Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

В.И. Фомин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Утверждено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов 2 курса инженерных специальностей вузов

Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2010

УДК 517.91(075.8)
ББК В161.6я73
Ф762

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук,
профессор ГОУ ВПО ТГУ им. Г.Р. Державина
Г.И. Малашонок

Доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
«Распределённые вычислительные системы» ГОУ ВПО ТГТУ
С.М. Дзюба

Фомин В.И.

Ф762 Дифференциальные уравнения : учебное пособие / В.И. Фомин. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 156 с. – 150 экз.
ISBN 978-5-8265-0950-0

Изложен теоретический материал по дисциплине «Дифференциальные уравнения», предусмотренный Государственным образовательным стандартом для специальности 090105. Теоретические положения иллюстрируются конкретными примерами и рисунками.

Предназначено для студентов второго курса инженерных специальностей вузов.

УДК 517.91(075.8)
ББК В161.6я73

ISBN 978-5-8265-0950-0

Учебное издание

Фомин Василий Ильич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию М.С. Анурьева

Подписано в печать 21.10.2010
Формат 60×84 /16. 9,07 усл. печ. л. Тираж 150 экз. Заказ № 511.

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

В.И. ФОМИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тамбов
♦Издательство ГОУ ВПО ТГТУ♦
2010

ВВЕДЕНИЕ

В данном учебном пособии изложен теоретический материал по дисциплине "Дифференциальные уравнения", предусмотренный Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования для студентов второго курса инженерных специальностей вузов.

В лекциях 1, 2 излагаются основные понятия теории дифференциальных уравнений первого порядка, рассматриваются основные типы таких уравнений и методы их решения.

В лекции 3 изучаются дифференциальные уравнения высших порядков, в частности, указываются два вида таких уравнений, допускающих понижение порядка.

В лекциях 4 – 8 излагаются основы теории линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

В лекции 9 изучается нормальная система дифференциальных уравнений, в частности, излагается метод исключения неизвестных.

В лекциях 10, 11 рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений, в частности, находится структура общего решения однородной и неоднородной систем.

В лекции 12 изучается однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, для которой находится фундаментальная система решений.

В лекции 13 излагаются некоторые понятия и факты из теории устойчивости нормальных систем дифференциальных уравнений.

Учебное пособие снабжено необходимым справочным материалом: списком обозначений, биографическим справочником и предметным указателем.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

▶ и ◀	– начало и конец доказательства
ПП	– предположение противного ("предположим противное")
$\overline{\text{ПП}}$	– отрицание предположения противного ("предположение противного неверно")
$\Rightarrow$	– знак логического следования ("следует", "вытекает")
$\Leftrightarrow$	– знак равносильности (эквивалентности) ("тогда и только тогда")
$\forall$	– квантор общности ("для любого", "для каждого", "для всякого")
$\exists$	– квантор существования ("существует", "найдётся")
$\in$	– знак принадлежности ("принадлежит")
$\overline{\in}$ или $\notin$	– знак непринадлежности ("не принадлежит")
$\mid$ (или :)	– "такой (такая, такое), что"
$\varnothing$	– пустое множество
$\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ или $\{z_i\}_{i=1}^n$	– конечное множество, состоящее из элементов z_1, z_2, ..., z_n
$\{z \mid P(z)\}$	– множество элементов z, удовлетворяющих условию $P(z)$
$A \subset B$	– множество A включено во множество B и $A \neq B$
$A \subseteq B$	– множество A включено во множество B (возможно, что $A = B$)
$\mathbb{N}$	– множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	– множество целых чисел
$\mathbb{R}$	– множество вещественных (действительных) чисел
R^n	– n-мерное вещественное линейное пространство
C	– поле комплексных чисел (комплексная плоскость)
i	– мнимая единица
$\operatorname{Re} z$	– действительная часть комплексного числа z
$\operatorname{Im} z$	– мнимая часть комплексного числа z
$\bar{z}$	– комплексно сопряжённое числу z
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$	– n-мерный вектор
$\lVert x \rVert$	– евклидова норма вектора x
$x^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$	– транспонированный вектор (n-мерный вектор-столбец)
$\Theta = (0, 0, \dots, 0)$	– нулевой n-мерный вектор
$\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$	– квадратная матрица порядка n
$\det \mathrm{A}$	– определитель матрицы A
$\mathrm{W}(x)$	– определитель Вронского (вронскиан)
$\mathrm{Y}(x)$	– фундаментальная матрица
ЛНДУ	– линейное неоднородное дифференциальное уравнение
ЛОДУ	– линейное однородное дифференциальное уравнение
ФСР	– фундаментальная система решений

Лекция 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям: задача по определению высоты места над уровнем моря по давлению воздуха на этом месте, задача по определению формы отражателя; дифференциальное уравнение первого порядка, решение дифференциального уравнения, интегральная кривая; задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши; условие Липшица; полные решения, максимальный интервал; общее решение, общий интеграл; частное решение, частный интеграл.

Исследование различных физических задач приводит к уравнениям, неизвестными в которых являются функции одной переменной и которые содержат производные неизвестных функций. Такие уравнения называются *обыкновенными дифференциальными*, при этом порядок старшей производной неизвестной функции, входящей в данное уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.

При построении математических моделей физических явлений приходится рассматривать наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями также уравнения, неизвестными в которых являются функции нескольких переменных и которые содержат частные производные неизвестных функций. Такие уравнения *называются уравнениями с частными производными* (или *уравнениями математической физики*).

Ниже рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения. В целях краткости будем называть их *дифференциальными уравнениями*.

Выясним, например, зависимость между высотой h (м) места над уровнем моря и давлением p (кг/м^2) на этом месте.

Рассмотрим столб воздуха в виде прямой призмы, опирающейся на площадку в 1 м^2 на уровне моря (рис. 1.1).

Пусть $p = p(h)$ – функция, характеризующая зависимость p от h. Возьмём произвольное фиксированное $h > 0$. Рассмотрим сечение σ_h столба воздуха плоскостью, параллельной плоскости основания и отстоящей от неё на расстояние h. Придадим h произвольное достаточно малое приращение Δh и рассмотрим сечение $\sigma_{h+\Delta h}$ столба воздуха плоскостью, параллельной плоскости основания и отстоящей от неё на расстоянии $h + \Delta h$. Пусть Ω – слой столба воздуха, заключённый между площадками σ_h и $\sigma_{h+\Delta h}$.

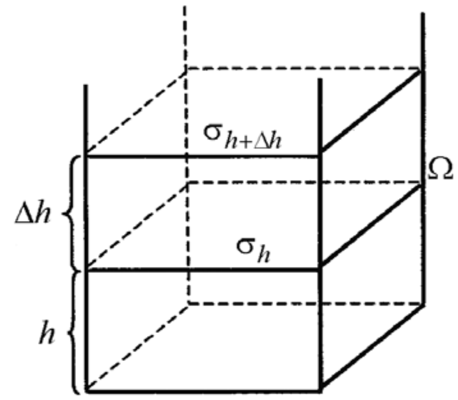

Рис. 1.1

Увеличение высоты h на величину Δh приводит к падению давления на величину $p(h) - p(h + \Delta h)$. С другой стороны,

$$p(h) - p(h + \Delta h) = Q, \tag{1.1}$$

где Q – вес слоя воздуха Ω.

Пусть $\mu = \mu(p)$ – вес (в кг) 1 м^3 воздуха под давлением p. В силу малости величины Δh будем считать, что давление во всех точках слоя Ω постоянно и равно $p(h)$, т.е. равно давлению в точках нижнего основания слоя. Тогда $Q = \mu(p)V_\Omega$, где V_Ω – объём слоя Ω. Или $Q = \mu(p)\Delta h$, так как $V_\Omega = 1 \cdot \Delta h = \Delta h$. Из физики известно, что $\mu(p) = kp(h)$, где k – некоторая постоянная величина, определяемая в зависимости от средней температуры воздуха. Тогда $Q = k\, p(h)\, \Delta h$ и соотношение (1.1) принимает вид

$$p(h) - p(h + \Delta h) = k\, p(h)\, \Delta h. \tag{1.2}$$

Разделим обе части (1.2) на $-\Delta h$:

$$\frac{p(h + \Delta h) - p(h)}{\Delta h} = -k\, p(h).$$

Переходя к пределу при $\Delta h \to 0$, имеем

$$p'(h) = -k\, p(h).$$

Получили уравнение, неизвестным в котором является функция $p(h)$ и которое содержит производную неизвестной функции, т.е. получили дифференциальное уравнение первого порядка.

Пусть p_0 – давление воздуха на уровне моря ($h = 0$), т.е. $p(0) = p_0$. В результате получаем задачу вида

$$\begin{cases} p'(h) = -k\ p(h); & (1.3) \\ p(0) = p_0. & (1.4) \end{cases}$$

Уравнение (1.3) имеет простой вид, что позволяет легко найти его решение:

$$\frac{dp}{dh} = -\,kp \ \left|\ \cdot\frac{dh}{p}\right.; \quad \frac{dp}{p} = -kdh\,;$$

$$\int\frac{dp}{p} = -k\int dh + C\,; \quad \ln|\,p\,| = -kh + \ln|\,C\,|\,; \quad \ln\left|\frac{p}{\mathrm{C}}\right| = -kh\,;$$

$$p = Ce^{-kh}\,, \tag{1.5}$$

где C – параметр, $C \in \mathrm{P}$, $C \neq 0$. При каждом конкретном значении C функция (1.5) является решением уравнения (1.3). Выберем значение C так, чтобы выполнялось условие (1.4):

$$Ce^{-k\cdot 0} = p_0 \ \Rightarrow\ C = p_0\,.$$

Подставляя найденное значение $C = p_0$ в (1.5), получаем решение задачи (1.3), (1.4):

$$p = p_0 e^{-kh}\,. \tag{1.6}$$

Из (1.6) находим интересующую нас зависимость h от p :

$$h = \frac{1}{k}\ln\frac{p_0}{p}\,.$$

Рассмотрим следующую задачу: имеется точечный источник света; нужно найти форму отражателя диаметра d и глубины h , при которой отражённые от него лучи параллельны центральной оси отражателя.

Введём декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$, где O – точка, в которой помещён источник света; Ox – центральная ось отражателя. Рассмотрим сечение L поверхности отражателя плоскостью $z = 0$ (рис. 1.2):

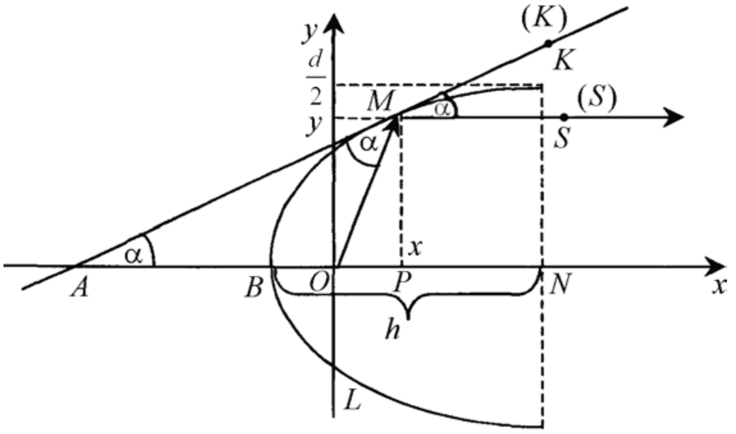

Рис. 1.2

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка сечения L ; (K) – касательная, проведенная к L в точке M ; $A = (K) \cap Ox$, $\alpha = \angle OAM$, $P = np_{Ox}M$, (S) – направление отражённого луча света.

По закону отражения света $\angle OMA = \angle SMK$. Но $\angle SMK = \angle OAM$, следовательно, $\angle OMA = \angle OAM = \alpha$, т.е. ΔOMA равнобедренный:

$$OA = OM\,. \tag{1.7}$$

В силу того, что $OA = AP - OP = \dfrac{MP}{\operatorname{tg}\alpha} - OP = \dfrac{y}{y'} - x$, $OM = \sqrt{OP^2 + MP^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, соотношение (1.7) принимает вид

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{1.8}$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет функция $y = y(x)$, описывающая форму сечения L .

Решим уравнение (1.8). В силу равенства $\dfrac{1}{y'}=x'$ уравнение (1.8) можно записать в виде

$$x'=\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,, \tag{1.9}$$

в котором в качестве независимой переменной выступает y, в качестве неизвестной функции – x. Пусть $x=uy$, где $u=u(y)$ – вспомогательная неизвестная функция. Тогда $x'=u'y+u$ и уравнение (1.9) принимает вид $u'y+u=u+\sqrt{1+u^2}$ или $u'y=\sqrt{1+u^2}$. Далее,

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dy}{y}\,;\qquad \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dy}{y}+C\,;$$

$$\ln\left|\,u+\sqrt{1+u^2}\,\right|=\ln|\,y\,|-\ln|\,C\,|\,;$$

$$u+\sqrt{1+u^2}=\frac{y}{C}\,;\qquad \frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y}{C}\,;$$

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y^2}{C}\,.$$

Перенося в последнем соотношении x в правую часть и возводя обе части в квадрат, получаем

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right). \tag{1.10}$$

Итак, форма сечения L задаётся кривой вида (1.10), т.е. параболой с вершиной в точке $B\left(-\dfrac{C}{2};0\right)$ и осью симметрии Ox.

Для определения значения параметра C воспользуемся тем, что заданы диаметр d и глубина h отражателя. По условию, $y(x_N)=\dfrac{d}{2}$, где x_N – абсцисса точки N. Заметим, что $x_N=h-BO=h-\dfrac{C}{2}$. Следовательно, должно выполняться условие

$$y\left(h-\frac{C}{2}\right)=\frac{d}{2}\,. \tag{1.11}$$

Полагая в (1.10) $x=h-\dfrac{C}{2}$, $y=\dfrac{d}{2}$, получаем $C=\dfrac{d^2}{8h}$. Подставляя это значение C в (1.10), имеем

$$y^2=\frac{d^2}{4h}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right). \tag{1.12}$$

Итак, в силу симметричности отражателя относительно оси Ox, форма отражателя представляет собой поверхность, получаемую при вращении параболы (1.12) вокруг оси Ox, т.е. параболоид вращения, уравнение которого имеет вид

$$y^2+z^2=\frac{d^2}{4h}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right).$$

Рассмотренные примеры показывают, что дифференциальные уравнения являются мощным инструментом решения различных практических задач. Поэтому будущему инженеру необходимо знать основы теории дифференциальных уравнений и методы их решения.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(\,x,\,y,\,y'\,)=0\,, \tag{1.13}$$

где x – независимая переменная, $x\in\Omega$, $\Omega\subseteq \mathrm{P}$ (в качестве Ω рассматривается чаще всего одно из следующих множеств: $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,\,+\infty)$, $(a,\,+\infty)$, $(-\infty\,,b]$, $(-\infty\,,b)$, $(-\infty\,,\,+\infty)$); $y=y(x)$ – неизвестная функция независимой переменной x; $y'=y'(x)$ – производная неизвестной функции; $F(\,\bullet,\bullet,\bullet\,)$ – некоторая заданная функция своих аргументов.

Частным случаем уравнения (1.13) является уравнение вида

$$y'=f(x,y)\,, \tag{1.14}$$

которое называется *уравнением, разрешённым относительно производной.*

Например, уравнения (1.3), (1.8) являются дифференциальными уравнениями первого порядка.

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется непрерывно дифференцируемая на множестве Ω функция $y=\varphi(x)$, при подстановке которой в уравнение получается тождество относительно независимой переменной $x\in\Omega$.

Например, решением уравнения (1.3) является функция (1.6).

Замечание 1.1. В данном определении предполагается, что функция $y=\varphi(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$(x,\varphi(x),\varphi'(x))\in D(F)\,,\quad \forall\, x\in\Omega\,,$$

где $D(F)$ – область определения функции F.

Интегральной кривой дифференциального уравнения называется график решения этого уравнения.

Например, интегральными кривыми уравнения (1.8) являются параболы вида (1.10).

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка (1.14) – это, по определению, задача отыскивания решения данного уравнения, удовлетворяющего условию $y(x_0)=y_0$, где x_0, y_0 – некоторые заданные числа, т.е., задача вида

$$\begin{cases} y'=f(x,y); & (1.15)\\ y(x_0)=y_0. & (1.16)\end{cases}$$

Условие (1.16) называется *начальным условием*, числа x_0, y_0 – *начальными данными*, при этом y_0 называется *начальным значением*.

Например, задача (1.3), (1.4) является задачей Коши. Решить задачу Коши (1.15), (1.16) – это значит, что нужно найти интегральную кривую уравнения (1.15), которая проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$.

Сформулируем достаточное условие существования и единственности решения задачи Коши (1.15), (1.16) [1.1, с. 28].

Теорема 1.1 (*теорема Коши*). Пусть правая часть уравнения (1.15) определена на множестве $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2: |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\right\}$ (где a, b – некоторые положительные числа) и удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x,y)$ непрерывна на D и, следовательно, в силу первой теоремы Вейерштрасса [2.1, с. 496] ограничена на D:

$$\exists\, M>0 \mid |\,f(x,y)|\le M\,,\quad \forall\,(x,y)\in D\,; \qquad (1.17)$$

2) $f(x,y)$ удовлетворяет на D следующему условию:

$$\exists\, L>0 \mid \forall\left(x,y_1\right),\left(x,y_2\right)\in D \Rightarrow \left|\,f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)\right|\le L|y_1-y_2|\,. \quad (1.18)$$

Тогда задача Коши (1.15), (1.16) имеет единственное решение, которое заведомо определено при $x\in[x_0-h,x_0+h]$, где $h=\min\{a,b/M\}$.

Про функцию $f(x,y)$, удовлетворяющую условию (1.18), говорят, что она удовлетворяет на множестве D *условию Липшица* по переменной y.

Множество $D=D\big((x_0,y_0),\ 2a,\ 2b\big)$ из теоремы 1.1 называется прямоугольником с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$ и сторонами $2a$, $2b$.

Замечание 1.2. Отрезок $[x_0-h,x_0+h]$ существования и единственности решения задачи Коши из теоремы 1.1 будет наибольшим, если в качестве константы M в условии (1.17) взять значение

$$M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|\,.$$

Существование такого максимума следует из второй теоремы Вейерштрасса [2.3, с. 496].

Замечание 1.3. Для выполнения условия (1.18) теоремы 1.1 достаточно, чтобы функция $f(x,y)$ имела на множестве D ограниченную частную производную по аргументу y:

$$\exists\, f'_y(x,y),\ \exists\, K>0 \mid \forall(x,y)\in D \Rightarrow \left|\,f'_y(x,y)\right|\le K\,.$$

Действительно, в этом случае для $\forall\ \left(x,y_1\right),\ \left(x,y_2\right)\in D$ получаем в силу теоремы Лагранжа [2.3, с. 263]

$$f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)=f'_y\left(x,y_1+\lambda\left(y_2-y_1\right)\right)\left(y_1-y_2\right),$$

где $\lambda\in(0;1)$. Тогда

$$\left|\,f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)\right|=\left|\,f'_y\left(x,y_1+\lambda\left(y_2-y_1\right)\right)\right|\ |\,y_1-y_2\,|\le K|\,y_1-y_2\,|\,.$$

Замечание 1.4. В силу первой теоремы Вейерштрасса, для ограниченности частной производной $f'_y(x,y)$ на прямоугольнике D до-статочно её непрерывности на D.

Пусть правая часть $f(x,y)$ уравнения (1.15) определена в некоторой области G, т.е. на некотором открытом связном множестве $G\subseteq \mathrm{P}^2$.

Пусть выполняется следующее условие:

3) для каждой точки области G существует прямоугольник с центром в этой точке, расположенный в области G, на котором выполняются условия теоремы 1.1.

Возьмём некоторую точку $M_0(x_0,\, y_0) \in G$. Для неё существует прямоугольник $D_0 = D_0\left(M_0,\, 2a_0,\, 2b_0\right) \subset G$, на котором выполняются условия теоремы 1.1. В силу этой теоремы существует единственное решение $y = \varphi_0(x)$ задачи Коши (1.15), (1.16), определённое на некотором промежутке $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$. Рассмотрим точку $M_1(x_1,\, y_1)$ с координатами $x_1 = x_0 + h_0$, $y_1 = \varphi_0(x_1)$. Для неё существует прямоугольник $D_1 = D_1\left(M_1,\, 2a_1,\, 2b_1\right) \subset G$, на котором выполняются условия теоремы 1.1, в силу которой существует единственное решение $y = \varphi_1(x)$ задачи Коши

$$y' = f(x,y), \quad y(x_1) = y_1, \tag{1.19}$$

определённое на некотором промежутке $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$. Рассмотрим функцию вида

$$y = \psi_1(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [x_0 - h_0, x_1]; \\ \varphi_1(x), & x \in [x_1, x_1 + h_1]. \end{cases}$$

Функция $\psi_1(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[x_0 - h_0, x_1 + h_1]$ как объединение двух непрерывно дифференцируемых функций (в точке "склейки" x_1 это свойство сохраняется, ибо в силу единственности решения задачи Коши (1.19) $\exists [x_1 - \delta, x_1] \mid \ \forall x \in [x_1 - \delta, x_1] \Rightarrow \varphi_0(x) = \varphi_1(x)$). Решение $\psi_1(x)$ задачи Коши (1.15), (1.16) называется *продолжением её решения* $y = \varphi_0(x)$ *вправо*. Рассмотрим точку $M_2(x_2, y_2)$ с координатами $x_2 = x_1 + h_1$, $y_2 = \psi_1(x_2)$. Проводя те же рассуждения, приходим к следующему выводу: существует единственное решение $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_2) = y_2$, определённое на некотором промежутке $[x_2 - h_2, x_2 + h_2]$. Тогда функция

$$y = \psi_2(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in [x_0 - h_0, x_2]; \\ \varphi_2(x), & x \in [x_2, x_2 + h_2] \end{cases}$$

является продолжением решения $y = \psi_1(x)$ задачи Коши (1.15), (1.16) вправо.

Если область G ограничена справа, т.е.

$$\sup_x G = \sup\{\, x \mid (x,y) \in G\} < +\infty,$$

то, повторяя указанный процесс, мы продолжим исходное *локальное решение* $y = \varphi_0(x)$ вправо до некоторой точки $M^* \in \Gamma_G$, где Γ_G – граница области G [1.5, с. 167].

Аналогично строится *продолжение* исходного локального *решения* $y = \varphi_0(x)$ *влево*. Если область G ограничена слева, т.е.

$$\inf_x G = \inf\{\, x \mid (x,y) \in G\} > -\infty,$$

то мы продолжим решение $y = \varphi_0(x)$ влево до некоторой точки $M_* \in \Gamma_G$.

Если область G ограничена справа и слева, то в результате указанных продолжений мы получим единственное решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши (1.15), (1.16), определённое на интервале (α, β), где α и β – абсциссы точек M_* и M^*. Такое решение уже не продолжимо ни вправо, ни влево. Его называют *полным решением*, а соответствующий интервал (α, β) – *максимальным интервалом существования решения* (рис. 1.3). Полное решение дифференциального уравнения называют также *непродолжимым решением* этого уравнения.

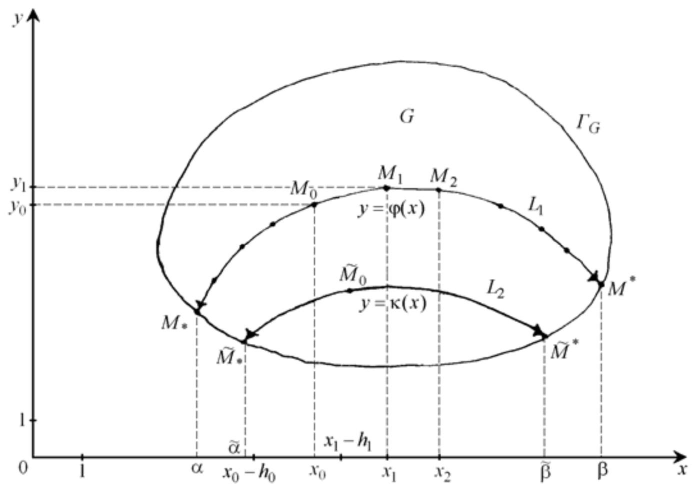

Рис. 1.3

Пример 1.1. Рассмотрим задачу Коши

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y(0) = 0. \tag{1.20}$$

Для неё $f(x,y) = 1/\cos^2 x$. Областью определения функции $f(x,y)$ является множество

$$D(f) = \left\{ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \;\middle|\; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z} \right\}.$$

Однако, учитывая начальное условие $y(0) = 0$, в качестве области G надо взять множество вида

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Полным решением задачи Коши (1.20) является функция $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Заметим, что

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

т.е. соответствующая интегральная кривая имеет левостороннюю и правостороннюю вертикальную асимптоты $\Gamma_1: \ x = -\frac{\pi}{2}$ и $\Gamma_2: \ x = \frac{\pi}{2}$.

Для задачи Коши $y' = 1/\cos^2 x$, $y(\pi) = 0$, полным решением является функция $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Если в качестве независимой переменной x выступает время t, то задача Коши описывает детерминистский (или эволюционный) процесс: если задано начальное состояние $y(t_0) = y_0$ системы, моделируемой дифференциальным уравнением $y' = f(t,y)$, то "будущее" ($t > t_0$) и "прошлое" ($t < t_0$) этой системы полностью предопределены.

Если в качестве начальной точки взять вместо $M_0(x_0, y_0)$ какую-либо другую точку $\widetilde{M}_0(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)$, то получим полное решение $y = \kappa(x)$ задачи Коши $y' = f(x,y)$, $y(\widetilde{x}_0) = \widetilde{y}_0$, определённое на интервале $(\widetilde{\alpha}, \ \widetilde{\beta})$ (см. рис. 1.3).

В силу единственности решения задачи Коши интегральные кривые L_1 и L_2 не имеют общих точек.

Таким образом, при выполнении условия 3) вся область G покрыта непересекающимися между собой интегральными кривыми.

Зафиксируем некоторое

$$x_0 \in (\inf_x G; \sup_x G),$$

такое, что множество $G_0 = \{(x,y) \in G \mid x = x_0\}$ не пусто. В качестве начального значения возьмём любое y_0, такое, что $(x_0, y_0) \in G_0$. Тогда задача Коши (1.15), (1.16) имеет единственное полное решение $y = \varphi(x, y_0)$ (для каждого y_0 решение своё). Беря различные значения для y_0, получаем бесконечное множество решений уравнения (1.15). В связи с этим введём следующее определение.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка (1.15) называется однопараметрическое семейство функций $y = \varphi(x, C)$ (где C – параметр, принимающий любое значение из некоторого множества $P \subseteq \mathrm{P}$), удовлетворяющее следующим условиям:

а) любая функция из этого семейства является решением уравнения (1.15), т.е. при любом фиксированном $C = C_* \in P$ функция $y_* = \varphi(x, C_*)$ является решением уравнения (1.15);

б) решение задачи Коши (1.15), (1.16) при любом фиксированном наборе начальных данных $(x_0, y_0) \in G$, где G – область определения функции $f(x,y)$, принадлежит этому семейству, т.е. найдётся такое значение параметра $C = C_0 \in P$, что функция $y^{(0)} = \varphi(x, C_0)$ является решением задачи Коши (1.15), (1.16).

Замечание 1.5. Если на параметр C ограничений нет, т.е. $P = \mathrm{P}$, то C называется *свободным параметром* (или *произвольной постоянной*).

Общее решение уравнения (1.13) определяется аналогично. Задача Коши для этого уравнения имеет вид $F(x, y, y') = 0$, $y(x_0) = y_0$.

Если общее решение дифференциального уравнения задано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

то его называют также *общим интегралом* этого *уравнения*.

Например, семейство функций (1.5) является общим решением уравнения (1.3); семейство функций (1.10) является общим интегралом уравнения (1.8).

Частным решением дифференциального уравнения называется его решение, которое получается из общего решения этого уравнения при конкретном значении параметра $C \in P$.

Если частное решение дифференциального уравнения задано в неявном виде

$$\Phi(x, y) = 0 ,$$

то его называют также *частным интегралом* этого *уравнения*.

Например, функция (1.6) является частным решением уравнения (1.3); функция (1.12) является частным интегралом уравнения (1.8).

Решить дифференциальное уравнение – это значит найти его общее решение.

Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Простейшим примером дифференциального уравнения первого порядка является уравнение вида

$$y' = f(x) . \tag{1.21}$$

Если правая часть уравнения (1.21) непрерывна, то его общее решение задаётся формулой

$$y = \int f(x)dx .$$

Например, общее решение уравнения $y' = \cos 5x$ имеет вид $y = \frac{1}{5}\sin 5x + C$, $C \in \mathrm{P}$.

Замечание 1.6. Если известно общее решение дифференциального уравнения первого порядка (оно содержит параметр $C \in P$), то для нахождения решения задачи Коши для такого уравнения достаточно найти значение параметра С, при котором выполняется заданное начальное условие, и подставить это значение в общее решение уравнения.

Лекция 2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, уравнения Бернулли.

Среди дифференциальных уравнений первого порядка можно выделить несколько типов уравнений, общие решения которых выражаются через интегралы или, другими словами, выражаются в квадратурах. Примерами таких уравнений являются уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, уравнения Бернулли.

Дифференциальное уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно имеет вид

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 , \tag{2.1}$$

где $f_1(x)$, $g_1(y)$, $f_2(x)$, $g_2(y)$ – некоторые заданные функции.

Разделим обе части уравнения (2.1) на такое выражение, чтобы после деления при dx не осталось выражений, содержащих y, а при dy – выражений, содержащих x. Для этого нужно разделить обе части (2.1) на $g_1(y)f_2(x)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 . \tag{2.2}$$

Полученное уравнение (2.2) *называется дифференциальным уравнением с разделёнными переменными*.

Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ непрерывны, то, интегрируя обе части (2.2), получаем

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C , \tag{2.3}$$

где C – свободный параметр. Соотношение (2.3) является общим интегралом уравнения (2.1).

Проведённое деление обеих частей уравнения (2.1) на выражение $g_1(y)f_2(x)$ корректно при условии, что $g_1(y)f_2(x) \neq 0$. Поэтому случай

$$g_1(y) = 0 \tag{2.4}$$

надо исследовать отдельно.

Пусть $y_2 = b$ – корень уравнения (2.4). Подставляя функцию $y \equiv b$ в уравнение (2.1), мы видим, что она является решением этого уравнения, так как $dy = db = 0$. Итак, корни уравнения (2.4) тоже являются решениями уравнения (2.1). Такие решения могут содержаться среди решений вида (2.3), а могут и нет.

Решим, например, уравнение

$$x\left(y^2 - 1\right)dx + y\left(x^2 - 1\right)dy = 0 : \tag{2.5}$$

$$\frac{xdx}{x^2 - 1} + \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0 ;$$

$$\int \frac{xdx}{x^2-1} + \int \frac{ydy}{y^2-1} = C ;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left| x^2-1 \right| + \frac{1}{2}\ln\left| y^2-1 \right| = \frac{1}{2}\ln\left| C \right|, \; C \neq 0 ,$$

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) = C , \; C \neq 0 . \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) есть общий интеграл уравнения (2.5). Корни уравнения

$$y^2-1=0 ,$$

т.е. функции $y \equiv 1$, $y \equiv -1$ тоже являются решениями уравнения (2.5). Их можно получить из (2.6) при $C=0$. Таким образом, все решения уравнения (2.5) задаются формулой (2.6), в которой C – свободный параметр.

Решим уравнение вида

$$(1+x)ydx + x(1-y)dy = 0 : \tag{2.7}$$

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0 ;$$

$$\int \frac{1+x}{x}dx + \int \frac{1-y}{y}dy = C ;$$

$$\ln\left| x \right| + x + \ln\left| y \right| - y = C . \tag{2.8}$$

Соотношение (2.8) является общим интегралом уравнения (2.7). Корни уравнения

$$y = 0 ,$$

т.е. функция $y \equiv 0$ тоже является решением уравнения (2.7). Это решение нельзя получить из формулы (2.8). Такие решения дифференциального уравнения, которые нельзя получить из общего интеграла этого уравнения, называются *особыми решениями*. Итак, $y \equiv 0$ – особое решение уравнения (2.7).

Уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) , \tag{2.9}$$

где $f(x)$, $g(y)$ – некоторые заданные функции, тоже называется *уравнением с разделяющимися переменными*, так как его можно записать в виде (2.1):

$$f(x)g(y)dx - dy = 0 .$$

Запишем уравнение (2.9) в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) . \tag{2.10}$$

Умножим обе части (2.10) на выражение $\dfrac{dx}{g(y)}$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx . \tag{2.11}$$

Если функции $f(x)$, $g(y)$ непрерывны, то, интегрируя обе части (2.11), получаем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C , \tag{2.12}$$

где C – свободный параметр. Соотношение (2.12) есть общий интеграл уравнения (2.9).

Корни уравнения

$$g(y) = 0$$

тоже являются решениями уравнения (2.9).

Решим, например, уравнение

$$y' = y^2 \cos x : \tag{2.13}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x ;$$

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x\, dx\ ;$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x\, dx + C\ ;$$

$$-\frac{1}{y} = \sin x + C\ ;$$

$$y = -\frac{1}{\sin x + C}\ . \tag{2.14}$$

Семейство функций (2.14) есть общее решение уравнения (2.13), записанное в явном виде. Корни уравнения

$$y^2 = 0\ ,$$

т.е. функция $y \equiv 0$ тоже является решением уравнения (2.13).
Это решение нельзя получить из общего решения (2.14), следовательно, $y \equiv 0$ – особое решение уравнения (2.13).

Дифференциальное уравнение называется *однородным*, если оно имеет вид

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\ , \tag{2.15}$$

где $M(x,y)$, $N(x,y)$ – некоторые заданные однородные функции одинакового порядка однородности α (функция $\psi(x,y)$ называется однородной функцией порядка α, если $\psi(tx,ty) = t^{\alpha}\psi(x,y)$ для любого $t \in \mathrm{P}$). По условию $M(tx,\, ty) = t^{\alpha} M(x,y)$, $N(tx,ty) = t^{\alpha} N(x,y)$. Тогда (2.15) можно записать в виде

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M\left(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}\right)}{N\left(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}\right)} =$$

$$= -\frac{x^{\alpha} M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^{\alpha} N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} \overset{def}{=} f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Итак, уравнение (2.15) всегда можно записать в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.16}$$

Укажем способ решения уравнения (2.16). Введём вспомогательную неизвестную функцию $u = u(x)$, положив $u = \frac{y}{x}$. Тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$ и уравнение (2.16) принимает вид

$$u'x + u = f(u)$$

или

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}\ . \tag{2.17}$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными, которое уже умеем решать.

Итак, уравнение (2.16) с помощью замены $\frac{y}{x} = u$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Решая уравнение (2.17) и заменяя в полученном решении величину u на $\frac{y}{x}$, находим решение исходного уравнения (2.16).

Заметим, что при решении однородного уравнения (2.15) не обязательно приводить его к виду (2.16). Можно сделать замену $y = ux$ в самом уравнении (2.15).

