Г.М. КУЛИКОВ, И.В. КОСЕНКОВА,
А.Д. НАХМАН

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

♦Издательство ГОУ ВПО ТГТУ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»**

Г.М. КУЛИКОВ, И.В. КОСЕНКОВА, А.Д. НАХМАН

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Сборник задач

*Утверждено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов 2 курса
инженерно-технических специальностей*

Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2010

УДК 519.2(075.8)
ББК В17я73
К903

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ им. Г.Р. Державина
Е.С. Жуковский

Кандидат физико-математических наук, доцент ГОУ ВПО ТГТУ
В.В. Васильев

Куликов, Г.М.

К903 Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / Г.М. Куликов, И.В. Косенкова, А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с. – 300 экз. – ISBN 978-5-8265-0951-7.

Приведены основные понятия и теоремы теории вероятностей и математической статистики. Рассмотрено значительное количество решений типовых задач. Предложены задания для самостоятельной работы в двух уровнях сложности и итоговые тесты.

Предназначен для студентов 2 курса инженерно-технических специальностей.

УДК 519.2(075.8)
ББК В17я73

ISBN 978-5-8265-0951-7

Учебное издание

КУЛИКОВ Геннадий Михайлович,
КОСЕНКОВА Инна Викторовна,
НАХМАН Александр Давидович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Сборник задач

Редактор Л.В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсеева

Подписано в печать 02.11.2010
Формат 60×84/16. 4,65 усл. печ. л. Тираж 300 экз. Заказ № 530

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Начиная со второй половины прошлого века наблюдается всё более возрастающий интерес к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики. Изучение различного рода случайных явлений, стохастических отклонений от нормы является важным средством предотвращения чрезвычайных ситуаций, техногенных катастроф, выпуска некачественной и ненадёжной продукции и т.п.

С развитием современных средств вычислительной микропроцессорной техники расширяются возможности хранения, поиска и обработки больших массивов вероятностно-статистической информации о реальных объектах, выявления причинно-следственных связей между процессами и явлениями. Методы теории вероятностей и математической статистики находят всё большее применение, например, к анализу ошибок разного рода измерений, а также в физике, биологии, экологии, социологии, в телефонии и процессах обслуживания и т.д.

Настоящее пособие представляет собой своеобразный курс теории вероятностей и математической статистики в задачах. На начальном этапе работы с книгой предполагается первичное ознакомление с основными понятиями (см. глоссарий). Следующий этап – обращение к обучающему модулю, в котором изложены основы комбинаторики, теории случайных событий и величин и начала математической статистики и в котором учебный материал иллюстрируется многочисленными примерами. Контрольный блок содержит теоретические упражнения, тренировочные задания, и проверочные задания двух типов: традиционного содержания в виде тестов со свободно конструируемыми ответами и подборку тестовых заданий, в которых предполагаются как выбор ответов (в том числе и свободный выбор), так и установление соответствий, и конструирование ответов. Результаты тестирования могут служить основанием для оценки уровня усвоения курса.

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ (ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ)

1. Кортежи. Прямые произведения

1.1. Пусть даны множества $G_1, ..., G_n$. ***Кортежем длины*** *n*, составленным из элементов этих множеств, называется любая последовательность вида $g = (g_1, ..., g_n)$, где $g_k \in G_k$, $1 \le k \le n$. Кортежи длины 2, т.е. кортежи вида (g_1, g_2), называются ***упорядоченными парами***; кортежи длины 3 – упорядоченными тройками и т.д. ***Декартовым произведением*** $G_1 \times ... \times G_n$ ***множеств*** $G_1, ..., G_n$ называется множество всех G кортежей вида $g = (g_1, ..., g_n)$.

1.2. *Пример*. Брошены два игральных кубика. Найти количество всевозможных вариантов (всевозможных пар) очков на выпавших гранях.

Решение. Следует найти количество всех упорядоченных пар (g_1, g_2), где g_k – число очков, выпавших на *k*-й игрального кубика, $k = 1, 2$. Значение g_1 – любое из чисел $1, 2, ..., 6$. В паре с фиксированным (выбранным) g_1 может оказаться любое $g_2 \in \{1, 2, ..., 6\}$, т.е. таких пар будет 6, соответственно количеству возможных значений g_2. Учитывая, что выбор g_1 возможен тоже шестью способами, имеем все упорядоченные пары в количестве $6 \cdot 6 = 36$.

1.3. Обозначим через $\nu(M)$ количество элементов конечного множества *M*.

Теорема («принцип умножения»). Имеет место равенство

$$\nu(G_1 \times ... \times G_n) = \nu(G_1) \ ... \ \nu(G_n).$$

1.4. В частности, если имеется *k экземпляров одного и того же множества G* и требуется найти число кортежей длины *k*, в которые входит *по одному* (и только одному) элементу из каждого экземпляра, то такие кортежи называются ***размещениями с повторениями***; другими словами размещения с повторениями это кортежи вида $g = (g_1, ..., g_n) \in G \times ... \times G$. Число таких кортежей, согласно принципу умножения, очевидно, есть

$$\nu\left(G^k\right) = m^k .$$

1.5. *Пример*. Какое максимальное число шестизначных телефонных номеров может быть в городской телефонной сети?

Решение. Имеем кортежи длины k = 6, в которых каждый элемент принадлежит множеству G = {0, 1, 2, ..., 9}, содержащему m = 10 элементов. Следовательно, число таких кортежей $\nu(G^6) = 10^6$. Однако телефонного номера, состоящего сплошь из нулей, обычно не бывает. Следовательно, искомое число номеров равно $10^6 - 1 = 999999$.

2. Размещения, перестановки, сочетания

2.1. Если строить *кортежи длины* k *из элементов одного и того же множества* G так, чтобы *элементы в кортеже не повторялись*, то такие кортежи называются ***размещениями без повторений.***

Теорема. Количество размещений (из m элементов по k элементов) есть число

$$A_m^k = m(m-1)\ ...\ (m-k+1)\ .$$

Если использовать обозначение $m! = 1 \cdot 2\ ...\ (m-1)m$, считая 0! = 1! = 1, то легко проверить, что

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}\ .$$

2.2. В частности, размещения из m по m элементов называют ***перестановками***; число всевозможных перестановок из m элементов есть

$$P_m = m!\,.$$

2.3. *Пример*. Сколькими способами можно разложить в ряд на витрине магазина пять DVD-дисков?

Решение. Имеем кортежи длиной в пять элементов, составленные из элементов множества G, для которого $\nu(G) = 5.$ Следовательно, ищем количество перестановок из пяти элементов

$$P_5 = 5!\ = 120.$$

2.4. *Пример*. Сколькими способами можно расставить на полке шесть книг, если?

а) две определённые книги должны всегда стоять рядом;

б) эти две книги не должны стоять рядом?

Решение. а) Пару книг, которые должны стоять рядом, условимся пока рассматривать как одну книгу. Тогда нужно расставить пять книг по пяти местам, что можно сделать $P_5 = 5!$ способами. Учитывая теперь порядок расположения тех двух книг, которые мы посчитали за одну, имеем P_2 перестановок между ними. Согласно принципу умножения, получаем окончательно число способов $P_5 \cdot P_2 = 120 \cdot 2 = 240$.

б) Способов переставить шесть книг существует P_6 = 720, но из них, как установлено в п. а) существует 240 способов поставить определённые книги вместе. Следовательно, число способов поставить книги так, чтобы две заданные книги рядом не стояли, равно разности 720 – 240 = 480.

2.5. *Пример.* На заседании Думы из шести возможных кандидатов выбирают председателя комитета, его первого и второго заместителя. Сколько существует способов формирования руководящего состава этого комитета?

Решение. Имеем кортежи длиной в три элемента (упорядоченные тройки), составленные из элементов множества G, для которого $\nu(G) = 6.$ Следовательно, ищем количество размещений A_6^3:

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 120.$$

2.6. Если теперь строить из элементов множества G, для которого $\nu(G) = m$, *неупорядоченные* подмножества по k элементов, то такие подмножества называют ***сочетаниями из*** m ***по*** k ***элементов.***

Теорема. Количество всевозможных сочетаний из m по k элементов может быть вычислено по формуле

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k}. \tag{2.1}$$

2.7. Имеют место равенства:

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}\ ; \tag{2.2}$$

$$C_m^k = C_m^{m-k};$$

$$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k\ ;$$

$$C_m^0 + C_m^1 + ... + C_m^m = 2^m. \tag{2.3}$$

2.8. *Пример*. Имеется 10 различных игрушек, из которых формируют комплекты подарков по три игрушки в каждом. Сколько таких различных комплектов можно сформировать?

Решение. Имеем всевозможные неупорядоченные подмножества по три элемента из 10. Ищем количество сочетаний, т.е.

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!\cdot 7!} = 120.$$

Итак, можно сформировать 120 различных комплектов подарков.

2.9. *Пример***.** Найти n из уравнения $C_{n+3}^{n} - C_{n+2}^{n-1} = 15n + C_{15}^{1}$.

Решение. Воспользовавшись формулой (2.2), запишем уравнение в виде

$$\frac{(n+3)!}{n!\cdot(n+3-n)!} - \frac{(n+2)!}{(n-1)!\cdot(n+2-n+1)!} = 15n + \frac{15!}{1!\cdot 14!}$$

или

$$\frac{n!\cdot(n+1)(n+2)(n+3)}{n!\cdot 3!} - \frac{(n-1)!\cdot n(n+1)(n+2)}{(n-1)!\cdot 3!} = 15(n+1).$$

Сокращая дроби и сокращая обе части уравнения на $n+1$ (что можно делать, так как $n > 0$), имеем

$$(n + 2)(n + 3) - n(n + 2) = 15\cdot 3!, \text{ откуда } n + 2 = 30, \text{ т.е. } n = 28.$$

2.10. Размещения, перестановки, сочетания можно интерпретировать как всевозможные *выборки* заданного количества элементов из некоторой совокупности, содержащей m элементов. При этом выборки-размещения различаются как самими элементами, так и их порядком; выборки-сочетания разнятся только самими элементами (порядок их следования несущественен), выборки перестановки из m элементов друг от друга могут отличаться лишь порядком следования элементов. Именно такие признаки обычно используются для распознавания вида выборок в теории вероятностей.

2.11. *Пример.* В микроавтобусе 11 мест. Сколькими способами 11 человек могут расположиться в этой машине, если занять место водителя могут только трое из них, имеющие доверенность на право управления этой машиной?

Решение. На место водителя можно посадить только одного из трёх человек, т.е. существуют три способа занять первое место. Остальные 10 мест могут быть заняты любым из оставшихся 10 пассажиров числом способов $P_{10} = 10!$ (эти выборки различаются лишь порядком следования элементов, т.е. являются перестановками из 10 элементов). Используя принцип умножения, получаем произведение $3\cdot 10! = 3\cdot 3\ 628\ 800 = 10\ 886\ 400$.

3. Число элементов в объединении множеств

3.1. ***Теорема 1.*** Если конечные множества A и B имеют пустое пересечение, то количество элементов

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B).$$

Теорема 2. Если конечные множества A и B имеют непустое пересечение, то

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B).$$

3.2. *Пример*. Все акционеры ЗАО переводят дивиденды на счета в банках. При этом известно, что четыре акционера имеют счета в Сбербанке, шесть человек – в Россельхозбанке, но из них двое имеют также счета и в Сбербанке. Сколько всего акционеров в данном ЗАО?

Решение. Пусть A – множество акционеров, имеющих счета в Сбербанке, B – множество акционеров, имеющих счета в Россельхозбанке. Тогда требуется найти $n(A\cup B)$. Имеем

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) = 4 + 6 - 2 = 8.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ГРУППА **А**

1. Логин должен начинаться с английской буквы S и состоять из четырёх букв (в английском алфавите 26 букв). Сколько можно образовать таких логинов, если

а) все буквы в нём должны быть различными?

б) буквы могут повторяться?

2. Каждый из учащихся класса во время каникул побывал в походе или на экскурсии. В походе были 75% учащихся класса, а на экскурсии – 60% класса, причём некоторые учащиеся успели поучаствовать в обоих мероприятиях. Каков процент таких учащихся?

3. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из четырёх цифр, если первая из них не равна нулю?

4. Из восьми депутатов надо выбрать председателя счётной комиссии и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

5. Сколькими способами семья из четырёх человек может быть рассажена на одном диване?

6. В библиотеке на книжной полке стоят 30 одинаковых методичек. Сколькими способами можно снять с полки шесть методичек?

7. Сколькими способами можно составить пароль из шести цифр, если ни одна цифра не повторяется?

8. Решить уравнение $5C_n^3 = C_{n+2}^4$.

9. Сколько существует комбинаций для PIN-кода, если владелец карты помнит, что PIN-код состоит из цифр 1, 2, 3, 4?

10. Решить уравнение $2A_n^3 = A_{n+1}^2$.

ГРУППА **В**

1. Сколько существует различных диагоналей в выпуклом n-угольнике?

2. Сколько существует различных перестановок букв в слове «дорога»?

3. В группе из 20 студентов 12 отличников. Сколькими способами можно в этой группе распределить семь льготных путёвок между пятью отличниками и двумя неотличниками.

Указание. Применить правило умножения.

4. В магазине после распродажи осталось 14 ноутбуков, 10 сканеров, 18 принтеров, 24 сотовых телефона одной модели. Сколькими способами можно закупить для офиса пять ноутбуков, три сканера, четыре принтера и восемь телефонов?

5. В магазине продаётся пять моделей сотовых телефонов одной марки. Сколькими способами можно закупить в организацию 10 телефонов?

Указание. Размещения с повторением.

6. Сколькими способами могут упасть N игральных костей?

7. Для школьного комитета самоуправления избирается по два человека (президент и вице-президент) из каждого 9-го, 10-го и 11-го класса. Сколькими способами можно составить комитет, если в трёх девятых классах учится по 25 человек, в двух десятых и в двух одиннадцатых классах учится по 20 человек в каждом?

Указание. Размещения без повторения, правило произведения.

8. Сколькими способами можно разместить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга? (ладья бьёт фигуру по горизонтали и по вертикали).

Указание. Зафиксировать положение первой ладьи и рассматривать комбинации для оставшихся.

9. Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом, если среди этих 12 присутствуют два человека, которые не должны сидеть рядом.

