
А.Н. ГУЗАЧЁВ, О.В. ДЁМИН, В.Е. БУЛАНОВ

МЕХАНИКА
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

◆ Издательство ГОУ ВПО ТГТУ ◆

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Тамбовский государственный технический университет"

А.Н. ГУЗАЧЁВ, О.В. ДЁМИН, В.Е. БУЛАНОВ

**МЕХАНИКА
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

*Утверждено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия*



Тамбов
◆Издательство ГОУ ВПО ТГТУ◆
2011

УДК 539.3(075.8)
ББК Ж121я73
Г937

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
В.М. Червяков

Доктор технических наук, профессор
П.В. Монастырёв

Г937 **Гузачёв А.Н.**

Механика: Теоретическая механика. Сопротивление материалов: учебно-методический комплекс / А.Н. Гузачёв, О.В. Дёмин, В.Е. Буланов. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2011. – 104 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-0970-8.

Даны общие положения по изучению тем курсов "Теоретическая механика" и "Сопротивление материалов", вопросы для самопроверки, задания для контрольных работ, примеры их выполнения; предложены тесты по изучаемым дисциплинам, сортамент материалов, список рекомендуемой литературы.

Предназначено для студентов заочного отделения специальностей 261201 "Технология и дизайн упаковочного производства", 270102 "Промышленное и гражданское строительство", 270105 "Городское строительство", 190601 "Автомобили и автомобильное хозяйство".

УДК 539.3(075.8)
ББК Ж121я73

ISBN 978-5-8265-0970-8 © Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Тамбовский государственный технический университет" (ГОУ ВПО ТГТУ), 2011

Учебное издание

ГУЗАЧЁВ Александр Николаевич,
ДЁМИН Олег Владимирович,
БУЛАНОВ Владимир Евгеньевич

МЕХАНИКА
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методический комплекс

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсеева

Подписано в печать 31.01.2011
Формат 60×84 /16. 6,04 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 46

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

Часть 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ВВЕДЕНИЕ

Под названием "механика" объединяется ряд наук, изучающих механическое движение и механическое взаимодействие твёрдых и деформируемых тел, а также жидких и газообразных сред.

Механика – одна из древнейших наук. Она возникла и развивалась под влиянием запросов общественной практики, а также благодаря любознательности человеческого разума. Рождение механики произошло одновременно с изобретением, изготовлением и применением человеком первых древнейших орудий труда – рычага, наклонной плоскости, блока, клина, винта, верёвки. Эти простейшие орудия сыграли роль научных методов, послуживших средством доказательства важнейших теорем и принципов механики. Архимедом (287 – 212 гг. до новой эры) было обнаружено, что законы равновесия различных машин можно свести к равновесию рычага. Голландский учёный Стевин (1548 – 1620) с помощью наклонной плоскости открыл закон параллелограмма сил. Лагранж (1736 – 1833) использует систему блоков для доказательства основного принципа статики – принципа возможных перемещений. Равновесие верёвки и верёвочного многоугольника под действием сил послужило основой для создания графостатики, с помощью которой были выполнены многие расчёты стержневых систем. Таким образом, эти простейшие орудия, предназначенные для поднятия тяжестей, оказались средствами абстрактного научного мышления.

Теоретическая механика относится к числу физико-математических дисциплин. Законы механики носят физический характер. Рабочими инструментами механики служат различные математические методы. Многие математики внесли существенный вклад в развитие механики.

Теоретическая механика является научной основой целого ряда инженерных дисциплин – сопротивления материалов, теории механизмов и машин, статики и динамики сооружений, строительной механики, деталей машин и других. Теоретическая механика служит научной базой целого ряда важнейших направлений современной техники. Теоретическая механика направляет творческую интуицию учёных и инженеров, давая им в краткой и ясной форме итог колоссального опыта человечества. Развитие современной науки и техники указывает на всё возрастающее значение теоретической механики.

Прежде чем приступить к выполнению контрольных работ, студенту необходимо самостоятельно изучить предложенные темы по рекомендованной литературе, рассмотреть примеры решения задач, проверить и закрепить усвоенные знания с помощью тестовых вопросов.

Тема 1. СТАТИКА

Статика – изучает условия относительного равновесия механических систем. Для осуществления равновесия необходимо определённое соотношение сил, поэтому в статике изучаются общие свойства сил, правила замены сил другими силами, эквивалентными с точки зрения равновесия. В этой теме рассматриваются основные понятия и аксиомы статики. Особое внимание следует обратить на сложение сил и систему сходящихся сил. Необходимо познакомиться с системой параллельных сил, расположенных в одной плоскости и в пространстве. Требуется выяснить некоторые особенности трения скольжения и качения, приёмы определения центра тяжести твёрдого тела.

Литература: [1, гл. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII]; [2, т. 1, гл. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII].

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные аксиомы статики.
2. Какие виды связей и их реакции вам известны?
3. Что называется моментом силы относительно точки и оси?
4. Перечислите законы Кулона для сухого трения скольжения при покое.
5. Перечислите законы трения качения.
6. Перечислите приёмы определения положения центра тяжести.

Тема 2. КИНЕМАТИКА

Кинематика – изучает механическое движение без учёта сил, вызывающих это движение или влияющих на него. Таким образом, устанавливаются некоторые количественные меры движения с чисто геометрической точки зрения. В этой теме рассматривается кинематика точки и тела. В частности, способы задания движения точки, скорость и ускорение точки, простейшие и сложное движение точки и тела.

Литература: [1, гл. IX, X, XI, XII, XIII, XIV]; [2, т. 1, гл. IX, X, XI, XII, XIII, XIV].

Вопросы для самопроверки

7. Перечислите способы задания движения точки.
8. Что называется скоростью и ускорением точки?
9. Перечислите простейшие случаи движения твёрдого тела.
10. Что называется угловой скоростью и ускорением точки?
11. Что называется относительным, переносным и абсолютным движением точки?

Тема 3. ДИНАМИКА

Динамика – изучает механическое движение в связи с действующими силами на объект движения. Таким образом, изучается связь между движением и действующими силами. Динамика делится на *динамику материальной точки* и *динамику материального тела*.

В данной теме рассматриваются основные законы динамики, силы инерции, колебательное движение материальной точки. Требуется познакомиться с понятием работы и мощности, коэффициентом полезного действия. Особое внимание требуется уделить динамике плоского движения твёрдого тела, принципу Даламбера, общим теоремам динамики.

Литература: [1, гл. XV – XXXI]; [2, т. 2, гл. IX – XI].

Вопросы для самопроверки

12. Что называется работой силы и мощностью?
13. Что называется свободными и вынужденными колебаниями?
14. Перечислите основные законы динамики.
15. Перечислите задачи динамики.
16. Перечислите общие теоремы динамики.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Каждый студент-заочник выполняет по механике контрольные работы, предусмотренные учебным планом.

Исходные данные для решения задач выбираются студентом из прилагаемых к условиям задач таблиц в соответствии с личным учебным шифром (номер зачётной книжки и две цифры, выданные преподавателем) и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например:

шифр 2 8 7 0 5 2;

буквы а б в г д е.

Из каждого вертикального столбца таблицы, обозначенного внизу буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. Например, вертикальные столбцы табл. 1 обозначены буквами "а", "б", "в", "г", "д", "е", "ж". В этом случае при указанном выше личном номере 287052 студент должен взять из столбца "а" вторую строку (номер схемы 2), из столбцов "б" – восьмую строку ($P_1 = 0$ и $P_2 = 14$ кН), из столбцов "в" – седьмую строку ($q_1 = 0$ и $q_2 = 19$ кН/м из следующих столбцов "б" – восьмую строку ($M_1 = 18$ кН·м и $M_2 = 0$), из столбца "г" – нулевую строку ($a = 3$ м), и т.д. Работы, выполненные с нарушением этих указаний, не засчитываются.

Приступать к решению контрольных заданий следует только после изучения соответствующего раздела курса и самостоятельного решения рекомендованных задач. Если основные положения теории усвоены слабо и студент обратил мало внимания на подробно разобранные в курсе примеры, то при выполнении контрольных работ возникнут большие затруднения.

В заголовке контрольной работы должны быть написаны: номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента (полностью), название специальности, учебный шифр, дата отсылки работы, точный почтовый адрес. Необходимо также указывать год издания методических указаний, по которым выполнялась контрольная работа.

Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради или на листах, сшитых в тетрадь стандартного формата А4 (210×297), четким почерком, с полями 5 см для замечаний рецензента.

Перед решением каждой задачи надо написать полностью её условие с числовыми данными, вычертить заданную схему в масштабе и указать на ней в числах все величины, необходимые для расчёта. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными объяснениями и схемами. Надо помнить, что язык техники – формулы и чертежи.

Не следует вычислять большое число значащих цифр; вычисления должны соответствовать необходимой точности. Нет смысла длину деревянного бруса в стропилах вычислять с точностью до миллиметра, но было бы ошибкой округлять до целых миллиметров диаметр вала, на который будет насажен шариковый подшипник.

При пользовании формулами или данными, отсутствующими в учебнике, необходимо указать источник (автора, название, страницу, номер формулы).

Необходимо указывать размерность всех величин и подчеркивать окончательные результаты.

По получении из университета контрольной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и выполнить все сделанные ему указания. Исправления выполняются на отдельных листах, вкладываемых в соответствующие места рецензированной работы. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

Несамостоятельно выполненные задания не дают возможности преподавателю-рецензенту вовремя заметить недостатки в работе студента-заочника. В результате студент не приобретает необходимых знаний и оказывается неподготовленным к экзамену.

Задача 1

Задание. Для стержня, нагруженного заданными силами (рис. 1), требуется определить и проверить реакции опор. Данные взять по шифру из табл. 1.

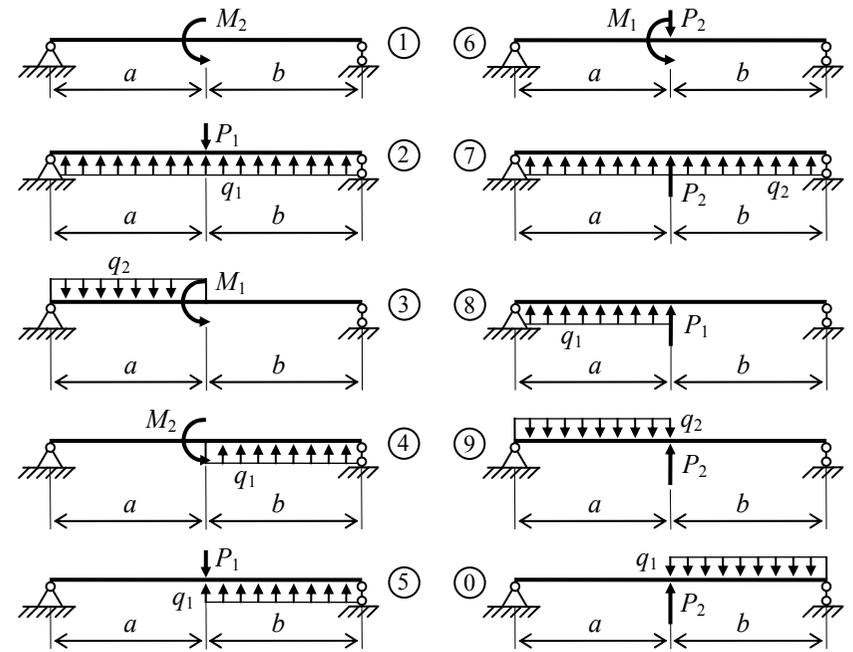


Рис. 1

Таблица 1

№ строки	№ схемы	P_1	P_2	M_1	M_2	q_1	q_2	a	b	c	d
		кН		кН·м		кН/м		м			
1	1	10	–	–	30	20	–	1,0	2,0	1,5	1,2
2	2	–	20	20	–	–	25	1,5	1,7	1,8	2,0
3	3	30	–	25	–	15	–	1,9	2,0	2,1	3,0
4	4	15	–	–	17	–	18	1,4	1,5	3,0	2,0
5	5	–	20	19	–	10	–	1,1	1,4	2,0	2,2
6	6	32	–	22	–	30	–	2,3	2,4	1,6	1,8
7	7	22	–	18	–	–	17	2,0	2,2	1,3	1,4
8	8	–	14	–	25	–	19	1,5	1,6	1,7	1,8
9	9	30	–	13	–	16	–	3,0	2,2	2,3	3,0
0	0	20	–	–	40	–	20	3,0	3,2	1,8	2,0
	а	б	б	в	в	б	б	г	д	е	г

Методические указания

Для решения задачи необходимо определить вид опор, показать и обозначить соответствующие им реакции, составить уравнения равновесия (уравнения статики) и решить их. После расчёта обязательно выполнить проверку найденных реакций опор. Для проверки составляются дополнительные уравнения равновесия стержня, в которых должны присутствовать все проверяемые реакции опор. Решение считается правильным, если относительная погрешность меньше 1%.

Пример 1.1. Для стержня (рис. 1.1, а) требуется определить реакции связей.

Дано: $P = 10$ кН; $q = 20$ кН/м; $a = 2$ м.

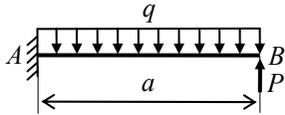


Рис. 1.1, а

Решение. Покажем реакции опор (рис. 1.1, б) и вычислим их, используя уравнения статики:

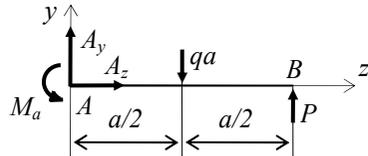


Рис. 1.1, б

$$\sum Z = 0; \quad A_z = 0.$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_a - qa \frac{a}{2} + Pa = 0;$$

$$M_a = qa \frac{a}{2} - Pa = 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_B = 0; \quad M_a - A_y a + qa \frac{a}{2} = 0;$$

$$A_y = \frac{M_a + qa \frac{a}{2}}{a} = \frac{20 + 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2}}{2} = 30 \text{ кН}.$$

Проверка реакций опор: $\sum y = 0; \quad A_y - qa + P = 0; \quad 30 - 20 \cdot 2 + 10 = 0.$

Реакции опор найдены верно.

Пример 1.2. Для стержня (рис. 1.2, а) требуется определить реакции опор.

Дано: $P = 10$ кН; $a = 2$ м; $b = 2$ м.

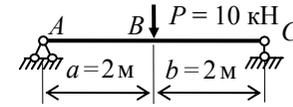


Рис. 1.2, а

Решение. Покажем реакции опор (рис. 1.2, б) и вычислим их, используя уравнения статики:

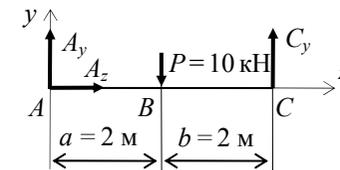


Рис. 1.2, б

$$\sum Z = 0; \quad A_z = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -Pa + C_y(a + b) = 0; \quad C_y = \frac{Pa}{a + b} = \frac{10 \cdot 2}{2 + 2} = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; \quad Pa - A_y(a + b) = 0; \quad A_y = \frac{Pa}{a + b} = \frac{10 \cdot 2}{2 + 2} = 5 \text{ кН}.$$

Проверка реакций опор: $\sum y = 0; \quad A_y - P + C_y = 0; \quad 5 - 10 + 5 = 0.$

Реакции опор найдены верно.

Задача 2

Задание 2.1. Точка B движется в плоскости xu . Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах; t – в секундах (табл. 2).

Требуется: найти уравнение траектории точки; определить скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории для момента времени $t_1 = 1$ с.

Таблица 2

№ строки	$x = f_1(t)$	$y = f_2(t)$	$s = f(t)$
1	$6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$	$12 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
3	$2 - 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-3 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$6t - 2t^2$
4	$t - 4$	$9 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$4 - 2t$	$3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$2 - t$	$10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-3 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
7	$2t$	$6 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2 - 10t$
8	$8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	$-2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
9	$12 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$9 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
0	$4 - 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
	а	б	в

Методические указания

Задача относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяют скорость и ускорения точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания её движения. Для

упрощения решения следует использовать известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1; \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

Пример 2.1. Даны уравнения движения точки в плоскости xOy :

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3; \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1 \quad (x \text{ и } y - \text{ в сантиметрах; } t - \text{ в секундах})$$

(рис. 2.1). Требуется получить уравнение траектории точки и для заданного момента времени ($t_1 = 1$ с) найти: скорость и ускорение точки; касательную и нормальную составляющие вектора ускорения; радиус кривизны траектории.

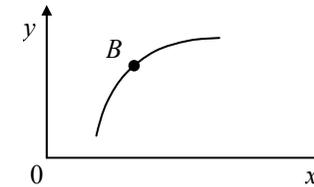


Рис. 2.1

Решение.

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения t . Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right).$$

Из уравнения движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство. Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}; \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2}.$$

Следовательно,
$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда получаем уравнение траектории точки $x = (y+1)^2 + 1$.

2. Найдём скорость точки по её проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right); \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Для заданного момента времени ($t_1 = 1$ с) получаем:

$$v_{1x} = 1,11 \text{ см/с}; \quad v_{1y} = 0,73 \text{ см/с}; \quad v_1 = 1,31 \text{ см/с}.$$

3. Аналогично найдём ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right); \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Для заданного момента времени ($t_1 = 1$ с) получаем:

$$a_{1x} = 0,87 \text{ см/с}^2; \quad a_{1y} = -0,12 \text{ см/с}^2; \quad a_1 = 0,88 \text{ см/с}^2.$$

4. Касательное ускорение найдём, дифференцируя по времени равенство $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Получим $2v \frac{dv}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt}$, откуда

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}.$$

Для заданного момента времени ($t_1 = 1$ с) получаем $a_{1\tau} = 0,66 \text{ см/с}^2$.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставив найденные числовые величины, получим, что при $t_1 = 1$ с, $a_{1n} = 0,58 \text{ см/с}^2$.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = \frac{v^2}{a_n}$. Подставив найденные числовые величины, получим, что при $t_1 = 1$ с, $\rho_1 = 3,05 \text{ см}$.

Ответ: $v_1 = 1,31 \text{ см/с}; \quad a_1 = 0,88 \text{ см/с}^2; \quad a_{1\tau} = 0,66 \text{ см/с}^2;$
 $a_{1n} = 0,58 \text{ см/с}^2; \quad \rho_1 = 3,05 \text{ см}.$

Задание 2.2. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону $s = f(t)$, заданному в табл. 2 (s – в метрах, t – в секундах), где $s = AM$ – расстояние точки от некоторого начала A , измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с. Изобразить на рисунке векторы \vec{v} и \vec{a} , считая, что точка в этот момент находится в положении M , а положительное направление отсчёта s – от A к M .

Пример 2.2. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону $s = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ (s – в метрах, t – в секундах), где $s = AM$ (рис. 2.2).

Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Определяем скорость точки $v = \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$.

При $t_1 = 1$ с получаем $v_1 = 1,11$ м/с .

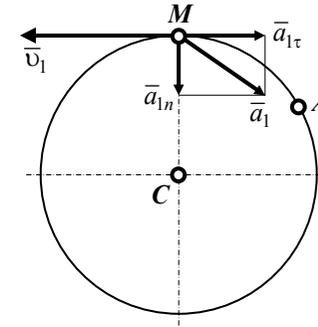


Рис. 2.2

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{8} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}.$$

При $t_1 = 1$ с получаем:

$$a_{1\tau} = 0,87 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{1n} = 0,62 \text{ м/с}^2;$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1n}^2 + a_{1\tau}^2} = 1,07 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рис. 2.2 векторы \bar{v}_1 и \bar{a}_1 , учитывая знаки и считая положительным направлением от A к M .

Задача 3

Задание. Вертикальный вал AK (рис. 3), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$, закреплён подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. 3. ($AB = BD = DE = EK = a$). К валу жёстко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой $m = 10$ кг, состоящий из двух частей 1 и 2

(размеры частей показаны на рисунках, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $4b$ с точечной массой $m_3 = 3$ кг на конце. Оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней и углы α, β, γ даны в табл. 3. Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчётах принять: $a = 0,6$ м; $b = 0,1$ м.

Таблица 3

№ строки	№ схемы	Подшипник в точке	Точка крепления стержня		α	β	γ
			ломаного	невесомого			
1	1	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	45	135	60
2	2	<i>K</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	60	240	45
3	3	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>B</i>	30	210	45
4	4	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	60	150	30
5	5	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>K</i>	30	120	60
6	6	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	45	225	30
7	7	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	60	150	60
8	8	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>K</i>	30	120	30
9	9	<i>E</i>	<i>K</i>	<i>D</i>	60	130	45
0	0	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	140	60
	е	а	б	б	в	г	д

Методические указания

Данная задача предназначена для применения к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\overline{R^И}$, то численно $\overline{R^И} = ma_c$, где a_c – ускорение центра масс C тела, но линия действия силы $\overline{R^И}$ в общем случае не проходит через точку C .

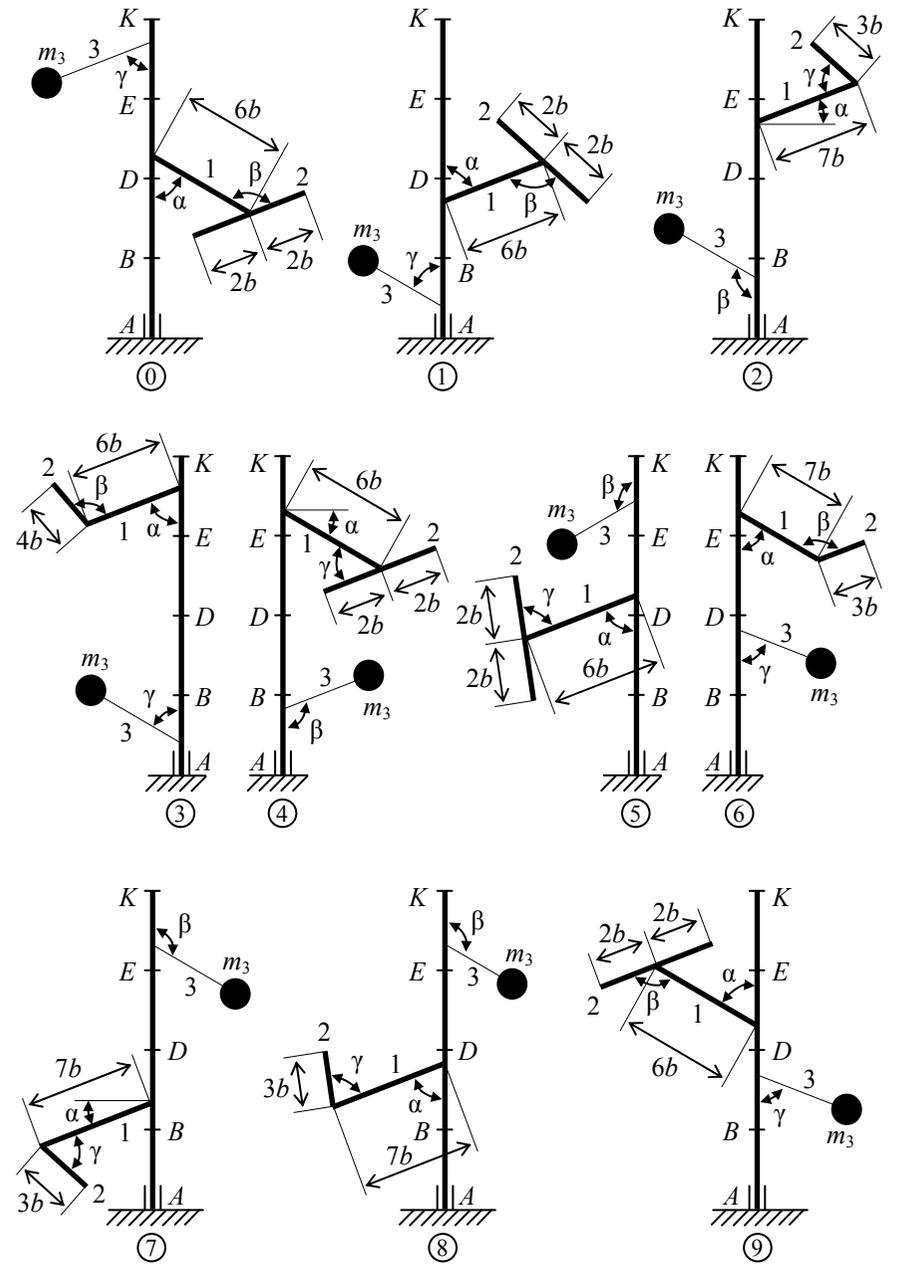


Рис. 3

Пример 3. Вертикальный вал длиной $3a$ ($AB = BD = DE = a$), закреплённый подпятником A и подшипником D (рис. 3, а), вращается с постоянной угловой скоростью ω . К валу жёстко прикреплен в точке E ломаный однородный стержень массой m и длиной $10b$, состоящий из двух частей 1 и 2, а в точке B прикреплен невесомый стержень длиной $5b$ с точечной массой m_3 на конце. Все стержни лежат в одной плоскости.

