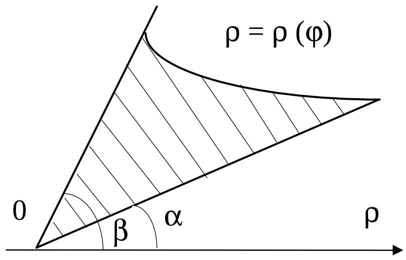
ИНТЕГРАЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



♦ ♦

2010

УДК 517.1(076)
ББК В161я73
Н349

Рекомендовано Редакционно-издательским советом университета

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент ГОУ ВПО ТГТУ
В.В. Васильев

Составитель
А.Д. Нахман

Н349 Интегралы. Дифференциальные уравнения : метод. указ. / сост. А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 32 с. – 250 экз.

Приведены краткие теоретические сведения и алгоритмы решения стандартных задач по разделу курса математики «Интегралы функций одной и нескольких переменных. Дифференциальные уравнения». Контрольные задания в значительной степени носят прикладной характер.

Предназначены для студентов 2 курса заочной формы обучения инженерно-технических специальностей.

УДК 517.1(076)
ББК В161я73

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

ИНТЕГРАЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания
для студентов 2 курса заочной формы обучения
инженерно-технических специальностей

Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2010

Учебное издание

ИНТЕГРАЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания

Составитель
НАХМАН Александр Давидович

Редактор И.В. К а л и с т р а т о в а
Инженер по компьютерному макетированию М.А. Ф и л а т о в а

Подписано в печать 01.10.2010
Формат 60 × 84/16. 1,86 усл. печ. л. Тираж 250 экз. Заказ № 464

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1.1. *Интегрирование* есть действие, обратное дифференцированию. Если $f(x) = F'(x)$ на некотором интервале (a, b), то функция $F(x)$ (по отношению к $f(x)$) называется первообразной.

Так, например, для $f(x) = 2x$ первообразными являются: $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 - 1$, ..., и вообще, любая функция вида

$$F(x) = x^2 + C,$$

где C – произвольная постоянная.

В общем случае, совокупность всех первообразных для $f(x)$, $x \in (a, b)$, имеет вид: $\{F(x) + C\}$, где $F(x)$ – некоторая (фиксированная) первообразная, C – произвольная постоянная. Такая совокупность называется неопределённым интегралом для $f(x)$. Обозначение:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

1.1.2. *Таблица интегралов*

1) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$;

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3) $\int e^x dx = e^x + C$;

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

1.1.3. *Свойства интеграла*

а) *линейность интеграла*

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx; \quad \lambda,\ \mu = \text{const}.$$

б) $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k} F(kx+b) + C$ $(k = \text{const},\ k \neq 0)$.

1.1.4. *Приёмы интегрирования*

а) Использование таблицы, линейности и почленного деления. Например,

$$\int \frac{3\sqrt{x} - 2x + 1}{x} dx = \int \left(\frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}} dx - 2\int dx + \int \frac{dx}{x} =$$

$$= 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2x + \ln|x| + C = 6\sqrt{x} - 2x + \ln|x| + C.$$

б) Замена переменных $t = \varphi(x)$ по формуле

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Вычислив интеграл, возвращаемся к старой переменной.

П р и м е р. $J = \int \dfrac{xdx}{1+x^2}$.

Полагаем $t = 1 + x^2$ и устанавливаем связь дифференциалов: $dt = 2xdx$.

Числитель подынтегрального выражения будет равен dt, если его домножить на 2 (одновременно умножим интеграл на 1/2):

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C.$$

в) Выделение полного квадрата в случае квадратного трёхчлена в знаменателе дроби. Здесь следует пользоваться формулой

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

и заменой переменных $t=x+\frac{b}{2a}$, откуда $x=t-\frac{b}{2a}$, $dx=dt$.

П р и м е р. $J=\int\frac{dx}{x^2+8x+17}$.

Используем равенство (п. 1.1.4, в), в котором $a=1$, $b=8$, $c=17$: $x^2+8x+17=(x+4)^2+1$.

Согласно п. 1.1.3, б) и табличной формуле № 10 имеем

$$J=\int\frac{dx}{(x+4)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+4)+C.$$

1.1.5. *Интегрирование «по частям»*:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Приём эффективен при интегрировании функций: логарифмической, обратных тригонометрических, а также произведений функций степенной на показательную, тригонометрическую, обратную тригонометрическую. Выбор множителя u (оставшийся множитель в интеграле есть dv) обусловлен такими соображениями:

- du должен иметь простой вид;
- первообразная $v=\int dv$ должна легко отыскиваться;
- $\int vdu$ должен оказаться проще $\int udv$ (т.е. исходного).

П р и м е р. $J=\int xe^{1+2x}dx$.

Имеем произведение степенной и показательной функций. Выберем $u=x$. Тогда $dv=e^{1+2x}dx$. Следовательно, $du=dx$,

$$v=\int e^{1+2x}dx=\frac{1}{2}e^{1+2x}$$

По формуле 1.1.5 имеем

$$J=x\frac{1}{2}e^{1+2x}-\int\frac{1}{2}e^{1+2x}dx=\frac{1}{2}xe^{1+2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{1+2x}+C=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{1+2x}+C.$$

Заметим, что при возможном ином выборе $u=e^{1+2x}$, $dv=xdx$, интеграл $\int vdu$ оказался бы сложнее исходного.

1.1.6. *Интегрирование рациональных дробей.* Речь идёт о дробях – отношениях многочленов. Дробь правильная, если степень числителя меньше степени знаменателя и неправильная – в противном случае.

а) Если предстоит интегрировать правильную дробь, то её знаменатель записываем в виде произведения множителей типа $(x-a)^n$ и $\left(x^2+px+q\right)^m$. После этого дробь может быть представлена в виде суммы слагаемых типа

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}(k=1,\ ...,\ n)\ \text{и}\ \frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}(k=1,\ ...,\ m).$$

П р и м е р. $J=\int\frac{x^2-x+3}{8x^3+8x^2}dx$.

Имеем : $\frac{x^2-x+3}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}$.

Если определить коэффициенты A, B, C, то интегрирование сведётся к табличному. Приведём дроби к общему знаменателю и приравняем коэффициенты многочленов (в левой и правой части) при одинаковых степенях x:

$$x^2-x+3=A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2\ \text{или}\ x^2-x+3=(B+C)x^2+(A+B)x+A,$$

откуда B + C = 1, A + B= –1; A = 3. Значит, B = –4, C = 5 и

$$J=\frac{1}{8}\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+\frac{5}{x+1}\right)dx=\frac{1}{8}\left(3\frac{x^{-1}}{-1}-4\ln|x|+5\ln|x+1|+C\right).$$

б) Неправильную дробь можно представить как результат деления с остатком (деления «углом»)

$$\text{дробь} = \text{частное} + \frac{\text{остаток}}{\text{знаменатель}},$$

после чего задача интегрирования сводится к цепочке известных задач.