Указание. См. пример 2.4.

10. Решить уравнение $m + C_m^{m-2} + \dots\ C_m^1 + C_m^0 = 1023$.

Указание. Воспользоваться свойством (2.3).

2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ)

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Алгебра событий

1.1. Во множестве событий вводятся следующие действия.

Сложение событий. Событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ называется суммой конечного количества событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если событие A состоит в наступлении хотя бы одного из указанных $A_k, k = 1, ..., n$.

Событие $A = A_1 + A_2 + ...+ A_n + ...$ называется суммой бесконечного количества событий, если событие A состоит в наступлении хотя бы одного из указанных A_k, $k = 1, 2, ...$.

Умножение событий. Событие $B = A_1 A_2 \ldots A_n$ называется произведением конечного количества событий $A_1, A_2, ..., A_n$, если событие B состоит в совместном наступлении всех указанных A_k, $k = 1, ..., n$.

Замечание. Знаки равенства в этих определениях употреблены в смысле обозначений. Когда же мы будем *утверждать*, что события A и B равны, то означать это будет следующее: если происходит событие A, то наступает и B (т.е. событие B следует из A), и наоборот, событие A следует из B.

1.2. Имеют место следующие свойства:

а) ***свойства коммутативности*** операций сложения и умножения:

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1, \quad A_1 A_2 = A_2 A_1;$$

б) ***свойства ассоциативности***:

$$A_1 + A_2 + A_3 = (A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3),$$

$$A_1 A_2 A_3 = (A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3);$$

в) ***дистрибутивное свойство***:

$$(A_1 + A_2)\, A_3 = A_1 A_3 + A_2 A_3.$$

1.3. События A_1, A_2 называются ***несовместными***, если $A_1 A_2 = \varnothing$.

Другими словами, два события несовместны, если в результате опыта наступление одного из них исключает наступление другого.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

1.4. Говорят, что события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу***, если

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = E\,.$$

Другими словами, события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, если в результате опыта наступление хотя бы одного из них является достоверным.

1.5. События A и $\overline{A}$ называются ***противоположными***, если они несовместны и образуют полную группу:

$$A\overline{A} = \varnothing, \quad A + \overline{A} = E\,.$$

1.6. *Пример*. Блок в электрической схеме содержит два параллельно соединённых элемента; событие A_1 есть исправность первого элемента, A_2 – второго. Выразить через A_1 и A_2 следующие события: A блок пропускает ток; B блок не пропускает тока.

Решение. Поскольку наступление события A означает исправность хотя бы одного из элементов, то $A = A_1 + A_2$. Событие B означает неисправность каждого элемента, т.е. совместное наступление $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, а значит, $B = \overline{A}_1 \overline{A}_2$.

2. Классическая вероятность

2.1. Будем рассматривать события A, B, C, ... как исходы некоторого опыта; число исходов считаем конечным. Каждому опыту сопоставим множество всех его ***элементарных*** (простейших, «неразложимых») ***исходов*** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, которое даёт полную информацию о предполагаемых результатах этого опыта.

Элементарными называются такие исходы ω_i опыта, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) ***группа исходов полна***, т.е. обязательно произойдёт хотя бы один из ω_i;

б) исходы попарно ***несовместны***;

в) все ω_i – ***равновозможны***, т.е. объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой.

2.2. Среди элементов множества Ω имеются исходы, ***благоприятствующие*** событию A, т.е. те, в результате которых событие A наступает.

Классической вероятностью события A называется отношение числа $m = m_A$ элементарных исходов, благоприятствующих A, к общему числу n всевозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{2.1}$$

Для вычисления количества всевозможных и благоприятных исходов опыта часто пользуются формулами комбинаторики.

2.3. Очевидны следующие свойства классической вероятности:

$$P(E) = 1,\ P(\varnothing) = 0 \tag{2.2}$$

и

$$0 < P(A) < 1 \text{ для всякого случайного события } A. \tag{2.3}$$

3. Относительная частота и статистическая вероятность

3.1. Это понятие вводится в результате анализа проведённых опытов. Если в результате n опытов событие A появилось $m = m_A$ раз, то относительной частотой события A называют число

$$W(A) = W_n(A) = \frac{m}{n}.$$

3.2. С ростом числа однотипных опытов относительная частота приобретает свойство устойчивости, колеблясь относительно некоторого числа $P = P(A)$, которое принимают за статистическую вероятность события A.

3.3. Относительная частота $W(A)$ удовлетворяет свойствам, аналогичным (2.2), (2.3); в частности, $0 \le W(A) \le 1$.

4. Геометрическая вероятность

4.1. Рассмотрим следующий опыт: в некоторую ограниченную область E бросается точка, причём попадания её в любые части, имеющие одинаковую меру (например, площадь в случае плоских областей) считаются равновозможными. Пусть событие A – её попадание в область $A \subset E$. Если $S(A)$ и $S(E)$, $S(E) \ne 0$ – соответственно меры A и E, то геометрической вероятностью события A будем называть число

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(E)}.$$

4.2. В случае геометрической вероятности сохраняются свойства (2.2), (2.3) и оценка $0 \le P(A) \le 1$ для всякого случайного события A.

5. Вероятность произведения событий

5.1. Рассмотрим способ вычисления классической вероятности произведения событий. Обозначим $P_A(B)$ вероятность события B, вычисленную при условии, что A произошло и будем называть её **условной вероятностью события *B***.

Теорема. Имеет место соотношение

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{5.1}$$

5.2. В случае произведения трёх и большего числа событий имеет место результат, аналогичный теореме п. 5.1. Так, например,

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

5.3. Вычисление условной вероятности $P_A(B)$ предполагает, что вероятность события B зависит от того, наступило или не наступило событие A. Так, например, если среди N предметов будет ровно M ($0 < M < N$) меченых (окрашенных, бракованных и т.п.) и производится безвозвратная выборка, то вероятность извлечения второго предмета меченым (событие B) зависит от того, меченым (событие A) или немеченым (событие $\overline{A}$) был извлечён первый предмет:

$$P_A(B) = \frac{M-1}{N-1} \quad \text{и} \quad P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N-1}.$$

Однако, если бы первый из извлечённых предметов был возвращён в исходную совокупность, то вероятность извлечения второго предмета меченым была бы одной и той же (независимо от того, каким был первый предмет):

$$P\ (B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N}.$$

В общем случае два события A и B называются **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от того, наступило ли другое событие. Аналогично, события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются независимыми в совокупности, если каждая из вероятностей $P_j = P(A_j)$ остаётся абсолютно постоянной в условиях данных опытов.

Для двух независимых событий A и B

$$P(AB) = P(A)P(B);$$

в случае же n событий, независимых в совокупности,

$$P(A_1A_2\ ...\ A_n) = P(A_1)P(A_2)\ ...\ P(A_n).$$

6. Вероятность суммы совместных событий

6.1. Следующий результат справедлив в случае суммы любых двух событий A и B.

Теорема 1. $P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$.

В частности, для *несовместных* A_1 и A_2 имеем

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

В случае суммы n событий имеет место теорема 2.

Теорема 2. Вероятность суммы n попарно несовместных событий вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n);$$

в случае же совместимых событий имеет место соотношение

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ ...\ \overline{A}_n).$$

В частности, если события $A_1, A_2, ..., A_n$ *независимы в совокупности*,

$$p_j = P(A_j) \ \text{ и } \ q_j = P(\overline{A_j}) = 1 - P(A_j), \ \ j = 1, 2, ..., n,$$

имеет место равенство

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - q_1q_2\ ...\ q_n.$$

7. Формула полной вероятности и формулы Бейеса

7.1. Предположим, что событие A есть результат наступления хотя бы одного из событий H_1, H_2, ..., H_n попарно несовместных и образующих полную группу, но при этом неизвестно, какое именно из H_i наступит. В этом случае события H_1, H_2, ..., H_n называют гипотезами по отношению к A.

7.2. В условиях п. 7.1 справедливо соотношение (называемое формулой *полной вероятности*)

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P_{H_k}(A). \tag{7.1}$$

В частном случае двух гипотез формула полной вероятности принимает вид

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A).$$

7.3. Пусть выполнены условия п. 7.1 и при этом событие *A наступило*. Тогда вероятность того, что событие *A оказалось следствием гипотезы именно* H_k , определяется в виде

$$P_A(H_k)=\frac{P(H_k)P_{H_k}(A)}{P(A)}, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{7.2}$$

где $P(A)\neq 0$ – полная вероятность (7.1). Соотношения (7.2) называют формулами Бейеса.

8. Классическая вероятность, относительная частота, геометрическая вероятность: типовые задачи

8.1. Из четырёх отрезков длиной 1, 3, 5, 7 наугад выбирают три. Какова вероятность события *A*, состоящего в том, что из них можно построить треугольник?

Решение. Используем вычисление классической вероятности. Элементарными исходами опыта являются всевозможные выборки по три отрезка из четырёх. Непосредственным перебором (или используя формулу числа сочетаний из четырёх по три) убеждаемся, что их количество n = 4. Благоприятным является единственный исход «3, 5, 7» (когда сумма длин двух любых сторон больше третьей стороны треугольника); таким образом, m = 1. Следовательно, искомая вероятность

$$p(A)=\frac{1}{4}.$$

8.2. Считается, что в данной местности относительная частота рождения мальчиков равна 0,52. Сколько родилось новорождённых в течение года, если в органах ЗАГСа было зарегистрировано 572 мальчика.

Решение. Относительная частота события *A* рождения мальчика $w(A)$ = 0,52 в данной задаче вычисляется как отношение числа m = 572 рождённых мальчиков к числу n новорождённых: $0{,}52=w(A)=\frac{572}{n}$, откуда n = 1100.

8.3. Какова вероятность того, что точка, свободно блуждающая в правильном шестиугольнике, в данный момент находится вне вписанного круга?

Решение. Здесь применима геометрическая вероятность. Если S – площадь правильного шестиугольника, а $S_{\text{кр}}$ – площадь вписанного круга радиусом r, то, как известно из геометрии, $S=\frac{1}{2}6ar=3ar$, $S_{\text{кр}}=\pi r^2$. Теперь вероятность события *A* попадания точки в область вне круга, то

$$p(A)=\frac{S-S_{\text{кр}}}{S}.$$

Далее, в правильном n-угольнике радиус вписанного круга

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n};$$

в нашем случае $n=6$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а значит $\frac{r}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$p(A)=1-\frac{S_{\text{кр}}}{S}=1-\frac{\pi r^2}{3ar}=1-\frac{\pi}{3}\left(\frac{r}{a}\right)=1-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

или $p(A)\approx 0{,}09$.

8.4. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события *A*, состоящего в том, что суммарное число выпавших очков не будет превосходить четырёх.

Решение. Элементарные исходы опыта можно интерпретировать как пары чисел (1, 1), (1, 2), …; попарная несовместность, полнота группы и равновозможность исходов очевидны. Найдём общее число исходов опыта n. Согласно примеру 1.2 обучающего модуля по комбинаторике, имеем n = 36. Число благоприятствующих событию *A* исходов найдём простым их перебором: 1 + 1, 1 + 2, 1 + 3, 2 + 1, 2 + 2, 3 + 1, т.е. $m_A = 6$. Следовательно, на основании определения классической вероятности

$$P(A) = \frac{6}{36}, \quad \text{т.е.} \quad P(A) = \frac{1}{6}.$$

8.5. В кооперативном доме-новостройке имеется 20 квартир, среди которых восемь расположены на крайних этажах. Квартиры распределяются по жребию. Найти вероятность того, что эти восемь квартир достанутся данным восьми семьям-переселенцам.

Решение. Поскольку всего участников жеребьёвки – 20, то элементарные исходы опыта – это упорядоченные выборки из 20 по 20, т.е. перестановки. Количество всевозможных исходов, таким образом есть $n = 20!$

Если событие A состоит в том, что восемь квартир на крайних этажах достанутся восьми семьям-переселенцам, то число благоприятных исходов m_A можно вычислить следующим образом. Среди данных восьми семей возможно 8! способов распределения квартир на крайних этажах, и каждый такой способ сочетается с остальными 12! способами распределения квартир среди остальных 12 участников жеребьёвки. Согласно принципу умножения $m_A = 8! \cdot 12!$ Итак,

$$P(A) = \frac{m_A}{m} = \frac{8! \cdot 12!}{20!} = \frac{1}{125970}.$$

8.6. Имеются 10 предметов, среди которых ровно пять меченых. Случайным образом извлекают пять предметов. Какова вероятность, что все они меченые?

Решение. Элементарными исходами опыта являются всевозможные выборки – сочетания из 10 предметов по пять. Найдём общее число элементарных исходов:

$$n = C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Благоприятным для события A – извлечения пяти меченых предметов – будет единственный исход:

$$m = m_A = C_5^5 = 1.$$

Итак, $P(A) = \dfrac{1}{252}.$

8.7. В урне шесть белых и четыре чёрных шара. Наудачу извлекли два шара. Найти вероятность следующих событий:

а) оба шара белых;

б) только один шар белый;

в) хотя бы один шар белый.

Решение. а) Событие A – оба извлечённых шара – белые. Элементарные исходы опыта – выборки.

1-й способ (с использованием (2.1) и комбинаторных формул). Так как набор из двух шаров неупорядочен, то число возможных исходов

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45.$$

Число благоприятных исходов

$$m = C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

(выбор двух шаров из шести белых). Следовательно,

$$P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

2-й способ (с использованием теоремы п. 6.1). Рассмотрим события: A_1 – первый извлечённый шар – белый; A_2 – второй шар – белый. Тогда

$$P(A_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad P_{A_1}(A_2) = \frac{5}{9}.$$

При этом $A = A_1 A_2$, т.е.

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3};$$

б) Событие B – только один извлечённый шар – белый.