Дано: $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$; $m = m_1 + m_2 = 10 \text{ кг}$; $m_3 = 2 \text{ кг}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 150^\circ$; $\gamma = 60^\circ$; $a = 0,3 \text{ м}$; $b = 0,1 \text{ м}$.

Определить: реакции подпятника A и подшипника D , пренебрегая весом вала.

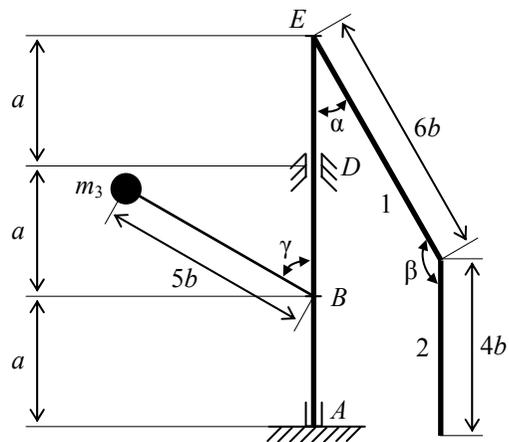


Рис. 3, а

Решение.

1. Покажем (с учётом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках B и E стержни (рис. 3, б). Массы и веса частей 1 и 2 ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны: $m_1 = 0,6m$; $m_2 = 0,4m$; $P_1 = 0,6mg$; $P_2 = 0,4mg$; $P_3 = m_3g$.

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведём вращающиеся вместе с валом координатные оси $Axу$, расположив стержни в плоскости xy , покажем действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести \bar{P}_1 , \bar{P}_2 , \bar{P}_3 и реакции связей – составляющие реакции подпятника \bar{X}_A , \bar{Y}_A и реакцию цилиндрического подшипника \bar{R}_D .

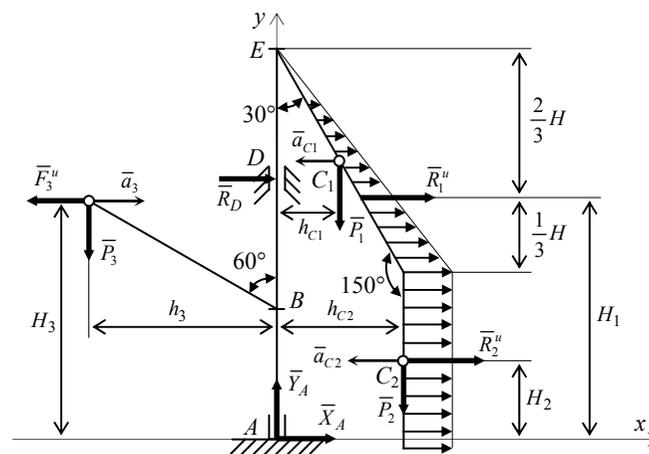


Рис. 3, б

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения \bar{a}_k , направленные к оси вращения, а численно $\bar{a}_k = \omega^2 h_k$, где h_k – расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции F_k^n будут направлены от оси вращения, а численно $\bar{F}_k^n = \Delta m_k a_k = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где Δm_k – масса элемента. Так как все \bar{F}_k^n пропорциональны h_k , то эпюры этих параллельных сил инерции ломаного стержня образуют для части 1 треугольник, а для части 2 – прямоугольник (рис. 3, б).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим её равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^n = m a_C$, где m – масса тела, a_C – ускорение его центра масс, то для частей стержня, соответственно, получим

$$R_1^n = m_1 a_{C1}; \quad R_2^n = m_2 a_{C2}. \quad (1)$$

Сила инерции точечной массы m_3 направлена в сторону, противоположную её ускорению и численно равна

$$F_3^n = m_3 a_3. \quad (2)$$

Ускорения центров масс частей 1 и 2 стержня и груза 3 равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}, \quad a_{C2} = \omega^2 h_{C2}, \quad a_3 = \omega^2 h_3. \quad (3)$$

Здесь h_{C1} , h_{C2} – расстояния центров масс частей стержня 1 и 2 от оси вращения, а h_3 – соответствующее расстояние груза 3:

$$h_{C1} = 3b \sin 30^\circ = 0,15 \text{ м}; \quad h_{C2} = 6b \sin 30^\circ = 0,3 \text{ м}; \\ h_3 = 5b \sin 60^\circ = 0,43 \text{ м}. \quad (4)$$

Подставив в (1) и (2) значения (3) и (4), получим числовые значения R_1^u , R_2^u , F_3^u :

$$R_1^u = 0,6m\omega^2 h_{C1} = 57,6 \text{ Н};$$

$$R_2^u = 0,4m\omega^2 h_{C2} = 76,8 \text{ Н};$$

$$F_3^u = m_3\omega^2 h_3 = 55,0 \text{ Н}.$$

При этом линии действия равнодействующих \bar{R}_1^u , \bar{R}_2^u пройдут через центры тяжести соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия действия \bar{R}_1^u проходит на расстоянии $\frac{2}{3}H$ от вершины треугольника E , где $H = 6b \cos 30^\circ = 0,52 \text{ м}$.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + R_D + R_1^u + R_2^u - F_3^u = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad -R_D 2a - P_1 h_{C1} - P_2 h_{C2} + P_3 h_3 - R_1^u H_1 - R_2^u H_2 + F_3^u H_3 = 0.$$

Здесь H_1 , H_2 , H_3 – плечи сил R_1^u , R_2^u , F_3^u относительно точки A , равные:

$$H_1 = 3a - \frac{2}{3}H = 0,55 \text{ м};$$

$$H_2 = 3a - (H + 2b) = 0,18 \text{ м};$$

$$H_3 = a + 5b \cos 60^\circ = 0,55 \text{ м}.$$

Подставив в систему уравнений (5) соответствующие величины и решив эту систему уравнений, найдём искомые реакции.

Ответ: $X_A = -33,7 \text{ Н}$; $Y_A = 117,7 \text{ Н}$; $R_D = -45,7 \text{ Н}$.

**ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

1. Если сила приложена в одной точке, то она называется _____.
A) сосредоточенной
B) распределённой
C) объёмной
D) плоской

2. Реакция шарнирно-неподвижной опоры без трения проходит _____, но направление её неизвестно.
A) по касательной к шарниру
B) через центр шарнира
C) вне шарнира
D) через хорду шарнира

3. Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из трёх координатных осей равнялись _____.
A) нулю
B) друг другу
C) десяти
D) геометрической сумме

4. Расстояние между линиями действия сил пары называется её _____.
A) длиной
B) шириной
C) плечом
D) величиной

5. Момент пары вычисляется _____ модуля сил, образующих пару, на её плечо.
A) делением
B) умножением

6. Сопротивление возможному или действительному перемещению соприкасающихся тел, возникающему в месте их соприкосновения называется _____.
A) трением
B) смещением
C) кручением
D) противодействием

7. **Центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его _____.**
A) сторон
B) перпендикуляров
C) хорд
D) медиан
8. **Максимальная сила трения скольжения _____ силе нормального давления тела на опорную поверхность.**
A) пропорциональна
B) равна
C) параллельна
D) обратно пропорциональна
9. **При _____ способе задания движения даётся траектория, т.е. линия, по которой движется точка.**
A) векторном
B) координатном
C) плоском
D) естественном
10. **Характеристикой быстроты и направления движения точки является _____.**
A) скорость
B) ускорение
C) перемещение
D) вращение
11. **Быстрота изменения скорости характеризуется _____.**
A) скоростью
B) перемещением
C) вращением
D) ускорением
12. **Движение, при котором все точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения, всё время остаются неподвижными, называется _____.**
A) вращательным
B) поступательным
C) сложным
D) спокойным

13. Движение, при котором движется точка относительно системы отсчёта, перемещающейся по отношению к некоторой другой системе отсчёта, принятой за неподвижную, называется _____.
- A) вращательным
 - B) поступательным
 - C) плоским
 - D) сложным
14. Движение точки по отношению к подвижной системе координат называется _____ движением точки.
- A) относительным
 - B) абсолютным
 - C) переносным
 - D) вращательным
15. Движение точки, обусловленное движением подвижной системы координат, называется _____ движением точки.
- A) переносным
 - B) относительным
 - C) абсолютным
 - D) вращательным
16. Удвоенное векторное произведение мгновенной угловой скорости подвижной системы координат на вектор относительной скорости это есть _____.
- A) ускорение Кориолиса
 - B) переносное ускорение
 - C) относительное ускорение
 - D) окружная скорость
17. Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние – это _____.
- A) основной закон динамики (2-й закон Ньютона)
 - B) закон инерции (1-й закон)
 - C) закон равенства действия и противодействия (3-й закон Ньютона)
 - D) закон независимости сил
18. Примерами _____ сил могут служить сила тяжести, сила давления воды, давление ветра, сыпучих грузов и т.д.
- A) распределённых
 - B) сосредоточенных
 - C) активных
 - D) реактивных

19. При совпадении частот вынужденных и свободных колебаний возникает явление _____ .

- A) дисбаланса
- B) ползучести
- C) резонанса
- D) релаксации

20. В каждый момент движения сумма активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю – это принцип _____ .

- A) Даламбера
- B) Пуассона
- C) Ньютона
- D) Гука

21. Для плоской системы сил число независимых уравнений равновесия равно _____ .

- A) двум
- B) трём
- C) шести
- D) восемнадцати

22. Для пространственной системы сил число независимых уравнений равновесия равно _____ .

- A) двум
- B) трём
- C) шести
- D) восемнадцати

Правильные ответы

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	A	B	A	C	B	A	D	A	D	A	D

Вопрос	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Ответ	A	D	A	A	A	B	A	C	A	B	C

Часть 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – учебная дисциплина о прочности, жёсткости и устойчивости элементов несущих конструкций. Неправильный расчёт самой незначительной детали может повлечь за собой очень тяжёлые последствия – привести к разрушению конструкции в целом. При проведении расчётов необходимо стремиться к сочетанию надёжности работы конструкции с её дешевизной, добиваться наибольшей прочности при наименьшем расходе материала.

Сопротивление материалов – одна из сложных дисциплин, изучаемых в высших технических учебных заведениях; занятия по этому курсу должны обязательно сопровождаться составлением конспекта и решением задач. Если при решении задач возникают затруднения, следует воспользоваться имеющимися в задачниках указаниями и примерами, но совершенно необходимо научиться самостоятельно решать задачи и делать выводы формул. При этом нужно обращать внимание на физическую сущность явления и на те допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов. Необходимо хорошо разбираться в чертежах, которыми сопровождаются выводы формул. После изучения каждой темы следует ответить на вопросы для самопроверки.

Студенты-заочники специальности 261201 "Технология и дизайн упаковочного производства" изучают "Сопротивление материалов" в рамках дисциплины "Механика" и выполняют только часть представленных контрольных работ. Следует обратить внимание на то, что при построении эпюр изгибающих моментов студенты данной специальности в отличие от приведённых примеров строят эпюры на сжатом волокне.

Студенты-заочники специальностей 27103 "Промышленное и гражданское строительство", 27105 "Городское строительство" и 190601 "Автомобили и автомобильное хозяйство" изучают "Сопротивление материалов" в пятом и шестом семестрах. Соответственно числу семестров весь курс сопротивления материалов поделён на две части. В пятом семестре студенты изучают цели, задачи, основные гипотезы сопротивления материалов, геометрические характеристики плоских сечений и простые виды деформаций прямого бруса (растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, изгиб). В шестом семестре – сложное сопротивление, изгиб криволинейного стержня, методы определения перемещений, устойчивость, удар, статически неопределимые балки.

До сдачи зачёта необходимо выполнить контрольные работы и лабораторный практикум. Перед каждым лабораторным занятием преподаватели дают необходимые пояснения. В лаборатории студент обязан детально ознакомиться с образцами, испытательными машинами, измерительными

приборами, при проведении опыта сделать соответствующие записи в журнале и обработать результаты наблюдений.

Тема 4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой теме даны основные понятия, которые необходимо хорошо усвоить. Особое внимание следует обратить на понятия деформаций и напряжений. Для определения напряжений пользуются методом сечений. Сущность его заключается в том, что твёрдое тело, находящееся в равновесии, разрезают (мысленно) на две части, отбрасывают одну из частей, заменяют влияние отброшенной части внутренними силами и составляют уравнения равновесия для оставшейся части, на которую действуют приложенные к ней внешние силы и внутренние силы, распределённые по сделанному сечению.

Литература: [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

Вопросы для самопроверки

17. Какие деформации называют упругими?
18. Какие деформации называют остаточными (пластическими)?
19. Что называется напряжением в точке в данном сечении?
20. Какое напряжение называется нормальным?
21. Какое напряжение называется касательным?
22. В чём сущность метода сечений?

Тема 5. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Рассматриваются простые случаи воздействия сил на стержень и предложен ряд вопросов (механические свойства материалов, выбор допускаемых напряжений, статически неопределимые задачи), встречающихся в других разделах курса.

Обратите внимание на то, что механические характеристики материала (предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести, предел прочности) находят путём деления соответствующей нагрузки на *первоначальную* площадь поперечного сечения. Таким образом, получают *условные* напряжения, а не *истинные*; для вычисления последних надо делить нагрузки на *действительную* площадь поперечного сечения, которая изменяется при опыте. Зная истинные напряжения, можно построить так называемую *истинную диаграмму растяжения*, которая точнее характеризует свойства материала, чем условная диаграмма. Пользуясь формулами, основанными на законе Гука, надо учитывать, что этот закон справедлив только до предела пропорциональности. Нельзя, например, напряжение для мягкой стали при $\varepsilon = 0,1$ вычислять по формуле $\sigma = E\varepsilon$, так как

тогда получается, что $\sigma = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,1 = 20\,000$ МПа, в то время как при 400 МПа материал уже разрушается.

При решении статически неопределимых задач обратите внимание на то, что усилия в стержнях статически неопределимой системы зависят от площадей поперечных сечений A и от модулей упругости E , тогда как в статически определимой системе величины A и E не влияют на распределение усилий.

Способ расчёта по допускаемым нагрузкам для статически определимых систем даёт те же результаты, что и способ расчёта по допускаемым напряжениям, но для статически неопределимых систем он позволяет вскрыть дополнительные резервы прочности, повысить несущую способность конструкции и указывает на возможность более экономного расходования материала.

Следует обратить внимание на весьма важные понятия: предел прочности, допускаемое напряжение и коэффициент запаса прочности.

После изучения этой темы можно решать задачи 1, 2, включённые в контрольные работы.

Литература: [4, гл. 3]; [5, гл. 2]; [6, гл. 1, задачи: 1, 3, 16, 19, 20, 26, 30, 37, 38, 55, 59, 66, 80, 84, 88, 93, 102, 118]; [7, гл. 2].

Вопросы для самопроверки

23. Как строится диаграмма растяжения?
24. Что называется пределом пропорциональности?
25. Что называется пределом упругости?
26. Что называется пределом текучести?
27. Что называется пределом прочности?
28. Как формулируется закон Гука?
29. Что называется модулем упругости?
30. Что называется коэффициентом поперечной деформации?
31. Как найти работу растягивающей силы по диаграмме растяжения?
32. Что называется удельной работой деформации?
33. Что называется истинным пределом прочности?
34. В чём разница между пластичными и хрупкими материалами?
35. В каких местах возникает концентрация напряжений?
36. Какие задачи называют статически неопределимыми? Каков общий порядок их решения?
37. Как находят напряжения при изменении температуры?
38. Как находят удлинение стержня, растягиваемого собственным весом?
39. От каких факторов зависит запас прочности?
40. Что называется коэффициентом запаса прочности?
41. Как формулируется условие прочности?

Тема 6. СДВИГ

Касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны между собой. Этот закон называется законом парности касательных напряжений. При изучении деформаций обратите внимание на то, что одна из диагоналей выделенного элемента, по граням которого действуют касательные напряжения, удлиняется, а другая укорачивается; таким образом, явления растяжения-сжатия и сдвига нельзя рассматривать изолированно друг от друга. Формулу закона Гука при сдвиге $\tau = G\gamma$ легко запомнить ввиду полной аналогии её с формулой закона Гука при растяжении-сжатии $\sigma = E\varepsilon$. Внимательно изучите вопрос о выборе допускаемых напряжений при сдвиге.

Обратите внимание на то, что расчёты заклёпок, сварных соединений и врубок являются условными и что срез всегда осложнён наличием других напряжений, которыми для упрощения расчётов обычно пренебрегают. Надо уметь показывать на чертежах площадки, на которых возникают напряжения среза, смятия и скалывания.

Литература: [5, гл. 4]; [6, гл. 3, задачи: 2, 7, 21, 24, 27, 32]; [7, гл. 4].

Вопросы для самопроверки

42. Что называется абсолютным и относительным сдвигом?
43. Как формулируется закон Гука при сдвиге?
44. Какой модуль упругости больше: E или G ?
45. Как находят условную площадь смятия заклёпки?
46. По какому сечению в заклёпочном соединении проводят проверку листов на разрыв?
47. Как рассчитывают стыковые, торцовые и фланговые швы?

Тема 7. КРУЧЕНИЕ

В случае центрального растяжения-сжатия нормальные напряжения распределяются в поперечном сечении стержня равномерно. При расчёте на срез обычно полагают, что касательные напряжения также распределяются равномерно. В случае кручения круглого стержня касательные напряжения в поперечном сечении распределяются неравномерно, изменяясь по линейному закону от нуля на оси до максимального значения у поверхности стержня. В связи с этим и возникла мысль о замене сплошного вала полым, материал сечения которого находится в более напряжённой зоне и используется рациональнее.

Обратите внимание на то, как используется закон парности касательных напряжений для установления напряжения τ в точках контура прямоугольного поперечного сечения стержня. Наибольшее напряжение в таком

сечении возникает в точках контура, ближе всего расположенных к оси кручения. После изучения этой темы можно решать задачу 3.

Литература: [4, гл. 8]; [5, гл. 6]; [6, гл. 4, задачи: 1, 9, 14, 18, 24, 32, 38, 48, 60, 63]; [7, гл. 7].

Вопросы для самопроверки

48. Как рассчитывают стыковые, торцовые и фланговые швы?
49. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении? Как находят их значения в произвольной точке поперечного сечения?
50. Возникают ли при кручении нормальные напряжения?
51. Чему равен полярный момент инерции круглого сечения?
52. Что называется моментом сопротивления при кручении?
53. Чему равен момент сопротивления кольцевого сечения? Почему нельзя сказать, что он равен разности моментов сопротивления наружного и внутреннего кругов?
54. Как вычисляют момент, передаваемый шкивом, по мощности и числу оборотов?
55. Как находят углы закручивания?
56. Как производят расчёт вала на прочность?
57. Как производят расчёт вала на жёсткость?
58. Как находят максимальные напряжения при кручении стержня прямоугольного сечения?
59. Как вычисляют напряжения в пружинах?
60. Как определяют деформации пружин?

Тема 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

В теории изгиба важную роль играют моменты инерции, поэтому этот вопрос рассматривают предварительно в виде самостоятельной темы, перед изучением которой полезно по учебнику теоретической механики повторить материал о статическом моменте и о нахождении центров тяжести плоских фигур. При вычислении моментов инерции надо помнить, что они представляют собой интегралы типа $\int x^2 dA$ (осевой момент инерции относительно оси y) или типа $\int xy dA$ (центробежный момент инерции относительно осей x и y). Необходимо запомнить, что теорема о параллельном переносе осей ($J_{y_1} = J_y + a^2 A$) справедлива только в случае, если ось y проходит через центр тяжести фигуры. Если, например, известен момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через основание, то

нельзя с помощью теоремы о переносе осей сразу найти момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через вершину параллельно основанию; сначала необходимо с помощью этой теоремы найти момент инерции относительно центральной оси, а затем определить момент инерции относительно оси, проходящей через вершину. Формула переноса осей наглядно показывает, что наименьшим из моментов инерции относительно нескольких параллельных осей является момент инерции относительно той оси, которая проходит через центр тяжести.

Наименьшим из моментов инерции относительно центральных осей, наклонённых под разными углами, является момент инерции относительно одной из главных центральных осей. Относительно другой главной оси, перпендикулярной первой, момент инерции имеет, наоборот, наибольшее значение. Центробежный момент инерции относительно главных осей равен нулю; при этом совсем не обязательно, чтобы главные оси проходили через центр тяжести, так как через любую точку, лежащую в плоскости фигуры, можно провести такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

В теории изгиба важную роль играют главные центральные оси, положение которых для несимметричных сечений определяют так:

1) сначала проводят случайные оси, вычисляют статические моменты относительно этих осей и находят положение центра тяжести сечения;

2) проводят через центр тяжести всего сечения оси, параллельные первоначально выбранным случайным осям, и находят с помощью теоремы о переносе осей центробежный и осевые моменты инерции сечения относительно этих новых осей;

3) находят положение главных центральных осей u и v по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x};$$

4) определяют значения главных центральных моментов инерции.

Для проверки правильности вычислений J_u и J_v можно использовать равенства $J_u + J_v = J_x + J_y$ и $J_{uv} = 0$. С помощью этих равенств можно проверить вычисления только пп. 3 и 4; соблюдение этих равенств не гарантирует правильности вычислений пп. 1 и 2.

Если сечение состоит из прокатных профилей, то необходимо при вычислениях пользоваться данными таблиц сортамента. При определении центробежного момента инерции уголка (равнобокого или неравнобокого) не следует разбивать площадь этого уголка на два прямоугольника. Сначала можно найти центробежный момент инерции всего уголка относительно осей, проходящих через центр тяжести параллельно полкам, с помощью формулы, в которой использованы обозначения таблиц сортамента:

$$J_{xy} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2\alpha,$$

где J_{x_0} и J_{y_0} – главные центральные моменты инерции, значения которых даны в таблицах сортамента. После этого надо применить формулу переноса осей и найти центробежный момент инерции уголка относительно центральных осей всего сечения.

При пользовании формулой поворота осей обязательно обратите внимание на знак угла α : если для совмещения оси x_0 с осью x надо повернуть ось x_0 по часовой стрелке, то угол α следует считать отрицательным.

После изучения этой темы можно решать задачу 4, включённую в контрольные работы.