1.1.7. *Интегрирование некоторых типов иррациональностей*

а) Если в подынтегральном выражении с иррациональностью $\sqrt[n]{ax+b}$ и аргументом x выполняются лишь арифметические действия, то вводим новую переменую $t=\sqrt[n]{ax+b}$, откуда затем выражаем x и находим dx.

б) Если арифметические действия выполняются над $\sqrt[m]{ax+b}$, $\sqrt[n]{ax+b}$, ... и аргументом x, то переменная t вводится по формуле $t^N = ax+b$, где N – наименьшее общее кратное чисел $m, n, ...$; далее поступаем как в п. а).

Полученные в п. а), б) интегралы – интегралы рациональных функций переменной t.

П р и м е р. $J = \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$

Имеем интеграл типа 1.1.7, б). Общее наименьшее кратное показателей корней $N=4$. Следовательно $t^4 = x$, а тогда $dx = 4t^3\,dt$. Значит

$$J = \int \frac{\sqrt[4]{t^4}\cdot 4t^3\,dt}{1+\sqrt{t^4}} = 4\int \frac{t^4\,dt}{1+t^2} = 4\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}t^3 - t + \mathrm{arctg}\,t + C\right) = 4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} + \mathrm{arctg}\sqrt[4]{x} + C\right).$$

1.1.8. *Интегрирование некоторых типов тригонометрических выражений*

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

применяется, если подинтегральное выражение содержит только арифметические действия над $\sin x$ и $\cos x$; при этом получаем интегралы рациональных дробей.

П р и м е р. $J = \int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Положим $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; согласно формулам 1.1.8 имеем

$$J = \int \frac{2dt}{1+t^2}\Big/\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) = \int \frac{2dt}{1+2t+t^2} = = 2\int (t+1)^{-2}\,dt = \mathrm{C} - 2\left(1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1}.$$

1.1.9. *Тригонометрические подстановки* при интегрировании некоторых иррациональностей.

а) Если подинтегральное выражение содержит только арифметические действия над x и $\sqrt{a^2-x^2}$, то применяется замена $x = a\cos t$ (или $x = a\sin t$), после чего $\sqrt{a^2-x^2} = \pm a\sin t$, $dx = -a\sin t\,dt$.

б) В подобной ситуации с x и $\sqrt{x^2-a^2}$, полагаем $x = \frac{a}{\cos t}$ (или $x = \frac{a}{\sin t}$); в случае x и $\sqrt{x^2+a^2}$ полагаем $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ (или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$).

1.1.10. В заключение отметим, что любая непрерывная функция $f(x)$ обладает первообразной, но не для всякой элементарной функции первообразная также будет элементарной. Так, например, через элементарные функции не выражаются интегралы вида $\int e^{x^2}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ и др.

1.2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.2.1. *Определённый интеграл* непрерывной на $[a, b]$ функции $y = f(x)$ есть приращения первообразной (любой из первообразных) $F(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

1.2.2. *Формула интегрирования по частям имеет вид*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

1.2.3. Если $x = \varphi(t)$ монотонна на $[\alpha, \beta]$, например, возрастает от $x = a$ к $x = b$ при $\alpha \le t \le \beta$, то *формула замены* переменных имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

(знак «минус» в правой части – в случае убывания $\varphi(t)$).

Заменяя переменную под знаком определённого интеграла, следует соответствующим образом изменить пределы интегрирования, и, найдя первообразную, к старой переменной не возвращаться.

П р и м е р. Вычислить $J=\int\limits_0^1 \frac{\cos(\operatorname{arctg} x)\,dx}{x^2+1}$.

Решение. Положим $t=\operatorname{arctg} x$; тогда при $x=0$ и при $x=1$ имеем соответственно $t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$ и $dt=\frac{dx}{1+x^2}$. Следовательно,

$$J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt=\sin t\Big|_0^{\pi/4}=\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1.3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.3.1. *Интегралы с бесконечными пределами* интегрирования определяются следующим образом (функции $f(x)$ полагаем непрерывными на соответствующих бесконечных интервалах):

а) $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_a^{B} f(x)dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^{b} f(x)dx$;

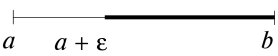
в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$.

Если в случаях а), б) указанный предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся. В случае же в) исходный интеграл считается расходящимся, если таковым является хотя бы один из интегралов в правой части равенства.

1.3.2. *Интегралы от функций с разрывами* второго рода определяются следующим образом (в пп. а) и б) параметр $\varepsilon>0$):

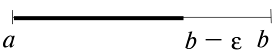
а) $f(x)$ имеет разрыв на левом конце отрезка $[a,\ b]$, тогда

$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$;



б) $f(x)$ разрывна в точке b:

$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$;



в) $f(x)$ имеет разрыв в точке $c\in(a,\ b)$:

$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$

(относительно последних двух интегралов см. п. а), б)).

В случаях, если соответствующий предел не существует или бесконечен, интеграл называется расходящимся; расходимость в случае п. в) определяется аналогично 1.3.1, в).

Пример. $J=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ имеет разрыв на правом конце промежутка интегрирования. Согласно п. б), 1.3.2 имеем:

$$J=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}(-2\sqrt{1-x})\Big|_0^{1-\varepsilon}=-2\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt{\varepsilon}-1)=2.$$

1.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Перечислим основные геометрические приложения определённых интегралов.

1.4.1. *Площадь фигуры*

а) Если плоская фигура D ограничена линиями $x=a$, $x=b$, $y=g(x)$, $y=f(x)$, где g и f – непрерывны на $[a,\ b]$ и $g(x)\le f(x)$ при $x\in[a,\ b]$, то её площадь $S=\int\limits_a^b[f(x)-g(x)]dx$.

В частности, при $g(x)\equiv 0$ имеем площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком оси абсцисс, «вертикальными» прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком функции $y=f(x)$.

б) Если $y=f(x)\ge 0$ задана параметрически в виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

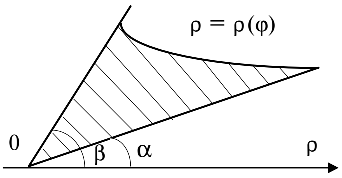


Рис. 1.4.1

причём x пробегает отрезок $\{a, \ b]$ при $\alpha \le t \le \beta$ (т.е. $x'(t) > 0$, $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$), то площадь криволинейной трапеции находится по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\,dt.$$

в) Площадь сектора, определяемого в полярных координатах соотношениями $\alpha \le \varphi \le \beta, \ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)$,

где $\rho(\varphi)$ – непрерывна на $[\alpha, \ \beta]$, см. рис. 1.4.1, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

1.4.2. *Длина дуги линии*

а) Если линия L задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то длина её дуги, соответствующей значениям $x \in [a, \ b]$ вычисляется по формуле. $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

б) Дуга заданной параметрически линии $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$

в случае $t \in [\alpha, \ \beta]$ имеет длину $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(x))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ (предполагается монотонность $x(t)$ на отрезке $[\alpha, \ \beta]$).

