

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА,
МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ
И ОБОРУДОВАНИЯ**

Лабораторные работы
для студентов 3 курса специальностей 260601, 240902 и
направлений 150400, 260100



Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2010

УДК 66.011:51-74(076.5)
ББК Л11-1с116я73-5
Ч-674

Рекомендовано Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Заведующий кафедрой «Информационные системы и
защита информации», доктор технических наук,
профессор ГОУ ВПО ТГТУ
Ю.Ю. Громов

Составители:

А.В. Майстренко, Н.В. Майстренко

Ч-674 Численные методы расчёта, моделирования и
проектирования технологических процессов и оборудования :
лабораторные работы / сост. : А.В. Майстренко, Н.В. Майстренко.
– Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 48 с. – 100 экз.

Представлены задания для изучения и приобретения навыков
использования численных методов и методов оптимизации.

Предназначены для студентов направлений 150400
«Технологические машины и оборудование», 260100 «Технология
продуктов питания», специальностей 240902 «Пищевая биотехнология»,
260601 «Машины и аппараты пищевых производств» всех форм обучения.

УДК 66.011:51-74(076.5)

ББК Л11-1с116я73-5

© Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический
университет» (ГОУ ВПО ТГТУ), 2010

Учебное издание

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА,
МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
И ОБОРУДОВАНИЯ**

Лабораторные работы

Составители:

**МАЙСТРЕНКО Александр Владимирович,
МАЙСТРЕНКО Наталья Владимировна**

Редактор **З. Г. Чернова**

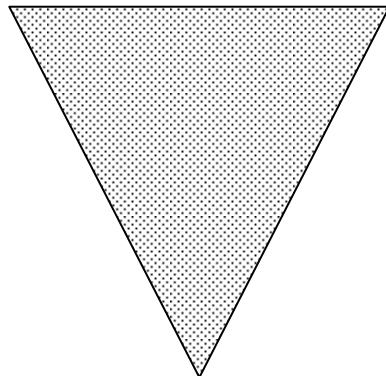
Инженер по компьютерному макетированию **М. С. Анурьева**

Подписано в печать 21.10.2010

Формат 60 × 84 /16. 2,79 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 512.

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА,
МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ
И ОБОРУДОВАНИЯ**



Тамбов
◆Издательство ГОУ ВПО ТГТУ◆
2010

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время методы вычислительной математики широко используются при решении различного рода задач в науке, технике, производстве. Однако инженеру, не имеющему специального математического образования, часто бывает трудно, как сделать правильный выбор методов решения стоящих перед ним математических задач, так и в случае обоснованного выбора грамотно реализовать выбранный метод. Среди множества математических задач, с которыми приходится сталкиваться инженеру в своей практике, можно выделить:

- решение алгебраических и трансцендентных уравнений и их систем;
- решение определённых интегралов;
- решение обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных и их систем;
- обработка массивов числовых данных;
- решение задач оптимизации.

В данном практикуме собран ряд лабораторных работ* по некоторым из приведённых выше классам математических задач, основной целью которых является приобретение навыков реализации и использования численных методов для решения различных инженерных задач.

ОФОРМЛЕНИЕ ЗАДАНИЯ И ОТЧЁТНОСТЬ

Выполнение каждой лабораторной работы завершается составлением отчёта, оформленным в соответствии с СТП ТГТУ. При этом каждая лабораторная работа должна в обязательном порядке содержать следующие разделы:

1. Постановка задачи конкретного варианта (выдается преподавателем).
2. Теоретическая проработка варианта задания лабораторной работы.
3. Описание алгоритма решения задачи.
4. Блок-схема алгоритма решения задачи и её описание.
5. Текст программы на алгоритмическом языке (листинг) и её описание.
6. Тестовый пример, решаемый с помощью программы и аналитически.
7. Результаты программного решения задания.
8. Графическая иллюстрация решения (если необходимо).
9. Список использованной литературы.

Лабораторная работа 1

РЕШЕНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи

По заданным вещественным значениям c и d и целому m для каждого значения $t_i = c + ih$, ($i = 0, 1, \dots, m$), где $h = (d - c)/m$, найти корень x_i уравнения $F(x) = f(x, t_i) = 0$.

Порядок выполнения

1. Исследовать заданную функцию $f(x, t)$ и найти отрезок (графически или аналитически), на котором находится требуемый корень уравнения при любом значении t_i (можно использовать метод табулирования функций и табличный процессор MS Excel). Проверить применимость указанного численного метода.

2. Разработать алгоритм решения поставленной задачи, представив его структуру в виде блок-схемы, и дать его описание.

3. Составить и отладить программу решения поставленной задачи, оформив вычисление значений функции (и, если требуется, значений её производной) в виде подпрограммы.

4. Решить задачу с точностью $\varepsilon = 0,001$. Если уравнение имеет не единственный корень, то предпочтение отдать положительному корню, а среди корней одного знака предпочтение отдать наименьшему по модулю (но отличному от нуля) корню.

5. В качестве результатов на печать вывести таблицу значений x_i и соответствующих им значений t_i .

Варианты задания

Вариант задания состоит из двух цифр: первая означает метод приближённого решения уравнений (табл. 1); вторая – функцию $f(x, t)$ значения c , d и m (табл. 2). Задание должно быть выполнено с использованием подпрограмм.

* При составлении лабораторных работ были использованы методические указания: Численные методы в инженерных расчётах и программирование / сост. : С.И. Дворецкий и др. – Тамбов : ТИХМ, 1986. – 32 с.

Таблица 1

Первая цифра варианта	Метод приближённого решения уравнения
1	Метод деления отрезка пополам
2	Метод хорд
3	Метод касательных (Ньютона)
4	Комбинированный метод (хорд и касательных)
5	Метод секущих
6	Модифицированный метод Ньютона

Таблица 2

Вторая цифра варианта	$f(x, t)$	c	d	m
1	$1/(1+x^2) - tx$	1	2	10
2	$\text{tg}^2 x - tx$	1	2	20
3	$e^{-x} - tx$	1	2	15
4	$1/(1+x^4) - tx^2$	1	2	30
5	$\ln(2+x) - tx$	5	6	10
6	$x^3 - 10 - t\sqrt{x-2}$	1	2	15
7	$\sqrt{1-x^2} - t^2x^5$	2	3	20
8	$1 - x^2 - te^x$	1/3	1/2	12
9	$\sin 2x - tx^2$	1	10	30

Методические указания

Процедура решения алгебраических и трансцендентных уравнений складывается из последовательного выполнения двух этапов:

- отделение корня, т.е. нахождение такого отрезка $[a, b]$, на котором существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$.
- уточнение корня, т.е. нахождение приближённого решения с заданной точностью при помощи одного из существующих методов.

Для отделения корня используют, как правило, аналитический либо графический способ. Суть графического способа сводится к построению приближённого графика функции и определению по этому графику отрезка, на котором функция $y = f(x)$ пересекает ось Ox . При аналитическом отделении корня область определения функции «сканируют» с некоторым шагом до тех пор, пока опять же не определят отрезок, на котором функция $y = f(x)$ меняет свой знак на противоположный.

Для решения алгебраических и трансцендентных уравнений вида $f(x) = 0$ разработано много различных итерационных методов. Сущность этих методов заключается в следующем: пусть известна достаточно малая область, в которой содержится единственный корень $x = x^*$ этого уравнения. В этой области выбирается точка x_0 – начальное приближение корня, достаточно близкое к искомому корню $x = x^*$. Далее с помощью некоторого рекуррентного соотношения строится последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, сходящаяся к $x = x^*$. Сходимость последовательности обеспечивается соответствующим выбором рекуррентного соотношения и начального приближения x_0 .

1. **Метод половинного деления.** Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Для нахождения корня этого уравнения по формуле $c = (a + b)/2$ вычисляется среднее значение x в интервале $[a, b]$ и находится соответствующее ему значение функции $f(c)$. Если $f(c) = 0$, то $x^* = c = (a + b)/2$ является корнем уравнения. Если $f(c) \neq 0$, то выбирают ту из половин $[a, c]$ или $[c, b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. В результате интервал, в котором заключено значение корня, сужается до размеров $[a_1, b_1]$. Новый суженный отрезок $[a_1, b_1]$ снова делим пополам и проводим то же рассмотрение, и т.д. В итоге получаем на очередном k -ом этапе или точный корень уравнения $f(x) = 0$, если $f(c_k)$ достаточно близко к нулю, либо достаточно малый отрезок $|b_k - a_k|$, любая точка которого (чаще всего средняя) может быть принята за искомое решение.

Хотя метод половинного деления не обладает высокой вычислительной эффективностью, с увеличением числа итераций он обеспечивает получение всё более точного приближённого значения корня и может использоваться для грубого нахождения корня данного уравнения.

2. **Метод хорд.** При решении уравнения $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, более естественно делить отрезок $[a, b]$ в отношении $f(a) : f(b)$, а не пополам, как в предыдущем методе. Такое деление можно произвести, если провести через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ хорду AB , стягивающую концы дуги графика функции $y = f(x)$, и в качестве

приближенного значения выбрать число c , являющееся абсциссой точки пересечения хорды AB с осью Ox (рис. 1). Тогда для определения значения c можно записать уравнение хорды как уравнение прямой, проходящей через точки A и B :

$$\frac{c-a}{b-c} = \frac{f(c)-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Отсюда, полагая $x=c$ и $y=0$, получим $c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$.

Значение c , принимаемое за первое приближение к искомому корню, обозначим через x_1 , т.е. $x_1 = c$. Эта точка разделит отрезок $[a, b]$ на два интервала $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$, в одном из которых находится искомый корень. Новый отрезок, отделяющий корень, можно определить, пользуясь следующими правилами:

- 1) точка x_1 находится со стороны вогнутости кривой $y=f(x)$;
- 2) приближенное значение x_1 лежит по ту сторону от истинного корня x^* , на которой функция $f(x)$ имеет знак, противоположный знаку её второй производной $f''(x)$, а знак $f'(x)$ совпадает со знаком $f''(x)$;

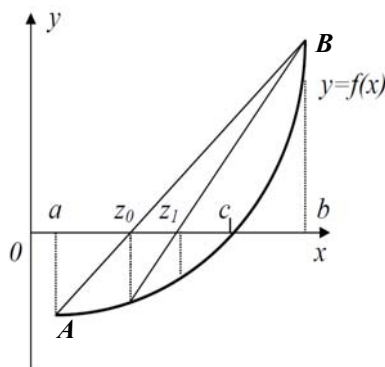


Рис. 1. Метод хорд

3) неподвижным остаётся тот конец интервала, а следовательно и хорды, для которого знак функции совпадает со знаком её второй производной $f''(x)$, а знак $f'(x)$ – нет.

