемещающейся в плоскости по тому или иному пути интегрирования (эту мысль ещё раньше высказали *К. Гаусс* и др.); выражение аналитической функции в виде интеграла (интеграл К.), а отсюда разложение функции в степенной ряд; разработка теории вычетов и её приложений к разл. вопросам анализа и др. В теории дифференциальных ур-ний К. принадлежат: постановка одной из важнейших общих задач теории дифференциальных ур-ний (задача К.), осн. теоремы существования решений для случая действительных и комплексных переменных (для последних К. развил метод мажорант) и метод интегрирования ур-ний с частными производными 1-го порядка (метод К. – метод характеристических полос). В геометрии К. обобщил теорию многогранников, разработал новый способ иссл. поверхности 2-го порядка, исследовал касание, спрямление и квадратуру кривых, установил правила приложения анализа к геометрии, а также вывел ур-ния плоскости и параметрическое представление прямой в пространстве. Доказал (1813), что два выпуклых многогранника с соотв. конгруэнтными и одинаково расположенными гранями имеют равные двугранные углы между соотв. гранями. В алгебре К. по-иному доказал осн. теорему теории симметрических многочленов, развил теорию определителей, найдя все гл. их свойства, в частности доказал теорему умножения (причём К. исходил из понятия знакопеременной функции); эту теорему он распространил на матрицы. Ввёл термины "модуль" комплексного числа, "сопряжённые" комплексные числа и др. Распространил теорему *Штурма* на комплексные корни. В теории чисел К. принадлежат: доказательство теоремы *Ферма* о многоугольных числах, одно из доказательств закона взаимности, иссл. по теории целых алгебр. чисел (при этом К. получил ряд результатов, позднее в более общей форме установленных нем. Математиком *Э. Куммером*). К. первый изучил общее неопределённое тернарное куб. ур-ние и сформулировал теоремы о неопределённых тернарных кв. ур-ниях и сравнениях с одинаковым модулем и общим решением. Занимался также иссл. по тригонометрии, механике, теории упругости, оптике, астрономии. Был чл. Лондон. королевского об-ва и почти всех академий наук мира. Полное собр. соч. К. изд. Париж. АН. Кавалер ордена Почётного легиона. Именем К. назван кратер на видимой стороне Луны.

ЛАПЛАС Пьер Симон (23.3.1749–5.3.1827) – французский математик, физик и астроном, чл. Париж. АН (1785). Род. в Нормандии в крестьянской семье. Учился в школе монашеского ордена бенедиктинцев. В совершенстве изучил др. языки, литературу и искусство, а также математику и астрономию. Занявшись математикой, Л. не только оставил занятия теологией, но и стал убеждённым атеистом. Своими философскими взглядами был близок к франц. материалистам. В 1766 переехал в Париж, где при помощи *Ж. Д'Аламбера* стал проф. Военной школы, в 1790 – председателем Палаты мер и весов, в

1795 вышел в руководство Бюро долгот, с 1799 был министром внутренних дел. Науч. деятельность Л. была чрезвычайно разнообразной. Написал фундаментальные работы по математике, экспериментальной и матем. физике и небесной механике. Является одним из создателей теории вероятностей. Матем. труды по теории дифференциальных ур-ний (ур-е Л.), в частности интегрированию ур-ний с частными производными (каскадный метод Л.). Подробно изучил уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ (ур-ние Л.), на к-ром основывается решение задач теории потенциала теплопроводности, электростатики и гидродинамики. Развил и систематизировал результаты, полученные *Б. Паскалем*, *П. Ферма*, *Я. Бернулли* и др. математиками по теории вероятностей; усовершенствовал методы доказательства; доказал важную предельную теорему, к-рая теперь называется теоремой *Л.–Муавра* (А. Муавр в 1730 высказал её только для частных случаев); развил теорию ошибок; обосновал (1811), хотя и не строго, способ наименьших квадратов. В 1799 предложил способ минимального приближения функций, к-рый затем упростил *Ла Валле Пуссен*. Ввёл теоремы сложения и умножения вероятностей, понятия производящих функций и матем. ожидания. При жизни Л. трижды издавалась его "Аналитическая теория вероятностей" (1812). Совместные иссл. Л. и Лавуазье были посвящены вопросам теплопроводности, расширения тел от нагревания, горения водорода в кислороде и др. Опубл. ряд работ по теории капиллярности (1806); развил работы *И. Ньютона*, к-рые касались матем. определения скорости звука в воздухе, дал барометрическую ф-лу для вычисления изменения плотности воздуха с изменением высоты над поверхностью Земли. Кроме того, занимался вопросами электродинамики, разрабатывал матем. проблемы теории потенциала, нашёл шаровые функции от двух переменных. Развил методы небесной механики и завершил объяснение движения тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения Ньютона. В 1780 предложил новый способ вычисления орбит небесных тел. Доказал, что кольцо Сатурна не может быть сплошным, и высказал предположения о сильном сжатии Сатурна около полюсов. Разработал теорию движения спутников Юпитера (1789), открыл причину ускорения движения Луны (1787), определил величину сжатия Земли возле полюсов. Л. принадлежит также разработка динамической теории приливов. Результаты своих иссл. в области небесной механики Л. подытожил в "Трактате о небесной механике" (1798–1825). В математике известны также оператор Л., преобразование Л. и др. Награждён орденом Почётного легиона. В 1816 Л. избрали чл. Франц. Академии "бессмертных". Иностр. почётный чл. Петерб. АН (1802). Именем Л. названы горные отроги на видимой стороне Луны.