в) Частным случаем п. б) является задание линии в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$. В этом случае

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

П р и м е р. Найти длину дуги линии. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0 \le x \le 2$.

Заметим, что $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right); \ (y')^2 = \frac{1}{4}\left(e^x - 2 + e^{-x}\right)$.

Следовательно, согласно 1.4.2 а), имеем

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^x - 2 + e^{-x}\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\,dx = e - \frac{1}{e}.$$

1.4.3. *Объём тела вращения.* Тело, образованное вращением вокруг $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной осью $0x$, прямыми $x = a, \ \ x = b$ и графиком $y = f(x)$ ($f(x) \ge 0$ при $x \in [a, \ b]$), имеет объём $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

П р и м е р. Найти объём тела, образованного вращением криволинейного треугольника вокруг оси $0x$, если треугольник ограничен осью $0x$, прямой $x = \frac{\pi}{4}$ и графиком $y = \operatorname{tg} x$.

Решение. Имеем

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\right) = \pi - \frac{\pi^2}{4}.$$

2. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.1.1. Пусть *функция двух переменных* $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой плоской области D. Если граница D задана уравнением $x = a, \ x = b, \ \ y = \varphi(x), \ \ y = \psi(x)$, причём φ и ψ непрерывны на $[a, b]$ и $\varphi(x) \le \psi(x), \ \ x \in [a, b]$, то *двойной интеграл* в декартовых координатах (рис. 2.1.1) может быть найден в виде *двукратного определённого интеграла*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.$$

Сначала вычисляем внутренний интеграл (при фиксированном x), а затем полученное (зависящее от x) выражение интегрируем по промежутку $[a, \ b]$.

В случае же, если граница D задана уравнениями $y=p,\ y=q,\quad x=\mu(y),\quad x=\nu(y)$, причем μ и ν непрерывны на $[p,\ q]$ и $\mu(y)\le\nu(y)\,(y\in[p,\ q])$, имеем (рис. 2.1.2)

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy=\int\limits_p^q dy\int\limits_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x,\ y)\,dx$$

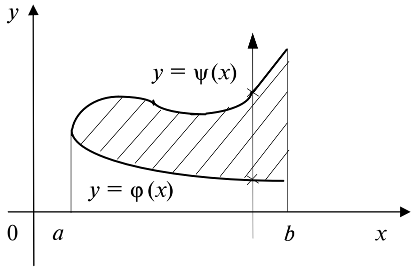


Рис. 2.1.1

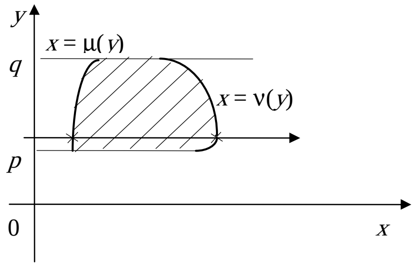


Рис. 2.1.2

В случае $f(x,\ y)>0,\ (x,\ y)\in D$ *двойной интеграл* есть *масса* плоской пластины D с плотностью (в каждой точке $(x,\ y)$) $\rho=f(x,\ y)$.

П р и м е р ы. 1. Изменить порядок интегрирования

$$J=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{1}{2}x^3}^{2\sqrt{2x}} f(x,\ y)dy.$$

Решение. Изобразим границу области (уравнения соответствующих линий определяются нижними и верхними пределами интегрирования): $x=0,\quad x=2,\quad y=\dfrac{1}{2}x^3,\ \ y=2\sqrt{2x}$.

Если спроектировать область на ось $0y$, то $y_1\le y\le y_2$, где y_1 и y_2 определяются решениями системы уравнений: $y=\dfrac{1}{2}x^3$, $y=2\sqrt{2x}$. Имеем $y_1=0,\ y_2=4$, следовательно внешнее интегрирование теперь производится по отрезку $[0,\ 4]$. Чтобы определить пределы «внутреннего» интегрирования (по переменной x), следует выразить x (через y) из уравнений левой границы (точка входа горизонтальной прямой в область) $y=2\sqrt{2x}$ и правой границы (точка выхода) $y=\dfrac{1}{2}x^3$. Имеем соответственно $x=\dfrac{y^2}{8}$ и $x=\sqrt[3]{2y}$. Поэтому $J=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{\frac{y^2}{8}}^{\sqrt[3]{2y}} f(x,\ y)dx$.

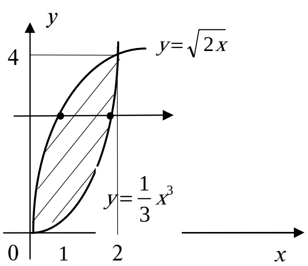


Рис. 2.1.3

2. Найти массу плоской пластины D, заданной плотности $\rho=24yx^2$, расположенной в плоскости $X0Y$, если D ограничена линиями $y=-2x,\ \ y=\dfrac{x}{2},\ \ y=2$.

Решение. Согласно 2.1.1 достаточно вычислить $\iint\limits_D \rho\,dxdy$, т.е. $\iint\limits_D 24yx^2\,dxdy$.

Внешнее интегрирование произведём по $y,\ 0\le y\le 2$. Во внутреннем интеграле x изменяется от $\left(-\dfrac{y}{2}\right)$ до $2y$ (x выражен соответственно из уравнений левой и правой границы; рис. 2.1.4). Итак,

$$J=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-\frac{y}{2}}^{2y} 24yx^2\,dx=\int\limits_0^2 dy\left(24y\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\frac{y}{2}}^{2y}\right)=65\int\limits_0^2 y^4\,dy=416.$$

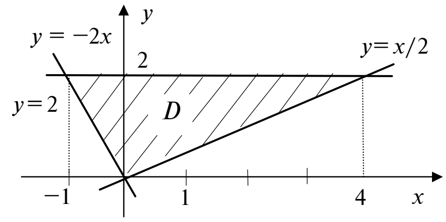


Рис. 2.1.4

2.1.2. Если теперь область D расположена в полярной системе координат и ограничена лучами $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta$ и линиями $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$ ($\alpha<\beta,\ \rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)$ при $\varphi\in[\alpha,\ \beta]$), то площадь области D вычисляется по формуле $S=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho$.

П р и м е р. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной линией (заданной в декартовых координатах)

$\left(x^2+y^2\right)^2-5x^2-4y^2=0$.

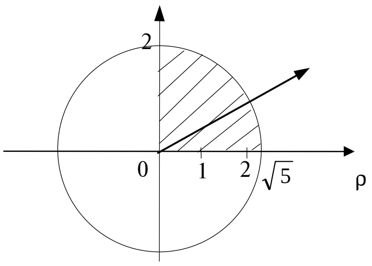


Рис. 2.1.5

Решение. Отметим, что линия симметрична относительно обеих координатных осей (так как x и y в уравнении содержатся в чётных степенях). Запишем уравнение границы в полярных координатах, используя формулы перехода $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$:

$\left(\rho^2\right)^2-5\rho^2\cos^2\varphi-4\rho^2\sin^2\varphi=0$,

откуда

$\rho^2=4+\cos^2\varphi,\quad \rho=\sqrt{4+\cos^2\varphi}$.