1-й способ (с использованием (2.1) и комбинаторных формул). Число всевозможных элементарных исходов $n=C_{10}^2=45$. Число благоприятных исходов $m=6\cdot 4=24$; действительно, среди извлечённых белый шар берется из шести, так что $m_1=C_6^1=6$; чёрный шар берётся из четырёх: $m_2=C_4^1=4$; в силу принципа умножения теперь $m=m_1m_2=6\cdot 4=24$. Итак,

$$P(B)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}.$$

2-й способ (с использованием формул сложения и умножения). Рассмотрим события: A_1 – извлечён первым белый шар; A_2 – второй шар – белый. Поскольку надо извлечь первым белый, а вторым – чёрный шар (событие $A_1\overline{A}_2$) или наоборот (событие $\overline{A}_1A_2$), то $B=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$. Теперь

$$P(A_1)=\frac{6}{10},\ P(\overline{A}_1)=\frac{4}{10},\ P_{A_1}(\overline{A}_2)=\frac{4}{9},\ P_{\overline{A}_1}(A_2)=\frac{6}{9}.$$

События $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1A_2$ несовместны. Следовательно,

$$P(B)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)=$$

$$=P(A_1)P_{A_1}(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(A_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{8}{15};$$

в) C – хотя бы один шар белый.

1-й способ (с использованием (1.2) и комбинаторных формул). Число всевозможных элементарных исходов $n=C_{10}^2=45$, число благоприятных исходов $m=C_6^2+C_6^1C_4^1=39$. Действительно, событие C означает, что извлечены оба белых шара или один белый и один чёрный; оба белых шара можно взять $m_1=C_6^2=15$ различными способами; один белый и один чёрный шар можно взять $m_2=C_6^1C_4^1=24$ различными способами. Итак,

$$P(C)=\frac{39}{45}=\frac{13}{15}.$$

2-й способ (с использованием формул сложения и умножения). Рассмотрим события: A_1 – первый извлеченный шар белый; A_2 – второй шар – тоже белый. Тогда $C=A_1A_2+A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$. События A_1A_2, $A_1\overline{A}_2$, $\overline{A}_1A_2$ – попарно несовместны. Значит

$$P(C)=P(A_1A_2+A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(A_1\overline{A}_2)+(\overline{A}_1A_2)=$$

$$=P(A_1)P_{A_1}(A_2)+P(A_1)P_{A_1}(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(A_2)=$$

$$=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{13}{15}.$$

3-й способ (использование теоремы п. 6.1):

$$P(C)=1-P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)=1-\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{13}{15}.$$

8.8. На склад поступают детали заводов № 1 и № 2. Первый завод производит 80% стандартных изделий, завод № 2 – 60%. Наудачу взяли по одной детали каждого завода. Найти вероятности следующих событий:

а) обе детали стандартны;

б) только одна деталь стандартна;

в) хотя бы одна деталь стандартна.

Решение. а) Событие A – обе детали стандартны. Введём события A_1 – произведённая заводом № 1 деталь стандартна; A_2 – деталь завода № 2 стандартна; следовательно, $A = A_1 A_2$. События A_1 и A_2, очевидно, независимы; поэтому

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48.$$

б) Событие B – только одна деталь стандартна; $B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$. События A_1 и $\overline{A}_2$, $\overline{A}_1$ и A_2 – независимы, $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 A_2$ несовместны.

Тогда $P(B) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44$;

в) C – хотя бы одна деталь стандартна; очевидно, что $C = A_1 + A_2$, причём события A_1 и A_2 – совместны; следовательно

$$P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}48 = 0{,}92\,.$$

8.9. По самолёту выпущена ракета. Самолёт может уничтожить её с вероятностью 0,6. Если этого сделать не удаётся, то ракета поражает самолёт с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения самолёта ракетой?

Решение. Поражение самолёта – сложное событие C, состоящее в совместном наступлении события A – неуничтожении ракеты и события B – поражения в этом случае самолёта ракетой. Следовательно, $C = AB$. Теперь

$$P(C) = P(A)P_A(B).$$

Перейдём к нахождению вероятностей. Событие A противоположно событию уничтожения ракеты, следовательно,

$$P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4; \text{ при этом } P_A(B) = 0{,}8.$$

Следовательно,

$$P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32.$$

8.10. На конвейер поступают 20% изделий цеха № 1 и 80% – цеха № 2. Вероятность брака для изделия из первого цеха $P_1 = 0{,}1$; для второго цеха – $P_2 = 0{,}05$.

1) Какова вероятность, что наугад взятое изделие – бракованное?

2) Случайно выбранное изделие оказалось с браком. Какова вероятность, что его произвёл цех № 1?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в обнаружении брака в случайно отобранном изделии. Возможны гипотезы: H_1 – выбранное изделие произведено цехом №1, H_2 – цехом № 2. Очевидно, что выполнены условия несовместности и полноты группы H_1 и H_2. Здесь $P(H_1) = 0{,}2$; $P(H_2) = 0{,}8$; $P_{H_1}(A) = 0{,}1$; $P_{H_2}(A) = 0{,}05$. Тогда:

1) по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 = 0{,}06;$$

2) по формулам Бейеса для первой из гипотез

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}06} = \frac{1}{3}.$$

8.11. Компьютерной диагностике подвергается группа участников диспансеризации, среди которых 10% страдают некоторыми заболеваниями. В результате диагностики болезнь выявляется с вероятностью 0,95, и с вероятностью, равной 0,03 здоровый участник признаётся больным. У произвольно выбранного протестированного участника компьютер выявил заболевание. Какова вероятность, что произошла ошибка?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что протестированный участник признан больным. Возможны предположения (гипотезы):

H_1 – тестируется участник, страдающий заболеванием;

H_2 – тестируется здоровый участник.

Требуется найти вероятность гипотезы H_2, при условии, что наступило событие A; следовательно, применима формула Бейеса

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}.$$

По условию задачи гипотезы имеют вероятности $P(H_1) = 0{,}1$ и $P(H_2) = 0{,}9$. Соответствующие условные вероятности события имеют вид

$$P_{H_1}(A) = 0{,}95;\ P_{H_2}(A) = 0{,}03.$$

Вероятность события A находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}03 = 0{,}122.$$

$$P_A(H_2) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}03}{0{,}122} = \frac{27}{122}.$$

9. Повторение опытов. Формула Бернулли

9.1. Пусть один и тот же опыт повторяется n раз, и при этом вероятность наступления события A в каждом таком опыте остаётся неизменной, равной некоторому p; пусть $q = 1 - p$. Описанная ситуация независимых опытов называется *схемой Бернулли*.

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что ***событие А появится ровно k раз в n опытах.*** В этом случае говорят также о k «успехах» в n опытах. Имеет место следующая ***формула Бернулли*:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{9.1}$$

В условиях пункта 9.1 ***вероятность наступления события*** A ***в*** n ***опытах от*** k_1 ***до*** k_2 ***раз***, есть

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{9.2}$$

9.2. Число m_0 появления события называется *наивероятнейшим*, если вероятность появления события m_0 раз в n испытаниях превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число m_0 (или наивероятнейшие числа, поскольку их может быть и два) может быть определено из двойного неравенства

$$(n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p. \tag{9.3}$$

9.3. Пусть теперь от опыта к опыту вероятность наступления события A может меняться, так что в первом опыте она равна p_1, во втором – p_2, в n-ом – p_n; обозначим соответствующие вероятности непоявления A через $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, ..., $q_n = 1 - p_n$. Тогда вероятность наступления события A в этих n опытах ровно k раз оказывается равной коэффициенту при z^k в многочлене

$$\varphi_n(z) = \prod_{j=1}^{n} (q_j + p_j z),$$

называемом производящей функцией.

Если же все $p_j = p$ одинаковы и, соответственно, одинаковы все $q_j = 1 - p_j = q$, то приходим к уже известной формуле Бернулли.

10. Предельные теоремы в схеме Бернулли

10.1. С ростом $n\,(n \to \infty)$ использование формулы Бернулли и её следствий становится затруднительным с точки зрения громоздкости вычислений; нужны, следовательно, приближённые формулы, которые обходят эту трудность.

При больших значениях n и $0 < p < 1$ значение вероятности Бернулли $P_n(k)$ можно приближённо вычислить по ***«локальной» формуле Лапласа***

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x_{n,k}),$$

где

$$x_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ находятся по табл. 1 приложения. При этом используется свойство чётности функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

10.2. Если количество n опытов велико и $0 < p < 1$, то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что событие A произойдёт не менее k_1 и не более k_2 раз, может быть найдена по приближенной ***интегральной формуле Лапласа***

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_{n,k_2}) - \Phi(x_{n,k_1}),$$

где

$$x_{n,k_1} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_{n,k_2} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt .$$

Значения $\Phi(x)$ находят по табл. 1 приложения. При этом используется свойство нечётности $\Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

10.3. Вероятность отклонения относительной частоты $w(A)$ события A от его вероятности $p(A)$ может быть найдена по приближённой формуле

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right), \tag{10.2}$$

где $\Phi(x)$ – как и выше – интегральная функция Лапласа.

10.4. С результатом (10.2) связан так называемый закон больших чисел Бернулли.

Теорема. Пусть $w_n(A) = \dfrac{m_A}{n}$ – относительная частота события A в n опытах и $p(A)$ – его вероятность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{m_A}{n} - p(A) \right| < \varepsilon \right) = 1 .$$

Закон Бернулли есть математически строгая форма свойства устойчивости относительной частоты, описанного выше. Говорят также, что ***относительная частота события*** A ***сходится по вероятности*** (при $n \to \infty$) ***к вероятности*** $p(A)$.

10.5. Пусть в каждом опыте вероятность события A постоянна, но от серии к серии опытов (с ростом их количества n) значение произведения $\lambda = np$.

При сформулированных условиях имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} . \tag{10.3}$$

Результат (10.3) означает, что если вероятность p появления события A в каждом из n опытов мала, а при этом n – велико и $\lambda = np$, то имеет место приближённая формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} .$$

Вероятность же того, что при достаточно большом числе опытов событие произойдёт не менее m_1 и не более m_2 раз можно найти по приближённой формуле

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

11. Схема Бернулли: типовые задачи

11.1. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых опытах: а) два раза; б) менее двух раз, если вероятность появления события A в одном опыте $p = 0{,}4$.

Решение. а) Пусть событие B состоит в появлении A ровно два раза в пяти опытах. Тогда по формуле Бернулли

$$P(B) = P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^3 = 0{,}3456.$$

б) Если событие C означает появление A менее двух раз, т.е. или ни разу ($k = 0$) или один раз ($k = 1$), то

$$P(C) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 + C_5^1 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 =$$

$$= 0{,}07776 + 0{,}2592 = 0{,}33696.$$

11.2. Что вероятнее: выиграть у равносильного соперника две шахматные партии из четырёх или три из шести?

Решение. Имеем схему Бернулли, в которой вероятность события в единичном опыте (выигрыша одной партии) $p=\frac{1}{2}$, $q=1-p=\frac{1}{2}$. Теперь надо сравнить вероятности $P_4(2)$ и $P_6(3)$. Имеем

$$P_4(2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16},\quad P_6(3)=C_6^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}.$$

Следовательно, вероятность выиграть две партии из четырёх – выше.

11.3. Тестируется каждый из 15 блоков некоторого электронного прибора. Вероятность пройти тест для каждого блока составляет 0,9. Найти наивероятнейшее число выдержавших тестирование блоков и его вероятность.

Решение. Так как n = 15, p = 0,9, то по формуле (9.3) имеем

$$16\cdot 0{,}9-1\le m_0\le 16\cdot 0{,}9,\ \text{т.е. } m_0=14.$$

Теперь осталось найти

$$P_{15}(14)=C_{15}^{14}\cdot(0{,}9)^{14}\cdot(0{,}1)^1\approx 0{,}343.$$

11.4. Вероятность того, что на странице рукописи имеется опечатка, равна 0,2. Найти вероятность того, что на 400 страницах будет ровно 104 опечатки.

Решение. Для решения задачи можно использовать формулу Лапласа, в которой n = 400, p = 0,2, q = 0,8; тогда

$$x_{n,k}=\frac{104-80}{8}=3.$$

По таблице 1 приложения находим φ(3) = 0,0044. Имеем:

$$P_{400}(104)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\varphi(3)=\frac{0{,}0044}{8}=0{,}00055.$$

11.5. Вероятность того, что на странице рукописи есть опечатка равна 0,2. Найти вероятность того, что на 400 страницах будет не менее 72 и не более 104 опечаток.

Решение. Используем интегральную формулу Лапласа, в которой n = 400, p = 0,2, q = 0,8; тогда

$$x_{n,k_1}=\frac{72-80}{8}=-1,\quad x_{n,k_2}=\frac{104-80}{8}=3.$$

По таблице 1 приложения находим

$$\Phi(-1)=-\Phi(1)=-0{,}3413,\quad \Phi(3)=0{,}4986.$$

Следовательно,

$$P_{400}(72\le k\le 104)=\Phi(3)-\Phi(-1)=\Phi(3)+\Phi(1)=0{,}8399.$$

11.6. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью p = 0,9544 утверждать, что относительная частота выпадения герба отклонилась от 0,5 не более, чем на 0,05?

Решение. Согласно приближенной формуле (10.2) имеем

$$0{,}9544=P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}5\right|<0{,}05\right)\approx 2\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}5(1-0{,}5)}}\right),$$

где m – число появлений герба при n подбрасываниях монеты.

Отсюда

$$0{,}9544\approx 2\Phi\left(0{,}05\sqrt{4n}\right)\quad\text{или}\quad \Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right)\approx 0{,}4772.$$

По таблице значений интегральной функции Лапласа (табл. 1 приложения) находим значение аргумента интегральной функции Лапласа:

$$0{,}1\sqrt{n} \approx 2, \text{ откуда } n \approx 400.$$

Итак, монету надо бросить 400 раз.

11.7. Вероятность того, что абонент неправильно наберёт телефонный номер, принимается для всех абонентов равной 0,001. Определить вероятность того, что среди 500 произведённых независимо один от другого вызовов, ровно один абонент наберёт неправильно телефонный номер.

Решение. Имеем: n = 500, p = 0,001, $\lambda = np$ = 0,5. По таблице 2 приложения находим $e^{-0,5} \approx 0{,}6065$, тогда по формуле Пуассона

$$P_{500}(1) \approx \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6065}{1!} = 0{,}30325.$$

11.8. В течение года из аэропорта города N отправляется 1200 авиарейсов. Вероятность задержки каждого вылета по метеоусловиям равна 0,005. Какова вероятность задержки по метеоусловиям в течение года не менее 2 рейсов?