Повторяя многократно описанную процедуру построения хорды, получим последовательность значений $x_2, x_3, \dots, x_k, \dots$, которая будет стремиться к истинному корню x^* . При этом для вычисления значений x_k можно пользоваться следующими итерационными формулами:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{b-x_k}{f(b)-f(x_k)}, \text{ если } f'(x)f''(x) > 0 \text{ или } f(b)f''(x) > 0;$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k-a}{f(x_k)-f(a)}, \text{ если } f'(x)f''(x) < 0 \text{ или } f(a)f''(x) > 0.$$

Процедура вычисления корня уравнения $f(x) = 0$ прекращается, когда оценка полученного приближения x_k удовлетворяет заданной точности. Для упрощения вычислений обычно задают некоторое, достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и прекращают вычисления, когда разность между двумя последующими приближениями уменьшается меньше δ , т.е. $|x_{k+1} - x_k| \leq \delta$. Число x_{k+1} принимают за приближённое значение корня x^* .

3. При использовании студентом **метода касательных (Ньютона)** за приближённое решение принимается точка пересечения касательной, проведённой к графику функции $y=f(x)$ с осью Ox , а итерационная последовательность имеет вид

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) / f'(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Необходимо знать, что эта последовательность сходится к единственному на отрезке $[a, b]$ решению x^* уравнения $f(x) = 0$, если $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$, а производные $f'(x)$, $f''(x)$ сохраняют знак на $[a, b]$.

Для оценки погрешности k -го приближения корня можно воспользоваться неравенством

$$|x^* - x_k| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_k - x_{k-1}|^2,$$

где M_2 – наибольшее значение модуля второй производной $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$; m_1 – наименьшее значение модуля первой производной $|f'(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Следовательно, если необходимо найти корень с точностью ε , итерационный процесс можно прекращать, когда $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon = \sqrt{2m_1\varepsilon/M_2}$. Следует помнить, что метод касательных (Ньютона) эффективен, если известно хорошее начальное приближение для корня и в окрестности корня график функции имеет большую крутизну.

Для выбора начального приближения в данном методе можно пользоваться следующим неравенством:

$$f(x_0)f''(x_0) > 0.$$

4. При отыскании корней **комбинированным методом** необходимо вычислить $f''(x)$ на заданном отрезке. Если $f''(x) < 0$, то для расчётов используются формулы

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \quad \bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(\bar{x}_k)}(\bar{x}_k - x_k),$$

где x_k и \bar{x}_k – значения корня, соответственно, по недостатку и избытку.

Если $f''(x) \geq 0$ на заданном отрезке, тогда расчётные формулы имеют вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(\bar{x}_k) - f(x_k)}(\bar{x}_k - x_k), \quad \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \frac{f(\bar{x}_k)}{f'(\bar{x}_k)}.$$

Расчёты продолжаются до тех пор, пока не выполнится одно из условий:

$$|x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_{k+1}) - f(\bar{x}_{k+1})| \leq \varepsilon,$$

где ε – заданная точность.

5. **Метод секущих.** Один из недостатков метода Ньютона состоит в том, что, пользуясь им, приходится дифференцировать функцию $f(x)$.

Если нахождение производной затруднено, то можно воспользоваться некоторым приближением $f'(x)$, что и составляет основу метода секущих. Для этого производную, используемую в методе Ньютона заменяют разностью последовательных значений функции, отнесённой к разности значений аргумента:

$$f'(x_k) = \frac{df(x_k)}{dx_k} \approx \frac{\Delta f(x_k)}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

В результате получается следующая итерационная формула:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для выбора начального приближения x_0 можно пользоваться тем же правилом, что и в методе Ньютона, а значение x_1 определить как $x_1 = x_0 + h$, где h – некоторая малая величина.

В целом же схема метода секущих такая же, что и метода Ньютона. Геометрически метод секущих означает, что через рассматриваемую точку будет проводиться не касательная, а секущая.

6. **Метод простой итерации.** Рассмотрим уравнение $x = g(x)$. Это уравнение может быть получено из уравнения $f(x) = 0$ путём прибавления к обеим частям x и заменой $g(x) = x + f(x)$, либо каким-то другим способом. Пусть $[a, b]$ – отрезок, отделяющий корень x^* уравнения $f(x) = 0$, а следовательно, и равносильного ему уравнения $x = g(x)$.

Выберем произвольную точку x_0 , которую примем за грубое приближение корня, и подставим её в правую часть уравнения $x = g(x)$. Тогда получим некоторое число $x_1 = g(x_0)$.

По найденному значению x_1 определим вторую точку x_2 и т.д. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность чисел

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Если полученная таким образом последовательность x_k сходящаяся, т.е. существует предел $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, то она сходится к корню x^* , и за конечное число итераций можно получить приближённое значение корня x^* с любой степенью точности.

Построим на плоскости x_0y графики функций $y = x$ и $y = g(x)$. Каждый действительный корень x^* уравнения $x = g(x)$ является абсциссой точки пересечения (рис. 2) кривой $y = g(x)$ с прямой $y = x$.

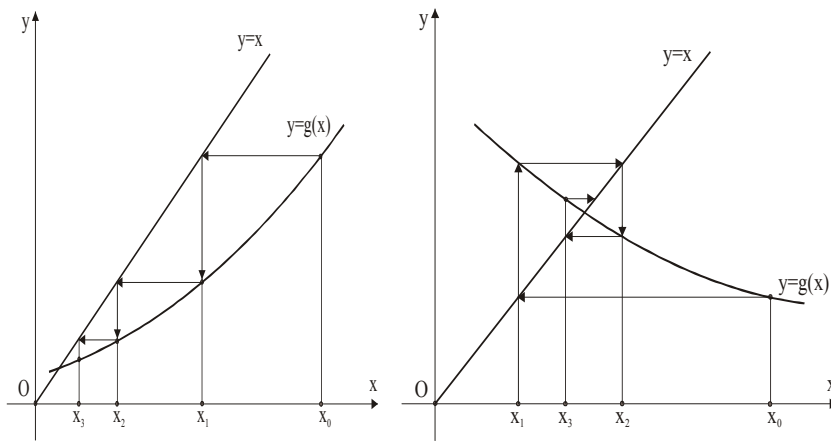


Рис. 2. Графическая иллюстрация метода простой итерации

Однако процесс итерации сходится не всегда. Условием сходимости метода простой итерации является неравенство $|g'(x)| \leq q < 1$.

Поэтому в общем случае процесс итерации следует продолжить до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_k и x_{k+1} не будет обеспечено выполнение неравенства

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon,$$

где ε – заданная предельная абсолютная погрешность корня x^* и $|g'(x)| \leq q$.

7. Модифицированный метод Ньютона. В данном методе делается допущение, что $f'(x_k) \approx f'(x_0)$. Тогда для поиска приближённого значения корня пользуются следующей формулой:

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) / f'(x_0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Выбор начального приближения, алгоритм и критерий окончания поиска в данном методе такие же что и в обычном методе Ньютона.

Лабораторная работа 2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи

Решить систему линейных алгебраических уравнений вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ – квадратная матрица порядка m , $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}^T$ – вектор-столбец правых частей системы. По найденному решению получить вектор невязки правой части системы.

Порядок выполнения

1. Разработать алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений, составить блок-схему и дать её описание.
2. Составить и отладить программу решения системы линейных алгебраических уравнений, оформить её в виде описания процедуры.
3. В качестве результатов выдать на печать решение системы, вектор невязки и количество итераций (для итерационных методов).

Варианты заданий

Численный метод, матрица **A** и вектор **b** определяются вариантом задания, состоящим из трёх цифр: первая определяет численный метод (табл. 1); вторая – матрицу **A** (табл. 2); третья – вектор **b** (табл. 2).

Таблица 1

Первая цифра варианта	Численный метод решения системы уравнений
1	Метод исключения Гаусса
2	Метод Гаусса с выбором главного элемента
3	Метод ортогонализации
4	Метод простой итерации
5	Метод Гаусса–Зейделя
6	Метод Халецкого

Таблица 2

Вторая цифра варианта	Элементы матрицы A					Элементы вектора b		
						Третья цифра варианта		
	1	2	3	1	2	3		
1	0,45	0,03	-0,01	0,02	-0,111	-0,275	-1,784	2,491
	0,02	0,375	-0,01	-0,01	0	-0,78	0,68	1,275
	0	0,07	0,44	0	0,113	1,745	1,032	-0,783
	-0,03	0,015	-0,02	0,41	-0,084	-2,18	-1,056	0,429
	0,02	0,01	0	0	0,29	1,45	1,12	-0,16
2	0,38	-0,05	0,01	0,02	0,07	-2,14	0,75	2,32
	0,052	0,595	0	-0,04	0,04	1,833	-0,858	2,544
	0,03	0	0,478	-0,14	0,08	1,736	3,16	-3,238
	-0,06	1,26	0	0,47	-0,02	-1,242	-1,802	1,534
	0,25	0	0,09	0,01	0,56	1,44	2,91	0,12
3	0,405	0,05	0,04	0	0,09	-1,475	1,065	1,77
	-	0,53	0,073	0,11	-0,06	2,281	0,975	-0,53
	0,061	-0,036	0,38	0,03	0,02	0,296	-1,312	-0,625
	0,07	0	0,066	0,58	0,23	0,492	1,096	-2,772
	-0,05	0,081	-0,05	0	0,41	1,454	-0,048	1,001
4	0,43	0,045	-0,02	0,03	-0,02	0,475	2,56	0,78
	0,12	0,377	0,02	0	-0,01	-0,86	2,77	-0,38
	0,01	0,032	0,356	-0,02	0,05	1,718	-0,916	1,91
	0,12	-0,11	0	0,49	0,112	0,864	0,808	-1,464
	-0,05	0	0,025	-0,01	0,294	2,068	-0,639	2,362
5	0,49	0	-0,128	0,09	0,15	0,964	1,564	2,332
	-0,03	0,32	0	-0,061	0,02	1,279	-1,733	-2,261
	0,01	-0,09	0,58	0,011	0,035	-1,799	1,393	-1,484
	0,03	0	-0,073	0,58	0	-4,971	1,744	0,932
	0,02	-0,03	0,145	-0,012	0,42	2,153	-2,046	1,758
6	0,51	-0,074	0,01	0,13	0,09	0,708	-0,214	2,866
	0,08	0,3	-0,036	0	0,05	2,578	1,866	0,842
	0,15	0	0,42	0,06	-0,07	-0,19	0,18	-0,75
	0,19	0,023	0,06	0,438	0	1,64	-3,258	-1,527
	0,05	-0,07	0,023	0	0,36	-2,229	2,762	1,164

Методические указания

1. Для построения алгоритма решения системы линейных алгебраических уравнений используется один из известных методов. При использовании **метода Гаусса** рекомендуется исходную систему $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ записать в виде

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = a_{i,m+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

где $\mathbf{b} = (a_{1,m+1}; a_{2,m+1}; \dots; a_{n,m+1})^T$. При этом систему (1) последовательным исключением неизвестных необходимо привести к треугольному виду:

$$x_i + \sum_{j=i+1}^m a_{ij}^{(i)} x_j = a_{i,m+1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

из которой затем последовательно находятся $x_k, k = m, \dots, 1$.