Решим, например, уравнение

$$\left(x^2 + y^2 + xy\right)dx - x^2 dy = 0\ . \tag{2.18}$$

Это уравнение имеет вид (2.15) с $M(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, $N(x,y) = -x^2$. Проверим функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ на однородность:

$$M(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2+tx\,ty=t^2\left(x^2+y^2+xy\right)=t^2M(x,y)\,;$$

$$N(tx,ty)=-(tx)^2=t^2\left(-x^2\right)=t^2N(x,y)\,.$$

Мы видим, что $M(x,y)$, $N(x,y)$ являются однородными функциями одинакового порядка однородности $\alpha=2$. Следовательно, (2.18) является однородным уравнением. Запишем (2.18) в виде (2.16):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2+xy}{x^2}$$

или

$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+1\,. \qquad (2.19)$$

Пусть $\frac{y}{x}=u$, тогда $y=ux$, $y'=u'x+u$ и уравнение (2.19) принимает вид

$$u'x+u=u^2+u+1\,;$$

$$u'=\frac{u^2+1}{x}\,.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{du}{dx}=\frac{u^2+1}{x}\,;$$

$$\frac{du}{u^2+1}=\frac{dx}{x}\,;$$

$$\int\frac{du}{u^2+1}=\int\frac{dx}{x}+C\,;$$

$$\operatorname{arctg}\, u=\ln|\,x\,|+C\,;$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln|\,x\,|+C\,. \qquad (2.20)$$

Семейство функций (2.20) есть общий интеграл уравнения (2.18).

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно имеет вид

$$y'+p(x)y=q(x)\,, \qquad (2.21)$$

где $p(x)$, $q(x)$ – некоторые заданные функции. Такое название объясняется тем, что y и y' входят в это уравнение линейно, т.е. в первой степени. В более общей записи линейное уравнение имеет вид

$$a(x)y'+b(x)y=c(x)\,, \qquad (2.22)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – некоторые заданные функции, причём $a(x)\neq 0$. Но уравнение вида (2.22) всегда можно свести к уравнению вида (2.21), разделив обе его части на $a(x)$. Поэтому можно ограничиться изучением линейного уравнения (2.21).

Линейное уравнение можно решать двумя способами: *методом вариации произвольной постоянной* (*методом Лагранжа*) или с помощью *подстановки Бернулли*.

Метод вариации произвольной постоянной заключается в следующем.

1. Находим общее решение соответствующего линейного однородного уравнения, т.е. уравнения вида

$$y'+p(x)y=0\,. \qquad (2.23)$$

Уравнение (2.23) – это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y\,;$$

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx\,;$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)\,dx\,;$$

$$\ln|\,y\,|=-\int p(x)\,dx+\ln|\,C\,|\,;$$

$$y = C\, e^{-\int p(x)\,dx} . \tag{2.24}$$

2. Ищем решение исходного линейного неоднородного уравнения (2.21) в том же виде, какой имеет общее решение соответствующего линейного однородного уравнения, т.е. в виде (2.24), но только вместо свободного параметра C записываем некоторую неизвестную пока функцию $C(x)$:

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)\,dx} . \tag{2.25}$$

3. Находим $C(x)$, подставляя (2.25) в уравнение (2.21) (мы хотим, чтобы функция (2.25) была решением уравнения (2.21), следовательно, она должна удовлетворять этому уравнению):

$$y' = C'(x)\, e^{-\int p(x)\,dx} + C(x)\, e^{-\int p(x)\,dx}(-p(x)) ;$$

$$C'(x)\, e^{-\int p(x)\,dx} - p(x)C(x)\, e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)C(x)\, e^{-\int p(x)\,dx} = q(x) ;$$

$$C'(x)\, e^{-\int p(x)\,dx} = q(x) ;$$

$$C'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} ;$$

$$C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} dx + C .$$

4. Подставляя найденную функцию $C(x)$ в (2.25), получаем общее решение уравнения (2.21):

$$y = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)\,dx} .$$

Решим уравнение (2.21) с помощью подстановки Бернулли. Будем искать его решение в виде произведения двух вспомогательных неизвестных функций $u = u(x)$, $v = v(x)$:

$$y = uv . \tag{2.26}$$

Подставим (2.26) в уравнение (2.21):

$$y' = u'v + uv' ;$$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) ;$$

$$\left[u' + p(x)u \right] + uv' = q(x) .$$

Выберем функцию u так, чтобы выражение в квадратных скобках обращалось в нуль:

$$u' + p(x)u = 0 . \tag{2.27}$$

Тогда

$$uv' = q(x) . \tag{2.28}$$

Уравнение (2.27) – это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получаем:

$$u = C\, e^{-\int p(x)\,dx} .$$

В качестве вспомогательной неизвестной функции u возьмём какое-либо частное решение, отличное от нуля, например, частное решение, получаемое при $C = 1$:

$$u = e^{-\int p(x)\,dx} . \tag{2.29}$$

Подставляя (2.29) в уравнение (2.28), получаем

$$e^{-\int p(x)\,dx}\, v' = q(x) ;$$

$$v' = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} ;$$

$$v = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} dx + C . \tag{2.30}$$

Подставляя (2.29), (2.30) в (2.26), получаем общее решение уравнения (2.21):

$$y = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)\,dx} .$$

Решим, например, линейное уравнение вида

$$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$$

обоими способами.

Метод вариации произвольной постоянной:

1. $y' - \frac{y}{x+2} = 0$; $y' = \frac{y}{x+2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+2}$; $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+2}$;

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+2} + \ln|\,C\,| ;\ \ \ln|\,y\,| = \ln|\,x+2\,| + \ln|\,C\,| ;$$

$$y = C(x+2) .$$

2. $y = C(x)(x+2)$.

3. $y' = C'(x)(x+2) + C(x)$;

$$C'(x)(x+2) + C(x) - \frac{C(x)(x+2)}{x+2} = x^2 + 2x ;$$

$$C'(x)(x+2) = x^2 + 2x ;\ \ C'(x) = x ,\ C(x) = \int x dx + C ;$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + C .$$

4. $y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right)(x+2)$.

Метод подстановки Бернулли:

$$y = uv ,\ \ y' = u'v + uv' ;\ \ u'v + uv' - \frac{uv}{x+2} = x^2 + 2x ;$$

$$v\left(u' - \frac{u}{x+2} \right) + uv' = x^2 + 2x ;\ \ u' - \frac{u}{x+2} = 0 ;\ \ uv' = x^2 + 2x ;$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x+2} ,\ \ \frac{du}{u} = \frac{dx}{x+2} ;\ \ \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x+2} + \ln|\,C\,| ;$$

$$\ln|\,u\,| = \ln|\,x+2\,| + \ln|\,C\,| ;\ \ u = C(x+2) ,\ C = 1 ,\ u = x+2 ;$$

$$(x+2)v' = x^2 + 2x ,\ \ v' = x ,\ \ v = \frac{x^2}{2} + C ;\ \ y = (x+2)\left(\frac{x^2}{2} + C \right) .$$

Дифференциальное уравнение называется *уравнением Бернулли*, если оно имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} , \tag{2.31}$$

где $\alpha \in \mathrm{P}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ (при $\alpha = 0$ уравнение (2.31) является линейным, при $\alpha = 1$ – уравнением с разделяющимися переменными).

Уравнение Бернулли можно решать двумя способами: методом подстановки Бернулли $y = uv$, т.е. тем же методом, что и линейное уравнение, или методом сведения к линейному уравнению.

Покажем, как уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению. Умножим обе части уравнения (2.31) на $y^{-\alpha}$:

$$y^{-\alpha} y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x) . \tag{2.32}$$

Введём вспомогательную неизвестную функцию $z = z(x)$, положив $z = y^{1-\alpha}$. Тогда $z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$, откуда $y^{-\alpha} y' = \frac{1}{1-\alpha} z'$. Уравнение (2.32) принимает вид

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + p(x)\, z = q(x)$$

или

$$z' + \widetilde{p}(x)\, z = \widetilde{q}(x) , \tag{2.33}$$

где $\widetilde{p}(x) = (1-\alpha)\, p(x)$, $\widetilde{q}(x) = (1-\alpha)\, q(x)$. Уравнение (2.33) является линейным. Решая его, находим z , а затем находим y по формуле $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Решим, например, задачу Коши:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{4}{x} y = x\sqrt{y}\,; & (2.34) \\ y(1) = 0. & (2.35) \end{cases}$$

1. Найдём общее решение уравнения (2.34), которое является уравнением Бернулли с $\alpha = \dfrac{1}{2}$:

$$y^{-\frac{1}{2}} y' - \frac{4}{x} y^{\frac{1}{2}} = x\,;\; z = y^{\frac{1}{2}},\; z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y',$$

$$y^{-\frac{1}{2}} y' = 2z'\,; \quad 2z' - \frac{4}{x} z = x, \quad z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2}; \quad z' - \frac{2}{x} z = 0\,;$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} z, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x} \;\; ; \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dx}{x} + \ln|\,C\,|\,;$$

$\ln|\,z\,| = 2\ln|\,x\,| + \ln|\,C\,|$; $z = Cx^2$; $z = C(x)x^2$, $z' = C'(x)x^2 + C(x)2x$;

$$C'(x)x^2 + 2x\,C(x) - \frac{2}{x}C(x)x^2 = \frac{x}{2}; \quad C'(x)x^2 = \frac{x}{2}, \quad C'(x) = \frac{1}{2x};$$

$$C(x) = \frac{1}{2}\ln|\,x\,| + C\,; \quad z = \left(\frac{1}{2}\ln|\,x\,| + C\right)x^2; \quad y = z^2, \quad y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|\,x\,| + C\right)^2.$$

2. Подберём значение параметра *C* так, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(1) = 0$:

$$1^4\left(\frac{1}{2}\ln|\,1\,| + C\right)^2 = 0\,, \quad C^2 = 0\,, \quad C = 0\,.$$

3. Подставим найденное значение $C = 0$ в общее решение урав-нения:

$$y = \frac{x^4}{4}\ln^2|\,x\,|. \qquad (2.36)$$

Функция (2.36) является решением задачи Коши (2.34), (2.35).

Лекция 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальное уравнение n-го порядка, решение дифференциального уравнения, задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши, общее решение, общий интеграл, частное решение, частный интеграл, простейшее дифференциальное уравнение n-го порядка; дифференциальные уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка.

Дифференциальным уравнением *n*-го порядка называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \,\ldots\, , y^{(n)}\right) = 0\,, \qquad (3.1)$$

где x – независимая переменная, $x \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathrm{P}$; $y = y(x)$ – неизвестная функция независимой переменной x; $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$, …, $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ – производные неизвестной функции; $F\left(\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \,\ldots, \bullet\right)$ – некоторая заданная функция своих аргументов.

Частным случаем уравнения (3.1) является уравнение вида

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots , y^{(n-1)}\right), \qquad (3.2)$$

которое называется *уравнением, разрешённым относительно старшей производной*.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка называется *n* раз непрерывно дифференцируемая на множестве Ω функция $y = \varphi(x)$, при подстановке которой в уравнение получается тождество относительно независимой переменной $x \in \Omega$.

Замечание 3.1. В данном определении предполагается, что функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) \in D(F)\,, \quad \forall\, x \in \Omega\,,$$

где $D(F)$ – область определения функции F .

Задача Коши для уравнения (3.2) – это, по определению, задача отыскания решения данного уравнения, удовлетворяющего условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $y''(x_0)=y''_0$, … , $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где x_0, y_0, $y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-1)}$ – некоторые заданные числа, т.е. задача вида

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right); & (3.3) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. & (3.4) \end{cases}$$

Условия (3.4) называются *начальными условиями*; числа x_0, y_0, $y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – *начальными данными*, при этом $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ называются *начальными значениями*.

Решить задачу Коши (3.3), (3.4) – это значит найти решение уравнения (3.3), график которого проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и производные которого до порядка $n-1$ включительно принимают в данной точке x_0 заданные значения $y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$.

Укажем достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши [1.3, с. 153].

Теорема 3.1. (теорема Пикара). Пусть правая часть уравнения (3.3) определена на множестве

$$D = \left\{ \left(x, y, y', y'', \ \ldots \ , y^{(n-1)} \right) \in \mathrm{R}^{n+1} \ \middle| \ \left| x - x_0 \right| \le a, \right.$$

$$\left. \left| y - y_0 \right| \le b, \ \left| y' - y'_0 \right| \le b, \ \left| y'' - y''_0 \right| \le b, \ \ldots \ , \ \left| y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)} \right| \le b \right\}$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1) $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ непрерывна на D и, следовательно, в силу первой теоремы Вейерштрасса [2.3, с. 496], ограничена на D:

$$\exists \ M > 0 \ | \ \forall \left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \in D \Rightarrow \left| f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \right| \le M \ ;$$

2) $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ имеет ограниченные частные производные первого порядка по всем аргументам, начиная со второго:

$$\exists \ \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}, \ 0 \le k \le n-1, \quad \exists \ K > 0 \ | \ \forall \left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \in D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \le K, \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \right| \le K, \left| \frac{\partial f}{\partial y''} \right| \le K, \ \ldots, \left| \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \right| \le K \ .$$

Тогда задача Коши (3.3), (3.4) имеет единственное решение, которое заведомо определено при $x \in \left[x_0 - h, x_0 + h\right]$, где

$$h = \min \left\{ a, \ \frac{b}{\max\limits_{D} \left\{ M, \left| y' \right|, \ \ldots \ , \left| y^{(n-1)} \right| \right\}} \right\}.$$

Множество D из теоремы 3.1 называется $(n+1)$-мерным параллелепипедом с центром в точке $M_0\left(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)} \right)$.

Пусть правая часть уравнения (3.3) определена в некоторой области *G*, т.е. на некотором открытом связном множестве $G \subseteq \mathrm{P}^{n+1}$. Пусть выполняется следующее условие: для каждой точки области *G* существует $(n+1)$-мерный параллелепипед с центром в этой точке, расположенный в области *G*, на котором выполняются условия теоремы 3.1. Тогда, как и в случае дифференциального уравнения первого порядка (см. лекцию 1), каждое локальное решение дифференциального уравнения (3.3), существование и единственность которого гарантирует теорема 3.1, можно продолжить до полного решения.

Зафиксируем некоторое $x_0 \in \mathrm{P}$, такое что множество

$$G_0 = \left\{ \left(x, y, y', y'', \ \ldots \ , y^{(n-1)} \right) \in G \ \middle| \ x = x_0 \right\}$$

не пусто. В качестве начальных значений возьмём любые y_0, y'_0, $y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, такие что $\left(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ \ldots \ , y_0^{(n-1)}\right) \in G_0$. Тогда задача Коши (3.3), (3.4) имеет единственное решение $y = \varphi\left(x, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ (для каждого набора начальных значений y_0, y'_0, $y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ решение своё). Беря различные значения для y_0, y'_0, $y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, получаем бесконечное множество решений дифференциального уравнения (3.3). В связи с этим введём следующее определение.

Общим решением дифференциального уравнения (3.3) называется *n*-параметрическое семейство функций $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ \ldots \ , C_n\right)$ (где $C_1, C_2, \ \ldots \ , C_n$ – параметры; $\left(C_1, C_2, \ \ldots \ , C_n\right) \in P_n$, $P_n \subseteq \mathrm{P}^{\,n}$), удовлетворяющее следующим условиям:

а) любая функция из этого семейства является решением уравнения (3.3), т.е. при любом фиксированном наборе значений параметров $\left(C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*\right) \in P_n$ функция $y^* = \varphi\left(x, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*\right)$ является решением уравнения (3.3);

б) решение задачи Коши (3.3), (3.4) при любом фиксированном наборе начальных данных $\left(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in G$, где G – область определения функции $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, принадлежит этому семейству, т.е. найдётся такой набор значений параметров $\left(C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right) \in P_n$, что функция $y^{(0)} = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right)$ является решением задачи Коши (3.3), (3.4).

Замечание 3.2. Если на параметры $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ограничений нет, т.е. $P_n = \mathrm{P}^n$, то $C_1, C_2, \ldots, C_n$ называются *свободными параметрами* (или *произвольными постоянными*).

Общее решение дифференциального уравнения, заданное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

называют *общим интегралом* этого *уравнения*.

Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка называется его решение, которое получается из общего решения этого уравнения при конкретных значениях параметров $C_1 = C_1^*,\ C_2 = C_2^*, \ldots,\ C_n = C_n^*$ $\left(\left(C_1^*,\ C_2^*, \ldots,\ C_n^*\right) \in P_n\right)$.

Частное решение дифференциального уравнения, заданное в неявном виде $\Phi\left(x, y, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*\right)$, называют *частным интегралом* этого *уравнения*.

Простейшим примером дифференциального уравнения n-го порядка является уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x).$$

Его общее решение находится n-кратным интегрированием:

$$y^{(n-1)} = \int \left(y^{(n-1)}\right)' dx = \int y^{(n)} dx = \int f(x) dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)\, dx + C_1\right] dx + C_2$$

и так далее.

Решим, например, уравнение вида

$$y''' = \sin 2x.$$

Получаем:

$$y'' = \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1;$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right) dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2\right) dx = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Замечание 3.3. Если известно общее решение дифференциального уравнения n-го порядка (оно содержит набор параметров $\left(C_1, C_2, \ldots, C_n\right) \in P_n$), то для нахождения решения задачи Коши для такого уравнения достаточно найти значения параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$, при которых выполняются заданные начальные условия, и подставить эти значения в общее решение уравнения.

В ряде случаев дифференциальное уравнение n-го порядка допускает понижение порядка.

Рассмотрим *первый случай понижения порядка*. Пусть уравнение (3.1) не содержит в явном виде неизвестную функцию y:

$$F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (3.5)$$

(неизвестная функция y "присутствует" в уравнении (3.5) через свои производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$).

Введём вспомогательную неизвестную функцию $z = z(x)$, положив $y' = z$. Тогда $y'' = \left(y'\right)' = z'$, … , $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \left(z^{(n-2)}\right)' = z^{(n-1)}$ и уравнение (3.5) принимает вид

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right) = 0.$$

Получили уравнение $(n-1)$-го порядка. Решая его, находим z, а затем, интегрируя полученное выражение, находим y.

Решим, например, уравнение вида

$$\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0.$$

Имеем:

$$y'=z, \quad y''=z';$$

$$\left(1+x^2\right)z'-2xz=0; \quad z'=\frac{2xz}{1+x^2};$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2xz}{1+x^2}; \quad \frac{dz}{z}=\frac{2xdx}{1+x^2};$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{2xdx}{1+x^2}+C_1; \quad \ln|z|=\ln\left|1+x^2\right|+\ln|C_1|;$$

$$z=C_1\left(1+x^2\right); \quad y'=C_1\left(1+x^2\right);$$

$$y=\int C_1\left(1+x^2\right)dx=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2.$$

Если уравнение вида (3.5) содержит производные неизвестной функции, начиная с k-й производной:

$$F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\,\dots\,,y^{(n)}\right)=0, \tag{3.6}$$

то делают замену $y^{(k)}=z$, после которой уравнение (3.6) принимает вид

$$F\left(x,z,z',\,\dots\,,z^{(n-k)}\right)=0.$$

Рассмотрим *второй случай понижения порядка*. Пусть уравнение (3.1) не содержит в явном виде независимую переменную x:

$$F\left(y,y',y'',\,\dots\,,y^{(n)}\right)=0 \tag{3.7}$$

(неизвестная переменная x "присутствует" в уравнении (3.7), так как является аргументом неизвестной функции y и её производных $y',y'',\dots,y^{(n)}$).

Примем y за независимую переменную и введём вспомогательную неизвестную функцию $p=p(y)$, положив $y'=p$. Тогда

$$y''=\left(y'\right)'=\left(p(y)\right)'_x=p'_y\,y'_x=p'p;$$

$$y'''=\left(y''\right)'=\left(p'(y)p(y)\right)'_x=\left(p'(y)\right)'_x\,p(y)+p'(y)\left(p(y)\right)'_x=$$

$$=p''_y y'_x p+p'\,p'p=p''p^2+\left(p'\right)^2p.$$

Продолжая этот процесс, мы получим, что

$$y^{(n)}=\psi\left(p,p',p'',\,\dots\,,p^{(n-1)}\right)$$

и уравнение (3.7) принимает вид

$$F\left(y,\,p,\,p'p,\,p''p^2+\left(p'\right)^2p,\,\dots\,,\,\psi\left(p,p',p'',\,\dots\,,p^{(n-1)}\right)\right)=0.$$

Получили уравнение $(n-1)$-го порядка.

Решим, например, задачу Коши

$$\begin{cases} 2y(\,y')^3+y''=0; & (3.8)\\ y(0)=0,\ y'(0)=-3. & (3.9)\end{cases}$$

Получаем:

$$y'=p, \quad y''=p'p, \quad 2yp^3+p'p=0;$$

а) $p=0$, $y'=0$, $y=C$, $C\in \mathrm{P}$,

но любое решение из этого семейства решений не является решением задачи Коши (3.8), (3.9), ибо $y'=(C)'=0$, в частности, $y'(0)=0\neq-3$;

б) $p\neq0$, $2yp^2+p'=0$, $p'=-2yp^2$, $\dfrac{dp}{dy}=-2yp^2$, $\dfrac{dp}{p^2}=-2ydy$;

$$\int \frac{dp}{p^2} = -2\int y dy + C_1 ;$$

$$-\frac{1}{p} = -y^2 + C_1 , \quad \frac{1}{p} = y^2 - C_1 , \quad p = \frac{1}{y^2 - C_1} , \quad y' = \frac{1}{y^2 - C_1} .$$

Подберём значение параметра C_1 так, чтобы выполнялись начальные условия (3.9):

$$y'(x) = \frac{1}{\left(y(x)\right)^2 - C_1} , \quad y'(0) = \frac{1}{\left(y(0)\right)^2 - C_1} ;$$

$$\frac{1}{0^2 - C_1} = -3 , \quad C_1 = \frac{1}{3} .$$

Тогда

$$y' = \frac{1}{y^2 - \frac{1}{3}} ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - \frac{1}{3}} ; \quad \left(y^2 - \frac{1}{3}\right) dy = dx ,$$

$$\int \left(y^2 - \frac{1}{3}\right) dy = \int dx + C_2 ; \quad \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{3} y = x + C_2 ;$$

$$y^3 - y = 3\left(x + C_2 \right).$$

Подберём значение параметра C_2 так, чтобы выполнялось начальное условие $y(0) = 0$:

$$\left(y(0)\right)^3 - y(0) = 3\left(0 + C_2\right), \ 3\left(0 + C_2\right) = 0^3 - 0 , \ C_2 = 0 .$$

Тогда

$$y^3 - y = 3x . \tag{3.10}$$

Выражение (3.10) есть решение задачи Коши (3.8), (3.9), записанное в неявном виде.

Лекция 4. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка (ЛОДУ n-го порядка); дифференциальный оператор, его свойства; свойства решений ЛОДУ n-го порядка; линейно независимые и линейно зависимые системы функций; определитель Вронского; необходимое условие линейной независимости n решений ЛОДУ n-го порядка; теорема о структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка; необходимое условие линейной зависимости и решений ЛОДУ n-го порядка; способ проверки системы n решений ЛОДУ n-го порядка на линейную независимость; теорема о существовании фундаментальной системы решений ЛОДУ n-го порядка.

Дифференциальное уравнение *n*-го порядка называется *линейным однородным*, если оно имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 , \tag{4.1}$$

где $y = y(x)$ – неизвестная функция независимой переменной $x \in [a, b]$, $y' = y'(x)$, …, $y^{(n-2)} = y^{(n-2)}(x)$, $y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x)$, $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ – производные неизвестной функции, $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ –некоторые заданные непрерывные функции на промежутке $[a, b]$, называемые коэффициентами уравнения (4.1).

В более общей записи линейное однородное уравнение имеет вид

$$b_0(x) y^{(n)} + b_1(x) y^{(n-1)} + b_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1}(x) y' + b_n(x) y = 0 , \tag{4.2}$$

где $b_0(x), b_1(x), b_2(x), \ldots, b_{n-1}(x), b_n(x)$ – некоторые заданные и непрерывные на $[a, b]$ функции, причём $b_0(x) \neq 0$ для $\forall \ x \in [a, b]$. Но уравнение вида (4.2) всегда можно свести к уравнению вида (4.1) делением обеих его частей на $b_0(x)$. Следовательно, можно ограничиться изучением линейного однородного уравнения (4.1).

Замечание 1.4. Нулевая функция $y = y(x) \equiv 0$, $\forall \ x \in [a, b]$, является решением ЛОДУ (4.1) (такое решение называется *тривиальным*).

Укажем условия, при которых уравнение (4.1) имеет ненулевые (*нетривиальные*) решения.

ЛОДУ *n*-го порядка (4.1) является частным случаем *линейного неоднородного дифференциального уравнения* (ЛНДУ) *n-го порядка*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (4.3)$$

где

$$a_i(x) \in C[a,b], \ 1 \le i \le n, \qquad (4.4)$$

$f(x) \in C[a,b]$ (здесь $C[a,b]$ – линейное пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число [2.8, с. 11]).

Под *задачей Коши для ЛНДУ* (4.3) понимается задача отыскания такого решения этого уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ y''(x_0) = y_0'', \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (4.5)$$

Приведём формулировку *теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ЛНДУ n-го порядка* [1.4, с.73].

Теорема 4.1 (*теорема Пикара*). Если коэффициенты $a_i(x)$, $1 \le i \le n$, и правая часть $f(x)$ уравнения (4.3) непрерывны на промежутке $[a,b]$, то задача Коши (4.3), (4.5) имеет единственное решение, определённое на всём промежутке $[a,b]$.

Следствие 4.1. Если коэффициенты $a_i(x)$, $1 \le i \le n$, уравнения (4.1) непрерывны на промежутке $[a,b]$, то задача Коши (4.1), (4.5) имеет единственное решение, определённое на всём промежутке $[a,b]$.

Так как мы рассматриваем уравнение (4.1) в предположении, что выполняется условие (4.4), то в силу следствия 4.1 это уравнение имеет нетривиальные решения.

Пусть $C^n[a,b]$ – множество *n* раз непрерывно дифференцируемых на промежутке $[a,b]$ функций. Множество $C^n[a,b]$ является линейным пространством [2.8, с. 11].

Рассмотрим отображение $L: C^n[a,b] \to C[a,b]$, определяемое для любой функции $u \in C^n[a,b]$ формулой

$$Lu = u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + a_2(x)u^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)u' + a_n(x)u, \quad (4.6)$$

где $a_1(x), a_2(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ – коэффициенты уравнения (4.1).

Дифференциальным оператором, порождённым уравнением (4.1), называется отображение $L: C^n[a,b] \to C[a,b]$, задаваемое формулой (4.6).

В силу того, что производная суммы равна сумме производных и постоянную можно выносить за знак производной, получаем следующие свойства дифференциального оператора:

1) *свойство аддитивности*: для любых $u_1, u_2 \in C^n[a,b]$

$$L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2; \qquad (4.7)$$

2) *свойство однородности*: для любого $u \in C^n[a,b]$ и для любого $\alpha \in \mathrm{P}$

$$L(\alpha u) = \alpha Lu. \qquad (4.8)$$

Отображение, обладающее свойствами аддитивности и однородности, называется линейным. Таким образом, дифференциальный оператор является линейным.

Из (4.7), (4.8) следует, что для любых $u_1, u_2, \dots, u_s \in C^n[a,b]$ и любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathrm{P}$

$$L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_s u_s) = \alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2 + ... + \alpha_s Lu_s, \qquad (4.9)$$

или в более краткой записи

$$L\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i Lu_i. \qquad (4.10)$$

Используя дифференциальный оператор *L*, уравнение (4.1) можно записать в виде

$$Ly = 0. \qquad (4.11)$$

Пусть Ω_0 – множество решений уравнения (4.11). Из (4.7) – (4.9) получаем следующие свойства решений ЛОДУ *n*-го порядка.

1. Если $y_1, y_2 \in \Omega_0$, то $y_1 + y_2 \in \Omega_0$.

Действительно, так как $y_1, y_2 \in \Omega_0$, то $Ly_1 = 0$, $Ly_2 = 0$. Тогда $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = 0 + 0 = 0$, т.е. $y_1 + y_2 \in \Omega_0$.

2. Если $y \in \Omega_0$, $\alpha \in \mathrm{P}$, то $\alpha y \in \Omega_0$.

3. Если $y_1, y_2, \dots, y_s \in \Omega_0$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathrm{P}$, то

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_s y_s \in \Omega_0.$$

Свойства 1 – 3 показывают, что множество решений ЛОДУ *n*-го порядка является линейным пространством.

В силу свойства 3, если имеется *n* решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения (4.11), то семейство функций вида

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \qquad (4.12)$$

содержащее *n* свободных параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$, задаёт некоторое множество W решений уравнения (4.11), т.е. $W \subset \Omega_0$.

Выясним, при каких условиях на решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ семейство функций (4.12) является общим решением уравнения (4.11), т.е. $W = \Omega_0$.

По определению общего решения уравнения, формула (4.12) будет задавать общее решение уравнения (4.11), если, во-первых, для любых конкретных значений $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функция вида (4.12) является решением уравнения (4.11) (это условие, как только что установлено, выполняется), и, во-вторых, любое решение уравнения (4.11) можно получить по формуле (4.12) путём соответствующего подбора значений $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Итак, осталось выяснить, при каких условиях на решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ любое решение уравнения (4.11) можно получить из формулы (4.12) или, другими словами, представить в виде (4.12). Для этого потребуются некоторые дополнительные сведения.

Пусть на промежутке $[a, b]$ заданы функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)$.

Линейной комбинацией функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)$ называется выражение вида

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_s\varphi_s(x),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ – некоторые постоянные, называемые *коэффициентами линейной комбинации*.

Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то её называют *тривиальной*, в противном случае, т.е., если хотя бы один коэффициент линейной комбинации отличен от нуля, её называют *нетривиальной*.

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)$ называется *линейно независимой на промежутке* $[a, b]$, если их линейная комбинация равна нулю на промежутке $[a, b]$ только тогда, когда она тривиальна. В противном случае система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)$ называется *линейно зависимой* на промежутке $[a, b]$.

Таким образом, система функций называется линейно зависимой на промежутке $[a, b]$, если существует хотя бы одна нетривиальная линейная комбинация этих функций, равная нулю на промежутке $[a, b]$.

Например, система функций $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$, линейно независима на промежутке $[-\pi, \pi]$.

Действительно, пусть

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0, \ \forall\ x \in [-\pi, \pi]. \tag{4.13}$$

Покажем, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Запишем (4.13) при $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\alpha_1 \sin\frac{\pi}{2} + \alpha_2 \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_1 = 0.$$

Запишем (4.13) при $x = 0$:

$$\alpha_1 \sin 0 + \alpha_2 \cos 0 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_2 = 0.$$

Система функций $\varphi_1(x) = \arcsin x$, $\varphi_2(x) = 2\arcsin x$ линейно зависима на промежутке $[-1, 1]$, так как, например,

$$-4\arcsin x + 2(2\arcsin x) = 0, \ \forall\ x \in [-1, 1].$$

Этот пример показывает, что если система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots, \varphi_s(x)$, заданных на промежутке $[a, b]$, содержит хотя бы две функции, отличающихся между собой лишь числовым множителем, например, $\varphi_2(x) = \mu\,\varphi_1(x)$, то эта система функций линейно зависима на $[a, b]$. Действительно, тогда

$$\mu\,\varphi_1(x) + (-1)\cdot\varphi_2(x) + 0\cdot\varphi_3(x) + \ldots + 0\cdot\varphi_s(x) = 0, \ \forall\ x \in [a, b].$$

Если система функций, заданных на промежутке $[a, b]$, содержит нулевую функцию, то она линейно зависима на $[a, b]$, ибо нетривиальная линейная комбинация этих функций, все коэффициенты которой равны нулю, кроме коэффициента при нулевой функции, равна нулю на $[a, b]$.

Пусть на промежутке $[a, b]$ заданы $n-1$ раз дифференцируемые функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Определителем Вронского (или *вронскианом*) системы функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ называется функциональный определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем нам понадобится *необходимое условие линейной независимости n решений ЛОДУ n-го порядка*.

Теорема 4.2. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимые решения уравнения (4.11) на промежутке $[a, b]$, то их вронскиан

$$
\mathrm{W}(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}
$$

отличен от нуля при любом $x \in [a,b]$.

► $\overline{\Pi}$: пусть $\mathrm{W}(x_0)=0$ при некотором $x_0 \in [a,b]$. Составим систему *n* однородных линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, определитель которой равен $\mathrm{W}(x_0)$:

$$
\begin{cases} y_1(x_0)\alpha_1 + y_2(x_0)\alpha_2 + \dots + y_n(x_0)\alpha_n = 0; \\ y_1'(x_0)\alpha_1 + y_2'(x_0)\alpha_2 + \dots + y_n'(x_0)\alpha_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\alpha_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)\alpha_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x_0)\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{4.14}
$$

Так как $\Delta = \mathrm{W}(x_0) = 0$, то эта система имеет ненулевое решение $\left(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*\right)$ [2.2, с. 66]. Рассмотрим линейную комбинацию решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ вида

$$
y = \alpha_1^* y_1 + \alpha_2^* y_2 + \dots + \alpha_n^* y_n. \tag{4.15}
$$

В силу свойства 3 решений ЛОДУ *n*-го порядка функция (4.15) является решением уравнения (4.11). В силу (4.14) эта функция удовлетворяет нулевым начальным условиям $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$, $y''(x_0)=0$, … , $y^{(n-1)}(x_0)=0$. Следовательно, функция (4.15) является решением задачи Коши

$$
\begin{cases} Ly = 0; & (4.16) \\ y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\ y''(x_0)=0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=0. & (4.17) \end{cases}
$$

С другой стороны нулевая функция тоже является решением задачи Коши (4.16), (4.17). В силу единственности решения задачи Коши (см. следствие 4.1) функция (4.15) является нулевой:

$$
\alpha_1^* y_1 + \alpha_2^* y_2 + \dots + \alpha_n^* y_n = 0,\ \forall\ x \in [a,b].
$$

Получили нетривиальную линейную комбинацию решений $y_1, y_2, \dots, y_n$, равную нулю при $x \in [a,b]$. Следовательно, $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы на $[a,b]$, что противоречит условию теоремы. $\overline{\overline{\Pi}}$. ◄

Следствие 4.2. Если вронскиан $\mathrm{W}(x)$ решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения (4.11) в некоторой точке $x_* \in [a,b]$ равен нулю, то эти решения линейно зависимы на промежутке $[a,b]$.

Действительно, $\overline{\Pi}$: решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы на $[a,b]$. Тогда в силу теоремы 4.2 $\mathrm{W}(x) \neq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$. В частности, $\mathrm{W}(x_*) \neq 0$. Противоречие. $\overline{\overline{\Pi}}$.

Докажем *теорему о структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка.*

Теорема 4.3. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимые решения уравнения (4.11), то общее решение этого уравнения задаётся формулой (4.12), в которой $C_1, C_2, \dots, C_n$ – свободные параметры.

► Тот факт, что при любых конкретных значениях параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$ функция вида (4.12) является решением уравнения (4.11) справедлив в силу свойства 3 решений ЛОДУ *n*-го порядка. Осталось показать, что любое решение уравнения (4.11) можно представить в виде (4.12). Пусть $\tilde{y}$ – произвольное фиксированное решение уравнения (4.11). Возьмём некоторое $x_0 \in [a,b]$. Вычислим значения функции $\tilde{y}$ и её производных до порядка $n-1$ включительно в точке x_0. Пусть $\tilde{y}(x_0)=\tilde{y}_0$, $\tilde{y}'(x_0)=\tilde{y}_0'$, $\tilde{y}''(x_0)=\tilde{y}_0''$, …, $\tilde{y}^{(n-1)}(x_0)=\tilde{y}_0^{(n-1)}$. Тогда $\tilde{y}$ является решением задачи Коши

$$
\begin{cases} Ly = 0; & (4.18) \\ y(x_0)=\tilde{y}_0,\ y'(x_0)=\tilde{y}_0',\ y''(x_0)=\tilde{y}_0'',\dots,y^{(n-1)}(x_0)=\tilde{y}_0^{(n-1)}. & (4.19) \end{cases}
$$

Составим систему *n* линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ вида

$$
\begin{cases} y_1(x_0)\alpha_1 + y_2(x_0)\alpha_2 + \dots + y_n(x_0)\alpha_n = \tilde{y}_0; \\ y_1'(x_0)\alpha_1 + y_2'(x_0)\alpha_2 + \dots + y_n'(x_0)\alpha_n = \tilde{y}_0'; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\alpha_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)\alpha_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x_0)\alpha_n = \tilde{y}_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{4.20}
$$

Определитель этой системы уравнений равен $\mathrm{W}(x_0)$. В силу теоремы 4.2 $\mathrm{W}(x_0) \neq 0$. Следовательно, система (4.20) имеет решение $\left(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*\right)$ [2.2, с. 69].