ЛЕЙБНИЦ Готфрид Вильгельм (1.7.1646–14.11.1716) – немецкий математик, физик и философ, организатор и первый президент Берлин. АН (1700). Род. В Лейпциге. В 1601 поступил на юридический ф-т Лейпциг. ун-та. Кроме юридических наук, изучал философию и математику. В ун-те ознакомился с работами Аристотеля и Р. Декарта. Защитил диссертацию на степень бакалавра (1663), магистра философии (1664) и д-ра права (1666). Состоял на юридической и дипломатической службе при дворе Майнцского курфюрста. Из Майнца выезжал с дипломатической миссией в Париж, где познакомился со мн. математиками, в частности с *Х. Гюйгенсом*, под руководством к-рого изучал работы *Г. Галилея*, *Р. Декарта*, *П. Ферма*, *Б. Паскаля*, и самого Гюйгенса. В 1673 из Парижа Л. выезжает в Лондон для демонстрации своей счётной машины в Лондон. королевском об-ве. В Лондоне познакомился с *И. Барроу*, а также с трудами *И. Ньютона*, "Логарифмотехникой" *Г. Меркатора*. Возвратясь в 1676 в Париж, Л. разрабатывает важные вопросы дифференциального исчисления. В том же году уезжает в Ганновер, где работает библиотекарем, затем историографом двора Ганноверского герцога. Деятельность Л. выходила далеко за пределы его официальных обязанностей. Он занимался химией и геологией, сконструировал ветряной двигатель для насосов, выкачивающих воду из шахт. Особенно плодотворной была науч. деятельность Л. в области математики. В 1666 Л. опубл. свою первую матем. работу "Размышления о комбинаторном искусстве". Сконструированная Л. счётная машина выполняла не только сложение и вычитание, как это было у Б. Паскаля, но и умножение, деление, возведение в степень и извлечение кв. и куб. корней. Свыше 40 лет Л. посвятил усовершенствованию своего изобретения. Поэтому его можно считать идейным вдохновителем совр. машинной математики. Л. заложил основы символической логики. Разработанные им логика классов и исчисление высказываний в алгебр. форме лежат в основе совр. матем. логики. Исследовал свойства нек-рых кривых (в частности, цепной линии), занимался разложением функций в ряды, ввёл понятие определителя и выдвинул нек-рые идеи, касающиеся теории определителей; впоследствии их развивали *А. Вандермонд*, *О. Коши*, *К. Гаусс* и окончательно разработал *К. Якоби*. Л. до нек-рой степени проложил путь таким новым дисциплинам, как политическая экономия и сравнительное языкознание. Важнейшей заслугой Л. является то, что он, одноврем. с И. Ньютоном, но независимо от него, завершил создание дифференциального и интегрального исчислений. При этом он исходил не из квадратуры кривых, как Ньютон, а из проблемы касательных. Изучение работ Б. Паскаля и собственные иссл. привели Л. в 1673–74 к идее характеристического треугольника, к-рый теперь используется при введении понятий производной и дифференциала в каждом учебнике дифференциального исчисления. Л. сделал и дальнейший шаг в создании нового исчисления – установил зависимость между прямой и обратной задачами о касательных. Через год он пришёл к выводу, что из "обратного метода касательных выходит квадратура всех фигур". В октябре 1675 Л. уже пользуется обозначением Sl для суммы бесконечно малых и операцию, противоположную суммированию, обозначает, подписывая букву d под переменной $\left(\frac{x}{d}\right)$, а затем рядом с ней: dx. Знак интеграла в совр. форме впервые встречается в работе Л. "О скрытой геометрии..." (1686). Л. решил проблему касательных с помощью дифференциального исчисления, сформулировал правила дифференцирования произведения, степени, неявной функции. Эти результаты Л. опубл. только в 1684 в ст. "Новый метод максимумов и минимумов", впервые назвав свой алгоритм дифференциальным исчислением. В 1603 Л. опубл. первые образцы интегрирования дифференциальных ур-ний с помощью бесконечных рядов. Л. ввёл много матем. терминов, к-рые теперь прочно вошли в науч. практику (функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, алгоритм, абсцисса, ордината, координата), а также знаки дифференциала, интеграла, логическую символику. С именем Л. в науке связано много открытий и гипотез, к-рые позже получили признание. В механике ему принадлежит понятие о "живых силах", в геологии – мысль, что Земля имеет историю. Л. высказал правильное предположение о происхождении ископаемых остатков животных и растений, отстаивал важную для биологии мысль об эволюции. Создал собственную науч. школу, в к-рую входили братья *Бернулли*, *Г.Ф.*

Лопиталь и др. математики. Первым нарушил традицию писать науч. труды только на лат. яз. Чл. Лондон, королевского об-ва (1679) и Париж. АН (1700). АН ГДР учредила Мейсенскую Лейбницевскую медаль. Именем Л. названы горный хребет на видимой стороне Луны и кратер на обратной стороне Луны.

ЛИУВИЛЛЬ Жозеф (24.3.1809–8.9.1882) – французский математик. Чл. Париж. АН (1839). Род. в Сент-Омере. Окончил Политехн. школу (1827) и Школу мостов и дорог (1830) в Париже. Работал в Политехн. школе и Коллеж де Франс (с 1833 – проф.). В 1836 основал "Журнал чистой и прикладной математики". Чл. Бюро долгот (1862). Науч. интересы Л. были очень широкими. Опубл. ок. 400 работ. Построил теорию эллиптических функций, к-рые рассматривал как двояко-периодические функции комплексной переменной. В общей теории аналитических функций Л. принадлежит теорема: любая целая функция, ограниченная на всей плоскости, тождественно равна постоянной. На основе общей теории аналитических функций исследовал краевую задачу для линейных дифференциальных ур-ний 2-го порядка. Сформулировал фундаментальную теорему статистической механики и теорему об интегрировании канонических ур-ний динамики. В теории чисел особенно важны результаты исследований Л., касающиеся рациональных приближений алгебр. чисел. Установил, что e не может быть корнем ур-ния $ae^2 + be + c = 0$. В 1851 доказал существование трансцендентных чисел и впервые построил конкретные классы трансцендентных чисел. Л. первый оценил работы *Э. Галуа* и опубл. их в своём журнале. Иностр. чл. кор. Петерб. АН (1840). Именем Л. назван кратер на обратной стороне Луны.

ЛОРАН Пьер Альфонс (18.7.1813–2.9.1854) – французский математик и военный инженер. Род. в Париже. Окончил Политехн. школу в Париже. Существенно дополнил нек-рые исследования О. Коши, дав (1843) разложение функции, аналитической в круговом кольце, по целым положительным и отрицательным степеням (ряд Л.).