Имеем (см. рис. 2.1.5)

$$\frac{1}{4}S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{4+\cos^2\varphi}}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4+\cos^2\varphi\right)d\varphi=\frac{9\pi}{8}.$$

Следовательно, $S=\dfrac{9\pi}{2}$.

2.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ДЛИНЕ ДУГИ

Если дуга l линии задана уравнением $y=\varphi(x),\ a\le x\le b,$ и функция $\varphi(x)$ имеет непрерывной производную $\varphi'(x)$ на отрезке $[a,\ b]$, то задача о вычислении массы этой дуги приводит к рассмотрению так называемого криволинейного интеграла первого рода (по длине дуги)

$$\int\limits_l\rho(x,y)\,dl.$$

Здесь $\rho=\rho(x,y)$ – плотность массы дуги в точке $(x,\ y)$; функция ρ предполагается непрерывной в точках дуги. При сформулированных условиях криволинейный интеграл может быть сведён к определённому следующим образом:

$$\int\limits_l\rho(x,y)\,dl=\int\limits_a^b\rho(x,\ \varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\ dx.$$

Другими словами, при переходе к определённому интегралу следует в подинтеральное выражение вместо y подставить $\varphi(x)$ из уравнения линии, а «элемент длины» dl записать в виде $\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\ dx$.

П р и м е р . Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_l xydl$ вдоль дуги окружности $x^2+y^2=1$, расположенной в первой координатной четверти.

Решение. Выражая переменную y из уравнения окружности, имеем $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 1$. Далее,

$y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и

$$dl=\sqrt{1+(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})^2}\ dx=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Теперь $\displaystyle\int\limits_l xydl=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\limits_0^1 x\ dx=0{,}5$.

2.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАМ

2.3.1. Пусть сила $\overline{F} = P(x, y)\,\bar{i} + Q(x, y)\,\bar{j}$ перемещает материальную точку M из начала дуги – точки A, в конец – точку B (рис. 2.3.1).

Задача о вычислении *работы силы* F (совершаемой вдоль $\cup AB$ линии L) приводит к рассмотрению так называемого криволинейного интеграла по координатам

$$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

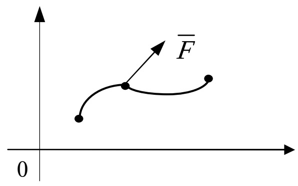


Рис. 2.3.1

2.3.2. Пусть дуга AB расположена в области D, где P и Q – непрерывные функции. Если линия L имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

причём положение точек A и B соответствуют значениям $t = \alpha$ и $t = \beta$, то

$$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt.$$

Если же линия L имеет уравнение $y = \varphi(x)$, причём $x = a$ и $x = b$ – абсциссы точек A и B, соответственно, то

$$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)]\,dx.$$

Смысл формул состоит в том, что *выражение для* x и y из уравнений линии *подставляем в подынтегральное выражение* $Pdx + Qdy$ (при этом вычисляем дифференциалы dx и dy), после чего производим интегрирование в границах изменения параметра.

П р и м е р. Вычислить работу силы $\overline{F} = \left(3y + x^3\right)\bar{i} + 4x\bar{j}$ по перемещению материальной точки вдоль контура $y = x^3$ из начального положения 0(0,0) в положение $B\,(1,1)$.

Решение. Имеем вектор $\overline{F} = P\bar{i} + Q\bar{j}$ с координатами $P = 3y + x^3$, $Q = 4x$. На дуге OB линии $y = x^3$ абсцисса x изменяется от 0 до 1, при этом $y' = 3x^2$. Тогда работа будет вычислена в виде

$$J = \int\limits_{\cup OB} (3y + x^3)dx + 4x\,dy = \int\limits_{0}^{1} \left(3x^3 + x^3 + 4x \cdot 3x^2\right)dx = 4.$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

3.1.1. *Уравнение* вида $y' = f(x,\ y)$ будем рассматривать как задачу о нахождении функции $y = y(x)$, которая при подстановке вместо y обращает это соотношение в тождество.

На самом деле в процессе интегрирования определится класс решений $y = y(x,\ C)$, который называется общим решением дифференциального уравнения (здесь C – произвольная постоянная). При каждом конкретном значении $C = C_0$ получаем «частное решение» $y = y(x,\ C_0)$.

Задача вида

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

называется задачей Коши.

3.1.2. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x)\,g(y)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Если представить y' в виде отношения $\dfrac{dy}{dx}$ дифференциалов, то путем выполнения операций умножения и деления уравнении можно преобразовать к виду $G(y)dy = H(x)dx$ (уравнение с разделенными переменными), после чего остается выполнить интегрирование обеих частей полученного соотношения.

П р и м е р. $xy' = \left(4 + y^2\right)\ln x$. Найти общее решение.

Имеем уравнение в разделяющимися переменными

$x\dfrac{dy}{dx}=\left(4+y^2\right)\ln x$ или $\dfrac{dy}{4+y^2}=\ln x\dfrac{dx}{x}$

(умножили обе части на dx и поделили на $x\left(4+y^2\right)$).

Интегрируя (интеграл в правой части вычисляем с помощью замены переменной $t=\ln x$), получим

$$\int\frac{dy}{2^2+y^2}=\int\ln x\frac{dx}{x};\quad \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{y}{2}=\frac{\ln^2 x}{2}+\frac{1}{2}C.$$

Итак, соотношение $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{2}=\ln^2 x+C$ служит общим решением уравнения.

3.1.3. Уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

или приводящееся элементарными преобразованиями к указанному виду, называется *однородным*. Заменой переменных $t=\dfrac{y}{x}$ (откуда $y'=t+t'x$), уравнение преобразуется к рассмотренному типу 3.1.2.

3.1.4. Уравнение вида

$$y'+p(x)\,y=q(x)$$

называется *линейным*, а уравнение $y'+p(x)\,y=q(x)\,y^{\gamma}\,(\gamma\neq 0{,}1)$ носит имя Бернулли. В обоих случаях общее решение может быть найдено в виде $y=\upsilon(x)u(x,C)$, где выбор функций u и υ поясним на следующем примере.

П р и м е р. $y'-\dfrac{y}{2\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}}$. Найти общее решение.

Имеет линейное уравнение; положим $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляя выражения для y и y' в уравнение, получим

$$u'v+uv'-\frac{uv}{2\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}} \text{ или } u'v+u\left(v'-\frac{v}{2\sqrt{x}}\right)=2e^{\sqrt{x}}.$$

Выберем v так, чтобы $v'-\dfrac{v}{2\sqrt{x}}=0$, тогда уравнение примет вид $u'v=2e^{\sqrt{x}}$.