В **методе Гаусса с выбором главного элемента** при приведении системы к треугольному виду рекомендуется на очередном шаге исключать не следующую по порядку неизвестную, а ту, коэффициент перед которой будет наибольшим по модулю (главный элемент). Главный элемент может выделяться как по строкам, так и по столбцам.

2. При использовании **метода Халецкого** система (1) приводится к треугольному виду (2). Для этого необходимо воспользоваться представлением матрицы \mathbf{A} в виде произведения $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, где \mathbf{L} – нижняя, \mathbf{U} – верхняя треугольные матрицы, причём диагональные элементы матрицы \mathbf{U} равны единице.

Элементы этих матриц вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$l_{i,1} = a_{i,1}; \quad l_{i,k} = a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j}u_{j,k}, \quad k \leq i; \quad (3)$$

$$u_{1,k} = a_{1,k}/l_{1,1} \quad u_{i,k} = \left(a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j}u_{j,k} \right) / l_{i,i}, \quad k > i. \quad (4)$$

Здесь и далее в этом методе считается, что если верхний предел суммирования меньше нижнего, то вся сумма равна нулю.

Эти вычисления необходимо проводить последовательно для совокупностей $(i, k) = (1, 1), \dots, (1, m), (2, 1), \dots, (2, m), \dots, (m, 1), \dots, (m, m)$.

После разложения матрицы \mathbf{A} решение исходной системы сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}; \quad \mathbf{Ux} = \mathbf{y}, \quad (5)$$

где компоненты вектора \mathbf{y} могут быть вычислены по формулам:

$$y_1 = b_1 / l_{1,1}; \quad y_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}y_j \right) / l_{i,i}, \quad i > 1.$$

Значения x_i – решение системы $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ можно найти из соотношений

$$x_m = y_m; \quad x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m u_{i,j}x_j, \quad i < n.$$

Для осуществления вычислений по формулам (3), (4) необходимо и достаточно выполнение условия $\det \mathbf{A}_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, m$, где \mathbf{A}_k – матрица главного минора k -го порядка матрицы \mathbf{A} .

3. При использовании **метода ортогонализации** исходную систему уравнений необходимо записать в виде

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m + a_{1,m+1} &= 0 \\ \dots & \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,m}x_m + a_{m,m+1} &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{b} = (-a_{1,m+1}, \dots, -a_{m,m+1})^T$.

Или иначе: $(\mathbf{a}_1, \mathbf{y}) = 0, \dots, (\mathbf{a}_m, \mathbf{y}) = 0$; $\mathbf{a}_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,m+1})$; $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_m, 1)$. Отсюда следует, что решение исходной системы равносильно нахождению вектора \mathbf{y} с последней компонентой, равной единице, ортогонального к векторам $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, причём если положить $\mathbf{a}_{m+1} = (0, \dots, 0, 1)$, то векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m+1}$ линейно независимы.

Таким образом, для получения решения необходимо с помощью алгоритма последовательной ортогонализации с нормировкой $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ систему векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m+1}$ привести к ортонормированной системе векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{m+1}$, где

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{a}_k, \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i; \quad \mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}, \quad k = 1, 2, \dots, m+1;$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}; \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2}.$$

Полученный вектор $\mathbf{u}_{m+1} = (z_1, \dots, z_m)$ ортогонален ко всем векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, причём $z_{m+1} \neq 0$. Следовательно, $\mathbf{y} = (z_1/z_{m+1}, \dots, z_m/z_{m+1}, 1)$ – решение исходной системы. Нужно отметить, что метод ортогонализации применим для любой невырожденной матрицы \mathbf{A} .

4. В случае решения системы линейных алгебраических уравнений методом **простой итерации**, её следует привести к виду

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{g}. \quad (6)$$

Это можно сделать, например, так: $\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{D}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$. Если $\det \mathbf{D} \neq 0$, то эта система эквивалентна системе (1); если в качестве \mathbf{D} взять единичную матрицу, то $\mathbf{c} = \mathbf{E} - \mathbf{A}$ и $\mathbf{g} = \mathbf{b}$.

Решение системы (6) находится как предел последовательности \mathbf{x}^n , получающейся из рекуррентных соотношений

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{c}\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{g},$$

при некотором начальном приближении $\mathbf{x}^{(0)}$. Заданная точность считается достигнутой, если $\|\mathbf{z}\| \leq \varepsilon$, где $\mathbf{z} = \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}$. В качестве норм векторов рекомендуется брать следующие:

$$\|\mathbf{z}\| = \max_{1 \leq j \leq m} |z_j|; \quad \|\mathbf{z}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m |z_j|^2}; \quad \|\mathbf{z}\| = \sum_{j=1}^m |z_j|.$$

Следует помнить, что метод простой итерации сходится при любом начальном приближении $\mathbf{x}^{(0)}$, в качестве которого можно, например, взять \mathbf{g} , если $\|\mathbf{c}\| \leq 1$, где $\|\mathbf{c}\| = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |c_{i,j}|$.

5. При использовании для решения СЛАУ **метода Гаусса-Зейделя** компоненты решения исходной системы (6) последовательно уточняются, причём при вычислении $k+1$ -го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $k+1$ -е приближения неизвестных x_1, x_2, \dots, x_{i-1} .

Для вычисления могут использоваться формулы:

$$x_i^{k+1} = g_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^m c_{ij} x_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Условия сходимости данного метода схожи с аналогичными условиями метода простой итерации.

6. При численном решении СЛАУ получается приближённое решение. Поэтому при подстановке найденного решения в уравнения системы вместо заданного вектора правой части \mathbf{b} получится другой вектор $\tilde{\mathbf{b}}$. В связи с этим необходимо определить меру удовлетворения системы найденным решением, в качестве которой рекомендуется принимать вектор $(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}})$, называемый вектором невязки.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи

Для $n+1$ точки x_0, x_1, \dots, x_n , называемых узлами интерполяции, и значений некоторой функции $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, требуется построить интерполяционный полином $P_n(x)$ степени не выше n , проходящий через узлы интерполяции, т.е.

$$P_n(x_0) = y_0; \quad P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n,$$

и вычислить с помощью $P_n(x)$ значения функций в заданных точках $x_j, j = 1, 2, \dots, m$.

Порядок выполнения

1. Разработать алгоритм интерполяции функций, составить его блок-схему и дать её описание.
2. Составить и отладить программу интерполяции функций. Оформить её в виде описания процедуры.
3. В качестве результатов выдать на печать значения $x_j, f(x_j); P_n(x_j), j = 1, 2, \dots, m$ в табличной форме.

Варианты задания

Вариант задания состоит из двух чисел (например: 4,12): первое означает метод интерполяции (табл. 1); второе – значения узлов интерполяции x_i , функции $y_i = f(x_i)$ (табл. 2) и точек x_j , в которых следует вычислять значения функции.

Таблица 1

Первое число варианта	Интерполяция функции с помощью многочлена (формулы)
1	Лагранжа
2	Первая формула Ньютона (интерполирование вперёд)
3	Вторая формула Ньютона (интерполирование назад)
4	Первая формула Гаусса
5	Вторая формула Гаусса
6	Бесселя
7	Стирлинга
8	В-сплайнов первого и третьего порядка

Таблица 2

Второе число варианта	x_i	$y_i = f(x_i)$	x_j	Второе число варианта	x_i	$y_i = f(x_i)$	x_j
1	0,43	1,63597	0,702	2	0,02	1,02316	0,102
	0,48	1,73234	0,512		0,08	1,09590	0,114
	0,55	1,87686	0,645		0,12	1,14725	0,125
	0,62	2,03345	0,736		0,17	1,21483	0,203
	0,70	2,22846	0,608		0,23	1,30120	0,154
	0,75	2,35973			0,30	1,40976	
3	0,41	2,57418	0,616	4	0,11	9,05421	0,314
	0,46	2,32513	0,478		0,15	6,61659	0,235
	0,52	2,09336	0,665		0,21	4,69170	0,332
	0,60	1,86203	0,537		0,29	3,35106	0,275
	0,65	1,74926	0,673		0,35	2,73951	0,186
	0,72	1,62098			0,40	2,36522	
5	1,415	0,888551	1,4161	6	0,101	1,26183	0,1035
	1,420	0,889599	1,4625		0,106	1,27644	0,1492
	1,425	0,890637	1,4135		0,111	1,29122	0,0960
	1,430	0,891667	1,470		0,121	1,32130	0,1530
	1,435	0,892687	1,41		0,126	1,33660	0,1074
	1,440	0,893698			0,131	1,35207	
	1,445	0,894700			0,136	1,36773	
	1,450	0,895693			0,141	1,38357	
	1,455	0,896677			0,146	1,39959	