Литература: [4, гл. 2]; [5, гл. 5]; [6, гл. 5, задачи: 1, 4, 5, 8, 9, 11, 13, 20, 25]; [7, гл. 6].

Вопросы для самопроверки

61. По каким формулам находят координаты центра тяжести плоской фигуры?
62. Чему равна сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
63. Какие оси называются главными?
64. Для каких фигур можно без вычислений установить положение главных центральных осей?
65. Относительно каких центральных осей моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения?
66. Какой из двух моментов инерции треугольника больше: относительно оси, проходящей через основание, или относительно оси, проходящей через вершину параллельно основанию?
67. Какой из двух моментов инерции квадратного сечения больше: относительно центральной оси, проходящей параллельно сторонам, или относительно оси, проходящей через диагональ?
68. Какой из двух главных центральных моментов инерции полукруглого сечения больше: относительно оси, параллельной диаметру, ограничивающему сечение, или относительно перпендикулярной оси?

Тема 9. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ И ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Главные напряжения играют весьма важную роль при решении вопроса о прочности материала; одно из этих напряжений является наибольшим, а другое – наименьшим из всех нормальных напряжений для данной точки.

Обратите внимание на полную аналогию между формулами для напряжений в наклонных площадках и формулами для моментов инерции относительно осей, наклонённых к главным. В этих формулах главным напряжениям соответствуют главные моменты инерции; напряжениям в площадках, наклонённых к главным под углом α , соответствуют моменты инерции относительно осей, наклонённых к главным под углом β ; касательным напряжениям соответствует центробежный момент инерции.

Аналогию легко продолжить дальше:

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • касательные напряжения на главных площадках равны нулю; • одно из главных напряжений является максимальным, другое – минимальным; • угол наклона главных площадок находят по формуле | <ul style="list-style-type: none"> • центробежный момент инерции относительно главных осей равен нулю; • один из главных моментов инерции является максимальным, другой – минимальным; • угол наклона главных осей находят по формуле |
|--|--|

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

При линейном напряжённом состоянии вопрос о прочности материала решается легко: надо определить расчётное сопротивление R из опыта на простое растяжение (или сжатие) и сравнить главное напряжение σ с расчётным сопротивлением: $\sigma \leq R$.

В случае плоского или объёмного напряжённого состояния задача значительно усложняется, так как неизвестно при какой комбинации числовых значений главных напряжений наступает опасное состояние материала. Необходимо, следовательно, найти некоторое расчётное напряжение, зависящее от главных напряжений, при котором возникает опасность разрушения, и затем численное его значение сравнить с расчётным сопротивлением, установленным из опыта на простое растяжение (или сжатие). В зависимости от того, какой фактор по данной теории прочности считается решающим и создающим опасное состояние материала, применяются соответствующие расчётные формулы.

Литература: [4, гл. 4 и 12]; [5, гл. 3 и 8]; [6, гл. 2, задачи: 1, 7, 11, 16, 28, 35, 36]; [7, гл. 3 и 12].

Вопросы для самопроверки

69. Какие имеются виды напряжённого состояния материала?
70. В чём заключается закон парности касательных напряжений?
71. Чему равна сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам?

72. По каким площадкам возникают наибольшие и наименьшие нормальные напряжения?

73. Как графически определяются напряжения в наклонных площадках в случае плоского напряжённого состояния? Как с помощью этого построения находят главные напряжения?

74. Чему равно наибольшее касательное напряжение в случае плоского напряжённого состояния?

75. Как находят максимальные касательные напряжения в случае объемного напряжённого состояния?

76. Как находят деформации при объёмном и плоском напряжённом состояниях?

77. Как формулируется первая теория прочности?

78. Как находят расчётное напряжение по второй теории прочности?

79. Зависит ли расчётное напряжение по третьей теории прочности от величины σ_2 ?

80. Чему равна удельная работа деформации при объёмном напряжённом состоянии?

81. Какая часть потенциальной энергии деформации учитывается при составлении расчётного уравнения по четвёртой теории прочности?

82. Как находят расчётное напряжение по четвёртой теории прочности?

Тема 10. ИЗГИБ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ

Эта тема является самой большой и самой сложной темой курса сопротивления материалов; её следует изучать постепенно, обращая особое внимание на решение задач. Сначала надо усвоить важные понятия изгибающего момента M и поперечной силы Q и научиться свободно строить эпюры M и Q . Инженеры-механики изображают эпюры моментов на сжатых волокнах, тогда как инженеры строительных специальностей традиционно показывают эпюры моментов на растянутых волокнах.

Необходимо помнить, что поперечная сила в данном сечении равна алгебраической сумме проекций сил, расположенных только по одну сторону от рассматриваемого сечения, на перпендикуляр к оси балки, а изгибающий момент в данном сечении равен алгебраической сумме моментов сил, расположенных только с одной стороны, относительно центральной оси поперечного сечения.

Обратите внимание на неравномерность распределения нормальных напряжений по высоте балки и на то, что прочность балки зависит от значения момента сопротивления W . Надо ясно представлять, каким путем можно увеличить момент сопротивления без увеличения расхода материала.

Рекомендуется сравнить между собой эпюры σ и τ , построенные для балки прямоугольного поперечного сечения. Наибольшее и наименьшее нормальные напряжения (главные напряжения) находят по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}.$$

Внимательно изучите вопрос о центре изгиба. В работе В.З. Власова "Тонкостенные упругие стержни" этот вопрос рассмотрен более подробно и дана законченная теория изгиба и кручения тонкостенного профиля произвольного очертания.

После этого следует перейти к изучению деформаций при изгибе. Правая часть дифференциального уравнения изогнутой оси балки содержит выражение изгибающего момента в произвольном сечении, для которого находят перемещения (углы поворота и прогибы); $M(z)$ – величина переменной; только в случае чистого изгиба $M(z) = \text{const}$. Надо хорошо понять геометрический смысл постоянных интегрирования; разделив их значения на EJ , получим соответственно угол поворота и прогиб в начале координат.

При нескольких участках, когда изгибающий момент от сосредоточенных сил или моментов выражается различными уравнениями, необходимо интегрировать без раскрытия скобок. Распределённую нагрузку, если она на каком-либо участке обрывается, следует преобразовать, продолжив её до конца балки и добавив нагрузку противоположного направления.

В результате можно получить общие уравнения углов поворота и прогибов, которыми и следует пользоваться при решении задач аналитическим методом. Обычно начало координат помещают на левом конце балки и общие уравнения углов поворота и прогибов пишут так:

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + M_0z + Q_0\frac{z^2}{2} + \sum M(z - a_m) + \sum P\frac{(z - a_p)^2}{2} + \sum q\frac{(z - a_q)^3}{6};$$

$$EJy = EJ(y_0 + \theta_0z) + \frac{M_0z^2}{2} + Q_0\frac{z^3}{6} + \sum M\frac{(z - a_m)^2}{2} + \sum P\frac{(z - a_p)^3}{6} + \sum q\frac{(z - a_q)^4}{24}.$$

Здесь a_m , a_p , a_q – соответственно абсциссы точек приложения сосредоточенного момента M , силы P , начала равномерно распределённой нагрузки интенсивностью q ; знаки сумм распространяются на все нагрузки, рас-

положенные слева от того сечения балки, для которого находят прогиб и угол поворота. Величины y_0 , θ_0 , M_0 , Q_0 , обозначающие соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в начале координат, называются *начальными параметрами*. В связи с этим метод определения деформаций балки с помощью написанных выше уравнений называют *методом начальных параметров*. Два начальных параметра из четырёх известны при любом способе закрепления левого конца балки. Действительно, для защемлённого конца $y_0 = 0$ и $\theta_0 = 0$; для шарнирно опёртого конца $y_0 = 0$ и $M_0 = 0$ (если на левом конце приложен момент M , то $M_0 = M$); для свободного конца $Q_0 = 0$ (если на левом конце приложена сила P , то $Q_0 = P$) и $M_0 = 0$ (или $M_0 = M$).

Для статически определимой балки начальные параметры Q_0 и M_0 легко найти с помощью уравнений статики; таким образом, в случае защемлённого левого конца известны все четыре начальных параметра, в случае шарнирно опёртого конца неизвестна только величина θ_0 , в случае свободного конца неизвестны y_0 и θ_0 . Неизвестные начальные параметры находят из условий закрепления балки: например, для балки, свободно лежащей на двух опорах, при определении θ_0 надо использовать условие, что прогиб на правой опоре равен нулю.

Метод начальных параметров пригоден и для расчёта статически неопределимых балок постоянной жёсткости.

После изучения этой темы можно решать задачи 8, 9, включённые в контрольные работы.

Литература: [4, гл. 7, 9, 10]; [5, гл. 7]; [6, гл. 6, задачи: 1, 2, 5, 16, 20, 23, 31, 39, 42, 44, 47, 57, 67, 78, 87; гл. 7, задачи: 1, 3, 5, 6, 7, 11, 17, 19, 28, 40, 58, 59, 70; гл. 8, задачи: 1, 23, 24; гл. 9, задачи: 4, 7, 9]; [7, гл. 8, 9, 10].

Вопросы для самопроверки

83. Как находят изгибающий момент в каком-либо сечении балки?
84. В каком случае изгибающий момент считается положительным?
85. Как находят поперечную силу в каком-либо сечении балки?
86. Когда поперечная сила считается положительной?
87. Какова зависимость между величинами M и Q ?
88. Как находят максимальный изгибающий момент?
89. Какой случай изгиба называется чистым изгибом?
90. По какой кривой изогнётся балка в случае чистого изгиба?
91. Как изменяются нормальные напряжения по высоте балки?
92. Что называется нейтральным слоем и где он находится?
93. Что называется моментом сопротивления при изгибе?

94. Как выгоднее положить балку прямоугольного сечения при работе на изгиб: на ребро или плашмя?
95. Какое сечение имеет больший момент сопротивления при одинаковой площади: круглое или квадратное?
96. В каких плоскостях возникают касательные напряжения при изгибе, определяемые по формуле Журавского? Как их находят?
97. Как находят главные напряжения при изгибе?
98. Какие напряжения появятся в балке, если плоскость действия нагрузки не пройдет через центр изгиба?
99. Как пишется общее дифференциальное уравнение изогнутой оси балки?
100. Как находят постоянные интегрирования при изгибе балки?
101. Как определяют наибольшее значение прогиба?

Тема 11. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Изучение сложного сопротивления обычно начинают с косоугольного изгиба. Нейтральная линия при косоугольном изгибе не перпендикулярна плоскости внешних сил, а плоскость, в которой расположены прогибы при косоугольном изгибе, не совпадает с плоскостью внешних сил. Явление косоугольного изгиба особенно опасно для сечений со значительно отличающимися друг от друга главными моментами инерции (например, для двутавра). Балки с таким сечением хорошо работают на изгиб в плоскости наибольшей жесткости, но даже при небольших углах наклона к плоскости наибольшей жесткости в балках возникают значительные дополнительные напряжения и деформации. Для балки круглого сечения косоугольный изгиб невозможен, так как все центральные оси такого сечения являются главными и нейтральный слой всегда перпендикулярен плоскости внешних сил. Косоугольный изгиб невозможен также и для балки квадратного сечения, но для такого сечения решение вопроса о прочности зависит от положения плоскости внешних сил, так как моменты сопротивления квадратного сечения неодинаковы относительно различных центральных осей (хотя моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой, как и для круглого сечения). При расположении внешних сил в диагональной плоскости расчетные напряжения в балке квадратного сечения будут больше, чем в случае, когда плоскость внешних сил параллельна граням балки.

При определении напряжений в случае внецентренного растяжения необходимо знать положение главных центральных осей сечения; именно от этих осей отсчитывают расстояния точки приложения силы и точки, в которых определяют напряжения.

Следует обратить внимание на то, что приложенная эксцентрично сжимающая сила может вызвать в поперечном сечении стержня растяги-

вающие напряжения. В связи с этим внецентренное сжатие является особенно опасным для стержней из хрупких материалов (чугуна, кирпича, бетона), которые слабо сопротивляются растягивающим усилиям.

Надо научиться для прямоугольного сечения устанавливать примерное положение нейтральной линии при различных положениях продольной силы. При этом важно помнить основную зависимость: если точка приложения силы находится внутри ядра сечения, то нейтральная линия проходит вне поперечного сечения; если точка приложения силы находится вне ядра сечения, то нейтральная линия пересекает поперечное сечение.

В случае изгиба с кручением возникают нормальные и касательные напряжения, а проверка прочности производится по эквивалентным напряжениям, полученным по соответствующей теории прочности.

В заключение следует изучить общий случай сложного сопротивления, когда стержень испытывает одновременно растяжение (сжатие), изгиб в двух плоскостях и кручение. Напряжения в поперечных сечениях стержня зависят от величин M_x , M_y , M_z , N , Q_x , Q_y , которые вычисляются так:

1) крутящий момент M_z равен алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно оси, перпендикулярной плоскости сечения и проходящей через его центр тяжести;

2) изгибающий момент M_y равен алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно главной центральной оси y данного сечения;

3) изгибающий момент M_x равен алгебраической сумме моментов тех же сил относительно главной центральной оси x данного сечения;

4) продольная сила N равна алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на перпендикуляр к плоскости сечения;

5) поперечная сила Q_x равна сумме проекций тех же сил на главную центральную ось x данного сечения;

6) поперечная сила Q_y равна сумме проекций тех же сил на главную центральную ось y данного сечения.

После изучения этой темы можно решать задачи 7 и 8, включённые в контрольные работы.

Литература: [4, гл. 12]; [5, гл. 9]; [6, гл. 10, задачи: 1, 2, 6, 7, 13, 25, 29, 35, 39, 50, 54, 64, 69, 72, 76, 83, 89, 93, 96]; [7, гл. 11].

Вопросы для самопроверки

102. Какой случай изгиба называется косым изгибом?

103. Возможен ли косой изгиб при чистом изгибе?

104. В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при косом изгибе?

105. Как находят положение нейтральной линии при косом изгибе?
106. Как пройдёт нейтральная линия, если плоскость действия сил совпадает с диагональной плоскостью балки прямоугольного поперечного сечения?
107. Как определяют деформации при косом изгибе?
108. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косоугой изгиб?
109. Как находят напряжения в произвольной точке поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии?
110. Чему равно напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии?
111. Какое положение занимает нейтральная линия, когда продольная сила приложена к вершине ядра сечения?
112. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением?
113. Как находят опасные сечения стержня при изгибе с кручением?
114. В каких точках круглого поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при изгибе с кручением?
115. Почему обыкновенно не учитывают касательные напряжения от изгиба при совместном действии изгиба и кручения?
116. Как пишут условия прочности стержня по всем четырём теориям?
117. Как находят расчётный момент при изгибе с кручением стержня круглого поперечного сечения?
118. По какой теории прочности (третьей или четвёртой) получится больший расчётный момент при заданных значениях изгибающего и крутящего моментов?

Тема 12. ИЗГИБ ПЛОСКОГО БРУСА БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

В случае изгиба прямого стержня гипотеза плоских сечений приводит к линейному закону распределения нормальных напряжений. Применяя эту же гипотезу при изгибе кривого стержня, получаем гиперболический закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня.

Другая важная особенность изгиба кривого стержня заключается в том, что нейтральная ось не совпадает с центром тяжести поперечного сечения и всегда смещается по направлению к центру кривизны.

После изучения этой темы можно решать задачу 9, включённую в контрольные работы.

Литература: [5, гл. 10]; [6, гл. 11, задачи: 1, 2, 7, 16, 18]; [7, гл. 14].

Вопросы для самопроверки

119. Как вычисляют изгибающие моменты, продольные и поперечные силы в поперечных сечениях кривого стержня?
120. Как находят касательные напряжения от силы Q ?
121. Как находят нормальные напряжения в поперечном сечении кривого стержня от изгибающего момента M ?
122. Где проходит нейтральная ось при изгибе кривого стержня?
123. Как находят радиус кривизны нейтрального слоя кривого стержня?

Тема 13. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Предыдущие темы курса касались расчётов на прочность и на жёсткость. В этой теме изложен расчёт на устойчивость. Опасность явления потери устойчивости заключается в том, что оно может наступить при напряжении, значительно меньшем предела прочности материала. Это напряжение называется *критическим*; для стержней большой гибкости его можно определить по формуле Эйлера. Исследования профессора Ф.С. Ясинского дали возможность установить значение критического напряжения для стержней малой и средней гибкости, для которых формулу Эйлера применять нельзя. Допускаемое напряжение при расчёте на устойчивость должно быть понижено по сравнению с допускаемым напряжением при обыкновенном сжатии. Значения коэффициентов φ , учитывающих это понижение для стержней различной гибкости и для различных материалов, приводятся в специальных таблицах. Следует обратить внимание на то, что при подборе сечения приходится несколько раз производить вычисления, применяя способ последовательных приближений.

После изучения этой темы можно решать задачу 10, включённую в контрольные работы.

Литература: [4, гл. 13]; [5, гл. 13]; [6, гл. 12, задачи: 2, 4, 11, 14, 32]; [7, гл. 15]

Вопросы для самопроверки

124. В чём заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
125. Какая сила называется критической?
126. Что называется гибкостью стержня?
127. Напишите формулу Эйлера для критической силы?
128. В каких пределах применима формула Эйлера?

129. Чему равен коэффициент приведения длины для различных случаев закрепления концов стержня?

130. Как изменится критическая сила при увеличении длины стойки в два раза?

131. Какой вид имеет полный график критических напряжений?

132. Как находят критическое напряжение для стержней малой и средней гибкости?

133. Как производится проверка стержней на устойчивость с помощью коэффициента φ ?

134. Как подбирают сечение стержня при расчёте на устойчивость?

Тема 14. ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА

В этой теме рассматриваются два вопроса: 1) напряжения в движущихся деталях; 2) напряжения при ударе. В первом случае динамическое воздействие сводится к дополнительной статической нагрузке соответствующими силами инерции. Во втором – учесть силы инерции невозможно, так как неизвестна продолжительность удара. Напряжения при ударе вычисляют, приравняв кинетическую энергию ударяющего тела потенциальной энергии деформации стержня, воспринимающего удар. Весьма существенно, что напряжения при продольном ударе зависят не только от площади поперечного сечения стержня, но и от его длины и модуля упругости материала.

После изучения этой темы можно решать задачу 11, включённую в контрольные работы.

Литература: [4, гл. 15]; [5, гл. 14]; [6, гл. 14, задачи: 1, 2, 7, 42, 47, 54, 59, 62, 64]; [7, гл. 17].

Вопросы для самопроверки

135. Как вычисляют напряжения в деталях при равноускоренном поступательном движении?

136. Что называется динамическим коэффициентом?

137. От каких факторов зависят напряжения в ободе вращающегося колеса?

138. Как находят напряжения в спарниках и шатунах?

139. Как находят напряжения во вращающемся диске постоянной толщины?

140. Как выводят формулу для определения напряжений при ударе?

141. Чему равен динамический коэффициент при ударе?

142. Как изменится напряжение при продольном ударе в случае увеличения площади поперечного сечения в два раза? (При ответе можно пользоваться приближённой формулой).

143. Зависит ли напряжение при изгибающем ударе от материала балки?

144. В каком случае при изгибающем ударе напряжения больше: при положении на ребро или плашмя?

145. Каким путём можно уменьшить напряжение в стержне с выточками при продольном ударе?

146. Как учитывается масса упругой системы, испытывающей удар?

147. Как производят испытания на удар?

Тема 15. РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Расчёт на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени, имеет важное значение, так как в деталях машин часто возникают переменные напряжения. Надо хорошо уяснить понятие предела выносливости и научиться строить диаграммы для несимметричного цикла. Необходимо также знать все факторы, от которых зависит коэффициент концентрации напряжений. Особое внимание обратите на практические меры по борьбе с изломами усталости: а) повышение предела прочности при достаточной пластичности; б) создание однородной мелкозернистой структуры; в) проектирование внешних очертаний детали без резких переходов; г) тщательная обработка поверхности.

Надо подробно разобрать примеры определения допускаемых напряжений для различных деталей машин, воспринимающих переменные нагрузки. Правильный выбор допускаемого напряжения и формы сечения обеспечивает более экономное использование материала.

Литература: [5, гл. 15]; [6, гл. 14, задачи: 72, 78, 85]; [7, гл. 19].

Вопросы для самопроверки

148. Что называется пределом выносливости?

149. Какова эмпирическая зависимость между пределом выносливости и пределом прочности?

150. Как находят предел выносливости при несимметричном цикле?

151. Какие напряжения называются местными?

152. В чём разница между теоретическим и действительным коэффициентами концентрации напряжений?

153. Как влияет характер обработки материала на действительный коэффициент концентрации напряжений?

154. Как влияют размеры детали на предел выносливости?

155. Как устанавливают допускаемые напряжения при переменных напряжениях?

156. Какие практические меры применяют по борьбе с изломами усталости?

**КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ**

Задача 4

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Задание. Абсолютно жёсткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров (рис. 4). Требуется: найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ; найти допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}^R$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях расчётному сопротивлению $R = 160$ МПа; найти допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}^{\sigma_T}$ по предельному равновесию, если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа; сравнить полученные величины допускаемых нагрузок. Данные взять из табл. 4.

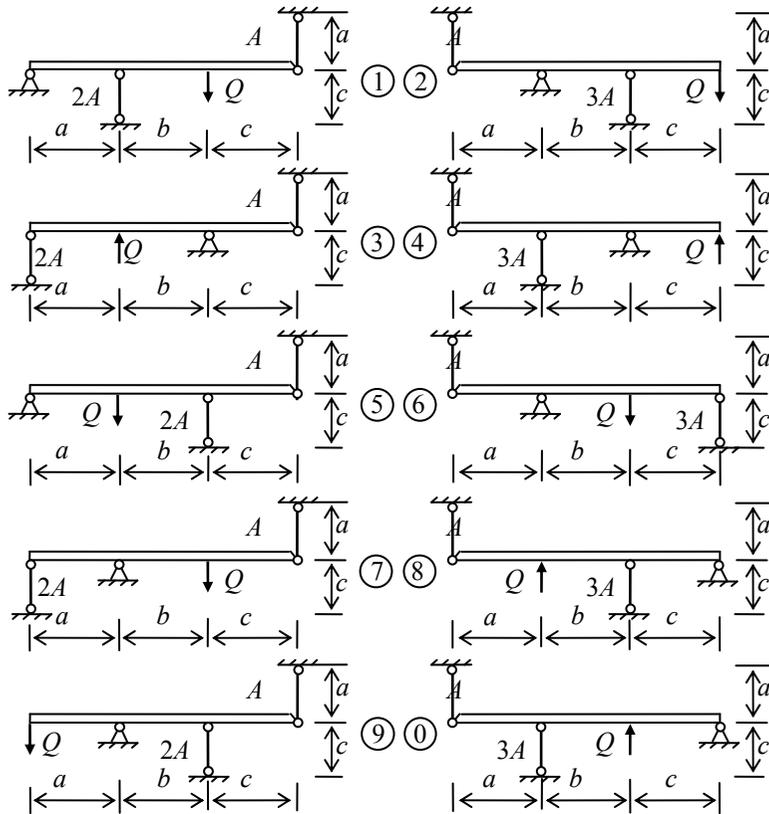


Рис. 4

Таблица 4

№ строки	№ схемы	A , см ²	a , м	b , м	c , м
1	1	11	2,1	2,1	1,1
2	2	12	2,2	2,2	1,2
3	3	13	2,3	2,3	1,3
4	4	14	2,4	2,4	1,4
5	5	15	2,5	2,5	1,5
6	6	16	2,6	2,6	1,6
7	7	17	2,7	2,7	1,7
8	8	18	2,8	2,8	1,8
9	9	19	2,9	2,9	1,9
0	0	20	3,0	3,0	2,0
	е	д	а	б	в

Методические указания

Перед решением задачи необходимо сосчитать количество неизвестных сил, действующих на абсолютно жёсткий брус, и число независимых уравнений равновесия этого бруса. Если неизвестных больше числа уравнений статики, то задача будет статически неопределимой, и для её решения, кроме уравнений равновесия, потребуется составить ещё уравнения деформаций.