Решаем последовательно, разделяя переменные, полученные уравнения

а) $\dfrac{dv}{dx}-\dfrac{v}{2\sqrt{x}}=0;\ \displaystyle\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{2\sqrt{x}};$

откуда $v=e^{\sqrt{x}}$ (выбрана одна из первообразных $v(x)$).

б) $u'v=2e^{\sqrt{x}}$ или $\dfrac{du}{dx}e^{\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}}$; значит $du=2dx$, откуда $u=x^2+C$ (в отличие от случая а) здесь ищется общее решение).

Поскольку $y=uv$, то ответ записываем в виде $y=\left(x^2+C\right)e^{\sqrt{x}}$.

3.2. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.2.1. Функция $y=y(x)$ есть решение уравнения

$$y''=f(x,\ y,\ y')$$

(уравнение *второго порядка* соответственно порядку *старшей производной*), если при её подстановке в уравнение оно обращается в тождество. Общее решение

$$y=y(x,\ C_1,\ C_2)\ \text{(или } \Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2)=0\text{)}$$

зависит от двух произвольных постоянных. Задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} y''=f(x,\,y,\,y'); \\ y(x_0)=y_0; \\ y'(x_0)=y_0', \end{cases}$$

где (x_0, y_0, y_0') – заданная точка пространства; чтобы удовлетворить начальным условиям, следует соответствующим образом подобрать C_1 и C_2.

3.2.2. В следующих случаях путём надлежащей замены переменных уравнение второго порядка решается *последовательным рассмотрением* двух *уравнений первого порядка (понижение порядка):*

а) $y''=f(x)$; б) $y''=f(x,y')$; в) $y''=f(y,y')$.

В случаях а), б) вводится новая переменная $z(x)=y'$, тогда $y''=\frac{dz}{dx}$, в случае в) полагаем $y'=p(y)$, тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$.

П р и м е р . Решить задачу Коши

$$\begin{cases} yy''+\left(9/y^2\right)=0; \\ y(0)=1/3; \\ y'(0)=9. \end{cases}$$

Имеем случай 3.2.2, в). Полагая $y'=p(y)$, получим $y''=p\frac{dp}{dy}$. Следовательно $yp\frac{dp}{dy}+\frac{9}{y^2}=0$ или (разделяя переменные) $pdp=-\frac{9}{y^3}dy$, откуда

$$\int pdp=-9\int y^{-3}dy,\ \frac{p^2}{2}=\frac{9}{2y^2}+\frac{C_1}{2},\ \text{т.е. } (y')^2=\frac{9}{y^2}+C_1.$$

Постоянную C_1 можно найти уже на этом этапе, если, положив $x=0$, использовать начальные условия: $y(0)=\frac{1}{3}$, $y'(0)=9$:

$$9^2=\frac{9}{1/9}+C_1;\ \text{откуда } C_1=0.$$

Значит, решаем уравнение $(y')^2=\frac{9}{y^2}$, $y'=\frac{3}{y}$ (при извлечении корня для определённости выбран знак плюс; это оправдано тем, что в точке $x=0$, y и y' имеют одинаковый знак). Разделяя переменные, имеем $y^2=6x+C$, и так как $y(0)=\frac{1}{3}$, то $y^2=6x+\frac{1}{9}$, откуда $y=\frac{\sqrt{1+54x}}{3}$.

3.2.3. Уравнение вида

$$y''+py'+qy=0,\ p,q=\text{const}$$

называется *линейным однородным уравнением* (ЛОУ) второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2,$$

где $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ – так называемая фундаментальная система решений (ФСР), которая определяется следующим образом:

а) строится характеристическое уравнение (квадратное уравнение с теми же коэффициентами): $\lambda^2+p\lambda+q=0$.

б) если оно имеет действительные различные корни λ_1 и λ_2 (дискриминант $D=p^2-4q>0$), то $y_1=e^{\lambda_1 x}$, $y_2=e^{\lambda_2 x}$.

в) если корни уравнения $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ (дискриминант $D=0$), то

$$y_1=e^{\lambda x},\ y_2=xe^{\lambda x}.$$

г) если характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряжённые корни

$$\lambda_1=a+ib, \lambda_2=a-ib\ \left(i^2=-1;\quad D<0\right),$$

то $y_1=e^{ax}\cos bx$, $y_2=e^{ax}\sin bx$.

В частности, если $\lambda=\pm ib$, то $y_1=\cos bx$, $y_2=\sin bx$.

П р и м е р. Найти общее решение

$$2y''+2y'+5y=0.$$

Корни характеристического уравнения $2\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеют вид $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}i$ (см. случай г)). Следовательно,

$$y_1=e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{3}{2}x,\ y_2=e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{3}{2}x$$

и $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{3}{2}x+C_2\sin\frac{3}{2}x\right)$ – общее решение.

3.2.4. *Линейным неоднородным уравнением* (ЛНУ) второго порядка с постоянными коэффициентами p и q называется уравнение вида

$$y''+py'+qy=f(x).$$

Уравнение 3.2.3 будем называть соответствующим ему ЛОУ. Пусть $y_ч$ – некоторое частное решение ЛНУ, а $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ общее решение соответствующего ЛОУ. Тогда общее решение ЛНУ может быть найдено в виде $y = y_0 + y_ч$.

Если $f(x)$ имеет следующий специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где P и Q – многочлены соответствующих степеней, то

$$y_ч = x^r e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_N(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_N \sin\beta x\right).$$

Здесь N – наибольшая из степеней n и m многочленов, r – количество совпадений «контрольного числа» $S = \alpha + i\beta$ с корнями λ_1, λ_2 характеристического уравнения. Так, в случае $f(x) = Ae^{\alpha x}(A = \text{const})$, имеем $y_ч = x^r Me^{\alpha x}$, где параметр M определяется по методу неопределённых коэффициентов (см. пример).

П р и м е р. $y'' - 2y' - 3y = 3e^x$. Найти общее решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, следовательно, $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

Перейдём к нахождению $y_ч$; так как $f(x) = 3e^{1\cdot x}$, то $\alpha = 1$ и контрольное число $S = \alpha = 1$. Поскольку $S \neq \lambda_1$, $S \neq \lambda_2$, то $r = 0$, и $y_ч = Me^x$. Осталось определить коэффициент M. Для этого находим $y_ч' = Me^x$, $y_ч'' = Me^x$ и подставляем их в неоднородное уравнение:

$Me^x - 2Me^x - 3Me^x = 3e^x$ откуда $M = -\dfrac{3}{4}$

Итак, $y_ч = -\dfrac{3}{4}e^x$ и общее решение тогда имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{4}e^x.$$

3.3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

3.3.1. Как отмечалось выше, общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольных постоянных (две «степени свободы»). Частное решение может быть выделено тогда из общего путём задания двух специальных условий. Этими условиями могут быть не только начальные, но и так называемые краевые условия. Например, в механике может быть задано положение объекта в два различных момента времени. Так, процесс механических колебаний объекта массы m относительно положения равновесия описывается уравнением

$$my'' + hy' + ky = f(t),$$

где $y = y(t)$ – отклонение в момент t точки от положения равновесия; h – коэффициент трения; k – коэффициент упругости восстанавливающей силы; $f(t)$ – внешняя сила. Если задать положения α и β объекта в моменты соответственно τ и τ_*

$$\begin{cases} y(\tau) = \alpha; \\ y(\tau_*) = \beta, \end{cases}$$

то приходим к так называемой *краевой задаче*. Подобная математическая модель возникает и в задаче об электрических колебаниях и др.

