Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет»

А.Д. Нахман

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Методические указания и контрольные задания

Тамбов
• Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ» •
2011

УДК 510.6(076)
ББК В12я73-5
Н349

Рекомендовано Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
В.В. Васильев

Нахман, А.Д.

Н349 Математическая логика и теория алгоритмов : метод. указ. и контрольные задания / А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 16 с. – 100 экз.

Приведены краткие теоретические сведения, алгоритмы и образцы решения типовых задач и контрольные задания.

Предназначены для студентов заочного факультета, изучающих математическую логику и теорию алгоритмов.

УДК 510.6(076)
ББК В12я73-5

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Понятие высказывания. Высказывание – это повествовательное предложение, о содержании которого можно сказать истинно оно или ложно.

Обозначения: A, B, C… .

На множестве всех высказываний определена функция истинности: $\lambda = \lambda(A)$, принимающая значение 1, если высказывание A – истинное, и значение 0, если A ложно.

Значение $\lambda(A)$ называется логическим значением или значением истинности высказывания A.

1.2. Логические операции над высказываниями:

1. Отрицание («не A») высказывания A есть высказывание $\bar{A}$ ($\neg A$), которое истинно тогда и только тогда, когда A ложно.

2. Конъюнкция («A и B») двух данных высказываний есть высказывание $A \wedge B$, которое истинно тогда и только тогда, когда A и B истинны одновременно.

3. Дизъюнкция («A или B») высказываний A и B есть составное высказывание $A \vee B$, которое является истинным, если истинно хотя бы одно из высказываний A и B.

4. Импликация («если A, то B») – высказываний A и B есть высказывание $A \to B$, которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно, и истинное – в остальных случаях.

5. Эквиваленция высказываний A и B («необходимо и достаточно», «тогда и только тогда») есть составное высказывание $A \leftrightarrow B$, которое истинно, если A и B одновременно истинны или одновременно ложны.

6. Альтернативная дизъюнкция $A \Delta B$ – истинна, когда только одно из высказываний A и B истинно, и ложно – в остальных случаях.

Сформулированные определения можно записать в виде следующих таблиц истинности (таблиц, связывающих логические значения исходных переменных и результатов выполняемых операций):

$\lambda(A)$	$\lambda(\overline{A})$
1	0
0	1

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \to B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1.3. Формулы алгебры высказываний. Переменная x называется пропозиционной, если она обозначает любое конкретное высказывание. Формула – это всякий объект, который построен по следующим правилам.

1. Всякая пропозиционная переменная – это формула.
2. Если F и G – формулы, то $\neg F$, $F \vee G$, $F \wedge G$, $F \to G$, $F \leftrightarrow G$, $F \Delta G$ тоже являются формулами.
3. Других формул нет.

Формула называется тождественно истинной или тавтологией (тождественно ложной или противоречием), если при любом наборе значений пропозиционных переменных, входящих в неё, она обращается в истинное (ложное) высказывание. Тождественную истину обозначаем через E; тождественную ложь – через $\varnothing$.

Формула называется выполнимой (опровержимой), если существует такой набор значений пропозиционных переменных, который обращает эту формулу в истинное (ложное) высказывание.

Две формулы F и G называются равносильными, если на любом наборе пропозиционных переменных $\lambda(F) = \lambda(G)$; применяем обозначение $F \equiv G$.

Критерий равносильности формул: $F \equiv G$ тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является тавтологией.

К основным равносильностям алгебры высказываний относятся коммутативные и ассоциативные свойства дизъюнкции и конъюнкции, дистрибутивные свойства каждой из указанных операций относительно другой, законы де Моргана $\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$; $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$ и др.

1.4. Нормальные формы формул алгебры высказываний. Обозначим

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Элементарной конъюнкцией (конъюнктом) называется формула вида $K = x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$, а элементарной дизъюнкцией (дизъюнктом) – формула вида $D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$.

Дизъюнктивно нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конечного количества элементарных конъюнкций, а конъюнктивно нормальной формой (КНФ) – конъюнкция конечного количества элементарных дизъюнкций.

1.5. Совершенные нормальные формы формул алгебры высказываний. Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется правильной, если в её составе нет одинаковых переменных. Дизъюнкт (конъюнкт) является полным, относительно некоторого набора переменных, если в его составе представлены все переменные этого набора. Правильный и полный дизъюнкт (конъюнкт) называется совершенным.