Рассмотрим функцию вида (4.12) с $C_1 = \alpha_1^*$, $C_2 = \alpha_2^*$, …, $C_n = \alpha_n^*$, т.е. функцию

$$
y^* = \alpha_1^* y_1 + \alpha_2^* y_2 + \dots + \alpha_n^* y_n. \tag{4.21}
$$

Эта функция является решением уравнения (4.18). В силу (4.20) она удовлетворяет начальным условиям (4.19). Значит, функция (4.21) является решением задачи Коши (4.18), (4.19). В силу единственности решения задачи Коши (см. следствие 4.1) $\widetilde{y}$ совпадает с y^*:

$$\widetilde{y} = \alpha_1^* y_1 + \alpha_2^* y_2 + \ldots + \alpha_n^* y_n \,.$$

Итак, решение $\widetilde{y}$ представлено в виде (4.12).

В связи с тем, что на основе *n* линейно независимых решений ЛОДУ *n*-го порядка можно построить его общее решение, вводится следующее определение.

Фундаментальной системой решений (ФСР) *ЛОДУ n-го порядка* называется любая система *n* линейно независимых решений этого уравнения.

Выясним, как проверять, будет ли данная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ЛОДУ *n*-го порядка линейно независимой, т.е. будет ли она давать ФСР. Для этого укажем вначале *необходимое условие линейной зависимости n решений ЛОДУ n-го порядка.*

Теорема 4.4. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимые решения уравнения (4.11) на промежутке $[a,b]$, то их вронскиан $\mathrm{W}(x)$ равен нулю на этом промежутке.

Возьмём нетривиальную линейную комбинацию решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, равную нулю:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \,. \tag{4.22}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_n \neq 0$. Тогда в силу (4.22)

$$y_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k \,,$$

следовательно,

$$y_n^{(i)} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k^{(i)} \,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \,;$$

и

$$\mathrm{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k^{(n-1)} \end{vmatrix} .$$

Из линейной алгебры известно [2.5, с. 42], что если один из столбцов определителя есть линейная комбинация его других столбцов, то такой определитель равен нулю. Следовательно, $\mathrm{W}(x) = 0$ для $x \in [a,b]$.

Следствие 4.3. Если вронскиан $\mathrm{W}(x)$ решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (4.11) в некоторой точке $x_* \in [a,b]$ отличен от нуля, то эти решения линейно независимы на промежутке $[a,b]$.

Действительно, : решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на $[a,b]$. Тогда в силу теоремы 4.4 $\mathrm{W}(x) = 0$, $\forall\ x \in [a,b]$. В частности, $\mathrm{W}(x_*) = 0$. Противоречие. .

В силу теорем 4.2, 4.4 для вронскиана *n* решений ЛОДУ *n*-го порядка существует *альтернатива*:

- либо $\mathrm{W}(x) \neq 0$ для $\forall\ x \in [a,b]$;
- либо $\mathrm{W}(x) = 0$ для $\forall\ x \in [a,b]$,

ибо эти *n* решений либо линейно независимы на $[a,b]$, либо линейно зависимы на $[a,b]$.

В силу следствий 4.2 и 4.3 получаем следующее *правило проверки n решений* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *ЛОДУ n-го порядка на линейную независимость*.

Вычисляем значение вронскиана $\mathrm{W}(x)$ решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в какой-либо точке $x_* \in [a,b]$. Если $\mathrm{W}(x_*) \neq 0$, то $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы на $[a,b]$, т.е. дают ФСР. Если $\mathrm{W}(x_*) = 0$, то $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на $[a,b]$, т.е. не являются ФСР уравнения (4.11).

В качестве точки x_* удобно брать какое-либо простое значение, например, если $0 \in [a,b]$, то можно взять $x_* = 0$.

Докажем *теорему о существовании ФСР для ЛОДУ n-го порядка*.

Теорема 4.5. ЛОДУ n-го порядка имеет ФСР.

Возьмём произвольный отличный от нуля определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и некоторое $x_0 \in [a, b]$. Рассмотрим n задач Коши вида

$$\begin{cases} Ly = 0; & (4.23) \\ y(x_0) = a_{1j},\ y'(x_0) = a_{2j},\ y''(x_0) = a_{3j},\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{nj}, & (4.24) \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ – решения этих задач Коши. Такие решения существуют в силу следствия 4.1. В силу (4.24) вронскиан $\mathrm{W}(x)$ этих решений в точке x_0 равен Δ и, следовательно, отличен от нуля. Значит, решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы на $[a, b]$, т.е. дают ФСР.

Из доказательства теоремы 4.5 видно, что ЛОДУ n-го порядка имеет бесконечное множество фундаментальных систем решений.

Действительно, беря какой-либо другой определитель $\tilde{\Delta} \neq 0$, получим другую фундаментальную систему решений.

Теоремы 4.3 и 4.5 означают, что линейное пространство Ω_0 решений ЛОДУ n-го порядка имеет размерность n, другими словами, что любая система решений ЛОДУ n-го порядка, состоящая из более чем n решений, линейно зависима.

Лекция 5. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА

Теорема о структуре общего решения ЛНДУ n-го порядка; метод вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (5.1)$$

где $y = y(x)$ – неизвестная функция независимой переменной $x \in [a, b]$; $y = y'(x)$, …, $y^{(n-2)} = y^{(n-2)}(x)$, $y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x)$, $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ – производные неизвестной функции; $a_1(x), a_2(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ –некоторые заданные непрерывные функции на промежутке $[a, b]$, называемые коэффициентами уравнения (5.1); $f(x)$ – некоторая заданная непрерывная на $[a, b]$ функция, называемая правой частью уравнения (5.1).

Используя дифференциальный оператор (4.6), уравнение (5.1) можно записать в виде

$$Ly = f. \quad (5.2)$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (5.2):

$$\begin{cases} Ly = f; & (5.3) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, & (5.4) \end{cases}$$

где x_0 – произвольное фиксированное число из $[a, b]$; y_0, y'_0, y''_0, …, …, $y_0^{(n-1)}$ – произвольные фиксированные числа, называемые начальными значениями.

В силу теоремы 4.1 задача Коши (5.3), (5.4) имеет единственное решение, определённое на всём промежутке $[a, b]$.

Укажем структуру общего решения уравнения (5.2).

Рассмотрим *соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение* для уравнения (5.2), т.е. уравнение вида

$$Ly = 0. \quad (5.5)$$

Теорема 5.1. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ – ФСР для ЛОДУ (5.5), а y_* – фиксированное частное решение ЛНДУ (5.2), то общее решение ЛНДУ (5.2) задаётся формулой

$$y = y_* + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i, \quad (5.6)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – свободные параметры.

Покажем, что при любых конкретных значениях $C_1, C_2, ..., C_n$ функция вида (5.6) является решением уравнения (5.2). Действительно, в силу линейности дифференциального оператора L

$$Ly = L\left(y_* + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i \right) = Ly_* + \sum_{i=1}^{n} C_i\, Ly_i = f \ ,$$

так как $Ly_* = f$, $Ly_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Покажем, что любое решение уравнения (5.2); можно представить в виде (5.6). Пусть $\tilde{y}$ – произвольное фиксированное решение уравнения (5.2). Тогда

$$L(\tilde{y} - y_*) = L\tilde{y} - Ly_* = f - f = 0 \ ,$$

т.е разность $\tilde{y} - y_*$ является решением ЛОДУ (5.5).

В силу теоремы 4.3 это решение можно записать в виде

$$\tilde{y} - y_* = \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i\, y_i \ ,$$

откуда

$$\tilde{y} = y_* + \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i\, y_i \ ,$$

т.е. $\tilde{y}$ представлено в виде (5.6).

В силу теоремы 4.3 общее решение уравнения (5.2) можно записать в виде

$$y = y_* + y_{0.0} \ , \tag{5.7}$$

где y_* – частное решение ЛНДУ (5.2); $y_{0.0}$ – общее решение соответствующего ЛОДУ (5.5).

Из формулы (5.6) видно, что для нахождения общего решения ЛНДУ n-го порядка достаточно найти любое частное решение этого уравнения и ФСР, соответствующего ЛОДУ.

Частное решение ЛНДУ мы научимся находить лишь в том случае, когда его правая часть имеет специальный вид (соответствующий материал будет изложен ниже).

В общем случае для решения уравнения (5.2) применяется *метод вариации произвольных постоянных* (*метод Лагранжа*), который заключается в следующем.

1. Находим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (5.5):

$$y_{0.0} = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i \tag{5.8}$$

(для этого нужно уметь находить ФСР $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения (5.5), что мы научимся делать ниже для ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами).

2. Ищем общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.2) в том же виде, какой имеет общее решение, соответствующего ЛОДУ, т.е. в виде (5.8), но только вместо свободных параметров $C_1, C_2, ..., C_n$ записываем некоторые неизвестные пока функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i \ . \tag{5.9}$$

3. Находим $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$, подставляя (5.9) в уравнение (5.2):

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i' \ .$$

Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i = 0 \ ,$$

тогда

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i' \ ;$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i'' \ .$$

Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i' = 0\,,$$

тогда

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i''\,;$$

$$y''' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'' + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i'''\,.$$

…………………………………………………………………

Пусть

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-2)} = 0\,,$$

тогда

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n-1)}\,;$$

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n)}\,.$$

Подставляя функцию (5.9) и найденные выражения для её производных в левую часть уравнения (5.2), имеем

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n)} + a_1(x)\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n-1)} + \ldots +$$

$$+ a_{n-1}(x)\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i' + a_n(x)\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)} +$$

$$\begin{aligned}
&+ C_1(x)\Big(y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y_1' + a_n(x) y_1\Big) + \\
&+ C_2(x)\Big(y_2^{(n)} + a_1(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y_2' + a_n(x) y_2\Big) + \ldots + \\
&+ C_n(x)\Big(y_n^{(n)} + a_1(x) y_n^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y_n' + a_n(x) y_n\Big) =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)} + C_1(x)\, Ly_1 + C_2(x)\, Ly_2 + \ldots + C_n(x)\, Ly_n = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}\,,$$

так как $Ly_1 = 0$, $Ly_2 = 0$, … , $Ly_n = 0$, ибо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решения уравнения (17.5).

Получили

$$Ly = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}\,.$$

По условию $Ly = f$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)} = f(x)\,.$$

Итак, для производных неизвестных функций $C_1(x), C_2(x), \ldots,\ C_n(x)$ получаем систему *n* уравнений вида

$$\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i C_i'(x) = 0\,, \\
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i' C_i'(x) = 0\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{(n-2)} C_i'(x) = 0\,, \\
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{(n-1)} C_i'(x) = f(x)\,.
\end{cases} \qquad (5.10)$$

Определитель Δ системы (5.10) является вронскианом $\mathrm{W}(x)$ решений $y_1, y_2, \dots, y_n$, следовательно, $\Delta \neq 0$, ибо $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы на $[a,b]$ (см. теорему 4.2). Поэтому система (5.10) имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера или методом исключения неизвестных.

Решая систему (5.10), получаем

$$C_1'(x) = \psi_1(x)\,,\ C_2'(x) = \psi_2(x)\,,\ \dots\,,\ C_n'(x) = \psi_n(x)\,.$$

Тогда

$$C_1(x) = \int \psi_1(x)\,dx = \chi_1(x) + C_1\,,$$
$$C_2(x) = \int \psi_2(x)\,dx = \chi_2(x) + C_2\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_n(x) = \int \psi_n(x)\,dx = \chi_n(x) + C_n\,.$$

4. Подставляя найденные функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ в (5.9), получаем семейство решений уравнения (5.2) :

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\chi_i(x) + C_i \right) y_i\,, \tag{5.11}$$

где $C_1, C_2,\ \dots, C_n$ – свободные параметры.

Выражение (5.11) можно записать в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x)\, y_i + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i\,. \tag{5.12}$$

Полагая в (5.12) $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $\dots$, $C_n = 0$, получаем частное решение уравнения (5.2) :

$$y_* = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x)\, y_i\,.$$

Тогда (5.12) принимает вид

$$y = y_* + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i\,,$$

следовательно, в силу теоремы 5.1 формула (5.12) даёт общее решение уравнения (5.2).

Итак, общее решение ЛНДУ *n*-го порядка можно найти методом вариации произвольных постоянных, если известна ФСР соответствующего ЛОДУ.

Ниже будет указан способ нахождения ФСР для ЛОДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами.

Лекция 6. ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами, общая схема построения ФСР, конкретный пример нахождения ФСР.

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,, \tag{6.1}$$

где $y = y(x)$ – неизвестная функция независимой переменной $x \in (-\infty, +\infty)$; $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$, $\dots$, $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ – производные неизвестной функции; $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ – некоторые заданные действительные числа, называемые *коэффициентами уравнения*.

Используя дифференциальный оператор $L: C^n(-\infty, +\infty) \to$ $\to C(-\infty, +\infty)$, определяемый для любой функции $u \in C^n(-\infty, +\infty)$ формулой

$$Lu = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + a_2 u^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} u' + a_n u\,,$$

уравнение (6.1) можно записать в виде

$$Ly = 0\,. \tag{6.2}$$

Уравнение (6.1) – это частный случай ЛОДУ (4.1), когда коэффициенты уравнения (4.1) тождественно равны постоянным. Следовательно, для уравнения (6.1) справедливы все факты, доказанные для уравнения (4.1), в частности, справедлива теорема о структуре общего решения ЛОДУ (теорема 4.3), в силу которой общее решение уравнения (6.1) задаётся формулой

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i\,, \tag{6.3}$$

где $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ – некоторая ФСР уравнения (6.1); $C_1, C_2,\ ..., C_n$ – свободные параметры.

Построим ФСР уравнения (6.1), т.е. найдём *n* линейно независимых решений этого уравнения.

Будем искать решения уравнения в виде

$$y=e^{\lambda x}\,. \tag{6.4}$$

Выясним, при каких λ функция вида (6.4) является решением уравнения (6.1). Имеем

$$L\left(e^{\lambda x}\right)\overset{def}{=}\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)}+a_1\left(e^{\lambda x}\right)^{(n-1)}+a_2\left(e^{\lambda x}\right)^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)'+a_n e^{\lambda x}=$$
$$=\lambda^n e^{\lambda x}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+a_2\lambda^{n-2}e^{\lambda x}+\ldots+a_{n-1}\lambda e^{\lambda x}+a_n e^{\lambda x}=$$
$$=e^{\lambda x}\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n\right).$$

Полагая

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n\,, \tag{6.5}$$

получаем

$$L\left(e^{\lambda x}\right)=e^{\lambda x}P(\lambda)\,. \tag{6.6}$$

Так как $e^{\lambda x}\neq 0\,,\ \forall\ x\in \mathrm{P}$, то в силу (6.6) $L\left(e^{\lambda x}\right)=0$, т.е. функция (6.4) является решением уравнения (6.1) , если λ является корнем уравнения

$$P(\lambda)=0\,, \tag{6.7}$$

или, другими словами, корнем многочлена $P(\lambda)$.

Многочлен (6.5) *называется характеристическим многочленом*, уравнение (6.7) – *характеристическим уравнением*, а его корни – *характеристическими числами ЛОДУ* (6.1).

Для получения характеристического уравнения (6.7) достаточно в уравнении (6.1) сделать формальную замену $y^{(k)}$ на λ^k, $k=1,2,\ldots,n$, и y на $\lambda^0=1$.

Из алгебры известно [2.5, с. 157], что любой многочлен степени *n* имеет в поле комплексных чисел *n* корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность. Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ – корни многочлена $P(\lambda)$, а $r_1,\ r_2,\ldots,r_p$ – соответственно их кратности. Заметим, что $p\le n$, $r_1+r_2+\ldots+r_p=n$.

Лемма 6.1. Для любого фиксированного $1\le s\le p$ корню λ_s кратности r_s соответствует r_s решений уравнения (6.2) вида

$$y_{s1}=e^{\lambda_s x}\,,\ y_{s2}=xe^{\lambda_s x}\,,\ \ldots\,,\ y_{sr_s}=x^{r_s-1}e^{\lambda_s x}\,. \tag{6.8}$$

Пусть $r_s=1$, т.е. λ_s является простым корнем. Тогда набор функций (6.8) состоит из одной функции $y=e^{\lambda_s x}$, которая, как уже установлено, является решением уравнения (6.2). Пусть $r_s\ge 2$. Покажем, что для любого $m\in \mathrm{N}$ справедлива формула

$$L\left(x^m e^{\lambda x}\right)=\left[L\left(e^{\lambda x}\right)\right]_{\lambda}^{(m)}. \tag{6.9}$$

Действительно,

$$\left[L\left(e^{\lambda x}\right)\right]_{\lambda}^{(m)}=\left[\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n)}+a_1\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)'_x+a_n\, e^{\lambda x}\right]_{\lambda}^{(m)}=$$
$$=\left[\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n)}\right]_{\lambda}^{(m)}+a_1\left[\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)}\right]_{\lambda}^{(m)}+\ldots+$$
$$+a_{n-1}\left[\left(e^{\lambda x}\right)'_x\right]_{\lambda}^{(m)}+a_n\left[e^{\lambda x}\right]_{\lambda}^{(m)}. \tag{6.10}$$

Из математического анализа известно [2.9, с. 407] : если функция двух переменных $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{\partial^\ell z}{\partial y^\ell}\right)$, $\frac{\partial^\ell}{\partial y^\ell}\left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k}\right)$, то

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{\partial^\ell z}{\partial y^\ell}\right) = \frac{\partial^\ell}{\partial y^\ell}\left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k}\right). \qquad (6.11)$$

В силу (6.10), (6.11)

$$\left[L\left(e^{\lambda x}\right)\right]_\lambda^{(m)} = \left[\left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(m)}\right]_x^{(n)} + a_1\left[\left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(m)}\right]_x^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+a_{n-1}\left[\left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(m)}\right]_x' + a_n\left[\left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(m)}\right] = \left(x^m e^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1\left(x^m e^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+a_{n-1}\left(x^m e^{\lambda x}\right)_x' + a_n\left(x^m e^{\lambda x}\right) \overset{def}{=} L\left(x^m e^{\lambda x}\right).$$

Формула (6.9) доказана.

С другой стороны, используя равенство (6.6) и формулу Лейбница для m-й производной от произведения двух функций [2.3, с. 185]

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(m-k)} v^{(k)},$$

получаем

$$\left[L\left(e^{\lambda x}\right)\right]_\lambda^{(m)} = \left[e^{\lambda x}P(\lambda)\right]_\lambda^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(m-k)} P^{(k)}(\lambda) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} e^{\lambda x} P^{(k)}(\lambda). \qquad (6.12)$$

В силу (6.9), (6.12)

$$L\left(x^m e^{\lambda x}\right) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} e^{\lambda x} P^{(k)}(\lambda). \qquad (6.13)$$

Полагая в (6.13) $\lambda = \lambda_s$, получаем

$$L\left(x^m e^{\lambda_s x}\right) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} e^{\lambda_s x} P^{(k)}(\lambda_s). \qquad (6.14)$$

Так как λ_s является корнем кратности r_s уравнения $P(\lambda) = 0$, то

$$P(\lambda_s) = P'(\lambda_s) = \ldots = P^{(r_s-1)}(\lambda_s) = 0, \quad P^{(r_s)}(\lambda_s) \neq 0. \qquad (6.15)$$

Действительно, по определению корня кратности r_s,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^{r_s} \overset{(1)}{P}(\lambda), \quad \overset{(1)}{P}(\lambda_s) \neq 0. \qquad (6.16)$$

Тогда

$$P'(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^{r_s-1} \overset{(2)}{P}(\lambda), \quad \overset{(2)}{P}(\lambda_s) \neq 0, \qquad (6.17)$$

где

$$\overset{(2)}{P}(\lambda) = r_s \overset{(1)}{P}(\lambda) + (\lambda - \lambda_s)\overset{(1)}{P'}(\lambda).$$

Далее,

$$P''(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^{r_s-2} \overset{(3)}{P}(\lambda), \quad \overset{(3)}{P}(\lambda_s) \neq 0; \qquad (6.18)$$

…………………………………………

$$P^{(r_s-1)}(\lambda) = (\lambda - \lambda_s) \overset{(r_s)}{P}(\lambda), \quad \overset{(r_s)}{P}(\lambda_s) \neq 0; \qquad (6.19)$$

$$P^{(r_s)}(\lambda) = \overset{(r_s+1)}{P}(\lambda), \quad \overset{(r_s+1)}{P}(\lambda_s) \neq 0, \qquad (6.20)$$

где

$$\overset{(r_s+1)}{P}(\lambda)=\overset{(r_s)}{P}(\lambda)+(\lambda-\lambda_s)\overset{(r_s)}{P'}(\lambda).$$

Из (6.16) – (6.20) следует (6.15).

Из (6.14) следует, в силу (6.15), что при $m=1,2,\dots,r_s-1$

$$L\left(x^m e^{\lambda_s x}\right)=0,$$

т.е. функции (6.8) являются решениями уравнения (6.2).

В силу леммы 6.1 уравнение (6.2) имеет *n* решений вида

$$\begin{aligned}
&y_{11}=e^{\lambda_1 x},\quad y_{12}=xe^{\lambda_1 x},\quad \dots,\quad y_{1r_1}=x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x};\\
&y_{21}=e^{\lambda_2 x},\quad y_{22}=xe^{\lambda_2 x},\quad \dots,\quad y_{2r_2}=x^{r_2-1}e^{\lambda_2 x};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_{p1}=e^{\lambda_p x},\ y_{p2}=xe^{\lambda_p x},\quad \dots,\ y_{pr_p}=x^{r_p-1}e^{\lambda_p x}.
\end{aligned}\tag{6.21}$$

Лемма 6.2. Решения (6.21) линейно независимы.

Ограничимся простейшим случаем, когда кратность каждого корня характеристического уравнения равна единице, т.е. когда все корни характеристического уравнения являются простыми (доказательство в общем случае см. в [1.2, с. 232]. Тогда (6.21) можно записать в виде

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\ \ y_2=e^{\lambda_2 x},\ \ \dots,\ \ y_n=e^{\lambda_n x}.\tag{6.22}$$

Запишем вронскиан решений (6.22):

$$\mathrm{W}(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n x}\end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\mathrm{W}(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}.\tag{6.23}$$

Определитель в правой части (6.23) есть известный *определитель Вандермонда*. Он равен произведению всевозможных разностей $\lambda_i-\lambda_j$, где $1\le j<i\le n$ [2.5, с. 50]. Следовательно,

$$\mathrm{W}(0)=\prod_{1\le j<i\le n}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\ne 0,\tag{6.24}$$

так как $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ различны. Из (6.24) вытекает в силу следствия 4.3 линейная независимость решений (6.22).

В силу лемм 6.1 и 6.2 справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. Система *n* функций вида (6.21) является ФСР уравнения (6.2).

В силу (6.3) общее решение уравнения (6.2) задаётся формулой

$$y=\sum_{s=1}^{p}\sum_{k=0}^{r_s-1}C_{sk}\,x^k e^{\lambda_s x},\tag{6.25}$$

где C_{sk} – свободные параметры ($1\le s\le p$, $0\le k\le r_s-1$). В случае, когда ФСР имеет вид (6.22), общее решение уравнения (6.2) можно записать так:

$$y=\sum_{s=1}^{n}C_s\,e^{\lambda_s x},\tag{6.26}$$

где C_s – свободные параметры ($1\le s\le n$).

Среди корней характеристического уравнения могут оказаться комплексные числа. Пусть $\lambda_s=\alpha+i\beta$ – комплексный корень кратности r_s характеристического уравнения. Тогда решения (6.8), порождаемые этим корнем, имеют вид

$$y_{s1}=e^{(\alpha+i\beta)x},\ \ y_{s2}=xe^{(\alpha+i\beta)x},\ \ \dots,\ \ y_{sr_s}=x^{r_s-1}e^{(\alpha+i\beta)x}.\tag{6.27}$$

Используя основное свойство показательной функции и формулу Эйлера $e^{iz}=\cos z+i\sin z, \forall\ z\in X$ [2.7, с. 86], эти решения можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} &y_{s1}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\\ &y_{s2}=xe^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &y_{sr_s}=x^{r_s-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x). \end{aligned} \tag{6.28}$$

Решения (6.28) являются комплекснозначными функциями действительной переменной x. В практических задачах удобнее работать с решениями уравнения (6.2) в виде вещественнозначных функций действительной переменной x.

Замечание 6.1. Если комплекснозначная функция $z(x)=u(x)+ + iv(x)$ является решением уравнения (6.2), т.е. $Lz=0$, то её действительная и мнимая части тоже являются решениями уравнения (6.2), т.е. $Lu=0$, $Lv=0$.

Действительно, используя линейность дифференциального оператора L, получаем

$$Lz=L(u+iv)=Lu+iLv.$$

По условию $Lz=0$, т.е. $Lu+iLv=0$, откуда следует, что $Lu=0$, $Lv=0$, так как $a_1+ib_1=a_2+ib_2 \Leftrightarrow a_1=a_2,\ b_1=b_2$.

В силу замечания 6.1 вещественнозначные функции вида

$$\begin{aligned} &y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x;\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x;\\ &y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x;\quad y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x;\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &y_{2r_s-1}=x^{r_s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;\quad y_{2r_s}=x^{r_s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned} \tag{6.29}$$

являются решениями уравнения (6.2), так как эти функции есть действительные и мнимые части комплекснозначных решений (6.28) уравнения (6.2).

Из алгебры известно [2.5, с. 160], что если комплексное число является корнем кратности r многочлена с действительными коэффициентами, то сопряженное ему число тоже является корнем кратности r этого многочлена. Следовательно, $\overline{\lambda}_s=\alpha-i\beta$ является корнем кратности r_s характеристического многочлена. Решения уравнения (6.2), порождаемые корнем $\overline{\lambda}_s$, имеют вид

$$\begin{aligned} &y_{s1}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x),\\ &y_{s2}=xe^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &y_{sr_s}=x^{r_s-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x). \end{aligned} \tag{6.30}$$

В силу замечания 6.1 действительные и мнимые части решений (6.30) тоже являются решениями уравнении (6.2), но эти решения почти те же, что и решения (6.29) (разница лишь в знаке решений, содержащих $\sin\beta x$).

Если в ФСР (6.21) r_s комплекснозначных решений (6.28), порождаемых корнем λ_s, и r_s комплекснозначных решений (6.30), порождаемых корнем $\overline{\lambda}_s$, заменить $2r_s$ вещественнозначными решениями (6.29), то полученная система решений останется линейно независимой [1.5, с. 237], т.е. будет ФСР уравнения.

Итак, пара комплексных сопряжённых корней $\lambda_s=\alpha+i\beta$, $\overline{\lambda}_s= =\alpha-i\beta$ кратности r_s характеристического уравнения порождает $2r_s$ вещественнозначных решений (6.29) уравнения (6.2). В частности, пара простых комплексных сопряжённых корней $\lambda_s=\alpha+i\beta$, $\overline{\lambda}_s=\alpha-i\beta$ порождает два решения уравнения (6.2) вида

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{6.31}$$

Замечание 6.2. Пара простых мнимых сопряжённых корней $\lambda_s=i\beta$, $\overline{\lambda}_s=-i\beta$ порождает два решения уравнения (6.2) вида

$$y_1=\cos\beta x,\quad y_2=\sin\beta x.$$

Замечание 6.3. Пара мнимых сопряжённых корней $\lambda_s=i\beta$, $\overline{\lambda}_s= =-i\beta$ кратности r_s порождает $2r_s$ решений уравнения (6.2) вида

$$\begin{aligned} &y_1=\cos\beta x;\quad y_2=\sin\beta x;\\ &y_3=x\cos\beta x;\quad y_4=x\sin\beta x;\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &y_{2r_s-1}=x^{r_s-1}\cos\beta x;\quad y_{2r_s}=x^{r_s-1}\sin\beta x. \end{aligned}$$

Получаем следующий рецепт построения ФСР ЛОДУ n-порядка с постоянными коэффициентами.

1. Составляем характеристическое уравнение.
2. Находим его корни.

3. Для каждого корня λ_s записываем решения, порождаемые этим корнем, по следующему правилу:

- если λ_s – простой вещественный корень, то ему соответствует одно решение вида $y = e^{\lambda_s x}$;
- если λ_s – вещественный корень кратности r_s, то ему соответствуют r_s решений вида (6.8);
- если $\lambda_s = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda}_s = \alpha - i\beta$ – пара простых комплексных сопряженных корней, то им соответствуют два решения вида (6.31);
- если $\lambda_s = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda}_s = \alpha - i\beta$ – пара комплексных сопряжённых корней кратности r_s, то этой паре соответствуют $2r_s$ решений вида (6.29).

Совокупность полученных *n* решений является ФСР.

Найдём, например, ФСР уравнения

$$y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0. \qquad (6.32)$$

1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0. \qquad (6.33)$$

2. Находим его корни: методом подбора видим, что $\lambda_1 = 1$ – корень. Разделим левую часть уравнения на $\lambda - 1$:

$$\begin{array}{rl}
-\;\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 & \big|\;\lambda - 1 \\
\underline{\lambda^3 - \lambda^2} \qquad\qquad & \;\;\lambda^2 - 4\lambda + 13 \\
-\;-4\lambda^2 + 17\lambda - 13 & \\
\underline{-4\lambda^2 + 4\lambda} \qquad\; & \\
-\;13\lambda - 13 & \\
\underline{13\lambda - 13} & \\
0 &
\end{array}$$

Решая уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, получаем два комплексных сопряжённых корня $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$.

3. Записываем ФСР: простому вещественному корню $\lambda_1 = 1$ соответствует решение $y_1 = e^x$, паре простых комплексных сопряжённых корней $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$ соответствуют два решения $y_2 = e^{2x}\cos 3x$, $y_3 = e^{2x}\sin 3x$. Получили

$$\text{ФСР}: \; y_1 = e^x, \; y_2 = e^{2x}\cos 3x, \; y_3 = e^{2x}\sin 3x.$$

В силу (6.3) общее решение уравнения (6.32) имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x,$$

где C_1, C_2, C_3 – свободные параметры.

Лекция 7. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Вид ФСР ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, пример решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных, пример решения задачи Коши.

Важную роль в различных приложениях имеют линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Это обусловлено тем, что при изучении физического процесса приходится, как правило, учитывать скорость протекания этого процесса и его ускорение, т.е. иметь дело с первой и второй производными искомой функции, описывающей данный процесс.

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (7.1)$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (7.2)$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \qquad (7.3)$$

Уравнение (7.3) имеет в поле комплексных чисел два корня λ_1, λ_2. Возможны следующие случаи.

1. λ_1, λ_2 – различные вещественные корни. Тогда

$$\text{ФСР}: \; y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x},$$

и общее решение уравнения (7.2) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где C_1, C_2 – свободные параметры.

2. λ_1, λ_2 – вещественны и совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, т.е. вещественное число λ_0 является корнем кратности $r = 2$. Тогда

$$\text{ФСР}: \ y_1 = e^{\lambda_0 x}, \ y_2 = x e^{\lambda_0 x},$$

и общее решение уравнения (7.2) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}$$

или

$$y = e^{\lambda_0 x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

3. λ_1, λ_2 – комплексные числа: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.
Тогда

$$\text{ФСР}: \ y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

и общее решение уравнения (7.2) имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

или

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

Решим, например, следующие уравнения:

1. $y'' + y' - 6y = 0$:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

$$\lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = 2;$$

ФСР: $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{2x}$,

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

2. $y'' - 10y' + 25y = 0$:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = 5;$$

ФСР: $y_1 = e^{5x}$, $y_2 = xe^{5x}$,

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}.$$

3. $y'' + 6y' + 13y = 0$:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0,$$

$$\lambda_1 = -3 + 2i, \ \lambda_2 = -3 - 2i;$$

ФСР: $y_1 = e^{-3x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-3x}\sin 2x$,

$$y = C_1 e^{-3x}\cos 2x + C_2 e^{-3x}\sin 2x.$$

Для решения ЛНДУ (7.1) применяется метод вариации произвольных постоянных (см. лекцию 5).

Решим, например, уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}. \tag{7.4}$$

1. Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Имеем

$$\lambda^2+3\lambda+2=0\,,$$
$$\lambda_1=-2\,,\ \ \lambda_2=-1\,;$$

ФСР : $y_1=e^{-2x}$, $y_2=e^{-x}$,

$$y=C_1\,e^{-2x}+C_2e^{-x}\,.$$

2. Ищем общее решение уравнения (7.4) в виде

$$y=C_1(x)\,e^{-2x}+C_2(x)e^{-x}\,. \tag{7.5}$$

3. Находим $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ из системы (5.10):

$$\begin{cases} e^{-2x}C_1'(x)+e^{-x}C_2'(x)=0\,, \\ \left(e^{-2x}\right)'C_1'(x)+\left(e^{-x}\right)'C_2'(x)=\dfrac{1}{1+e^x}\,. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} e^{-2x}C_1'(x)+e^{-x}C_2'(x)=0\,, & \Big|\cdot e^x \\ -2e^{-2x}C_1'(x)-e^{-x}C_2'(x)=\dfrac{1}{1+e^x}\,, & \Big|\cdot e^x \end{cases}$$

$$+\begin{cases} e^{-x}C_1'(x)+C_2'(x)=0\,, \\ -2e^{-x}C_1'(x)-C_2'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}\,. \end{cases}$$

$$-e^{-x}C_1'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}\,,$$

$$C_1'(x)=-\frac{e^{2x}}{1+e^x}\,;$$

$$C_2'(x)=-e^{-x}C_1'(x)\,,$$
$$C_2'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}\,.$$

Тогда

$$C_1(x)=-\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}=\left|\begin{matrix} t=1+e^x \\ dt=e^xdx \\ e^x=t-1\end{matrix}\right|=-\int\frac{t-1}{t}dt=-\int dt+\int\frac{dt}{t}=$$

$$=-t+\ln|\,t\,|+C_1=-1-e^x+\ln\left(1+e^x\right)+C_1\,;$$

$$C_2(x)=-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\left|\begin{matrix} t=1+e^x \\ dt=e^xdx\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|\,t\,|+C_2=\ln\left(1+e^x\right)+C_2\,.$$

Получили

$$C_1(x)=\,-1-e^x+\ln\left(1+e^x\right)+C_1\,,$$
$$C_2(x)=\ln\left(1+e^x\right)+C_2\,.$$

4. Подставляя найденные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ в (7.5), получаем общее решение уравнения (7.4):

$$y=\left(-1-e^x+\ln\left(1+e^x\right)+C_1\right)e^{-2x}+\left(\ln\left(1+e^x\right)+C_2\right)e^{-x}$$

или

$$y=\left(\,e^{-2x}+e^{-x}\right)\left[-1+\ln\left(\,1+e^x\,\right)\ \right]+C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}\,.$$

Решим задачу Коши:

$$\begin{cases} y''+9y=\dfrac{9}{\sin 3x}\ \ ; & (7.6) \\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=4,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3\pi}{2}. & (7.7) \end{cases}$$

1. Найдём общее решение уравнения (7.6):

$$y'' + 9y = 0\,,$$

$$\lambda^2 + 9 = 0\,,$$

$$\lambda_1 = 3i\,,\ \ \lambda_2 = -3i\,,$$

ФСР : $y_1 = \cos 3x\,,\ \ y_2 = \sin 3x\,,$

$$y_{0.0} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\,,$$

$$y = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x\,,$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0\,; \\ C_1'(x)(\cos 3x)' + C_2'(x)(\sin 3x)' = \dfrac{9}{\sin 3x}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0\,; \\ -3C_1'(x)\sin 3x + 3C_2'(x)\cos 3x = \dfrac{9}{\sin 3x}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0\,; \\ -C_1'(x)\sin 3x + C_2'(x)\cos 3x = \dfrac{3}{\sin 3x}\,. \end{cases}$$

Решим полученную систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -\sin 3x & \cos 3x \end{vmatrix} = \cos^2 3x + \sin^2 3x = 1\,,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \dfrac{3}{\sin 3x} & \cos 3x \end{vmatrix} = -3\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -\sin 3x & \dfrac{3}{\sin 3x} \end{vmatrix} = 3\operatorname{ctg} 3x\,,$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3\,,$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3\operatorname{ctg} 3x\,,$$

$$C_1(x) = -3\int dx = -3x + C_1\,,$$

$$C_2(x) = 3\int \operatorname{ctg} 3x\, dx = \ln|\sin 3x| + C_2\,,$$

$$y = (-3x + C_1)\cos 3x + \big(\ln|\sin 3x| + C_2\big)\sin 3x\,.$$

2. Подберём значения свободных параметров C_1, C_2 так, чтобы выполнялись заданные начальные условия $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$:

$$y' = -3\cos 3x + (-3x + C_1)(-3\sin 3x) +$$
$$+3\cos 3x + (\ln|\sin 3x| + C_2)3\cos 3x\,,$$

$$\begin{cases} \left(-3\,\dfrac{\pi}{6} + C_1\right)\cos\left(3\,\dfrac{\pi}{6}\right) + \left(\ln\left|\sin\left(3\,\dfrac{\pi}{6}\right)\right| + C_2\right)\sin\left(3\,\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\,, \\ -3\cos\left(3\,\dfrac{\pi}{6}\right) + \left(-3\,\dfrac{\pi}{6} + C_1\right)\left(-3\sin\left(3\,\dfrac{\pi}{6}\right)\right) + \\ +3\cos\left(3\,\dfrac{\pi}{6}\right) + \left(\ln\left|\sin\left(3\,\dfrac{\pi}{6}\right)\right| + C_2\right)3\cos\left(3\,\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 4\,, \\ -3\left(-\dfrac{\pi}{2} + C_1\right) = \dfrac{3\pi}{2}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 0\,, \\ C_2 = 4\,. \end{cases}$$

3. Подставляя найденные значения $C_1 = 0$, $C_2 = 4$ в общее решение уравнения, получаем решение задачи Коши (7.6), (7.7):

$$y = -3x\cos 3x + (4 + \ln|\sin 3x|)\sin 3x\,.$$

Лекция 8. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Специальная правая часть первого вида: случай, когда контрольное число не является корнем характеристического уравнения; случай, когда контрольное число является корнем характеристического уравнения; специальная правая часть второго вида, понятие краевой задачи.

Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \qquad (8.1)$$

Общее решение уравнения (8.1) всегда можно найти методом вариации произвольных постоянных (см. лекцию 5, конкретный пример см. в лекции 7).

Однако, если для уравнения (8.1) удаётся найти каким-либо образом некоторое его частное решение $y_{\text{ч}}$, то общее решение этого уравнения проще искать по формуле (5.7):

$$y = y_{0.0} + y_{\text{ч}}, \qquad (8.2)$$

где $y_{0.0}$ – общее решение соответствующего ЛОДУ.

В ряде случаев, когда правая часть уравнения (8.1) имеет специальный вид, удаётся указать способ нахождения частного решения этого уравнения и, тем самым, применить формулу (8.2) для отыскания общего решения уравнения (8.1).

Пусть правая часть уравнения (8.1) имеет вид

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}, \qquad (8.3)$$

где α – некоторое заданное действительное число (в дальнейшем мы будем называть его контрольным числом); $P_m(x)$ – некоторый заданный многочлен степени m:

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m .$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для соответствующего ЛОДУ n-го порядка:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \qquad (8.4)$$

Теорема 8.1. Если правая часть уравнения (8.1) имеет вид (8.3) и контрольное число α не является корнем характеристического уравнения (8.4), то уравнение (8.1) имеет частное решение вида

$$y_{\text{ч}} = Q_m(x) e^{\alpha x}, \qquad (8.5)$$

где $Q_m(x)$ – некоторый многочлен степени m.

► Функция вида (8.5) должна удовлетворять уравнению (8.1) :

$$L\left(Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = P_m(x) e^{\alpha x}. \qquad (8.6)$$

Учитывая, что

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m ,$$

и линейность дифференциального оператора L, получаем

$$L\left(Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = \sum_{k=0}^{m} q_k L\left(x^{m-k} e^{\alpha x}\right). \qquad (8.7)$$

В силу формулы (6.13)

$$L\left(x^{m-k} e^{\alpha x}\right) = \sum_{\nu=0}^{m-k} C_{m-k}^{\nu} P^{(\nu)}(\alpha)\, x^{m-k-\nu} e^{\alpha x}. \qquad (8.8)$$

В силу (8.7), (8.8)

$$L\left(Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = \sum_{k=0}^{m} q_k \sum_{\nu=0}^{m-k} C_{m-k}^{\nu} P^{(\nu)}(\alpha)\, x^{m-k-\nu} e^{\alpha x}. \qquad (8.9)$$

Заменяя левую часть (8.6) на (8.9) и сокращая на общий множитель $e^{\alpha x}$, получаем

$$\sum_{k=0}^{m} q_k \sum_{\nu=0}^{m-k} C_{m-k}^{\nu} P^{(\nu)}(\alpha)\, x^{m-k-\nu} = P_m(x)\,,$$

или, в развёрнутой форме,

$$\begin{aligned}
& q_0 \Big[\, P(\alpha)x^m + C_m^1 P'(\alpha)x^{m-1} + C_m^2 P''(\alpha)x^{m-2} + \ldots + C_m^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha)x + P^{(m)}(\alpha) \Big] + \\
& + q_1 \Big[\, P(\alpha)x^{m-1} + C_{m-1}^1 P'(\alpha)x^{m-2} + \ldots + C_{m-1}^{m-2} P^{(m-2)}(\alpha)x + P^{(m-1)}(\alpha) \Big] + \\
& + q_2 \Big[\, P(\alpha)x^{m-2} + \ldots + C_{m-2}^{m-3} P^{(m-3)}(\alpha)x + P^{(m-2)}(\alpha) \Big] + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + q_{m-1} \Big[\, P(\alpha)x + P'(\alpha) \Big] + \\
& + q_m \Big[\, P(\alpha) \Big] = \; = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}x + p_m\,.
\end{aligned}$$

Получили равенство двух многочленов степени *m*. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем следующую систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}, q_m$ многочлена $Q_m(x)$:

$$\begin{cases}
P(\alpha)q_0 = p_0\,, \\
P(\alpha)q_1 + C_m^1 P'(\alpha)q_0 = p_1\,, \\
P(\alpha)q_2 + C_{m-1}^1 P'(\alpha)q_1 + C_m^2 P''(\alpha)q_0 = p_2\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P(\alpha)q_{m-1} + \ldots + C_{m-1}^{m-2} P^{(m-2)}(\alpha)q_1 + C_m^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha)q_0 = p_{m-1}\,, \\
P(\alpha)q_m + P'(\alpha)q_{m-1} + \ldots + P^{(m-1)}(\alpha)q_1 + P^{(m)}(\alpha)q_0 = p_m\,.
\end{cases} \qquad (8.10)$$

По условию теоремы $P(\alpha) \neq 0$. Тогда из первого уравнения системы (8.10) можно найти q_0. Зная q_0, из второго уравнения можно найти q_1 и так далее.

Итак, функция вида (8.5) с коэффициентами $q_0, q_1, \ldots, q_{m-1}, q_m$ многочлена $Q_m(x)$, являющимися решением системы (8.10), будет частным решением уравнения (8.1). ◄

Замечание 8.1. При практическом нахождении частного решения вида (8.5) уравнения (8.1) со специальной правой частью вида (8.3) пользуются той же схемой, что и при доказательстве теоремы 8.1: функцию вида (8.5) с неопределёнными пока коэффициентами $q_0, \; q_1, \ldots, \; q_{m-1}, q_m$ подставляют в уравнение (8.1); затем записывают систему вида (8.10), находят из неё $q_0, q_1, \ldots, q_{m-1}, q_m$ и найденные значения подставляют в формулу (8.5). Такой способ нахождения частного решения уравнения (8.1) называется *методом неопределённых коэффициентов*.

Замечание 8.2. Правая часть уравнения (8.1) вида

$$f(x) = P_m(x)$$

является частным случаем правой части вида (8.3). В этом случае контрольное число α равно нулю.

Пример 8.1. Уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 e^{5x}$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{5x}\,,$$

так как правая часть $f(x) = x^2 e^{5x}$ имеет вид (8.3) и контрольное число $\alpha = 5$ не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

Пример 8.2. Уравнение

$$y'' - 2y' + 5y = 3x + 7$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч} = Ax + B\,,$$

так как правая часть $f(x) = 3x + 7$ имеет вид (8.3) и контрольное число $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$.

Теорема 8.2. Если правая часть уравнения (8.1) имеет вид (8.3) и контрольное число α является корнем кратности r характеристического уравнения (8.4), то уравнение (8.1) имеет частное решение вида

$$y_{ч} = x^r Q_m(x)\, e^{\alpha x}\,,$$

где $Q_m(x)$ – некоторый многочлен степени *m*.

Доказательство теоремы 8.2 аналогично доказательству теоремы 8.1 [1.3, с. 410].

Пример 8.3. Уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = (3x+5)\,e^{2x}$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч} = x^2(Ax+B)\,e^{2x},$$

так как правая часть $f(x) = (3x+5)\,e^{2x}$ имеет вид (8.3) и контрольное число $\alpha = 2$ является корнем кратности 2 характеристического уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$.

Пример 8.4. Уравнение

$$y'' + 9y' = 3x^2 - 5$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right),$$

так как правая часть $f(x) = 3x^2 - 5$ имеет вид (8.3) и контрольное число $\alpha = 0$ является корнем кратности 1 (простым корнем) характеристического уравнения $\lambda^2 + 9\lambda = 0$.

Пример 8.5. Уравнение

$$y'' - 2y' - 15 = 3xe^{5x}$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч} = x(Ax+B)\,e^{5x},$$

так как правая часть $f(x) = 3xe^{5x}$ имеет вид (8.3) и контрольное число $\alpha = 5$ является простым корнем характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$.

Пусть правая часть уравнения (8.1) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[A_m(x)\cos\beta x + B_\ell(x)\sin\beta x\right], \qquad (8.11)$$

где α, β – некоторые заданные действительные числа; $A_m(x)$ и $B_\ell(x)$ – некоторые заданные многочлены степеней m и ℓ соответственно.

Рассмотрим комплексное число $\alpha + i\beta$, которое в дальнейшем будем называть контрольным числом.

Замечание 8.3 (*принцип суперпозиции решений*). Если правая часть уравнения (8.1) имеет вид $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $y_{ч}^{(1)}$ – частное решение уравнения $Ly = f_1$, $y_{ч}^{(2)}$ – частное решение уравнения $Ly = f_2$, то $y_{ч} = y_{ч}^{(1)} + y_{ч}^{(2)}$ является частным решением уравнения (8.1).

Действительно, в силу аддитивности дифференциального оператора L, получаем

$$Ly_{ч} = L\left(y_{ч}^{(1)} + y_{ч}^{(2)}\right) = Ly_{ч}^{(1)} + Ly_{ч}^{(2)} = f_1 + f_2 = f.$$

Принцип суперпозиции решений распространяется на любое конечное число слагаемых.

Замечание 8.4. Если комплекснозначная функция $y = u(x) + iv(x)$ является решением уравнения

$$Ly = a(x) + ib(x),$$

то комплексно сопряжённая ей функция $\overline{y} = u(x) - iv(x)$ является решением уравнения

$$Ly = a(x) - ib(x).$$

Действительно, по условию

$$L\left(u(x) + iv(x)\right) = a(x) + ib(x). \qquad (8.12)$$

В силу линейности дифференциального оператора L,

$$L\left(u(x) + iv(x)\right) = Lu(x) + iLv(x). \qquad (8.13)$$

Из (8.12), (8.13) получаем

$$Lu(x) + iLv(x) = a(x) + ib(x).$$

Тогда

$$\overline{Lu(x) + iLv(x)} = \overline{a(x) + ib(x)},$$

т.е.

$$Lu(x) - iLv(x) = a(x) - ib(x),$$

или, в силу линейности оператора L,

$$L\big(u(x)-iv(x)\big)=a(x)-ib(x).$$

Теорема 8.3. Если правая часть уравнения (8.1) имеет вид (8.11) и контрольное число $\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (8.4), то уравнение (8.1) имеет частное решение вида

$$y_{\text{ч}}=e^{\alpha x}\left[S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x\right], \qquad (8.14)$$

где $S_N(x)$, $T_N(x)$ – некоторые многочлены степени N, $N=\max\{m,\ \ell\}$.

► Применяя известные формулы [2.7, с. 86]

$$\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right),\ \ \sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right),\ \ \forall\ z\in \mathrm{X},$$

получаем

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[\frac{1}{2}A_m(x)\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right)+\frac{1}{2i}B_\ell(x)\left(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}\right)\right]=$$

$$=e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{1}{2}A_m(x)+\frac{1}{2i}B_\ell(x)\right]+e^{(\alpha-i\beta)x}\left[\frac{1}{2}A_m(x)-\frac{1}{2i}B_\ell(x)\right]=$$

$$=e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{1}{2}A_m(x)-i\frac{1}{2}B_\ell(x)\right]+e^{(\alpha-i\beta)x}\left[\frac{1}{2}A_m(x)+i\frac{1}{2}B_\ell(x)\right].$$

Полагая $\lambda=\alpha+i\beta$, $P_N(x)=\frac{1}{2}A_m(x)-i\frac{1}{2}B_\ell(x)$, где $N=\max\{m,\ \ell\}$, имеем

$$f(x)=e^{\lambda x}P_N(x)+\overline{e^{\lambda x}P_N(x)}.$$

Уравнение $Ly=e^{\lambda x}P_N(x)$ имеет частное решение $y_{\text{ч}}^{(1)}=e^{\lambda x}Q_N(x)$, так как теорема 8.1 сохраняет силу, если в ней действительное число α заменить на комплексное число λ. В силу замечания 8.4 уравнение $Ly=\overline{e^{\lambda x}P_N(x)}$ имеет частное решение

$$y_{\text{ч}}^{(2)}=\overline{e^{\lambda x}Q_N(x)}=\overline{e^{\lambda x}}\,\overline{Q_N(x)}=e^{\bar{\lambda}x}\,\overline{Q_N(x)}.$$

В силу принципа суперпозиции решений, уравнение (8.1) с правой частью (8.11) имеет частное решение вида

$$y_{\text{ч}}=y_{\text{ч}}^{(1)}+y_{\text{ч}}^{(2)}=e^{(\alpha+i\beta)x}Q_N(x)+e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{Q_N(x)}=$$

$$=e^{\alpha x}\left[\left(Q_N(x)+\overline{Q_N(x)}\right)\cos\beta x+i\left(Q_N(x)-\overline{Q_N(x)}\right)\sin\beta x\right]=$$

$$=e^{\alpha x}\left[2\,\mathrm{Re}\,Q_N(x)\cos\beta x-2\,\mathrm{Im}\,Q_N(x)\sin\beta x\right]=$$

$$=e^{\alpha x}\left[S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x\right].$$

Собирая начало и конец записи, получаем формулу (8.14). ◄

Замечание 8.5. При практическом нахождении частного решения вида (8.14) уравнения (8.1) со специальной правой частью вида (8.11) поступают следующим образом: функцию вида (8.14) с неопределёнными пока коэффициентами многочленов $S_N(x)$, $T_N(x)$ подставляют в уравнение (8.1); затем сокращают обе части полученного соотношения на общий множитель $e^{\alpha x}$ и приравнивают коэффициенты при выражениях вида $x^k\cos\beta x$ и выражениях вида $x^k\sin\beta x$; из полученной системы алгебраических уравнений находят коэффициенты многочленов $S_N(x)$, $T_N(x)$ и подставляют их в формулу (8.14).

Замечание 8.6. Частными случаями специальной правой части вида (8.11) являются правые части вида

$$f(x)=A_m(x)\cos\beta x,\ (\alpha=0,\ B_\ell(x)\equiv 0);$$

$$f(x)=B_\ell(x)\sin\beta x,\ (\alpha=0,\ A_m(x)\equiv 0);$$

$$f(x)=e^{\alpha x}A_m(x)\cos\beta x,\ (B_\ell(x)\equiv 0);$$

$$f(x)=e^{\alpha x}B_\ell(x)\sin\beta x,\ (A_m(x)\equiv 0).$$

Пример 8.6. Уравнение

$$y''-7y'+12y=e^{2x}\left(x\cos 3x+5x^2\sin 3x\right)$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч} = e^{2x}\left[\left(Ax^2+Bx+C\right)\cos 3x+\left(Mx^2+Nx+F\right)\sin 3x\right],$$

так как правая часть $f(x)=e^{2x}\left(x\cos 3x+5x^2\sin 3x\right)$ имеет вид (8.11) и контрольное число $\alpha+i\beta=2+3i$ не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2-7\lambda+12=0$.

Пример 8.7. Уравнение

$$y''+4y'+13y=(2x+5)\cos 3x$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч}=(Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x,$$

так как правая часть $f(x)=(2x+5)\cos 3x$ имеет вид (8.11) и контрольное число $\alpha+i\beta=5i$ не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2+4\lambda+13=0$.

Пример 8.8. Уравнение

$$y''-10y'+25y=x^2e^x\sin 5x$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч}=e^x\left[\left(Ax^2+Bx+C\right)\cos 5x+\left(Mx^2+Nx+F\right)\sin 5x\right],$$

так как правая часть $f(x)=x^2e^x\sin 5x$ имеет вид (8.11) и контрольное число $\alpha+i\beta=1+5i$ не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2-10\lambda+25=0$.

Теорема 8.4. Если правая часть уравнения (8.1) имеет вид (8.11) и контрольное число $\alpha+i\beta$ является корнем кратности r характеристического уравнения (8.4), то уравнение (8.1) имеет частное решение вида

$$y_{ч}=x^re^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x],$$

где $S_N(x)$, $T_N(x)$ – некоторые многочлены степени *N*, $N=\max\{m,\ell\}$.

Теорема 8.4 доказывается аналогично теореме 8.3 [1.3, с. 412].

Пример 8.9. Уравнение

$$y''+6y'+13y=e^{-3x}(7\cos 2x+3x\sin 2x)$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч}=xe^{-3x}\left[\left(Ax+B\right)\cos 2x+\left(Cx+D\right)\sin 2x\right],$$

так как правая часть $f(x)=e^{-3x}(7\cos 2x+3x\sin 2x)$ имеет вид (8.11) и контрольное число $\alpha+i\beta=-3+2i$ является корнем кратности 1 (простым корнем) характеристического уравнения $\lambda^2+6\lambda+13=0$.

Пример 8.10. Уравнение

$$y''+25y=x\sin 5x$$

имеет частное решение вида

$$y_{ч}=x\left[\left(Ax+B\right)\cos 5x+\left(Cx+D\right)\sin 5x\right],$$

так как правая часть $f(x)=x\sin 5x$ имеет вид (8.11) и контрольное число $\alpha+i\beta=5i$ является простым корнем характеристического уравнения $\lambda^2+25=0$.

Как отмечалось выше (см. лекцию 3) задача Коши для дифференциального уравнения *n*-го порядка состоит в отыскании такого решения этого уравнения, которое в фиксированной точке x_0 принимает заданное значение y_0 и производные которого до $(n-1)$-го порядка включительно принимают в точке x_0 заданные значения $y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$. В различных приложениях возникает задача о нахождении решения дифференциального уравнения *n*-го порядка, удовлетворяющего *n* условиям, заданным в нескольких точках $x_1,x_2,\dots,x_k$ ($k\le n$). Такая задача называется *краевой* (или *граничной*) для дифференциального уравнения *n*-го порядка, а заданные *n* условий – *краевыми* (или *граничными*) условиями.

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''=f\left(x,y,y'\right). \tag{8.15}$$

Различают три основных вида краевых задач для уравнения (8.15).

Первая краевая задача (или *задача Дирихле*): найти на промежутке $[a,b]$ такое решение $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения (8.15), которое на концах промежутка принимает заданные значения y_a, y_b:

$$y(a) = y_a\,, \quad y(b) = y_b\,, \tag{8.16}$$

т.е. найти такую интегральную кривую дифференциального уравнения (8.15), начальной и конечной точками которой являются соответственно точки $A\left(a, y_a\right)$ и $B\left(b, y_b\right)$ (рис. 8.1).

Условия (8.16) называются *краевыми условиями первого рода*.

Вторая краевая задача (или *задача Неймана*): найти на промежутке $[a, b]$ такое решение дифференциального уравнения (8.15), производная которого на концах промежутка принимает заданные значения y'_a, y'_b:

$$y'(a) = y'_a\,, \; y'(b) = y'_b\,. \tag{8.17}$$

Условия (8.17) называют *краевыми условиями второго рода*.

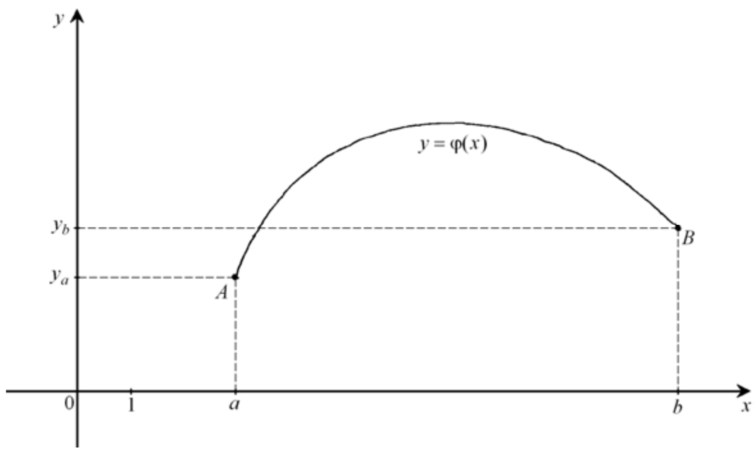

Рис. 8.1

Третья краевая задача: найти на промежутке $[a, b]$ решение дифференциального уравнения (8.15), удовлетворяющее на концах промежутка следующим условиям:

$$k_1 y(a) + \ell_1 y'(a) = u_a\,, \; k_2 y(b) + \ell_2 y'(b) = u_b\,,$$

где k_1, ℓ_1, k_2, ℓ_2, u_a, u_b – некоторые заданные числа.

Каждая из перечисленных задач называется *двухточечной краевой задачей*.

При выполнении определённых условий (см. теорему 3.1) задача Коши для дифференциального уравнения (8.15) имеет единственное решение. Иначе обстоит дело в случае краевой задачи. Краевая задача имеет либо единственное решение, либо более одного решения, либо не имеет ни одного решения.

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 0\,. \tag{8.18}$$

Найдём его общее решение: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$; ФСР : $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$,

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,, \tag{8.19}$$

где C_1, C_2 – свободные параметры.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (8.18) с граничными условиями

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1\,, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1\,. \tag{8.20}$$

Выясним, можно ли подобрать в формуле (8.19) значения параметров C_1, C_2 таким образом, чтобы выполнялись условия (8.20).

Согласно (8.20)

$$\begin{cases} C_1 \cos\dfrac{\pi}{6} + C_2 \sin\dfrac{\pi}{6} = 1; \\ C_1 \cos\dfrac{\pi}{3} + C_2 \sin\dfrac{\pi}{3} = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, C_1 + \dfrac{1}{2} C_2 = 1; \\ \dfrac{1}{2}\, C_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} C_2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,C_1 + C_2 = 2\,; \\ C_1 + \sqrt{3}\,C_2 = 2\,. \end{cases} \tag{8.21}$$

Решим систему (8.21) по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 2\,,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 2\sqrt{3} - 2\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3} - 2\,,$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,,\ C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}\,,$$

$$C_1 = \sqrt{3} - 1\,,\ C_2 = \sqrt{3} - 1\,.$$

Итак, краевая задача (8.18), (8.20) имеет единственное решение

$$y = \left(\sqrt{3} - 1\right)\cos x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\sin x\,.$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (8.18) с граничными условиями

$$y(0) = 1\,,\quad y(\pi) = -1\,. \tag{8.22}$$

Согласно (8.22)

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 & \Rightarrow\ C_1 = 1; \\ C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = -1 & \Rightarrow\ C_1 = 1. \end{cases}$$

Мы видим, что ограничений на параметр C_2 нет. Таким образом, краевая задача (8.18), (8.22) имеет бесконечное множество решений

$$y = \cos x + C_2 \sin x\,,$$

где C_2 – свободный параметр.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (8.18) с граничными условиями

$$y(0) = 1\,,\quad y(\pi) = 1\,. \tag{8.23}$$

Согласно (8.23)

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 & \Rightarrow\ C_1 = 1, \\ C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = 1 & \Rightarrow\ C_1 = -1. \end{cases}$$

Следовательно, краевая задача (8.18), (8.23) не имеет решений.

Лекция 9. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные определения, нормальная система дифференциальных уравнений, задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши, общее решение, частное решение, приложение к динамике материальной точки, метод исключения неизвестных.

Системой n дифференциальных уравнений первого порядка с *n неизвестными* называется система вида

$$\begin{cases} F_1(\,x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0\,; \\ F_2(\,x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(\,x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0\,, \end{cases} \tag{9.1}$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, …, $y_n = y_n(x)$ – неизвестные функции независимой переменной $x \in [a,b]$; $y_1' = y_1'(x)$, $y_2' = y_2'(x)$, …, $y_n' = y_n'(x)$ – производные неизвестных функций; $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – некоторые заданные функции $(2n+1)$ -й переменной.

Замечание 9.1. В качестве области изменения независимой переменной x может выступать также одно из следующих множеств:

$$(\,a,b\,]\,;\ [\,a,b\,)\,;\ (\,a,b\,)\,;\ (-\infty\,,b\,)\,;\ (-\infty\,,b\,]\,;\ (a,+\infty)\,;\ [\,a,+\infty)\,;\ (-\infty\,,+\infty)\,.$$

Решением системы (9.1) называется совокупность *n* непрерывно дифференцируемых функций $y_1 = \varphi_1(x)$; $y_2 = \varphi_2(x)$, …, $y_n = \varphi_n(x)$, при подстановке которых в уравнения системы получаются тождества относительно независимой переменной $x \in [a, b]$, при этом функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ называются *компонентами* этого *решения*.

В данном определении предполагается, что функции $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, …, $y_n = \varphi_n(x)$ удовлетворяют следующему условию

$$(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x), \dots, \varphi_n'(x)) \in D(F_j);$$
$$\forall\ x \in [a,b], \forall\ 1 \le j \le n,$$

где $D(F_j)$ – область определения функции F_j.

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{9.2}$$

т.е. система вида (9.1), уравнения которой разрешены относительно производных неизвестных функций.

Задачей Коши для системы (9.2) называется задача нахождения решения системы (9.2), удовлетворяющего заданным условиям

$$y_1(x_0) = \xi_1^0;\ y_2(x_0) = \xi_2^0, \dots, y_n(x_0) = \xi_n^0, \tag{9.3}$$

где x_0 – некоторое заданное значение из промежутка $[a,b]$; $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots$, ξ_n^0 – некоторые заданные числа. Числа $x_0, \xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0$ называются *начальными данными*, при этом $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0$ называются *начальными значениями*; условия (9.3) – *начальными условиями*.

Укажем условия, при выполнении которых задача Коши (9.2), (9.3) имеет единственное решение [1.3, с. 188].

Теорема 9.1 (*теорема Пикара*). Пусть правые части уравнений системы (9.2) определены в области

$$D = \left\{ (x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathrm{R}^{n+1}\ \middle|\ |x - x_0| \le \mu;\ \left| y_k - \xi_k^0 \right| \le \nu,\ k = 1,2,\dots,n \right\}$$

(здесь μ, ν – некоторые заданные положительные числа) и удовлетворяют на D следующим условиям:

1) $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($k = 1,2,\dots,n$) непрерывны по всем своим аргументам и, следовательно, ограничены, т.е. существует такое положительное число *M*, что для любой точки $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$

$$\left| f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \right| \le M;\ k = 1,2,\dots,n;$$

2) $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($k = 1,2,\dots,n$) имеют ограниченные частные производные по аргументам $y_1, y_2, \dots, y_n$, т.е. существует такое положительное число *K*, что для любой точки $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$

$$\left| \frac{\partial f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_\ell} \right| \le K;\ k, 1 = 1,2,\dots,n.$$

Тогда задача Коши (9.2), (9.3) имеет единственное решение, определённое, по крайней мере, при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min\left\{ \mu, \frac{\nu}{M} \right\}$.

Пусть правые части уравнений системы (9.2) определены в некоторой области $G \subseteq \mathrm{P}^{n+1}$. Пусть выполняется следующее условие: для каждой точки области *G* существует $(n+1)$ – мерный параллелепипед с центром в этой точке, расположенный в области G, на котором выполняются условия теоремы 9.1. Тогда каждое локальное решение системы (9.2) можно продолжить до полного решения этой системы.

Зафиксируем некоторое $x_0 \in \mathrm{P}$, такое, что множество

$$G_0 = \left\{ (x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in G \mid x = x_0 \right\}$$

не пусто. В качестве начальных значений возьмём любые $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0$, такие что $(x_0, \xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0) \in G_0$. Тогда задача Коши (9.2), (9.3) имеет единственное решение (для каждого набора начальных значений ξ_1^0, $\xi_2^0, \dots, \xi_n^0$ решение своё):

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, \xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0), \\ y_2 = \varphi_2(x, \xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, \xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0). \end{cases}$$

Беря различные значения для $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$, получаем бесконечное множество решений системы (9.2). В связи с этим введём следующее определение.

Общим решением системы дифференциальных уравнений (9.2) называется n-параметрическое семейство наборов из n функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(\,x,\; C_1,\; C_2,\; \ldots\,, C_n\,), \\ y_2 = \varphi_2(\,x,\; C_1,\; C_2,\; \ldots\,, C_n\,), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(\,x,\; C_1,\; C_2,\; \ldots\,, C_n\,), \end{cases}$$

(где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – параметры; $\left(C_1, C_2, \ldots, C_n\right) \in P_n$, $P_n \subseteq \mathrm{P}^n$), удовлетворяющее следующим условиям:

а) любой набор функций из этого семейства является решением системы уравнений (9.2), т.е. при любом фиксированном наборе значений параметров $\left(C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*\right) \in P_n$ набор функций

$$y_i^* = \varphi_i\left(x, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*\right),\; 1 \le i \le n,$$

является решением системы уравнений (9.2);

б) любое решение системы уравнений (9.2), удовлетворяющее заданным начальным условиям (9.3), принадлежит этому семейству, т.е. найдётся набор значений параметров $\left(C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right) \in P_n$, такой, что набор функций

$$y_i^0 = \varphi_i\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right),\; 1 \le i \le n,$$

является решением задачи Коши (9.2), (9.3).

Частным решением системы дифференциальных уравнений называется её решение, которое получается из общего решения этой системы при конкретном наборе значений параметров $\left(C_1, C_2, \ldots, C_n\right) \in P_n$.

Замечание 9.2. Если на параметры $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ограничений нет, т.е. $P_n = \mathrm{P}^n$, то эти параметры называют *свободными параметрами* (или *произвольными постоянными*).

Нормальные системы дифференциальных уравнений используются для изучения динамики материальной точки.

Пусть в нормальной системе в качестве независимой переменной выступает время t, а в качестве неизвестных функций $x_1 = x_1(t)$; $x_2 = x_2(t)$, …, $x_n = x_n(t)$, т.е. система имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = f_1(\,t, x_1, x_2, \ldots, x_n\,); \\ x_2' = f_2(\,t, x_1, x_2, \ldots, x_n\,); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(\,t, x_1, x_2, \ldots, x_n\,). \end{cases} \tag{9.4}$$

Начальные условия (9.3) принимают вид

$$x_1(t_0) = \xi_1^0,\; x_2(t_0) = \xi_2^0,\; \ldots,\; x_n(t_0) = \xi_n^0, \tag{9.5}$$

где t_0 – некоторое заданное число, называемое начальным моментом времени; $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$ – некоторые заданные числа, при этом точка $M_0\left(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\right) \in \mathrm{P}^n$ называется начальной точкой.

Решение задачи Коши (9.4), (9.5) $x_1 = \varphi_1(t)$; $x_2 = \varphi_2(t)$, … , $x_n = \varphi_n(t)$ можно трактовать как закон движения материальной точки в n-мерном пространстве P^n, находившейся в начальный момент времени t_0 в начальной точке $M_0\left(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\right)$. Пространство P^n, в котором происходит движение материальной точки, называется *фазовым пространством* (в случае P^2 – *фазовой плоскостью*). Кривую $L \subset \mathrm{P}^n$ вида

$$L = \left\{\, \left(\varphi_1(t), \varphi_2(t),\; \ldots\,, \varphi_n(t)\right) \mid t \in \mathrm{R} \,\right\}$$

называют *фазовой траекторией* движения материальной точки. Таким образом компоненты решения задачи Коши (9.4), (9.5) $x_1 = \varphi_1(t)$; $x_2 = \varphi_2(t)$, … , $x_n = \varphi_n(t)$ ($t \in \mathrm{P}$) представляют собой параметрические уравнения фазовой траектории движения материальной точки.

Правые части уравнений системы (9.4) задают поле скоростей движущейся материальной точки.

Исследуем, например, движение материальной точки, описываемое системой

$$\begin{cases} x_1' = x_1\,, \\ x_2' = 2x_2\,, \end{cases} \tag{9.6}$$

и начальными условиями

$$x_1(0) = 1\,,\; x_2(0) = 1\,. \tag{9.7}$$

Задача (9.6), (9.7) имеет решение

$$x_1 = e^t\,,\ x_2 = e^{2t}\,, \tag{9.8}$$

т.е. закон движения материальной точки, находившейся в начальный момент времени $t = 0$ в начальной точке $M_0(1;1)$ фазовой плоскости, задаётся соотношениями (9.8), которые можно записать в виде $x_2 = x_1^2$ ($x_1 > 0$). Таким образом, фазовой траекторией движения материальной точки является полупарабола вида, представленного на рис. 9.1.

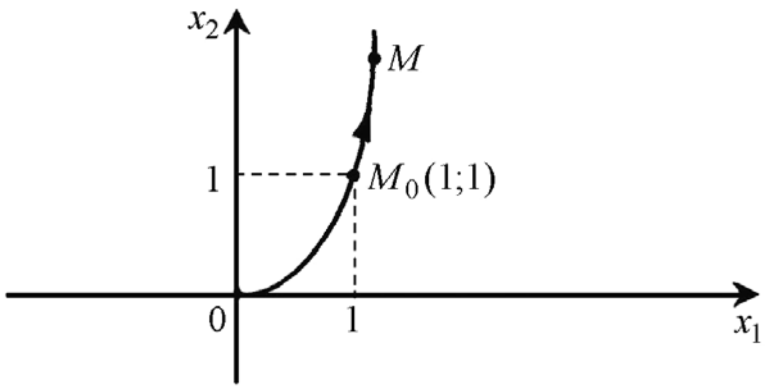

Рис. 9.1

Направление движения материальной точки при возрастании t показано на рис. 9.1 стрелкой.