МАКЛОРЕН Колин (1698–14.6.1746) – шотландский математик. Чл. Лондон. королевского об-ва (1719). Ученик и последователь *И. Ньютона*. Род. в Килмодане. Ещё в детстве проявил большие матем. способности. В 12 лет поступил в ун-т в Глазго, в 20 лет получил кафедру математики в Абердине, где работал до 1722. В 1722–26 работал во Франции. В 1724 М. награждён премией Париж. АН за работу по физике. Возвратившись на родину, при поддержке Ньютона получил кафедру в Эдинбург. ун-те. В 1740 Париж. АН за работы о приливах и отливах присудила премию трём выдающимся учёным – *Д. Бернулли*, *Л. Эйлеру* и М. В области анализа М. установил интегральный признак сходимости числовых рядов и дал ф-лу суммирования рядов. Неск. теорем М. вошли в совр. теорию плоских кривых и проективную геометрию. Впервые опубл. работу о разложении функции в степенные ряды. Символика трактата М. по алгебре мало отличается от совр. Важнейший труд М. – "Трактат о флюксиях" (1742). Именем М. назван кратер на обратной стороне Луны.

МОРЕРА Джачинто (18.7.1856–18.2.1909) – итальянский математик и механик. Чл. Нац. академии деи Линчеи. Род. в Наваре. Проф. ун-тов Генуи и Турина. Матем. труды по теории функций комплексного переменного (теорема М., теорема М.–*Карлемана*) и дифференциальным ур-ниям. Впервые систематически исследовал теорию эллипсоидальных гармонических функций.

МУАВР Абрахам де (26.5.1667–27.11.1754) – английский математик. Чл. Лондон. королевского об-ва (1697). Род. в Витри-ле-Франсуа (Франция). Учился у франц. математика *Ж. Озанама*. Прожил много лет в Лондоне. Был в дружеских отношениях с *И. Ньютоном* и *Э. Галлеем*. Труды по теории рядов, теории вероятностей, теории комплексных чисел. В теории вероятностей доказал важную теорему, названную его именем, и включаемую теперь во все учебники по этой теории. В теории комплексных чисел вывел правила возведения в степень и извлечения корня n-й степени из комплексных числе, к-рые широко применяются в тригонометрии и алгебре при решении двучленных ур-ний (ф-лы М.). Иностр. чл. Париж. и Берлин. АН.

НЬЮТОН Исаак (4.1.1643–31.3.1727) – английский физик, механик, астроном и математик, заложивший основы естествознания. Член Лондон. королевского об-ва (1672) и его президент (1703). Род. в Вулсторпе. Окончил Кембридж. ун-т (1665). В 1668 получил степень магистра, в 1669 его учитель *И. Барроу* уступил ему кафедру в Кембридж. ун-те, где Н. работал до 1701. Науч. интересы Н. сформировались в 1661–69. Работая в ун-те, он написал свои важнейшие труды. С 1695 – смотритель, с 1699 – гл. директор Монетного двора в Лондоне. Работая здесь, Н. занимался упорядочением англ. монетного дела и подготовкой к публикации своих работ за предыдущие годы. Значительная часть этих работ погибла во время пожара. Заслуга Н. в том, что, одноврем. с *Г. Лейбницем*, но независимо от него, он создал дифференциальное и интегральное исчисления, к-рые стали могучим средством решения новых задач, возникших в XVII в. перед естествознанием. Концепции Н. и Г. Лейбница были разными. Лейбниц придерживался абстрактной концепции, к-рая стала исходной для развития чистого анализа; Н. же рассматривал математику, или, как тогда говорили, геометрию, только как способ для физических иссл. Эта связь матем. и физических иссл. ярко проявилась в его методе флюксий. Уже в 1665–66 Н. выработал для нужд механики осн. идеи этого метода, исходя преим. из работ *Б. Кавальеры*, *Ж. Роберваля*, *П. Ферма*, *Дж. Валлиса* и своего учителя И. Барроу. В это же время он открыл взаимно обратный характер операций дифференцирования и интегрирования, а также сделал фундаментальные открытия в области бесконечных рядов, в частности индуктивное обобщение т.н. теоремы о биноме Н. на случай любого действительного показателя. Уже в первой работе по анализу ("Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов"), написанной в 1669, а опубл. только в 1711, Н. дал метод вычислений и изучения функций (приближение бесконечными рядами), к-рый имел впоследствии огромное значение для развития анализа. На этой основе Н. почленным интегрированием получил ряды для $y = \ln(1 + x)$ и $y = \arcsin x$ и, применяя обращение рядов, т.е. представляя x через y, нашёл разложение в ряды показательной функции, синуса, косинуса и т.д. В 1670–71 Н. изложил созданные им дифференциальное и интегральное исчисления в соч. "Метод флюксий" (опубл. в 1736), чётко сформулировав в механических и матем. выражениях обе взаимно обратные задачи анализа и применив метод флюксий к большому кол-ву геом. задач (на касательные, кривизну, экстремумы, квадратуры, спрямления и др.), а также представив в элементарных функциях ряд интегралов от функций, к-рые содержат кв. корень из кв. трёхчлена. Большое внимание уделено интегрированию обыкновенных дифференциальных ур-ний, решены нек-рые задачи вариационного исчисления. Г.В. Лейбниц на 28 лет раньше Н. опубл. своё открытие анализа бесконечно малых, но Н. на 10 лет раньше его установил наличие двух больших взаимно связанных исчислений, полностью понял их значение для изучения природы и пользовался ими в своих науч. достижениях. Работа Н. "Математические начала натуральной философии", создававшаяся в течение 20 лет и вышедшая через три года после публикации Г. Лейбница, проникнута духом новых исчислений, выявляет всё могущество этих исчислений в изучении природы и умение Н. их применять. Вклад Н. в математику не исчерпывается созданием дифференциального и интегрального исчислений. В алгебре ему принадлежат: метод численного решения алгебр. ур-ний (метод Н.), важные теоремы о симметричных функциях корней алгебр. ур-ний, об отделении корней, о приводимости ур-ний и т.д. Алгебра у Н. имеет геом. форму. Его определение числа не как совокупности единиц, а как отношения длины любого отрезка к отрезку, принятому за единицу, сыграло важную роль в развитии учения о числе. "Математические начала натуральной философии" (1678) Н. содержат развитую теорию конических сечений, необходимую для иссл. движения планет и комет. В "Перечислении кривых третьего порядка" (1704) Н. дал классификацию этих кривых, обобщил понятия диаметра и центра, указал способы построения кривых 2-го и 3-го порядков по разл. условиям. Эта работа сыграла важную роль в развитии аналитической геометрии и частично проективной геометрии. В "Методе разностей" (1711) Н. решил задачу о проведении через $n+1$ данную точку с равноудалёнными или неравноудалёнными абсциссами параболической кривой n-го порядка и предложил интерполяционную ф-лу, названную его именем.