	1,460 1,465	0,897653 0,898619			0,151	1,41597	
7	0,15 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40 0,45 0,50 0,55 0,60 0,65 0,70 0,75	0,860708 0,818731 0,778801 0,740818 0,704688 0,670320 0,637628 0,606531 0,576950 0,548812 0,522046 0,496585 0,472367	0,1535 0,7333 0,1000 0,7540 0,6730	8	3,50 3,55 3,60 3,65 3,70 3,75 3,80 3,85 3,90 3,95 4,00 4,05 4,10	33,1154 34,8138 36,5982 38,4747 40,4473 42,5211 44,7012 46,9931 49,4024 51,9354 54,5982 57,3975 60,3403	3,522 4,176 3,475 4,250 3,575
9	0,150 0,155 0,160 0,165 0,170 0,175 0,180	6,61659 6,39986 6,19658 6,00551 5,82558 5,65583 5,49543		10	1,375 1,380 1,385 1,390 1,395	5,04192 5,17744 5,32016 5,47069 5,62968	
11	0,01 0,06 0,11 0,16 0,21 0,26 0,31 0,36 0,41 0,46 0,51 0,56	0,991824 0,951935 0,913650 0,876905 0,841638 0,807789 0,775301 0,744120 0,714193 0,685470 0,657902 0,631442	0,070 0,170 0,330 0,450 0,468	12	0,45 0,46 0,47 0,48 0,49 0,50 0,51 0,52 0,53 0,54 0,55 0,56	20,1946 19,6133 18,9425 18,1746 17,3010 16,3123 15,1984 13,9484 12,5508 10,9937 9,2647 7,3510	0,463 0,487 0,505 0,536 0,542
13	1,375 1,380 1,385 1,390 1,395 1,400	5,04192 5,17744 5,32016 5,47069 5,62968 5,79788	1,3832 1,3926 1,3862 1,3866 1,3934	14	0,180 0,185 0,190 0,195 0,200 0,205	5,61543 5,46693 5,32634 5,19304 5,06649 4,94619	0,1838 0,1875 0,1944 0,1976 0,2038
15	0,593 0,598 0,605 0,613 0,619 0,627 0,632	0,532050 0,535625 0,540598 0,546235 0,550431 0,555983 0,559428	0,608 0,615 0,622 0,594 0,628	16	0,298 0,303 0,310 0,317 0,323 0,330 0,339	3,25578 3,17639 3,12180 3,04819 2,98755 2,91950 2,83598	0,308 0,314 0,325 0,321 0,336
17	1,50 1,55 1,60 1,65 1,70 1,75 1,80 1,85 1,90 1,95 2,00 2,05 2,10	15,132 17,422 20,393 23,994 28,160 32,812 37,857 43,189 48,689 54,225 59,653 64,817 69,550	1,60+ +0,006n 1,83+ +0,003n 1,725+ +0,002n 2,00- -0,013n	18	0,698 0,706 0,714 0,727 0,736 0,747 0,760 0,769 0,782	2,22336 2,24382 2,26446 2,29841 2,32221 2,35164 2,38690 2,41162 2,44777	0,720 0,740 0,705 0,750 0,765 0,755

Методические указания

1. При интерполировании с помощью **многочлена Лагранжа** пользуются следующей формулой:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} =$$
$$= \sum_{i=0}^n \left[y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right].$$

Дать оценку погрешности интерполяции можно с использованием соотношения для вычисления остаточного члена:

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n).$$

2. В случае применения интерполяционной **формулы Ньютона** необходимо выбрать требуемую разновидность формулы.

Первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов (интерполирование вперед)

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + q(q-1)\Delta^2 y_0 / 2! + \dots + q(q-1)\dots(q-n+1)\Delta^n y_0 / n! =$$
$$= y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (q-j)}{i!} \Delta^i y_0,$$

где $q = (x-x_0)/h$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $\Delta^i y_0$ – конечная разность i -го порядка, причём $\Delta^i y_0 = \Delta^{i-1} y_1 - \Delta^{i-1} y_0$.

Остаточный член $R_n(x)$ этой формулы имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} q(q-1)\dots(q-n) f^{(n+1)}(\xi) / (n+1)!,$$

где ξ – некоторая внутренняя точка промежутка, содержащего все узлы x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ и точку x .

Вторая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов (интерполирование назад)

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + q(q+1)\Delta^2 y_{n-2} / 2! + \dots + q(q+1)\dots(q+n-1)\Delta^n y_0 / n! =$$
$$= y_n + \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (q+j)}{i!} \Delta^i y_{n-i},$$

где $q = (x-x_n)/h$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $\Delta^i y$ – конечные разности i -го порядка, остаточный член

$$R_n(x) = h^{n+1} q(q+1)\dots(q+n) f^{(n+1)}(\xi) / (n+1)!.$$

При вычислении конечных разностей, входящих в интерполяционную формулу Ньютона, рекомендуется составить таблицу конечных разностей (табл. 3).

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$		
x_4	y_4	Δy_4			
x_5	y_5				

Нужно отметить, что в формуле интерполирования вперед используется верхняя горизонтальная строка таблицы разностей, а в формуле интерполирования назад – самая нижняя наклонная строка (элементы этой строки подчеркнуты).

3. В случае, если заданы неравностоящие узлы интерполяции, то необходимо использовать интерполяционную формулу Ньютона следующего вида:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\delta(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\delta(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\delta(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

где $\delta(x_0, x_1, \dots, x_i) = \frac{\delta(x_1, x_2, \dots, x_i) - \delta(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})}{x_i - x_0}$ – разделённая разность i -го порядка.

4. Интерполяционная **формула Гаусса** записывается для случая равноотстоящих узлов и также имеет две формы. Первая формула Гаусса:

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} = y_0 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\prod_{j=-i}^{i-1} (q+j)}{(2i-1)!} \Delta^{2i-1} y_{-(i-1)} + \frac{\prod_{j=-i}^{i-1} (q+j)}{(2i)!} \Delta^{2i} y_{-i} \right],$$

где $q = (x - x_0) / h$.

Разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}$, содержащиеся в первой интерполяционной формуле Гаусса, образуют нижнюю ломаную линию в табл. 4.

Вторая интерполяционная формула Гаусса записывается в виде

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} =$$

$$= y_0 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\prod_{j=-(i-1)}^{i-1} (q+j)}{(2i-1)!} \Delta^{2i-1} y_{-i} + \frac{\prod_{j=-(i-1)}^i (q+j)}{(2i)!} \Delta^{2i} y_{-i} \right].$$

Разности $\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}$ образуют верхнюю ломаную линию в табл. 4.

Таблица 4

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
x_{-3}	y_{-3}						
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-3}$				
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-3}$			
x_0	y_0	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-3}$	$\Delta^5 y_{-3}$	
x_1	y_1	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-2}$	$\Delta^5 y_{-2}$	$\Delta^6 y_{-3}$
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_{-1}$		
x_3	y_3	Δy_2					

Остаточный член для обеих формул Гаусса будет равен

$$R(x) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-n^2),$$

где ξ – некоторое промежуточное значение, находящееся между точками $x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_0, x_1, x_n$ и точкой x .

5. Интерполяционная **формула Стирлинга** получается из первой и второй интерполяционных формул Гаусса как их среднее арифметическое. Она имеет вид

$$P(x) = y_0 + q \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1^2)q}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!} \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} +$$

$$\dots + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2)\dots(q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n},$$

где $q = (x - x_0) / h$.

Погрешность интерполяционной формулы Стирлинга может быть определена в соответствии с выражением для остаточного члена формулы Гаусса. Следует помнить, что эта формула применяется для интерполирования в середине таблицы центральных разностей при значениях q , близких к нулю. Практически её используют при $|q| \leq 0,25$.

6. Интерполяционная **формула Бесселя** также, как и формула Стирлинга, получается путём некоторых преобразований из формул Гаусса. Она имеет следующий вид:

$$P(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (q-0,5)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{(q-0,5)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} +$$

$$+ \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!} \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots \\
& + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!} \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\
& + \frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n},
\end{aligned}$$

где $q = (x - x_0) / h$.

Остаточный член интерполяционной формулы Бесселя, определяющий погрешность интерполяции, вычисляется по формуле

$$R(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^n-n^2)(q-(n+1)),$$

где $\xi \in [x_0 - nh, x_0 + (n+1)h]$.

7. Интерполирование одним из приведённых выше многочленов на всём отрезке $[a, b]$ с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводит к плохому приближению, что объясняется сильным накоплением погрешностей в процессе вычислений. Для избежания этого поступают следующим образом: весь отрезок $[a, b]$ разбивают на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют функцию $y = f(x)$ многочленом невысокой степени. Одним из способов такого интерполирования функции $y = f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ является интерполирование с помощью сплайн-функций (сплайнов).

Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке $[a, b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

Сплайн первого порядка (линейный сплайн)

$$S_1(x) = \sum_{i=k}^{k+1} f_i S_{i,1}(x), \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

где $S_{k,1}(x) = (x_{k+1} - x) / h$, $S_{k+1,1}(x) = (x - x_k) / h$.

Для построения сплайнов третьего порядка (кубического сплайна) существует множество способов, позволяющих получить кубические сплайны с различным дефектом. Одними из наиболее простых способов являются построение кубических сплайнов с использованием наклонов сплайна либо следующее выражение:

$$S_3(x) = \frac{2}{3} \sum_{i=k-1}^{k+2} f_i S_{i,3}(x), \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

где $S_{k-1,3}(x) = (x_{k+1} - x)^3 / 4h^3$,

$$S_{k,3}(x) = [(x_{k+2} - x)^3 - 4(x_{k+1} - x)^3] / 4h^3,$$

$$S_{k+1,3}(x) = [(x - x_{k-1})^3 - 4(x - x_k)^3] / 4h^3,$$

$$S_{k+2,3}(x) = (x - x_k)^3 / 4h^3.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Постановка задачи

Вычислить с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ значение $u = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x) dx$, а также получить таблицу значений функции

$F(t) = \int_{a_2}^{b_2} f_2(x, t) dx$, вычисленных с точностью $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ в точках $t_i = c + ih$, $i = 0, 1, \dots, m$, где $h = (d - c)/m$. Функция $f_2(x, t)$

представляется выражением вида

$$f_2(x, t) = \varphi(z)\psi(x) = \varphi\left(\frac{t}{1+x^2} + \mu x\right)\psi(x).$$

Порядок выполнения

1. Изучить методы приближённого вычисления значения интеграла, составить блок-схему алгоритма и дать её описание.
2. Разработать и отладить программу вычисления определённого интеграла, оформив вычисление значений функций $f_1(x)$ и $f_2(x, t)$.
3. В качестве результата вывести на печать значение u , последовательность значений t_i и $F(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Построить график функции $F(t)$.

Варианты заданий

Вариант задания состоит из шести чисел (например: 4, 19, 13, 3, 4): первое означает квадратурную формулу (табл. 1); второе – функцию $f_1(x)$, a_1 , b_1 (табл. 2); третье – функцию $\varphi(z)$ (табл. 3); четвёртое – функцию $\psi(x)$ (табл. 4); пятое – коэффициент μ ; шестое – значения a_2, b_2, c, d, m (табл. 5).

Алгоритм вычисления значения определённого интеграла с задаваемой точностью должен быть оформлен в виде подпрограммы.