Решение. По условию задачи, вероятность наступления события в единичном опыте (задержки рейса по метеоусловиям) мала: p = 0,005, тогда как число опытов (число рейсов) велико: n = 1200. Следовательно, в расчётах возможно использование формулы Пуассона. Событие задержки не менее двух рейсов противоположно событию задержки $k \le 1$ рейсов. Имеем $\lambda = np = 1200 \cdot 0{,}005 = 6$ и

$$p_{1200}(0 \le k \le 1) = p_{1200}(0) + p_{1200}(1) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = 7e^{-6},$$

т.е.

$$p_{1200}(k \ge 2) = 1 - 7e^{-6} \approx 0{,}97.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ГРУППА **А**

1. Рассматриваются следующие события: A – первое из полученных электронных писем содержит навязчивую рекламу (СПАМ), B – второе письмо содержит СПАМ. Выразить с помощью операций сложения и умножения через события A и B и(или) им противоположные следующие события:

а) событие C – ни одно из писем не содержит СПАМ;
б) хотя бы одно письмо содержит СПАМ;
в) только одно письмо содержит СПАМ.

2. Бросили две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна семи;
б) сумма выпавших очков больше семи, но меньше десяти;
в) произведение выпавших очков больше пяти, но не превосходит восьми.

3. Владелец банковской карты забыл PIN-код и, помня только, что все четыре цифры различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что PIN-код набран правильно.

4. На книжной полке в произвольном порядке расставлены пять книг по высшей математике, три книги по теоретической механике и семь книг по сопромату. Студент наудачу берёт три книги. Найти вероятность того, что извлечёнными книгами являются:

а) все книги по высшей математике;
б) две книги по высшей математике и одна книга по сопромату;
в) все три книги по различным предметам.

5. После летнего ремонта в классе расставили в случайном порядке двадцать письменных столов. Найти вероятность того, что столы будут расставлены в прежнем порядке.

6. В прямоугольник вписаны две окружности равного радиуса, касающиеся друг друга внешним образом. В прямоугольник случайным образом брошена точка. Какова вероятность того, что она не попадёт ни в один из кругов?

7. Внутрь круга радиусом R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг:

а) квадрата;
б) правильного треугольника.

8. Для студента вероятность сдать экзамен по высшей математике на оценку удовлетворительно равна 0,4; на оценку хорошо и отлично соответственно равны 0,3 и 0,2. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен на оценку выше удовлетворительной.

9. Из 33 карточек, содержащих каждую букву русского алфавита, извлекли одну за другой и выложили слева направо шесть карточек. Найти вероятность того, что получится слово «ТЕОРИЯ».

10. Абитуриент сдает три экзамена. Вероятность сдать экзамен по русскому языку равна 0,9, по математике и физике вероятности соответственно равны 0,8 и 0,6. Найти вероятности следующих событий:

а) абитуриент сдаст все три экзамена;
б) абитуриент не сдаст ни один экзамен;
в) абитуриент сдаст только экзамен по русскому языку;
г) абитуриент сдаст только один экзамен;
д) абитуриент сдаст хотя бы один экзамен.

11. В конкурсе на строительство крупного объекта принимают участие пять местных фирм. Вероятности для каждой из фирм выиграть конкурс соответственно равны 0,1; 0,05; 0,2; 0,15; 0,3. Найти вероятность того, что хотя бы одна местная фирма примет участие в строительстве объекта.

12. Вероятность дождливой погоды в предстоящий выходной день равна 0,7. Вероятность удачной рыбалки в дождливую погоду равна 0,8, а в ясную погоду – 0,4. Найти вероятность того, что в предстоящий выходной рыбалка будет удачной.

13. Заявки работодателей на специалистов инженерных, экономических и юридических направлений поступают на биржу в отношении 6:3:1. Вероятность того, что претендент на вакансию инженера удовлетворит требованиям работодателя равна 0,8, на вакансию экономиста – 0,8, на вакансию юриста – 0,5. Найти вероятность того, что:

а) случайно выбранный на бирже претендент устроится на работу по своей специальности;
б) устроившийся на работу специалист – экономист.

14. В первом ящике 30 деталей, из них 25 стандартных; во втором ящике 25 деталей, из них 18 стандартных; в третьем ящике 40 деталей, из них 30 стандартных. Из наудачу выбранного ящика наудачу извлечена деталь. Найти вероятность того, что деталь стандартная.

15. На строительство объекта поставляются кирпичи, изготовленные двумя заводами. Производительность второго завода выше производительности первого на 20%. Вероятность того, что кирпич, изготовленный на первом заводе высокого качества равна 0,9; для второго завода эта вероятность равна 0,85. Найти вероятности следующих событий:

а) наудачу взятый кирпич оказался высокого качества;
б) кирпич изготовлен на первом заводе, если он не оказался высокого качества.

16. Имеется десять двадцатидолларовых купюр, из которых четыре купюры фальшивые. Наугад *поочередно* извлекают две купюры и отыскивают вероятность события A, состоящего в том, что обе эти купюры окажутся фальшивыми. Можно ли применять формулу Бернулли, если: а) купюра после извлечения и проверки возвращается в пачку? б) выборка безвозвратная?

Найти $P(A)$ в каждом из случаев а) и б).

17. Вероятность продать по оптимальной цене каждый из пяти пакетов акций в период их падения равна 0,25. Какова вероятность продажи по оптимальной цене большей части пакета?

18. В семье пять детей; вероятность рождения мальчика в данной местности равна 0,6. Найти вероятности следующих событий:

а) в семье две девочки;
б) в семье не менее двух девочек;
в) в семье мальчиков больше, чем девочек.

19. В разгар эпидемии вероятность заболеть для каждого сотрудника предприятия равна 0,6. Найти вероятность того, что из 200 сотрудников данного предприятия в разгар эпидемии заболеют:

а) ровно 60 человек;
б) не менее 80 и не более 120 человек;
в) более 120 человек.

20. Вероятность того, что кредит будет оформлен неверно равна 0,001. Найти вероятность того, что из 1000 кредитов будут оформлены неверно:

а) 10 кредитов;
б) менее двух кредитов;
в) хотя бы один кредит.

ГРУППА **В**

1. Образуют ли полную группу следующие события: A – два попадания в мишень при двух выстрелах, B – ни одного попадания при тех же двух выстрелах?

2. Из двух колод карт, каждая из которых содержит 36 листов, наудачу извлекли по одной карте. Найти вероятность того, что обе карты оказались:

а) одной масти;

б) старше дамы.

3. Из урны, содержащей k белых, l чёрных и m синих шаров, извлекли r шаров и отметили их цвет. Найти вероятность того, что все извлечённые шары белого цвета, если:

а) шары извлекались без возвращения (решить задачу двумя способами);

б) каждый шар после запоминания цвета возвращался в урну.

4. Бросили три игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна шести;

б) сумма выпавших очков равна десяти, а произведение равно двадцати;

в) сумма выпавших очков равна десяти, если известно, что произведение равно двадцати.

5. В урне двадцать шаров, среди них восемь белых. Наудачу извлекли пять шаров. Найти вероятность того, что больше трёх извлечённых шаров окажутся белого цвета.

6. В первой урне двенадцать белых, восемь чёрных шаров; во второй урне семь белых, тринадцать чёрных шаров; в третьей урне десять белых, десять чёрных шаров. Из каждой урны наудачу извлекли по два шара. Найти вероятность того, что только из одной урны извлекли:

а) два белых шара;

б) два чёрных шара.

7. В первой урне два чёрных, восемь белых шаров; во второй урне семь белых, три чёрных шара. Из наудачу выбранной урны извлекли три шара. Найти вероятность того, что все три извлечённых шара оказались белого цвета.

8. В первой урне три белых, семь чёрных шаров; во второй урне шесть белых, восемь чёрных шаров. Из первой урны во вторую переложили три шара, а затем из второй урны извлекли один белый шар. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую переложили:

а) три чёрных шара;

б) три белых шара.

9. Из первой колоды карт в 36 листов во вторую колоду карт, содержащую 36 листов, переложили наудачу одну карту. После чего вторую колоду тщательно перемешали и извлекли наудачу одну карту, которую добавили в третью колоду карт, тоже содержащую 36 листов. Тщательно перемешав третью колоду карт, с добавленной картой извлекли две карты. Найти вероятность того, что две извлечённые карты окажутся пиковой масти.

Указание. Вероятности гипотез, в свою очередь, находятся по формуле полной вероятности.

10. Студент одинаково плохо подготовился к каждому из трёх экзаменов. С какой вероятностью он сдаёт каждый экзамен, если хотя бы один из них он сдаст с вероятностью 0,578125.

11. Стрелок поражает мишень хотя бы один раз при трёх выстрелах с вероятностью 0,073. Найти вероятность того, что при пяти выстрелах он попадёт не менее двух раз.

12. Вероятность того, что в книге из 500 страниц будет хотя бы одна опечатка, равна 0,86466. Найти вероятность того, что данная книга будет содержать:

а) не менее двух опечаток;

б) не менее трёх и не более пяти опечаток.

13. Отрезок разделён на четыре равные части. На этот отрезок наудачу бросили четыре точки. Найти вероятность того, что на каждую из четырёх частей отрезка попадёт по одной точке.

14. В ящик, содержащий четыре одинаковых прибора, был добавлен точно отрегулированный аналогичный прибор. Инженер извлёк наудачу один прибор. Найти вероятность того, что извлечённый прибор отрегулирован точно, если равновероятны все возможные предположения о числе точно отрегулированных приборов первоначально находившихся в ящике.

15. В круг единичного радиуса с центром в начале координат наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется ниже графика $y = |x|$.

16. В круг с центром в начале координат и радиусом $\pi/2$ наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется ниже графика функции $y = \cos x$.

17. Колода карт в 52 листа делится наугад на две пачки по 26 листов каждая. Найти вероятности следующих событий:
а) ровно в одной пачке окажется четыре туза;
б) в одной пачке оказалось четыре карты бубновой масти.

18. В группе из 25 человек пять студентов являются отличниками. Наудачу отобрали десять студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов окажется не менее трёх отличников.

19. В коробке сто деталей, из них десять бракованных. Наудачу отобрали двадцать деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей окажется не более двух бракованных.

20. В урне три белых, семь чёрных и десять красных шаров. Наугад вынимают три шара. Найти вероятность того, что, по крайней мере, два из них будут одноцветными.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Ряд распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики

1.1. ***Случайной величиной*** называется числовая величина X, которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Если все возможные значения величины X можно записать в виде числовой последовательности $\{x_n\}$, n = 1, 2, ... (конечной или бесконечной), то X называется дискретной; если же возможные значения X заполняют целиком некоторый числовой интервал, то величина X называется непрерывно распределённой на этом интервале.

1.2. ***Законом распределения дискретной случайной величины*** X называется соответствие между её возможными значениями x_k и вероятностями $p_k = P(X = x_k)$ принятия величиной X этих значений. Обычный способ задания такого закона – ряд (таблица) распределения. В случае конечного числа n значений величины X (записанных в порядке возрастания) ряд распределения имеет вид:

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{1.1}$$

Возможно также рассмотрение ряда распределения с бесконечным набором $\{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ значений X. В этом случае для соответствующих вероятностей имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

1.3. Наряду с законом (рядом) распределения часто бывает удобно пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называются ***числовыми характеристиками*** случайной величины. Они помогают «в сжатой форме» выразить наиболее существенные черты распределения. Основными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, характеризующее среднее значение случайной величины, и дисперсия, характеризующая степень рассеяния случайной величины относительно её математического ожидания.

Ограничимся рассмотрением дискретной случайной величины с конечным набором возможных значений.

Математическое ожидание $M(X)$ дискретной величины X определяется в виде

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k, \tag{1.2}$$

дисперсия $D(X)$ – в виде

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^2 p_k. \tag{1.3}$$

Из свойства неотрицательности вероятностей следует, что всегда $D(X) \geq 0$, а тогда можно рассмотреть характеристику рассеяния вида

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,,$$

называемую ***средним квадратическим отклонением.*** Она предпочтительней дисперсии тогда, когда желательно чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины (заметим, что дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно).

1.4. Дисперсию можно вычислить также по формуле

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 p_k - (M(X))^2. \tag{1.4}$$

2. Функция распределения

2.1. Универсальным способом описания всякой случайной величины X является ***функция распределения*** (синонимы: интегральный закон распределения, интегральная функция), имеющая вид

$$F(x) = P(X < x). \tag{2.1}$$

Она соотносит каждому $x \in (-\infty; +\infty)$ вероятность события, состоящая в принятии величиной X значения левее точки x (рис. 1).

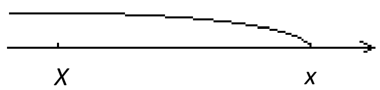

Рис. 1

2.2. Рассмотрим функцию распределения дискретной случайной величины, обладающей конечным перечнем значений $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Она строится в виде

$$F(x) = \sum_{k|x_k<x} p_k; \tag{2.2}$$

суммирование в (2.2) проводится по тем k, для которых соответствующие x_k оказываются меньшими x. В частности, при $x_n < x$, имеем

$$F(x) = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

В «развёрнутой» форме (2.2) принимает вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \;\; x \leq x_1; \\ p_1, \;\; x_1 < x \leq x_2; \\ p_1 + p_2, \;\; x_2 < x \leq x_3; \\ . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ p_1 + p_2 + ... + p_{n-1}, \;\; x_{n-1} < x \leq x_n; \\ 1, \;\; x > x_n. \end{cases}$$

Мы получаем кусочно-постоянную неубывающую функцию, значения которой расположены в промежутке [0, 1], непрерывную в каждой точке слева.

2.3. В общем случае функция распределения $F(x) = P(X < x)$ обладает свойствами:

а) $0 \leq F(x) \leq 1$;

б) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$;

в) $F(x)$ – неубывающая функция.

3. Плотность распределения

3.1. ***Плотностью распределения*** (плотностью вероятности или дифференциальной функцией) называется функция вида

$$f(x) = F'(x).$$

3.2. Имеют место следующие свойства плотности распределения:

а) $f(x) \ge 0$ для всех x;

б) $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$;

в) функция распределения $F(x)$ восстанавливается (по известной дифференциальной функции) в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx;$$

г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (свойство нормированности плотности).