Нормальную систему (9.2) можно решить методом исключения неизвестных: привести её к одному уравнению *n*-го порядка относительно одной неизвестной функции, решить это уравнение, а затем найти остальные $n-1$ неизвестные функции.

Продифференцируем, например, первое уравнение системы (9.2) $n-1$ раз по x, заменяя после каждого дифференцирования производные неизвестных функций $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ их значениями из системы (9.2):

$$\left.\begin{aligned}
&y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_i} y_i' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_i} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \overset{def}{=} \Phi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\
&y_1''' = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_i} y_i' = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_i} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \overset{def}{=} \Phi_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_1^{(n-1)} = \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_i} y_i' = \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_i} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \overset{def}{=} \Phi_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n);
\end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

$$y_1^{(n)} = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_i} y_i' = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_i} f_i\big(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\big) \overset{def}{=} \Phi_n\big(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\big). \tag{9.10}$$

Рассмотрим систему $n-1$ уравнений относительно $n-1$ неизвестных $y_2, y_3, \ldots, y_n$, составленную из первого уравнения системы (9.2) и уравнений (9.9) :

$$\begin{cases}
f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1'\,; \\
\Phi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1''; \\
\Phi_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1'''; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^{(n-1)}\,.
\end{cases} \tag{9.11}$$

Решая систему (9.11), получаем

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2\left(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\right); \\ y_3 = \psi_3\left(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \psi_n\left(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\right). \end{cases} \tag{9.12}$$

Подставляя в (9.10) вместо $y_2, y_3, \dots, y_n$ их выражения из (9.12), имеем

$$y_1^{(n)} = \Phi_n\left(x, y_1, \psi_2\left(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \dots, \psi_n\left(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\right)\right) \overset{def}{=}$$

$$= f\left(x, y_1, y_1', y_1'' \dots, y_1^{(n-1)}\right).$$

Итак, получено уравнение n-го порядка относительно неизвестной функции y_1:

$$y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}\right). \tag{9.13}$$

Решая уравнение (9.13), находим y_1. Зная y_1, остальные неизвестные функции находим по формулам (9.12).

Решим, например, методом исключения неизвестных систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 3y_2\,, \\ y_2' = -3y_1 - 5y_2\,. \end{cases} \tag{9.14}$$

1. Продифференцируем какое-либо из уравнений системы, например, первое, по переменной x:

$$y_1'' = 5y_1' + 3y_2'\,.$$

2. Подставим в полученное уравнение вместо производной y_2' её выражение из второго уравнения системы:

$$y_1'' = 5y_1' + 3(-3y_1 - 5y_2)\,,$$

$$y_1'' = 5y_1' - 9y_1 - 15y_2\,.$$

3. Подставим в полученное уравнение вместо функции y_2 её выражение из первого уравнения системы:

$$y_2 = \frac{1}{3}(y_1' - 5y_1)\,, \tag{9.15}$$

$$y_1'' = 5y_1' - 9y_1 - 5(y_1' - 5y_1)\,,$$

$$y_1'' - 16y_1 = 0\,.$$

4. Найдём из полученного уравнения y_1:

$$\lambda^2 - 16 = 0\,,\ \lambda_1 = -4\,,\ \lambda_2 = 4\,,$$

$$y_1 = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}\,.$$

5. Найдём y_2 по формуле (9.15):

$$y_2 = \frac{1}{3}\left(-4C_1e^{-4x} + 4C_2e^{4x} - 5C_1e^{-4x} - 5C_2e^{4x}\right),$$

$$y_2 = -3C_1e^{-4x} - \frac{1}{3}C_2e^{4x}\,.$$

Итак,

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}\,, \\ y_2 = -3C_1e^{-4x} - \dfrac{1}{3}C_2e^{4x}\,, \end{cases} \tag{9.16}$$

где C_1, C_2 – свободные параметры.

Двупараметрическое семейство наборов функций (9.16) является общим решением системы уравнений (9.14). Её частными решениями будут, например, наборы функций, полученные при значениях параметров $C_1 = 1, C_2 = 1$ или $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} y_1 = e^{-4x} + e^{4x}, \\ y_2 = -3e^{-4x} - \dfrac{1}{3}e^{4x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}e^{-4x} - \dfrac{1}{3}e^{4x}, \\ y_2 = -\dfrac{3}{2}e^{-4x} + \dfrac{1}{9}e^{4x}. \end{cases}$$

Лекция 10. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятие системы линейных дифференциальных уравнений; однородная система: основное свойство решений, определитель Вронского, необходимое условие линейной независимости n решений, теорема о структуре общего решения, фундаментальная система решений (ФСР), необходимое условие линейной зависимости n решений, способ проверки n решений на линейную независимость, теорема о существовании ФСР.

Частным случаем нормальной системы дифференциальных уравнений (9.2) является *система линейных дифференциальных уравнений*. По определению, это система вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x)\,, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x)\,, \end{cases} \tag{10.1}$$

где $a_{ij}(x)$ $(1 \le i, j \le n)$ – некоторые заданные непрерывные вещественные функции независимой переменной $x \in [a, b]$, называемые *коэффициентами системы*; $f_1(x)$, $f_2(x)$, … , $f_n(x)$ – некоторые заданные непрерывные вещественные функции независимой переменной $x \in [a, b]$, называемые *свободными членами системы*.

Если $f_1(x) \equiv 0$; $f_2(x) \equiv 0$, … , $f_n(x) \equiv 0$ для $x \in [a, b]$, то система (10.1) принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n\,, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{cases} \tag{10.2}$$

и называется *однородной*.

Чтобы различать системы (10.1) и (10.2), систему (10.1) называют *неоднородной*.

Для выполнения условий теоремы 9.1 достаточно, чтобы коэффициенты и свободные члены системы (10.1) были непрерывны на промежутке $[a, b]$. В этом случае любая задача Коши для системы (10.1) имеет единственное решение. Считая в начальных условиях (9.3) x_0 фиксированным и изменяя начальные значения $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$, получаем бесконечное множество решений системы (10.1).

Заметим, что ранее изученное ЛНДУ n-го порядка (см. лекцию 5)

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

можно свести к неоднородной системе линейных дифференциальных уравнений.

Действительно, положим

$$z_1(x) = y(x)\,;\ z_2(x) = y'(x)\,,\ \ldots,\ z_{n-1}(x) = y^{(n-2)}(x)\,,\ z_n(x) = y^{(n-1)}(x)\,.$$

Тогда

$$\begin{cases} z_1' = z_2\,, \\ z_2' = z_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n-1}' = z_n\,, \\ z_n' = -a_n(x)z_1 - a_{n-1}(x)z_2 - \ldots - a_1(x)z_n + f(x)\,. \end{cases}$$

Соответствующее ЛОДУ n-го порядка сводится к однородной системе линейных дифференциальных уравнений.

Системы уравнений вида (10.1), (10.2) можно записать в матричной форме. Пусть

$$y = y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},\quad y' = y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix},\quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда системы уравнений (10.1), (10.2) принимают соответственно следующий вид:

$$y' = \mathrm{A}(x)y + f(x)\,, \tag{10.3}$$

$$y' = \mathrm{A}(x)y\,, \tag{10.4}$$

где $y = y(x)$ – неизвестная вектор-функция; $y' = y'(x)$ – её производная; $f(x)$ – вектор-столбец свободных членов; $\mathrm{A}(x)$ – *матрица системы линейных дифференциальных уравнений*.

В дальнейшем будет видно, что доказательство основных фактов теории систем линейных дифференциальных уравнений аналогично доказательству соответствующих утверждений для линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка. Разница лишь в том, что в первом случае приходится работать с вектор-функциями, а во втором случае – со скалярными функциями.

Изучим вначале однородную систему линейных дифференциальных уравнений, т.е. систему (10.4).

Замечание 10.1. Нулевая вектор-функция $y = y(x) \equiv (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ является решением системы (10.4).

Рассмотрим *m* столбцовых вектор-функций

$$\psi^{(j)}(x) = \left(\psi_{1j}(x), \psi_{2j}(x), \ldots, \psi_{nj}(x)\right)^{\mathrm{T}},\ 1 \le j \le m\,, \tag{10.5}$$

определённых на промежутке $[a, b]$.

Замечание 10.2. В записи (10.5) индекс в скобках сверху в левой части означает номер вектор-функции; в правой части второй индекс – это номер вектор-функции, а первый индекс – номер компоненты этой вектор-функции.

Линейной комбинацией вектор-функций (10.5) с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathrm{P}$ называется выражение вида

$$\lambda_1\psi^{(1)}(x) + \lambda_2\psi^{(2)}(x) + \ldots + \lambda_m\psi^{(m)}(x)\,.$$

Как и в скалярном случае (см. лекцию 4), линейная комбинация вектор-функций называется *тривиальной*, если все её коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной*, если хотя бы один из её коэффициентов отличен от нуля, т.е. если

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2 \ne 0\,.$$

Система вектор-функций (10.5) называется *линейно независимой на промежутке* $[a, b]$, если их линейная комбинация равна нулю на этом промежутке только тогда, когда она тривиальна. В противном случае система вектор-функций (10.5) называется *линейно зависимой на промежутке* $[a, b]$. Таким образом, система вектор-функций называется линейно зависимой на промежутке $[a, b]$, если существует хотя бы одна нетривиальная линейная комбинация этих функций, равная нулю на промежутке $[a, b]$.

Докажем *основное свойство решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений.*

Теорема 10.1. Произвольная линейная комбинация любого числа решений системы (10.4) является решением этой системы.

Пусть $y^{(j)}(x) = \left(y_{1j}(x), y_{2j}(x), \ldots, y_{nj}(x)\right)^{\mathrm{T}}$, ($1 \le j \le m$) – решения системы (10.4); $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathrm{P}$.

Положим

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j y^{(j)}(x)\,. \tag{10.6}$$

Тогда

$$y'(x) = \left[\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y^{(j)}(x)\right]' = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left[y^{(j)}(x)\right]' =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\lambda_j \mathrm{A}(x)y^{(j)}(x) = \sum_{j=1}^{m}\mathrm{A}(x)\lambda_j y^{(j)}(x) = \mathrm{A}(x)\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y^{(j)}(x) = \mathrm{A}(x)y(x)\,.$$

Получили $y'(x) = \mathrm{A}(x)y(x)$, т.е. линейная комбинация (10.6) является решением системы (10.4).

Пусть Ω_0 – множество решений системы (10.4).

В силу теоремы 10.1, если имеется *n* решений

$$y^{(j)}(x) = \left(y_{1j}(x), y_{2j}(x), \ldots, y_{nj}(x)\right)^{\mathrm{T}},\ \ 1 \le j \le n\,, \tag{10.7}$$

системы (10.4), то семейство вектор-функций вида

$$y = C_1y^{(1)}(x) + C_2y^{(2)}(x) + \ldots + C_ny^{(n)}(x)\,, \tag{10.8}$$

содержащее *n* свободных параметров $C_1, C_2,\ \ldots, C_n$, задаёт некоторое множество W решений системы (10.4), т.е. $\mathrm{W} \subset \Omega_0$.

Выясним, при каких условиях на решения (10.7) семейство вектор-функций (10.8) является общим решением системы (10.4), т.е. $\mathrm{W} = \Omega_0$.

По определению общего решения системы дифференциальных уравнений (см. лекцию 9), формула (10.8) будет задавать общее решение системы (10.4), если, во-первых, для любых конкретных значений параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функция вида (10.8) является решением системы (10.4) (это условие, как только что установлено, выполняется), и, во-вторых, любое решение системы (10.4) можно получить по формуле (10.8) путём соответствующего подбора значений параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Итак, осталось выяснить, при каких условиях на решения (10.7) любое решение системы (10.4) можно получить из формулы (10.8) или, другими словами, представить в виде (10.8). Для этого потребуются некоторые дополнительные сведения.

Определителем Вронского (*вронскианом*) *n решений* (10.7) *однородной системы линейных дифференциальных уравнений* (10.4) называется функциональный определитель *n*-го порядка, j-й столбец которого образуют компоненты j-того решения $y^{(j)}(x)$ $(1 \le j \le n)$, т.е. определитель вида

$$\mathrm{W}(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1j}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2j}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nj}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем понадобится *необходимое условие линейной независимости n решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений*.

Теорема 10.2. Если решения (10.7) системы (10.4) линейно независимы на промежутке $[a,b]$, то их вронскиан отличен от нуля при любом $x \in [a,b]$.

► П : $\exists x_0 \in [a,b] \mid \mathrm{W}(x_0) = 0$. Составим систему *n* линейных однородных уравнений относительно скалярных неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, определитель которой равен $\mathrm{W}(x_0)$:

$$\begin{cases} y_{11}(x_0)\,\alpha_1 + y_{12}(x_0)\,\alpha_2 + \ldots + y_{1n}(x_0)\,\alpha_n = 0, \\ y_{21}(x_0)\,\alpha_1 + y_{22}(x_0)\,\alpha_2 + \ldots + y_{2n}(x_0)\,\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}(x_0)\,\alpha_1 + y_{n2}(x_0)\,\alpha_2 + \ldots + y_{nn}(x_0)\,\alpha_n = 0. \end{cases} \qquad (10.9)$$

Так как $\Delta = \mathrm{W}(x_0) = 0$, то эта система имеет ненулевое решение $\left(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*\right)$ (это означает, что хотя бы одна из компонент данного решения отлична от нуля) [2.2, с. 66]. Рассмотрим линейную комбинацию решений (10.7) вида

$$y(x) = \alpha_1^* y^{(1)}(x) + \alpha_2^* y^{(2)}(x) + \ldots + \alpha_n^* y^{(n)}(x). \qquad (10.10)$$

В силу теоремы 10.1, вектор-функция (10.10) является решением системы (10.4). Так как $\left(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*\right)$ – решение системы (10.9), то

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1^* y_{11}(x_0) + \alpha_2^* y_{12}(x_0) + \ldots + \alpha_n^* y_{1n}(x_0) \\ \alpha_1^* y_{21}(x_0) + \alpha_2^* y_{22}(x_0) + \ldots + \alpha_n^* y_{2n}(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^* y_{n1}(x_0) + \alpha_2^* y_{n2}(x_0) + \ldots + \alpha_n^* y_{nn}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. вектор функция (10.10) удовлетворяет начальному условию

$$y(x_0) = 0. \qquad (10.11)$$

Следовательно, вектор-функция (10.10) является решением задачи Коши (10.4), (10.11). С другой стороны нулевая вектор-функция тоже является решением этой задачи Коши. В силу единственности решения задачи Коши (см. теорему 9.1) $y(x) = 0$, т.е.

$$\alpha_1^* y^{(1)}(x) + \alpha_2^* y^{(2)}(x) + \ldots + \alpha_n^* y^{(n)}(x) = 0, \ \forall \ x \in [a,b].$$

Получили нетривиальную линейную комбинацию вектор-функций (10.7), равную нулю на промежутке $[a,b]$. А это означает, по определению, что эти вектор-функции линейно зависимы на $[a,b]$, что противоречит условию теоремы. П. ◄

Следствие 10.1. Если вронскиан решений (10.7) системы (10.4) в некоторой точке $x_* \in [a,b]$ равен нулю, то эти решения линейно зависимы на промежутке $[a,b]$.

Докажем *теорему о структуре общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений.*

Теорема 10.3. Если решения (10.7) системы (10.4) линейно независимы на промежутке $[a,b]$, то общее решение этой системы задаётся формулой (10.8), в которой $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – свободные параметры.

► Тот факт, что при любых конкретных значениях параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$ вектор-функция вида (10.8) является решением системы (10.4), справедлив в силу теоремы 10.1. Осталось показать, что любое решение системы (10.4) можно представить в виде (10.8). Пусть $\widetilde{y}(x) = (\,\widetilde{y}_1(x), \widetilde{y}_2(x), \dots, \widetilde{y}_n(x))^{\mathrm{T}}$ – произвольное фиксированное решение системы (10.4). Возьмём некоторое $x_0 \in [a, b]$. Рассмотрим вектор-столбец $\widetilde{y}^0 = \widetilde{y}(x_0) = (\,\widetilde{y}_1(x_0), \widetilde{y}_2(x_0), \dots, \widetilde{y}_n(x_0))^{\mathrm{T}}$. Тогда $\widetilde{y}(x)$ является решением задачи Коши

$$y' = \mathrm{A}(x)\,y\,, \tag{10.12}$$

$$y(x_0) = \widetilde{y}^0\,. \tag{10.13}$$

Составим систему n линейных уравнений относительно скалярных неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, определитель которой равен вронскиану решений (10.7) во взятой точке x_0, а правые части этих уравнений равны компонентам вектора $\widetilde{y}^0 = \left(\widetilde{y}_1^0, \widetilde{y}_2^0, \dots, \widetilde{y}_n^0\right)^{\mathrm{T}}$ (здесь $\widetilde{y}_i^0 = \widetilde{y}_i(x_0)$, $1 \le i \le n$):

$$\begin{cases} y_{11}(x_0)\,\alpha_1 + y_{12}(x_0)\,\alpha_2 + \dots + y_{1n}(x_0)\,\alpha_n = \widetilde{y}_1^0\,, \\ y_{21}(x_0)\,\alpha_1 + y_{22}(x_0)\,\alpha_2 + \dots + y_{2n}(x_0)\,\alpha_n = \widetilde{y}_2^0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}(x_0)\,\alpha_1 + y_{n2}(x_0)\,\alpha_2 + \dots + y_{nn}(x_0)\,\alpha_n = \widetilde{y}_n^0\,. \end{cases} \tag{10.14}$$

По условию теоремы решения (10.7) линейно независимы на $[a,\, b]$. Следовательно, в силу теоремы 10.2 определитель системы (10.14) $\Delta = \mathrm{W}(x_0) \ne 0$. А это означает, что система (10.14) имеет единственное решение $\left(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*\right)$ [2.2, с. 68]. Рассмотрим вектор-функцию вида (10.8) с $C_1 = \alpha_1^*, C_2 = \alpha_2^*, \dots, C_n = \alpha_n^*$:

$$y^*(x) = \alpha_1^* y^{(1)}(x) + \alpha_2^* y^{(2)}(x) + \dots + \alpha_n^* y^{(n)}(x)\,.$$

Эта вектор-функция является решением системы (10.12). Так как $\left(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*\right)$ – решение системы (10.14), то

$$y^*(x_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1^* y_{11}(x_0) + \alpha_2^* y_{12}(x_0) + \dots + \alpha_n^* y_{1n}(x_0) \\ \alpha_1^* y_{21}(x_0) + \alpha_2^* y_{22}(x_0) + \dots + \alpha_n^* y_{2n}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1^* y_{n1}(x_0) + \alpha_2^* y_{n2}(x_0) + \dots + \alpha_n^* y_{nn}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{y}_1^0 \\ \widetilde{y}_2^0 \\ \dots \\ \widetilde{y}_n^0 \end{pmatrix} = \widetilde{y}^0\,,$$

т.е. вектор-функция $y^*(x)$ удовлетворяет начальному условию (10.13). Таким образом, $y^*(x)$ является решением задачи Коши (10.12), (10.13). В силу единственности решения задачи Коши (см. теорему 9.1) $\widetilde{y}(x)$ совпадает с $y^*(x)$:

$$\widetilde{y}(x) = \alpha_1^* y^{(1)}(x) + \alpha_2^* y^{(2)}(x) + \dots + \alpha_n^* y^{(n)}(x)\,.$$

Итак, произвольно взятое решение системы (10.4) представлено в виде (10.8). ◄

В связи с тем, что на основе n линейно независимых решений системы (10.4) можно построить её общее решение, вводится следующее определение.

Фундаментальной системой решений (ФСР) *однородной системы n линейных дифференциальных уравнений* называется любой набор n линейно независимых на промежутке $[a, b]$ решений этой системы.

Выясним, как проверять, будет ли данная система n решений (10.7) системы (10.4) линейно независимой на промежутке $[a, b]$, т.е. будет ли она являться ФСР для системы (10.4). Для этого укажем вначале *необходимое условие линейной зависимости n решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений.*

Теорема 10.4. Если решения (10.7) системы (10.4) линейно зависимы на промежутке $[a, b]$, то их вронскиан $\mathrm{W}(x)$ равен нулю при любом $x \in [a, b]$.

► По условию теоремы решения (10.7) линейно зависимы на $[a, b]$. Следовательно, существует нетривиальная линейная комбинация решений (10.7), равная нулю:

$$\lambda_1 y^{(1)}(x) + \lambda_2 y^{(2)}(x) + \dots + \lambda_n y^{(n)}(x) = 0\,,\ \forall\ x \in [a, b]\,, \tag{10.15}$$

где среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ имеется хотя бы одно, отличное от нуля. Пусть $\lambda_k \ne 0$. Тогда в силу (10.15)

$$y_k(x) = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_k}\, y^{(j)}(x)\,,\ \forall\ x \in [a, b]\,. \tag{10.16}$$

В силу (10.16) k-й столбец вронскиана $\mathrm{W}(x)$ решений (10.7) является линейной комбинацией его других столбцов. Из линейной алгебры известно [2.3, с. 42], что такой определитель равен нулю. Следовательно, $\mathrm{W}(x) = 0$ для $x \in [a, b]$. ◄

Следствие 10.2. Если вронскиан $\mathrm{W}(x)$ решений (10.7) системы (10.4) в некоторой точке $x_* \in [a, b]$ отличен от нуля, то эти решения линейно независимы на промежутке $[a, b]$.

В силу теорем 10.2, 10.4 для вронскиана $W(x)$ n решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений существует альтернатива:

- либо $W(x) \neq 0$ для $\forall\ x \in [a,b]$,
- либо $W(x) = 0$ для $\forall\ x \in [a,b]$,

ибо эти n решений либо линейно независимы на $[a,b]$, либо линейно зависимы на $[a,b]$.

В силу следствий 10.1, 10.2 получаем следующее *правило проверки n решений* (10.7) *однородной системы линейных дифференциальных уравнений* (10.4) *на линейную независимость*.

Вычисляем значение вронскиана $W(x)$ этих решений в какой-либо точке $x_* \in [a,b]$. Если $W(x_*) \neq 0$, то решения (10.7) линейно независимы на $[a,b]$, т.е. образуют ФСР системы (10.4). Если $W(x_*) = 0$, то решения (10.7) линейно зависимы на $[a,b]$, т.е. не являются ФСР системы (10.4) (в качестве точки x_* удобно брать какое-либо простое значение, например, если $0 \in [a,b]$, то можно взять $x_* = 0$).

Докажем *теорему о существовании ФСР для однородной системы линейных дифференциальных уравнений.*

Теорема 10.5. Однородная система линейных дифференциальных уравнений имеет ФСР.

► Возьмём произвольный отличный от нуля определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

и некоторое $x_0 \in [a,b]$. Рассмотрим n задач Коши вида

$$y' = A(x)y\,, \tag{10.17}$$

$$y(x_0) = B_j\,,\ j = 1, 2, \dots, n\,, \tag{10.18}$$

где $B_j = \left(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}\right)^{T}$ – j-й столбец определителя Δ.

Пусть $y^{(j)}(x) = \left(y_{1j}(x), y_{2j}(x), \dots, y_{nj}(x)\right)^{T}$, $1 \leq j \leq n$, – решения этих задач Коши. Такие решения существуют в силу теоремы 9.1. В силу (10.18) вронскиан этих решений в точке x_0 равен Δ и, следовательно, отличен от нуля. Значит, в силу следствия 10.2, решения $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(n)}(x)$ линейно независимы на промежутке $[a,b]$, т.е. дают ФСР для системы уравнений (10.4). ◄

Из доказательства теоремы 10.5 видно, что однородная система линейных дифференциальных уравнений имеет бесконечное множество фундаментальных систем решений.

Действительно, беря какой-либо другой определитель $\widetilde{\Delta} \neq 0$, получим другую ФСР.

Пусть Ω_0 – множество решений системы (10.4). В силу теорем 10.3, 10.5 множество Ω_0 является n-мерным линейным пространством. В качестве базиса этого пространства можно брать любую ФСР системы (10.4).

Лекция 11. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (продолжение)

Теорема о структуре общего решения неоднородной системы; фундаментальная матрица, её свойства; метод вариации произвольных постоянных; система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим неоднородную и соответствующую ей однородную системы линейных дифференциальных уравнений

$$y' = A(x)y + f(x)\,, \tag{11.1}$$

$$y' = A(x)y\,, \tag{11.2}$$

где $y = y(x) = \left(\, y_i(x)\right)_{i=1}^{n}$ – неизвестная столбцовая вектор-функция независимой переменной $x \in [a,b]$; $y' = y'(x) = \left(\, y_i'(x)\right)_{i=1}^{n}$ – её производная; $f(x) = \left(\, f_i(x)\right)_{i=1}^{n}$ – вектор-столбец свободных членов; $A(x) = \left(\, a_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{n}$ – матрица системы (11.1).

Докажем *теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений.* Сделаем предварительно пару замечаний.

Замечание 11.1. Сумма любого решения неоднородной системы (11.1) и любого решения соответствующей ей однородной системы (11.2) является решением неоднородной системы (11.1).

Действительно, пусть $y^*(x) = \left(\, y_{1*}(x), y_{2*}(x), \dots, y_{n*}(x)\right)^{T}$ – решение системы (11.1), $y^{o}(x) = \left(\, y_{1o}(x),\ y_{2o}(x),\ \dots\ ,\ y_{no}(x)\right)^{T}$ – решение системы (11.2), $u(x) = y^*(x) + y^{o}(x)$. Тогда

$$u'(x)=\left[y^*(x)+y^{o}(x)\right]'=\left[y^*(x)\right]'+\left[y^{o}(x)\right]'=\mathrm{A}(x)y^*(x)+$$

$$+f(x)+\mathrm{A}(x)y^{o}(x)=\mathrm{A}(x)\left(y^*(x)+y^{o}(x)\right)+f(x)=\mathrm{A}(x)u(x)+f(x).$$

Получили $u'(x)=\mathrm{A}(x)u(x)+f(x)$, т.е. вектор-функция $u(x)$ является решением системы (11.1).

Замечание 11.2. Разность любых двух решений неоднородной системы (11.1) является решением соответствующей однородной системы (11.2).

Действительно, пусть $y^{(1)}(x)=(y_{11}(x),y_{21}(x),\dots,y_{n1}(x))^{\mathrm{T}}$, $y^{(2)}(x)=(y_{12}(x),y_{22}(x),\dots,y_{n2}(x))^{\mathrm{T}}$ – решения системы (11.1), $v(x)= =y^{(1)}(x)-y^{(2)}(x)$. Тогда

$$v'(x)=\left[y^{(1)}(x)-y^{(2)}(x)\right]'=\left[y^{(1)}(x)\right]'-\left[y^{(2)}(x)\right]'=$$

$$=\mathrm{A}(x)y^{(1)}(x)+f(x)-\mathrm{A}(x)y^{(2)}(x)-f(x)=$$

$$=\mathrm{A}(x)\left(y^{(1)}(x)-y^{(2)}(x)\right)=\mathrm{A}(x)v(x).$$

Получили $v'(x)=\mathrm{A}(x)v(x)$, т.е. вектор-функция $v(x)$ является решением системы (11.2).

Теорема 11.1. Если $y^{(j)}(x)=\left(y_{1j}(x),y_{2j}(x),\dots,y_{nj}(x)\right)^{\mathrm{T}}, 1\le j\le n$, – ФСР для системы (11.2), а $y^*(x)=(y_{1*}(x),y_{2*}(x),\dots,y_{n*}(x))^{\mathrm{T}}$ – фиксированное частное решение системы (11.1), то общее решение системы (11.1) задаётся формулой

$$y=y^*(x)+\sum_{j=1}^{n}C_j\,y^{(j)}(x), \tag{11.3}$$

где $C_1,C_2,\dots,C_n$ – свободные параметры.

▶ В силу замечания 11.1 при любых фиксированных значениях параметров $C_1,C_2,\dots,C_n$ функция вида (11.3) является решением системы (11.1). Покажем, что любое решение системы (11.1) можно представить в виде (11.3). Пусть $y^{\Delta}(x)=(y_{1\Delta}(x),y_{2\Delta}(x),\dots,y_{n\Delta}(x))^{\mathrm{T}}$ – произвольное фиксированное решение системы (11.1). В силу замечания 11.2 вектор-функция $h(x)=y^{\Delta}(x)-y^*(x)$ является решением системы (11.2). В силу теоремы 10.3 это решение можно записать в виде

$$y^{\Delta}(x)-y^*(x)=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{C}_j\,y^{(j)}(x),$$

откуда

$$y^{\Delta}(x)=y^*(x)+\sum_{j=1}^{n}\widetilde{C}_j\,y^{(j)}(x),$$

т.е. решение $y^{\Delta}(x)$ представимо в виде (11.3). ◀

В силу теоремы 10.3 общее решение (11.3) системы (11.1) можно записать в виде

$$y=y^*+y_{0.0},$$

где y^* – частное решение системы (11.1); $y_{0.0}$ – общее решение системы (11.2).

Таким образом, общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений представимо в виде суммы её частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

Рассмотрим некоторую ФСР

$$y^{(j)}(x)=\left(y_{1j}(x),y_{2j}(x),\dots,y_{nj}(x)\right)^{\mathrm{T}}, 1\le j\le n, \tag{11.4}$$

системы (11.2).

Фундаментальной матрицей однородной системы линейных дифференциальных уравнений (11.2), соответствующей ФСР (11.4), называется квадратная матрица порядка n, j-й столбец которой образуют компоненты j-го решения $y^{(j)}(x)$ ФСР (11.4), т.е. матрица вида

$$\mathrm{Y}(x)=\begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1j}(x) & \dots & y_{1n}(x)\\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2j}(x) & \dots & y_{2n}(x)\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nj}(x) & \dots & y_{nn}(x)\end{pmatrix}.$$

Замечание 11.3. Определитель фундаментальной матрицы, соответствующей ФСР (11.4), равен определителю Вронского решений (11.4):

$$\det \mathrm{Y}(x) = \mathrm{W}(x) \ . \tag{11.5}$$

Замечание 11.4. Фундаментальная матрица $\mathrm{Y}(x)$ является невырожденной при любом $x \in [a,b]$, т.е.

$$\det \mathrm{Y}(x) \neq 0 \ , \ \forall \ x \in [a,b] \, . \tag{11.6}$$

Действительно, по определению ФСР, решения (11.4) линейно независимы на промежутке $[a,b]$. Следовательно, по теореме 10.2 вронскиан $\mathrm{W}(x)$ этих решений отличен от нуля для $\forall \ x \in [a,b]$. Тогда из (11.5) следует (11.6).

Замечание 11.5. Фундаментальная матрица $\mathrm{Y}(x)$ имеет обратную матрицу $\mathrm{Y}^{-1}(x)$ при любом $x \in [a,b]$:

$$\exists \ \mathrm{Y}^{-1}(x) \, , \ \forall \ x \in [a,b] \, . \tag{11.7}$$

Действительно, из линейной алгебры известно [2.2, с.37], что всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу.

Замечание 11.6. Общее решение

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j \, y^{(j)}(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} C_j \, y_{1j}(x), \ \sum_{j=1}^{n} C_j \, y_{2j}(x), \dots, \sum_{j=1}^{n} C_j \, y_{nj}(x) \right)^{\mathrm{T}}$$

системы (11.2) можно записать в виде

$$y = \mathrm{Y}(x)\mathrm{C} \ , \tag{11.8}$$

где $\mathrm{C} = \left(C_1, C_2, \dots, C_n \right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец свободных параметров.

Замечание 11.7. Справедлива формула

$$\mathrm{Y}'(x) = \mathrm{A}(x)\mathrm{Y}(x) \ . \tag{11.9}$$

Действительно, имеем

$$\mathrm{Y}'(x) = \left(y'_{ij}(x) \right)_{i,j=1}^{n} = \left(\left[y^{(1)}(x) \right]', \ \left[y^{(2)}(x) \right]', \ \dots, \ \left[y^{(n)}(x) \right]' \right) =$$

$$= \left(\mathrm{A}(x) y^{(1)}(x), \ \mathrm{A}(x) y^{(2)}(x), \ \dots, \ \mathrm{A}(x) y^{(n)}(x) \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} \, y_{k1}(x) & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} \, y_{k2}(x) & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} \, y_{kn}(x) \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k} \, y_{k1}(x) & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k} \, y_{k2}(x) & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k} \, y_{kn}(x) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} \, y_{k1}(x) & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} \, y_{k2}(x) & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} \, y_{kn}(x) \end{pmatrix} = \mathrm{A}(x)\mathrm{Y}(x) \ .$$

Собирая начало и конец записи, получаем формулу (11.9).

Если известна некоторая ФСР (11.4) однородной системы (11.2), то общее решение неоднородной системы (11.1) можно найти методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа), который заключается в следующем.

1. Находим общее решение соответствующей однородной системы (11.2) :

$$y_{0.0}(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \, y^{(j)}(x) \, . \tag{11.10}$$

2. Ищем общее решение неоднородной системы (11.1) в том же виде, какой имеет общее решение соответствующей однородной системы (11.2), но только вместо свободных параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$ записываем некоторые неизвестные пока функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \, y^{(j)}(x) \, . \tag{11.11}$$

В силу (11.8) функцию (11.11) можно записать в виде

$$y(x) = \mathrm{Y}(x)\mathrm{C}(x) \ , \tag{11.12}$$

где $\mathrm{C}(x) = (\, C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x))^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец неизвестных функций.

3. Подставим вектор-функцию (11.12) в неоднородную систему (11.1) (мы хотим, чтобы вектор-функция (11.12) была решением неоднородной системы (11.1), следовательно, она должна удовлетворять этой системе) :

$$\big[\mathrm{Y}(x)\,\mathrm{C}(x)\big]' = \mathrm{A}(x)\big[\,\mathrm{Y}(x)\mathrm{C}(x)\big] + f(x)\,. \tag{11.13}$$

Заметим, что

$$\big[\mathrm{Y}(x)\,\mathrm{C}(x)\big]' = \mathrm{Y}'(x)\,\mathrm{C}(x) + \mathrm{Y}(x)\,\mathrm{C}'(x)\,. \tag{11.14}$$

Действительно,

$$\big[\mathrm{Y}(x)\,\mathrm{C}(x)\big]' = \left[\left(\sum_{k=1}^{n} y_{1k}(x)C_k(x), \dots, \sum_{k=1}^{n} y_{nk}(x)C_k(x)\right)^{\mathrm{T}}\right]' =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}[\,y'_{1k}(x)C_k(x) + y_{1k}(x)C'_k(x)], \dots, \sum_{k=1}^{n}[\,y'_{nk}(x)C_k(x) + y_{nk}(x)C'_k(x)]\right)^{\mathrm{T}} = = \left(\sum_{k=1}^{n} y'_{1k}(x)C_k(x), \dots, \sum_{k=1}^{n} y'_{nk}(x)C_k(x)\right)^{\mathrm{T}} +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{n} y_{1k}(x)C'_k(x), \dots, \sum_{k=1}^{n} y_{nk}(x)C'_k(x)\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{Y}'(x)\mathrm{C}(x) + \mathrm{Y}(x)\mathrm{C}'(x)\,.$$

Собирая начало и конец записи, получаем формулу (11.14).