Таблица 1

Первое число варианта	Квадратурная формула
1	Прямоугольников
2	Трапеций
3	Симпсона
4	Ньютона
5	Гаусса
6	Монте-Карло

Таблица 2

Второе число варианта	$f_1(x)$	a_1	b_1	Второе число варианта	$f_1(x)$	a_1	b_1
1	$\sqrt{e^x - 1}$	0,1	2	14	$(x+1)\sqrt{x^2 + 1}$	0	3/4
2	$e^x \sin x$	0	π	15	$\sqrt{x} \sin x$	0	1
3	$(x^2 - 1) \cdot 10^{-2x}$	0	1	16	$1/(x + \sqrt{\cos x})$	0	$\pi/2$
4	$x\sqrt[3]{1+x}$	1	9	17	$1/(x + \sqrt{\ln x})$	2	3
5	$1/(3 + 2 \cos x)$	0	π	18	$e^{-5x^3 + x + 0,5}$	0	1
6	$1/(x \ln^2 x)$	2	3	19	$\sqrt{1 - 0,5 \sin^2 x}$	0	$\pi/2$
7	$\frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$	0,2	0,3	20	$\frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}$	0	1
8	$x^3 e^{2x}$	0	1	21	$\frac{\sqrt{0,7 + x^2}}{1 + \cos 0,7x}$	0	1
9	$\operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$	0	$\pi/4$	22	$\sqrt{\frac{1 - 0,75x^2}{1 - x^2}}$	0	1/2
10	$x \operatorname{arctg} x$	0	$\sqrt{3}$	23	$\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{x}$	0	1/2
11	$1/(1 + \sqrt{x})$	0	4	24	$\frac{e^{-x^2} \sin 0,8x}{0,8 + x^2}$	0	1
12	$\frac{1}{5 - 3 \cos x}$	0	2π	25	$\frac{1}{1 + \sin^3 x}$	0	π
13	$\frac{2^x}{1 - 4^x}$	0	3/4				

Таблица 3

Третье число варианта	$\varphi(z)$	Третье число варианта	$\varphi(z)$	Третье число варианта	$\varphi(z)$
1	$\sin z$	6	$\operatorname{sh} z$	11	$\operatorname{th}^2 z$
2	$\sqrt{2 - \cos z}$	7	$\sqrt{1 + \sin^2 z}$	12	$\ln(1 + z^2)$
3	$\cos z$	8	$\operatorname{ch} z$	13	$\sqrt{\operatorname{ch} z}$
4	e^{-z}	9	$\operatorname{th} z$	14	$\sqrt{1 + e^{2z}}$
5	$\sqrt{\pi - \operatorname{arctg} z}$	10	$\operatorname{arctg} z$	15	$\sqrt{2 \operatorname{ch} z - 1}$

Таблица 4

Четвёртое число варианта	$\psi(x)$	Четвёртое число варианта	$\psi(x)$	Четвёртое число варианта	$\psi(x)$
1	$\frac{1-x^2}{1+x^2}$	3	$\frac{x-1}{x^2+x+1}$	5	$\frac{2-3x}{4+x^2}$
2	$\frac{2+x}{x^2-x+1}$	4	$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}$	6	$\frac{x+1}{x^2+x+1}$

Таблица 5

Пятое число варианта	1	2	3	4
μ	-0,01	-0,05	0,05	0,01

Таблица 6

Шестое число варианта	a_2	b_2	c	d	m
1	0	$\pi/2$	1/2	3/2	10
2	0	1	1	2	20
3	$\pi/4$	$3\pi/4$	1	2,5	15
4	1/2	3/2	2	3	10

Методические указания

1. Для вычисления значения определённого интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$ рекомендуется использовать квадратурную формулу вида

$$I = \sum_{i=0}^N A_i f_i + R,$$

где $f_i = f(x_i)$, а x_i и A_i определяются типом квадратурной формулы; R – остаточный член формулы, определяющий погрешность вычисления интегралов.

1) **Формулы прямоугольников.** Различают формулы левых, правых и центральных прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h(f_0 + f_1 + \dots + f_{N-1}),$$

где $f_i = f(x_i)$, $h = (b-a)/N$.

В формуле левых прямоугольников $x_i = a + ih$, правых – $x_i = a + (i+1)h$, центральных – $x_i = a + (i+1/2)h$.

2) **Формула трапеций:**

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N \right),$$

где $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/N$.

3) **Формула парабол (Симпсона):**

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N),$$

где $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, $h = (b - a) / N$, N – кратно двум.

4) Формула Ньютона («правило 3/8»):

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{N-3} + 3f_{N-2} + 3f_{N-1} + f_N),$$

где $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, $h = (b - a) / N$, N – кратно трём.

5) Формула Гаусса:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) + R_n(f),$$

где A_i и t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ подбираются так, чтобы формула была точной для всех многочленов наивысшей возможной степени N . Коэффициенты квадратурной формулы Гаусса выбрать из табл. 6.

Таблица 7

n	t_i	A_i
1	$t_1 = 0$	$A_1 = 2$
2	$-t_1 = t_2 = 0,57735027$	$A_1 = A_2 = 1$
3	$-t_1 = t_3 = 0,77459667$ $t_2 = 0$	$A_1 = A_3 = 5/9$ $A_2 = 8/9$
4	$-t_1 = t_4 = 0,86113631$ $-t_2 = t_3 = 0,33998104$	$A_1 = A_4 = 0,34785484$ $A_2 = A_3 = 0,65214516$
5	$-t_1 = t_5 = 0,90617985$ $-t_2 = t_4 = 0,53846931$ $t_3 = 0$	$A_1 = A_5 = 0,23692688$ $A_2 = A_4 = 0,47862868$ $A_3 = 0,56888889$
6	$-t_1 = t_6 = 0,93246951$ $-t_2 = t_5 = 0,66120939$ $-t_3 = t_4 = 0,23861919$	$A_1 = A_6 = 0,17132450$ $A_2 = A_5 = 0,36076158$ $A_3 = A_4 = 0,46791394$
7	$-t_1 = t_7 = 0,94910791$ $-t_2 = t_6 = 0,74153119$ $-t_3 = t_5 = 0,40584515$ $t_4 = 0$	$A_1 = A_7 = 0,12948496$ $A_2 = A_6 = 0,27970540$ $A_3 = A_5 = 0,38183006$ $A_4 = 0,41795918$
8	$-t_1 = t_8 = 0,96028986$ $-t_2 = t_7 = 0,79666648$ $-t_3 = t_6 = 0,52553242$ $-t_4 = t_5 = 0,18343464$	$A_1 = A_8 = 0,10122854$ $A_2 = A_7 = 0,22238104$ $A_3 = A_6 = 0,31370664$ $A_4 = A_5 = 0,36268378$

При вычислении интеграла вида $\int_a^b f(x) dx$ следует сделать замену переменной $x = (b - a) / 2 + (b - a) t / 2$. Тогда формула Гаусса примет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f\left(\frac{b + a}{2} + \frac{b - a}{2} t_i\right).$$

6) Метод Монте-Карло:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{M} \sum_{i=1}^M f(a + (b - a) R_i),$$

где R_i – равномерно распределенное случайное число из диапазона $0 \dots 1$; M – количество вычислений подынтегральной функции (должно быть достаточно большим).

2. Для обеспечения требуемой точности при приближенном вычислении интеграла по квадратурной формуле нужно выбрать соответствующее значение шага h (или число шагов N , на которое делится отрезок интегрирования). Для этого можно воспользоваться существующими формулами для остаточных членов квадратурных формул, однако оценка значения соответствующей производной подынтегральной функции, входящей в формулу остаточного члена, нередко вызывает большие трудности. Кроме того эту оценку приходится делать для каждой новой подынтегральной функции.

На практике для достижения требуемой точности вычисления интеграла по квадратурной формуле часто используется метод последовательного удвоения шагов (двойной пересчёт), в соответствии с которым интеграл I вычисляется дважды: сначала при числе шагов, равном n , а затем при числе шагов, равном $2n$. Обозначив результаты вычислений через I_n и I_{2n} , соответственно, сравнивают их, проверяя выполнение неравенства $\Delta I = |I_n - I_{2n}| < \varepsilon$. Если неравенство выполняется, то приближенное значение интеграла найдено. В противном случае вычисления продолжают с увеличенным числом шагов. Таким образом, I_n вычисляется для последовательных значений $n = N_0, 2N_0, 4N_0$ и т.д., где N_0 – начальное число шагов. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения n будет получена погрешность $\Delta I < \varepsilon$.

3. Для получения эффективного алгоритма вычисления определённого интеграла следует учесть, что при использовании некоторых квадратурных формул при удвоении числа шагов нет необходимости заново вычислять значения подынтегральной функции во всех узлах сетки, так как все узлы сетки, полученные при числе шагов, равном n , являются узлами сетки и при числе шагов, равном $2n$.

Лабораторная работа 5

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи

Дано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'(x) = f(x, y) = F(x) - g(x)y(x), \quad F(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ – определяются вариантом задания.

Требуется найти численное решение задачи Коши на заданном отрезке $[x_0, b]$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$:

- с автоматическим выбором шага при заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$ на каждом шаге;
- с постоянным шагом

$$h = (b - x_0) / N,$$

где N – число шагов, полученных в пункте а).

Порядок выполнения

- Найти решение поставленной задачи для своего варианта аналитическим методом.
- Разработать алгоритм решения задачи Коши одним из приближённых методов, составить блок-схему алгоритма и дать её описание.
- Вывести на печать в виде таблицы значения приближённых решений, полученных по каждому из способов а) и б).
- Вывести на печать в виде графика значения приближённого решения, полученного с постоянным шагом.

Варианты задания

Вариант задания состоит из четырёх цифр: первая означает метод решения (табл. 1); вторая – значения h_0, x_0, b, y_0 и функцию $g(x)$ (табл. 2); третья – функцию $\varphi(x)$ (табл. 3); четвёртая – функцию $\psi(x)$ (табл. 4).

Таблица 1

Первая цифра варианта	Метод решения
1	Первая модификация метода Эйлера
2	Вторая модификация метода Эйлера
3	Метод Рунге–Куты второго порядка
4	Метод Рунге–Куты третьего порядка
5	Метод Рунге–Куты четвертого порядка
6	Метод Эйлера–Коши с итерациями
7	Метод Адамса второго порядка
8	Метод Адамса третьего порядка
9	Метод Милна
10	Метод Хэмминга

Таблица 2

Вторая цифра варианта	h_0	x_0	b	y_0	$g(x)$
1	0,5	1	6	10	$2(x-2)$
2	0,5	-1	$2\pi-1$	8	$-\sin(x+1)$

Таблица 3

Третье число варианта	$\varphi(x)$	Третье число варианта	$\varphi(x)$	Третье число варианта	$\varphi(x)$
1	$e^{-(x+4)x}$	5	$(x+2)e^{-x^2}$	9	$\sin^2(0,6x)e^{-x^2+1,5x}$
2	e^{-x^2}	6	$e^{-x^2} \sin x$	10	$\sin(x+1)$
3	e^{-x^2+2x}	7	$e^{-x^2} \cos(0,8x)$	11	$e^{-\cos(x+1)}$
4	xe^{-x^2}	8	$\cos^2(x/2)e^{-x^2+3x}$	12	$(x+2)e^{-\cos(x+1)}$

Таблица 4

Четвёртое число варианта	$\psi(x)$	Четвёртое число варианта	$\psi(x)$	Четвёртое число варианта	$\psi(x)$
1	$e^{-2(2x+2)}$	5	e^{3x}	9	$e^{x-1,5}$
2	0,01	6	$1/\sqrt{2\pi}$	10	$\cos(x+1)/6$
3	e^x	7	e^{2x-3}	11	1/8
4	e^{-2x}	8	e^{3x-2}	12	$4\cos(x+1)$

Методические указания

1. Методы численного решения задачи Коши делятся на две большие группы: одношаговые методы (метод Эйлера и его модификации, семейство методов Рунге–Кутты) и многошаговые методы или методы прогноза и коррекции (методы Милна, Хэмминга, семейство методов Адамса и др.)