Достижения Н. в механике были подготовлены работами *Г. Галилея*, *Х. Гюйгенса* и др. учёных. В "Математических началах натуральной философии" Н. свёл все известные до него и все найденные им самим сведения о движении и силе в одну дедуктивную систему. Установив неск. осн. законов механики (закон инерции, закон независимого действия сил, закон о равенстве действия и противодействия), Н. вывел из них все др. теоремы механики. Открыв закон всемирного тяготения, Н. назвал ту общую силу, к-рая служит первопричиной таких разнообразных явлений, как падение тел, вращение Луны вокруг Земли и планет вокруг Солнца, движение комет, морские приливы и отливы и др. И в области небесной механики у Н. были предшественники (*Дж. Борелли*, *Р. Гук* и др.), но ему удалось найти самую совершенную формулировку закона всемирного тяготения. Он обосновал справедливость этого закона всеми известными в то время астр. фактами и вычислил на его основе траектории тел, движущихся в разл. условиях в поле тяготения. Н. исследовал движение тел в среде, оказывающей сопротивление. Сделал фундаментальные открытия в оптике, в частности выяснил причину рассеивания света; показал, что белый свет раскладывается на цвета радуги вследствие разл. преломления лучей разных цветов при прохождении через призму, и заложил основы правильной теории цветов. Эти иссл. привели Н. к изобретению первого зеркального телескопа (1688). Н. исследовал также интерференцию света. Несмотря на то, что его опыты подтверждали волновую теорию света, Н. решительно выступал против неё и отстаивал гипотезу вытекания, согласно к-рой источник света выбрасывает мельчайшие материальные частицы – корпускулы. Эту теорию нек-рое время полностью отрицали, но теперь она снова возрождается (в изменённой форме). В честь Н. названа единица силы в Междунар. системе единиц – ньютон. Иностр. чл. Париж. АН (1699). Именем Н. названы кратер на видимой стороне Луны и кратер на Марсе.

РИМАН Георг Фридрих Бернхард (17.9.1826–20.7.1866) – немецкий математик. Род. в Брезеленце (Нижняя Саксония). Ещё в гимназии увлекался работами выдающихся математиков *Л. Эйлера* и *А. Лежандра*. Учился в Гёттинген. ун-те (1846–47). В 1847–49 учился в Берлин. ун-те, где слушал лекции *П. Дирихле*, *К. Якоби*, *Я. Штейнера*. Подружился с Дирихле, что повлияло на формирование его науч. интересов. В 1849 возвратился в Гёттинген и сблизился с *Г. Вебером*. Под его влиянием Р. начал интересоваться вопросами матем. изучения природы, однако пошёл своим путём и создал собственное представление о мире. По Р., пространство наполнено непрерывной материей, на к-рую влияют сила тяжести, свет и электричество. Он везде вводил понятие о распространении этих процессов во времени, искал связи между притяжением и светом. В 1851 Р. защитил д-рскую диссертацию на тему "Основы общей теории функций одной комплексной переменной", к-рая положила начало геом. направлению в развитии теории аналитических функций и широкому применению идей и методов матем. физики, а также новой геом. науке – топологии. В 1854 представил в Гёттингенский ун-т две работы: "О возможности представления функций с помощью тригонометрических рядов", оказавшую влияние на развитие теории множеств и теории функций действительной переменной, и "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" – и был зачислен приват-доцентом. Обе эти работы опубл. *Ю.В. Дедекинд* после смерти Р. (1868). В работе "О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии" Р. впервые после открытия *Н.И. Лобачевского* развил матем. учение о пространстве, ввёл понятие дифференциала расстояния между элементами многообразия и развил учение о кривизне. Введение обобщённых римановых пространств, частными случаями к-рых являются пространства *Евклида* и Лобачевского, и т.н. геометрии Р. открыло новые пути в развитии геометрии. Осенью 1857 Р. стал экстраординарным проф. Гёттинген. ун-та, в 1859, после смерти П. Дирихле, – ординарным проф.

Науч. интересы Р. были очень широкими. Он создал и успешно применил для решения разл. физических задач новые методы интегрирования дифференциальных ур-ний с частными производными. Высказанная им гипотеза о распределении нулей дзета-функции (гипотеза Р.) имела важно значение для развития аналитической теории чисел. В мемуаре "О количестве простых чисел, не превышающих данной величины" (1859) Р. впервые распространил на комплексную область дзета-функцию, установил ряд её свойств, показал тесную связь между распределением простых чисел и нек-рыми из этих свойств, что дало возможность *Ж. Адамару* и *Ла Валле Пуссену* в 1896 строго обосновать асимптотический закон распределения простых чисел. Этот мемуар сыграл важную роль в развитии теории функций комплексной переменной и аналитической теории чисел. Р. ввёл строгое понятие определённого интеграла и доказал его существование. Работы Р. оказали большое влияние па развитие математики в XIX и XX вв.

Особое значение имеют глубокая разработка теории конформных отображений и введение т.н. римановых поверхностей, важных при иссл. многозначных аналитических функций. Конформные отображения в связи с вопросом о черчении карт рассматривали *Л. Эйлер*, *Ж. Лагранж*, *К. Гаусс* задолго до Р. Но Р. первый чётко связал свойство функции $\omega = f(z)$ комплексной переменной z производить конформное преобразование области определения с наличием у этой функции определённой производной. Он также доказал осн. в теории конформных преобразований теорему о возможности конформного отображения круга в произвольную односвязную область. Такими преобразованиями часто пользуются в разл. применениях теории функций комплексной переменной, например в созданной *Н.Е. Жуковским* теории крыла самолета. Позже теория функций комплексной переменной была значительно развита на основании результатов Р. Геом. идеи Р. нашли применение в физике (теория относительности). Большое значение имеет и аппарат теории квадратичных дифференциальных форм, разработанный Р. (1861) и его учениками, к-рый используется в теории относительности.