Для определения двух неизвестных усилий в стержнях следует составить систему уравнений, состоящую из одного уравнения статики и одного уравнения совместности деформаций.

Для ответа на третий вопрос задачи следует иметь в виду, что в одном из стержней напряжение больше, чем в другом; условно назовем этот стержень первым. При увеличении нагрузки напряжение в первом стержне достигнет предела текучести раньше, чем во втором. Когда это произойдёт, напряжение в первом стержне перестанет расти и будет оставаться равным σ_T . Отсюда находим усилие в первом стержне:

$$N_1 = \sigma_T A_1.$$

При дальнейшем увеличении нагрузки напряжение и во втором стержне достигнет предела текучести

$$N_2 = \sigma_T A_2.$$

Написав уравнение статики и подставив в него значения усилий N_1 и N_2 , найдём из этого уравнения предельную грузоподъёмность $Q_{\text{доп}}^{\sigma_T}$.

Пример 4. Абсолютно жёсткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров (рис. 4, а). Требуется: найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ; найти допускаемую нагрузку $Q_{доп}^R$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях расчётному сопротивлению $R = 210$ МПа; найти допускаемую нагрузку $Q_{доп}^{\sigma_T}$ по предельному равновесию, если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа; сравнить допускаемые нагрузки.

Дано: $A = 10 \text{ см}^2$; $a = 1 \text{ м}$; $b = 1,4 \text{ м}$; $c = 1,6 \text{ м}$; $k = 2$.

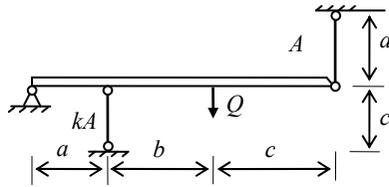


Рис. 4, а

Решение.

1. Рассмотрим геометрическую сторону задачи. Для этого покажем схему деформирования заданной системы (рис. 4, б), обозначим буквами характерные точки абсолютно жёсткого бруса и пронумеруем стержни.

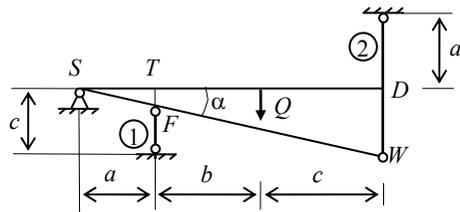


Рис. 4, б

Абсолютно жёсткий брус под действием нагрузки Q повернется относительно шарнирной опоры S по часовой стрелке на угол α . Принимая угол α очень малым, из рис. 4, б видим, что первый стержень станет короче на величину $\Delta \ell_1 = |TF|$, а второй – длиннее на $\Delta \ell_2 = |DW|$. Из подобия треугольников STF и SDW получим

$$|DW| = |TF| \frac{(a+b+c)}{a}, \quad \text{или} \quad \Delta \ell_2 = \Delta \ell_1 \frac{(a+b+c)}{a}. \quad (1)$$

Уравнение (1) является уравнением совместности деформаций.

2. Рассмотрим статическую сторону задачи. Покажем все силы, действующие на абсолютно жёсткий брус (рис. 4, в). Направления усилий N_1 и N_2 определяем по схеме деформирования (рис. 4, б).

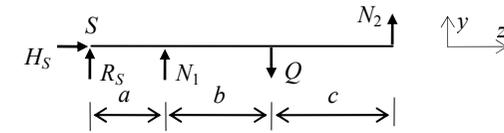


Рис. 4, в

Неизвестными являются усилия N_1 , N_2 , а также две составляющие реакции опоры S . Общее число неизвестных равно четырём. Для решения задачи можно составить только три независимых уравнения равновесия, например:

$$\sum z = H_S = 0; \quad (2)$$

$$\sum y = R_S + N_1 + N_2 - Q = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_S = N_1 a + N_2 (a + b + c) - Q(a + b) = 0. \quad (4)$$

Следовательно, задача один раз статически неопределимая. В качестве дополнительного уравнения будем использовать уравнение совместности деформаций (1).

3. Рассмотрим физическую сторону задачи. В уравнении (1) выразим деформации через усилия по закону Гука

$$\frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2} = \frac{N_1 \ell_1 (a + b + c)}{E_1 A_1 a}. \quad (5)$$

Подставив в (5) исходные данные $E_1 = E_2$, $A_1 = kA$, $A_2 = A$, $\ell_1 = a$, $\ell_2 = c$, получим

$$N_2 = N_1 (a + b + c) / (kc). \quad (6)$$

4. Для определения N_1 и N_2 решим совместно уравнения (4) и (6):

$$\begin{cases} N_1 a + N_2 (a + b + c) - Q(a + b) = 0; \\ N_2 = N_1 (a + b + c) / (kc), \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 \cdot 1 + N_2 (1 + 1,4 + 1,6) = Q(1 + 1,4); \\ N_2 = N_1 (1 + 1,4 + 1,6) / (2 \cdot 1,6), \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 + 4N_2 = 2,4Q; \\ N_2 = 1,25N_1. \end{cases}$$

Окончательно имеем $N_1 = 0,4Q$ и $N_2 = 0,5Q$.

5. Составим выражения для напряжений в стержнях:

$$\sigma_1 = N_1 / A_1 = N_1 / (kA) = 0,4Q / (2 \cdot 10) = 0,02Q;$$

$$\sigma_2 = N_2 / A_2 = N_2 / A = 0,5Q / 10 = 0,05Q.$$

6. Сравним полученные напряжения $\sigma_1 = 0,02Q < \sigma_2 = 0,05Q$.

Напряжение во втором стержне получилось больше, чем в первом.

7. Определим допускаемую нагрузку из условия прочности наиболее напряжённого стержня, в данном случае второго:

$$\sigma_2 = 0,05Q_{\text{доп}}^R = R; \quad Q_{\text{доп}}^R = R / 0,05 = 210 \cdot 10^{-1} / 0,05 = 420 \text{ кН}.$$

8. Рассмотрим предельное равновесие системы (рис. 4, з), полагая

$$N_1^T = \sigma_T A_1 = \sigma_T kA \text{ и}$$

$$N_2^T = \sigma_T A_2 = \sigma_T A.$$

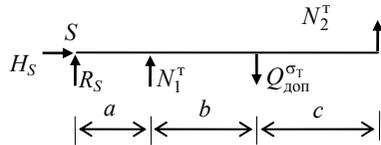


Рис. 4, з

9. Составим и решим уравнение равновесия:

$$\sum M_S = aN_1^T + (a + b + c)N_2^T - (a + b)Q_{\text{доп}}^{\sigma_T} = 0;$$

$$Q_{\text{доп}}^{\sigma_T} = \frac{aN_1^T + (a + b + c)N_2^T}{a + b};$$

$$Q_{\text{доп}}^{\sigma_T} = \frac{\sigma_T A (ka + a + b + c)}{a + b} = \frac{240 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 1 + 1 + 1,4 + 1,6) \cdot 10^{-1}}{1 + 1,4} = 600 \text{ кН}.$$

10. Сравним полученные значения $Q_{\text{доп}}^R$ и $Q_{\text{доп}}^{\sigma_T}$:

$$Q_{\text{доп}}^{\sigma_T} / Q_{\text{доп}}^R = 600 / 420 = 1,43.$$

Вывод: допускаемая нагрузка, полученная по предельному равновесию, в 1,43 раза выше допускаемой нагрузки, найденной по расчётному сопротивлению.

Задача 5

РАСЧЁТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Задание. Ступенчатый стальной стержень (рис. 5) подвешен в вертикальном положении за верхний конец. При этом нижний конец стержня не доходит до основания на величину $\Delta = \beta c$. Требуется (без учёта собственного веса): установить, при какой величине силы H зазор закроется; найти реакцию основания при заданном значении силы H и построить для стержня эпюру продольных усилий; установить, на сколько градусов надо охладить стержень, чтобы реакция основания при заданном значении силы H обратилась в нуль. Данные взять из табл. 5.

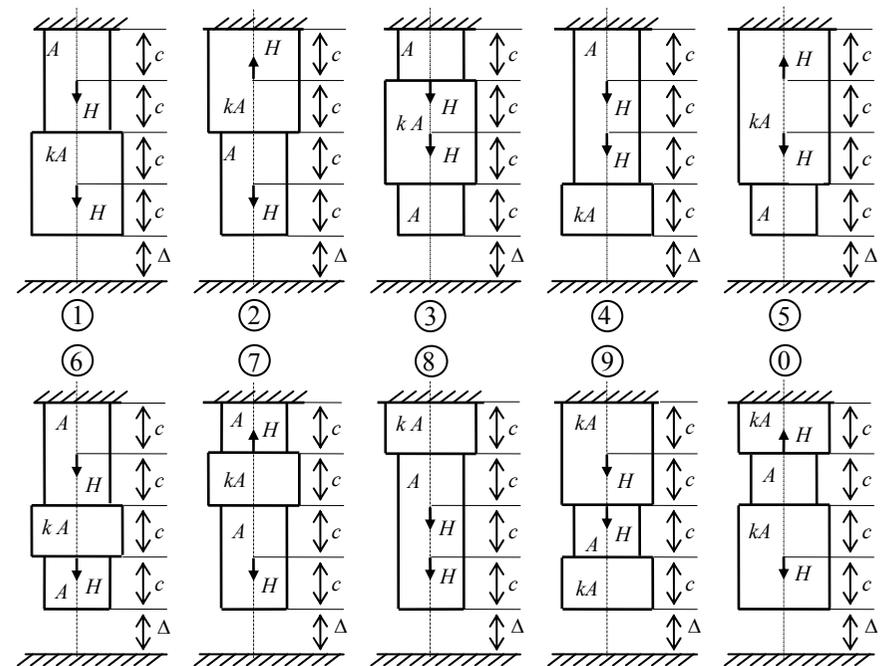


Рис. 5

Таблица 5

№ строки	№ схемы	$A, \text{см}^2$	k	$H, \text{кН}$	β
1	1	11	1,5	105	$5 \cdot 10^{-5}$
2	2	12	2,0	110	$4 \cdot 10^{-5}$
3	3	13	2,5	115	$3 \cdot 10^{-5}$
4	4	14	3,0	120	$2 \cdot 10^{-5}$
5	5	15	3,5	125	$1 \cdot 10^{-5}$
6	6	16	1,5	130	$5 \cdot 10^{-5}$
7	7	17	2,0	135	$4 \cdot 10^{-5}$
8	8	18	2,5	140	$3 \cdot 10^{-5}$
9	9	19	3,0	145	$2 \cdot 10^{-5}$
0	0	20	3,5	150	$1 \cdot 10^{-5}$
	в	а	е	д	б

Методические указания

Для ответа на первый вопрос надо приравнять перемещение нижнего сечения стержня от искомых сил H зазору Δ . Это перемещение равно сумме деформаций участков стержня от сил H .

Для ответа на второй вопрос надо алгебраическую сумму перемещений нижнего сечения стержня от заданных сил H и от реакции основания приравнять зазору Δ .

Для ответа на третий вопрос надо приравнять перемещение нижнего сечения стержня от заданных сил H сумме зазора и температурного укорочения стержня.

Пример 5. Ступенчатый стальной стержень (рис. 5, а) подвешен в вертикальном положении за верхний конец. При этом нижний конец стержня не доходит до основания на величину $\Delta = \beta c$. Требуется без учёта собственного веса: установить, при какой величине силы H зазор закроется; найти реакцию основания при заданном значении силы H и построить для стержня эпюру продольных усилий; установить, на сколько градусов надо охладить стержень, чтобы реакция основания при заданном значении силы H обратилась в нуль.

Дано: $A = 11 \text{ см}^2$; $k = 2$; $c = 12 \text{ см}$; $H = 105 \text{ кН}$; $\beta = 4 \cdot 10^{-5}$.

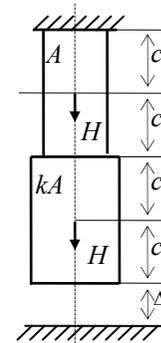


Рис. 5, а

Решение.

1. Установим, при каком значении силы H зазор закроется. Для этого удлинение стержня приравняем величине зазора:

$$\frac{Hc}{EA} + \frac{Hc}{E2A} + \frac{H2c}{EA} = \Delta; \quad \frac{3,5Hc}{EA} = \beta c;$$

$$H = \frac{\beta EA}{3,5} = \frac{4 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 11}{3,5} \cdot 10^{-1} = 2,51 \text{ кН}.$$

2. Найдём реакцию основания при заданном значении H . Для этого удлинение стержня от сил H приравняем сумме зазора и изменения длины стержня от реакции основания:

$$\frac{3,5Hc}{EA} = \beta c + \frac{R2c}{E2A} + \frac{R2c}{EA};$$

$$R = \frac{3,5H - \beta EA}{3} = \frac{3,5 \cdot 105 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 11 \cdot 10^{-1}}{3} \approx 120 \text{ кН}.$$

Вычисляем значения продольных сил на участках бруса:

$$N_1 = 2H - R = 2 \cdot 105 - 120 = 90 \text{ кН};$$

$$N_2 = H - R = 105 - 120 = -15 \text{ кН};$$

$$N_3 = H - R = 105 - 120 = -15 \text{ кН};$$

$$N_4 = -R = -120 = -120 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строим эпюру продольных усилий (рис. 5, б).

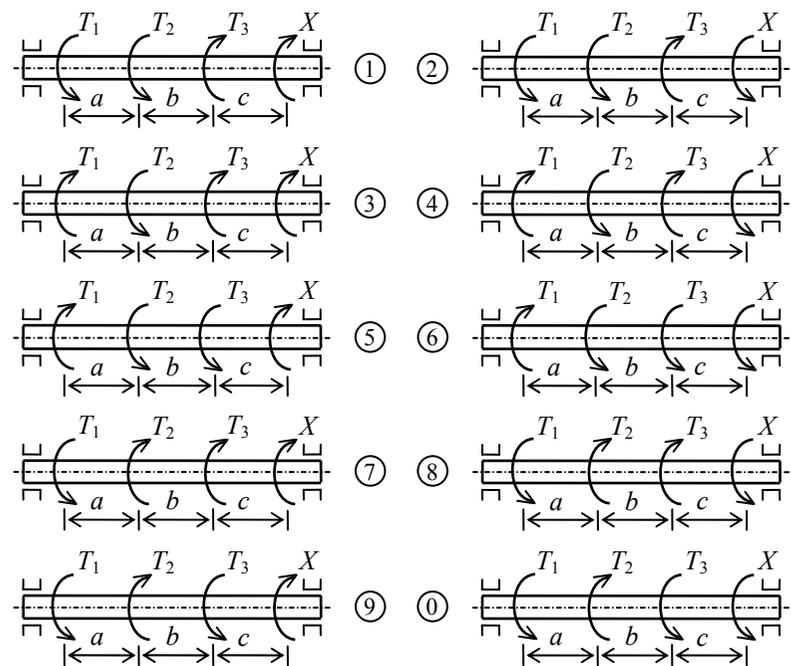


Рис. 6

Таблица 6

№ строки	№ схемы	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$T_1, кН·м$	$T_2, кН·м$	$T_3, кН·м$	$[\tau], МПа$	$d : D$
1	1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	35	0,40
2	2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	40	0,45
3	3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	45	0,50
4	4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	50	0,55
5	5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	55	0,60
6	6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	60	0,65
7	7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	65	0,70
8	8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	70	0,75
9	9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	75	0,80
0	0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	80	0,85
	е	а	б	в	г	д	е	а	в

Методические указания

При определении диаметра сплошного вала и наружного диаметра вала кольцевого сечения полученные значения округляют по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда R_{d40} : 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150; 160 мм.

Пример 6. К стальному валу приложены три известных момента: T_1 , T_2 и T_3 (рис. 6, а). Требуется: из условия равновесия вала найти значение момента X (сопротивлением опор пренебречь); построить эпюру крутящих моментов; определить диаметр вала из расчёта на прочность; из расчёта на прочность подобрать вал кольцевого поперечного сечения при заданном отношении внутреннего диаметра d к наружному D ; выбрать вал с меньшей площадью поперечного сечения; для выбранного вала проверить выполнение условия жёсткости (при невыполнении этого условия подобрать размеры поперечного сечения вала из условия жёсткости) и построить эпюру углов закручивания.

Дано: $a = 1$ м; $b = 1,5$ м; $c = 2$ м; $T_1 = 3$ кН·м; $T_2 = 2$ кН·м; $T_3 = 1$ кН·м; $[\tau] = 70$ МПа; $[\theta] = 1$ град/м; $d : D = 0,8$.

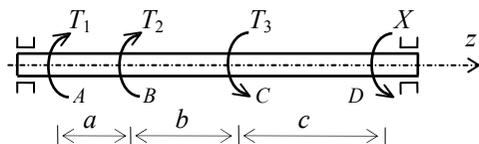


Рис. 6, а

Решение.

1. Из условия равновесия $\sum M_z = 0$ находим значение момента X :

$$T_1 + T_2 - T_3 - X = 0;$$

$$X = T_1 + T_2 - T_3 = 3 + 2 - 1 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Вычисляем крутящие моменты на участках вала.

- Участок AB : $M = T_1 = 3$ кН·м.
- Участок BC : $M = T_1 + T_2 = 3 + 2 = 5$ кН·м.
- Участок CD : $M = T_1 + T_2 - T_3 = 3 + 2 - 1 = 4$ кН·м.

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 6, б).

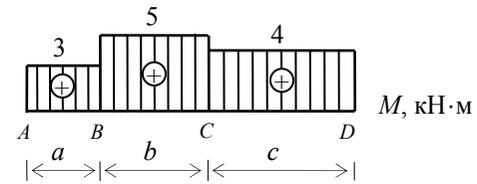


Рис. 6, б

Опасным является участок BC , расчётный момент $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

3. Вычисляем требуемый диаметр вала по условию прочности:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5}{3,14 \cdot 70}} \cdot 10 = 7,14 \text{ см}.$$

Округлив полученное значение, принимаем $D = 7,5 \text{ см}$.

Находим площадь поперечного сечения (площадь круга):

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 7,5^2}{4} = 44,16 \text{ см}^2.$$

4. Из условия прочности вычисляем внешний диаметр вала кольцевого сечения при заданном соотношении внутреннего и внешнего диаметров $d/D = 0,8$:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi(1-(d/D)^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5}{3,14 \cdot (1-0,8^4) \cdot 70}} \cdot 10 = 8,51 \text{ см}.$$

После округления полученного значения принимаем $D = 9,0 \text{ см}$.

Находим площадь поперечного сечения (площадь кольца) при $d/D = 0,8$ и $D = 9 \text{ см}$:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - (d/D)^2) = \frac{3,14 \cdot 9^2}{4} (1 - 0,8^2) = 22,89 \text{ см}^2.$$

5. Для равнопрочных валов сравниваем площади их поперечных сечений $22,89 < 44,16$. Выбираем вал кольцевого сечения, как более экономичный.

6. Для выбранного вала проверяем выполнение условия жёсткости. Предварительно вычисляем полярный момент инерции кольца при d : $D = 0,8$ и $D = 9$ см:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - (d/D)^4) = \frac{3,14 \cdot 9^4}{32} (1 - 0,8^4) = 380 \text{ см}^4.$$

Находим жёсткость вала при кручении, приняв модуль сдвига стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа:

$$GJ_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 380 \cdot 10^{-5} = 304 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Вычисляем наибольший относительный угол закручивания вала:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\max}}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{5}{304} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,943 \text{ град/м}.$$

Проверяем условие жёсткости:

$$\theta_{\max} = 0,943 \text{ град/м} < [\theta] = 1 \text{ град/м}.$$

Условие жёсткости выполняется.

Находим углы закручивания сечений B , C , D относительно сечения A :

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \frac{3 \cdot 1}{304} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,566^\circ;$$

$$\varphi_C = 0,566 + \frac{5 \cdot 1,5}{304} \cdot \frac{180}{3,14} = 1,98^\circ;$$

$$\varphi_D = 1,98 + \frac{4 \cdot 2}{304} \cdot \frac{180}{3,14} = 3,49^\circ.$$

По вычисленным значениям строим эпюру углов закручивания (рис. 6, в).

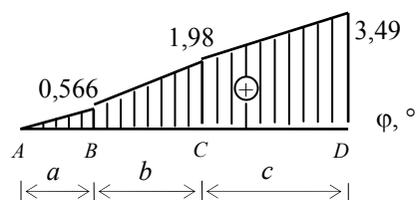


Рис. 6, в

Задача 7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Задание. Для поперечного сечения (рис. 7), требуется: определить положение центра тяжести; найти осевые и центробежный моменты инерции относительно случайных центральных осей; определить направления главных центральных осей; найти моменты инерции относительно главных центральных осей; вычертить сечение в масштабе 1:1 и указать на нём все оси и размеры в числах. Данные взять из табл. 7.

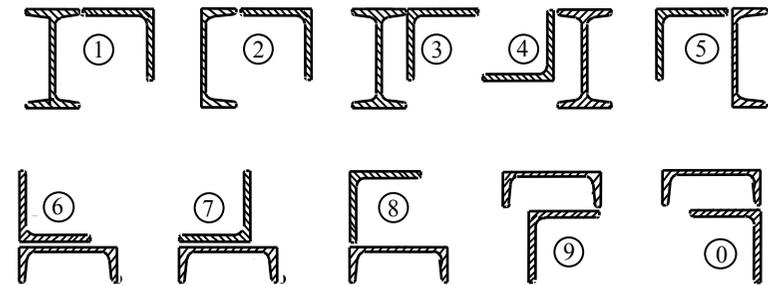


Рис. 7

Таблица 7

№ строки	№ сечения	Швеллер	Уголок	Двутавр
1	1	14	80×80×6	12
2	2	16	80×80×8	14
3	3	18	90×90×6	16
4	4	20	90×90×7	18
5	5	22	90×90×8	20
6	6	24	100×100×8	20а
7	7	27	100×100×10	22
8	8	30	100×100×12	22а
9	9	33	125×125×10	24
0	0	36	125×125×6	24а
	е	г	д	в

Пример 7. Для поперечного сечения (рис. 7, а) требуется: определить положение центра тяжести; найти осевые и центробежный моменты инерции относительно случайных центральных осей; определить направления главных центральных осей; найти главные центральные моменты инерции; вычертить сечение в масштабе 1:1 с указанием осей и размеров.

Дано: уголок № 90×90×9 (рис. 7, б); швеллер № 16 (рис. 7, в).

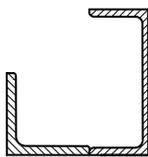


Рис. 7, а

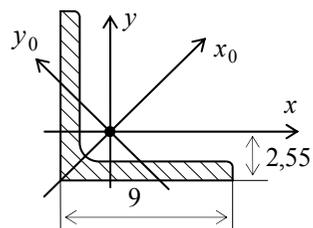


Рис. 7, б

Уголок № 90×90×9 ГОСТ 8509–93:

$$F = 15,6 \text{ см}^2; J_x = J_y = 118 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_0} = 186 \text{ см}^4; J_{y_0} = 50 \text{ см}^4;$$

$$J_{xy} = \frac{J_{y_0} - J_{x_0}}{2} = \frac{50 - 186}{2} = -68 \text{ см}^4.$$

Все размеры на рис. 7, б указаны в сантиметрах.