1) Первая модификация метода Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2});$$

где $x_{k+1/2} = x_k + h/2$; $y_{k+1/2} = y_k + hf(x_k, y_k)/2$.

2) Вторая модификация метода Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + (k_1 + k_2)/2,$$

где $k_1 = hf(x_k, y_k)$; $k_2 = hf(x_k + h, y_k + k_1)$;
 3) Метод Рунге–Кутты второго порядка

$$y_{k+1} = y_k + k_2,$$

где $k_1 = hf(x_k, y_k)$; $k_2 = hf(x_k + h/2, y_k + k_1/2)$.
 4) Метод Рунге–Кутты второго порядка

$$y_{k+1} = y_k + (k_1 + k_2)/4,$$

где $k_1 = hf(x_k, y_k)$, $k_2 = hf(x_k + 2h/3, y_k + 2k_1/3)$;
 5) Метод Рунге–Кутты третьего порядка

$$y_{k+1} = y_k + k_1/4 + 3k_3/4,$$

где $k_1 = hf(x_k, y_k)$; $k_2 = hf(x_k + h/3, y_k + k_1/3)$.

$$k_3 = hf(x_k + 2h/3, y_k + 2k_2/3);$$

6) Метод Рунге–Кутты третьего порядка

$$y_{k+1} = y_k + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6,$$

где $k_1 = hf(x_k, y_k)$; $k_2 = hf(x_k + h/2, y_k + k_1/2)$;

$$k_3 = hf(x_k + h, y_k - k_1 + 2k_2).$$

7) Метод Рунге–Кутты четвёртого порядка

$$y_{k+1} = y_k + (k_1 + 4k_3 + k_4)/6,$$

где $k_1 = hf(x_k, y_k)$; $k_2 = hf(x_k + h/4, y_k + k_1/4)$;

$$k_3 = hf(x_k + h/2, y_k + k_2/2); k_4 = hf(x_k + h, y_k + k_1 - 2k_2 + 2k_3).$$

8) Метод Рунге–Кутты четвёртого порядка

$$y_{k+1} = y_k + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6,$$

где $k_1 = hf(x_k, y_k)$; $k_2 = hf(x_k + h/2, y_k + k_1/2)$;

$$k_3 = hf(x_k + h/2, y_k + k_2/2); k_4 = hf(x_k + h, y_k + k_3);$$

9) Метод Эйлера–Коши с итерациями

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k);$$

$$y_{k+1}^{(S)} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(S-1)})],$$

где $y_{k+1}^{(S)}$ – S-е приближение для величины y_{k+1} .

10) Метод Милна

$$y_{k+1}^{(0)} = y_{k-3} + 4h[2f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 2f(x_{k-2}, y_{k-2})]/3;$$

$$y_{k+1}^{(S)} = y_{k-1} + \frac{h}{3} [4f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(S-1)}) + f(x_{k-1}, y_{k-1})].$$

11) Метод Хэмминга

$$y_{k+1}^{(0)} = y_{k-3} + 4h[2f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 2f(x_{k-2}, y_{k-2})]/3;$$

$$y_{k+1}^{(S)} = \frac{1}{8} [9y_k - y_{k-2} + 3h(2f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(S-1)}) - f(x_{k-1}, y_{k-1}))].$$

12) Метод Адамса второго порядка

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + \frac{h}{2} [3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})];$$

$$y_{k+1}^{(S)} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(S-1)})].$$

13) Метод Адамса третьего порядка

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + \frac{h}{12} [23f(x_k, y_k) - 16f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 5f(x_{k-2}, y_{k-2})];$$

$$y_{k+1}^{(S)} = y_k + \frac{h}{12} [8f(x_k, y_k) + 5f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(S-1)}) - f(x_{k-1}, y_{k-1})].$$

14) Метод Адамса четвёртого порядка

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + \frac{h}{24} [55f(x_k, y_k) - 59f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 37f(x_{k-2}, y_{k-2}) - 9f(x_{k-3}, y_{k-3})];$$

$$y_{k+1}^{(S)} = y_k + \frac{h}{24} [19f(x_k, y_k) + 9f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(S-1)}) - 5f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_{k-2}, y_{k-2})].$$

2. При интегрировании одношаговыми методами с автоматическим выбором шага рекомендуется использовать следующее правило выбора шага. В узле x_0 взять $h = h_0$, где h_0 – заданный начальный шаг, найти приближённые решения \tilde{y} и $\tilde{\tilde{y}}$, вычисленные одношаговым методом в точке $x+h$ с шагами h и $h/2$, соответственно. За абсолютную погрешность приближённого решения (в качестве которого выбирается $\tilde{\tilde{y}}$ как более точное), вычисленного одношаговым методом r -го

порядка принимается $\delta = \left| \frac{\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}}{2^r + 1} \right|$.

Если $\delta \geq \varepsilon$, то шаг необходимо уменьшить в два раза и вычисления повторить, начиная с узла x_0 . Если будет получено $\delta < \varepsilon$, то $\tilde{\tilde{y}}$ считается решением в узле $x_1 = x_0 + h$, полученным с заданной точностью на этом шаге.

Для получения решения в следующем узле x_2 необходимо проделать аналогичные вычисления, исходя из узла x_1 . При этом начальный шаг рекомендуется выбирать по шагу h , с которым было получено решение в узле x_1 , в зависимости от погрешности δ : если $\delta < \varepsilon/2^{r+1}$, то предыдущий шаг удваивается; в противном случае шаг не изменяется. Аналогично находится решение и в последующих узлах.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Постановка задачи

Определить тип экстремума функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а затем найти его (экстремум) заданным методом с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Порядок выполнения

1. Составить алгоритмы решения задачи минимизации функции одной переменной методом по варианту и оформить его в виде блок-схемы.
2. Подготовить программу, реализующую алгоритм из п.1.
3. Найти решение задачи выбранным методом с точностью $\varepsilon = 0,001$, данные из табл. 2. Результаты решения должны содержать последовательность a_k, b_k и значения x , полученные при решении задачи.
4. Построить на бумаге график целевой функции на отрезке $[a, b]$ и проиллюстрировать процесс нахождения решения задачи выбранным методом.

Варианты задания

Вариант задания состоит из двух цифр: первая означает метод одномерной оптимизации (табл. 1), вторая – функцию $f(x)$ и отрезок локализации минимума $[a, b]$ (табл. 2).

Таблица 1

Первая цифра варианта	Метод оптимизации
1	Метод локализации
2	Метод дихотомии
3	Метод «золотого» сечения
4	Метод Фибоначчи
5	Метод ДСК (Дэвиса, Свенна, Кэмпи)
6	Метод Пауэлла

Таблица 2

Вторая цифра варианта	$f(x)$	a	b
1	$1,35\cos(0,54x) + 0,78x^2 - 2,06$	-5	5
2	$0,87\sin(1,4x)e^{-0,89x} + 0,78x^2 - 2,06$	-3	3
3	$0,17x^3e^{-0,89x} + 3,79x^2 - 2,35$	-3	0
4	$0,67\sqrt{0,67x^2 + 8,93e^{1,89x}} + 6,59x^2 - 2,43$	-2	2
5	$3,65x^5e^{-1,98x^2} - 1,82x^2 + 3,82$	-2	2
6	$5,35\cos(1,54x) + 1,18x^2 + 3,12$	-5	0
7	$0,17x^3e^{-0,59x} + 3,79x^2 - 2,35$	-3,5	0
8	$0,04x^5e^{-0,08x^2} - 1,82x^2 + 3,82$	-3	2
9	$5,35\cos(1,54x) + 0,78x^2 - 2,06$	-1,5	1,5
10	$0,17x^3e^{-0,59x} + 4,45x^2 + 1,35$	-2	3

Методические указания

1. **Метод локализации.** Интервал $[a, b]$ разбивается на N равных частей. На границах всех интервалов, включая конечные точки интервала $[a, b]$, вычисляются значения функции $f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

Среди полученных значений $f(x_i)$ выбирается наилучшее, т.е. то, которое соответствует типу отыскиваемого экстремума. (Например, при отыскании минимума наилучшей будет точка x_2 (рис. 1)).

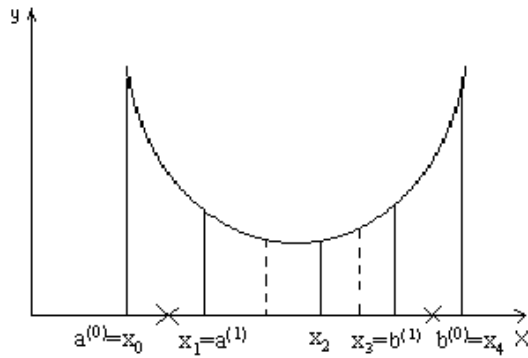


Рис. 1. Графическая иллюстрация метода локализации

Далее выбирается новый интервал локализации экстремума, состоящий из двух подынтервалов с наилучшей точкой посередине. (В нашем случае новый интервал будет равен $[x_1, x_3]$).

Применяя к новому интервалу тот же приём разбиения и вычисляя значение $f(x)$ на границах полученных подынтервалов, можно еще более сузить интервал локализации экстремума. Описанная процедура повторяется до тех пор, пока неравенство $|b^{(k)} - a^{(k)}| \leq \varepsilon$ не станет истинным, где ε –требуемая точность вычислений; k – номер итерации ($k = 0, 1, 2, \dots$). Тогда за точку экстремума можно принять среднюю точку интервала $[a^{(k)}, b^{(k)}]$:

$$x^* \approx \frac{b^{(k)} + a^{(k)}}{2}.$$

Очевидно, что наилучшие результаты поиска будут достигнуты в том случае, если интервал локализации разбивается на четыре интервала, $N = 4$.