Полное изд. трудов Р. вышло в 1876. Были собраны записи его лекций по матем. физике, теории тяготения, электричества и магнетизма, теории эллиптических функций. Эти записи опубл. ученики Р. в 1902 как дополнение к полному изданию его работ. Опубл. также три тома лекций Р.: "Дифференциальные уравнения с частными производными математической физики" (1869), "Тяготение, электричество, магнетизм" (1875), "Эллиптические функции" (1899). На рус. яз. изданы "Сочинения Римана" (М., Л., Гостехиздат, 1948. – 543 с). Именем Р. названы разл. матем. теоремы и предложения, в частности теорема об алгебр. функциях (теорема *Р.–Роха*). Известны матрица Р. в теории абелевых функций, метод Р. решения гиперболических ур-ний, функции Р. и др. Его именем назван кратер краевой зоны Луны.

СОХОЦКИЙ Юлиан Васильевич (5.2.1842–14.12.1927) – русский математик. Род. в Варшаве. Окончил Петерб. ун-т (1866). С 1868 работал в этом ун-те и в Ин-те гражданских инженеров (д-р математики, проф. с 1873). Осн. труды по теории функций комплексной переменной. В магистерской диссертации С. впервые сформулировал и доказал теорему о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки (теорема С.), а в д-рской диссертации исследовал предельные значения интегралов типа интеграла Коши. Эти результаты широко применяются в механике. Написал также работы по высшей алгебре и теории чисел. Известна ф-ла *С.–Племеля*. С.– автор оригинальных курсов: "Высшая алгебра" (1882) и "Теория чисел" (1888). В 90-х годах был председателем Петерб. матем. об-ва.

ТЕЙЛОР Брук (18.8.1685–29.12.1731) – английский математик и философ. Чл. Лондон. королевского об-ва (1712) и его учёный секретарь (с 1724). Род. в Эдмонтоне. Окончил Кембридж. ун-т (1709). Осн. труды по матем. анализу, механике и баллистике. Т. исследовал свойства функций. В 1712 нашел, в 1715 опубл. общую ф-лу разложения функций в степенной ряд, к-рая носит теперь его имя. Т. положил начало матем. изучению задачи о колебании струны, разрабатывал теорию конечных разностей. Именем Т. назван кратер на видимой стороне Луны.

ЭЙЛЕР Леонард (15.4.1707–18.9.1783) – математик, физик, механик и астроном. Род. в Швейцарии. Окончил Базельскую гимназию. Ещё обучаясь в гимназии, слушал в ун-те лекции *И. Бернулли* и под его руководством изучил в подлинниках труды знаменитых в то время математиков. В 1723 Э. получил степень магистра наук. В 1726 по приглашению Петерб. АН приехал в Россию и был назначен адъюнктом по математике. В 1730 занял кафедру физики, с 1733 стал академиком математики. В 1741 Э. принял предложение короля Фридриха II и переехал в Берлин. Но связи с Петерб. АН он не прерывает. В 1746 вышли три тома ст. Э., посвящённых артиллерии. Большое внимание уделял Э. вопросам навигации. В 1749 Петерб. АН издала его 2-томный труд, в к-ром впервые вопросы навигации изложены в матем. форме. Э. дополнил её серией мемуаров, один из к-рых о бортовой и килевой качке судов получил премию Париж. АН (1759). В 1773 Э. опубл. новую теорию кораблестроения и маневрирования судов. Этот труд был издан во Франции, Англии и Италии.

Многочисленные открытия Э. по матем. анализу, сделанные им за 30 лет и опубл. в разл. академических изданиях, были позже объединены в одном произв. "Введение в анализ бесконечно малых" (Лозанна, 1748). 1-й т. посвящён свойствам рациональных и трансцендентных функций; во 2-м т. исследовались кривые 2-го, 3-го и 4-го порядков и поверхности 2-го порядка. Здесь впервые введены углы Э., играющие в математике и механике важную роль. Вслед за "Введением" вышел трактат в 4-х т.; 1-й т. – о дифференциальном исчислении – был издан в Берлине (1755), остальные т., посвящённые интегральному исчислению, – в Петерб. АН (1768-70). В последнем т. рассматривалось вариационное исчисление, созданное Э. и *Ж. Лагранжем*. Одноврем. Э. исследовал вопрос о прохождении света через разл. среды и связанный с этим эффект хроматизма. В 1747 Э. предложил сложный объектив.

В 1776 Э. вернулся в Россию. Работу "Элементы алгебры", вышедшую в 1768, Э. вынужден был диктовать, т. к. к этому времени он ослеп. Работа вышла на рус, нем., франц. языках. Вместе с акад. *В. Крафтом* Э. собрал в один огромный трактат всё, что он написал за 30 лет по диоптрике. В 1769–77 вышли 3 больших т., в к-рых изложены правила наилучшего расчёта рефракторов, рефлекторов и микроскопов, решаются такие вопросы, как вычисление наибольшей яркости изображения, наибольшего поля зрения, наименьшей длины астр. труб, наибольшего увеличения и т.п. В это же время печатались 3 тома писем Э. к нем. принцессе, 3 тома "Интегрального исчисления", 2 тома "Элементов алгебры", мемуары: "Вычисление Кометы 1769", "Вычисление затмения Солнца", "Новая теория Луны", "Навигация" и др.

В 1775 Париж. АН в обход статута и без согласия франц. правительства определила Э. своим 9-м (должно быть только 8) "присоединённым членом". Несмотря на слепоту, науч. продуктивность Э. всё возрастала. Почти половину своих трудов Э. создал в последнее десятилетие жизни. Занимался гидродинамикой, теорией объективов, теорией вероятностей, теорией чисел и др. вопросами естествознания. Впервые ввёл понятие функции комплексной переменной, нашёл неожиданную связь между тригонометрическими и показательными функциями. Тригонометрию дал в совр. виде. Вариационное исчисление в ряде трудов Э. приняло вид общего метода. Э. положил начало аналитическому методу в теории чисел. Всего по теории чисел написал более 140 работ. Был одним из творцов совр. дифференциальной геометрии. Привёл доказательство соотношения между числом вершин, рёбер и граней многогранника: сумма числа вершин и граней равна числу рёбер, увеличенному на 2. В алгебр. топологии важную роль играют эйлерова характеристика и эйлеров класс. Почти во всех областях математики и её приложений встречается имя Э.: теоремы Э., тождества Э., эйлеровы постоянные, углы, функции, интегралы, формулы, ур-ния, подстановки и др.