П р и м е р. Механические колебания материальной точки описываются уравнением $y'' + 8y' + 17y = e^{-4t}$, причём положение точки в начальный момент и в момент $t = 1$ заданы:

$y(0) = 0,\quad y(1) = 0$.

Определить отклонение $y(t)$ точки от положения равновесия в любой момент времени t.

Решение. Найдём общее решение ЛНУ. Характеристическое уравнение для соответствующего ЛОУ имеет корни $\lambda_{1,2} = -4 \pm i$, поэтому общее решение ЛОУ получаем в виде $y_0 = e^{-4t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$.

Поскольку контрольное число $S = -4$ не совпадает ни с одним из корней, то $y_ч = Me^{-4t}$. Находя $y_ч' = -4Me^{-4t}$ и $y_ч'' = 16Me^{-4t}$ и подставляя результаты в ЛНУ, получаем $16Me^{-4t} - 32Me^{-4t} + 17Me^{-4t} = e^{-4t}$, откуда $M = 1$ так что $y_ч = e^{-4t}$. Следовательно,

$y = y_0 + y_ч = e^{-4t}(1 + C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ – общее решение ЛНУ.

Теперь подставим краевые условия: $t = 0$ и $y = 0$, $t = 1$ и $y = 0$:

$$\begin{cases} 1 + C_1 + 0 = 0; \\ e^{-4}(1 + C_1 \cos 1 + C_2 \sin 1) = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} C_1 = -1; \\ C_2 = \dfrac{-1+\cos 1}{\sin 1}. \end{cases}$$

Окончательно,

$$y(t) = e^{-4t}\left(1-\cos t + \frac{\cos 1 - 1}{\sin 1}\sin t\right)$$

– искомое отклонение в любой момент времени t.

3.4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.4.1. Рассмотрим задачу о нахождении функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ как решений *системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by; \\ \dfrac{dy}{dt} = px + qy, \end{cases} \quad a,\ b,\ p,\ q = \text{const} .$$

Общее решение ищем следующим образом:

а) составим характеристическое уравнение вида $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ p & q-\lambda \end{vmatrix} = 0$;

б) в соответствии с его корнями $\lambda_1,\ \lambda_2$ строим ФСР $\{y_1(t),\ \ y_2(t)\}$ и общее решение

$$\begin{cases} y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t); \\ x = \dfrac{1}{p}(\dot{y} - qy). \end{cases}$$

П р и м е р. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + 4y; \\ \dot{y} = 9x - 6y. \end{cases}$$

Имеем характеристическое уравнение $(a = -6,\ b = 4,\ p = 9,\ q = -6)$

$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 4 \\ 9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$, т.е. $(-6-\lambda)^2 - 36 = 0$,

откуда $\lambda + 6 = \pm 6, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -12$.

Следовательно,

$y_1 = e^0 = 1;\ y_2 = e^{-12t};\ y = C_1 + C_2 e^{-12t}$.

Далее, из второго уравнения системы $x = \dfrac{1}{9}(\dot{y} + 6y)$.

Поскольку

$\dot{y} = \left(C_1 + C_2 e^{-12t}\right)' = -12C_2 e^{-12t}$, то $x = \dfrac{2}{3}\left(C_1 - C_2 e^{-12t}\right)$.

Итак, найдено общее решение заданной системы

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}\left(C_1 - C_2 e^{-12t}\right); \\ y = C_1 + C_2 e^{-12t}. \end{cases}$$

Замечание. Решение системы можно понимать как совокупность возможных траекторий (законов движения) материальной точки в плоскости, найденную по известной зависимости координат $\dot{x},\ \dot{y}$ вектора скорости $\bar{\text{v}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}$ от плоских координат этой точки.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме «Интегралы функций одной переменной»

1-10. Найти неопределённые интегралы.

1. а) $\int \frac{e^{3x}\sqrt{x}-3x^3+4}{2\sqrt{x}}dx$; б) $\int e^{3\cos x-1}\sin x dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$; г) $\int x\sin\frac{x}{3}dx$;

2. а) $\int \frac{3\sqrt{x}\cdot\sin^2 x+2\sin^3 x-1}{\sin^2 x}dx$; б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2+x^4}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+26}}$; г) $\int (1-x)e^{-x}dx$;

3. а) $\int \frac{2x\sqrt{1-x^2}+5-4\sqrt{1-x^2}\cos 4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \frac{1}{\cos^2 x}e^{1+\operatorname{tg} x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$; г) $\int \ln x dx$;

4. а) $\int \frac{4x^3e^{2-x}+5-x^2}{x^3}dx$; б) $\int \frac{2+3\ln x}{x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2-4x}$; г) $\int (x+1)\cos 2x dx$;

5. а) $\int \frac{x^2-4+5x^3\cdot 2^x}{x^3}dx$; б) $\int \frac{1}{x}\cos(2\ln x)dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; г) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$;

6. а) $\int \frac{2-e^x\cos^2 3x+3\cos^3 3x}{\cos^2 3x}dx$; б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{9+4x+x^2}$; г) $\int x^3\ln x dx$;

7. а) $\int \frac{9-4^x\sin^2\frac{x}{2}+5\sin^3\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx$; б) $\int \frac{e^{2\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$; г) $\int x\cos\frac{2x}{5}dx$;

8. а) $\int \frac{2e^x\sin 3x-7e^{8x}+1}{e^x}dx$; б) $\int x\sqrt{3x^2+1}dx$;

в) $\int \frac{dx}{10x-x^2}$; г) $\int (3x-1)2^x dx$;

9. а) $\int \frac{3+5\sqrt{x}+x\cos 2x}{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; г) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$;

10. а) $\int \frac{2(x^2+1)e^{1-x}-4}{x^2+1}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^5 x}$;

в) $\int \frac{dx}{3-2x-x^2}$; г) $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

11 – 20. Найти неопределённые интегралы:

11. $\int \frac{x^3-1}{x^2+2}dx$; 12. $\int \frac{dx}{1+2\sin x}$; 13. $\int \frac{dx}{(x-2)x^2}$; 14. $\int \frac{dx}{2-\cos x}$;

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; 16. $\int \frac{x^3dx}{x^2-4x+4}$; 17. $\int \cos 2x\cos^2 x dx$;

18. $\int \frac{x+5}{x^3+4x^2}dx$; 19. $\int \frac{dx}{6\sin x-\cos x}$; 20. $\int \sin^4 \frac{x}{8}dx$.

21 – 30. Вычислить определённые интегралы.

21. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$; 22. $\int_2^3 \frac{xdx}{2+\sqrt{x-2}}$;

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$; 24. $\int_3^4 \frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$;

25. $\int_0^{1,5} \sqrt{9-4x^2}\,dx$; 26. $\int_0^{8} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; 27. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x+2\sqrt{x+1}}$;

28. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3+\cos x}$; 29. $\int_3^{10} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{x-2}}$; 30. $\int_0^{8} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

31 – 40. Найти несобственные интегралы или установить их расходимость.

31. $\int_2^{\infty} xe^{4-x^2}\,dx$; 32. $\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 33. $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{8+2x^3}$; 34. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

35. $\int_0^{9} \frac{xdx}{\sqrt{9-x}}$; 36. $\int_3^{4} \frac{xdx}{x^2-9}$; 37. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+29}$; 38. $\int_0^{1} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

39. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$; 40. $\int_1^{\infty} \frac{2+\ln x}{x}dx$.

41 – 44. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

41. $y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

42. $y=3\sin x$, $y=0\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

43. $y=4\cos\frac{x}{2}$, $y=0$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$.

44. $y=\sqrt{\ln x}$, $y=0$, $x=e$

45 – 47. Найти площадь фигуры, ограниченной следующими линиями.

45. $y=e^{-x}$, $y=2x+1$, $x=1$.

46. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$.

47. $\begin{cases} x=2\cos t; \\ y=5\sin t. \end{cases}$

48 – 50. Найти длину линии.

48. $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$. 49. $\rho=\cos\varphi$; 50. $\begin{cases} x=3\cos t; \\ y=3\sin t. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме «Кратные и криволинейные интегралы»

51 – 60. Изменить порядок интегрирования.

51. $\int_2^4 dy \int_{-\frac{4}{y}}^{-1} f(x,y)\,dx$; 52. $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{0} f(x,y)\,dx$; 53. $\int_2^3 dx \int_{x^2}^{9} f(x,y)\,dy$;

54. $\int_0^2 dx \int_{2x^2}^{4x} f(x,y)\,dy$; 55. $\int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{-x}}^{1} f(x,y)\,dy$; 56. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{y-1} f(x,y)\,dx$;

57. $\int_1^e dx \int_{\ell n x}^{1} f(x,y)\,dy$; 58. $\int_0^1 dx \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy$; 59. $\int_0^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{\frac{y}{3}} f(x,y)\,dx$;

60. $\int_0^5 dy \int_{y^2}^{25} f(x,y)\,dx$.

61 – 70. Найти массу плоской пластины D заданной плотности $\rho = 2(xy+1)$, расположенной в плоскости $X0Y$, если D ограничена следующими линиями.

61. $y=3x-2,\ y=6x-5,\ y=7$; 62. $y=2x+1,\ y=3x,\ x=0$;

63. $y=4\sqrt{x},\ y=2,\ x=0$; 64. $y=x^2,\ y=2x$;

65. $y=x,\ x+y=2,\ y=2$; 66. $y=x,\ y=2x-2,\ y=0$;

67. $y=x^2,\ y=49$; 68. $y=x-1,\ y=x,\ y=0,\ y=1$;

69. $x+y=2,\ 2x+y=2,\ y=0$; 70. $y=\frac{x}{4},\ y=x,\ y=1$.

71 – 80. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в декартовых координатах.

71. $y=\sqrt{1-x^2},\ y=x,\ y=-x$; 72. $y=\sqrt{9-x^2},\ y=\sqrt{16-x^2},\ y=x,\ x=0$;

73. $x^2+y^2-8y=0$; 74. $y=x\sqrt{3},\ y=\frac{x\sqrt{3}}{3},\ y=\sqrt{4-x^2}$;

75. $(x^2+y^2)^2=9y^2$; 76. $x^2+y^2-10x=0$;

77. $(x^2+y^2)^2=4x^2$; 78. $(x^2+y^2)^2=3x^2+2y^2$;

79. $x=\sqrt{9-y^2},\ y=x,\ y=-x$; 80. $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x$.

81 – 90. Найти массу участка линии, соответствующего значениям $0\le x\le 1$, если её плотность в каждой точке (x,y) пропорциональна абсциссе X с коэффициентом пропорциональности k.

81. $y=x^2-1;\ k=0{,}12$; 86. $y=\frac{1}{2}x^2;\ k=0{,}3$;

82. $y=2+5x^2;\ k=0{,}6$; 87. $y=\frac{1-x^2}{2};\ k=0{,}9$;

83. $y=3-2x^2;\ k=0{,}36$; 88. $y=\frac{x^2}{4};\ k=0{,}15$;

84. $y=2-x^2;\ k=0{,}48$; 89. $y=\frac{x^2+1}{2};\ k=0{,}18$;

85. $y=\frac{x^2+9}{3};\ k=0{,}8$; 90. $y=\frac{x^2}{3};\ k=0{,}4$.

91 – 100. Вычислить работу силы $\overline{F}$ по перемещению материальной точки вдоль контура L. Координаты $\overline{F}$, уравнение линии L, а также значения x_1, x_2 абсцисс (или значения t_1, t_2 параметра t), соответствующих начальному и конечному положению точки, указаны.

91. $\overline{F}=(x+y^2)\bar{i}+2x\bar{j},\ L: y=2\sqrt{x},\ x_1=1,\ x_2=4$;

92. $\overline{F} = -\bar{i} + \left(x^2 + y^2\right)\bar{j},\ L: \begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t, \end{cases}\ t_1 = 0,\ \ t_2 = \pi;$

93. $\overline{F} = 2x\bar{i} + y\bar{j},\ \ L: y = 2\ln x,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = e;$

94. $\overline{F} = -4\bar{i} + \left(4x^2 + 9y^2\right)\bar{j},\ L: \begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 2\sin t, \end{cases}\ t_1 = 0,\ \ t_2 = \pi;$

95. $\overline{F} = x^2 y^2 \bar{i} + 4\bar{j},\ \ y = -\dfrac{1}{x},\ \ x_1 = \dfrac{1}{2},\ \ x_2 = 1;$

96. $\overline{F} = \left(y^2 + 1 - e^{2x}\right)\bar{i} + \bar{j},\ \ L: y = e^x,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 1;$

97. $\overline{F} = \left(4tgx - 2y + 1\right)\bar{i} + \bar{j},\ \ L: y = 2tgx,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = \dfrac{\pi}{4};$

98. $\overline{F} = -\left(4x^2 + y^2\right)\bar{i} + 7\bar{j},\ L: \begin{cases} x = \cos t; \\ y = 2\sin t; \end{cases}\ t_1 = 0,\ \ t_2 = \dfrac{\pi}{2};$

99. $\overline{F} = 6\bar{i} + \bar{j},\ L: \begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}\ t_1 = 0,\ \ t_2 = \pi;$

100. $\overline{F} = y^2 \bar{i} + \left(2 + y - \sin x\right)\bar{j},\ \ L: y = \sin x,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = \dfrac{\pi}{2}.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме «Дифференциальные уравнения»

101 – 110. Найти общее решение уравнений.