Совершенной ДНФ (совершенной КНФ) данной формулы F называется такая её ДНФ (КНФ), которая не содержит одинаковых конъюнктов (дизъюнктов), причём каждый конъюнкт (дизъюнкт) совершенен.

Любая формула F, не являющаяся тождественной ложью, обладает единственной СДНФ. Любая формула F, не являющаяся тавтологией, обладает единственной СКНФ.

1.5.1. ***Алгоритм перехода от таблицы истинности формулы к её записи в виде СДНФ*:**

1. Выбрать в таблице такие наборы исходных переменных, на которых истинностное значение формулы (значение функции истинности) равно 1.

2. Записать элементарные конъюнкции для выбранных наборов переменных; при этом необходимо руководствоваться следующим правилом: если значение входной переменной в наборе – единичное, то она записывается в прямой форме, если же значение переменной – нулевое, то – в форме отрицания.

3. Полученные конъюнкты объединить между собой знаками дизъюнкции.

1.5.2. ***Алгоритм перехода от таблицы истинности формулы к её записи в виде СКНФ*:**

1. Выбрать в таблице истинности такие наборы входных переменных, на которых функция истинности формулы принимает нулевые значения.

2. Записать элементарные дизъюнкции для выбранных наборов; при этом следует руководствоваться следующим правилом: если значение входной переменной в наборе нулевое, то она записывается в прямой форме, если значение переменной единичное, то – в форме отрицания.

3. Полученные дизъюнкты соединить знаками конъюнкции.

1.6. Логическое следование. Говорят, что формула Q логически следует из формулы P, если Q принимает значение истины на всяком наборе пропозиционных переменных, на котором значение истины принимает формула P.

Другими словами, если $\lambda(P) = 1$, то $\lambda(Q) = 1$.

Обозначение: $P \models Q$

Критерий логического следования: формула Q логически следует из P, тогда и только тогда, когда $P \to Q$ – тавтология.

1.7 Логическое следование из группы формул. Говорят, что формула Q следует логически из формул $P_1, P_2, ..., P_n$, если $\lambda(Q) = 1$, при всех тех значениях переменных, при которых $\lambda(P_j) = 1$ (j = 1, 2, ..., n), т.е. Q принимает значения истины на каждом наборе переменных, на котором истинно каждое из $P_1, P_2, ..., P_n$. Обозначения: $P_1 ... P_n \models Q$.

Логическое следование $P_1 ... P_n \models Q$ имеет место тогда и только тогда, когда $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \to Q$ является тавтологией.

2. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

2.1. Предикаты. Множества истинности. *Предикатом* называют «*параметризованное*» высказывание, т.е. высказывание, которое в зависимости от значений содержащегося в нём параметра (содержащихся параметров) будет истинным либо ложным. Так, *одноместным предикатом* $P = P(x)$, заданным на некотором множестве *M*, называется объект, который для каждого $x \in M$ является истинным или ложным высказыванием. Множество *M* называется предметной областью.

Подмножество M_P^+ множества *M*, состоящее из тех и только тех значений x, для которых $P(x)$ является истинным высказыванием, называется *множеством истинности* предиката *P*.

Предикат $P = P(x)$ называется *тождественно истинным* (*тождественно ложным*) на *M*, если он принимает значение истины (лжи) для всех $x \in M$. Ясно, что тождественно истинный предикат *P* имеет множество истинности M_P^+, совпадающим с M, а для тождественно ложного предиката $M_P^+ = \varnothing$.

Предикат называется *выполнимым* (*опровержимым*) на *M*, если существует хотя бы один элемент $x \in M$, такой что $P(x)$ принимает значение лжи (истины).

2.2. Следование. Равносильность предикатов. Говорят, что предикат Q следует из предиката *P*, если $Q(x)$ принимает значение истины для любых *x*, для которых $P(x)$ является истинным.

Обозначение: $P \Rightarrow Q$.

Соотношение $P \Rightarrow Q$ справедливо тогда и только тогда, когда для множеств истинности предикатов P и Q имеет место включение $M_P^+ \subseteq M_Q^+$.

Два предиката P и Q называются *равносильными* на M, если значения истинности $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают для любого $x \in M$. Обозначение: $P \Leftrightarrow Q$. Ясно, предикаты *P* и Q равносильны на M тогда и только тогда, когда $M_P^+ \equiv M_Q^+$.