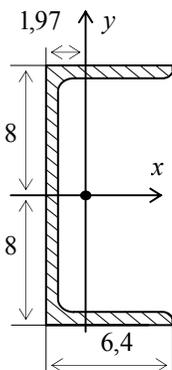


Рис. 7, в

Швеллер № 16 ГОСТ 8240–93:

$$F = 18,1 \text{ см}^2;$$

$$J_x = 750 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 72,8 \text{ см}^4;$$

$$J_{xy} = 0.$$

Все размеры на рис. 7, в указаны в сантиметрах.

Решение.

1. Найдём центр тяжести заданного сечения в координатах x_1, y_1 (рис. 7, з):

$$x_1 = \frac{18,1 \cdot 10,88}{15,6 + 18,1} = 5,84 \text{ см}; \quad y_1 = \frac{18,1 \cdot 5,45}{15,6 + 18,1} = 2,93 \text{ см}.$$

Через точку $C (x_1 = 5,84; y_1 = 2,93)$ проводим взаимно перпендикулярные координатные оси x, y . Относительно осей x, y находим координаты точек C_1, C_2 . Получаем: $C_1 (-5,84; -2,93)$; $C_2 (5,04; 2,52)$.

Проверяем положение центра тяжести:

$$S_x = 18,1 \cdot 2,52 + 15,6 \cdot (-2,93) = 45,612 - 45,708 = -0,096 \approx 0; \quad \Delta = 0,2\%;$$

$$S_y = 18,1 \cdot 5,04 + 15,6 \cdot (-5,84) = 91,224 - 91,104 = 0,12 \approx 0; \quad \Delta = 0,13\%.$$

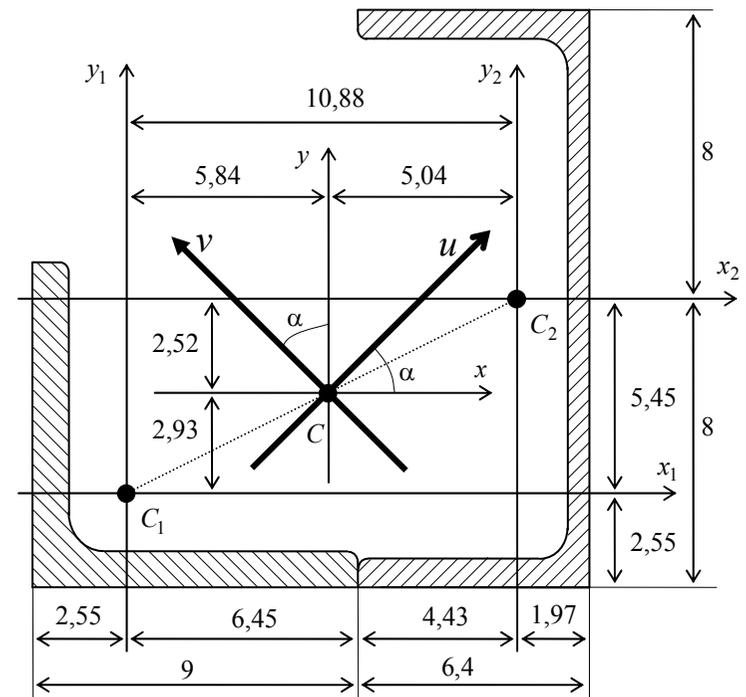


Рис. 7, з

Статические моменты относительно осей x, y получились близкими к нулю; следовательно, точка пересечения осей x, y является центром тяжести, а сами оси x, y – центральными осями заданного сечения.

2. Вычисляем моменты инерции относительно осей x, y :

$$J_x = 118 + 15,5 \cdot (-2,93)^2 + 750 + 18,1 \cdot 2,52^2 \approx 1117 \text{ см}^4 ;$$

$$J_y = 118 + 15,5 \cdot (-5,84)^2 + 72,8 + 18,1 \cdot 5,04^2 \approx 1183 \text{ см}^4 ;$$

$$J_{xy} = -68 + 15,5 \cdot (-2,93) \cdot (-5,84) + 18,1 \cdot 2,52 \cdot 5,04 \approx 429 \text{ см}^4 .$$

3. Поскольку $J_{xy} \neq 0$, найдём положение главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot 429}{1183 - 1117} = 13; \quad \alpha = 42,8^\circ ;$$

$$\sin \alpha = 0,6794; \quad \cos \alpha = 0,7337; \quad \sin 2\alpha = 0,9971; \quad \cos 2\alpha = 0,0767 ;$$

$$\sin^2 \alpha = 0,4616; \quad \cos^2 \alpha = 0,5384 .$$

Поворачивая оси x, y против часовой стрелки на угол $\alpha = 42,8^\circ$, получаем главные центральные оси u, v .

4. Найдём главные центральные моменты инерции:

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha ;$$

$$J_u = 1117 \cdot 0,5384 + 1183 \cdot 0,4616 - 429 \cdot 0,9971 = 720 \text{ см}^4 ;$$

$$J_v = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha ;$$

$$J_v = 1117 \cdot 0,4616 + 1183 \cdot 0,5384 + 429 \cdot 0,9971 = 1580 \text{ см}^4 .$$

Проверка:

$$J_u + J_v = J_x + J_y; \quad 720 + 1580 = 2300; \quad 1117 + 1183 = 2300; \quad 2300 = 2300 ;$$

$$J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha ;$$

$$J_{uv} = \frac{1117 - 1183}{2} 0,9971 + 429 \cdot 0,0767 = -32,9 + 32,9 = 0 .$$

Задача 8

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Задание. Для двух балок (рис. 8) требуется написать выражения для поперечных сил Q и изгибающих моментов M на каждом участке в общем виде, построить эпюры Q и M , найти M_{\max} и подобрать: для схемы "а" деревянную балку с круглым поперечным сечением при $R = 10$ МПа; для схемы "б" – стальные балки с круглым, квадратным и двутавровым поперечными сечениями при $R = 210$ МПа; для схемы б сравнить площади полученных сечений. Данные взять из табл. 8.

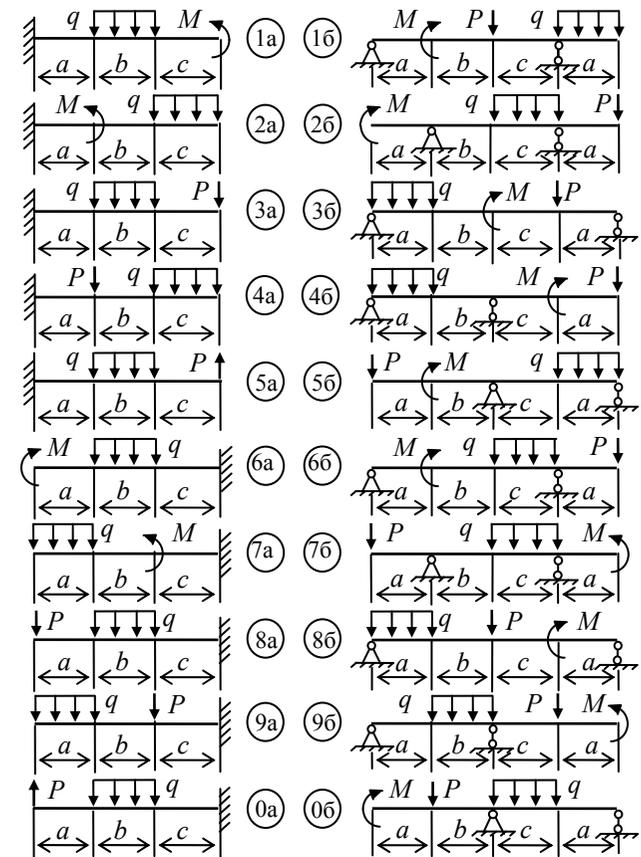


Рис. 8

Таблица 8

№ строки	№ схемы	a , м	b , м	c , м	M , кН·м	q , кН/м	P , кН
1	1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
2	2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
3	3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
4	4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
5	5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
6	6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6
7	7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7
8	8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
9	9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9
0	0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
	е	а	б	в	г	д	е

Пример 8. Для балки (рис. 8, а) требуется написать выражения для Q и M на каждом участке в общем виде, построить эпюры Q и M , найти M_{\max} и подобрать номер двутавра.

Дано: $a = 3$ м; $b = 4,2$ м; $c = 2,3$ м; $\ell = 12,5$ м; $M = 8$ кН·м; $P = 11$ кН; $q = 13$ кН/м; $R = 160$ МПа.

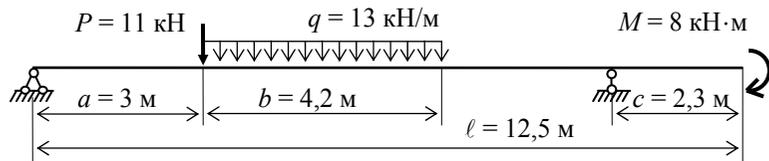


Рис. 8, а

Решение. Покажем и вычислим реакции опор (рис. 8, б):

$$\sum m_A = 0;$$

$$R_D(a + b + d) - Pa - qb(a + b/2) - M = 0;$$

$$R_D(3 + 4,2 + 3) - 11 \cdot 3 - 13 \cdot 4,2 \cdot 5,1 - 8 = 0; \quad R_D = 31,32 \text{ кН.}$$

$$\sum m_D = 0;$$

$$R_A(a + b + d) - P(b + d) - qb(d + b/2) + M = 0;$$

$$R_A(3 + 4,2 + 3) - 11 \cdot (4,2 + 3) - 13 \cdot 4,2 \cdot 5,1 + 8 = 0; \quad R_A = 34,28 \text{ кН.}$$

Проверка реакций опор:

$$\sum y = 0; \quad R_A - P - qb + R_D = 0;$$

$$34,28 - 11 - 13 \cdot 4,2 + 31,32 = 65,6 - 65,6 = 0.$$

Проверка реакций опор:

$$\sum y = 0; \quad R_A - P - qb + R_D = 0;$$

$$34,28 - 11 - 13 \cdot 4,2 + 31,32 = 65,6 - 65,6 = 0.$$

Реакции опор найдены верно.

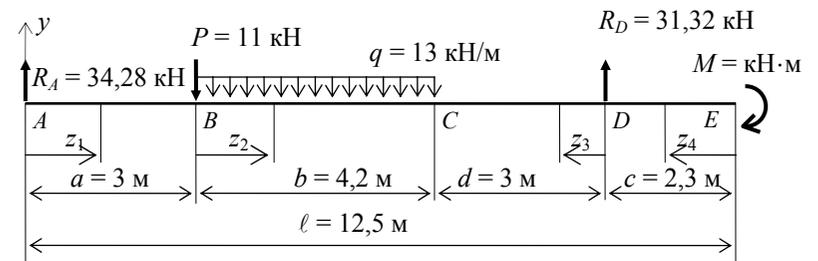


Рис. 8, б

Вычисляем значения Q и M на участках (рис. 8, б):

- Участок AB : $z_1 \in [0; 3]$;

$$Q(z_1) = R_A;$$

$$Q(z_1) = 34,28 \text{ кН};$$

$$M(z_1) = R_A z_1;$$

$$M(z_1) = 34,28 z_1;$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(3) = 102,84 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Проверка: $\frac{dM(z_1)}{dz_1} = R_A; \quad \frac{dM(z_1)}{dz_1} = Q(z_1).$

- Участок BC : $z_2 \in [0; 4,2]$;

$$Q(z_2) = R_A - P - q z_2;$$

$$Q(z_2) = 34,28 - 11 - 13z_2;$$

$$Q(0) = 23,28 \text{ кН};$$

$$Q(4,2) = -31,32 \text{ кН};$$

$$Q(z_2) = 0 \text{ при } z_2 = (34,28 - 11) / 13 = 1,79 \text{ м};$$

$$M(z_2) = R_A (a + z_2) - Pz_2 - q z_2 z_2 / 2;$$

$$M(z_2) = 34,28 (3 + z_2) - 11z_2 - 13z_2 z_2 / 2;$$

$$M(0) = 102,84 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(1,79) = 123,68 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(4,2) = 85,96 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверка: $\frac{dM(z_2)}{dz_2} = R_A - P - qz_2;$

$$\frac{dM(z_2)}{dz_2} = Q(z_2).$$

• Участок CD:

$$z_3 \in [0; 3];$$

$$Q(z_3) = -R_D;$$

$$Q(z_3) = -31,32 \text{ кН};$$

$$M(z_3) = R_D z_3 - M;$$

$$M(z_3) = 31,32z_3 - 8;$$

$$M(3) = 85,96 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(0) = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверка: $\frac{dM(z_3)}{dz_3} = R_D;$

$$\frac{dM(z_3)}{dz_3} = -Q(z_3).$$

• Участок DE:

$$z_4 \in [0; 2,3];$$

$$Q(z_4) = 0;$$

$$M(z_4) = -M;$$

$$M(z_4) = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюры Q и M (рис. 8, в).

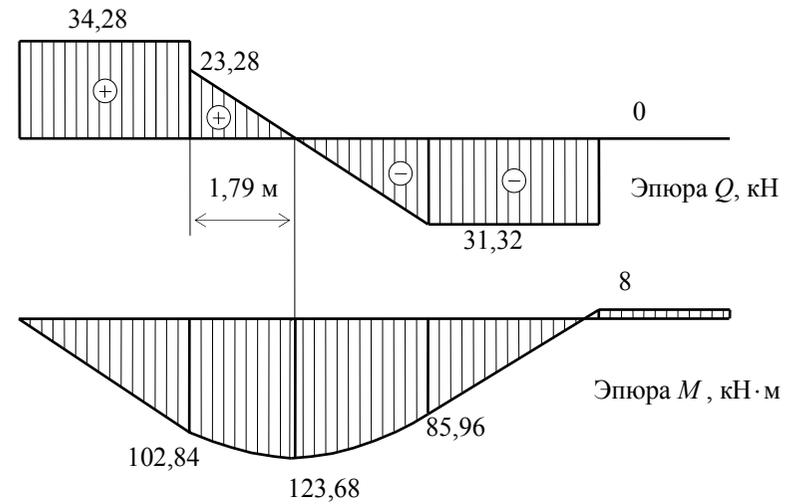


Рис. 8, в

Подбор сечения. Для балки постоянного сечения опасным является сечение, в котором действует максимальный по абсолютному значению изгибающий момент. В нашем случае это место находится на расстоянии 4,79 м от левой опоры и $M_{\max} = 123,68$ кН·м.

Из условия прочности определяем требуемый момент сопротивления и подбираем номер двутавра:

$$W_x = M_{\max} / R = 123,68 \cdot 1000 : 160 = 773 \text{ см}^3.$$

В соответствии с ГОСТ 8239–89, принимаем двутавр № 36, $W_x = 743 \text{ см}^3$. Перегрузка составляет 4%, что меньше 5%.

Задача 9

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМАЯ РАМА

Задание. Для рамы (рис. 9) требуется написать выражения для продольных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M на каждом участке в общем виде; построить эпюры N , Q , M и подобрать двутавровое сечение при $R = 220$ МПа. Данные взять из табл. 9.

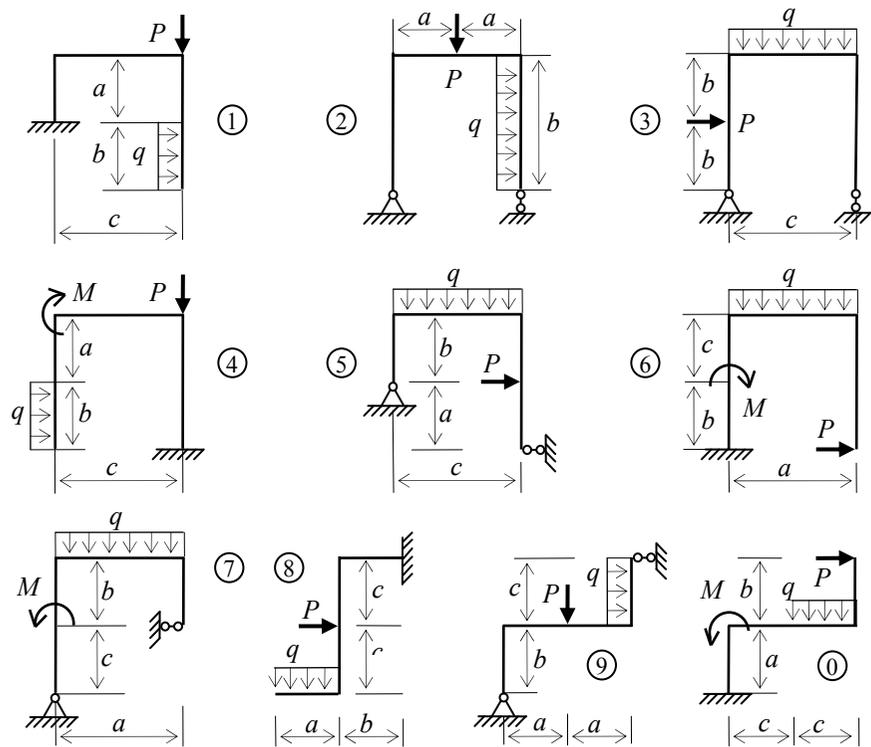


Рис. 9

Таблица 9

№ строки	№ схемы	a , м	b , м	c , м	M , кН·м	q , кН/м	P , кН
1	1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
2	2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
3	3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
4	4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
5	5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
6	6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6
7	7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7
8	8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
9	9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9
0	0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
	е	а	б	в	г	д	е

Пример 9. Для рамы (рис. 9, а) требуется написать выражения для продольных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M на каждом участке в общем виде, построить эпюры N , Q , M и подобрать двутавровое сечение при $R = 220$ МПа.

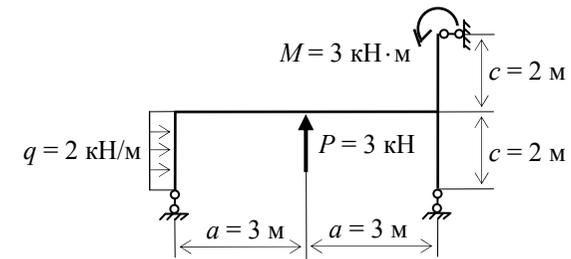


Рис. 9, а

Решение.

1. Покажем и определим реакции опор (рис. 9, б):

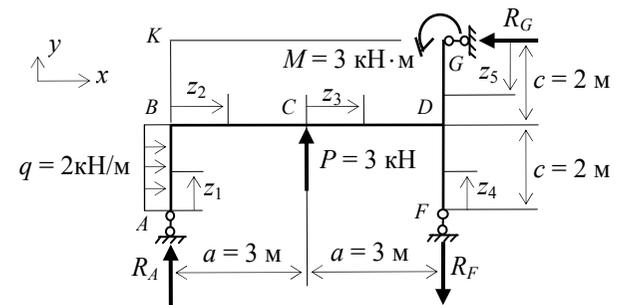


Рис. 9, б

$$\sum F_x = 0; \quad qc - R_G = 0; \quad R_G = qc = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН};$$

$$\sum M_K = 0; \quad R_F 2a - qc(c + c/2) - Pa - M = 0;$$

$$R_F = \frac{qc(c + c/2) + Pa - M}{2a} = \frac{2 \cdot 2(2 + 2/2) + 3 \cdot 3 + 3}{6} = 4 \text{ кН};$$

$$\sum M_G = 0; \quad R_A 2a + Pa - qc(c + c/2) - M = 0;$$

$$R_A = \frac{-Pa + qc(c + c/2) + M}{2a} = \frac{-3 \cdot 3 + 2 \cdot 2(2 + 2/2) + 3}{6} = 1 \text{ кН}.$$

Проверка реакций опор:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A + P - R_F = 1 + 3 - 4 = 4 - 4 = 0;$$

$$\sum M_C = 0; \quad \sum M_C = R_A a + R_F a - q c^2 / 2 - M - R_G c;$$

$$\sum M_C = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2^2 / 2 - 3 - 4 \cdot 2 = 3 + 12 - 4 - 3 - 8 = 15 - 15 = 0.$$

Реакции опор найдены верно.

2. Определяем внутренние усилия N , Q , M на каждом участке

- Участок AB : $z_1 \in [0; 2]$;

$$N(z_1) = -R_A = -1 \text{ кН};$$

$$Q(z_1) = -q \cdot z_1; \quad Q(0) = 0; \quad Q(2) = -4 \text{ кН};$$

$$M(z_1) = -q \frac{z_1^2}{2}; \quad M(0) = 0; \quad M(1) = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M(2) = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

- Участок BC : $z_2 \in [0; 3]$;

$$N(z_2) = -q c = -2 \cdot 2 = -4 \text{ кН};$$

$$Q(z_2) = R_A = 1 \text{ кН};$$

$$M(z_2) = R_A z_2 - q \frac{c^2}{2}; \quad M(z_2) = 1 \cdot z_2 - 2 \frac{2^2}{2} = z_2 - 4;$$

$$M(0) = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M(3) = -1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- Участок CD : $z_3 \in [0; 3]$;

$$N(z_3) = -q c = -2 \cdot 2 = -4 \text{ кН}; \quad Q(z_3) = R_A + P = 1 + 3 = 4 \text{ кН};$$

$$M(z_3) = R_A (a + z_3) - q \frac{c^2}{2} + P z_3;$$

$$M(z_3) = 1 \cdot (3 + z_3) - 2 \frac{2^2}{2} + 3 z_3 = 3 + z_3 - 4 + 3 z_3 = -1 + 4 z_3;$$

$$M(0) = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M(3) = 11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- Участок FD : $z_4 \in [0; 2]$;

$$N(z_4) = R_F = 4 \text{ кН}; \quad Q(z_4) = 0; \quad M(z_4) = 0;$$

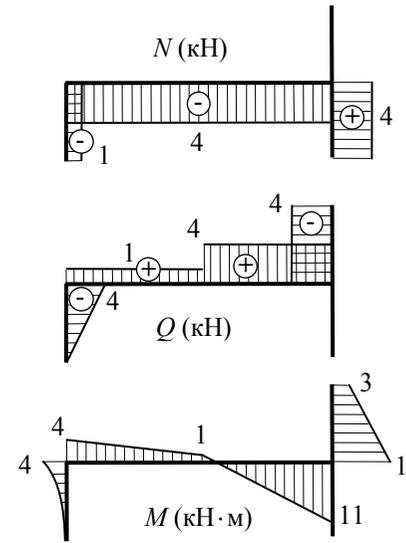
- Участок GD : $z_5 \in [0; 2]$;

$$N(z_5) = 0; \quad Q(z_5) = -R_G = -4 \text{ кН};$$

$$M(z_5) = -R_G z_5 - M; \quad M(z_5) = -4z_5 - 3; \quad M(0) = -3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(2) = -11 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

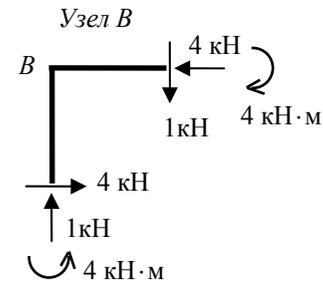
3. По вычисленным значениям строим эпюры N , Q , M (рис. 9, в).