3.3. Числовыми характеристиками непрерывных случайных величин являются её ***математическое ожидание***

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

и ***дисперсия***

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

при условии сходимости указанных несобственных интегралов.

Из определения $D(X)$ и свойства неотрицательности $f(x)$ вытекает оценка $D(X) \ge 0$.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется в виде

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

3.4. Для вычисления дисперсии можно воспользоваться также формулой:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

В случае, если $f(x)$ принимает нулевые значения вне интервала $[a, b]$, соответствующие формулы принимают вид

$$M(X) = \int\limits_a^b x f(x)dx \quad \text{и} \quad D(X) = \int\limits_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

4. Случайные величины: типовые задачи

4.1. Ряд распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

X	1	2	4
p	0,5	p_2	0,25

Определить p_2, $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Согласно свойству вероятностей (1.1) $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, имеем: $p_2 = 1 – 0,5 – 0,25$, т.е. $p_2 = 0,25$.

Далее, согласно формулам п. 3.3 для вычисления математического ожидания и дисперсии получаем в нашем случае:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3;$$

$$D(X) = (x_1)^2 p_1 + (x_2)^2 p_2 + (x_3)^2 p_3 - (M(X))^2,$$

$$M(X)=1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}25=2;$$

$$D(X)=1^2\cdot 0{,}5+2^2\cdot 0{,}25+4^2\cdot 0{,}25-2^2=1{,}5.$$

4.2. В лотереи из ста билетов выигрышными являются один билет в 50 рублей, три билета в 25 рублей и пять билетов по 10 рублей. Для случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета найти:

а) закон распределения;

б) функцию распределения;

в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. а) Множество возможных значений случайной величины X:

$$\{x\}=\{0;\ 10;\ 25;\ 50\}.$$

Найдём соответствующие вероятности этих значений:

$$p_1=p(X=0)=\frac{100-1-3-5}{100}=\frac{91}{100}=0{,}91;$$

$$p_2=p(X=10)=\frac{5}{100}=0{,}05;$$

$$p_3=p(X=25)=\frac{3}{100}=0{,}03;$$

$$p_4=p(X=50)=\frac{1}{100}=0{,}01.$$

Проверим, что $\sum_i p_i=1$. Действительно, 0,91 + 0,05 + 0,03 + 0,01 = 1.

Итак, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	10	25	50
p_i	0,91	0,05	0,03	0,01

б) Найдём функцию распределения $F(x)$. Согласно п. 2.2 $F(x)$ в «развёрнутом» виде вычисляется:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le x_1;\\ p_1, & x_1<x\le x_2;\\ p_1+p_2, & x_2<x\le x_3;\\ . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad .\\ p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}, & x_{n-1}<x\le x_n;\\ 1, & x>x_n.\end{cases}$$

В условиях нашей задачи имеем:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}91, & 0<x\le 1;\\ 0{,}91+0{,}05, & 1<x\le 2;\\ 0{,}91+0{,}05+0{,}03, & 2<x\le 3;\\ 0{,}91+0{,}05+0{,}03+0{,}01, & x>3.\end{cases}$$

Окончательно получим:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}91, & 0<x\le 1;\\ 0{,}96, & 1<x\le 2;\\ 0{,}99, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

в) Вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$M(X) = 0\cdot 0{,}91 + 10\cdot 0{,}05 + 25\cdot 0{,}03 + 50\cdot 0{,}01 = 1{,}75;$$

$$D(X) = 0^2\cdot 0{,}91 + 10^2\cdot 0{,}05 + 25^2\cdot 0{,}03 + 50^2\cdot 0{,}01 - 1{,}75^2 = 45{,}6875;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{45{,}6875} = 6{,}759252917.$$

4.3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \ x \le -1; \\ 1 - x^2, \ \ -1 < x \le 0; \\ 1, \ \ x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$.
Решение. По определению п. 3.1 имеем:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \ \ x \le -1; \\ -2x, \ \ -1 < x \le 0; \\ 0, \ \ x > 0. \end{cases}$$

Графики $y = F(x)$ и $y = f(x)$ изображены на рис. 2:

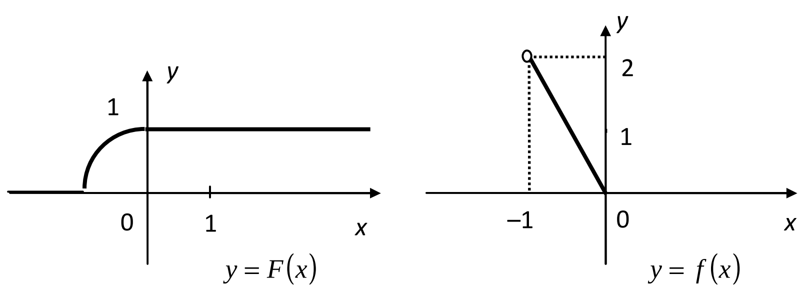

Рис. 2

Далее, согласно формулам п. 3.3 имеем:

$$M(X) = \int_{-1}^{0} x(-2x)dx = -\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{3};$$

$$D(X) = \int_{-1}^{0} x^2(-2x)dx - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{4}x^4\Big|_{-1}^{0} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

4.4. Плотность распределения задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \ x < 0; \\ cx, \ \ 0 \le x < 1; \\ 0, \ \ x \ge 1, \end{cases}$$

где c – постоянная величина. Найти значение c, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.

Решение. По свойству нормированности

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} cxdx + \int_{0}^{+\infty} 0dx = 0 + \frac{1}{2}cx^2\Big|_{0}^{1} + 0 = \frac{1}{2}c,$$

откуда $c = 2$. Теперь

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2x, & 0\le x<1;\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$$

Найдём $F(x)$. Рассмотрим все возможные случаи: $x\le 0$, $0<x<1$, $x\ge 1$. Имеем

1) при $x\le 0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0;$$

2) при $0<x<1$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}2xdx=x^2;$$

3) при $x\ge 1$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}2xdx++\int_{1}^{x}0dx=1.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

Далее,

$$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4},$$

поскольку $\frac{3}{2}\in[1,+\infty)$, $\frac{1}{2}\in[0,1)$.

5. Специальные виды распределений

5.1. Пусть дискретная случайная величина X принимает значения, равные количеству появлений события A в n испытаниях, при условии, что в каждом вероятность $P(A)$ одна и та же, равная некоторому p; $q=1-p$ (схема Бернулли). Её закон распределения называется биномиальным; соответствующий ряд распределения имеет вид:

X	0	1	…	K	…	n
P	q^n	$C_n^1p^1q^{n-1}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$		p^n

Математическое ожидание биномиальной случайной величины X равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании

$$M(X)=np,$$

а её дисперсия равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании

$$D(X)=npq.$$

5.2. Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром λ, если она принимает значения {0, 1, 2, ..., m, ...} с вероятностями

$$p_m=P(X=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\,(m=0,1,2,\ldots).$$

Закон Пуассона можно понимать как предельный случай (при $n\to\infty$, $\lambda=np=\text{const}$) биномиального закона. Так как вероятность появления события A в каждом испытании мала, то закон Пуассона называют законом редких явлений. По закону Пуассона распределены многие случайные величины, например, число сбоев на автоматической линии, число бракованных изделий в большой партии товара и т.д.

Ряд распределения Пуассона имеет вид:

X	0	1	2	…	m	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределённой по закону Пуассона, совпадают между собою и равны параметру λ этого распределения:

$$M(X)=\lambda,\ \ D(X)=\lambda\,.$$

5.3. Непрерывная случайная величина X распределена по равномерному закону на отрезке $[a,b]$, если её плотность вероятности постоянна на этом отрезке. Если воспользоваться свойством нормированности плотности, то нетрудно проверить, что

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ равномерно распределённой случайной величины равна

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$ случайной величины вычисляются, соответственно, по формулам

$$M(X)=\frac{a+b}{2}\quad \text{и}\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}\,.$$

Равномерные распределения довольно часто встречаются на практике. Например, равномерное распределение на отрезке $[0,\,t_0]$ время ожидания транспорта, если предположить, что пассажир приходит на остановку в случайный момент времени, а транспорт ходит регулярно с интервалом t_0 мин. При компьютерном моделировании случайных явлений используется так называемый «генератор случайных чисел», который генерирует значения случайной величины, распределённой равномерно на отрезке $[0,\,1]$.

5.4. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda > 0$, если её плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Как оказывается, функция распределения в этом случае определяется в виде

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия показательно распределённой случайной величины имеют, соответственно, значения

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}\quad \text{и}\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}\,.$$

6. Нормальное распределение

На практике часто встречаются так называемые нормально распределённые случайные величины.

6.1. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и $\sigma > 0$, если её плотность вероятности имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Можно установить, что соответствующая функция распределения $F(x)$ выражается через интегральную функцию Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

следующим образом: $F(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

График плотности нормального распределения (нормальная кривая) имеет следующий вид:

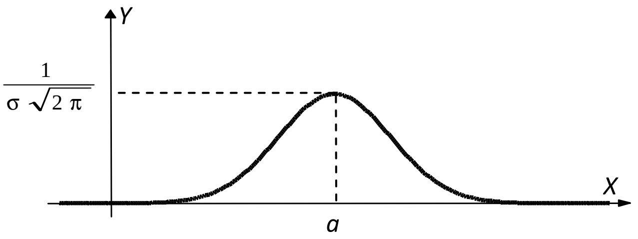

Рис. 3

6.2. Вероятность попадания значений случайной величины *X*, распределённой по нормальному закону, в промежуток (α,β) может быть вычислена в виде

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

6.3. Из результата п. 6.2 вытекает следующее утверждение о вероятности малого отклонения значений нормальной величины от параметра *a*: для любого $\delta>0$ имеет место равенство

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности при $\delta=3\sigma$ получаем так называемое правило «трёх сигм»:

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973.$$

Смысл его состоит в следующем: практически достоверно, что абсолютная величина отклонения значений нормально распределённой *X* от параметра *a* меньше утроенного σ.

6.4. Вероятностный смысл параметров *a* и σ проясняется в следующем утверждении.

Нормально распределённая случайная величина имеет математическое ожидание $M(X)=a$ и дисперсию $D(X)=\sigma^2$.

7. Типовые задачи на специальные распределения

7.1. Вероятность наступления события в каждом опыте равна 0,25. Сколько экспериментов надо провести, чтобы число *X* наступлений события обладало дисперсией, равной 12?

Решение. Имеем биномиальное распределение с дисперсией $D(X)=npq$. Здесь $p=0{,}25=\frac{1}{4}$, $q=1-p=\frac{3}{4}$, а значит $n\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=12$, откуда число экспериментов $n=64$.

7.2. Математическое ожидание распределённой по Пуассону случайной величины равно трём. Какова вероятность, что при проведении опыта значение случайной величины не превзойдёт двух?

Решение. Поскольку математическое ожидание Пуассоновской величины есть параметр λ в формуле Пуассона

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

то $\lambda=3$ и

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=e^{-3}\left(\frac{3^0}{0!}+\frac{3^1}{1!}+\frac{3^2}{2!}\right)=\frac{17}{2}e^{-3}=0{,}423190081.$$

7.3. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке [2, 6]. Какова вероятность принятия ею значений, не более, чем на 0,5 отклоняющихся от среднего значения?

Решение. Так как случайная величина X распределена равномерно, то плотность распределения $f(x)=\frac{1}{6-2}=\frac{1}{4}$ на отрезке [2, 6] и $f(x)=0$ вне этого отрезка. То есть

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x\in[2,\,6];\\ 0, & x\notin[2,\,6].\end{cases}$$

Среднее значение (математическое ожидание) равномерно распределённой величины, как показано в п. 5.3 есть среднее арифметическое концов отрезка:

$$M(X)=\frac{2+6}{2}=4\,.$$

Следовательно, значения, отклоняющиеся на не более, чем на 0,5 от среднего значения принадлежат отрезку [3,5; 4,5]. Отсюда по п. 3.2

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Имеем

$$P(3{,}5\le X\le 4{,}5)=\int_{3{,}5}^{4{,}5}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\,.$$

7.4. Найти математическое ожидание нормально распределённой случайной величины с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}x^2-x-2}\,.$$

Решение. Выделяя полный квадрат в показателе степени, имеем

$$-\frac{1}{8}x^2-x-2=-\frac{1}{8}(x^2+8x+16)=-\frac{1}{8}(x+4)^2.$$

Теперь

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x+4)^2}$$

и сравнивая эту запись с видом плотности нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,,$$

имеем параметр a = –4, и, следовательно, искомое математическое ожидание $M(X)=-4$.

7.5. Производится измерение длины деталей без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,4 см. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,3 см.

Решение. Систематических, т.е. ошибок одного знака нет, следовательно, математическое ожидание случайных ошибок равно нулю. Здесь применима формула $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ при $a=0$, $\sigma=0{,}4$ и $\delta=0{,}3$.

Получим $P(|X|<0{,}3)=2\Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}4}\right)=2\Phi(0{,}75)=2\cdot 0{,}2734=0{,}5468.$

7.6. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,5. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка, превышающая 0,05.

Решение. Ошибку округления отсчёта можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность равномерного распределения (см. 5.3)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b],\end{cases}$$

где $b-a$ – длина интервала, в котором заключены возможные значения X. В нашем случае длина интервала равна 0,5, следовательно, $f(x) = 1/0,5 = 2$. Необходимо найти вероятность того, что ошибка, превышает 0,05, т.е., вероятность того, что она заключена в интервале (0,05; 0,45).

Отсюда по п. 3.2

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Имеем

$$P(0{,}05\le X\le 0{,}45)=\int_{0,05}^{0,45}2dx=0{,}8.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ГРУППА **А**

1. Вероятность наступления события в каждом опыте равна 0,5. Сколько экспериментов надо провести, чтобы число X наступлений события обладало математическим ожиданием, равным 5?

2. Ряд распределения дискретной случайной величины имеет вид:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,2	0,3	p_3	0,2

Найти p_3, $M(X)$, $D(X)$. Построить функцию распределения.

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0{,}5;\\ \dfrac{2x^2-x}{6}, & 0{,}5<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$, вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right)$. Построить графики функций $f(X); F(X)$.

4. Плотность распределения задана в виде

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ c(x-2), & 2<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

где c – постоянная величина. Найти значение c, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P\left(\frac{3}{2}<X<\frac{5}{2}\right)$.