2.3. Логические операции над предикатами определяются как логические операции над соответствующими высказываниями при каждом фиксированном *x*. Так, *отрицанием* предиката P (заданного на некотором M) является предикат $\overline{P}$, который принимает значение истины для тех и только тех значений $x \in M$, для которых P принимает значение лжи. Если предикаты P и Q заданы на некотором M, то их *конъюнкцией* называется предикат $T = P \wedge Q$, который принимает значение истины для тех и только тех значений $x \in M$, для которых оба предиката P и Q принимают значения истины; *дизъюнкцией* предикатов P и Q называется предикат $S = P \vee Q$, который принимает значение истины для тех и только тех значений $x \in M$, для которых хотя бы один из предикатов P или Q принимает значение истины.

В описанных ситуациях множества истинности предикатов, полученных в результате выполнения логических операций, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$M_{\overline{P}}^{+} = M \setminus M_{P}^{+}; \quad M_{P \wedge Q}^{+} = M_{P}^{+} \cap M_{Q}^{+}; \quad M_{P \vee Q}^{+} = M_{P}^{+} \cup M_{Q}^{+}.$$

3. МАШИНА ТЬЮРИНГА

Машина Тьюринга представляет собою алгоритмическую систему, т.е. некоторый общий способ задания алгоритма.

3.1. Описание машины Тьюринга:

1. Задаётся совокупность символов, называемая внешним алфавитом $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.
2. Задаётся алфавит Q так называемых внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$.
3. Программа машины Тьюринга определяется набором команд вида $q_i a_k \to q_j a_l$ $(i, j \in \{0, 1, ..., m\}, k, l \in \{0, 1, ..., n\};$ не исключаются случаи $j = i, k = l)$; при этом справа от записи команды может быть указан символ П (право), либо Л(лево).

3.2. Наглядное представление машины Тьюринга:

1. Рассматривается бесконечная лента, разбитая на ячейки, в каждую из которых вписан символ из алфавита A; ячейка в которую вписан символ a_0, считается пустой. Предполагается, что на ленте всегда написано конечное слово, т.е. все ячейки, находящиеся справа и слева от этого слова, являются пустыми.
2. В каждый данный момент времени машина Тьюринга обозревает некоторую ячейку, находясь в каком-либо из внутренних состояний. Чтобы указать, какая именно ячейка рассматривается, иногда говорят об определённом положении считывающей головки. Символ $q_i a_k$ в записи команды означает, что ячейка a_k обозревается машиной в состоянии q_i.

3. Первая команда, которую выполняет машина с заданной программой, являются команды, начинающиеся с q_1. Последняя, завершающая работу команда, оканчивается символом q_0.

3.3. Всякая команда вида $q_i\, a_k \to q_j\, a_l$ выполняется следующим образом: в обозреваемой ячейке символ a_k стирается и в неё записывается символ a_l, после чего машина из состояния q_i переходит в состояние q_j. Если же имеется команда $q_i\, a_k \to q_j\, a_l$ (П), то «считывающая головка» сдвигается вправо на одну ячейку, так что теперь, находясь в состоянии q_j, машина обозревает ячейку правее исходной. Аналогично, в случае команды $q_i a_k \to q_j\, a_l$ (Л) сдвиг головки происходит влево. Таким образом (начиная с состояния q_1) последовательно выполняются все команды программы до тех пор, пока машина не перейдёт в состояние q_0.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Составить таблицу истинности данной формулы

$$((X \to \overline{Y}) \vee Z) \wedge (\overline{(X \wedge Y)} \leftrightarrow \overline{Z}).$$

Определить характер формулы.

Решение. Пользуясь определениями логических операций, составим таблицу истинности данной формулы. Так как формула зависит от трёх переменных, то её таблица будет содержать $2^3 = 8$ строк и 11 столбцов (количество операций плюс три столбца значений переменных).

Определим порядок выполнения операций:

$$((X \overset{5}{\to} \overset{1}{\overline{Y}}) \overset{6}{\vee} Z) \overset{8}{\wedge} (\overset{4}{\overline{\overset{3}{(X \wedge Y)}}} \overset{7}{\leftrightarrow} \overset{2}{\overline{Z}}).$$

Имеем:

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1

Значения в последнем столбце свидетельствуют, что данная формула как выполнима, так и опровержима, поскольку существуют наборы значений переменных, обращающих её и в истинные, и в ложные высказывания.