За неск. дней до смерти Э. занимался расчётом полёта аэростата, к-рый казался чудом в ту эпоху, и почти закончил весьма трудную интеграцию, связанную с этим вычислением. Э. принадлежит более 865 иссл. по самым разнообразным и труднейшим вопросам. Оказал большое и плодотворное влияние на развитие матем. просвещения в России XVIII в. Петерб. матем. школа, в к-рую входили академики *С.К. Котельников*, *С.Я. Румовский*, *Н.И. Фусс*, *М.Е. Головин* и др. рус. математики, под руководством Э. вела огромную просветительную работу, создала обширную и замечательную для своего времени учебную литературу, выполнила ряд интересных науч. иссл. в области математики. Чл. Берлин. АН, чл. Лондон. королевского об-ва и мн. др. академий и науч. об-в. Именем Л. Эйлера назван кратер на видимой стороне Луны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основная литература

1.1. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – 5-е изд., испр. – М. : Наука, 1987. – 688 с.

1.2. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич. – 4-е изд., испр. и дополн. – М. : Наука, 1978. – 416 с.

1.3. Маркушевич, А.И. Введение в теорию аналитических функций / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич. – М. : Просвещение, 1977. – 320 с.

1.4. Морозова, В.Д. Теория функций комплексного переменного : учеб. для вузов / В.Д. Морозова. – 2-е изд., стереотип. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 520 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. X).

1.5. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного / Е.С. Половинкин. – М. : Физматкнига, 2003. – 208 с.

2. Вспомогательная литература

2.1. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу : учеб. для вузов / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004. – 640 с. – (Высшее образование: Современный учебник).

2.2. Власова, Е.А. Ряды : учеб. для вузов / Е.А. Власова. – 2-е изд., стереотип. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 612 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. IX).

2.3. Гаврилов, В.Р. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учеб. для вузов / В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова. – 2-е изд., стереотип. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. VII).

2.4. Герасимович, А.И. Математический анализ : справ. пособие. – В 2-х ч. / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн. : Выш. шк., 1989. – Ч. 1. – 287 с.

2.5. Герасимович, А.И. Математический анализ : справ. пособие. – В 2-х ч. / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн. : Выш. шк., 1990. – Ч. 2. – 272 с.

2.6. Зорич, В.А. Математический анализ. – В 2-х ч. / В.А. Зорич. – 5-е изд. – М. : МЦНМО, 2007. – Ч. I. – 664 с.

2.7. Иванова, Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного : учеб. для вузов / Е.Е. Иванова. – 2-е изд. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 408 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. II).

2.8. Ильин, В.А. Основы математического анализа : учеб. для вузов. – В 2-х ч. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стереотип. – М. : Физматлит, 2002. – Ч. I. – 648 с. – (Курс высшей математики и математической физики: Вып. 1).

2.9. Канатников, А.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных : учеб. для вузов / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко, В.Н. Четвериков. – 2-е изд., стереотип. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 456 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. V).

2.10. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – 11-е изд., стереотип. – М. : Наука, 1975. – 432 с.

2.11. Морозова, В.Д. Введение в анализ : учеб. для вузов / В.Д. Морозова. – 3-е изд., стереотип. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 408 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. I).

2.12. Размыслович, Г.П. Геометрия и алгебра : учеб. пособие для специальности 0647 "Прикладная математика" / Г.П. Размыслович, М.М. Феденя, В.М. Ширяев. – Мн. : "Университетское", 1987. – 352 с.

2.13. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – 7-е изд., стереотип. – М. : Физматлит, 1970. – Т. I. – 608 с.

2.14. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – 7-е изд., стереотип. – М. : Физматлит, 1970. – Т. II. – 800 с.

3. Дополнительная литература

3.1. Александров, И.А. Аналитические функции комплексного переменного : учеб. пособие для физ.-мат. спец. вузов / И.А. Александров, В.В. Соболев. – М. : Высш. шк., 1984. – 192 с.

3.2. Араманович, И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1965. – 392 с. – (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов).

3.3. Бицадзе, А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного : учеб. для вузов / А.В. Бицадзе. – 3-е изд., доп. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

3.4. Лунц, Г.Л. Функции комплексного переменного : учеб. для вузов / Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц . – 2-е изд., стереотип. – СПб. : Лань, 2002. – 304 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

3.5. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учеб. для вузов / И.И. Привалов. – М. : Высш. шк., 1999. – 432 с.

3.6. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной : учебник / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – 6-е изд., стереотип. – М. : Физматлит, 2001. – 336 с. – (Курс высш. математики и мат. физики: Вып. 5).

3.7. Стоилов, С. Теория функций комплексного переменного / С. Стоилов. – В 2-х т. – М. : Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 364 с.

3.8. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ : учеб. для ун-тов – В 2-х т. / Б.В. Шабат. – СПб. : Лань, 2004. – Ч. 1. – 336 с. – (Классич. университ. учебник: Спец. литература).

3.9. Бородин, А.И. Выдающиеся математики : биогр. слов.- справ. / А.И. Бородин, А.С. Бугай. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев : Рад. шк., 1987. – 656 с.

4. Задачники

4.1. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев, О.В. Зимина, А.И. Кириллов, И.М. Петрушко, Т.А. Сальникова. – 2-е изд., стереотип. – М. : Физматлит, 2003. – 400 с.

4.2. Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – 4-е изд., перераб. – М. : Физматлит, 2002. – 312 с.

4.3. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 1981. – 304 с.

4.4. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие для вузов / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – 2-е изд., стереотип. – М. : Высш. шк., 2007. – 448 с.