Эпюра изгибающих моментов построена на растянутом волокне

Рис. 9, в

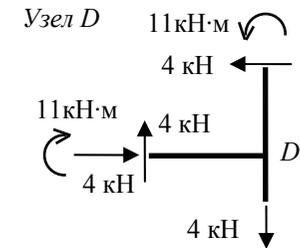
Узловая проверка:



$$\sum F_x = 4 - 4 = 0;$$

$$\sum F_y = 1 - 1 = 0;$$

$$\sum M_B = 4 - 4 = 0.$$



$$\sum F_x = 4 - 4 = 0;$$

$$\sum F_y = 4 - 4 = 0;$$

$$\sum M_D = 11 - 11 = 0.$$

Рис. 9, д

4. *Подбор сечения.* Ориентировочно подбираем номер двутавра из условия прочности при чистом изгибе, если $R = 220$ МПа:

$$W_{\text{треб}} = \frac{M_{\text{max}}}{R} = \frac{11 \cdot 10^3}{220} = 50 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 12, ГОСТ 8239–89, $W_x = 58,4 \text{ см}^3$, $A = 14,7 \text{ см}^2$.

Проверка прочности двутавра № 12 по нормальным напряжениям при совместном действии изгибающего момента и продольной силы:

$$\sigma = \left| \frac{N}{A} \right| + \left| \frac{M}{W} \right| = \frac{4 \cdot 10^3}{14,7 \cdot 10^{-4}} + \frac{11 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 191 \cdot 10^6 \text{ Па} = 191 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 191 \text{ МПа} < R = 225 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по нормальным напряжениям соблюдается. Двутавр № 12 принимаем окончательно.

Задача 10

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ

Задание. Короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 10, сжимается продольной силой P , приложенной в заданной точке. Требуется: вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее

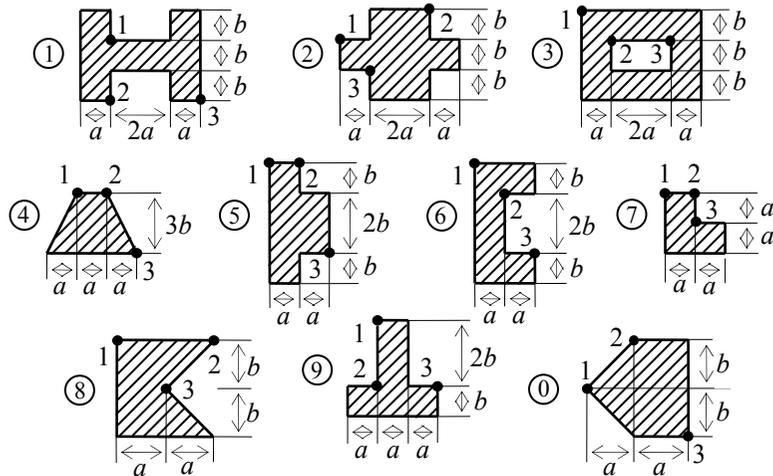


Рис. 10

сжимающего напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через P и размеры сечения; найти допускаемую нагрузку P при заданных размерах сечения и расчётных сопротивлениях материала на сжатие R_c и на растяжение R_p . Данные взять из табл. 10.

Таблица 10

№ строки	№ схемы	a , см	b , см	№ точки	R_c , МПа	R_p , МПа
1	1	5	5	1	60	21
2	2	6	6	2	70	22
3	3	3	3	3	80	23
4	4	4	4	1	90	24
5	5	5	5	2	100	25
6	6	6	6	3	110	26
7	7	3	3	1	120	27
8	8	4	4	2	130	28
9	9	5	5	3	140	29
0	0	6	6	1	150	30
	е	д	а	б	в	г

Пример 10. Короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 10, а, сжимается продольной силой P , приложенной в точке 1. Требуется: вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении при $a = 6$ см; найти допускаемую нагрузку $P_{\text{доп}}$, если $R_c = 70$ МПа, $R_p = 20$ МПа.

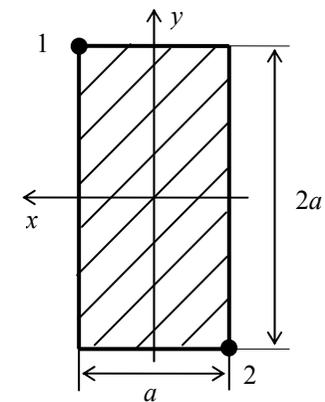


Рис. 10, а

Решение.

1. Находим площадь сечения:

$$A = 2a^2 = 2 \cdot 6^2 = 72 \text{ см}^2.$$

2. Определяем положение главных центральных осей. Сечение имеет две оси симметрии, следовательно, центр тяжести расположен в точке их пересечения, а сами оси симметрии являются главными осями. Направляем главные центральные оси x, y таким образом, чтобы точка приложения силы (т. 1) располагалась в первой координатной четверти.

3. Вычисляем главные центральные моменты инерции I_x и I_y .

Сечение представляет собой прямоугольник:

$$I_x = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{6 \cdot (2 \cdot 6)^3}{12} = 864 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{a^3(2a)}{12} = \frac{6^3(2 \cdot 6)}{12} = 216 \text{ см}^4.$$

4. Находим квадраты радиусов инерции:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{864}{72} = 12 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{216}{72} = 3 \text{ см}^2.$$

5. Определяем положение нейтральной (нулевой) линии (рис. 10, б):

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{y_p} = -\frac{12}{6} = -2 \text{ см}; \quad x_0 = -\frac{i_y^2}{x_p} = -\frac{3}{3} = -1 \text{ см}.$$

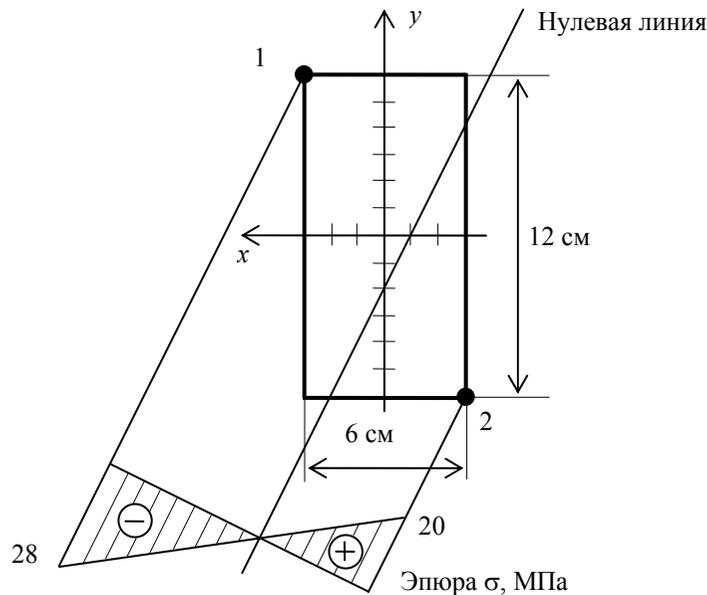


Рис. 10, б

6. Вычисляем наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения. В сжатой зоне наиболее удалённой от нулевой линии является точка 1, а в растянутой – точка 2.

$$\sigma_1 = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{x_p x_1}{i_y^2} + \frac{y_p y_1}{i_x^2} \right) = -\frac{P}{72} \left(1 + \frac{3 \cdot 3}{3} + \frac{6 \cdot 6}{12} \right) 10^4 = -972,2P;$$

$$\sigma_2 = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{x_p x_2}{i_y^2} + \frac{y_p y_2}{i_x^2} \right) = -\frac{P}{72} \left(1 + \frac{3(-3)}{3} + \frac{6(-6)}{12} \right) 10^4 = 694,4P.$$

7. Определяем допускаемую нагрузку:

- из условия прочности на растяжение

$$P_{\text{доп}} = \frac{R_p}{\sigma_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{694,4} = 28,8 \text{ кН};$$

- из условия прочности на сжатие

$$P_{\text{доп}} = \frac{R_c}{\sigma_1} = \frac{70 \cdot 10^3}{972,2} = 72,0 \text{ кН}.$$

Окончательно за допускаемую нагрузку принимаем меньшее значение $P_{\text{доп}} = 28,8 \text{ кН}$.

8. Построим эпюру напряжений от силы $P_{\text{доп}} = 28,8 \text{ кН}$ (рис. 10, б):

$$\sigma_1 = -972,2 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3} = -28,0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 694,4 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3} = 20,0 \text{ МПа}.$$

Задача 11

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Задание. На рисунке 11 изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости, с прямыми углами в точках A и B . На стержень действует вертикальная нагрузка. Требуется: построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов; установить опасное сечение и найти для него расчётный момент по III теории прочности. Данные взять из табл. 11.

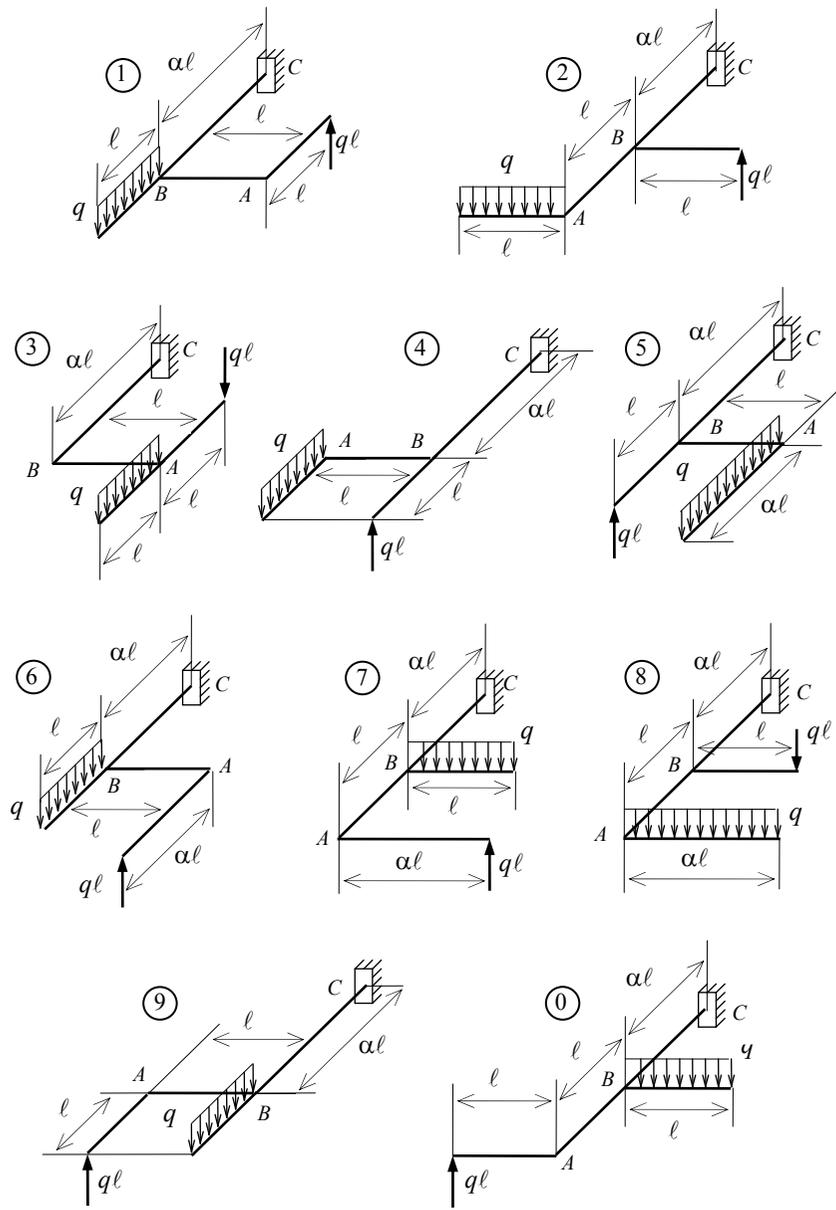
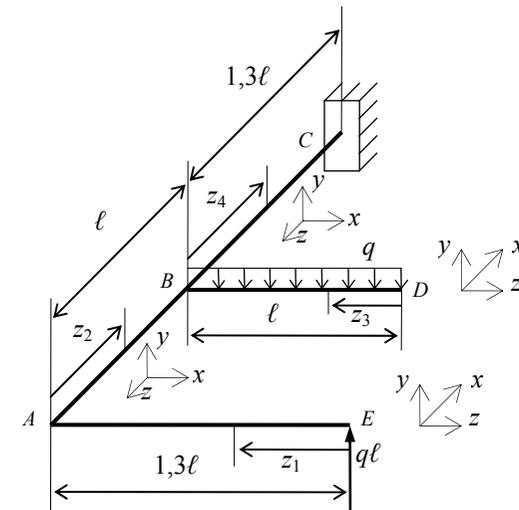


Рис. 11

Таблица 11

№ строки	№ схемы	α
1	1	1,1
2	2	1,2
3	3	1,3
4	4	1,4
5	5	1,5
6	6	0,6
7	7	0,7
8	8	0,8
9	9	0,9
0	0	1,0
	е	д

Пример 11. На рисунке 11, *a* изображена в аксонометрии ось ломаного стержня. На стержень действует вертикальная нагрузка. Требуется: построить эпюры изгибающих и крутящих моментов; установить опасное сечение и найти для него расчётный момент по III теории прочности.

Рис. 11, *a*

Решение.

1) В первую очередь необходимо для каждого из стержней назначить оси координат. Обычно ось z направляют вдоль оси каждого участка.

2) Определяем изгибающие моменты M_x на каждом участке и строим эпюру M_x (рис. 11, б).

- Участок EA : $z_1 \in [0; 1,3 \ell]$;
 $M_x(z_1) = qlz_1$;
 $M_x(0) = 0; \quad M_x(1,3\ell) = 1,3ql^2$.

- Участок AB : $z_2 \in [0; \ell]$;
 $M_x(z_2) = qlz_2$;
 $M_x(0) = 0; \quad M_x(\ell) = ql^2$.

- Участок DB : $z_3 \in [0; \ell]$;
 $M_x(z_3) = -q \frac{z_3^2}{2}; \quad M_x(0) = 0; \quad M_x(\ell) = -0,5ql^2$.

- Участок BC : $z_4 \in [0; 1,3 \ell]$;
 $M_x(z_4) = ql(\ell + z_4) - qlz_4$;
 $M_x(0) = ql^2; \quad M_x(1,3\ell) = ql^2$.

3. Определяем крутящие моменты M_z на каждом участке и строим эпюру M_z (рис. 11, в).

- Участок EA : $M_z = 0$.
- Участок AB : $M_z = 1,3ql^2$.
- Участок DB : $M_z = 0$.
- Участок BC : $M_z = 1,3ql^2 - 0,5ql^2 = 0,8ql^2$.

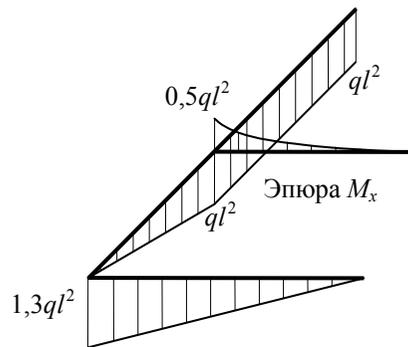


Рис. 11, б

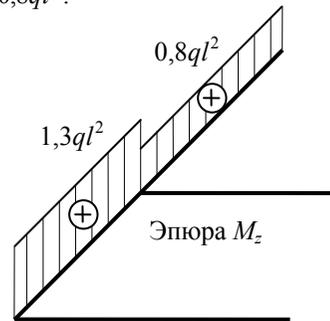


Рис. 11, в

4. Изгибающие моменты M_y на всех участках отсутствуют, так как все силы параллельны оси y .

5. Показываем возможные опасные сечения (рис. 11, з). Вычисляем в них расчётные моменты по III теории прочности $M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ в долях ql^2 .

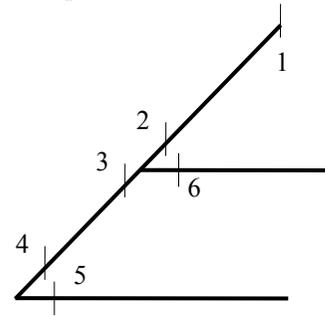


Рис. 11, з

Таблица 11, а

Сечение	M_x	M_z	M_p
1	1	0,8	1,27
2	1	0,8	1,27
3	1	1,3	1,64
4	0	1,3	1,3
5	1,3	0	1,3
6	0,5	0	0,5

Опасным является третье сечение, $M_p = 1,64ql^2$.

Задача 12

РАСЧЁТ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

Задание. Для криволинейного стержня (рис. 12) построить эпюры M , Q , N и найти нормальные напряжения в опасном сечении. Данные взять из табл. 12. Формы поперечных сечений изображены на рис. 12, а.

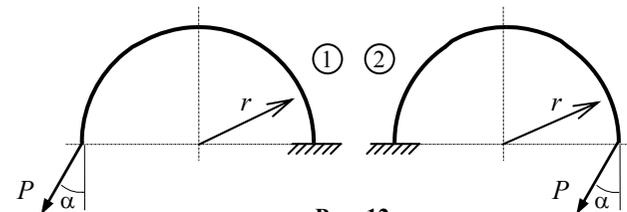


Рис. 12

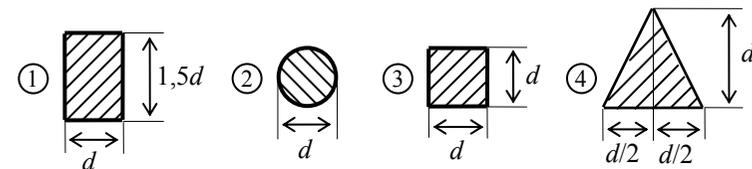


Рис. 12, а

Таблица 12

№ строки	Схема по рис. 12	$\alpha, ^\circ$	$P, \text{кН}$	$r, \text{см}$	$d, \text{см}$	Сечение по рис. 12, a
1	1	30	1,1	16	4,1	1
2	2	45	1,2	17	4,2	2
3	1	60	1,3	18	4,3	3
4	2	30	1,4	19	4,4	4
5	1	45	1,5	20	4,5	1
6	2	60	1,6	16	4,6	2
7	1	30	1,7	17	4,7	3
8	2	45	1,8	18	4,8	4
9	1	60	1,9	19	4,9	1
0	2	30	2,0	20	5,0	2
	а	б	в	г	д	е

Пример 12. Для криволинейного стержня (рис. 12, б) построить эпюры Q, N, M и найти нормальные напряжения в опасном сечении, если: $P = 1,2 \text{ кН}$; $r = 16 \text{ см}$; $\alpha = 45^\circ$. Сечение имеет форму трапеции с размерами: $h = 6 \text{ см}$; $b_1 = 3 \text{ см}$; $b_2 = 6 \text{ см}$ (рис. 12, в) Все размеры на рисунках указаны в сантиметрах.

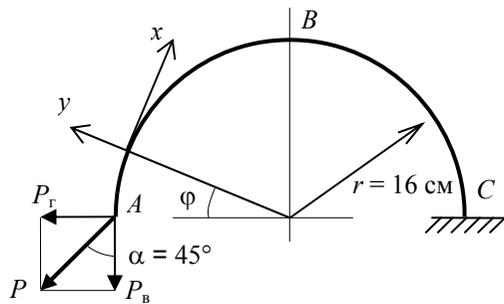


Рис. 12, б

Решение.

1. Определим вертикальную и горизонтальную составляющие силы P :

$$P_b = P \cos \alpha = 1,2 \cdot 0,707 = 0,849 \text{ кН};$$

$$P_r = P \sin \alpha = 1,2 \cdot 0,707 = 0,849 \text{ кН}.$$

2. Запишем выражения для внутренних сил в произвольном сечении:

$$Q(\varphi) = P_r \cos \varphi - P_b \sin \varphi;$$

$$N(\varphi) = P_r \sin \varphi + P_b \cos \varphi;$$

$$M(\varphi) = P_r r \sin \varphi - P_b r (1 - \cos \varphi);$$

$$Q(\varphi) = 0,849 \cos \varphi - 0,849 \sin \varphi;$$

$$N(\varphi) = 0,849 \sin \varphi + 0,849 \cos \varphi;$$

$$M(\varphi) = 0,136 \sin \varphi - 0,136(1 - \cos \varphi).$$

Полученные формулы используем для вычисления Q , N , M (табл. 12, а) с шагом угла $\delta\varphi = 30^\circ$.

Таблица 12, а

Величина	$\varphi = 0$	$\varphi = 30^\circ$	$\varphi = 60^\circ$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 120^\circ$	$\varphi = 150^\circ$	$\varphi = 180^\circ$
Q , кН	0,849	0,311	-0,311	-0,849	-1,16	-1,16	-0,849
N , кН	0,849	1,16	1,16	0,849	0,31	-0,31	-0,849
M , кН·м	0	0,0497	0,0497	0	-0,086	-0,186	-0,272

По данным табл. 12, а строим эпюры Q , N и M (рис. 12, в).

3. Определим напряжения в опасном сечении (рис. 12, г) при следующих значениях внутренних усилий: $M = -272$ Н·м; $N = -849$ Н.

Нормальные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{Ac} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right).$$

Центр тяжести трапеции находится от основания на расстоянии

$$a = \left(\frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \right) \frac{h}{3} = \left(\frac{2 \cdot 3 + 6}{3 + 6} \right) \frac{6}{3} = 2,667 \text{ см};$$

Внутренний и наружный радиусы криволинейного стержня

$$r_b = r - a = 16 - 2,667 = 13,333 \text{ см};$$

$$r_n = r + h - a = 16 + 6 - 2,667 = 19,333 \text{ см}.$$

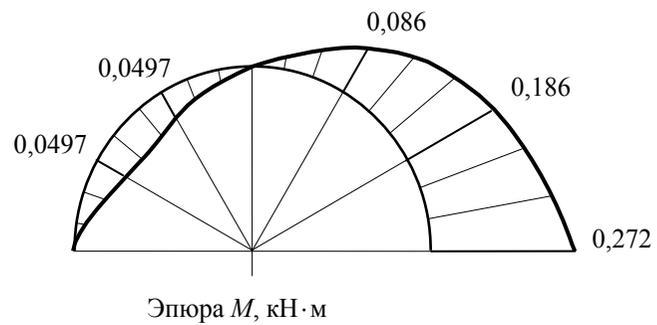
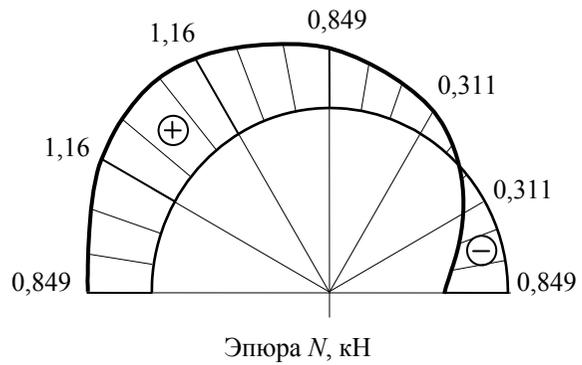
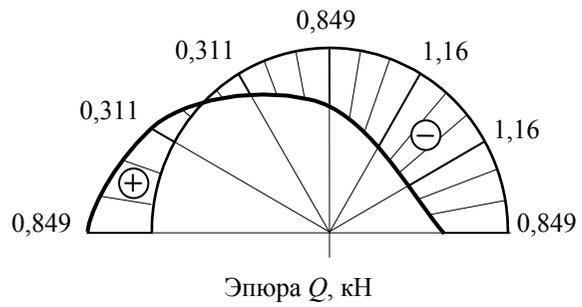


Рис. 12, в

Радиус кривизны нейтрального слоя для сечения в форме трапеции (при $N=0$)

$$r_0 = \frac{(b_1 + b_2)h^2}{2 \left[(r_H b_2 - r_B b_1) \ln \left(\frac{r_H}{r_B} \right) - (b_2 - b_1)h \right]}$$

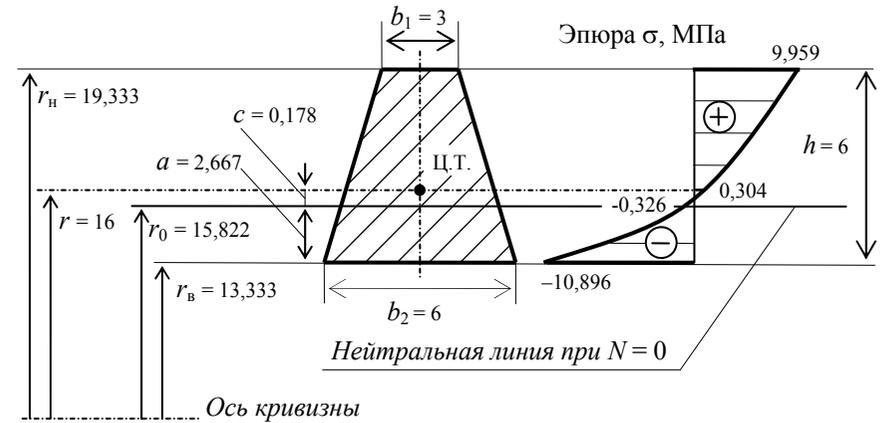


Рис. 12, з

$$r_0 = \frac{(3+6)6^2}{2 \left[(19,333 \cdot 6 - 13,333 \cdot 3) \ln \left(\frac{19,333}{13,333} \right) - (6-3)6 \right]} = 15,822 \text{ см.}$$

Расстояние от центра тяжести до нейтрального слоя (при $N = 0$)

$$c = r - r_0 = 16 - 15,822 = 0,178 \text{ см.}$$

Площадь сечения

$$A = (b_1 + b_2)h / 2 = (6 + 3)6 / 2 = 27 \text{ см}^2.$$

Значения напряжений в характерных точках:

- $\rho = r_{\text{н}} = 19,333 \text{ см}$:

$$\sigma = -\frac{879}{27} + \frac{27200}{27 \cdot 0,178} \left(\frac{19,333 - 15,822}{19,333} \right) = 995,9 \text{ Н/см}^2 = 9,959 \text{ МПа};$$

- $\rho = r = 16 \text{ см}$:

$$\sigma = -\frac{879}{27} + \frac{27200}{27 \cdot 0,178} \left(\frac{16 - 15,822}{19,333} \right) = 30,4 \text{ Н/см}^2 = 0,304 \text{ МПа};$$

- $\rho = r_0 = 15,822 \text{ см}$:

$$\sigma = -\frac{879}{27} + \frac{27200}{27 \cdot 0,178} \left(\frac{15,822 - 15,822}{19,333} \right) = -32,6 \text{ Н/см}^2 = -0,326 \text{ МПа};$$

- $\rho = r_B = 13,333 \text{ см}$;

$$\sigma = -\frac{879}{27} + \frac{27200}{27 \cdot 0,178} \left(\frac{13,333 - 15,822}{19,333} \right) = -1089,6 \text{ Н/см}^2 = -10,896 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру σ (рис. 12, з).