В силу (11.9)

$$\mathrm{Y}'(x)\,\mathrm{C}(x) = \big[\,\mathrm{A}(x)\mathrm{Y}(x)\big]\mathrm{C}(x)\,. \tag{11.15}$$

В силу сочетательного свойства матриц [2.2, с. 16]

$$\big[\,\mathrm{A}(x)\mathrm{Y}(x)\big]\mathrm{C}(x) = \mathrm{A}(x)\big[\,\mathrm{Y}(x)\mathrm{C}(x)\big]. \tag{11.16}$$

В силу (11.15), (11.16)

$$\mathrm{Y}'(x)\,\mathrm{C}(x) = \mathrm{A}(x)\big[\,\mathrm{Y}(x)\mathrm{C}(x)\big]\,. \tag{11.17}$$

В силу (11.14), (11.17)

$$\big[\,\mathrm{Y}(x)\,\mathrm{C}(x)\big]' = \mathrm{A}(x)\big[\,\mathrm{Y}(x)\mathrm{C}(x)\big] + \mathrm{Y}(x)\mathrm{C}'(x)\,. \tag{11.18}$$

В силу (11.13), (11.18)

$$\mathrm{A}(x)\big[\,\mathrm{Y}(x)\mathrm{C}(x)\big] + \mathrm{Y}(x)\mathrm{C}'(x) = \mathrm{A}(x)\big[\,\mathrm{Y}(x)\mathrm{C}(x)\big] + f(x)\,,$$

откуда

$$\mathrm{Y}(x)\mathrm{C}'(x) = f(x)\,.$$

Учитывая (11.7), получаем

$$\mathrm{Y}^{-1}(x)\big[\,\mathrm{Y}(x)\mathrm{C}'(x)\big] = \mathrm{Y}^{-1}(x)f(x)\,,$$

или, в силу сочетательного свойства матриц,

$$\big[\,\mathrm{Y}^{-1}(x)\mathrm{Y}(x)\big]\mathrm{C}'(x) = \mathrm{Y}^{-1}(x)f(x)\,. \tag{11.19}$$

Заметим, что

$$\mathrm{Y}^{-1}(x)\mathrm{Y}(x) = \mathrm{E}\,,\ \ \mathrm{E}\,\mathrm{C}'(x) = \mathrm{C}'(x)\,, \tag{11.20}$$

где E – единичная матрица порядка *n*.

В силу (11.19), (11.20)

$$\mathrm{C}'(x) = \mathrm{Y}^{-1}(x)f(x)\,. \tag{11.21}$$

Пусть

$$\mathrm{Y}^{-1}(x) = \big(\,b_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^{n}\,.$$

Тогда скалярная запись формулы (11.21) имеет вид

$$C'_1(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{1k}(x)f_k(x) \overset{def}{=} \psi_1(x)\,,$$

$$C_2'(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{2k}(x) f_k(x) \overset{def}{=} \psi_2(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{nk}(x) f_k(x) \overset{def}{=} \psi_n(x),$$

откуда

$$C_1(x) = \int \psi_1(x)\, dx = \chi_1(x) + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \psi_2(x)\, dx = \chi_2(x) + C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n(x) = \int \psi_n(x)\, dx = \chi_n(x) + C_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – свободные параметры.

4. Подставляя найденные функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ в формулу (11.11), получаем семейство решений

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \Big[\chi_j(x) + C_j \Big] y^{(j)}(x) \tag{11.22}$$

неоднородной системы (11.1).

Выражение (11.22) можно записать в виде

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \chi_j(x)\, y^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j\, y^{(j)}(x). \tag{11.23}$$

Полагая в (11.23) $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, … , $C_n = 0$, получаем частное решение неоднородной системы (11.1)

$$y_*(x) = \sum_{j=1}^{n} \chi_j(x)\, y^{(j)}(x).$$

Тогда соотношение (11.23) принимает вид

$$y(x) = y_*(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j\, y^{(j)}(x),$$

следовательно, в силу теоремы 11.1 формула (11.23) даёт общее решение неоднородной системы (11.1).

Итак, для нахождения общего решения неоднородной системы (11.1) достаточно научиться находить ФСР соответствующей однородной системы (11.2). В лекции 12 будет указан способ нахождения ФСР для однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Лекция 12. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Построение фундаментальной системы решений, характеристическое уравнение, характеристические числа, структура фундаментальной матрицы.

Частным случаем систем (11.1). (11.2) являются *неоднородная* и соответствующая ей *однородная системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

$$y' = \mathrm{A}\, y + f(x), \tag{12.1}$$

$$y' = \mathrm{A}\, y, \tag{12.2}$$

где $y = y(x) = \big(y_i(x) \big)_{i=1}^{n}$ – неизвестная столбцовая вектор-функция независимой переменной $x \in [a,b]$; $y' = y'(x) = \big(y_i'(x) \big)_{i=1}^{n}$ – её производная; $f(x) = \big(f_i(x) \big)_{i=1}^{n}$ – вектор-столбец свободных членов; $\mathrm{A} = \big(a_{ij} \big)_{i,j=1}^{n}$ – матрица системы (12.1) с постоянными элементами $a_{ij} \in \mathrm{P}$ $(1 \le i, j \le n)$.

Замечание 12.1. Если рассматривать систему (12.2) как самостоятельный объект изучения (т.е. не связывать её с системой (12.1)), то можно считать, что $x \in \mathrm{P}$.

Найдём ФСР системы (12.2). Будем искать ненулевые решения этой системы в виде

$$y(x)=e^{\lambda x}w\,, \tag{12.3}$$

где $\lambda \in \mathrm{X}$, $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{P}^n$, $w \neq \Theta$, т.е. $w_1^2+w_2^2+\dots+w_n^2 \neq 0$. Выясним, при каких λ и w вектор-функция (12.3) является решением системы (12.2). Для этого подставим её в данную систему:

$$\left(e^{\lambda x}w\right)'=\mathrm{A}\,e^{\lambda x}w\,. \tag{12.4}$$

Заметим, что

$$\left(e^{\lambda x}w\right)'=\lambda\,e^{\lambda x}w\,. \tag{12.5}$$

Действительно,

$$\left(e^{\lambda x}w\right)'=\left[\left(e^{\lambda x}w_1,\ e^{\lambda x}w_2,\ \dots,\ e^{\lambda x}w_n\right)^{\mathrm{T}}\right]'=$$

$$=\left(w_1e^{\lambda x}\lambda,\ w_2e^{\lambda x}\lambda,\ \dots,\ w_ne^{\lambda x}\lambda\right)^{\mathrm{T}}=\lambda e^{\lambda x}w\,.$$

Заметим также, что

$$\mathrm{A}\,e^{\lambda x}w=e^{\lambda x}\mathrm{A}w\,. \tag{12.6}$$

В силу (12.4) – (12.6)

$$\lambda e^{\lambda x}w=e^{\lambda x}\mathrm{A}w\,.$$

Известно [2.4, с. 88], что $e^z \neq 0$, $\forall\ z \in \mathrm{X}$. Поэтому можно сократить на скалярный множитель $e^{\lambda x}$:

$$\mathrm{A}\,w=\lambda w\,. \tag{12.7}$$

Таким образом, вектор-функция (12.3) является решением системы (12.2), если выполняется условие (12.7), т.е. если число λ является собственным значением матрицы A а вектор-столбец w является её собственным вектором, отвечающим этому собственному значению λ. Условие (12.7) можно рассматривать как уравнение для нахождения нужных нам значений λ и w. Это уравнение можно записать в виде

$$(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{E})w=0\,, \tag{12.8}$$

где E – единичная матрица порядка *n*.

Скалярная запись матричного уравнения (12.8) имеет вид

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)w_1+a_{12}w_2+\dots+a_{1n}w_n=0\,,\\ a_{21}w_1+(a_{22}-\lambda)w_2+\dots+a_{2n}w_n=0\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}w_1+a_{n2}w_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)w_n=0\,.\end{cases} \tag{12.9}$$

Известно [2.2, с. 66], что однородная система *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными имеет ненулевое решение лишь в том случае, когда её определитель равен нулю. Следовательно, система (12.9) имеет ненулевое решение при выполнении условия

$$\det(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{E})=0\,,$$

т.е.

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0\,. \tag{12.10}$$

Условие (12.10) можно рассматривать как уравнение для нахождения λ. Это уравнение называется *характеристическим уравнением,* а его корни – *характеристическими числами однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* (12.2). Левая часть уравнения (12.10) называется *характеристическим определителем системы* (12.2). Если раскрыть определитель в левой части (12.10), то получим алгебраическое уравнение *n*-й степени относительно λ, левая часть которого называется *характеристическим многочленом системы* (12.2). Из алгебры известно [2.5, с. 157], что такое уравнение имеет в поле комплексных чисел *n* корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\ – \tag{12.11}$$

корни характеристического уравнения (12.10), а $r_1, r_2, \dots, r_p$ – соответственно их кратности. Заметим, что $p \le n$,

$$r_1 + r_2 + \dots + r_p = n \ . \qquad (12.12)$$

Пусть характеристическое уравнение (12.10) имеет *n* различных вещественных коней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (в этом случае в силу (12.12) кратность каждого корня равна единице, т.е. каждый корень является *простым*). Подставляя каждое λ_j ($1 \le j \le n$) в систему (12.9) и решая полученную систему, находим какое-либо её ненулевое решение $w^{(j)} = \left(w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_n^{(j)}\right)^{\mathrm{T}}$, другими словами, находим один из собственных векторов матрицы A, отвечающий собственному значению λ_j. В результате, согласно формуле (12.3), получаем *n* решений системы (12.2):

$$y^{(1)}(x) = e^{\lambda_1 x} w^{(1)}, \ y^{(2)}(x) = e^{\lambda_2 x} w^{(2)}, \ \dots, \ y^{(n)}(x) = e^{\lambda_n x} w^{(n)} . \qquad (12.13)$$

Покажем, что решения (12.13) линейно независимы на P.

Вронскиан

$$\mathrm{W}(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} w_1^{(1)} & e^{\lambda_2 x} w_1^{(2)} & \dots & e^{\lambda_n x} w_1^{(n)} \\ e^{\lambda_1 x} w_2^{(1)} & e^{\lambda_2 x} w_2^{(2)} & \dots & e^{\lambda_n x} w_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ e^{\lambda_1 x} w_n^{(1)} & e^{\lambda_2 x} w_n^{(2)} & \dots & e^{\lambda_n x} w_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

решений (12.13) при $x = 0$ принимает вид

$$\mathrm{W}(0) = \begin{vmatrix} w_1^{(1)} & w_1^{(2)} & \dots & w_1^{(n)} \\ w_2^{(1)} & w_2^{(2)} & \dots & w_2^{(n)} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ w_n^{(1)} & w_n^{(2)} & \dots & w_n^{(n)} \end{vmatrix} .$$

Известно [2.4, с. 168], что система собственных векторов матрицы, отвечающих различным собственным значениям, линейно независима. Следовательно, определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля. В силу сказанного $\mathrm{W}(0) \ne 0$. Значит, по следствию 10.2 решения (12.13) линейно независимы на P, т.е. образуют ФСР однородной системы (12.2).

Фундаментальная матрица однородной системы (12.2), соответствующая ФСР (12.13), имеет вид

$$\mathrm{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} w_1^{(1)} & e^{\lambda_2 x} w_1^{(2)} & \dots & e^{\lambda_n x} w_1^{(n)} \\ e^{\lambda_1 x} w_2^{(1)} & e^{\lambda_2 x} w_2^{(2)} & \dots & e^{\lambda_n x} w_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ e^{\lambda_1 x} w_n^{(1)} & e^{\lambda_2 x} w_n^{(2)} & \dots & e^{\lambda_n x} w_n^{(n)} \end{pmatrix} .$$

В силу теоремы 10.3 общее решение однородной системы (12.2) имеет вид

$$y = \left(y_1, y_2, \dots, y_n\right)^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x} w^{(j)} , \qquad (12.14)$$

где C_j ($1 \le j \le n$) – свободные параметры.

В силу формулы (11.8) скалярная запись общего решения (12.14) однородной системы (12.2) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x} w_1^{(j)} , \\ y_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x} w_2^{(j)} , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x} w_n^{(j)} . \end{cases} \qquad (12.15)$$

Пример 12.1. Найдём общее решение однородной системы

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 , \\ y_2' = 4y_1 + 6y_2 , \end{cases} \qquad (12.16)$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – неизвестные функции.

Решение. Найдём собственные значения матрицы

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

системы (12.16), т.е. найдём корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ 4 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (12.17)$$

системы (12.16). Раскрывая определитель в левой части (12.17), получаем квадратное уравнение

$$\lambda^2-10\lambda+16=0,$$

имеющее два различных вещественных корня $\lambda_1=2$, $\lambda_2=8$. Найдём собственные векторы матрицы A, отвечающие собственным значениям $\lambda_1=2$, $\lambda_2=8$:

$\lambda_1=2$:

$$\begin{cases}(4-2)w_1+2w_2=0\\ 4w_1+(6-2)w_2=0\end{cases} \Leftrightarrow\ w_1+w_2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}w_1=\alpha\,,\alpha\in\mathrm{P}\,,\\ w_2=-w_1\,.\end{cases}$$

В качестве собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_1=2$, можно взять вектор $w^{(1)}=(1\,;-1)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda_2=8$:

$$\begin{cases}(4-8)w_1+2w_2=0\\ 4w_1+(6-8)w_2=0\end{cases} \Leftrightarrow\ -2w_1+w_2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}w_1=\alpha\,,\alpha\in\mathrm{P}\,,\\ w_2=2w_1\,.\end{cases}$$

В качестве собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_2=8$, можно взять вектор $w^{(2)}=(1\,;2\,)^{\mathrm{T}}$. В силу (12.13) ФСР системы (12.16) имеет вид

$$y^{(1)}(x)=e^{\lambda_1 x}w^{(1)}=\left(e^{2x};-e^{2x}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$y^{(2)}(x)=e^{\lambda_2 x}w^{(2)}=\left(e^{8x};2e^{8x}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда фундаментальная матрица системы (12.16) имеет вид

$$\mathrm{Y}(x)=\begin{pmatrix}e^{2x} & e^{8x}\\ -e^{2x} & 2e^{8x}\end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (12.16) находим по формуле (11.8) :

$$y=(\,y_1,y_2)^{\mathrm{T}}=\mathrm{Y}(x)\mathrm{C}=\begin{pmatrix}e^{2x} & e^{8x}\\ -e^{2x} & 2e^{8x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1e^{2x}+C_2e^{8x}\\ -C_1e^{2x}+2C_2e^{8x}\end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases}y_1=C_1e^{2x}+C_2e^{8x}\,,\\ y_2=-C_1e^{2x}+2C_2e^{8x}\,,\end{cases}$$

где C_1, C_2 – свободные параметры.

Среди корней характеристического уравнения (12.10) могут оказаться комплексные числа. Пусть $\lambda=\alpha+i\beta$ – простой комплексный корень характеристического уравнения (12.10). Подставляя это λ в (12.9) и решая получаемую систему, найдём какое-либо её ненулевое решение

$$w=(\,w_1,w_2,\dots,w_n)^{\mathrm{T}}=(\,\mu_1+i\nu_1,\mu_2+i\nu_2,\dots,\mu_n+i\nu_n)^{\mathrm{T}},$$

которое можно записать в виде $w=\mu+i\nu$, где $\mu=\left(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n\right)^{\mathrm{T}}$, $\nu=\left(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n\right)^{\mathrm{T}}$. В результате, согласно формуле (12.3), получаем комплекснозначное решение системы (12.2)

$$y(x)=e^{(\alpha+i\beta)x}\left(\mu_1+i\nu_1,\mu_2+i\nu_2,\dots,\mu_n+i\nu_n\right)^{\mathrm{T}}. \qquad (12.18)$$

Замечание 12.2. Векторы μ, ν линейно независимы.

Действительно, $\lambda=\alpha+i\beta$ и $w=\mu+i\nu$ удовлетворят уравнению (12.7) :

$$\mathrm{A}(\mu+i\nu)=(\alpha+i\beta)(\mu+i\nu)\,.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\mathrm{A}\mu = \alpha\mu - \beta\nu\,,\ \ \mathrm{A}\nu = \beta\mu + \alpha\nu\,. \qquad (12.19)$$

Из (12.19) следует, что $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$. Действительно, $\sqcap\!\sqcap$: пусть, например, $\mu = 0$. Тогда $\mathrm{A}\,0 = \alpha\cdot 0 - \beta\nu$, т.е. $-\beta\nu = 0$, следовательно $\nu = 0$, ибо $\beta \neq 0$. Значит, $w = \mu + i\nu = 0$. Противоречие, так как вектор w выбирался ненулевым. $\overline{\sqcap\!\sqcap}$. Аналогично показывается, что $\nu \neq 0$. $\sqcap\!\sqcap$: векторы μ, ν линейно зависимы, т.е. существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю: $C_1\mu + C_2\nu = 0$. Пусть, для определённости, $C_2 \neq 0$, тогда

$$\nu = k\,\mu\,, \qquad (12.20)$$

где $k = -C_1 / C_2$.

Подставим в (12.19) вместо ν его выражение из (12.20) :

$$\mathrm{A}\mu = \alpha\mu - \beta k\mu\,,\ \ k\mathrm{A}\mu = \beta\mu + \alpha k\mu\,,\ \text{т.е. }\ \mathrm{A}\mu = \frac{\beta}{k}\mu + \alpha\mu\,.$$

Из последних равенств получаем $(\alpha - \beta k)\mu = \left(\dfrac{\beta}{k} + \alpha\right)\mu$, следовательно, $\alpha - \beta k = \dfrac{\beta}{k} + \alpha$, откуда $\left(1 + k^2\right)\beta = 0$. Противоречие, ибо $\beta \neq 0$. $\overline{\sqcap\!\sqcap}$.

Выделим действительную и мнимую части решения (12.18). Используя основное свойство показательной функции [2.4, с. 86]

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}\,,\ \forall\ z_1, z_2 \in \mathrm{X}\,,$$

а также формулу Эйлера [2.4, с. 86]

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z\,,\ \forall\ z \in \mathrm{X}\,,$$

получаем

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\,. \qquad (12.21)$$

В силу (12.18), (12.21)

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(\left(\mu_j\cos\beta x - \nu_j\sin\beta x\right) + i\left(\nu_j\cos\beta x + \mu_j\sin\beta x\right)\right)_{j=1}^{n}.$$

Полагая

$$u(x) = e^{\alpha x}\left(\mu_1\cos\beta x - \nu_1\sin\beta x\ ,\ \ldots\ ,\ \mu_n\cos\beta x - \nu_n\sin\beta x\right)^{\mathrm{T}}, \qquad (12.22)$$

$$v(x) = e^{\alpha x}\left(\nu_1\cos\beta x + \mu_1\sin\beta x\ ,\ \ldots\ ,\ \nu_n\cos\beta x + \mu_n\sin\beta x\right)^{\mathrm{T}}, \qquad (12.23)$$

получаем

$$y(x) = u(x) + iv(x)\,, \qquad (12.24)$$

где $u(x) = \left(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\right)^{\mathrm{T}}$, $v(x) = \left(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)\right)^{\mathrm{T}}$ – соответственно действительная и мнимая части комплекснозначного решения (12.18). Функция (12.24) является решением системы (12.2), т.е.

$$\left[\,u(x) + iv(x)\,\right]' = \mathrm{A}\left(u(x) + iv(x)\right). \qquad (12.25)$$

Используя правило дифференцирования комплекснозначной функции действительного переменного [2.6, с. 30]

$$\left[\,a(t) + ib(t)\,\right]' = a'(t) + ib'(t)\,,$$

имеем

$$\left[\,u(x) + iv(x)\,\right]' = \left[\,\left(u_i(x) + iv_i(x)\right)_{i=1}^{n}\,\right]' = \left(u_i'(x) + iv_i'(x)\right)_{i=1}^{n} =$$

$$= \left(u_i'(x)\right)_{i=1}^{n} + i\left(v_i'(x)\right)_{i=1}^{n} = u'(x) + iv'(x)\,.$$

Получили формулу

$$\left[\,u(x) + iv(x)\,\right]' = u'(x) + iv'(x)\,. \qquad (12.26)$$

Далее,

$$\mathrm{A}\left(u(x) + iv(x)\right) = \mathrm{A}\,u(x) + i\,\mathrm{A}\,v(x)\,. \qquad (12.27)$$

В силу (12.25) – (12.27)

$$u'(x) + iv'(x) = \mathrm{A}\,u(x) + i\,\mathrm{A}\,v(x)\,.$$

Следовательно, $u'(x) = \mathrm{A}\,u(x)$, $v'(x) = \mathrm{A}\,v(x)$, т.е. вектор-функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями системы (12.2).

Показано, что действительная и мнимая части комплекснозначного решения (12.18) системы (12.2) являются решениями этой системы.

Таким образом, простой комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического уравнения системы (12.2) порождает два вещественнозначных решения (12.22), (12.23) этой системы.

Замечание 12.3. Решения (12.22), (12.23) системы (12.2) линейно независимы на P.

Действительно, $\overline{\Pi}$: эти решения линейно зависимы на P, т.е. $\exists$ их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю на P : $C_1 u(x) + C_2 v(x) = 0$, $\forall\ x \in \mathrm{P}$, в частности, $C_1 u(0) + C_2 v(0) = 0$.

Заметим, что

$$u(0) = (\,\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\,)^{\mathrm{T}} = \mu\,,\ v(0) = (\,\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\,)^{\mathrm{T}} = \nu\,.$$

Имеем $C_1\,\mu + C_2\,\nu = 0$. Получили нетривиальную линейную комбинацию векторов μ, ν, равную нулю. Следовательно, векторы μ, ν линейно зависимы, что противоречит утверждению замечания 12.2. $\overline{\Pi}$.

Из курса алгебры известно [2.5, с. 160], что если комплексное число является корнем кратности r многочлена с действительными коэффициентами, то сопряженное ему число тоже является корнем кратности r этого многочлена. Поэтому, если $\lambda = \alpha + i\beta$ – простой комплексный корень характеристического уравнения (12.10), то $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ тоже является простым корнем этого уравнения. Корень $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ порождает два вещественнозначных решения системы (12.2)

$$\widetilde{u}(x) = e^{\alpha x}\left(\mu_1 \cos\beta x + \nu_1 \sin\beta x\,, \dots, \mu_n \cos\beta x + \nu_n \sin\beta x\right)^{\mathrm{T}}, \tag{12.28}$$

$$\widetilde{v}(x) = e^{\alpha x}\left(\nu_1 \cos\beta x - \mu_1 \sin\beta x\,, \dots, \nu_n \cos\beta x - \mu_n \sin\beta x\right)^{\mathrm{T}}, \tag{12.29}$$

(формулы (12.28), (12.29) получены соответственно из формул (12.22), (12.23) заменой в них β на $-\beta$).

Если формировать ФСР системы (12.2), то одновременно включать в неё решения (12.22), (12.23) и решения (12.28), (12.29) нельзя, ибо система этих четырёх решений не является линейно независимой на P. Действительно, при $x = 0$ получаем систему векторов $u(0) = \mu$, $v(0) = \nu$, $\widetilde{u}(0) = \mu$, $\widetilde{v}(0) = \nu$, которая линейно зависима, ибо,

$$1 \cdot u(0) + 1 \cdot v(0) - 1 \cdot \widetilde{u}(0) - 1 \cdot \widetilde{v}(0) = 0\,.$$

Поэтому будем в дальнейшем сопоставлять паре простых комплексно сопряжённых корней $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ характеристического уравнения системы (12.2) два линейно независимых на P вещественнозначных решения вида (12.22), (12.23) системы (12.2).

Пусть характеристическое уравнение системы (12.2) имеет n различных корней, среди которых $2m$ комплексных корней $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - i\beta_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, $\overline{\lambda_2} = \alpha_2 - i\beta_2$, …, $\lambda_m = \alpha_m + i\beta_m$, $\overline{\lambda_m} = \alpha_m - i\beta_m$, и $n - 2m$ вещественных корней λ_{2m+1}, λ_{2m+2}, … , λ_n. Сопоставим каждой паре простых комплексно сопряжённых корней $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\overline{\lambda_j} = \alpha_j - i\beta_j$ $(1 \le j \le m)$ два линейно независимых на P вещественнозначных решения системы (12.2), которые в силу формул (12.22), (12.23) имеют вид

$$u^{(j)}(x) =$$

$$= e^{\alpha_j x}\left(\mu_1^{(j)} \cos\beta_j x - \nu_1^{(j)} \sin\beta_j x\,, \dots, \mu_n^{(j)} \cos\beta_j x - \nu_n^{(j)} \sin\beta_j x\right)^{\mathrm{T}}, \tag{12.30}$$

$$v^{(j)}(x) =$$

$$= e^{\alpha_j x}\left(\nu_1^{(j)} \cos\beta_j x + \mu_1^{(j)} \sin\beta_j x\,, \dots, \nu_n^{(j)} \cos\beta_j x + \mu_n^{(j)} \sin\beta_j x\right)^{\mathrm{T}}. \tag{12.31}$$

Каждому простому вещественному корню λ_i $(2m + 1 \le i \le n)$ поставим в соответствие согласно формуле (12.3) одно вещественнозначное решение

$$y^{(i)}(x) = e^{\alpha_i x} w^{(i)}\,, \tag{12.32}$$

где $w^{(i)} = \left(w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, \dots, w_n^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}$ – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_i. Объединяя решения (12.30) – (12.32), получаем n решений системы (12.2) :

$$u^{(1)}(x)\,,\ v^{(1)}(x)\,, \dots,\ u^{(m)}(x)\,,\ v^{(m)}(x)\,,\ y^{(2m+1)}(x)\,, \dots,\ y^{(n)}(x)\,. \tag{12.33}$$

Известно [1.3, с. 498], что система решений (12.33) линейно независима на P, т.е. является ФСР системы (12.2). В силу теоремы 10.3 общее решение однородной системы (12.2) имеет вид

$$y = \left(y_1\,, y_2\,, \dots, y_n\right)^{\mathrm{T}} = C_1 u^{(1)}(x) + C_2 v^{(1)}(x) + \dots +$$

$$+C_{2m-1}u^{(m)}(x)+C_{2m}v^{(m)}(x)+\sum_{i=2m+1}^{n}C_i y^{(i)}(x). \qquad (12.34)$$

Чтобы записать общее решение (12.34) системы (12.2) в скалярном виде можно воспользоваться формулой (12.34) или, в силу (11.8) умножить фундаментальную матрицу $\mathrm{Y}(x)$ системы (12.2), соответствующую ФСР (12.33), на вектор-столбец $\mathrm{C}=\left(C_1,C_2,\ldots,C_n\right)^{\mathrm{T}}$ свободных параметров.

Среди корней (12.11) характеристического уравнения системы (12.2) могут быть кратные корни. Известно [1.4, с. 98], что корню λ кратности r характеристического уравнения системы (12.2) отвечают r линейно независимых на P решений системы (12.2) вида

$$y^{(i)}=P^{(i)}(x)e^{\lambda x}, 1\le i\le r, \qquad (12.35)$$

где $P^{(i)}(x)=\left(P_1^{(i)}(x),P_2^{(i)}(x),\ldots,P_n^{(i)}(x)\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец, компонентами которого являются вполне определённые многочлены степени не выше $r-1$. Если решения (12.35) являются комплекснозначными (т.е. если $\lambda=\alpha+i\beta$, $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ являются корнями кратности r характеристического уравнения системы (12.2)), то, как и в случае простых комплексных корней, нужно выделить действительную и мнимую части этих решений.

Находя для каждого корня из (12.11) по вышеуказанным правилам соответствующую группу решений системы (12.2) (при этом каждый комплексный корень $\lambda=\alpha+i\beta$ надо рассматривать в паре с сопряжённым ему корнем $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$) и объединяя эти группы решений, получаем в силу (12.12) n линейно независимых решений системы (12.2), т.е. получаем ФСР $y^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x)$, …, $y^{(n)}(x)$ системы (12.2). Зная ФСР, находим общее решение системы (12.2) по формуле (10.8).

Пример 12.2. Найдём общее решение однородной системы

$$\begin{cases} y_1'=21y_1-8y_2-19y_3, \\ y_2'=18y_1-7y_2-15y_3, \\ y_3'=16y_1-6y_2-15y_3, \end{cases} \qquad (12.36)$$

где $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, $y_3=y_3(x)$ – неизвестные функции.

Решение. Найдём собственные значения матрицы

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 21 & -8 & -19 \\ 18 & -7 & -15 \\ 16 & -6 & -15 \end{pmatrix}$$

системы (12.36), т.е. найдём корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 21-\lambda & -8 & -19 \\ 18 & -7-\lambda & -15 \\ 16 & -6 & -15-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (12.37)$$

Раскрывая определитель в левой части (12.37) и умножая получаемое уравнение на -1, приходим к кубическому уравнению $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$, которое можно записать в виде $(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$. Следовательно, характеристическое уравнение (12.37) имеет три простых корня $\lambda=-1$, $\lambda=i$, $\lambda=-i$. Найдём для корня $\lambda=-1$ соответствующее решение системы (12.36). Для этого вначале найдём ненулевое решение системы вида (12.9) :

$$\begin{cases} (21+1)w_1-8w_2-19w_3=0, \\ 18w_1+(-7+1)w_2-15w_3=0, \\ 16w_1-6w_2+(-15+1)w_3=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22w_1-8w_2-19w_3=0, \\ 6w_1-2w_2-5w_3=0, \\ 8w_1-3w_2-7w_3=0. \end{cases} \qquad (12.38)$$

Так как $\lambda=-1$ – корень характеристического уравнения (12.37), то определитель матрицы системы (12.38) равен нулю, т.е. ранг матрицы системы (12.38) меньше трёх. Найдём базисный минор этой матрицы:

$$M\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}=14-15=-1\ne 0. \qquad (12.39)$$

Следовательно, минор (12.39) является базисным; в качестве базисных неизвестных берём w_2, w_3; в качестве свободной неизвестной – w_1.

Тогда систему (12.38) можно записать в виде

$$\begin{cases} w_1 = \alpha\,,\ \alpha \in \mathrm{P}\ , \\ 2w_2 + 5w_3 = 6\alpha\,, \\ 3w_2 + 7w_3 = 8\alpha\,. \end{cases}$$

Положим $\alpha = 1$. Тогда

$$\begin{cases} 2w_2 + 5w_3 = 6\,, \\ 3w_2 + 7w_3 = 8\,, \end{cases}$$

откуда $w_2 = -2$, $w_3 = 2$. Итак, в качестве собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению $\lambda = -1$, можно взять вектор $w = (1;-2;2)^{\mathrm{T}}$. Тогда, согласно формуле (12.3), корню $\lambda = -1$ соответствует решение

$$y(x) = e^{-x}(1;-2;2)^{\mathrm{T}} = \left(e^{-x};-2e^{-x};2e^{-x}\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.40}$$

системы (12.36). Найдём для пары простых комплексно сопряженных корней $\lambda = i$, $\lambda = -i$ соответствующую пару вещественных решений $u(x)$, $v(x)$ системы (12.36). Для этого подставим значение $\lambda = i$ в систему (12.9) :

$$\begin{cases} (21-i)w_1 - 8w_2 - 19w_3 = 0\,, \\ 18w_1 + (-7-i)w_2 - 15w_3 = 0\,, \\ 16w_1 - 6w_2 + (-15-i)w_3 = 0\,. \end{cases} \tag{12.41}$$

Взяв в качестве базисных неизвестных $w_2 = \mu_2 + i\nu_2$, $w_3 = \mu_3 + i\nu_3$ и полагая свободную неизвестную $w_1 = \mu_1 + i\nu_1$ равной единице (т.е. $\mu_1 = 1$, $\nu_1 = 0$), получаем из второго и третьего уравнений системы (12.41)

$$\begin{cases} (7+i)\left(\mu_2 + i\nu_2\right) + 15\left(\mu_3 + i\nu_3\right) = 18\,, \\ 6\left(\mu_2 + i\nu_2\right) + (15+i)\left(\mu_3 + i\nu_3\right) = 16\,. \end{cases} \tag{12.42}$$

Решая систему (12.42), получаем $\mu_2 = \frac{6}{5}$, $\nu_2 = -\frac{3}{5}$, $\mu_3 = \frac{3}{5}$, $\nu_3 = \frac{1}{5}$. Тогда

$$w = \left(w_1, w_2, w_3\right)^{\mathrm{T}} = \left(1;\ \frac{6}{5} - \frac{3}{5}\,i;\ \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,i\right)^{\mathrm{T}}.$$

Чтобы не иметь дела с дробями, перейдём от вектора w к вектору $\widetilde{w} = 5w = (5;6-3i;3+i)^{\mathrm{T}}$ (это можно сделать, ибо если $\mathrm{A}w = \lambda w$, то для $\forall\ \ \alpha \in \mathrm{P}$, $\alpha \neq 0 \Rightarrow\ \mathrm{A}(\alpha w) = \lambda(\alpha w)$). Для этого вектора $\widetilde{\mu}_1 = 5$, $\widetilde{\nu}_1 = 0$, $\widetilde{\mu}_2 = 6$, $\widetilde{\nu}_2 = -3$, $\widetilde{\mu}_3 = 3$, $\widetilde{\nu}_3 = 1$. По формулам (12.22), (12.23) получаем

$$u(x) = (5\cos x,\ 6\cos x + 3\sin x,\ 3\cos x - \sin x)^{\mathrm{T}}\,; \tag{12.43}$$

$$v(x) = (5\sin x,\ -3\cos x + 6\sin x,\ \cos x + 3\sin x)^{\mathrm{T}}\,. \tag{12.44}$$

Объединяя решения (12.40), (12.43), (12.44), получаем ФСР системы (12.36) :

$$y^{(1)} = \left(e^{-x}, -2e^{-x}, 2e^{-x}\right)^{\mathrm{T}};$$

$$y^{(2)} = (5\cos x,\ 6\cos x + 3\sin x,\ 3\cos x - \sin x)^{\mathrm{T}};$$

$$y^{(3)} = (5\sin x,\ -3\cos x + 6\sin x,\ \cos x + 3\sin x)^{\mathrm{T}}.$$

Общее решение системы (12.36) имеет вид

$$y = \left(y_1, y_2, y_3\right)^{\mathrm{T}} = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + C_3 y^{(3)}\,, \tag{12.45}$$

где C_1, C_2, C_3 – свободные параметры.

В скалярной форме записи общее решение (12.45) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + 5C_2\cos x + 5C_3\sin x\,, \\ y_2 = -2C_1 e^{-x} + \left(6C_2 - 3C_3\right)\cos x + \left(3C_2 + 6C_3\right)\sin x\,, \\ y_3 = 2C_1 e^{-x} + \left(3C_2 + C_3\right)\cos x + \left(-C_2 + 3C_3\right)\sin x\,. \end{cases}$$

Лекция 13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Понятие устойчивого и неустойчивого решения нормальной системы дифференциальных уравнений, асимптотически устойчивое решение, связь между устойчивостью невозмущённого движения и устойчивостью тривиального решения системы уравнений возмущённого движения, связь между устойчивостью решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений и устойчивостью тривиального решения соответствующей однородной системы, критерий устойчивости тривиального решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, проверка матрицы на устойчивость (критерий Рауса-Гурвица), система уравнений первого приближения для автономной системы уравнений возмущённого движения, теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений, записанную в векторной форме:

$$y' = f(t, y), \tag{13.1}$$

где $y = y(t) = (\, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))^{\mathrm{T}}$ – неизвестная вектор-функция скалярного аргумента t (в качестве t выступает время), $y' = y'(t) = \; = (\, y_1'(t), y_2'(t), \ldots, y_n'(t))^{\mathrm{T}}$ – её производная, $f(t, y) = \; = (\, f_1(t, y), f_2(t, y), \ldots, f_n(t, y))^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец правых частей уравнений системы (9.4).

Пусть выполнены условия (см. теорему 9.1), при которых задача Коши для системы (13.1) с начальным условием

$$y(t_0) = \xi^0, \tag{13.2}$$

где $\xi^0 = \left(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\right)^{\mathrm{T}}$, имеет единственное решение, определённое на некотором промежутке $[\, t_0 - h,\; t_0 + h]$.