2. Найдите СДНФ и СКНФ для формулы

$$\overline{Y} \wedge (Z \to (X \leftrightarrow Y).$$

Решение. Воспользуемся алгоритмом построения совершенных форм, изложенном в п. 1.5. Построим таблицу истинности исходной формулы:

$$\overset{1}{\overline{Y}} \overset{4}{\wedge} (Z \overset{3}{\to} (X \overset{2}{\leftrightarrow} Y).$$

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	1	2	3	4	СДНФ	СКНФ
1	1	1	0	1	1	0		$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$
1	1	0	0	1	1	0		$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)$
1	0	1	1	0	0	0		$(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})$
1	0	0	1	0	1	1	$(X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$	
0	1	1	0	0	0	0		$(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$
0	1	0	0	0	1	0		$(X \vee \overline{Y} \vee Z)$
0	0	1	1	1	1	1	$(\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z)$	
0	0	0	1	1	1	1	$(\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$	

Итак, СДНФ и СКНФ формулы имеют соответственно вид

$$(X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$$

и

$$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Z).$$

3. Доказать следующее логическое следование:

$$((X \vee Y) \to Z) \models (X \to (Y \vee Z)).$$

Решение. Достаточно доказать (см. п. 1.6), что импликация $(X \vee Y) \to Z) \to (X \to (Y \vee Z)$ тождественно истинна. Первый способ состоит в построении таблицы истинности полученной формулы и проверке того, что последний столбец таблицы состоит сплошь из единиц. Второй способ – в использовании цепочки равносильных преобразований, которая приведёт к получению тавтологии.

Продемонстрируем здесь способ доказательства от противного на основе определения логического следования.

□ Предположим **противное**, т.е., что Q не является логическим следствием P, тогда $\lambda((X \vee Y) \to Z) = 1$, а $\lambda(X \to (Y \vee Z)) = 0$.

Так как $\lambda(X \to (Y \vee Z)) = 0,$ то, на основании определения импликации, имеем $\lambda(X) = 1, \lambda(Y \vee Z) = 0,$ а тогда, по определению дизъюнкции, $\lambda(Y) = 0,\ \lambda(Z) = 0.$

Но, если $\lambda(X) = 1,\ \lambda(Y) = 0,\ \lambda(Z) = 0,$ то $\lambda((X \vee Y) \to Z) = 0$. Получено противоречие, следовательно наше предположение неверно и тем самым установлено, что $P \models Q$.

4. Даны предикаты $P(x)$: $x^2 \le 4$ и $Q(x)$: $|x-1| < 2$. Найти множество истинности предикатов $\overline{P}$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$. Имеют ли место соотношения: а) $P \Rightarrow Q$; б) $Q \Rightarrow P$?

Решение. Найдём множества истинности предикатов P и Q. Для этого решим каждое из неравенств, с помощью которых предикаты заданы. Первое из неравенств запишем в виде $(x-2)(x+2) \le 0$. Применяя, например, метод интервалов, получим его решения $x \in [-2, 2]$. Неравенство с модулем запишем в виде равносильной ему системы

$$\begin{cases} x-1 < 2; \\ x-1 > -2, \end{cases} \quad \text{откуда } x \in (-1, 3).$$

Итак, $M_P^+ = [-2, 2],\ M_Q^+ = (-1, 3).$ Теперь находим множество истинности предиката $\overline{P}$ как дополнение множества истинности предиката P и множества истинности конъюнкции и дизъюнкции предикатов P и Q в виде, соответственно, пересечения и объединения множеств M_P^+ и M_Q^+ (см. п. 2.3):

$$M_{\overline{P}}^+ = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty),\ \ M_{P \wedge Q}^+ = (-1, 2],\ \ M_{P \vee Q}^+ = [-2, 3).$$

Наконец, ни одно из соотношений $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ в данной задаче не имеет места, поскольку (см. п. 2.2) не имеет места ни одно из включений $M_P^+ \subseteq M_Q^+$, $M_Q^+ \subseteq M_P^+$.

5. Определить, истинно или ложно высказывание:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 < 2$ на области $[-2,\ 2]$.

б) $\exists x\, Q(x)$, где предикат $Q(x)$ задан в виде $x^2 \le 4$ на области $[2,\ 4]$.