5. Дисперсия распределённой по Пуассону случайной величины равна двум. Какова вероятность, что при проведении опыта значение случайной величины превзойдёт три.

6. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке [1, 7]. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти функцию распределения $F(X)$. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал (2, 5).

7. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 2$. Найти:

а) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение;

б) вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (0, 1).

8. Математическое ожидание и дисперсия нормально распределённой случайной величины X соответственно равны 7 и 3. Написать плотность вероятности X. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале (7, 10).

9. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 40 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 20 г.

10. Для случайной величины X – число выпавших гербов при двух бросаниях монеты, найти:

а) ряд распределения;

б) функцию распределения;

в) математическое ожидание и дисперсию.

ГРУППА **В**

1. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента при включении равна 0,2. Составить ряд распределения числа элементов, отказавших при включении. Найти вероятность того, что откажет не более одного элемента.

2. Три стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, для второго 0,6 и для третьего – по 0,7. Пусть X – число попаданий в мишень при одном залпе. Составить ряд распределения X, найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.

3. В пачке из десяти театральных билетов три билета – на премьеру. Наудачу взяты три билета. Составить ряд распределения случайной величины X – числа билетов на премьеру среди отобранных. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых билетов окажется на премьеру.

4. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,6. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадёт в первый раз в мишень. Составить ряд распределения случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

5. Испытывается три блока компьютера, причём вероятность отказа каждого не зависит от отказов остальных и составляет 0,1. Пусть X – число отказавших за время испытаний блоков. Составить ряд распределения X, найти её математическое ожидание и дисперсию и вычислить вероятности событий:

а) $X = 0$;

б) $X < 3$.

6. Случайная величина X задана на всей числовой оси функцией распределения $F(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x.$ Найти:

а) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в промежутке $[-1, 0]$;

б) плотность распределения $f(x)$.

7. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причём $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,5. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M(X) = 4$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 2$.

8. Плотность распределения задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{\pi}{3}; \\ c\sin 3x, & \frac{\pi}{3} < x \le \frac{5\pi}{3}; \\ 0, & x > \frac{5\pi}{3}. \end{cases}$$

где c – постоянная величина. Найти значение c, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания в интервал $(\pi; 2\pi)$.

9. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,1 м. Найти вероятность того, что из четырёх независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдёт по абсолютной величине 0,02 м.

10. Пригородная электричка следует строго по расписанию. Интервал движения 30 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередную электричку не более 20 мин.

Указание. Равномерное распределение (см. 7.6).

8. Статистическое распределение выборки

8.1. **Генеральная совокупность и выборка**. Пусть имеется множество, состоящее из конечного (но достаточно большого) или бесконечного количества некоторых объектов, причём каждый объект характеризуется единственным значением x_j некоторого количественного признака X. Такое множество называется ***генеральной совокупностью***; в свою очередь, совокупность n случайно отобранных объектов называется ***выборкой объёма*** n. Анализ извлечённых выборок позволяет получить представление о распределении количественного признака X как некоторой случайной величины.

8.2. Пусть n_1 объектов из выборки характеризуются значением x_1, n_2 объектов – значением x_2, ..., n_k – объектов – значением x_k. Числа $x_1, x_2, ..., x_k$ (которые будем считать расположенными в порядке возрастания) называются ***вариантами***, а числа $n_1, n_2, ..., n_k$ – ***частотами*** соответствующих вариант. Соответствие между вариантами и их частотами называется статистическим распределением выборки, а таблица вида

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

называется вариационным рядом; очевидно, что

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

Относительными частотами значений x_i называются соответствующие числа вида $w_i = \dfrac{n_i}{n}$; справедливо соотношение

$$w_1 + w_2 + ... + w_k = 1.$$

Модой $\mathrm{M_o}$ называют варианту, имеющую наибольшую частоту. ***Медианой*** $\mathrm{M_e}$ называют варианту, которая находится в середине вариационного ряда, если число вариант нечётно; медиана $\mathrm{M_e}$ равна среднему арифметическому двух ближайших к «середине» вариант, если их число чётно. ***Размахом*** варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантой.

Эмпирической функцией распределения называется функция вида $F^*(x) = w(X < x)$, т.е. функция, которая каждому x сопоставляет вероятность того, что случайная величина X примет значение левее точки x на числовой оси. Эмпирическая функция (по вариационному ряду) строится способом, аналогичным построению функции распределения дискретной случайной величины.

8.3. ***Выборочной средней*** $\bar{x}_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое всех наблюдаемых (в выборке) значений:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{(x_1 + ... + x_1) + (x_2 + ... + x_2) + \ldots + (x_k + ... + x_k)}{n},$$

причём в первой скобке имеется n_1 слагаемых, во второй n_2, в последней – n_k слагаемых (здесь все $n_j \geq 1$). Выборочная средняя вычисляется, таким образом, по формуле

$$\bar{x}_{\text{в}} = x_1\frac{n_1}{n} + x_2\frac{n_2}{n} + ... + x_k\frac{n_k}{n} \quad \text{или} \quad \bar{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i .$$

Возникает вопрос о количественной характеристике степени рассеивания наблюдаемых значений относительно их среднего. В этом случае рассматривают так называемую выборочную дисперсию, а именно, среднее арифметическое *квадратов* уклонений значений x_i относительно их средней $\bar{x}_{\text{в}}$. Итак, ***выборочная дисперсия*** определяется в виде

$$D_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 w_i ;$$

удобнее пользоваться формулой

$$D_{\text{в}} = (x_1)^2\frac{n_1}{n} + (x_2)^2\frac{n_2}{n} + ... + (x_k)^2\frac{n_k}{n} - (\bar{x}_{\text{в}})^2.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется величина

$$\sigma(X) = \sqrt{D_{\text{в}}} .$$

8.4. Поскольку с ростом n относительные частоты $w_i = w(X = x_i)$ становятся близкими к соответствующим вероятностям $p_i = P(X = x_i)$, то значения выборочных средних $\bar{x}_в$ становятся близкими к математическому ожиданию $M = M(X)$ количественного признака X. Точно также, значения выборочных дисперсий $D_в$ становятся (с ростом n) близкими к дисперсии количественного признака $\sigma^2 = D(X)$. Точные формы этих утверждений используют понятие сходимости по вероятности и выходят за рамки настоящего материала.

9. Статистические оценки параметров распределения

9.1. Предположим, что нас интересует неизвестное значение θ некоторого параметра, характеризующего распределение количественного признака X генеральной совокупности. Оценкой параметра θ называют значения θ^* некоторой функции от наблюдаемых (в выборках) значений, приближённо равных величине θ.

Точечной оценкой параметра θ называют оценку, которая определяется одним числом; так, например, точечной оценкой математического ожидания $\mu = M(X)$ количественного признака X генеральной совокупности есть значение выборочной средней.

9.2. Пусть известен вид функции распределения $F(x, \theta)$ количественного признака X генеральной совокупности, но единственный параметр распределения θ остаётся неизвестным. Для его оценки достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Поскольку математическое ожидание μ случайной величины X также зависит от этого параметра, т.е. $\mu = M(X, \theta)$, то имеем (см. п. 8.1) следующее приближённое равенство для нахождения θ:

$$\bar{x}_в \approx M(X, \theta).$$

Если функция распределения определяется двумя неизвестными параметрами, т.е. имеет вид $F(x, \theta_1, \theta_2)$, то для их оценки необходимы два уравнения. В этом случае следует пользоваться системой двух приближённых равенств

$$\begin{cases} \bar{x}_в \approx M(X, \theta_1, \theta_2); \\ D_в \approx D(X, \theta_1, \theta_2). \end{cases}$$

Указанный способ нахождения неизвестных параметров распределения называется методом моментов.

9.3. ***Интервальной называют оценку***, которая определяется двумя числами – концами интервала. Надёжностью (доверительной вероятностью) оценки θ^* называют вероятность γ, с которой отклонение δ оказывается заданно малым.

Наиболее часто задают надёжность, равную 0,95; 0,99; 0,995. Интервал ($\theta^*- \delta$; $\theta^* + \delta$) называют доверительным интервалом для оценки параметра θ.

Рассмотрим так называемые ***доверительные интервалы для оценки математического ожидания*** нормального распределения при известном среднем квадратическом отклонении σ. Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(нормальное распределение); здесь параметр a есть значение математического ожидания, а σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Предположим, что среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, и извлечена выборка объёма n. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней с заданной надёжностью γ. Если

$$P(|\bar{x}_в - a| < \delta) = \gamma,$$

то значение δ (радиус доверительного интервала) определяется в виде $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где число t может быть найдено из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, по табл. 1 приложения. Следовательно, с надёжностью γ доверительный интервал

$$\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \ \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

покрывает неизвестный параметр a; точность оценки есть $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

9.4. **Метод наименьших квадратов**. Предположим, что эмпирическим путём выявлена зависимость между величинами X и Y, где Y – случайная величина. Например, эксперимент может состоять в измерении значений $y_1, y_2, ..., y_n$ случайной величины Y в точках $x_1, x_2, ..., x_n$. Полученная на координатной плоскости система точек (x_i, y_j), $j = 1, ..., n$ называется **диаграммой рассеяния**. При этом по характеру расположения точек может быть сделан вывод о возможном виде объективно имеющейся функциональной зависимости $y = \varphi(x)$; последнее уравнение называется **уравнением регрессии** (рис. 4).

Например, речь может идти о регрессии (зависимости) линейной $y = ax + b$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$ и др. Однако значения параметров $a, b, ...$ остаются неизвестными; на основе полученных экспериментальных данных можно говорить лишь о точечных оценках $\alpha, \beta, ...$ параметров $a, b, ...$.

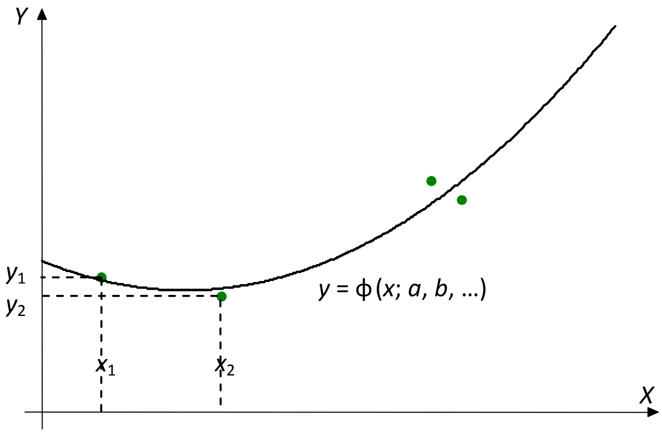

Рис. 4

Итак, мы ищем зависимость $y = \varphi(x; \alpha, \beta, ...)$, «наилучшим образом» описывающую расположение точек на диаграмме рассеяния (так называемое выборочное уравнение регрессии). Значения параметров $\alpha, \beta, ...$ выберем так, чтобы сумма квадратов

$$\Phi(\alpha, \beta, ...) = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \varphi(x_j; \alpha, \beta, ...)\right)^2.$$

принимала наименьшее значение. Согласно необходимому условию экстремума функции $\Phi(\alpha, \beta, ...)$ все её частные производные по переменным $\alpha, \beta, ...$ должны обратиться в ноль:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \varphi(x_j; \alpha, \beta, ...)\right)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \varphi(x_j; \alpha, \beta, ...)\right)^2 = 0,$$

Если числа $\alpha, \beta, ...$ (решение этой системы) определятся однозначным образом, то они и будут искомыми точечными оценками параметров $a, b, ...$; тем самым задача о поиске уравнения регрессии $y = \varphi(x; \alpha, \beta, ...)$ будет решена.

9.5. В случае линейной регрессии $y = ax + b$ система уравнений п. 9.4 для получения точечных оценок α, β параметров a, b принимает вид

$$\begin{cases} \alpha \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 + \beta \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j; \\ \alpha \sum\limits_{j=1}^{n} x_j + \beta n = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j. \end{cases}$$

Искомые значения α и β находим в результате решения полученной для них системы уравнений.

10. Математическая статистика: типовые задачи

10.1. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Известен вариационный ряд

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	25	40	15	10

Указать размах варьирования, моду, медиану вариационного ряда. Найти: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию.

Решение. Размах

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 1{,}5 - 1{,}1 = 0{,}4.$$

Мода $M_o = 1{,}3$, так как эта варианта обладает наибольшей частотой, равной 40. Медиана $M_e = 1{,}3$, поскольку эта варианта расположена в середине вариационного ряда.

Объём выборки

$$n = 10 + 25 + 40 + 15 + 10 = 100.$$

а) По формуле п. 8.3 имеем

$$\bar{x}_{\text{в}} = 1{,}1\cdot\frac{10}{100} + 1{,}2\cdot\frac{25}{100} + 1{,}3\cdot\frac{40}{100} + 1{,}4\cdot\frac{15}{100} + 1{,}5\cdot\frac{10}{100} = 1{,}29.$$

б) Согласно п. 8.3

$$D_{\text{в}} = (1{,}1)^2\cdot 0{,}1 + (1{,}2)^2\cdot 0{,}25 + (1{,}3)^2\cdot 0{,}4 + (1{,}4)^2\cdot 0{,}15 +$$

$$+ (1{,}5)^2\cdot 0{,}1 - (1{,}29)^2 = 0{,}0119.$$

10.2. Найти по методу моментов точечные оценки параметров a и b равномерно распределенного количественного признака генеральной совокупности.

Решение. Имеем систему приближённых равенств

$$\begin{cases} \bar{x}_{\text{в}} \approx M(X, a, b), \\ D_{\text{в}} \approx D(X, a, b). \end{cases}$$

Учитывая, что для равномерного распределения

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b) \approx \bar{x}_{\text{в}}; \\ \frac{1}{12}(b-a)^2 \approx D_{\text{в}}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим искомые оценки

$$a^* = \bar{x}_{\text{в}} - \sigma_{\text{в}}\sqrt{3}, \quad b^* = \bar{x}_{\text{в}} + \sigma_{\text{в}}\sqrt{3}, \quad \text{где } \sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}.$$

10.3. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратичным отклонением $\sigma = 4$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}} = 3{,}6$, если объём выборки $n = 64$ и задана надёжность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Найдём t из соотношения $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. По табл. 1 приложения находим $t = 1{,}96$. Найдём точность оценки:

$$\delta = \frac{1{,}96 \cdot 4}{\sqrt{64}} = 0{,}98\,.$$

Следовательно, доверительный интервал имеет вид

$$(3{,}6 – 0{,}98; 3{,}6 + 0{,}98).$$

Иначе говоря, с надёжностью $\gamma = 0{,}95$ имеет место неравенство $2{,}62 < a < 4{,}58$.