Задача 13

РАСЧЁТ СТЕРЖНЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Задание. Стальной стержень (рис. 13) сжимается силой P . Требуется: найти размеры поперечного сечения (рис. 13, а) при расчётном сопротивлении на простое сжатие $R = 200 \text{ МПа}$; найти значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости. Данные взять из табл. 13.

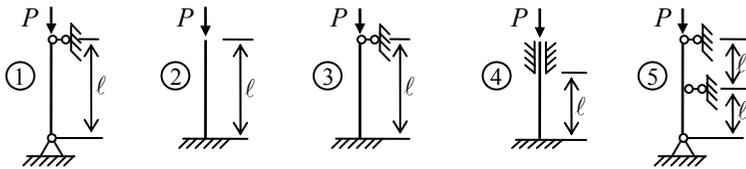


Рис. 13

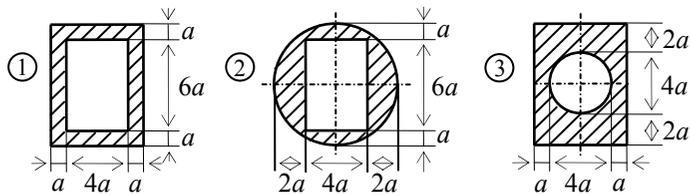


Рис. 13, а

Таблица 13

№ строки	Схема закрепления стержня по рис. 13	Сечение стержня по рис. 13, a	P , кН	ℓ , м
1	1	1	100	2,1
2	2	2	200	2,2
3	3	3	300	2,3
4	4	1	400	2,4
5	5	2	500	2,5
6	1	3	600	2,6
7	2	1	700	2,7
8	3	2	800	2,8
9	4	3	900	2,9
0	5	1	50	3,0
	е	а	в	г

Пример 13. Стальной стержень (рис. 13, б) сжимается силой $P = 400$ кН. Найти размеры поперечного сечения, значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости, если $l = 2$ м, $R = 200$ МПа.

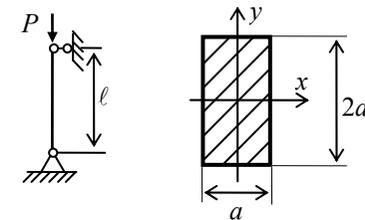


Рис. 13, б

Решение.

1. Для поперечного сечения определяем площадь A в общем виде, и выражаем размер a через площадь A :

$$A = a \cdot 2a = 2a^2; \quad a = \sqrt{\frac{A}{2}} = 0,707\sqrt{A}.$$

2. Минимальный момент инерции сечения

$$I_y = I_{\min} = \frac{2a(a)^3}{12} = 0,167a^4.$$

3. Минимальный радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,167a^4}{2a^2}} = 0,289a.$$

4. Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2}{0,289a} = \frac{6,921}{a}$.

5. Первое приближение $\varphi_1^H = 0,5$:

$$A = \frac{P}{\varphi_1^H R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$a = 0,707\sqrt{A} = 0,707\sqrt{4 \cdot 10^{-3}} = 0,045 \text{ м};$$

$$\lambda = \frac{6,921}{a} = \frac{6,921}{0,045} = 155.$$

Для найденной гибкости определяем соответствующий коэффициент продольного изгиба, используя линейную интерполяцию табличных данных:

$$\lambda = 150; \quad \varphi = 0,328;$$

$$\lambda = 160; \quad \varphi = 0,290;$$

$$\varphi_1^K = 0,290 + (160 - 155) \frac{0,328 - 0,290}{10} = 0,309.$$

Вычисляем действующее и допускаемое напряжения:

$$\frac{P}{A} = \frac{400 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ МПа}; \quad R_{\text{сж}} \varphi_1^K = 200 \cdot 0,309 = 61,8 \text{ МПа};$$

$$\Delta = \frac{100 - 61,8}{61,8} \cdot 100\% = 62\% > 5\%.$$

Получили перегрузку, величина которой больше 5%, следовательно, выполняем второе приближение.

6. Второе приближение:

$$\varphi_2^H = (\varphi_1^H + \varphi_1^K) / 2 = (0,5 + 0,309) / 2 = 0,405;$$

$$A = \frac{P}{\varphi_2^H R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,405 \cdot 200 \cdot 10^6} = 4,94 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$a = 0,707\sqrt{A} = 0,707\sqrt{4,94 \cdot 10^{-3}} = 0,05 \text{ м};$$

$$\lambda = \frac{6,921}{a} = \frac{6,921}{0,05} = 138,4;$$

$$\lambda = 130; \quad \varphi = 0,425;$$

$$\lambda = 140; \quad \varphi = 0,376;$$

$$\varphi_2^k = 0,376 + (140 - 138,4) \frac{0,425 - 0,376}{10} = 0,384;$$

$$\frac{P}{A} = \frac{400 \cdot 10^{-3}}{4,94 \cdot 10^{-3}} = 80,1 \text{ МПа}; \quad R_{сж} \varphi_1^k = 200 \cdot 0,384 = 76,8 \text{ МПа};$$

$$\Delta = \frac{80,1 - 76,8}{61,8} \cdot 100\% = 4,3\% < 5\%.$$

Во втором приближении также имеет место перегрузка, но её величина стала меньше 5%. Принимаем: $a = 5 \text{ см}$; $\lambda = 138,4$.

7. Находим критическую силу. Так как $\lambda = 138,4 > \lambda_{пр} = 100$, расчёт ведём по формуле Эйлера:

$$I_{\min} = 0,167a^4 = 0,167 \cdot 5^4 = 104 \text{ см}^4;$$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 104 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 2)^2} = 604 \text{ кН}.$$

8. Определяем коэффициент запаса

$$k_{уст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{604}{400} = 1,51.$$

Задача 14

РАСЧЁТ БАЛКИ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ

Задание. На двутавровую балку, свободно лежащую на двух жёстких опорах (рис. 14), с высоты h падает груз Q . Требуется: найти наибольшее нормальное напряжение в балке; решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т.е. осадка от груза 1 кН) равна α ; сравнить полученные результаты. Данные взять из табл. 14.

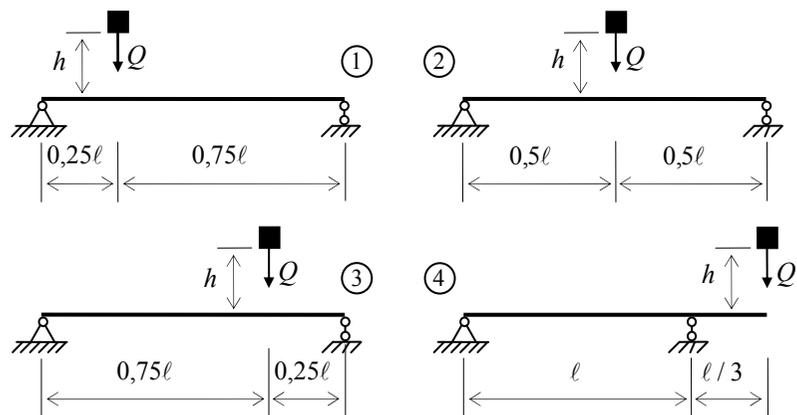


Рис. 14

Таблица 14

№ строки	№ схемы	№ двугавра	ℓ , м	Q , Н	h , см	α , м/кН
1	1	20	2,1	1100	11	$21 \cdot 10^{-3}$
2	2	20а	2,2	1200	12	$22 \cdot 10^{-3}$
3	3	24	2,3	300	3	$23 \cdot 10^{-3}$
4	4	24а	2,4	400	4	$24 \cdot 10^{-3}$
5	1	27	2,5	500	5	$25 \cdot 10^{-3}$
6	2	27а	2,6	600	6	$26 \cdot 10^{-3}$
7	3	30	2,7	700	7	$27 \cdot 10^{-3}$
8	4	30а	2,8	800	8	$28 \cdot 10^{-3}$
9	1	33	2,9	900	9	$29 \cdot 10^{-3}$
0	2	36	3,0	1000	10	$30 \cdot 10^{-3}$
	е	д	в	а	г	б

Методические указания

При наличии упомянутой ранее пружины $\Delta_{ст} = \Delta_6 + \beta \Delta_{пр}$, где Δ_6 – прогиб балки, лежащей на жестких опорах, в том сечении, где приложена сила Q (при статическом действии этой силы); $\Delta_{пр}$ – осадка пружины от реакции, возникающей от силы Q ; β – коэффициент, устанавливающий зависимость между осадкой пружины и перемещением точки приложения

силы Q , вызванным поворотом всей балки вокруг центра шарнира левой опоры как жёсткого целого (коэффициент β находят из подобия треугольников).

Пример 14. На двутавровую балку (№ 24, $W_x = 289 \text{ см}^3$, $I_x = 3460 \text{ см}^4$, $l = 4 \text{ м}$), свободно лежащую на двух жёстких опорах (рис. 14, а), с высоты $h = 11 \text{ см}$ падает груз $Q = 600 \text{ Н}$. Найти наибольшее нормальное напряжение в балке; решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой равна $\alpha = 25 \cdot 10^{-3} \text{ м/кН}$.

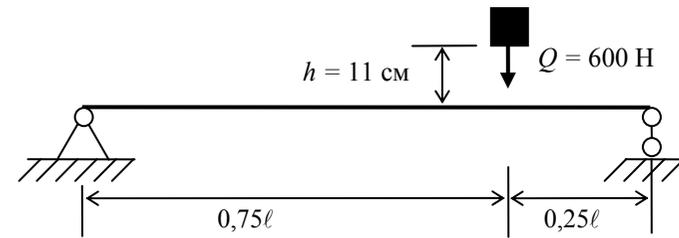


Рис. 14, а

Решение.

1. Определим прогиб балки в точке удара (в точке C) при статическом действии силы Q . Предварительно покажем единичное состояние, построим эпюру изгибающих моментов \bar{M} (рис. 14, б) и вычислим перемещение δ от единичной силы по формуле трапеций:

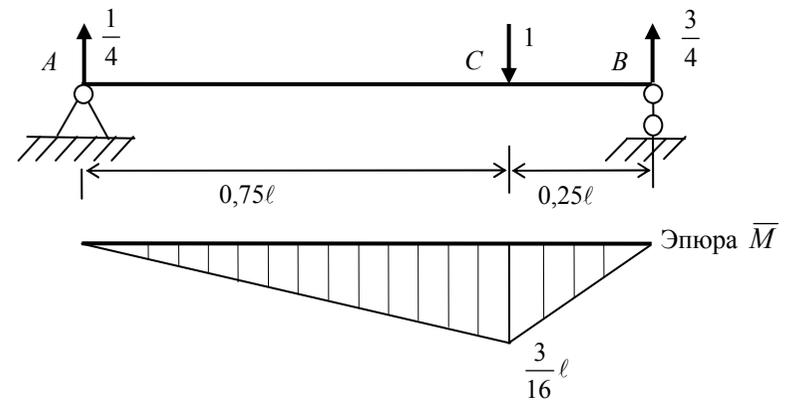


Рис. 14, б

$$\delta = \frac{0,75l}{6EI} \left(0 + 2 \cdot \frac{3}{16} l \cdot \frac{3}{16} l + 0 + 0 \right) + \frac{0,25l}{6EI} \left(2 \cdot \frac{3}{16} l \cdot \frac{3}{16} l + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{0,01172l^3}{EI};$$

$$\Delta_{ст} = \delta Q = \frac{0,01172 \cdot 4^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} \cdot 600 = 6,50 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,0065 \text{ см.}$$

2. Определим динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 11}{0,0065}} = 59,2.$$

3. Вычислим наибольшие нормальные напряжения в балке при статическом нагружении:

$$\sigma_{ст} = \frac{\bar{M}_{\max} Q}{W} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 600 \cdot 10^{-6}}{16 \cdot 289 \cdot 10^{-6}} = 1,56 \text{ МПа.}$$

4. Наибольшие нормальные напряжения в балке при ударе

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = 59,2 \cdot 1,56 = 92,2 \text{ МПа.}$$

5. Определим напряжения в балке при ударе, если правая опора заменена пружиной (рис. 14, в). Предварительно рассмотрим статическое нагружение.

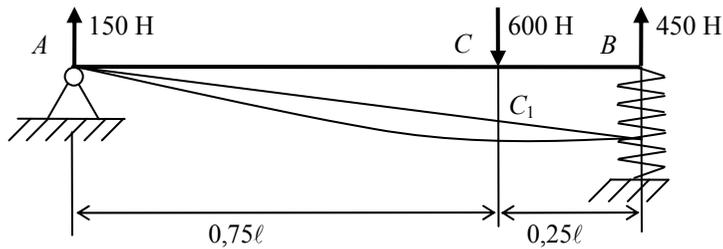


Рис. 14, в

Осадка опоры B

$$\Delta B = 25 \cdot 10^{-3} \cdot 0,45 = 1125 \cdot 10^{-3} = 0,01125 \text{ м} = 1,125 \text{ см.}$$

Перемещение точки C, вызванное осадкой опоры B:

$$CC_1 = 1,125 \frac{3}{4} = 0,844 \text{ см.}$$

Полное перемещение точки C (с учётом осадки опоры B и прогиба балки)

$$\Delta_{ст} = 0,844 + 0,0065 \approx 0,85 \text{ м.}$$

Динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 11}{0,85}} = 6,18.$$

Наибольшие нормальные напряжения в балке при ударе

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = 1,56 \cdot 6,18 = 9,64 \text{ МПа.}$$

Вывод: после замены жёсткой опоры пружиной напряжения в балке при ударе уменьшились в $92,2/9,64 = 9,56$ раз.

Задача 15

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Задание. Для балки, изображенной на рис. 15, требуется: построить эпюры Q и M ; выполнить статическую и кинематическую проверку; подобрать двутавровое сечение. Данные взять из табл. 15. Принять $EJ = \text{const}$.

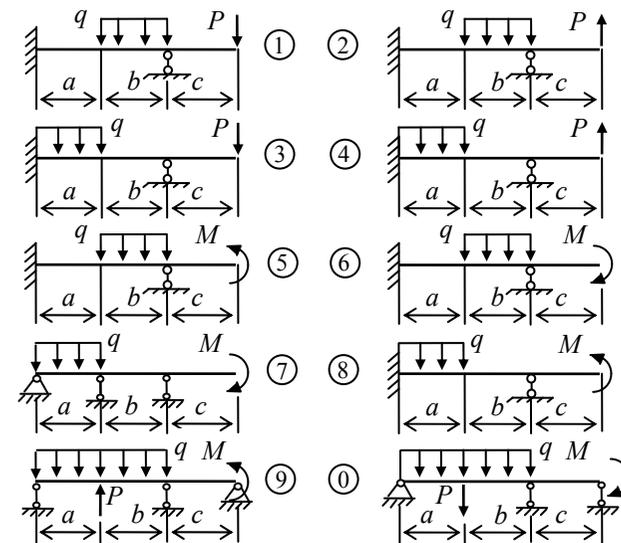


Рис. 15

Таблица 15

№ строки	№ схемы	a , м	b , м	c , м	M , кН·м	q , кН/м	P , кН
1	1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
2	2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
3	3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
4	4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
5	5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
6	6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6
7	7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7
8	8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
9	9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9
0	0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
	е	а	б	в	г	д	е

Методические указания

При решении задачи использовать метод сил. Для вычисления перемещений применять формулы сокращенного умножения эпюр.

Пример 15. Для балки (рис. 15, а) построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M ; выполнить статическую и кинематическую проверку; подобрать двутавровое сечение. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 90 \text{ МПа}$.

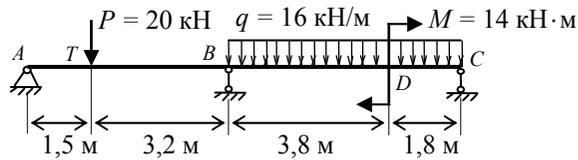


Рис. 15, а

Решение.

1. Находим степень статической неопределимости (число опорных связей минус три) $n = 4 - 3 = 1$.

2. Выбираем основную систему в виде балки на двух шарнирных опорах (рис. 15, б).

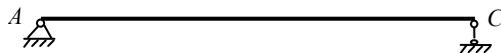


Рис. 15, б

3. Показываем эквивалентную систему (рис. 15, в).

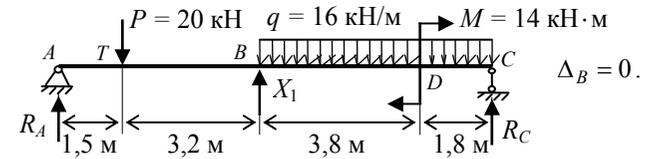


Рис. 15, в

4. Составляем каноническое уравнение по методу сил:

$$\Delta_B = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

5. Для определения перемещений δ_{11} и Δ_{1p} предварительно построим эпюры изгибающих моментов в основной системе при единичном и грузовом состоянии. Перемещения будем искать по формулам перемножения эпюр. Для участков с распределённой нагрузкой необходимо знать моменты на концах и в серединах участков, для участков без распределённой нагрузки достаточно вычислить моменты на концах. Рассмотрим единичное состояние (рис. 15, з). Все размеры даны в метрах.

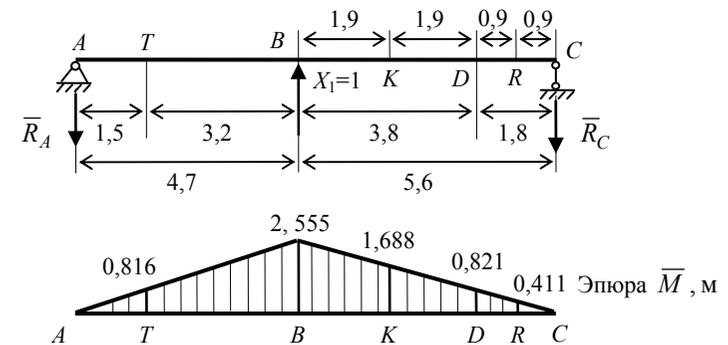


Рис. 15, з

Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0; \quad 4,7\bar{X}_1 - 10,3\bar{R}_C = 0; \quad \bar{R}_C = \frac{1 \cdot 4,7}{10,3} = 0,4563;$$

$$\sum M_C = 0; \quad 10,3\bar{R}_A - 5,6\bar{X}_1 = 0; \quad \bar{R}_A = \frac{1 \cdot 5,6}{10,3} = 0,5437.$$

Проверка:

$$\sum y = 0; \quad -\bar{R}_A + \bar{X}_1 - \bar{R}_C = 0; \quad -0,5437 + 1 - 0,4563 = 1 - 1 = 0.$$

Реакции опор найдены верно.

Вычисляем значения \bar{M}_1 в сечениях балки:

- точка A : $\bar{M}_1 = 0$;
- точка T : $\bar{M}_1 = -1,5\bar{R}_A = -1,5 \cdot 0,5437 = -0,816$ м;
- точка B : $\bar{M}_1 = -(1,5 + 3,2)\bar{R}_A = -(1,5 + 3,3) \cdot 0,5437 = -2,555$ м;
- точка K : $\bar{M}_1 = -(1,9 + 1,8)\bar{R}_C = -(1,9 + 1,8) \cdot 0,4563 = -1,688$ м;
- точка D : $\bar{M}_1 = -1,8\bar{R}_C = -1,8 \cdot 0,4563 = -0,821$ м;
- точка R : $\bar{M}_1 = -0,9\bar{R}_C = -0,9 \cdot 0,4563 = -0,411$ м;
- точка C : $\bar{M}_1 = 0$.

По найденным значениям строим эпюру \bar{M}_1 (рис. 15, з).

Рассмотрим грузовое состояние основной системы (рис. 15. д).