4.5. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчёты : учеб. пособие / В.Ф. Чудесенко. – 3-е изд., стереотип. – СПб. : "Лань", 2005. – 128 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

4.6. Шабунин, М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / М.И. Шабунин, Е.С. Половинкин, М.И. Карлов. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 362 с. – (Технический университет).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Алгебраическая форма записи комплексного числа 10
Аргумент комплексного числа 13
Арксинус комплексного числа 81

Б

Бесконечно большая величина 54
Бесконечно удалённая окружность комплексной плоскости 30

В

Верхний предел интегрирования 131
Внешность замкнутого круга 18
– замкнутой простой кривой 89
– множества 87
– открытого круга 18
Внешняя граница многосвязной области 90
– точка множества 87
Внутренний аргумент (независимая переменная) сложной функции 48
Внутренность замкнутой простой кривой 89
Внутренняя граница многосвязной области 90
– точка множества 87
Вычет функции 244

Г

Главная ветвь (главное значение) логарифмической функции 77
– – (– –) общей показательной функции 79
– часть лорановского разложения (ряда Лорана) 211
– – ряда Лорана (лорановского разложения) 211
Главное значение аргумента комплексного числа 13
– – логарифма комплексного числа 75
– – (главная ветвь) логарифмической функции 77
Граница множества 87
Граничная точка множества 87

Д

Двусторонний степенной ряд 203
Действительная ось 12
Действительная часть комплексного числа 10
– – функции 48
Дифференциал функции в точке 93
Достаточный признак аналитичности функции на открытом множестве 107
– – дифференцируемости вещественной функции двух вещественных переменных 100
– – дифференцируемости функции на открытом множестве 100
– – равномерной сходимости функционального ряда (признак Вейерштрасса) 168
– – расходимости ряда 39
– – сходимости ряда 39

З

Замкнутый круг 18

И

Изолированная особая точка функции 108
Интеграл контурный 127
– Коши 143
– типа Коши 149
– функции комплексного переменного 117
Интегральная сумма функции 117
– формула Коши 143
Интегральная теорема Коши для многосвязной области (о составном контуре) 138
– – – – односвязной области 127
– – – – о составом контуре (для многосвязной области) 138
Интегральная формула Коши 143

К

Кольцо сходимости двустороннего степенного ряда 204
– – ряда Лорана 211
Комплексная плоскость 12
Комплексно сопряжённое число 11
Комплексное число 7
Композиция (суперпозиция) функций 48
Конечная точка (конец) кривой 85
Контур 85
Контур замкнутый простой 86
– интегрирования 117
– отрицательно ориентированный замкнутый простой 87
– положительно ориентированный замкнутый простой 87
– составной 91
Коэффициенты степенного ряда 173
Кратная точка (точка самопересечения) кривой 85
Кратность (порядок) нуля функции 227
– (–) полюса функции 226
Кривая (линия, контур, дуга) гладкая 114
– жорданова (простая) 86
– замкнутая простая 86
– кусочно-гладкая 115
– непрерывная 84
– ориентированная 85
– отрицательно ориентированная замкнутая простая 87
– положительно ориентированная замкнутая простая 87
– простая (жорданова) 86
Критерий абсолютной сходимости ряда 42
Круг сходимости степенного ряда 176

Л

Линейные операции над рядами 38
Логарифм комплексного числа 75
Логарифмическая производная функции 255
Логарифмический вычет функции 258
Лорановское разложение функции (разложение функции в ряд Лорана) 211

М

Мажоранта (мажорантный ряд) 167
Мажорируемый функциональный ряд 167
Мнимая единица 9
– ось 12
Мнимая часть комплексного числа 10
– – функции 48
Множество внутренних точек области сходимости ряда 203
– замкнутое 88
– значений функции 45
– ограниченное 88
– открытое 87
Множество связное 88
Модуль комплексного числа 12

Н

Начальная точка (начало) кривой 85
Необходимое условие аналитичности функции в точке 106
– – дифференцируемости функции в точке 94
Необходимый признак существования конечного предела функции в точке 52
– – сходимости последовательности 26
– – – ряда 39
Неравенства Коши 195
Несобственное комплексное число 31
Нечётность тригонометрических функций $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ 65, 75
Нижний предел интегрирования 131
Нуль функции 73
– – кратности (порядка) m 227

О

Область 88
– абсолютной сходимости функционального ряда 166
– двусвязная 91
– значений функции 45
– многосвязная 90
– однолистности многолистной функции 71
– односвязная 90
– определения функции 45
– сходимости функционального ряда 164
Области однолистности показательной функции 71
Обобщённая интегральная формула Коши 155
Образ множества 45
– точки 45
Окрестность точки 22
– несобственного комплексного числа 33
Окружность 18
Ориентация кривой 85
Основная теорема алгебры комплексных чисел 196
– – о вычетах 252
– – о непрерывных функциях 62
– – о пределах функций 58
Основная теорема о производных функций 101
– – об аналитических функциях 107
Основное свойство показательной функции 66

Основной период показательной функции 71
– – тригонометрических функций 72
Особая точка функции 108
Остаток функционального ряда 165
Открытый круг 18
Отображение множества 45
Отрицательный обход замкнутой простой кривой 87

П

Параметр кривой 84
Параметрическое уравнение кривой 84
Первообразная функции 131
Периодичность показательной функции 70
– тригонометрических функций 72
Показательная форма записи комплексного числа 66
Поле комплексных чисел 9
Полный прообраз точки 46
Положительный обход замкнутой простой кривой 87
Полюс 218
– порядка (кратности) m 226
– простой 226
Порядок (кратность) полюса 226
Последовательность бесконечно большая 31
– бесконечно малая 23
– неограниченная 25
– ограниченная 25
– расходящаяся 23
– сходящаяся 23
– числовая 21
Поточечная сходимость функционального ряда 166
Почленное дифференцирование степенного ряда 186
– – функционального ряда 172
Почленное интегрирование степенного ряда 185
– – функционального ряда 169
Почленный переход к пределу в равномерно сходящемся ряде 168
Правило дифференцирования обратной функции 104
– – сложной функции 103
Правильная точка функции 108
– часть лорановского разложения (ряда Лорана) 211
Правильная часть ряда Лорана (лорановского разложения) 211
Предел функции 51
– числовой последовательности 22
Пределы интегрирования 131
Предельная точка множества 49
Признак аналитичности функции в области 112
– – – в точке 106
– – – на открытом множестве 107
Признак Вейерштрасса (достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда) 168
– дифференцируемости функции в точке 95
– непрерывности функции в точке 61
– существования предела функции в точке 55
– сходимости последовательности 26
– – числового ряда 36
Принцип аргумента 263
– максимума модуля аналитической функции 159
Приращение независимого переменного 60
– функции 60
Произведение комплексных чисел 8
– ряда на число 37
– рядов 39
– – в форме Коши 39
Производная функции 92
– – в точке 92
– – – – бесконечная 92
Производные высших порядков аналитической функции 152
Промежуточный аргумент (промежуточное переменное) сложной функции 48
Прообраз точки 46