Пусть также выполнены известные условия [1.1, с. 236], обеспечивающие продолжимость этого решения на всю полуось $[\, t_0, +\infty)$.

Таким образом, в дальнейшем предполагается, что каждое решение системы (13.1) продолжимо на полуось $\left[\, t_0, +\infty\right)$.

Рассмотрим в P^n евклидову норму:

– для любого $\xi = (\, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{P}^n$

$$\| \xi \| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определим расстояние между векторами в P^n:

– для $\forall$ $\xi = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)^{\mathrm{T}}$, $\eta = \left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\right)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{P}^n$ положим

$$\rho(\xi, \eta) = \| \xi - \eta \| = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i - \eta_i\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{13.3}$$

Замечание 13.1. Норма любого вектора $\xi \in \mathrm{P}^n$ равна его расстоянию до нулевого вектора $\Theta = (\, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$.

Действительно, $\| \xi \| = \| \xi - \Theta \| = \rho(\xi, \Theta)$.

Замечание 13.2. При $n = 1, 2, 3$ формула (13.3) задаёт обычное расстояние между двумя точками соответственно на прямой, плоскости и в трёхмерном пространстве.

Определение 13.1. Решение $y^*(t) = (\, y_{1*}(t), y_{2*}(t), \ldots, y_{n*}(t))^{\mathrm{T}}$ системы (13.1), определённое на полуоси $\left[\, t_0, +\infty\right)$, называется *устойчивым* (*по Ляпунову*), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \; = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \,|$ для любого решения $y(t) = \left(\, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$ системы (13.1), удовлетворяющего условию

$$\left\| \, y(t_0) - y^*(t_0) \, \right\| < \delta, \tag{13.4}$$

выполняется неравенство

$$\left\| \, y(t) - y^*(t) \, \right\| < \varepsilon, \; \forall \; t \in \left[\, t_0, +\infty\right). \tag{13.5}$$

Таким образом, тот факт, что решение $y^*(t)$ системы (13.1) является устойчивым (по Ляпунову), означает, по определению, следующее: если начальная точка $M_0(\, y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_n(t_0))$ фазовой траектории $L = \left\{ (\, y_1(t),\, y_2(t),\, \ldots, y_n(t)) \;\; | \;\; t \in \left[t_0, +\infty\right) \right\}$ решения $y(t)$ системы (13.1) достаточно близка (по метрике (13.3)) к начальной точке $M_0^*(\, y_{1*}(t_0), y_{2*}(t_0), \ldots, y_{n*}(t_0))$ фазовой траектории $L^* = \; = \left\{ (\, y_{1*}(t), y_{2*}(t), \ldots, y_{n*}(t)) \,|\; t \in \left[t_0, +\infty\right) \right\}$ решения $y^*(t)$, то для каждого $t \in \left[\, t_0, +\infty\right)$ соответствующая точка $M(\, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ фазовой траектории L достаточно близка к точке

$M^*(y_{1*}(t), y_{2*}(t), \ldots, y_{n*}(t))$ фазовой траектории L^* (в этом случае интегральную кривую L^* называют *устойчивой фазовой траекторией*). Устойчивая фазовая траектория для случая $n = 2$ изображена на рис. 13.1.

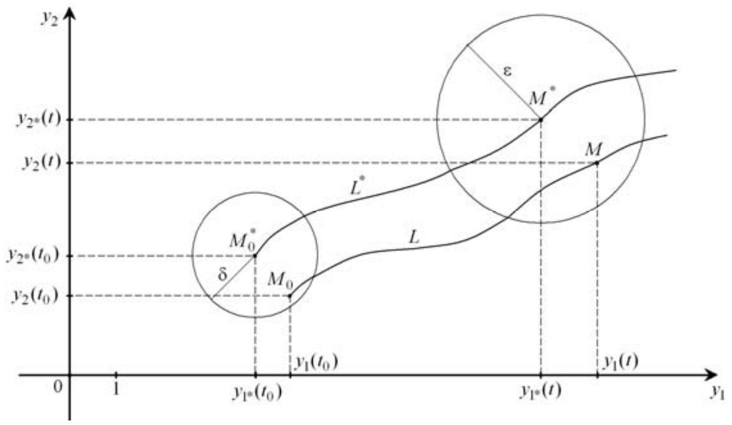

Рис. 13.1

Решение $y^*(t)$ системы (13.1) называется *неустойчивым* (*по Ляпунову*), если $\exists\ \ \varepsilon > 0\ \ |\ \forall \delta > 0\ \ \exists$ решение $\widetilde{y}(t)$ системы (13.1), удовлетворяющее условию $\left\| \widetilde{y}(t_0) - y^*(t_0) \right\| < \delta$, такое, что при некотором $t_1 \in [t_0, \infty)$ выполняется $\left\| \widetilde{y}(t_1) - y^*(t_1) \right\| \geq \varepsilon$.

Среди устойчивых решений выделяют асимптотически устойчивые решения. Решение $y^*(t)$ системы (13.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того, $\exists\ \ \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0\ |$ для любого решения $y(t)$ системы (13.1), удовлетворяющего неравенству $\left\| y(t_0) - y^*(t_0) \right\| < \delta_0$ выполняется условие

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| y(t) - y^*(t) \right\| = 0 . \tag{13.6}$$

Таким образом, тот факт, что решение $y^*(t)$ системы (13.1) является асимптотически устойчивым, означает, по определению, следующее: если начальная точка M_0 фазовой траектории *L* решения $y(t)$ системы (13.1) достаточно близка к начальной точке M_0^* фазовой траектории L^* решения $y^*(t)$, то, во-первых, для каждого $t \in [\,t_0, +\infty)$ соответствующая точка *M* фазовой траектории *L* достаточно близка к точке M^* фазовой траектории L^*, и, во-вторых, $\rho\left(M, M^*\right) \to 0$ при $t \to +\infty$, т.е. при достаточно больших значениях t точки фазовой траектории *L* сколь угодно близки к соответствующим точкам фазовой траектории L^*.

Исследование на устойчивость данного решения $y^*(t)$ системы (13.1) сводится к исследованию на устойчивость тривиального (нулевого) решения некоторой вспомогательной нормальной системы дифференциальных уравнений, получаемой из системы (13.1).

Действительно, рассмотрим вспомогательную неизвестную вектор-функцию, $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$, определяемую формулой $x(t) = y(t) - y^*(t)$, т.е. $x_i(t) = y_i(t) - y_{i*}(t)$, $1 \leq i \leq n$. Тогда

$$y(t) = x(t) + y^*(t) . \tag{13.7}$$

Учитывая, что $y^*(t)$ – решение системы (13.1), получаем

$$y'(t) = \left[\ x(t) + y^*(t)\right]' = x'(t) + \left[\ y^*(t)\right]' = x'(t) + f\left(\ t, y^*\right).$$

Тогда в силу (13.1), (13.7)

$$x'(t) + f\left(t, y^*\right) = f\left(t, x + y^*\right)$$

или

$$x' = F(t,\, x)\,, \tag{13.8}$$

где $F(t,\, x) = f\left(t, x + y^*\right) - f\left(t, y^*\right)$.

Нормальная система дифференциальных уравнений (13.8) называется *системой уравнений возмущённого движения*. Решение $y^*(x)$ системы (13.1), проверяемое на устойчивость, называется *невозмущённым движением*, а переменные $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, … , $x_n = x_n(t)$ – *возмущениями*.

Замечание 13.3. Нулевая вектор-функция $x^*(t) \equiv \Theta = \left(0, 0, \ldots, 0\right)^{\mathrm{T}}$ является решением системы (13.8) (такое решение называется *тривиальным*).

Замечание 13.4. Устойчивость решения $y^*(t)$ системы (13.1) равносильна устойчивости тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$ системы (13.8).

Действительно, пусть решение $y^*(t)$ системы (13.1) устойчиво, т.е. для любого решения $y(t)$, удовлетворяющего условию (13.4), выполняется неравенство (13.5). Учитывая, что $y(t_0) - y^*(t_0) = x(t_0)$, $y(t) - y^*(t) = x(t)$, получаем: для любого решения $x(t)$ системы (13.8), удовлетворяющего условию

$$\| x(t_0) \| = \| x(t_0) - \Theta \| < \delta ,$$

выполняется неравенство

$$\| x(t) \| = \| x(t) - \Theta \| < \varepsilon , \ \forall \ t \in [t_0, +\infty),$$

а это означает, по определению, что тривиальное решение $x^*(t) \equiv \Theta$ системы (13.8) устойчиво.

Пусть тривиальное решение $x^*(t) \equiv \Theta$ системы (13.8) устойчиво, т.е. для $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \ |$ для любого решения $x(t)$ системы (13.8), удовлетворяющего условию

$$\| x(t_0) - \Theta \| = \| x(t_0) \| < \delta , \tag{13.9}$$

выполняется неравенство

$$\| x(t) - \Theta \| = \| x(t) \| < \varepsilon , \ \forall \ t \in [t_0, +\infty). \tag{13.10}$$

Так как $x(t) = y(t) - y^*(t)$ и $y^*(t)$ – фиксированное решение системы (13.1), то вышесказанное можно выразить в следующем виде: для $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \ |$ для любого решения $y(t)$ системы (13.1) удовлетворяющего условию $\left\| y(t_0) - y^*(t_0) \right\| < \delta$, выполняется неравенство $\left\| y(t) - y^*(t) \right\| < \varepsilon , \ \forall \ t \in [t_0, +\infty)$, а это означает, по определению, что решение $y^*(t)$ системы (13.1) является устойчивым.

Дадим геометрическую иллюстрацию устойчивости тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$ системы (13.8) для случая $n = 2$. Тривиальное решение $x^*(t) \equiv \Theta$ изображается на фазовой плоскости точкой Θ (началом координат). Условие (13.9) означает, что начальная точка $M_0(x_1(t_0), x_2(t_0))$ фазовой траектории L решения $x(t)$ системы (13.8) находятся в δ-окрестности точки Θ. Условие (13.10) означает, что при каждом $t \in [t_0, +\infty)$ соответствующая точка $M(x_1(t), x_2(t))$ фазовой траектории L принадлежит ε-окрестности точки Θ. Таким образом, тривиальное решение $x^*(t) \equiv \Theta$ системы (13.8) является устойчивым, если для $\forall \ O_\varepsilon(\Theta) \ \exists \ O_\delta(\Theta)$, $\delta = \delta(\varepsilon) \ |$ для любого решения $x(t)$ системы (13.8), для которого начальная точка $M_0 \in O_\delta(\Theta)$, фазовая траектория этого решения не выходит за пределы взятой ε-окрестности точки Θ (рис. 13.2).

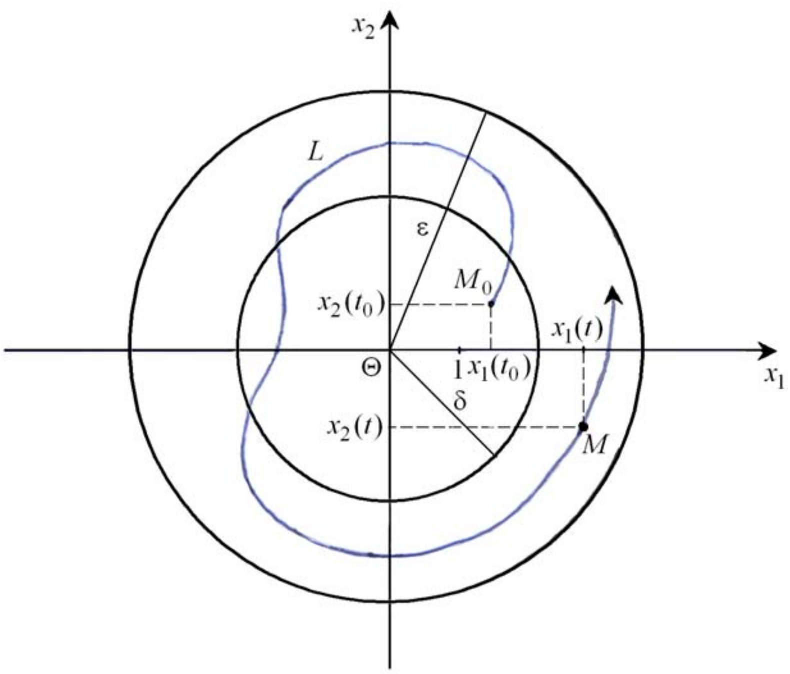

Рис. 13.2

Если тривиальное решение $x^*(t) \equiv \Theta$ системы (13.8) является асимптотически устойчивым, то, во-первых, фазовая траектория L не выходит за пределы взятой ε-окрестности точки $\Theta = (0,0)$ и, во-вторых, $\rho(M, \Theta) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$y' = \mathrm{A}(t)y + f(t), \tag{13.11}$$

где $y = y(t) = \left(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t) \right)^{\mathrm{T}}$ – неизвестная вектор-функция независимой переменной $t \in \left[t_0, +\infty \right)$; $y' = y'(t) = \left(y_1'(t), y_2'(t), \dots, y_n'(t) \right)^{\mathrm{T}}$ – её производная; $f(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t) \right)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец свободных членов; $\mathrm{A}(t) = \left(a_{ij}(t) \right)_{i,j=1}^{n}$ – матрица системы (13.11).

Предположим, что элементы $a_{ij}(t)\ (1 \le i, j \le n)$ матрицы $\mathrm{A}(t)$ и компоненты $f_i(t)\ (1 \le i \le n)$ вектор-столбца $f(t)$ непрерывны на полуоси $\left[t_0, +\infty \right)$.

Пусть требуется проверить на устойчивость решение $y^*(t)$ системы (13.11). Запишем соответствующую систему уравнений возмущённого движения. Для этого положим $y(t) = x(t) + y^*(t)$, где $x(t)$ – вспомогательная неизвестная вектор-функция. Учитывая, что $y^*(t)$ – решение системы (13.11), получаем

$$y'(t) = \left[x(t) + y^*(t) \right]' = x'(t) + \left[y^*(t) \right]' = x'(t) + \mathrm{A}(t)y^*(t) + f(t).$$

Тогда система (13.11) принимает вид

$$x'(t) + \mathrm{A}(t)y^*(t) + f(t) = \mathrm{A}(t)\Big(x(t) + y^*(t) \Big) + f(t),$$

или

$$x'(t) + \mathrm{A}(t)y^*(t) + f(t) = \mathrm{A}(t)x(t) + \mathrm{A}(t)y^*(t) + f(t),$$

откуда

$$x' = \mathrm{A}(t)x. \tag{13.12}$$

Итак, системой уравнений возмущённого движения для системы (13.11) является соответствующая ей однородная система (13.12).

Замечание 13.5. Устойчивость решения $y^*(t)$ неоднородной системы (13.11) равносильна устойчивости тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$ соответствующей однородной системы (13.12) (см. замечание 13.4).

Неоднородная система (13.11) называется *устойчивой*, если каждое её решение устойчиво.

Замечание 13.6. Устойчивость неоднородной системы (13.11) равносильна устойчивости тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$ соответствующей однородной системы (13.12) (см. замечание 13.5).

Неоднородная система (13.11) называется *неустойчивой*, если каждое её решение неустойчиво.

Неоднородная система (13.11) называется *асимптотически устойчивой*, если каждое её решение асимптотически устойчиво.

Замечание 13.7. Асимптотическая устойчивость неоднородной системы (13.11) равносильна асимптотической устойчивости тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$ соответствующей однородной системы (13.12).

Так как однородная система (13.12) является частным случаем неоднородной системы, то справедливы следующие замечания.

Замечание 13.8. Устойчивость однородной системы (13.12) равносильна устойчивости её тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$.

Замечание 13.9. Асимптотическая устойчивость однородной системы (13.12) равносильна асимптотической устойчивости её тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$.

Итак, исследование на устойчивость неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений сводится к задаче исследования на устойчивость тривиального решения соответствующей однородной системы. В случае переменных элементов матрицы системы (13.12) такая задача является сложной. Поэтому ограничимся рассмотрением однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$x' = \mathrm{A}\,x, \tag{13.13}$$

где $x = x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \right)^{\mathrm{T}}$ – неизвестная вектор-функция независимой переменной $t \in \left[t_0, +\infty \right)$; $\mathrm{A} = \left(a_{ij} \right)_{i,j=1}^{n}$ – матрица системы (13.13) с постоянными элементами $a_{ij} \in \mathrm{P}\ (1 \le i, j \le n)$.

Матрица A системы (13.13) называется *устойчивой*, если действительная часть каждого корня $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ характеристического уравнения $\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{E}) = 0$ этой системы отрицательна:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0,\ 1 \le i \le p. \tag{13.14}$$

Геометрически условие (13.14) означает, что все корни характеристического уравнения системы (13.13) расположены в левой комплексной полуплоскости $C_- = \{z \in C \mid \operatorname{Re} z < 0\}$.

Сформулируем *критерий устойчивости тривиального решения* системы (13.13) [1.1, с. 243].

Теорема 13.1. Для асимптотической устойчивости тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$ системы (13.13) необходимо и достаточно, чтобы матрица A этой системы была устойчивой.

Следствие 13.1. Если действительная часть хотя бы одного из корней характеристического уравнения системы (13.13) неотрицательна, то тривиальное решение $x^*(t) \equiv \Theta$ этой системы не является асимптотически устойчивым.

Чтобы сделать вывод о характере тривиального решения системы (13.13) (о его устойчивости или неустойчивости) в случае, когда среди корней характеристического уравнения этой системы нет корней с положительными действительными частями, но хотя бы один из этих корней имеет действительную часть, равную нулю, требуется дополнительное исследование [1.4, с. 133].

Раскрывая определитель в левой части характеристического уравнения (12.10) системы (13.13), получаем алгебраическое уравнение n-й степени с действительными коэффициентами

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{13.15}$$

Если удаётся найти все корни характеристического уравнения (13.15), то выполнимость условий (13.14) проверяется непосредственно. Однако, корни алгебраического уравнения n-й степени находятся легко лишь в случае $n = 2$ и некоторых частных случаях при $n \ge 3$. При $n = 3$, $n = 4$ известны формулы для нахождения корней [2.3, с. 234], однако эти формулы настолько громоздки, что их применение затруднительно. Более того, Абель доказал, что при $n \ge 5$ не существует формул, выражающих корни алгебраического уравнения n-й степени через его коэффициенты [2.5, с. 240]. Поэтому, чтобы использовать теорему 13.1 в приложениях, надо знать условия, при которых матрица A системы (13.13) является устойчивой, не использующие конкретного вида корней характеристического уравнения. Такие условия были найдены Раусом и Гурвицем.

Построим квадратную матрицу размера $n \times n$ следующим образом: на её главной диагонали запишем по порядку n коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ характеристического уравнения (13.15); в j-й строке ($1 \le j \le n$) при движении влево от диагонального элемента запишем последовательно коэффициенты a_{j+k}, $1 \le k \le n - j$ (если при такой записи останутся свободные позиции, то заполняем их нулями), а при движении вправо от диагонального элемента запишем последовательно коэффициенты a_{j-k}, $1 \le k \le j$, учитывая, что $a_0 = 1$ (если при такой записи останутся свободные позиции, то заполняем их нулями). В результате получаем матрицу вида

$$\Gamma = \left(\gamma_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Построенная матрица Γ называется *матрицей Гурвица*, порождённой характеристическим уравнением системы (13.13). *Главным диагональным минором* k-го порядка матрицы Γ называется её минор k-го порядка, составленный из элементов, расположенных на пересечении первых k строк и первых k столбцов этой матрицы:

$$M_k = M\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \cdots & \gamma_{kk} \end{vmatrix}.$$

Справедливо следующее утверждение, называемое *теоремой* (или *критерием*) *Рауса-Гурвица* [2.1, с. 97].

Теорема 13.2. Для устойчивости матрицы A системы (13.13) необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица, порождённой характеристическим уравнением этой системы, были положительны:

$$M_1 = a_1 > 0, \; M_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \; M_n > 0. \tag{13.16}$$

Условия (13.16) называются *условиями Рауса-Гурвица*.

Вернёмся к исследованию на устойчивость решения $y^*(t)$ системы (13.1). Как было установлено выше (см. замечание 13.4) устойчивость решения $y^*(t)$ системы (13.1) равносильна устойчивости тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$ системы уравнений возмущённого движения (13.8), в котором

$$F(t,x) = f\left(t, x + y^*\right) - f\left(t, y^*\right). \tag{13.17}$$

Поэтому осталось выяснить условия, при выполнении которых тривиальное решение системы уравнений возмущённого движения устойчиво.

Пусть правые части уравнений системы (13.8) не зависят в явном виде от t, т.е. система (13.8) имеет вид

$$x' = F(x) \tag{13.18}$$

(такую систему называют *автономной* или *динамической*). Например, если исходная система (13.1) автономна, т.е. имеет вид $y' = f(y)$, то из (13.17) видно, что система уравнений возмущённого движения тоже автономна.

В силу (13.17)

$$F(\Theta) = \Theta\ . \tag{13.19}$$

В скалярной форме система (13.18) имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\ ; \\ x_2' = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\ ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\ . \end{cases} \tag{13.20}$$

Пусть каждая из правых частей уравнений системы (13.20) имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности нулевой точки $\Theta = (0, 0, \dots, 0)$, причём все эти частные производные непрерывны в точке Θ. Известно [2.3, с. 503], что если функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^{\circ},\ x_2^{\circ},\ \dots\ ,\ x_n^{\circ}\right)$, причём все эти частные производные непрерывны в точке M_0, то данная функция дифференцируема в точке M_0, т.е. её полное приращение в точке M_0 представимо в виде

$$u(M) - u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{M_0} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{M_0} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{M_0} \Delta x_n + o(\rho)\,,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_i^{\circ}$, $1 \le i \le n$, $\rho = \left[(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots (\Delta x_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $o(\rho)$ – бесконечно малая величина более высокого порядка по сравнению с ρ при $\rho \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\rho \to 0}\left[o(\rho)/\rho\right] = 0$. В нашем случае с учётом того, что $F_j(\Theta) = 0$ (см. (13.19)), $x_i^{\circ} = 0$, $1 \le i \le n$, получаем для $\forall\ 1 \le j \le n$

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial F_j}{\partial x_1}\Big|_{\Theta} x_1 + \frac{\partial F_j}{\partial x_2}\Big|_{\Theta} x_2 + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial x_n}\Big|_{\Theta} x_n + o_j(\rho)\,.$$

В результате система (13.20) принимает вид

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\Big|_{\Theta} x_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big|_{\Theta} x_2 + \dots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}\Big|_{\Theta} x_n + o_1(\rho)\ , \\ x_2' = \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\Big|_{\Theta} x_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}\Big|_{\Theta} x_2 + \dots + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}\Big|_{\Theta} x_n + o_2(\rho)\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}\Big|_{\Theta} x_1 + \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2}\Big|_{\Theta} x_2 + \dots + \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}\Big|_{\Theta} x_n + o_n(\rho)\ . \end{cases} \tag{13.21}$$

Если в правых частях уравнений системы (13.21) отбросить слагаемые $o_j(\rho)$, $1 \le j \le n$, то получим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$x' = \mathrm{B}\,x\,, \tag{13.22}$$

где

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\Theta}\ .$$

Матрица B называется *матрицей Якоби* правых частей уравнений системы (13.20) в точке Θ.

Система (13.22) называется *первым* (*линейным*) *приближением* для системы (13.18) или *системой уравнений первого приближения*.

В силу теоремы 13.1 для асимптотической устойчивости тривиального решения $x^*(t) \equiv \Theta$ первого приближения (13.22) для системы (13.18) необходимо и достаточно, чтобы матрица Якоби правых частей уравнений системы (13.18) в точке Θ была устойчивой.

Справедливо следующее утверждение, называемое *теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению* [1.4, с.136].

Теорема 13.3. Пусть правые части системы уравнений возмущённого движения (13.20) непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $\Theta = (0, 0, ..., 0)$. Тогда, если матрица B системы уравнений первого приближения (13.22) для системы (13.20) устойчива, то тривиальное решение $x^*(t) \equiv \Theta$ системы (13.20) асимптотически устойчиво.

Справедливо также следующее утверждение [1.1, с. 246].

Теорема 13.4. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения системы уравнений первого приближения (13.22) имеет положительную действительную часть, то тривиальное решение системы уравнений возмущённого движения (13.20) неустойчиво.

Теоремы 13.3, 13.4 не охватывают ситуации, когда среди корней характеристического уравнения системы уравнений первого приближения (13.22) нет корней с положительными действительными частями, но хотя бы один из этих корней имеет действительную часть, равную нулю. В этом случае на основе анализа системы уравнений первого приближения не удаётся сделать вывод о характере тривиального решения системы уравнений возмущённого движения (о его устойчивости или неустойчивости). Требуется дополнительное исследование [1.4, с. 138]. По этой причине такой случай называется *критическим*.

Пример 13.1. Исследуем на устойчивость тривиальное решение $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$ системы уравнений возмущённого движения

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 - x_1^2 + x_2^2, \\ x_2' = -\operatorname{tg} x_2 + e^{x_1} - 1. \end{cases} \tag{13.23}$$

Решение. Запишем систему уравнений первого приближения для системы (13.23). Для этого найдём матрицу Якоби правых частей уравнений системы (13.23) в точке $\Theta = (0, 0)$, т.е. матрицу

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}}.$$

Имеем:

$$F_1 = F_1(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 - x_1^2 + x_2^2,$$

$$F_2 = F_2(x_1, x_2) = -\operatorname{tg} x_2 + e^{x_1} - 1;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -2 - 2x_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\bigg|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = -2; \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 1 + 2x_2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\bigg|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 1;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = e^{x_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\bigg|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\cos^2 x_2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\bigg|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = -1.$$

Следовательно,

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и система уравнений первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2, \\ x_2' = x_1 - x_2. \end{cases} \tag{13.24}$$

Запишем характеристическое уравнение системы (13.24) :

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{13.25}$$

Раскрывая определитель в левой части (13.25), получаем квадратное уравнение

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0,$$

имеющее два различных вещественных корня

$$\lambda_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} < 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < 0.$$

А это означает, по определению, что матрица B системы уравнений первого приближения (13.24) устойчива. Кроме того, непосредственно проверяется, что правые части системы (13.23) непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $\Theta = (0,0)$ (в качестве такой окрестности можно взять любую окрестность с радиусом, меньшим $\frac{\pi}{2}$). Следовательно, в силу теоремы 13.3 тривиальное решение $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$ системы уравнений (13.23) асимптотически устойчиво.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данного учебного пособия является формирование у студентов инженерных специальностей вузов основных понятий и положений теории дифференциальных уравнений, обучение студентов методам решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, находящим широкое применение в курсах теории вероятностей, математической статистики, физики и других науках. Всё это будет способствовать подготовке высококвалифицированных инженерных кадров, умеющих применять аппарат дифференциальных уравнений при исследовании различных задач естествознания и техники.

БИОГРАФИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

АБЕЛЬ Нильс Хенрик (5.8.1802 – 6.4.1829) – норвежский математик. Род. близ Ставангера. Обучался в кафедральной школе, а затем в ун-те Христиании (Осло). В 1824 опубликовал доказательство неразрешимости в радикалах общего алгебр, ур-ния 5-й степени. В 1825-27 А. был за границей, в частности в Берлине, Париже. В Берлине А. познакомился с нем. математиком *А.Л. Креллем* и стал сотрудником его журнала. Мн. классические труды А. были опубликованы в 1826, но в то время они не принесли автору известности. А. жил в жестокой нужде. Возвратившись на родину, давал частные уроки, в 1828 получил должность доц. в ун-те и инженерной школе Осло. В дек. 1828 А. простудился, заболел пневмонией и 6 апр. 1829 умер. В 1830 Париж. АН присудила ему (посмертно) и нем. математику *К. Г. Якоби* премию за развитие эллиптических функций. Собр. соч. А. вышло на франц. яз. в 1839.

За свою короткую жизнь А. сделал важнейшее для дальнейшего развития математики открытие. Пытаясь решить в радикалах общее ур-ние 5-й степени, он выдвинул такую общую идею: вместо того чтобы искать зависимость, само существование к-рой остается недоказанным, следует поставить вопрос, возможна ли в действительности такая зависимость. Руководствуясь этой идеей, А. выяснил, почему ур-ния 2-й, 3-й и 4-й степеней решаются в радикалах, т.е. почему ур-ния с коммутативной группой подстановок корней разрешимы в радикалах. (Коммутативные группы называют теперь абелевыми.) А. обнаружил также ряд алгебр. функций, к-рые не интегрируются с помощью элементарных функций; их интегрирование приводит к новым трансцендентным функциям. Эти иссл. привели А. к созданию теории эллиптических и гиперэллиптических функций, в к-рую он внес большой вклад независимо от *К.Г. Якоби*. А. – основатель общей теории интегралов алгебр. функций. Др. важные работы А. относятся к теории рядов. Его именем названа теорема о непрерывности функций во всем круге сходимости соотв. ряда. Есть абелевы дифференциалы, интегралы, ур-ния, функции, признаки сходимости, многообразия, метод суммирования и др. Именем А. назван кратер на обратной стороне Луны.

БЕРНУЛЛИ Иоганн I (27.7.1667 – 1.1.1748) – швейцарский математик, брат *Бернулли Якоба I*. Род. в Базеле. С 1695 – проф. математики в Гронингенском (Голландия), с 1705 – в Базельском ун-тах. Вначале готовился стать купцом, потом под руководством брата Якоба I занялся математикой, а также медициной. Позже путешествовал, учился и преподавал в Париже. Одним из его учеников был маркиз *Г.Ф. де-Лопиталь*. Б. достиг больших результатов в разработке дифференциального и интегрального исчислений (совместно с *Г.В. Лейбницем*), теории дифференциальных ур-ний, вариационном исчислении, геометрии и механике. Развил теорию показательной функции, вывел правило раскрытия неопределённостей типа $\frac{0}{0}$ (носящее имя Лопиталя), разработал методы интегрирования рациональных дробей, вычисления площадей плоских фигур и спрямления разл. кривых, открыл ряд, названный его именем и родственный ряду *Тейлора*, дал определение понятия функции как аналитического выражения, составленного из переменных и постоянных величин, и др. Иоганну I Б. принадлежит первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений. Курс интегрального исчисления Иоганна I Б. был издан в 1742. Задача о брахистохроне, предложенная Б. в 1696 дала толчок развитию вариационного исчисления; он поставил и др. классическую задачу вариационного исчисления о геодезических линиях, нашёл их характерное геом. свойство, а позднее вывел их дифференциальное ур-ние. В геометрии Б. дал определение пространственных координат (1715), занимался разл. спец. кривыми, создал и разработал теорию каустик и др. Ему принадлежат также ценные работы по механике, в частности он дал чёткое понятие работы и для простейших случаев сформулировал т.н. принцип виртуальных скоростей. Большое значение для развития математики имела обширная переписка братьев Бернулли с Лейбницем. Среди многочисленных учеников Иоганна I Б. следует, кроме трёх его сыновей, назвать *Л.Эйлера*. Почётный чл. Петерб. АН.

ВАНДЕРМОНД Александр Теофил (**Шарль Огюст**) (28.2.1735 – 1.1.1796) – французский математик, чл. Париж АН (1771), участник Великой франц. революции, друг *Г. Монжа*. Род. в Париже. Преподавал в Высшей норм. школе. Известен в осн. работами по высшей алгебре, в частности по теории симметрических функций, теории исключения неизвестного и др. областям алгебры. Предложив спец. символ определителя, дал новый толчок развитию учения об определителях. В. принадлежат идеи резольвент *Лагранжа*, теория подстановок, циклических инвариантов. В теории двучленных ур-ний предвосхитил мн. открытия *К.Ф. Гаусса*. Матем. труды В. были забыты во Франции, на них обратил внимание *Л. Кронекер*, считавший В. и Лагранжа предшественниками *Н.Г. Абеля*.

ВЕЙЕРШТРАСС Карл Теодор Вильгельм (31.10.1815 – 19. 2.1897) – немецкий математик, чл. Берлин. АН (1856). Род. в Остенфельде. Спец. высшего образования не имел. Изучал юридические науки в Бонне, но, увлекшись математикой, оставил юридический ф-т. В 1841 сдал экзамены на звание учителя. В 1842 – 55– преподаватель математики в католических ср. уч. заведениях Дейч-Кронса и Броунберга. С 1856 – экстраординарный, с 1865 – ординарный проф. Берлин, ун-та. Большинство работ напечатано после его смерти, а при жизни идеи В. распространяли многочисленные слушатели его лекций из разных стран. Лекции В. имели огромное значение для развития математики. В них впервые с достаточной строгостью рассматривался ряд осн. матем. понятий. Лекции и науч. статьи В. посвящены матем. анализу, теории аналитических функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре. Большое значение для математики имеет разрабатывавшаяся В. система логического обоснования матем. анализа, основанная на построенной им теории действительных чисел. Значительны результаты В. в области матем. анализа: систематическое использование понятий верхней и нижней граней числовых множеств, учение о предельных точках, строгое обоснование свойств непрерывных функций, построение примера непрерывной функции, нигде не имеющей производной (во всем этом предшественником В. был чеш. математик *Б. Больцано*), доказательство теоремы о возможности разложения любой непрерывной на отрезке функции в равномерно сходящийся ряд многочленов, науч. критика тех доказательств, к-рые основываются на допущении существования функции, реализующей экстремум нек-рого функционала, и др. Именем В. названы апроксимационная теорема, признак равномерной сходимости, функция; есть также функция *В.–Стоуна.* Значительное место в работах В. занимает теория аналитических функций. Ему принадлежат: теорема о том, что функцию, аналитическую в круговом кольце, можно разложить в степенной ряд по целым положительным и отрицательным степеням переменной (эту теорему независимо от В. доказал франц. математик *П. Лоран,* его именем она и названа), построение теорем об аналитическом продолжении, теорема об аналитичности суммы равномерно сходящегося в нек-рой области ряда аналитических функций, разложение целых функций в бесконечные произведения (обобщение разложения многочленов на множители), новое построение теории эллиптических функций (на основе введённых им функций $\sigma(z), \xi(z)$ і $\gamma(z)$, создание основ теории аналитических функций мн. переменных, работы по теории алгебр. функций и абелевых интегралов. К вариационному исчислению относятся: исследование достаточных условий экстремума интеграла (условие В.), построение вариационного исчисления для случая параметрического задания функций, когда все ф-лы приобретают особенно симметричный вид и вместе с тем достигают наибольшей общности, изучение «разрывных» решений в задачах вариационного исчисления и др. В дифференциальной геометрии В. изучал геодезические линии и минимальные поверхности.

В линейной алгебре В. принадлежит построение теории элементарных делителей, относящейся к приведению матриц к каноническому виду и имеющей большое значение для теории систем линейных, в том числе дифференциальных, ур-ний. В. доказал теорему о том, что комплексные числа образуют над полем действительных чисел единственную коммутативную алгебру без делителей нуля (1872). В. занимался приложениями математики к механике и физике и поощрял своих многочисленных учеников работать в этом направлении. Учениками В. были: С. *В. Ковалевская, Г. Миттаг-Леффлер, К. Шварц, И. Фукс,* Ф. *Шоттки, Л. Кёнигсбергер* и др. В. – почётный чл. Петерб. АН (1895), чл. Париж. АН (1868). В 1967 были изданы его труды (т. I–VII). Именем В. назван кратер на обратной стороне Луны.