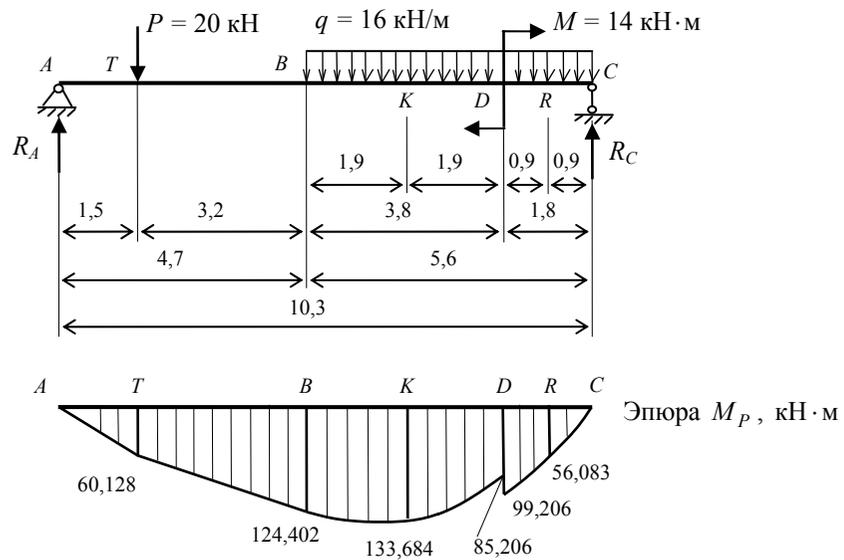


Рис. 15, д

Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0: -P \cdot 1,5 - q \cdot 5,6 \cdot (4,7 + 5,6/2) - M + R_C \cdot 10,3 = 0;$$

$$R_C = \frac{P \cdot 1,5 + q \cdot 5,6 \cdot (4,7 + 5,6/2) + M}{10,3};$$

$$R_C = \frac{20 \cdot 1,5 + 16 \cdot 5,6 \cdot (4,7 + 5,6/2) + 14}{10,3} = 69,515 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0: -R_A \cdot 10,3 + P \cdot (3,2 + 5,6) + q \cdot 5,6 \cdot (5,6/2) - M = 0;$$

$$R_A = \frac{P \cdot (3,2 + 5,6) + q \cdot 5,6 \cdot (5,6/2) - M}{10,3};$$

$$R_A = \frac{20 \cdot (3,2 + 5,6) + 16 \cdot 5,6 \cdot (5,6/2) - 14}{10,3} = 40,085 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum y = 0; \quad \sum y = R_A - P - q \cdot 5,6 + R_C;$$

$$40,085 - 20 - 16 \cdot 5,6 + 69,515 = 109,6 - 109,6 = 0.$$

Реакции опор найдены верно.

Вычисляем значения моментов M_p в сечениях:

- точка A : $M_p = 0$;
- точка T : $M_p = R_A \cdot 1,5 = 40,085 \cdot 1,5 = 60,128 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
- точка B : $M_p = R_A \cdot 4,7 - P \cdot 3,2 = 40,085 \cdot 4,7 - 20 \cdot 3,2 = 124,402 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
- точка K : $M_p = R_A \cdot (4,7 + 1,9) - P \cdot (3,2 + 1,9) - q \cdot 1,9^2 / 2$;
- точка K : $M_p = 40,085 \cdot (4,7 + 1,9) - 20 \cdot (3,2 + 1,9) - 16 \cdot 1,9^2 / 2 = 133,684 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Слева от т. D :

$$M_p = R_A \cdot (4,7 + 3,8) - P \cdot (3,2 + 3,8) - q \cdot 3,8^2 / 2;$$

$$M_p = 40,085 \cdot (4,7 + 3,8) - 20 \cdot (3,2 + 3,8) - 16 \cdot 3,8^2 / 2 = 85,206 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Справа от т. D :

$$M_p = R_C \cdot 1,8 - q \cdot 1,8^2 / 2 = 69,515 \cdot 1,8 - 16 \cdot 1,8^2 / 2 = 99,206 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

• точка R :

$$M_p = R_C \cdot 0,9 - q \cdot 0,9^2 / 2 = 69,515 \cdot 0,9 - 16 \cdot 0,9^2 / 2 = 56,083 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

• точка C : $M_p = 0$;

По найденным значениям строим эпюру M_p (рис. 15, δ).

Умножаем эпюру \bar{M}_1 саму на себя:

$$\delta_{11} = \sum_0^\ell \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dz;$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(0,5 \cdot 4,7 \cdot 2,555 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,555 \right) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 5,6 \cdot 2,555 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,555 \right) = \frac{22,419}{EJ}.$$

Перемножаем эпюры \bar{M}_1 и M_p :

$$\Delta_{1p} = \sum_0^\ell \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} dz;$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1,5}{6EJ} (-2 \cdot 60,128 \cdot 0,816) +$$

$$+ \frac{3,2}{6EJ} (-2 \cdot 60,128 \cdot 0,816 - 2 \cdot 124,402 \cdot 2,555 - 60,128 \cdot 2,555 - 124,402 \cdot 0,816) +$$

$$+ \frac{3,8}{6EJ} (-124,402 \cdot 2,555 - 4 \cdot 133,684 \cdot 1,688 - 85,206 \cdot 0,821) +$$

$$+ \frac{1,8}{6EJ} (-99,206 \cdot 0,821 - 4 \cdot 56,083 \cdot 0,411) = -\frac{1421,482}{EJ}.$$

Из уравнения $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$ находим X_1 :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{-1421,482}{22,419} = 63,406 \text{ кН}.$$

Строим исправленную эпюру $\bar{M}_1 X_1$ (рис. 15, e). Для этого все значения эпюры \bar{M}_1 (рис. 15, z) умножаем на X_1 .

Строим окончательную эпюру моментов M (рис. 15, e). Для этого складываем эпюры $\bar{M} X_1$ и M_p .

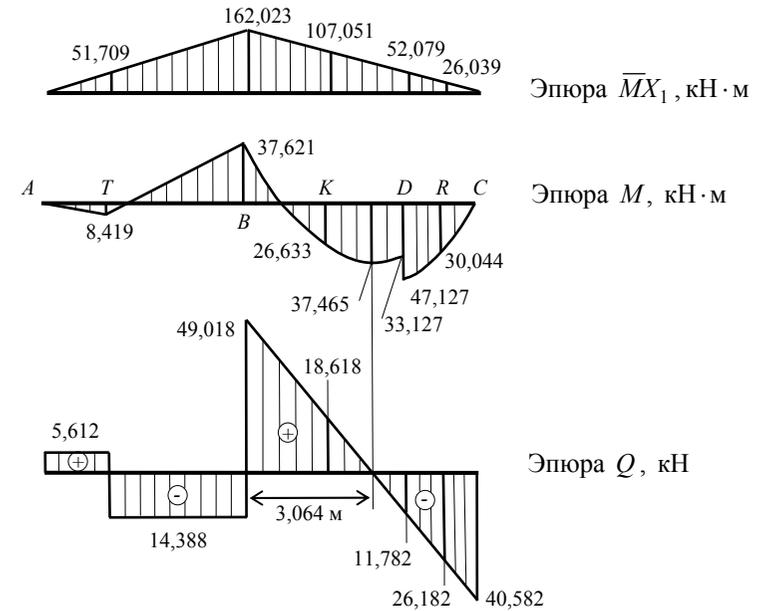


Рис. 15, e

Кинематическая проверка:

$$\sum_0^{\ell} \int \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dz = 0;$$

$$\sum_0^{\ell} \int \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dz = \frac{1,5}{6EJ} (-2 \cdot 8,419 \cdot 0,816) +$$

$$+ \frac{3,2}{6EJ} (-2 \cdot 8,419 \cdot 0,816 + 2 \cdot 37,621 \cdot 2,555 - 8,419 \cdot 2,555 + 37,621 \cdot 0,816) +$$

$$+ \frac{3,8}{6EJ} (37,621 \cdot 2,555 - 4 \cdot 26,633 \cdot 1,688 - 33,127 \cdot 0,821) +$$

$$+ \frac{1,8}{6EJ} (-47,127 \cdot 0,821 - 4 \cdot 30,044 \cdot 0,411) = \frac{600,61 - 600,59}{6EJ} \approx 0.$$

Для построения эпюры поперечных сил Q используем эквивалентную систему и найденное значение X_1 . Определяем реакции опор в основной системе от действия заданной нагрузки и силы X_1 :

$$\sum M_A = 0; -P \cdot 1,5 + X_1 \cdot 4,7 - q \cdot 5,6 \cdot 7,5 - M + R_C \cdot 10,3 = 0;$$

$$R_C = \frac{P \cdot 1,5 - X_1 \cdot 4,7 + q \cdot 5,6 \cdot 7,5 + M}{10,3} = 10,582 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; -R_A \cdot 10,3 - X_1 \cdot 5,6 + q \cdot 5,6 \cdot 2,8 - M + P \cdot 8,8 = 0;$$

$$R_A = \frac{P \cdot 8,8 - X_1 \cdot 5,6 + q \cdot 5,6 \cdot 2,8 - M}{10,3} = 5,612 \text{ кН}.$$

Проверка: $R_A - P + X_1 - q \cdot 5,6 + R_C = 0;$

$$5,612 - 20 + 63,406 - 16 \cdot 5,6 + 40,582 = 109,6 - 109,6 = 0.$$

Реакции опор найдены верно.

Вычисляем поперечные силы Q .

- Участок AT : $z_1 \in [0; 1,5];$

$$Q(z_1) = R_A = 5,612 \text{ кН};$$

- Участок TB : $z_2 \in [0; 3,2];$

$$Q(z_2) = R_A - P = 5,612 - 20 = -14,388 \text{ кН};$$

- Участок BD : $z_3 \in [0; 3,8];$

$$Q(z_3) = R_A - P + X_1 - qz_3 = 5,612 - 20 + 63,406 - 16z_3;$$

$$Q(z_3) = 49,018 - 16z_3;$$

$$Q(0) = 49,018 \text{ кН}; \quad Q(3,8) = -11,782 \text{ кН};$$

- Участок CD : $z_4 \in [0; 1,8];$

$$Q(z_4) = -R_C + qz_4 = -40,582 + 16z_4;$$

$$Q(1,8) = -40,582 + 16 \cdot 1,8 = -11,782 \text{ кН};$$

$$Q(0) = -40,582 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строим эпюру Q (рис. 15, e).

Уточняем эпюру изгибающих моментов. Находим экстремальное значение изгибающего момента на участке BD :

$$Q = 0 \text{ при } z = \frac{Q_{\text{лев}}}{q} = \frac{49,018}{16} = 3,064 \text{ м};$$

$$M_{\text{экс}} = M_{\text{лев}} + Q_{\text{лев}}z - q \frac{z^2}{2};$$

$$M_{\text{экс}} = -37,621 + 49,018 \cdot 3,064 - 16 \frac{3,064^2}{2} = 37,465 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Подбираем сечение балки из условия прочности по нормальным напряжениям; опасное поперечное сечение находится в точке D справа:

$$M_{\text{max}} = 47,127 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$W_x \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{47,127 \cdot 10^3}{90 \cdot 10^6} = 0,524 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 524 \text{ см}^3;$$

Принимаем двутавр № 33 ($W_x = 597 \text{ см}^3$).

ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

23. Тело, у которого упругие свойства по всем направлениям одинаковы, называется _____.

- A) изотропным
- B) упругим
- C) хрупким
- D) анизотропным
- E) однородным

24. В каких точках поперечного сечения балки при изгибе возникают наибольшие нормальные напряжения?

- A) в точках, наиболее удалённых от центра тяжести
- B) в точках, наиболее удалённых от нейтральной оси
- C) в точках контура поперечного сечения
- D) в центре тяжести сечения
- E) в точках нейтральной оси сечения

25. Напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряжённое состояние было равноопасным заданному напряжённому состоянию, называется _____.

- A) опасным
- B) допускаемым
- C) предельным
- D) эквивалентным
- E) критическим

- 26. Нагрузка, при которой первоначальная форма равновесия конструкции перестаёт быть устойчивой, называется _____.**
- A) предельной*
 - B) критической*
 - C) динамической*
 - D) разрушающей*
 - E) допускаемой*
- 27. Напряжение, при котором наблюдается рост деформаций без изменения нагрузки, называется _____.**
- A) пределом пропорциональности*
 - B) пределом текучести*
 - C) критическим*
 - D) пределом прочности*
 - E) допускаемым*
- 28. В каких точках поперечного сечения балки при изгибе отсутствуют нормальные напряжения?**
- A) в точках, наиболее удалённых от центра тяжести*
 - B) в точках, наиболее удалённых от нейтральной оси*
 - C) в точках контура поперечного сечения*
 - D) в ядре сечения*
 - E) в точках нейтральной оси сечения*
- 29. Два напряжённых состояния называются равноопасными, если у них одинаковые _____.**
- A) критические напряжения*
 - B) допускаемые напряжения*
 - C) пределы текучести*
 - D) пределы прочности*
 - E) коэффициенты запаса*
- 30. Момент внутренних сил в поперечном сечении бруса относительно продольной оси бруса называется _____.**
- A) полярным моментом инерции сечения*
 - B) главным моментом*
 - C) крутящим моментом*
 - D) осевым моментом инерции сечения*
 - E) изгибающим моментом*
- 31. Способность конструкции сопротивляться деформации называется**
- A) жёсткостью*
 - B) твёрдостью*
 - C) выносливостью*
 - D) устойчивостью*
 - E) прочностью*

- 32. Способность тела сохранять заданную (первоначальную) форму равновесия называется _____.**
- A) жёсткостью
 - B) твёрдостью
 - C) выносливостью
 - D) устойчивостью
- 33. Проекция главного вектора внутренних сил в поперечном сечении нагруженного бруса на продольную ось бруса называется _____.**
- A) критической силой
 - B) касательным напряжением
 - C) поперечной силой
 - D) продольной силой
 - E) нормальным напряжением
- 34. Число, показывающее во сколько раз надо увеличить напряжения в теле, чтобы получить опасное состояние, называется _____.**
- A) коэффициентом концентрации
 - B) коэффициентом чувствительности
 - C) пределом текучести
 - D) пределом прочности
 - E) коэффициентом запаса
- 35. Мерой интенсивности внутренних сил является _____.**
- A) изгибающий момент
 - B) главный момент
 - C) напряжение
 - D) критическая сила
 - E) главный вектор внутренних сил
- 36. Как изменится гибкость стержня, если его длину увеличить в два раза?**
- A) уменьшится в четыре раза
 - B) уменьшится в два раза
 - C) не изменится
 - D) увеличится в два раза
 - E) увеличится в четыре раза
- 37. Тело, у которого упругие свойства по различным направлениям неодинаковы, называется _____.**
- A) изотропным
 - B) упругим
 - C) хрупким
 - D) анизотропным
 - E) неоднородным

38. Тело, у которого свойства во всех точках одинаковы, называется

- A) изотропным
- B) упругим
- C) хрупким
- D) анизотропным
- E) однородным

Правильные ответы

Во-прос	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Ответ	A	B	D	B	B	E	E	C	A	D	D	E	C	E	D	E

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все инженерные сооружения требуют предварительного расчёта для их надёжной работы при минимальных затратах. Учебная дисциплина "Механика", состоящая из теоретической механики и сопротивления материалов, позволяет рассчитывать на прочность, жёсткость, устойчивость только простейшие несущие конструкции. Сложные конструкции, например, стержневые системы изучает строительная механика, в основе которой лежат тоже теоретическая механика и сопротивление материалов.

Знание дисциплины "Механика" составляет основу профессиональной квалификации инженеров, конструкторов и расчётчиков. Навыки и опыт, полученные при изучении механики, используются архитекторами, инженерами-проектировщиками на всех этапах проектирования, начиная от создания архитектурного замысла и заканчивая назначением размеров деталей. Знания механики необходимы также мастерам, прорабам при изготовлении конструкций, их перевозке, монтаже, эксплуатации, ремонте.

Кто правильно осваивает механику, не просто заучивает формулы, а пытается понять физический смысл задачи, почувствовать работу конструкции, найти слабые места и предложить варианты решения задачи – развивает в себе инженерную интуицию. Хороший специалист не только грамотно делает расчёты с требуемой точностью, но и предвидит конечный результат. При наличии компьютеров и стандартных программ более значимыми становятся умения творчески мыслить, выполнять проверки полученных результатов, находить возможные логические ошибки и грамотно исправлять их.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краткий курс теоретической механики : учебник для втузов / С.М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2004. – 416 с.
2. Курс теоретической механики : учебное пособие для вузов : в 2 т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб. : Лань, 2004. – Т. 1. – 736 с.
3. Афанасьев, А.М. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов / А.М. Афанасьев, В.А. Марьин. – М. : Наука, 1975.
4. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. – М. : Изд-во АСВ, 1995. – 568 с.
5. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1975.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В.К. Качурин. – М., 1972.
7. Сопротивление материалов / А.Ф. Смирнов и др. – М. : Наука, 1975.
8. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М. : Высшая школа, 1979.

Приложение

III. СОРТАМЕНТ МАТЕРИАЛОВ

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (ГОСТ 8239–89)

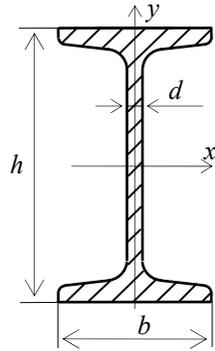


Таблица III.1

№	h , мм	b , мм	d , мм	A , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,5
24	240	115	5,6	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6	43,2	5500	407	11,3	229	337	50	2,8
30	300	135	6,5	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	72,6	19 062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	84,7	27 696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	100	39 727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	118	55 962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	138	76 806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

**Сталь горячекатаная. Швеллеры с параллельными гранями
(ГОСТ 8240–93)**

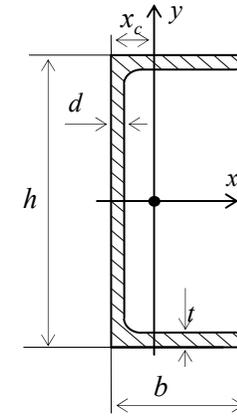


Таблица П1.2

№	h	b	d	t	A, см ²	Справочные данные для осей								x _c , см
						x				y				
						J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	J _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	S _y , см ³	
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21	
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,8	15,00	2,55	9,02	9,35	4,06	1,120	1,29	
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,8	22,50	3,16	13,30	13,90	5,31	1,240	1,38	
10	100	46	4,5	7,6	10,90	175,0	34,90	3,99	20,50	22,60	7,37	1,440	1,53	
12	120	52	4,8	7,8	13,30	305,0	50,80	4,79	29,70	34,90	9,84	1,620	1,66	
14	140	58	4,9	8,1	15,60	493,0	70,40	5,61	40,90	51,50	12,90	1,810	1,82	
14a	140	62	4,9	8,7	17,00	547,0	78,20	5,68	45,20	65,20	15,70	1,960	2,04	
16	160	64	5,0	8,4	18,10	750,0	93,80	6,44	54,30	72,80	16,40	2,000	1,97	
16a	160	68	5,0	9,0	19,50	827,0	103,00	6,51	59,50	90,50	19,60	2,150	2,19	
18	180	70	5,1	8,7	20,70	1090,0	121,00	7,26	70,00	100,00	20,60	2,200	2,14	
18a	180	74	5,1	9,3	22,20	1200,0	133,00	7,34	76,30	123,00	24,30	2,350	2,36	
20	200	76	5,2	9,0	23,40	1530,0	153,00	8,08	88,00	134,00	25,20	2,390	2,30	
20a	200	80	5,2	9,7	25,20	1680,0	168,00	8,17	96,20	162,00	29,70	2,540	2,53	
22	220	82	5,4	9,5	26,70	2120,0	193,00	8,90	111,00	178,00	31,00	2,580	2,47	
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2340,0	212,00	9,01	121,00	220,00	37,00	2,770	2,75	
24	240	90	5,6	10,0	30,60	2910,0	243,00	9,75	139,00	248,00	39,50	2,850	2,72	
24a	240	95	5,6	10,7	32,90	3200,0	266,00	9,86	152,00	302,00	46,50	3,030	3,01	
27	270	95	6,0	10,5	35,20	4180,0	310,00	10,90	178,00	314,00	46,70	2,990	2,78	
30	300	100	6,5	11,0	40,50	5830,0	389,00	12,00	224,00	393,00	54,80	3,120	2,83	
33	330	105	7,0	11,7	46,50	8010,0	486,00	13,10	281,00	491,00	64,60	3,250	2,90	
36	360	110	7,5	12,6	53,40	10 850	603,00	14,30	350,00	611,00	76,30	3,380	2,99	
40	400	115	8,0	13,5	61,50	15 260	763,00	15,80	445,00	760,00	89,90	3,510	3,05	

Сталь прокатная угловая равнополочная (ГОСТ 8509–93)

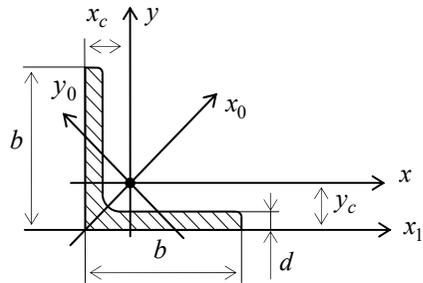


Таблица П1.3

№	b	d	A, м ²	Справочные величины для осей								x _c , y _c , см
				x		x ₀		y ₀		x ₁		
				J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x₀ max} , см ⁴	i _{x₀ max} , см	J _{y₀ min} , см ⁴	i _{y₀ min} , см	J _{x₁} , см ⁴		
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	
3,6	36	3	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	
		4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	
		5	4,20	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	
		3	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	

№	b	d	A, см ²	Справочные величины для осей							x _c , y _c , см
				x		x ₀		y ₀		x ₁	
	мм			J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x0 max} , см ⁴	i _{x0 max} , см	J _{y0 min} , см ⁴	i _{y0 min} , см	J _{x1} , см ⁴	
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	7,39	30,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,80	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,50	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,80	27,5	1,46	127,0	2,18
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,10
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68

Окончание табл. III.3

№	b	d	A, см ²	Справочные величины для осей							x _c , y _c , см
				x		x ₀		y ₀		x ₁	
				J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x0 max} , см ⁴	i _{x0 max} , см	J _{y0 min} , см ⁴	i _{y0 min} , см	J _{x1} , см ⁴	
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	512	4,38	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9345	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

**П2. КОЭФФИЦИЕНТЫ φ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА
ЦЕНТРАЛЬНО-СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Таблица П2.1

Гибкость	Значения φ для элементов из							
	стали с расчётным сопротивлением R_y , МПа							древесины
	200	240	280	320	360	400	440	
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,981	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,946	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,900	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,846	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,785	0,800
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,696	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,595	0,608
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,501	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,413	0,370
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,335	0,300
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	0,280	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,260	0,237	0,208
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	0,204	0,178
140	0,376	0,315	0,272	0,240	0,215	0,195	0,178	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	0,157	0,133
160	0,290	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	0,139	0,117
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,150	0,136	0,125	0,104
180	0,233	0,196	0,170	0,150	0,135	0,123	0,112	0,093
190	0,210	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	0,102	0,083
200	0,191	0,161	0,140	0,124	0,111	0,101	0,093	0,075
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	0,085	0,068
220	0,160	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	0,077	0,062

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	3
Введение	3
Тема 1. Статика	4
Вопросы для самопроверки	4
Тема 2. Кинематика	4
Вопросы для самопроверки	4
Тема 3. Динамика	5
Вопросы для самопроверки	5
Контрольные работы по теоретической механике	5
Тесты для проверки остаточных знаний по теоретической механике ...	19
Часть 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ	23
Введение	23
Тема 4. Основные понятия	24
Вопросы для самопроверки	24
Тема 5. Растяжение и сжатие	24
Вопросы для самопроверки	25
Тема 6. Сдвиг	26
Вопросы для самопроверки	26
Тема 7. Кручение	26
Вопросы для самопроверки	27
Тема 8. Геометрические характеристики плоских сечений	27
Вопросы для самопроверки	29
Тема 9. Теория напряжённого состояния и теории прочности	29
Вопросы для самопроверки	30
Тема 10. Изгиб прямых брусьев	31
Вопросы для самопроверки	33
Тема 11. Сложное сопротивление	34
Вопросы для самопроверки	35
Тема 12. Изгиб плоского бруса большой кривизны	36
Вопросы для самопроверки	37
Тема 13. Устойчивость равновесия деформируемых систем	37
Вопросы для самопроверки	37
Тема 14. Динамическая нагрузка	38
Вопросы для самопроверки	38
Тема 15. Расчёт на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени	39
Вопросы для самопроверки	39
Контрольные работы по сопротивлению материалов	40
Тесты для проверки остаточных знаний по сопротивлению материалов	94
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	96
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	96
ПРИЛОЖЕНИЕ	97