Решение. По определению кванторных операций, следует выяснить:

1) в пункте а) – тождественно истинен ли предикат $P(x)$ на области своего задания $[-2,\ 2]$;

2) в пункте б) выполним ли $Q(x)$ на области $[2,\ 4]$.

Множество истинности предиката $P(x)$ есть интервал (–2, 2), следовательно, предикат принимает значения лжи при $x = \pm 2$, а тогда он опровержим на области задания. Значит высказывание $\forall x P(x)$ – ложно.

Множество истинности предиката $Q(x)$ есть отрезок $[-2,\ 2]$, поэтому в точке $x = 2$, общей для области задания и множества истинности, предикат принимает значения истины. Следовательно, предикат $Q(x)$ выполним на области задания. Значит высказывание $\exists x\, Q(x)$ – истинно.

6. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0;1\}$ и программой $q_1 0 \to q_2 0$ (Л); $q_2 0 \to q_0 1$; $q_1 1 \to q_1 1$ (Л); $q_2 1 \to q_2 1$ (Л).

Начальное положение «считывающей головки» – крайнее правое.

В какое слово будет преобразовано машиной входное слово:

а) 10100111; б) 1011011.

Решение. Проанализируем программу машины. Находясь в состоянии q_1, либо q_2, и обозревая при этом ячейку, в которой записана 1, машина, не меняя ни своего состояния, ни числа 1 ячейки, переходит к обозрению соседней слева ячейки, т.е. «считывающая головка» как бы скользит влево по единицам. Так происходит до тех пор, пока «на её пути» не встретится ячейка, в которой записан символ «0». Если при этом машина находится в состоянии q_1, то она по команде $q_1 0 \to q_2 0$ перейдёт в состояние q_2 и запишет снова в обозреваемую ячейку символ 0. На следующем шаге по команде $q_2 0 \to q_0 1$ машина запишет в ту же ячейку символ 1 и завершит свою работу.

Если же «считывающая головка» ячейку с записанным в ней символом 0 «встречает» в состоянии q_2, то по команде $q_2 0 \to q_0 1$ символ 0 заменяется на 1 и машина завершает работу.

Так, для данных входных слов и стандартного положения считывающей головки первый из «встреченных» нулей сохраняется, а второй заменяется единицей.

Имеем в п. а): слово 10100111 в результате выполнения команды $q_1 1 \to q_1 1$(Л) из стандартного (крайнего правого) положения считывающей головки преобразуется в такое же слово 10100111 дважды; команда

$q_1 0 \to q_2 0$ (Л) преобразует «первый встреченный» ноль – в ноль, а затем выполняется команда $q_2 0 \to q_0 1$, в результате которой получается слово 10110111, и машина завершает работу.

Аналогично, в п. б), входное слово 1011011 (согласно вышеприведённому описанию выполнения программы) будет преобразовано в 11110111.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Составьте таблицу истинности для формулы алгебры высказываний. Укажите вид формулы:

1. $\overline{(Y \vee \overline{Z}) \to \overline{(X \vee \overline{Y})}}$.
2. $(((\overline{(X \vee Y)} \wedge Z) \to \overline{X}) \wedge \overline{Z}$.
3. $((X \to \overline{Y}) \vee Z) \wedge (\overline{X \wedge Z})$.
4. $((X \wedge \overline{Y}) \to (\overline{Z} \leftrightarrow Y)) \vee \overline{X}$.
5. $(\overline{X} \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow ((\overline{(X \to Y)} \to Z)$.
6. $(\overline{Y} \to Z) \wedge (\overline{Z} \wedge \overline{Y}) \wedge (\overline{Z} \to X)$.
7. $(\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z) \leftrightarrow (\overline{X} \to Y)$.
8. $\overline{Z} \leftrightarrow (\overline{X} \to ((\overline{(Y \vee Z)} \wedge X)))$.
9. $((X \leftrightarrow \overline{Z}) \to (Y \vee Z)) \to (\overline{Y} \wedge X)$.
10. $(\overline{X} \to (Z \wedge \overline{Y})) \to (X \wedge \overline{(Y \vee Z)})$.