Путь (контур) интегрирования 117

Р

Равенство комплексных чисел 8
Равномерная сходимость функционального ряда 166
Радиус сходимости степенного ряда 176
Разложение функции в ряд Лорана (лорановское разложение функции) 211
– – в ряд Тейлора 192
Разность комплексных чисел 10
– рядов 37
Расширенное множество комплексных чисел 31
Ряд абсолютно сходящийся 41
– Дирихле (обобщённый гармонический) 41
– Лорана 211
– неабсолютно сходящийся (условно сходящийся) 41
– обобщённый гармонический (Дирихле) 41
– расходящийся 36
– сходящийся 35
– Тейлора 192
– условно сходящийся (неабсолютно сходящийся) 41
– функциональный 162
– числовой 34

С

Свойство аддитивности интеграла 124
– ассоциативности (сочетательности) операции сложения 8
– – (–) – умножения 8
– коммутативности (переместительности) операции сложения 8
– – (–) – умножения 8
– переместительности абсолютно сходящихся рядов 42
Следствие интегральной формулы Коши 144
– обобщённой интегральной формулы Коши 155
Стандартные ветви логарифмической функции 77
Старший член главной части лорановского разложения 225
Степенной ряд 172
Стереографическая проекция 34
Сумма комплексных чисел 8
– рядов 37
– функционального ряда 165
– числового ряда 35
Суперпозиция (композиция) функций 48
Существенно особая точка 218
Существование единичного элемента 8
– нулевого элемента 8
– обратного элемента 8
– противоположного элемента 8
Сфера Римана (сфера комплексных чисел) 34
Сферическое изображение комплексного числа 33

Т

Теорема Абеля 173
– Вейерштрасса 169
Теорема Лиувилля 195
– о единственности предела последовательности 25
– – – – функции 51
– о логарифмическом вычете 258
– о непрерывности сложной функции 62
– – – суммы степенного ряда 184
– – – – функционального ряда 168
– о почленном дифференцировании степенного ряда 187
– о почленном интегрировании степенного ряда 185
– – – – функционального ряда 169
– о пределе сложной функции 60
– о производной интеграла с переменным верхним пределом интегрирования 131

– о равномерной сходимости степенного ряда 183
– об аналитичности суммы степенного ряда 186
– Сохоцкого 234
Точка абсолютной сходимости двустороннего степенного ряда 203
– – – функционального ряда 165
Точка самопересечения (кратная точка) кривой 85
– сходимости двустороннего степенного ряда 203
– – функционального ряда 164
Тригонометрическая форма записи комплексного числа 14

У

Условия Коши-Римана (Даламбера-Эйлера) 99
Уравнение Лапласа 111
Устранимая особая точка 218

Ф

Формула для вычисления вычета функции относительно простого полюса 246
– – – – – – кратного полюса 249
– интегрирования по частям 135
– Муавра 18
– Ньютона-Лейбница 131
– Эйлера 65
Функция аналитическая (голоморфная, регулярная) в точке 105
– – (–,–) на открытом множестве 106
Функция взаимно однозначная (однолистная) 47
– гармоническая 111
– дифференцируемая в точке 93, 94
Функция дифференцируемая на множестве 94
Функция дробно-линейная 84
– дробно-рациональная 83
– интегрируемая вдоль кривой (по кривой) 117
– комплексного переменного 47
– логарифмическая 76
– мероморфная 240
– многозначная 45
– многолистная 47
– непрерывная в точке 61
– – на множестве 61
Функция обратная 46
– общая показательная 79
– общая степенная 80
– однозначная 45
– однолистная (взаимно однозначная) 47
– показательная 64
– сложная 48
– целая 108
– целая рациональная 83
– целая степенная 80
– целая трансцендентная 240
Функции гиперболические 69
– обратные тригонометрические 80 – 82
– основные элементарные 82
– сопряжённые гармонические 111
– тригонометрические 64, 73
– элементарные 83

Ч

Частичная сумма функционального ряда 164
– – числового ряда 35
Частное комплексных чисел 11
Чётность тригонометрической функции $\cos z$ 65
Чисто мнимые числа 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ………………………………………………………………. 3
ОБОЗНАЧЕНИЯ …………………………………………………….…. 4
1. Комплексные числа ………………………………………………. 7
2. Числовые последовательности с комплексными членами ..…… 20
3. Расширенная комплексная плоскость ………………………….. 29
4. Числовые ряды с комплексными членами ……………………. 34
5. Функции комплексного переменного, предел, непрерывность .. 44
6. Основные элементарные функции комплексного переменного.. 63
7. Некоторые множества точек на комплексной плоскости ……... 84
8. Производная функции комплексного переменного …..……….. 91
9. Аналитические функции …..…………………………………... 105
10. Интеграл функции комплексного переменного ... …………….. 114
11. Интегральная теорема Коши ……………..……………………… 127
12. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Производные высших порядков аналитической функции. Теорема Морера ………………………………..………………. 140
13. Принцип максимума модуля аналитической функции, следствия из него ……………………….……………………… 158
14. Функциональные ряды с комплексными членами ……………... 163
15. Ряд Тейлора …………………………………………………….. 187
16. Ряд Лорана ……………………………………………………… 200
17. Классификация изолированных особых точек функции ……..... 217
18. Вычеты ……………………………………………………….... 244
ЗАКЛЮЧЕНИЕ …………………………..…………..................... 264
ПРИЛОЖЕНИЕ. Биографический справочник …………………….. 265
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ……………………………..…………...... 283
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ……………………………………….. 286