В этом случае для каждого разбиения нужно вычислять значения целевой функции только дважды.

2. При использовании для определения экстремума **метода дихотомии** на интервале локализации экстремума $[a, b]$ определяются две точки: $x_1 = (a + b)/2 - \delta/2$ и $x_2 = (a + b)/2 + \delta/2$, где $\delta > 0$ – некоторая константа, называемая параметром метода. Обычно δ определяется количеством верных десятичных знаков при задании аргумента. Как правило, в практических расчётах величину δ принимают равной величине точности ε , с которой ищется решение экстремальной задачи, т.е. $\delta \approx \varepsilon$.

В точках x_1 и x_2 вычисляются значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$, которые сравниваются между собой. Если окажется, что $f(x_1) \geq f(x_2)$, то новый интервал локализации экстремума будет равен $[x_1, b]$. В противном случае, т.е. если $f(x_1) \leq f(x_2)$, интервал локализации сузится до $[a, x_2]$ (рис. 2).

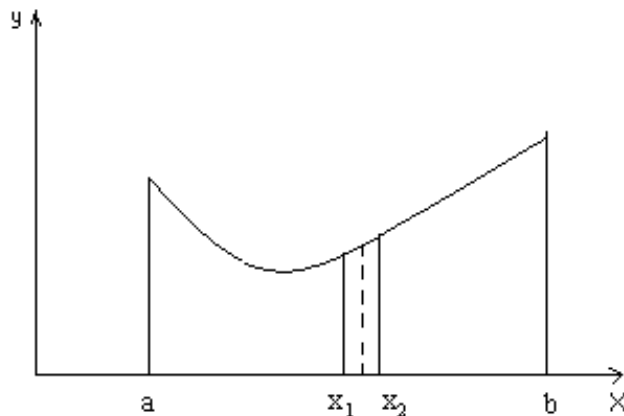


Рис. 2. Графическая иллюстрация метода дихотомии

На новом интервале снова определяются две точки x_1 и x_2 , и процедура повторяется до тех пор, пока на некотором k -ом шаге не выполнится неравенство $|b^{(k)} - a^{(k)}| \leq \varepsilon$.

3. **Метод «золотого сечения».** В предыдущих методах среди всех значений, вычисленных в интервале неопределённости, в дальнейшем используются только некоторые, а остальные не дают дополнительной информации и в дальнейшем не используются. В методе «золотого сечения» целевая функция вычисляется в точках интервала неопределённости, расположенных таким образом, чтобы каждое вычисленное значение целевой функции давало новую полезную информация.

«Золотым сечением» отрезка называется такое его деление на две неравные части, что отношение длины большей части отрезка к длине всего отрезка равно отношению длины меньшей части к длине большей части, т.е. $\frac{l_1}{l_1+l_2} = \frac{l_2}{l_1}$ (рис. 3).

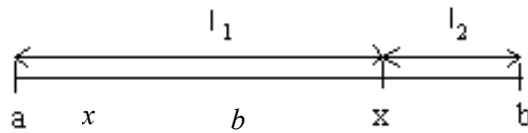


Рис. 3. К понятию о «золотом сечении»

Суть метода «золотого сечения» заключается в следующем. На интервале $[a, b]$ определяются две точки

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a) \text{ и } x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a),$$

находящиеся на одинаковом расстоянии от концов интервала $[a, b]$, соответственно.

Вычисляются значения целевой функции в этих точках $f(x_1)$ и $f(x_2)$, которые сравниваются между собой. Если $f(x_1) \geq f(x_2)$, то новый интервал неопределённости будет равен $[x_1, b]$, в противном случае, т.е. если $f(x_1) \leq f(x_2)$, интервал неопределённости равен $[a, x_2]$.

На новом интервале неопределённости необходимо заново определить две промежуточные точки и сравнить значения функции в них. Однако, для интервала $[a, x_2]$ точка x_1 уже является его «золотым сечением», также как и точка x_2 является «золотым сечением» интервала $[x_1, b]$.

Поэтому в методе на каждом шаге требуется лишь один раз вычислить новое значение функции.

Процесс уменьшения интервала неопределённости продолжается до тех пор, пока неравенство $|b^{(k)} - a^{(k)}| \leq \varepsilon$ не станет верным.

4. Метод Фибоначчи. Последовательность чисел, описываемая рекуррентным соотношением

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}; \quad F_0 = F_1 = 1,$$

называется числами Фибоначчи. Эти числа можно использовать для организации поиска экстремума функции одной переменной. Алгоритм оптимального поиска для случая поиска минимума функции состоит из следующих шагов:

1) По заданной точности ε , с которой необходимо найти положение экстремума функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$, рассчитывается вспомогательное число N : $N = \frac{b-a}{\varepsilon}$.

2) Для полученного числа N выбирается такое число Фибоначчи F_s , чтобы выполнялось неравенство $F_{s-1} < N < F_s$.

3) Определяется минимальный шаг поиска $h = \frac{b-a}{F_s}$.

4) Рассчитывается значение функции в точки a , т.е. $f(a)$.

5) Определяется следующая точка, в которой вычисляется значение функции $x_1 = a + hF_{s-2}$.

6) Если полученная точка x_1 оказалась удачной, т.е. $f(x_1) < f(a)$, то следующая точка определяется как $x_2 = x_1 + hF_{s-3}$. В противном случае, если шаг неудачный, т.е. $f(x_1) > f(a)$, точка x_2 определяется в соответствии с выражением $x_2 = x_1 - hF_{s-3}$.

7) Последующие шаги выполняются с уменьшающейся величиной шага, которая для i -го шага будет равна $\Delta x_i = hF_{s-i-2}$ в соответствии со следующим правилом.

Если при выполнении шага Δx_i значение функции улучшилось, т.е. шаг оказался удачным и $f(x_{i+1}) < f(x_i)$, то следующий шаг будет выполняться из точки x_{i+1} в том же направлении, что и шаг Δx_i , т.е. $x_{i+2} = x_{i+1} + \Delta x_{i+1}$.

Если же шаг Δx_i оказался неудачным, т.е. $f(x_{i+1}) > f(x_i)$, то следующий шаг будет выполняться из точки x_i в противоположном направлении: $x_{i+2} = x_i - \Delta x_{i+1}$.

Поиск оканчивается, когда будет сделан последний шаг, использующий число F_0 .

Отличительной особенностью метода Фибоначчи является то, что используя этот метод, практически в самом начале экстремального поиска определяется количество шагов, которое необходимо сделать для нахождения экстремума целевой функции с заданной точностью.

Абсолютная погрешность описанного алгоритма определяется минимальным шагом поиска h .

Алгоритм экстремального поиска функции одной переменной, использующий последовательность чисел Фибоначчи, может быть организован и по аналогии с рассмотренным выше методом "золотого сечения".

В этом случае на начальном этапе по заданной точности ε определяется вспомогательное число N , выбирается число F_s и вычисляется минимальный шаг поиска h (см. выше пп. 1 – 3). Затем на интервале неопределённости $[a, b]$ определяются две точки x_1 и x_2 : $x_1 = a + hF_{s-2}$ и $x_2 = a + hF_{s-1}$, равноотстоящие от концов отрезка $[a, b]$ (рис. 4).

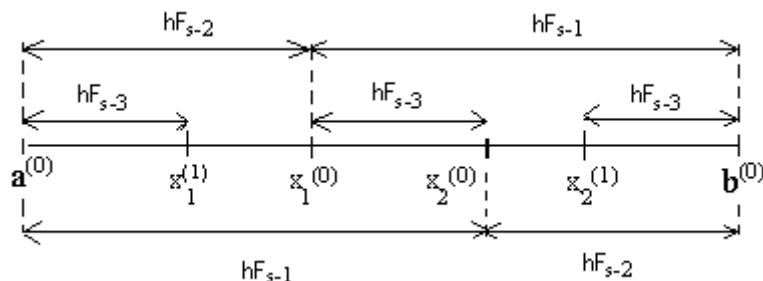


Рис. 4. Разбиение отрезка по методу Фибоначчи

В точках x_1 и x_2 вычисляются значения функции и сравниваются между собой. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то новый интервал неопределённости будет $[a, x_2]$. Для этого интервала снова определяются две точки, при этом $x_2^{(1)} = x_1^{(0)}$, $x_1^{(1)} = a^{(1)} + hF_{s-3}$, вычисляются значения функции в них и сравниваются между собой.

Если $f(x_1) > f(x_2)$, то новый интервал неопределённости будет $[x_1, b]$, т.е. $a^{(1)} = x_1^{(0)}$, $b^{(1)} = b^{(0)}$. Для этого интервала вычисляются $x_1^{(1)} = x_2^{(0)}$, $x_2^{(1)} = b^{(1)} - hF_{s-3}$, определяются $f(x_1^{(1)})$ и $f(x_2^{(1)})$, которые затем сравниваются между собой.

Процедура сужения интервала неопределённости продолжается до тех пор, пока в расчётах не будет использоваться число F_0 .

5. При применении для отыскания экстремума (в данном примере – минимума) функции **метода ДСК (Девиса, Свенна, Кэмпби)** из начальной точки интервала локализации экстремума a с некоторым начальным шагом Δx_0 (или из точки b с шагом $-\Delta x_0$) делают первый шаг и вычисляют значение функции $f(a + \Delta x_0)$. Если функция улучшилась, т.е. $f(a + \Delta x_0) < f(a)$, то начальный шаг удваивается и проверяют значение функции в следующей точке $f(a + \Delta x_0 + 2\Delta x_0)$. Таким образом шагают, удваивая каждый раз величину шага, до тех пор, пока функция улучшалась.

Как только некоторое значение функции $f(x^{(k+1)})$ становится хуже предыдущего, т.е. $f(x^{(k+1)}) > f(x^{(k)})$, то текущий шаг ($\Delta x = x^{(k+1)} - x^{(k)}$) уменьшают в два раза ($\Delta x = \Delta x / 2$) и делают *один* шаг в обратном направлении, т.е. $x^{(k+2)} = x^{(k+1)} - \Delta x$. В итоге получаем четыре равноотстоящие точки: $x^{(k-1)}, x^{(k)}, x^{(k+2)}, x^{(k+1)}$.