10.4. Найти выборочное уравнение линейной регрессии по следующим данным измерений:

y_j	5,2	6,3	7,1	8,5	9,2	10,0
x_j	1	2	3	4	5	6

Решение. Согласно методу наименьших квадратов, параметры регрессии α и β находим из системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \beta\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j; \\ \alpha\sum_{j=1}^{n} x_j + \beta n = \sum_{j=1}^{n} y_j\,. \end{cases}$$

В таблицу внесём данные, необходимые для расчёта коэффициентов линейного уравнения регрессии.

j	x_j	y_j	x_j^2	$x_j y_j$
1	1	5,2	1	5,2
2	2	6,3	4	12,6
3	3	7,1	9	21,3
4	4	8,5	16	34,0
5	5	9,2	25	46,0
6	6	10,0	36	60,0
Сумма	21	46,3	91	179,1

Итак, получили:

$$\sum_j x_j = 21\,,\ \sum_j y_j = 46{,}3\,,\ \sum_j x_j^2 \ = 91\,,\ \sum_j x_j y_j = 179{,}1\,.$$

Записываем теперь уравнения системы:

$$\begin{cases} 91\alpha + 21\beta = 179{,}1; \\ 21\alpha + 6\beta = 46{,}3, \end{cases}$$

откуда находим $\alpha = 0{,}97$, $\beta = 4{,}3$.

Таким образом, уравнение линейной регрессии принимает вид $y = 0{,}97x + 4{,}3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ГРУППА **А**

1. В течение 20 биржевых торгов курс доллара составил следующие значения (в рублях): 25,75; 25,8; 25,7; 25,7; 25,6; 25,65; 25,6; 25,65; 25,65; 25,7; 25,8; 25,8; 25,8; 25,7; 25,7; 25,7; 25,7; 25,6; 25,5; 25,65.

Найти: а) моду M_o; б) медиану M_e; в) размах варьирования R; г) средний курс доллара.

2. Из генеральной совокупности, подлежащих уценке, товаров сделана выборка. Известны цены (до проведения уценки) в тыс. р. x_i и частоты n_i их значений в выборочной совокупности.

x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
n_i	26	15	12	18	16	13

Найти выборочную среднюю цены и её выборочное средне-квадратическое отклонение.

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0,95$, зная выборочную среднюю $\overline{x}_в = 82,51$, объём выборки $n = 11$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma = 11$.

4. Количественный признак генеральной совокупности распределен нормальным образом. Выборочная дисперсия оказалась равной 0,04. Найти точечную оценку параметра σ в указанном нормальном распределении.

5. По выборке объёма $n = 16$ получена выборочная дисперсия $D_в = 1,2$. Найти исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение.

ГРУППА **В**

1. Для вариационного ряда получено $\overline{x}_в = 9$. Найти x_3.

x_i	5	7	x_3	12
n_i	1	3	4	2

2. Для математического ожидания признака X генеральной совокупности получены доверительные интервалы с уровнем надёжности γ. Расположить эти интервалы в порядке возрастания γ:
(8,4; 10,2);
(8,2; 10,4);
(8,5; 10,1).

3. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	2	4	5	7	8	9	10
n_i	3	2	4	6	3	1	1

Оценить с надёжностью 0,95 математическое ожидание нормально распределённого признака генеральной совокупности с помощью доверительного интервала, считая известным дисперсию нормального распределения $D(X) = 0,04$.

4. Построить эмпирическую функцию распределения по вариационному ряду, представленному в задаче 3.

5. Построить диаграмму рассеивания и найти выборочное уравнение линейной регрессии по следующим данным измерений:

x_i	5	10	12	15	18	20
y_i	45,6	40,3	38,2	34,6	37,6	32,4

3. КОМБИНАТОРИКА
(КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ)

1. Теоретические упражнения

1. Доказать равенство $C_m^k = C_m^{m-k}$.

2. Доказать равенство $P_m = A_m^k \, P_{m-k}$.

3. Пользуясь результатом $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, вывести формулу для подсчёта количества элементов

$n(A \cup B \cup C)$ в объединении трёх множеств.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

1. В отделении связи продают десять видов конвертов и пять видов марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку к нему?

2. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из пяти символов, если номер состоит из одной буквы английского алфавита, за которой следуют любые четыре цифры?

3. Шесть меломанов спешат занять очередь к филармонической кассе. Сколькими способами может быть сформирована такая очередь?

4. В субботу в классе должно быть четыре урока. Сколько можно составить субботних расписаний, если всего имеется десять учебных дисциплин.

5. Класс из 17 человек должен быть разделён на две подгруппы для изучения английского и французского языка, причём в «английской» группе должно быть 10 человек. Сколько существует способов формирования подгрупп, если сами учащиеся не высказывают никаких предпочтений по поводу выбора иностранного языка?

6. На прилавке цветочного магазина – восемь гвоздик, восемь роз и три тюльпана. Сколько существует способов сформировать букет из трёх гвоздик, четырёх роз и двух тюльпанов?

7. Решить уравнение $A_n^2 C_n^{n-1} = 48$.

8. Решить уравнение $7A_{n+1}^{n-1} + 14P_{n-1} = 30P_n$.

9. Сколькими способами в комитет школьного самоуправления можно выбрать трёх человек из класса, в котором учатся 25 человек?

10. Пятеро друзей перепутали номерки, взятые в гардеробе. Сколькими способами они могут получить свою одежду?

***Ответы*:**

Задание 1. 50

Задание 2. 260000

Задание 3. $6! = 720$

Задание 4. $A_{10}^4 = 5040$

Задание 5. $C_{17}^{10} C_7^7 = 19448$

Задание 6. 11760

Задание 7. 4

Задание 8. 7

Задание 9. $A_{25}^3 = 13800$

Задание 10. $5! = 120$

4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ)

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Теоретические упражнения

1. Привести примеры:
а) полной группы событий;
б) двух совместных и независимых событий.

2. Если классическая вероятность некоторого события равна 1, то верно ли, что это событие – достоверное? Почему?

3. Задача о выборке. Среди N предметов имеется M меченых. Случайным образом извлекается k предметов. A событие, состоящее в том, что в этой выборке содержится ровно l меченых предметов. Доказать, что вероятность этого события может быть найдена по формуле

$$P(A) = \frac{C_M^l \ C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

4. Доказать, что для любых двух событий A и B имеет место неравенство

$$P(A+B) \le P(A) + P(B).$$

5. Доказать, что если

$$p = P(A) \text{ и } q = P(\overline{A}), \text{ то } pq \le \frac{1}{4}.$$

6. Доказать, что если $P(B)$ не зависит от наступления (ненаступления) события A, то и $P(A)$ не зависит от B (т.е. свойство независимости – взаимное).

Указание: воспользоваться вероятностью произведения $P(AB)$, представив её (на основании свойства коммутативности умножения) двумя способами.

7. Доказать, что если A и B – независимые события, то и каждая пара событий A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ является парой независимых событий.

8. Доказать соотношение

$$P(A_1 A_2 \ \dots \ A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \ \dots \ P_{A_1 A_2 \ \dots \ A_{n-1}}(A_n).$$

Указание: воспользоваться методом математической индукции.

9. Можно ли в случае двух гипотез формулу полной вероятности записать в виде

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(\overline{H}_1) P_{\overline{H}_1}(A) \ ?$$

10. Доказать, что если вероятность p появления события A в каждом из n опытов постоянна, и $q = 1 - p$, то вероятность ρ наступления события A хотя бы один раз может быть вычислена в виде

$$\rho = 1 - q^n.$$

11. Вероятность p появления события A в каждом опыте постоянна. Опыты проводят до первого наступления события. Чему равна вероятность того, что будет проведено ровно n опытов?

12. Вероятность p появления события A в каждом из n опытов постоянна. При каких значениях p вероятность наступления события ровно n раз больше, чем вероятность непоявления события ровно n раз?

Указание: сравнить результаты применения формулы Бернулли в обоих случаях.

13. Доказать, что если вероятность p появления события A в каждом из n опытов мала (n – велико) и $\lambda = np$, то вероятность появления события A хотя бы один раз может быть найдена по приближённой формуле

$$P(k \ge 1) \approx 1 - e^{-\lambda}.$$

14. Доказать нечётность интегральной функции Лапласа

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

2. Задания для итогового контроля

1. Техническое устройство состоит из трёх узлов. Событие A_k – k-й узел выйдет из строя в течение времени T (k = 1, 2, 3). Установите соответствие между событиями и их словесной формулировкой:

1) все узлы выйдут из строя в течение времени T;
2) только третий узел выйдет из строя в течение времени T;
3) ровно два узла выйдут из строя в течение времени T;
4) хотя бы один узел не выйдет из строя в течение времени T;
5) ни один узел не выйдет из строя в течение времени T.

а) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;
б) $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$;
в) $\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$;
г) $A_1A_2A_3$;
д) $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

2. По прогнозам экономистов, ежегодная инфляция не превысит заданного процента с вероятностью $p = 0{,}8$. Какова вероятность того, что в течение всех трёх ближайших лет оправдается указанный экономический прогноз?

3. В комплекте из 10 дискет ровно две заражены вирусом. Какова вероятность того, что обе наугад взятые дискеты окажутся без вируса?
Ответ записать в виде десятичной дроби приближённо с точностью до 0,01.

4. В течение часа на сайт интернет-магазина заходит в среднем пять человек. Вероятность того, что будет сделан заказ на товар для каждого из посетителей равна $\frac{1}{3}$. Какова вероятность того, что в течение часа не менее трёх из пяти посетителей сделают заказ?
Ответ записать в виде десятичной дроби приближённо с точностью до 0,01.

5. Каждый из трёх независимо работающих сигнализаторов своевременно сообщает о нарушении заданного режима работы реактора с вероятностью, соответственно, $p_1 = 0{,}9$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}75$. Какова вероятность того, что при нарушении заданного режима работы сигнала не поступит?

6. Среди пяти одинаковых по внешнему виду саженцев три – элитных. Наугад взяты два саженца. Какова вероятность, что ровно один из них элитный?

7. По данным социологов, в городе А данный кандидат в депутаты будет поддержан на выборах большей частью населения с вероятностью $p_1 = 0{,}6$; в городе В – с вероятностью $p_2 = 0{,}7$. Какова вероятность, что на выборах кандидат одержит победу хотя бы в одном из городов А и В?

8. Партия из пяти изделий забраковывается, если хотя бы одно из них окажется нестандартным. Каждое из производимых изделий удовлетворяет требованиям стандарта с вероятностью $p = \frac{4}{5}$. Какова вероятность, что партия будет забракована?

9. Вероятности своевременной доставки денежного перевода в города А, Б, В равны соответственно $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}6$. В каждый из этих городов отправлены по одному переводу. Какова вероятность того, что ровно в два города перевод будет доставлен своевременно?

10. Имеется три урны. В первой урне находятся два белых и один чёрный шар; во второй урне – один белый и один чёрный шар; в третьей урне находится три белых и два чёрных шара. Случайным образом выбираются одна из урн и из неё извлекается один шар. Какова вероятность, что извлечённый шар – чёрный?
Ответ записать в виде десятичной дроби приближённо с точностью до 0,01.

11. Вероятность того, что каждый данный клиент Сбербанка потребует в течение календарного года закрытия своего лицевого счёта, равна 0,002. Какова вероятность, что среди 1000 клиентов отделения Сбербанка трое потребуют в течение года закрытия лицевых счетов?
Ответ записать в виде десятичной дроби приближённо с точностью до 0,01.

12. Сколько следует разместить люминесцентных ламп на потолке офиса, чтобы офис был освещён (хотя бы одной лампой) с вероятностью 0,99968, если вероятность перегорания каждой лампы равна 0,2?

13. На пути автомобиля шесть светофоров, каждый из которых может задержать его с вероятностью p = 0,8. Какова вероятность, что в четырёх случаях автомобиль попадает под красный свет?

14. В первой группе студентов 15 человек, из них пять отличников, во второй группе 20 человек, из них восемь отличников. Наудачу по списку из каждой группы были отобраны по одному студенту. Найти вероятность того, что только один из студентов является отличником.

15. В данной местности левши составляют 1% населения. Какова вероятность, что на факультете, где обучаются 400 человек, окажутся не менее 3 левшей?

16. Вероятность того, что первый объект будет сдан в эксплуатацию с опозданием равна 0,1; для второго объекта вероятность быть сданным в эксплуатацию с опозданием равна 0,2. Найти вероятность того, что хотя бы один объект будет сдан в эксплуатацию строго по плану.

17. Разработка проекта поручена двум независимо работающим отделам. Вероятность того, что первый отдел разработает экономически оптимальный проект равна 0,6; для второго отдела такая вероятность равна 0,4. Найти вероятность того, что только один отдел разработает экономически оптимальный проект.

18. В ящике находятся 20% деталей, изготовленных заводом № 1, 45% деталей, изготовленных заводом № 2 и 35% деталей, изготовленных заводом № 3. Брак в продукции завода № 1 составляет 2%, в продукции заводов № 2 и № 3 составляет соответственно 3% и 1%. Из ящика наудачу извлекли одну деталь. Найти вероятность того, что извлечённая деталь окажется бракованной.

19. В первой урне два белых, три чёрных шара, во второй урне четыре белых, два чёрных шара. Из наудачу выбранной урны извлекли один шар. Он оказался белого цвета. Найти вероятность того, что шар извлечён из первой урны.

20. Слово «Тамбов» составлено из карточек, на каждой из которых написано по одной букве. Ребёнок, не умеющий читать, смешал карточки, а потом выложил их слева направо. Найти вероятность того, что получится первоначальное слово.