ВРОНЬСКИЙ (ГЁНЕ – ВРОНСКИЙ) Юзеф Мария (24.8.1776 – 9.8.1853) – польский математик и философ. Род. в Вольштыне. Окончил Варшав. кадетский корпус. Был арт. офицером. Служил в армии Костюшко, позднее вступил в рус. армию; в 1897 вышел в отставку в чине полковника. С 1797 изучал историю философии и высшую математику в Германии. С 1811 жил в Париже, занимался науч. деятельностью. Для работ В. по математике, публиковавшихся с 1811, характерны широта и общность постановок задач. В. искал общие методы, пригодные для решения алгебр. ур-ний или сравнений любых степеней,

ф-лы, охватывающие известные разложения функций в ряды, бесконечные произведения и непрерывные дроби, способы решения дифференциальных и разностных ур-ний любых порядков и т.п. Во второй половине XIX в. математики, занимаясь разработкой науч. наследия В., выявили мн. методы и отд. факты, найденные В., к-рые частично были открыты другими учёными. Имя В. упоминается в курсах анализа в связи с введённым им (в 1812) функциональным определителем, имеющим большое значение в теории линейных дифференциальных ур-ний (вронскиан).

ГУРВИЦ Адольф (26.3.1859 – 18.11.1919) – немецкий математик, ученик *Ф. Клейна*. Род. в Гильдесгейме. Окончил Лейпцигский ун-т (1880). Работал в Кенигсберге и Цюрихе. Основные труды по матем. анализу, теории функций, алгебре и теории чисел. В теории функций комплексного переменного известны теоремы Г. Широкое применение нашёл его критерий отрицательности действительных частей корней алгебр. ур-ний (критерий Г.). В аддитивной теории чисел Г. доказал, что представлять произведение целых чисел в виде сумм квадратов целых чисел можно только для множителей, состоящих из сумм двух, и четырёх и восьми квадратов. Сделал также значительный вклад и геометрию. На рус. яз. перев. кн. Г. «Теория аналитических и эллиптических функций» (М.; Л., 1933), «Теория функций» (М., 1968; совместно с *Р. Курантом*).

ДИРИХЛЕ Петер Густав Лежен (13.2.1805 – 5.5.1859) – немецкий математик. Род. в Дюрене. В 1822–27 был домашним учителем в Париже. Входил в кружок молодых учёных, к-рые группировались вокруг *Ж. Фурье.* В 1827 занял место доц. в Бреславе; с 1829 работал в Берлине. В 1831–55 – проф. Берлин, ун-та, после смерти *К. Гаусса* (1855) – Гёттингенского ун-та. Сделал ряд крупных открытий в теории чисел; установил ф-лы для числа классов бинарных квадратичных форм с заданным определителем и доказал теорему о бесконечности кол-ва простых чисел в арифметической прогрессии из целых чисел, первый чл. и разность к-рой взаимно просты. К решению этих задач применил аналитические функции, названные функциями (рядами) Д. Создал общую теорию алгебр. единиц в алгебр. числовом поле. В области матем. анализа впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций, что послужило обоснованием для мн. дальнейших исследований. Значительны труды Д. в механике и матем. физике, в частности в теории потенциала. С именем Д. связаны задача, интеграл (ввёл интеграл с ядром Д.), принцип, характер, ряды и мн. др. Лекции Д. имели огромное, влияние на выдающихся математиков более позднего времени, в т.ч. на *Г. Римана, Ф. Эйзенштейна, Л Кронекера, Ю. Дедекинда* и др. На рус. яз. перев. кн. Д. «Лекции по теории чисел» (М., 1936). Иностр. чл.-кор. Петерб. АН (1837), чл. Париж. АН (1854).

ЕВКЛИД (ЭВКЛИД) (ок. 356 – ок. 300 до н.э.) – древнегреческий математик, автор первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Биографические сведения о жизни и деятельности Е. крайне ограничены. Известно, что он родом из Афин, был учеником *Платона*. Науч. деятельность Е. протекала в Александрии, где он создал матем. школу. Гл. труды Е. «Начала» (латинизированное назв. – «Элементы») содержит изложение планиметрии, стереометрии и ряда вопросов теории чисел, алгебры, общей теории отношений и метода определения площадей и объёмов, включающего элементы пределов (метод исчерпывания). В «Началах» Е. подытожил все предшествующие достижения греч. математики и создал фундамент для её дальнейшего развития. *Ван-дер-Варден* считает, что «Начала» Е. являются обработкой соч. греч. математиков V–IV в. до н.э.: 1-я – 4-я кн. (планиметрия) – обработка «Начал» *Гиппократа Хиосского*; 5-я кн. (теория пропорций геом. величин), 6-я кн. (теория подобия) и 12-я кн. (круглые тела) – обработка соч. *Евдокса Книдского*; 7-я – 9-я кн. (теория чисел и числовых пропорций) и 11-я кн. (основы стереометрии) – обработка соч. *Архита Тарентского*; 10-я кн. (теория иррациональных величин) и 13-я кн. (правильные многогранники) – обработка соч. *Теэтета Афинского*. V постулат сформулировал сам Е. Ему же принадлежит т.н. алгоритм Е. – для нахождения общей меры двух отрезков и доказательство бесконечности числа простых чисел.

Ист. значение «Начал» Е. заключается в том, что в них впервые сделана попытка логического построения геометрии на основе аксиоматики. Аксиоматический метод, господствующий в совр. математике, своим происхождением в большой степени обязан «Началам» Е. Осн. недостатком аксиоматики Е. следует считать её неполноту; нет аксиом непрерывности, движения и порядка, поэтому Е. часто приходится апеллировать к интуиции, доверять глазу. Что касается определений точки, линии, прямой, поверхности и плоскости, то их значение заключается в том, что они отражают естественный процесс образования этих понятий. Ни одна науч. кн. не пользовалась таким большим и длительным успехом, как «Начала» Е. С 1482 она выдержала более 500 изд. на всех яз. мира.

Кроме «Начал», до нас дошли такие произв. Е.: кн. под лат. назв. «Datta» («Данные») (с описанием условий, при которых какой-нибудь матем. образ можно считать «данным»); кн. по оптике (содержащая учение о перспективе), по катоптрике (излагающая теорию искажений в зеркалах), кн. «Деление фигур». Математики более позднего времени – *Папп* и *Д. Прокл* – упоминают не дошедшие до нас работы Е.: 4 кн. о конических сечениях, материал к-рых вошёл в произведения *Аполлония Пергского*; 2 кн. о местах на поверхности; 3 кн. «Поризмы», содержание к-рых до сих пор не выяснено. Не сохранилась пед. работа Е. «О ложных заключениях» (в математике). Е. написал также соч. по астрономии («Явления») и музыке. Дошедшие до нас произв. Е. собраны в изд. Гейберга и Менге (Лейпциг, 1883 – 1916), в к-ром помещены греч. подлинники, лат. пер. и комментарии позднейших авторов. Именем Е. назван кратер на видимой стороне Луны.

КОШИ Огюстен Луи (21.8.1789 – 23.5.1857) – французский математик. Чл. Париж. АН (1816). Род. в Париже. Окончил Политехн. школу (1807) и Школу мостов и дорог (1810) в Париже. Нек-рое время работал инженером путей сообщения, с 1813 занялся наукой и преподаванием. Его назначили чл. АН вместо *Г. Монжа.* В 1816 мемуар К. по теории волн на поверхности тяжёлой жидкости на конкурсе Париж. АН получил первую премию; после этого К. приглашают в Политехн., школу, Сорбонну и Коллеж де Франс. В 1830–38 К. путешествовал по Европе. Возвратившись в Париж, из-за неприятия нового режима отказался от разл. учёных должностей, не желая приносить присягу, пока ему не предложили кафедру «без условий». Труды относятся к разл. областям математики. Были периоды, когда К. каждую неделю представлял в Париж. АН новый мемуар. Всего же он опубл. свыше 800 работ по арифметике и теории чисел, алгебре, матем. анализу, дифференциальным ур-ниям, теоретической и небесной механике, матем. физике. Быстрота, с к-рой К. переходил от одного предмета к другому, отчасти дала ему возможность проложить в математике множество новых путей. Его «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (1826–28), основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. В них К. дал определение понятия непрерывности функции, чёткое построение теории сходящихся рядов (в частности, впервые установил точные условия сходимости ряда *Тейлора* к данной функции и провёл отчётливое различие между сходимостью этого ряда вообще и сходимостью к данной функции; ввёл понятие радиуса сходимости, доказал теорему о произведении двух абсолютно сходящихся рядов), определение интеграла как предела сумм и доказательство существования интегралов от непрерывной функции. Большой заслугой К. является то, что он развил основы теории аналитических функций комплексного переменного, заложенные еще в XVIII в. *Л. Эйлером* и Ж. *Д'Аламбером.* Особенно важное значение имеют такие результаты, полученные К.: геом. представление комплексного переменного как точки, перемещающейся в плоскости по тому или иному пути интегрирования (эту мысль ещё раньше высказали *К. Гаусс* и др.); выражение аналитической функции в виде интеграла (интеграл К.), а отсюда разложение функции в степенной ряд; разработка теории вычетов и её приложений к разл. вопросам анализа и др. В теории дифференциальных ур-ний К. принадлежат: постановка одной из важнейших общих задач теории дифференциальных ур-ний (задача К.), осн. теоремы существования решений для случая действительных и комплексных переменных (для последних К. развил метод мажорант) и метод интегрирования ур-ний с частными производными 1-го порядка (метод К. – метод характеристических полос). В геометрии К. обобщил теорию многогранников, разработал новый способ иссл. поверхности 2-го порядка, исследовал касание, спрямление и квадратуру кривых, установил правила приложения анализа к геометрии, а также вывел ур-ния плоскости и параметрическое представление прямой в пространстве. Доказал (1813), что два выпуклых многогранника с соотв. конгруэнтными и одинаково расположенными гранями имеют равные двугранные углы между соотв. гранями. В алгебре К. по-иному доказал осн. теорему теории симметрических многочленов, развил теорию определителей, найдя все гл. их свойства, в частности доказал теорему умножения (причём К. исходил из понятия знакопеременной функции); эту теорему он распространил на матрицы. Ввёл термины «модуль» комплексного числа, «сопряжённые» комплексные числа и др. Распространил теорему *Штурма* на комплексные корни. В теории чисел К. принадлежат: доказательство теоремы *Ферма* о многоугольных числах, одно из доказательств закона взаимности, иссл. по теории целых алгебр. чисел (при этом К. получил ряд результатов, позднее в более общей форме установленных нем. Математиком *Э. Куммером*). К. первый изучил общее неопределённое тернарное куб. ур-ние и сформулировал теоремы о неопределённых тернарных кв. ур-ниях и сравнениях с одинаковым модулем и общим решением. Занимался также иссл. по тригонометрии, механике, теории упругости, оптике, астрономии. Был чл. Лондон, королевского об-ва и почти всех академий наук мира. Полное собр. соч. К. изд. Париж. АН. Кавалер ордена Почётного легиона. Именем К. назван кратер на видимой стороне Луны.

КРАМЕР Габриель (31.7.1704 – 4.1.1752) – швейцарский математик. Род. в Женеве. Был учеником и другом *Иоганна I Бернулли*. Издатель трудов Иоганна I и *Якоба I Бернулли*, переписки *Г. Лейбница* с И. Бернулли. Учился и работал в Женеве. Осн. труды по высшей алгебре и аналитической геометрии. Установил и опубл. (1750) правила решения систем n линейных ур-ний с n неизвестными с буквенными коэф. (правило К.), заложил основы теории определителей, но при этом не пользовался ещё удобными обозначениями определителей. Показал, что результат двух многочленов образуется с помощью симметрических функции. Во «Введении в анализ алгебраических кривых» (1750) существенно развил идеи современников по аналитической геометрии; исследовал особые точки, ветви, кривизну алгебр. кривых высших порядков. В 1742 К. обобщил на случай трёх произвольных точек поставленную ещё *Паппом* задачу о вписании в круг треугольника, стороны к-го проходят через три точки, лежащие на одной прямой. В геометрии известен парадокс К. Чл. Лондон. королевского об-ва (1749).

ЛАГРАНЖ Жозеф Луи (25.1.1736 – 10.4.1813) – французский математик, механик и астроном. Чл. Берлин. АН (1759) и её президент (1766–87), чл. Париж. АН (1787). Род. в Турине (Италия). Высшее образование получил в арт. уч-ще в Турине. Ещё до оконч. уч-ща начал преподавать в нём математику. С 1795 – проф. Высшей норм. школы, с 1797 – Политехн. школы в Париже. Осн. труды по матем. анализу, вариационному исчислению, алгебре, теории чисел, дифференциальным ур-ниям и механике. Под влиянием кн. *Э. Галлея* «О преимуществах аналитического метода» начал иссл. в области матем. анализа (1753). Был организатором науч. об-ва, к-рое позже превратилось в Туринскую АН. Все ст., опубл. на протяжении ряда лет в ж. этого об-ва, принадлежали Л. или его ученикам. В соч. «О распространении звука» (1759) Л. правильно решил проблему, над к-рой работали *И. Ньютон, Б. Тейлор, Л. Эйлер, Ж. Д'Аламбер* и *И. Бернулли.* Ознакомившись с соч. Л. «О способах нахождения наибольших и наименьших величин интегралов» ещё до выхода его в свет, Л. Эйлер признал преимущества метода Л. над своим и рекомендовал 23-летнего автора в члены Берлин. АН. Это соч. Л. вместе с работой Эйлера «Методы нахождения кривых линий, имеющих свойство максимума или минимума» (1774; рус. перевод вышел в 1934), легло в основу нового раздела матем. анализа – вариационного исчисления. Л. получил важные результаты в диофантовом анализе, теории алгебр. ур-ний, вариационном исчислении, аналитической и небесной механике (применение метода вариации произвольных постоянных, задача трёх тел и др.), интегрировании ур-ний с частными производными, сферической астрономии, картографии и т.д. В 1787 опубл. работа Л. «Аналитическая механика» (рус. перевод вышел в 1950), в к-рой Л. подытожил достижения в этой области за прошлое столетие и создал классическую аналитическую механику в виде учения об общих дифференциальных ур-ниях движения произвольных материальных систем. После открытия Ин-та и Бюро долгот Л. становится его чл. и в 1792 вместе с *П. Лапласом, Г. Монжем* и др. разрабатывает метрическую систему мер. Принимает участие в организации и работе Высшей норм, и Политехн. школ в Париже, читает там курсы элементарной математики и матем. анализа. В 1798 Л. опубл. «Трактат о решении численных уравнений всех степеней». Курс матем. анализа был издан в 2-х частях под названиями «Теория аналитических функций» (1797) и «Лекции по исчислению функций» (1801–06). Соч. Л. по математике, астрономии и механике составляют 14 т. В матем. анализе Л. дал ф-лу остаточного члена ряда Тейлора, ф-лу конечных приращений и интерполяционную ф-лу, ввёл способ множителей для решения задачи отыскания условных экстремумов. В области дифференциальных ур-ний создал теорию особых решений и разработал метод вариации произвольных постоянных. В алгебре построил теорию ур-ний, обобщением к-рой является теория *Галуа,* нашёл способ приближённого вычисления корней алгебр. ур-ния с помощью непрерывных дробей, метод отделения корней алгебр. ур-ний, метод исключения переменных из системы ур-ний (составление результанта), разложение корней ур-ний в т.н. ряд Лагранжа. В теории чисел с помощью непрерывных дробей Л. решил неопределённые ур-ния 2-й степени с двумя неизвестными, доказал периодичность разложений квадратичных иррациональностей в непрерывные дроби и т.д. Исходя из общих законов динамики, Л. указал две осн. формы дифференциальных ур-ний движения несвободной системы, к-рые теперь называются ур-ниями Л. 1-го рода, и вывел ур-ния в обобщённых координатах – ур-ния Л. 2-го рода. Основу совр. теории колебаний составляют задачи, объединённые в кн. Л. «О малых колебаниях любой системы тел». Париж. АН 5 раз отмечала деятельность Л. премиями. Кавалер ордена Почетного легиона. Именем Л. назван кратер на видимой стороне Луны.

ЛЕЙБНИЦ Готфрид Вильгельм (1.7.1646 – 14.11.1716) – немецкий математик, физик и философ, организатор и первый президент Берлин. АН (1700). Род. в Лейпциге. В 1601 поступил на юридический ф-т Лейпциг. ун-та. Кроме юридических наук, изучал философию и математику. В ун-те ознакомился с работами Аристотеля и Р. Декарта. Защитил диссертацию на степень бакалавра (1663), магистра философии (1664) и д-ра права (1666). Состоял на юридической и дипломатической службе при дворе Майнцского курфюрста. Из Майнца выезжал с дипломатической миссией в Париж, где познакомился со мн. математиками, в частности с *Х. Гюйгенсом*, под руководством к-рого изучал работы *Г. Галилея*, *Р. Декарта, П. Ферма*, *Б. Паскаля*, и самого Гюйгенса. В 1673 из Парижа Л. выезжает в Лондон для демонстрации своей счётной машины в Лондон. королевском об-ве. В Лондоне познакомился с *И. Барроу*, а также с трудами *И. Ньютона*, «Логарифмотехникой» *Г. Меркатора*. Возвратясь в 1676 в Париж, Л. разрабатывает важные вопросы дифференциального исчисления. В том же году уезжает в Ганновер, где работает библиотекарем, затем историографом двора Ганноверского герцога. Деятельность Л. выходила далеко за пределы его официальных обязанностей. Он занимался химией и геологией, сконструировал ветряной двигатель для насосов, выкачивающих воду из шахт. Особенно плодотворной была науч. деятельность Л. в области математики. В 1666 Л. опубл. свою первую матем. работу «Размышления о комбинаторном искусстве». Сконструированная Л. счётная машина выполняла не только сложение и вычитание, как это было у Б. Паскаля, но и умножение, деление, возведение в степень и извлечение кв. и куб. корней. Свыше 40 лет Л. посвятил усовершенствованию своего изобретения. Поэтому его можно считать идейным вдохновителем совр. машинной математики. Л. заложил основы символической логики. Разработанные им логика классов и исчисление высказываний в алгебр. форме лежат в основе совр. матем. логики. Исследовал свойства нек-рых кривых (в частности, цепной линии), занимался разложением функций в ряды, ввёл понятие определителя и выдвинул нек-рые идеи, касающиеся теории определителей; впоследствии их развивали *А. Вандермонд*, *О. Коши*, *К. Гаусс* и окончательно разработал *К. Якоби*. Л. до нек-рой степени проложил путь таким новым дисциплинам, как политическая экономия и сравнительное языкознание. Важнейшей заслугой Л. является то, что он, одноврем. с И. Ньютоном, но независимо от него, завершил создание дифференциального и интегрального исчислений. При этом он исходил не из квадратуры кривых, как Ньютон, а из проблемы касательных. Изучение работ Б. Паскаля и собственные иссл. привели Л. в 1673-74 к идее характеристического треугольника, к-рый теперь используется при введении понятий производной и дифференциала в каждом учебнике дифференциального исчисления. Л. сделал и дальнейший шаг в создании нового исчисления – установил зависимость между прямой и обратной задачами о касательных. Через год он пришёл к выводу, что из «обратного метода касательных выходит квадратура всех фигур». В октябре 1675 Л. уже пользуется обозначением Sl для суммы бесконечно малых и операцию, противоположную суммированию, обозначает, подписывая букву d под переменной $\left(\frac{x}{d}\right)$, а затем рядом с ней: dx. Знак интеграла в совр. форме впервые встречается в работе Л. «О скрытой геометрии...» (1686). Л. решил проблему касательных с помощью дифференциального исчисления, сформулировал правила дифференцирования произведения, степени, неявной функции. Эти результаты Л. опубл. только в 1684 в ст. «Новый метод максимумов и минимумов», впервые назвав свой алгоритм дифференциальным исчислением. В 1603 Л. опубл. первые образцы интегрирования дифференциальных ур-ний с помощью бесконечных рядов. Л. ввёл много матем. терминов, к-рые теперь прочно вошли в науч. практику (функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, алгоритм, абсцисса, ордината, координата), а также знаки дифференциала, интеграла, логическую символику. С именем Л. в науке связано много открытий и гипотез, к-рые позже получили признание. В механике ему принадлежит понятие о «живых силах», в геологии – мысль, что Земля имеет историю. Л. высказал правильное предположение о происхождении ископаемых остатков животных и растений, отстаивал важную для биологии мысль об эволюции. Создал собственную науч. школу, в к-рую входили братья *Бернулли*, *Г.Ф. Лопиталь* и др. математики. Первым нарушил традицию писать науч. труды только на лат. яз. Чл. Лондон, королевского об-ва (1679) и

Париж. АН (1700). АН ГДР учредила Мейсенскую Лейбницевскую медаль. Именем Л. названы горный хребет на видимой стороне Луны и кратер на обратной стороне Луны.

ЛИПШИЦ Рудольф (14.5.1832 – 7.10.1903) – немецкий математик. Чл.-кор. Берлин. АН (1872). Род. бл. Кенигсберга. Окончил Берлин, ун-т (1853). Работал в ун-тах Бреслау и Бонна (с 1862 – проф.). Труды по разл. областям анализа, теории чисел, механики и физики, дифференциальным ур-ниям и многомерной геометрии. В 1859 опубл. первое строгое исследование асимптотического разложения цилиндрической функции $f(x)$ с помощью контурного интегрирования. В 1864 рассматривая достаточные условия для сходимости ряда *Фурье* функции $f(x)$, сформулировал условие, к-рое названо его именем. В 1869 опубл. работу об эквивалентности квадратичных дифференциальных форм. Одно из условий единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального ур-ния называют именем Л. Известны классы Л. (или Л. – *Зигмунда*), интегралы Л. – *Ханкеля* и др.

ЛЯПУНОВ Александр Михайлович (6.6.1857 – 3.11.1918) – русский математик и механик. Выдающийся представитель петерб. матем. школы, созданной *П.Л. Чебышевым*. Акад. Петерб. АН (1901). Род. в Ярославле. В 1876 поступил на естественное отд. физико-матем. ф-та Петерб. ун-та, где в это время работали *Д.И. Менделеев*, *П.Л. Чебышев*, *Д.К. Бобылев*, *А.Н. Коркин, Е.И. Золотарев* и др. выдающиеся учёные. Лекции П.Л. Чебышева произвели на Л. такое впечатление, что через месяц он перешёл с естественного на матем. отд. На 4-м курсе ун-та был награждён зол. медалью за развитие предложенной ф-том темы «О равновесии тяжёлых тел в тяжёлых жидкостях». В 1880 блестяще окончил ун-т, и был оставлен на кафедре механики для подготовки к проф. званию. Успешно защитив диссертацию на степень магистра прикладной математики на тему «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости», перешёл в Харьков. ун-т. В 1888 – 92 – опубл. ряд статей, посвящённых решению задачи об устойчивости движения материальных систем, к-рая сводится к иссл. системы дифференциальных ур-ний. (Проблема устойчивости движения принадлежит к категории труднейших задач естествознания; её исследовали мн. выдающиеся математики – от *Ж. Лагранжа* до *А. Пуанкаре*). В работе «Общая задача об устойчивости движения» (1892) Л. предложил новые общие строгие методы решения этих задач. С помощью одного из этих методов, основывающегося на понятии т.н. функции Л., получил важные по своим применениям критерии устойчивости решения.

Методы иссл., предложенные Л., успешно применяются в др. разделах теории дифференциальных ур-ний. Большой вклад внесли работы Л. и в матем. физику, в частности в теорию потенциалов; важное значение имеет его работа «О некоторых вопросах, касающихся проблемы Дирихле» (1898). В 1902 Л. переезжает в Петербург и полностью отдаётся науч. деятельности. Написал работу о лапласовской и лежандровской гидростатической теории фигур планет. В 1905 вновь обратился к проблемам фигур равновесия однородной жидкости, образуемых под влиянием равномерного вращения её вокруг неизменной оси. В частности, доказал неустойчивость т.н. грушевидных фигур и тем самым опроверг противоположное утверждение англ. астронома *Дж. Дарвина*. В теории вероятностей Л. дал простое и строгое доказательство центр. предельной теоремы в более общей форме, чем *П.Л. Чебышев* и *А.А. Марков*. Для доказательства своей теоремы Л. разработал оригинальный и чрезвычайно плодотворный метод характеристических функций, к-рый широко применяется в совр. теории вероятностей. АН СССР учредила зол. медаль им. А. М. Ляпунова за выдающиеся работы в области математики и механики. Именем Л. назван кратер краевой зоны Луны. Чл. Нац. академии деи Линчеи в Риме, чл.-кор. Париж. АН и др. академий и науч. об-в.

НЕЙМАН Карл Готфрид (7.5.1832 – 27.3.1925) – немецкий физик и математик. Чл. Берлин. АН. Род. в Кёнигсберге. Сын *Ф.Э. Неймана*. Окончил Кёнигсберг. ун-т (1857). Работал в ун-тах Галле, Тюбингена, Лейпцига. Разрабатывал риманову теорию алгебр. функций; опубл. «Лекции по римановой теории абелевых функций» (1865). В теории дифференциальных ур-ний с частными производными Н. принадлежат работы по теории потенциала, в к-рых он дал альтернирующий метод (метод Н.) решения задач *Дирихле* для случая выпуклых контуров (на плоскости) и выпуклых поверхностей в пространстве. Н. рассматривал вариант краевой задачи для ур-ния *Лапласа*, получившей название задачи Н. Один из основателей ж. «Mathematische Annalen».

ПИКАР Шарль Эмиль (24.7.1856 – 11.12.1941) – французский математик. Чл. Париж. АН (1889) и её непременный секретарь (с 1917). Род. в Париже. Окончил Высшую норм. школу в Париже (1877), получил степень д-ра математики. Ученик *Ш. Эрмита*. С 1881 – проф. этой школы и Сорбонны. П. принадлежат фундаментальные иссл. по дифференциальным ур-ниям, по теории аналитических функции, алгебр. функций и др. В частности, в 1879 доказал теорему о том, что однозначная аналитическая функция в окрестности изолированной существенно особой точки принимает все комплексные значения, кроме, возможно, двух исключительных (теорема П.). В 1890 разработал метод доказательства теорем существования и единственности для интегральных ур-ний, основанный на доказательстве сходимости последовательных приближений. Написал также работы по теории алгебр. функции двух переменных и их применений к общей теории алгебр. кривых и поверхностей, а также по философии науки. Иностр. чл.-кор. Петерб. АН (1893), иностр. почётный чл. АН СССР (1924). Париж. АН учредила медаль им. Ш.Э. Пикара.

РАУС (РОУС) Эдвард Джон (20.1.1831 – 7.6.1907) – английский механик и математик. Осн. труды по механике, теориям аналитических функций и дифференциальных ур-ний. В 1877 решил проблему (критерий устойчивости), предложенную *Дж. Максвеллом* в 1868, позволяющую определить, в каких случаях все нули данного многочлена лежат в левой полуплоскости, но это решение было забыто. В том же году И.А. Вышнеградский дал оригинальное геом. решение этой проблемы, но изложил его лишь на примере многочлена 3-й степени с действительными коэф. В 1895 *А. Гурвиц* предложил новое её решение, и теперь проблему называют проблемой (методом) Р.–Гурвица. В теории дифференциальных ур-ний с частными производными известен метод Р.–Гурвица для иссл. устойчивости линейных дифференциальных разностных схем и матричная проблема Р.–Гурвица для одного класса и для семейства полиномов и квазиполиномов.

ЭЙЛЕР Леонард (15.4.1707 – 18.9.1783) – математик, физик, механик и астроном. Род. в Швейцарии. Окончил Базельскую гимназию. Еще обучаясь в гимназии, слушал в ун-те лекции *И. Бернулли* и под его руководством изучил в подлинниках труды знаменитых в то время математиков. В 1723 Э. получил степень магистра наук. В 1726 по приглашению Петерб. АН приехал в Россию и был назначен адъюнктом по математике. В 1730 занял кафедру физики, с 1733 стал академиком математики. В 1741 Э. принял предложение короля Фридриха II и переехал в Берлин. Но связи с Петерб. АН он не прерывает. В 1746 вышли 3 тома ст. Э., посвященных артиллерии. Большое внимание уделял Э. вопросам навигации. В

1749 Петерб. АН издала его 2-томный труд, в к-ром впервые вопросы навигации изложены в матем. форме. Э. дополнил её серией мемуаров, один из к-рых о бортовой и килевой качке судов получил премию Париж. АН (1759). В 1773 Э. опубл. новую теорию кораблестроения и маневрирования судов. Этот труд был издан во Франции, Англии и Италии.

Многочисленные открытия Э. по матем. анализу, сделанные им за 30 лет и опубл. в разл. академических изданиях, были позже объединены в одном произв. «Введение в анализ бесконечно малых» (Лозанна, 1748). 1-й т. посвящён свойствам рациональных и трансцендентных функций; во 2-м т. исследовались кривые 2-го, 3-го и 4-го порядков и поверхности 2-го порядка. Здесь впервые введены углы Э., играющие в математике и механике важную роль. Вслед за «Введением» вышел трактат в 4-х т.; 1-й т. – о дифференциальном исчислении – был издан в Берлине (1755), остальные т., посвящённые интегральному исчислению, – в Петерб. АН (1768-70). В последнем т. рассматривалось вариационное исчисление, созданное Э. и *Ж. Лагранжем*. Одноврем. Э. исследовал вопрос о прохождении света через разл. среды и связанный с этим эффект хроматизма. В 1747 Э. предложил сложный объектив.

В 1776 Э. вернулся в Россию. Работу «Элементы алгебры», вышедшую в 1768, Э. вынужден был диктовать, т.к. к этому времени он ослеп. Работа вышла на рус, нем., франц. языках. Вместе с акад *В. Крафтом* Э. собрал в один огромный трактат всё, что он написал за 30 лет по диоптрике. В 1769 – 77 вышли 3 больших т., в к-рых изложены правила наилучшего расчёта рефракторов, рефлекторов и микроскопов, решаются такие вопросы, как вычисление наибольшей яркости изображения, наибольшего поля зрения, наименьшей длины астр. труб, наибольшего увеличения и т.п. В это же время печатались 3 тома писем Э. к нем. принцессе, 3 тома «Интегрального исчисления», 2 тома «Элементов алгебры», мемуары: «Вычисление Кометы 1769», «Вычисление затмения Солнца», «Новая теория Луны», «Навигация» и др.

В 1775 Париж. АН в обход статута и без согласия франц. правительства определила Э. своим 9-м (должно быть только 8) «присоединенным членом». Несмотря на слепоту, науч. продуктивность Э. всё возрастала. Почти половину своих трудов Э. создал в последнее десятилетие жизни. Занимался гидродинамикой, теорией объективов, теорией вероятностей, теорией чисел и др. вопросами естествознания. Впервые ввёл понятие функции комплексной переменной, нашёл неожиданную связь между тригонометрическими и показательными функциями. Тригонометрию дал в совр. виде. Вариационное исчисление в ряде трудов Э. приняло вид общего метода. Э. положил начало аналитическому методу в теории чисел. Всего по теории чисел написал более 140 работ. Был одним из творцов совр. дифференциальной геометрии. Привел доказательство соотношения между числом вершин, рёбер и граней многогранника: сумма числа вершин и граней равна числу рёбер, увеличенному на 2. В алгебр. топологии важную роль играют эйлерова характеристика и эйлеров класс. Почти во всех областях математики и её приложений встречается имя Э.: теоремы Э., тождества Э., эйлеровы постоянные, углы, функции, интегралы, формулы, ур-ния, подстановки и др.

За неск. дней до смерти Э. занимался расчётом полета аэростата, к-рый казался чудом в ту эпоху, и почти закончил весьма трудную интеграцию, связанную с этим вычислением. Э. принадлежит более 865 иссл. по самым разнообразным и труднейшим вопросам. Оказал большое и плодотворное влияние на развитие матем. просвещения в России XVIII в. Петерб. матем. школа, в к-рую входили академики *С.К. Котельников*, *С.Я. Румовский*, *Н.И. Фусс*, *М.Е. Головин* и др. рус. математики, под руководством Э. вела огромную просветительную работу, создала обширную и замечательную для своего времени учебную литературу, выполнила ряд интересных науч. иссл. в области математики. Чл. Берлин. АН, чл. Лондон. королевского об-ва и мн. др. академий и науч. об-в. Именем Л. Эйлера назван кратер на видимой стороне Луны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основная литература

1.1. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения : учеб. для вузов / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. – 3-е изд., стереотип. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 352 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. VIII).

1.2. Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. – 3-е изд., дополн. и перераб. – Мн. : Наука и техника, 1979. – 744 с.

1.3. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – 3-е изд., испр. и дополн. – М. : Высшая школа, 1967. – 564 с.

1.4. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – 2-е изд., перераб. и дополн. – М. : Наука, 1985. – 232 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 7).

1.5. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.А. Треногин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 312 с.

2. Вспомогательная литература

2.1. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

2.2. Ильин, В.А. Линейная алгебра : учеб. для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стереотип. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. IV).

2.3. Ильин, В.А. Основы математического анализа : учеб. для вузов. – В 2-х ч. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стереотип. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Ч. I. – 648 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. I).

2.4. Канатников, А.Н. Линейная алгебра : учеб. для вузов / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. – 4-е изд., исправл. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 336 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. IV).

2.5. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – 11-е изд., стереотип. – М. : Наука, 1975. – 432 с.

2.6. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич. – 4-е изд., испр. и дополн. – М. : Наука, 1978. – 416 с.

2.7. Морозова, В.Д. Теория функций комплексного переменного : учеб. для вузов / В.Д. Морозова. – 2-е изд., стереотип. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 520 с. – (Сер. Математика в техническом университете. Вып. X).

2.8. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.

2.9. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – 7-е изд., стереотип. – М. : Наука, 1970. – Т. 1. – 608 с.

3. Дополнительная литература

3.1. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1971. – 240 с.

3.2. Арнольд, В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1978. – 304 с.

3.3. Бибиков, Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие для ун-тов / Ю.Н. Бибиков. – М. : Высш. шк., 1991. – 303 с.

3.4. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 6-е изд., стереотип. – СПб. : Лань, 2003. – 576 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

3.5. Немыцкий, В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – 3-е изд., испр. – М. : УРСС, 2004. – 552 с.

3.6. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебник для вузов / И.Г. Петровский. – 7-е изд. – М. : УРСС, 2009. – 237 с. – (Классич. университет. учебник).

3.7. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – 3-е изд., стереотип. – М. : Наука, 1970. – 332 с.

3.8. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений : учебник для гос. ун-тов / В.В. Степанов. – 8-е изд., стереотип. – М. : УРСС, 2004. – 472 с.

3.9. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – 3-е изд., стереотип. – СПб. : Лань, 2003. – 448 с. – (Учебники для вузов. Спец. литература).

3.10. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.

4. Задачники

4.1. Альсевич, Л.А. Практикум по дифференциальным уравнениям : учеб. пособие для вузов / Л.А. Альсевич, Л.П. Черенкова. – Мн. : Выш. шк., 1990. – 318 с.

4.2. Зимина, О.В. Высшая математика : решебник / О.В. Зимина, А.И. Кириллов, Т.А. Сальникова. – 2-е изд., испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 368 с.

4.3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты : учебное пособие / Л.А. Кузнецов. – 4-е изд., стереотип. – СПб. : Лань, 2005. – 240 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

4.4. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям : учебное пособие / Н.М. Матвеев. – 7-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2002. – 432 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

4.5. Пантелеев, А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения : практ. курс : учеб. пособие для вузов / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, К.А. Рыбаков. – М. : Логос, 2010. – 383 с. – (Новая университет. б-ка).

4.6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие. В 3-х ч. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Мн. : Выш. шк., 1991. – Ч. 2. – 352 с.
4.7. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения. Практический курс : учеб. пособие / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея,
Н.А. Перестюк. – 3-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 2006. – 383 с.
4.8. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М. : Интеграл-Пресс, 1998. – 208 с.
4.9. Математические методы решения физических задач : учеб. пособие / В.В. Харитонов, Д.Г. Лин, В.А. Пенязь, И.В. Семченко,
В.Ф. Шолох. – Мн. : Выш. шк., 1991. – 256 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