2. Найдите совершенные дизъюнктивную и конъюнктивную нормальную форму для данной формулы (если соответствующая форма существует):

1. $((X \to Y) \to Z) \to \overline{X}$.
2. $(X \leftrightarrow Z) \to (X \wedge \overline{Y})$.
3. $(\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \to Z)$.
4. $\overline{(X \wedge Y)} \vee \overline{(Z \to Y)}$.
5. $\overline{X \vee (Y \leftrightarrow \overline{Z})}$.
6. $(X \leftrightarrow Y) \vee (\overline{Y} \wedge Z)$.
7. $(X \vee (Y \to Z)) \to X$.
8. $(X \wedge Y) \vee ((X \to \overline{Y}) \wedge \overline{Z})$.
9. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Y} \vee Z)$.
10. $(X \wedge Y) \vee (Y \leftrightarrow Z)$.

3. Доказать логическое следование:

1. $(X \vee Y) \to Z \vdash X \to (Y \to Z)$.
2. $(X \vee Y) \to Z \vdash (X \wedge Y) \to Z$.
3. $(X \vee Y) \to Z \vdash X \to Z$.
4. $(X \to Y) \wedge (X \vee Z) \vdash X \vee Z$.
5. $(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee Z) \vdash X \to Y$.
6. $(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee Z) \vdash Y \vee Z$.
7. $(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to Y) \vdash X \to Z$.
8. $(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to Y) \vdash X \to Y$.
9. $(X \to Y) \to Z \vdash X \vee Y \vee Z$.
10. $(X \to Y) \to Z \vdash (X \wedge Y) \to Z$.

4. В следующих задачах предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ заданы на множестве всех действительных чисел. Следует определить:

– множество истинности предиката $\overline{P(x)}$;

– справедливо ли одно из следующих соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$, $Q(x) \Rightarrow P(x)$.

Определить также, истинно или ложно каждое из высказываний:

а) $\forall x P(x)$, б) $\exists x\, P(x)$

в случаях, когда предикат $P(x)$ рассматривается на указанном в соответствующем задании интервале.

1. $P(x)$ задан в виде $x^2 \le 4x$, $Q(x)$ – в виде $|x| \le 4$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(0, 4)$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(4, +\infty)$.

2. $P(x)$ задан в виде $|x| \le 2$, $Q(x)$ – в виде $x^2 < 1$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-\infty, 2]$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(–2, 2)$.

3. $P(x)$ задан в виде $x^2 > x$, $Q(x)$ – в виде $|x| > 1$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-1, 0)$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[1, +\infty]$.

4. $P(x)$ задан в виде $x^2 - 5x + 4 = 0$, $Q(x)$ – в виде $|x| < 5$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[1, 4]$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[4, 5]$.

5. $P(x)$ задан в виде $x^2 + 4x + 4 = 0$, $Q(x)$ – в виде $|x| > 1$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[-2, 2]$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[0, 2]$.

6. Предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 - 6x + 8 < 0$, $Q(x)$ – в виде $|x| < 4$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(2, 4)$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[3, 4]$.

7. Предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 \ge 16$, $Q(x)$ – в виде $x^2 - 25 > 0$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-\infty, -4)$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(–4, 4)$.

8. Предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 > 3x$, $Q(x)$ – в виде $x^2 - 4x > 0$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[3, +\infty)$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $[0, 3]$.

9. Предикат $P(x)$ задан в виде $|x|>5$, $Q(x)$ – в виде $x^2 \geq 25$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-6, -5)$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(-6, 6)$.

10. Предикат $P(x)$ задан в виде $4x^2 - 1 > 0$, $Q(x)$ – в виде $x^2 > 1$:

а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$;

б) $\exists x\, P(x)$, где предикат $P(x)$ рассматривается на интервале $(0, 1)$.

5. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0;\ 1\}$ и программой $q_1 0 \to q_2 0$ (Л); $q_2 0 \to q_0 1$; $q_1 1 \to q_1 1$ (Л); $q_2 1 \to q_2 1$ (Л). Начальное положение «считывающей головки» – крайнее правое. В какое слово будет преобразовано машиной входное слово:

1) 11001101; 2) 10010101; 3) 11000001; 4) 10111101; 5) 11001111;
6) 10001011; 7) 10101101; 8) 10111101; 9) 10101111; 10) 10000001

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игошин, В.И. Математическая логика и теория алгоритмов – М. : Академия, 2008.

2. Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В.И. Игошин. – М. : Академия, 2006.

Учебное издание

НАХМАН Александр Давидович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Методические указания и контрольные задания

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсеева

Подписано в печать 29.06.2011
Формат 60×84/16. 0,93 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 306

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14