***О т в е т ы*:**

Задание 1. 1г; 2д; 3б; 4в; 5а
Задание 2. 0,512
Задание 3. 0,62
Задание 4. 0,21
Задание 5. 0,005
Задание 6. 0,6
Задание 7. 0,88
Задание 8. 0,67232
Задание 9. 0,456
Задание 10. 0,41
Задание 11. 0,18
Задание 12. 5
Задание 13. 0,246
Задание 14. 7/15
Задание 15. 0,762
Задание 16. 0,98
Задание 17. 0,52
Задание 18. 0,021
Задание 19. 3/8
Задание 20. 1/6!

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

1. Теоретические упражнения

1. Индикатор η случайного события A определяется как случайная величина со значениями $\eta(A)=0$, если A не наступает и $\eta(A)=1$, если A наступает. Найти математическое ожидание и дисперсию индикатора.

2. Постоянная величина C понимается как величина, принимающая единственное значение C с вероятностью $p = 1$. Доказать, что $M(C) = C$ и $D(C) = 0$.

3. Возможно ли, чтобы плотность распределения была равна 1 на промежутке (–0,5; 0,7)?

4. Может ли плотность распределения принять значение, равное 1,1?

5. Может ли функция $F(x) = 1 - e^{-|x|}$ быть функцией какого-либо распределения?

Может ли, вообще, чётная функция быть функцией какого-либо распределения?

6. Если плотность распределения $f(x)$ – чётна, то чему равен несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx \ ?$$

7. Может ли плотность распределения быть нечётной?

8. Пусть x_k, $k = 1, 2, \ldots, l$ – значения всех вариант, представленных в выборке и ω_k – их относительные частоты. Чему равна сумма $\sum_{k=1}^{l} \omega_k$? Результат обосновать.

9. Доказать, что выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}}$ принимает значения

$$\overline{x}_{\text{в}} \in [x_{\min}, x_{\max}],$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – соответственно наибольшее и наименьшее значения вариант x_k.

10. Количественный признак распределён по показательному закону с параметром λ, т.е. плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0; \qquad f(x) = 0, \ x < 0.$$

Извлечена выборка и вычислена выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}}$. Используя метод моментов, найти точечную оценку параметра λ.

2. Задания для итогового контроля

Ответы к заданиям должны быть целыми числами или записаны в виде десятичной дроби.

1. Н а й т и: а) математическое ожидание;

б) среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	p_4

2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 1{,}5 \sin 3x$ в интервале $(0; \pi/3)$ и $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти вероятность того, что при трёх опытах X дважды попадёт в интервал $(\pi/6; \pi/4)$.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = ax^2 + 4{,}5x - 6 \quad \text{при} \quad x \in [2, 4]; \quad f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin [2, 4].$$

Н а й т и: а) значение параметра a;

б) математическое ожидание.

4. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{при} \quad x \in [0, c];$$

$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin [0, c].$$

Н а й т и: а) значение параметра c;

б) вероятность $P(-100 < X < 1)$.

5. Некоторая случайная величина подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием 50 и дисперсией 36. Найти вероятность того, что отдельное значение случайной величины заключено в интервале от 40 до 60.

Ответ записать с точностью до 0,1.

6. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = -2$ с вероятностью $p_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = 1$ с вероятностью $p_2 = \frac{1}{3}$ и некоторое значение x_3 с вероятностью p_3. При этом известно, что математическое ожидание случайной величины $M(X)$ равно 1. Найти дисперсию $D(X)$.

7. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения)

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 2; \\ \dfrac{x^2 - 4x + 4}{4}, \ \ 2 < x \le 4; \\ 1, \ x > 4. \end{cases}$$

Н а й т и: а) математическое ожидание случайной величины X (*ответ записать в виде десятичной дроби приближённо с точностью до 0,01*);

б) вероятность попадания значений X в интервал $(0,\ 3)$.

8. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения)

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{x}{6}, \ \ 0 < x \le 3; \\ 1, \ x > 3. \end{cases}$$

Н а й т и: а) математическое ожидание;

б) среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

в) вероятность попадания значений X в интервал $(0,1)$.

9. В коробке две детали имеют диаметр 25 мм, две детали – диаметр 30 мм, у одной детали диаметр составил 50 мм. Дискретная случайная величина X – диаметр извлечённой детали.

Н а й т и: а) математическое ожидание;

б) дисперсию.

10. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-2)^2}{200}} dt.$$

Н а й т и среднее квадратическое отклонение.

11. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-5)^2}{8}}, \ x \in (-\infty;\ +\infty).$$

Н а й т и математическое ожидание.

12. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x<0;\\ 3e^{-3x}, \ x\ge 0.\end{cases}$$

Н а й т и дисперсию.

13. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x<2;\\ \frac{1}{3}, \ 2\le x\le 5;\\ 0, \ x>5.\end{cases}$$

Н а й т и математическое ожидание.

14. Дискретная случайная величина X с множеством возможных значений $\{x\}=\{0, 1, 2\}$ имеет биномиальное распределение с параметром p = 0,1.

Н а й т и: а) математическое ожидание;

б) дисперсию.

15. Из генеральной совокупности металлических шайб сделана выборка. Известны внутренние диаметры x_i и частоты n_i этих значений в выборочной совокупности (размеры даны в миллиметрах).

Н а й т и выборочную среднюю.

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	26	12	18	16	18

16. Н а й т и моду вариационного ряда

x_i	5	7	9	10	13
n_i	4	5	3	2	1

17. Для вариационного ряда получено $\bar{x}_{\text{в}}=7{,}2$.

Н а й т и x_2

x_i	5	x_2	8	9
n_i	2	3	4	1

18. По выборке $n=10$ получена выборочная дисперсия $D_{\text{в}}=0{,}9$. Н а й т и исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение.

19. По выборке объёма 100 получен вариационный ряд

x_i	3	5	7	9	12
n_i	22	n_2	23	18	12

Н а й т и относительную частоту варианты x_2.

20. Для математического ожидания признака X генеральной совокупности получены доверительные интервалы с уровнем надёжности γ. Расположить эти интервалы в порядке возрастания γ.

1:(66,16; 69,56)
2:(66,06; 69,66)
3:(66,56; 69,16)

***О т в е т ы*:**

Задание 1. а) –0,3; б) 3,9
Задание 2. 0,243
Задание 3. а) –0,75; б) 3

Задание 4. а) 2; б) 0,25
Задание 5. 0,9
Задание 6. 2
Задание 7. а) 3,33; б) 0,25
Задание 8. а) 1,75; б) 0,83; в) 2/9
Задание 9. а) 32; б) 86
Задание 10. 10
Задание 11. 5
Задание 12. 1/9
Задание 13. 3,5
Задание 14. а) 0,2; б) 0,18
Задание 15. 1,258
Задание 16. 7
Задание 17. 7
Задание 18. 1
Задание 19. 0,25
Задание 20. 3); 1); 2)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существенной особенностью естественно-математической подготовки современного инженера является прикладная направленность математических знаний, умений и навыков. При этом вероятностно-статистические понятия, факты и методы наиболее востребованы как в процессе овладения общеинженерными и специальными дисциплинами, так и в практической деятельности специалиста, неотъемлемыми составляющими которой являются прогнозирование, проектирование, математическое моделирование.

В результате работы с настоящим пособием студент:

– осваивает основные понятия и факты теории вероятностей и математической статистики, а также используемые в процессе решения вероятностных задач элементы комбинаторики;

– приобретает навыки использования различных моделей понятия вероятности в количественных оценках шансов наступления тех или иных событий;

– овладевает методами исследования поведения случайных величин;

– осваивает методы анализа выборочных совокупностей.

Материал пособия, как надеются авторы, внесёт существенный вклад в приобщение будущего специалиста к исследовательской работе, овладение общими логическими приёмами мышления, необходимыми как в профессиональной, так и в повседневной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Высшая школа, 2000. – 366 с.

2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1997. – 400 с.

3. Куликов, Г.М. Элементы прикладной математики / Г.М. Куликов, А.Д. Нахман, С.В. Плотникова. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2008. – 160 с.

4. Математическая статистика : методические разработки и контрольные задания / авт.-сост. С.В. Плотникова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. – 52 с.

5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А.А. Свешникова. – М. : Наука, 1970. – 656 с.

6. Фомин, В.И. Сборник заданий по теории вероятностей (типовые расчёты) / В.И. Фомин. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2002. – 80 с.

7. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчёты) / В.Ф. Чудесенко. – М. : Высшая школа, 1983. – 112 с.

ГЛОССАРИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий задачи нахождения количества всевозможных конечных подмножеств данного множества, если эти подмножества обладают заданной характеристикой.

Кортеж есть упорядоченное подмножество, составленное из элементов данного множества; длина кортежа есть количество составляющих его элементов.

Декартово произведение множеств $G_1, ..., G_n$ есть множество всех G кортежей вида $g = (g_1, ..., g_n)$, где $g_k \in G_k$, $1 \le k \le n$.

Размещения с повторениями – это кортежи вида $g = (g_1, ..., \in \ \in G \times ... \times G$.

Размещения без повторений (из m элементов по k) – это кортежи длины k из элементов одного и того же m-элементного множества G так, чтобы элементы в кортеже не повторялись.

Перестановки – это размещения (без повторений) из m элементов по m.

Сочетания из m по k элементов – это неупорядоченные подмножества по k элементов, взятых из некоторого m-элементного множества.

О*бъединением множеств* A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого содержится хотя бы в одном из множеств A или B, т.е. содержится или в A или в B, или в обоих этих множествах. Общая же часть $A \cap B$ этих множеств называется их ***пересечением***.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Теория вероятностей – это математическая наука, предметом которой является изучение закономерностей массовых случайных явлений.

Понятие ***события*** является первоначальным, неопределяемым. События можно разбить на три категории: ***достоверные*** (наверняка происходящие при выполнении данного комплекса условий; достоверные события обозначаем символом E), ***невозможные*** (наверняка не происходящие; невозможные события обозначаем символом $\varnothing$) и ***случайные*** (могут как произойти, так и не произойти при выполнении данного комплекса условий; обозначения: A, B, C, …).

Суммой (произведением) событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий (совместно всех событий). Обозначение: $A + B$ (AB) соответственно.

Противоположными называют события A и $\overline{A}$, если они несовместны и образуют полную группу.

Алгеброй событий называется всякое множество событий U, в котором выполняются следующие условия:

- введены операции сложения и умножения, результаты выполнения которых также содержатся в U;
- содержит достоверные события;
- для каждого события A содержится ему противоположное $\overline{A}$.

Алгебра событий, содержащая также всевозможные бесконечные суммы, называется **σ-*алгеброй* (*борелевской алгеброй*).**

Вероятность понимается как некоторая численная мера степени объективной возможности появления данного события, т.е. каждому событию A сопоставляется (единственным образом) некоторое число $P = P(A)$.

Классическая вероятность события A – это отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих A, к общему числу n всевозможных элементарных исходов опыта.

Схема гипотез предполагает ситуацию, когда событию A предшествует появление одного и только одного из полной группы попарно несовместных событий (гипотез), но заранее неизвестно, какая именно из гипотез наступит.

Схема Бернулли предполагает наличие n однотипных опытов (испытаний), в каждом из которых вероятность появления события A является постоянной (равной некоторому p).

Случайная величина X есть числовая величина, которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, наперёд неизвестное и зависящее от случайных причин.

Дискретной называется такая ***случайная величина*** X, все возможные значения которой можно записать в виде числовой последовательности (конечной или бесконечной).

Непрерывная случайная величина X принимает сплошь все значения из некоторого числового промежутка.

Закон распределения дискретной случайной величины X есть соответствие между её возможными значениями и вероятностями этих значений.

Ряд распределения есть таблица, с помощью которой задаётся закон распределения.

Функция распределения (интегральная функция) соотносит каждому $x \in (-\infty; +\infty)$ вероятность события, состоящего в принятии величиной X значения левее точки x.

Плотность распределения (дифференциальная функция) непрерывной случайной величины есть производная функции распределения.

Числовые характеристики случайной величины X – это ***математическое ожидание*** $M(X)$ («среднее значение»), ***дисперсия*** $D(X)$ (степень рассеяния значений X относительно математического ожидания) и ***среднее квадратическое отклонение*** $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Выборка **(**выборочная совокупность) есть множество объектов случайно отобранных из большего множества (называемого **генеральной совокупностью**).

Объём выборки есть количество отобранных объектов.

Варианты – это наблюдаемые значения количественного признака (значения случайной величины, которыми характеризуются объекты выборочной совокупности); ***частота варианты*** – число, показывающее, сколько раз наблюдалось в выборочной совокупности данная варианта.

Статистическое распределение выборки есть соответствие между вариантами и соответствующими им значениями частот.

Вариационный ряд есть таблица, с помощью которой задаётся статистическое распределение.

Относительная частота наблюдаемого значения (варианты) есть отношения соответствующей частоты к объёму выборки.

Мода (M_o) есть варианта, имеющая наибольшую частоту.

Медиана (M_e) – это значение, соответствующее середине вариационного ряда.

Размахом варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантой.

Выборочная средняя ($x_в$) есть среднее арифметическое всех наблюдаемых (в выборке) значений.

Выборочная дисперсия ($D_в$) есть характеристика рассеяния наблюдаемых значений относительно их выборочной средней.

Точечная оценка параметра θ есть его приближённое значение θ^*, которая определяется одним числом; ***интервальная оценка*** определяется двумя числами – концами интервала.

Доверительный интервал есть интервал, который покрывает (содержит) параметр θ с заданной надёжностью (доверительной вероятностью) γ .

Метод наименьших квадратов – метод получения точечных оценок параметров зависимости, выявленной экспериментальным путём.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

X	0	0,5	1,0	1,5	1,645	1,96
$\varphi(x)$	0,3989	0,3521	0,2420	0,1295	0,103	0,0584
$\Phi(x)$	0,0000	0,1915	0,3413	0,4332	0,45	0,4750
X	2,0	2,50	2,80	3,0	3,5	4
$\varphi(x)$	0,0540	0,0175	0,0078	0,0044	0,0009	0,0001
$\Phi(x)$	0,4772	0,4938	0,4985	0,4987	0,4997	0,4999

Таблица 2

X	1	2	3	4	5
e^{-x}	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674

ОГЛАВЛЕНИЕ