101. а) $\sqrt{2 + x^2}\, y' = xy^2$; б) $xy' - y = \dfrac{x^3}{y^2}$; в) $y' + 2y = xe^{-x}$.

102. а) $y\cos x dx = (1 + \sin x)\, dy$; б) $2xy' = 2y + 3\sqrt{xy}$; в) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

103. а) $\left(y - 3xy\right) y' + 2 = 0$; б) $y' - \dfrac{y}{x} = 2y^2$; в) $3y' - \dfrac{3y}{x} = \sin^2 \dfrac{3y}{x}$.

104. а) $y'\left(1 - e^x\right) = 2ye^x$; б) $3y' = \dfrac{3y}{x} + \dfrac{y^3}{x^3}$; в) $y' - \dfrac{y}{x+2} = 4\sqrt{x+2}$.

105. а) $y' = 4\sqrt{x}e^{-4y}$; б) $y' - \dfrac{2y}{2x + y} = 0$; в) $y' + y = 3y^3 e^{-x}$.

106. а) $y(\sin x)\, dx = -(\ln y)\, dy$; б) $y' - \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{(x+1)^3}{y}$; в) $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$.

107. а) $(1 - x)\, dy - \left(\cos^2 2y\right) dx = 0$; б) $4y' \cdot x = 4y + \dfrac{5x^2}{3y}$; в) $y' = y - 2x$.

108. а) $xdy + y\sqrt{\ln x}dx = 0$; б) $y' - \dfrac{y}{x-1} = (x-1)^3$; в) $3x \cdot y' = 3y + x \cdot \sin^2 \dfrac{y}{2x}$.

109. а) $y' = (3y + 2)\mathrm{ctg}3x$; б) $y' = \dfrac{y}{x} - 2\sqrt{2 + \dfrac{y}{x}}$; в) $y' + \dfrac{y}{\sqrt{x}} = 3e^{-2\sqrt{x}}$.

110. а) $y'\sqrt{\mathrm{arctg}\, x} = \dfrac{y+1}{1 + x^2}$; б) $xyy' = y^2 + 2x^2$; в) $y' - 3y = 2e^{2x}$.

111 – 120. Решить задачу Коши.

111. $\begin{cases} y''(2y + 3) = 2(y')^2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 3. \end{cases}$ 112. $\begin{cases} (1 + x)y'' - y' = (1 + x)^2; \\ y(0) = 2; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ 113. $\begin{cases} (y'')^2 = 1 + (y')^2; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

114. $\begin{cases} y'' = \dfrac{1 + y'}{2 + x}; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ 115. $\begin{cases} e^{-6y} y'' = 3; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$ 116. $\begin{cases} x(y'' + 1) + y' = 0; \\ y(1) = 0; \\ y'(1) = 1. \end{cases}$

117. $\begin{cases} y'' = \dfrac{2(y')^2}{y-1}; \\ y(0)=0; \\ y'(0)=1. \end{cases}$ 118. $\begin{cases} y''\operatorname{tg} y = 2(y')^2; \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}; \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1. \end{cases}$ 119. $\begin{cases} y''(1+y) = 5(y')^2; \\ y(0)=0; \\ y'(0)=1. \end{cases}$

120. $\begin{cases} y'' + \dfrac{2y'}{x} = x^{-2}; \\ y(1)=-1; \\ y'(1)=0. \end{cases}$

121 – 130. Найти общее решение уравнений.

121. $y''+16y'=4$. 122. $y''+2y'+y=-\sin x$. 123. $y''-12y'=12x$.

124. $y''+2y'=-e^{-2x}$. 125. $y''+5y'=x-2$. 126. $y''+13y'=x^2+12$.

127. $y''-5y'=\cos x-5\sin x$. 128. $y''-16y=3\sin 4x$. 129. $y''-49y=7\cos 7x$.

130. $y''+10y'+25y=4x$.

131 – 140. Механические колебания материальной точки описываются уравнением $y''+py'+qy=f(t)$, где $y=y(t)$ – отклонение в момент времени t колеблющейся точки от положения равновесия, p, q – постоянные коэффициенты, $f(t)$ – внешняя сила. Положение точки в начальный момент и момент $t=1$ заданы: $y(0)=0$, $y(1)=2$. Определить $y(t)$ (значения постоянных вычислять приближенно с точностью до 0,1).

131. $p=4,\ q=5;\ f(t)=e^{-2t}$. 132. $p=2,\ q=10;\ f(t)=3e^{-t}$.

133. $p=0,\ q=9;\ f(t)=3\cos t$. 134. $p=0,\ q=16;\ f(t)=4\sin 2t$.

135. $p=6,\ q=10;\ f(t)=\sin 6t$. 136. $p=10,\ q=26.\ f(t)=2\cos t$.

137. $p=6,\ q=25;\ f(t)=4e^{-t}$. 138. $p=4,\ q=20;\ f(t)=4e^{-t}$.

139. $p=6,\ q=18;\ f(t)=3e^{-5t}$. 140. $p=6,\ q=90;\ f(t)=\sin t$.

141 – 150. Дана зависимость координат $\dot{x}$, $\dot{y}$ вектора скорости $\bar{v}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}$ материальной точки от плоских координат $(x,\ y)$.

Восстановить закон движения $\begin{cases} x=x(t,\ C_1,\ C_2); \\ y=y(t,\ C_1,\ C_2). \end{cases}$

141. $\begin{cases} \dot{x}=8x+9y; \\ \dot{y}=4x+8y. \end{cases}$ 142. $\begin{cases} \dot{x}=x+25y; \\ \dot{y}=x+y. \end{cases}$ 143. $\begin{cases} \dot{x}=2x-y; \\ \dot{y}=4x-3y. \end{cases}$ 144. $\begin{cases} \dot{x}=3x+2y; \\ \dot{y}=4x+5y. \end{cases}$

145. $\begin{cases} \dot{x}=7x+y; \\ \dot{y}=4x+7y. \end{cases}$ 146. $\begin{cases} \dot{x}=9x-y; \\ \dot{y}=-x+9y. \end{cases}$ 147. $\begin{cases} \dot{x}=2x+4y; \\ \dot{y}=9x+2y. \end{cases}$

148. $\begin{cases} \dot{x}=5x+16y; \\ \dot{y}=4x+5y. \end{cases}$ 149. $\begin{cases} \dot{x}=x+8y; \\ \dot{y}=2x+y. \end{cases}$ 150. $\begin{cases} \dot{x}=x+y; \\ \dot{y}=8x+3y. \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Арамонович. – М. : Наука, 1967. – 736 с.
2. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 640 с.
3. Нахман, А.Д. Дифференциальные уравнения / А.Д. Нахман. – Тамбов : Тамб. гос. техн. ун-т, 1999. – 96 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – Т. 1, 2. – М. : Наука, 1978. – Т. 1: 456 с., Т. 2: 576 с.