Если $f(x^{(k)}) < f(x^{(k+2)})$, то точку $x^{(k+2)}$ можно отбросить (рис. 5). В противном случае, т.е. если $f(x^{(k)}) > f(x^{(k+2)})$, отбрасываем из рассмотрения точку $x^{(k-1)}$. Оставшиеся три точки ($x^{(k-1)}, x^{(k)}, x^{(k+2)}$ или $x^{(k)}, x^{(k+2)}, x^{(k+1)}$) обозначим как x_1, x_2, x_3 , соответственно. Тогда приближённое значение минимума может быть вычислено по формуле

$$x_k^* = x_2 + \frac{\Delta x(f(x_1) - f(x_3))}{2(f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3))}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Если требуемая точность не достигнута, т.е. $|f(x_k^*) - f(x_{k-1}^*)| \leq \varepsilon$ или $|x_k^* - x_{k-1}^*| \leq \varepsilon$, то вся процедура вычислений повторяется сначала, но уже из точки x_2 или x_k^* с начальным шагом $\Delta x_0 = \Delta x_0 / 2$.

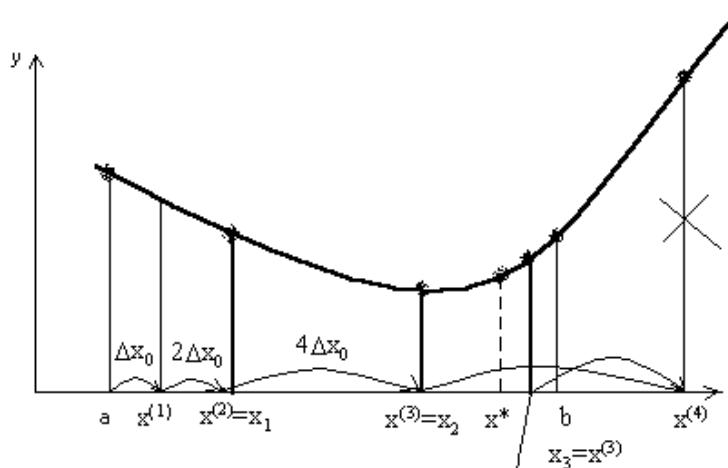


Рис. 5. Графическая иллюстрация метода ДСК

6. Метод Пауэлла. Этот метод также встречается под названием квадратичной аппроксимации или квадратичной интерполяции и основан на последовательном применении процедуры оценивания с использованием квадратичной аппроксимации.

Зададим некоторый шаг h , являющийся величиной того же порядка, что и расстояние от некоторой точки $a = x_1$ до точки истинного минимума. Определим некоторую точку $x_2 = a + h$ и вычислим значение функции $f(a)$ и $f(a + h)$. Если $f(a) < f(a + h)$, то определим третью точку $x_3 = a - h$. В противном случае, т.е. если $f(a) > f(a + h)$, в качестве третьей точки выберем точку $x_3 = a + 2h$.

Вычислим приближённое значение минимума целевой функции по формуле

$$x_1^* = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2)f(x_1) + (x_3^2 - x_1^2)f(x_2) + (x_1^2 - x_2^2)f(x_3)}{(x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_3)} \quad (*)$$

или

$$x_k^* = \frac{(x_1 + x_2)}{2} + \frac{1}{2} \frac{(f(x_1) - f(x_2))(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_3)} \quad (**)$$

$k = 2, 3, 4, \dots$

Для вычисления минимума в первом приближении используется формула (*), а на последующих итерациях – формула (**).

Если разница между вычисленным по формулам (*) или (**) значением функции и следующим наименьшим значением функции меньше заданной точности, то процедура поиска экстремума заканчивается, т.е.

$$|f(x_k^*) - f_{\min}| \leq \varepsilon$$

и (или)

$$|x_k^* - x_{\min}| \leq \varepsilon, \quad (***)$$

где $f_{\min} = \min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$, $x_{\min} = \arg \min f(x_i)$, $x_i = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Если неравенства (***) не выполняются, то из четырёх точек x_1, x_2, x_3, x_k^* выбирается наилучшая и две точки по обе стороны её переобозначаются как x_1, x_2, x_3 , и поиск повторяется по формуле (**).

Лабораторная работа 7

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Постановка задачи

Построить m многочленов $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ последовательных степеней $n = n_0, n_0+1, \dots, n_0+m+1$, дающих наилучшее среднеквадратическое приближение $f(x)$ на сетке x_i , т.е. для каждого n найти такие значения a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 , при которых достигается минимум функции

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^N (y_i - P_n(x_i))^2.$$

Минимизацию функции $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$ производить одним из методов многомерной оптимизации.

Алгоритм минимизации функции $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$ должен быть оформлен в виде подпрограммы.

Порядок выполнения

1. Изучить методы отыскания локального минимума функций многих переменных.
2. Вычислить таблицу значений функции $y = f(x)$ на сетке, полученной разбиением отрезка $[c, d]$ на N равных частей:

$$y_i = f(x_i), x_i = c + ih, h = (d-c)/N, i = 0, 1, \dots, N.$$

3. В качестве начальной точки для $n = n_0$ можно взять, например, $a_0^{(0)} = a_1^{(0)} = \dots a_n^{(0)} = 0$. Для каждого следующего по порядку значения n целесообразно принять $a_0^{(0)} = 0$, а в качестве $a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}$ – коэффициенты предыдущего многочлена. За меру точности приближения рекомендуется принять величину

$$\delta_k = \max_{a_i^{(k)} \neq 0} \left| \frac{a_i^{(k)} - a_i^{(k-1)}}{a_i^{(k)}} \right|.$$

Процесс приближений необходимо заканчивать, когда $\delta_k \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$.

4. Для каждого из полученных таким образом $P_n(x)$ вычислить $y_i^{(n)} = P_n(x_i), i = 0, 1, \dots, N$ и соответствующее среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (y_i - P_n(x_i))^2} = \sqrt{\frac{\Phi_{\min}}{N+1}}.$$

5. Полученные результаты выдать на печать в виде таблицы.

Варианты заданий

Вариант задания состоит из четырёх цифр: первая означает метод оптимизации (табл. 1); вторая – функцию $f(x)$ (табл. 2); третья – значения c и d (табл. 3); четвёртая – значения n, N_0, m (табл. 4).

Таблица 1

Первая цифра варианта	Метод оптимизации
1	Метод покоординатного спуска
2	Метод наискорейшего спуска
3	Метод сопряженных градиентов
4	Метод деформируемого многогранника
5	Метод Хука и Дживса
6	Метод сопряжённых направлений Пауэлла
7	Метод случайного поиска

Таблица 2

Вторая цифра варианта	$f(x)$
1	$(1+x)e^{-2x}$
2	$\cos(2x) - \operatorname{ch}(x/5)$
3	$\cos(x/10)\operatorname{arctg}(x)$
4	$\operatorname{th}(1-x)$
5	$(3x^2 - 1)e^{-x^2}$
6	$\sin(x)e^{-x}$
7	$3\cos(x) + x\sin(x^2)$
8	$\frac{\cos(2x + \pi/4)}{1+x^2}$

Таблица 3

Третья цифра варианта	c	d
1	0,1	1,1
2	1,0	1,0
3	0,5	1,5

Таблица 4

Четвёртая цифра варианта	N	n_0	m
1	20	2	2
2	20	3	2
3	20	2	3
4	25	2	2
5	25	3	2
6	30	2	2
7	30	3	2

Методические указания

1. Для отыскания локального минимума функции $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$ необходимо выбрать начальное приближение $a^{(0)}$ и построить последовательность $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$, в которой каждое очередное приближение $a^{(k+1)}$ получается из предыдущего $a^{(k)}$ "шагом" в направлении вектора $S^{(k)}$: $a^{(k+1)} = a^{(k)} + \lambda_k S^{(k)}$. Выбор вектора $S^{(k)}$ определяется конкретным методом оптимизации.

2. Точность полученного приближения к минимуму обычно оценивается по величине отклонения двух соседних приближений $a^{(k)}$ и $a^{(k+1)}$. Например,

$$\Delta_{k+1} = \|a^{(k+1)} - a^{(k)}\| = \max_i |a_i^{(k+1)} - a_i^{(k)}| \quad \text{или} \quad \delta_{k+1} = \max_i \left| \frac{a_i^{k+1} - a_i^k}{a_i^{k+1}} \right|.$$

Процесс приближения прекращается, если $\Delta_k < \varepsilon$ или $\delta_k < \varepsilon$, где ε – заданная точность.

3. При использовании метода наискорейшего спуска необходимо делать шаг в направлении быстрого убывания $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$, т.е. вдоль вектора $S^{(k)} = -\nabla\Phi(a^{(k)}) / \|\nabla\Phi(a^{(k)})\|$, а величину шага λ_k следует выбирать так, чтобы функция $\Psi_k(\lambda) = \Phi(a^{(k)} + \lambda_k S^{(k)})$ принимала наименьшее значение.

4. Для величины λ_k на каждом шаге метода оптимизации нужно находить минимум функции одной переменной $\Psi_k(\lambda)$. В общем случае для этого необходимо решить уравнение $d\Psi_k(\lambda) / d\lambda = 0$.

5. При использовании метода сопряжённых градиентов одним из возможных способов определения направления поиска может быть следующий:

$$S^{(0)} = -\nabla\Phi(a^{(0)}) / \|\nabla\Phi(a^{(0)})\|;$$

$$S^{(k+1)} = -\nabla\Phi(a^{(k)}) / \|\nabla\Phi(a^{(k)})\| + \beta_k S^{(k)},$$

где $\beta_k = \|\nabla\Phi(a^{(k+1)})\|^2 / \|\nabla\Phi(a^{(k)})\|^2$, $k = 0, 1, \dots$

6. Для контроля над процессом сходимости метода оптимизации на каждом «шаге» необходимо наблюдать за изменениями следующих величин, выводя их на печать: k (номер «шага»), Δ_k или δ_k , $g_k = \|\nabla\Phi(a^{(k)})\|$. При этом метод оптимизации будет сходиться при выполнении следующих условий: 1) $\Phi(a^{(k)})$ убывает; 2) $g_k \rightarrow 0$; 3) Δ_k или δ_k также стремятся к 0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М. : Наука, 1975. – 632 с.
2. Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченова, И.А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 386 с.
3. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М. : Наука, 1966. – 664 с.
4. Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
5. Бояринов, А.И. Методы оптимизации в химической технологии / А.И. Бояринов, В.В. Кафаров. – М. : Химия, 1975. – 576 с.
6. Крылов, В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский. – М. : Наука, 1976. – Т. 1. – 304 с.
7. Крылов, В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский. – М. : Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.
8. Березин, И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – Т. 1 и 2. – М. : Наука, 1966.
9. Волков, Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – М. : Наука, 1987. – 248 с.
10. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 600 с.
11. Самарский, А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1987.
12. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М. : Мир, 1982. – 238 с.
13. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.
14. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 536 с.
15. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. – В 2-х кн. – М. : Мир, 1986.