

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Ю.Ю. Громов, О.Г. Иванова, Ю.В. Кулаков,
В.А. Гриднев, В.Г. Однолько

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Допущено Учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям
220100 «Системный анализ и управление»,
230400 «Информационные системы и технологии»



Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2012

УДК 519.1 (075)
ББК В174я73
Д482

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ

В.Ф. Крапивин

Доктор физико-математических наук, профессор

Ф.А. Мкртчян

Д482 Дискретная математика : учебное пособие / Ю.Ю. Громов, О.Г. Иванова, Ю.В. Кулаков, В.А. Гриднев, В.Г. Однолько. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 128 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1074-2.

Содержит теоретический материал, упражнения, ответы и список рекомендуемой литературы.

Рекомендовано Учёным советом университета в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 090105 «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем», 090303 «Информационная безопасность автоматизированных систем», 230104 «Системы автоматизированного проектирования» и направлениям 010400 «Прикладная математика и информатика», 220100 «Системный анализ и управление», 220400 «Управление в технических системах», 230100 «Информатика и вычислительная техника», 230400 «Информационные системы и технологии», и для студентов средних учебных заведений, обучающихся по специальностям 2203 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», 230115 «Программирование в компьютерных системах».

УДК 519.1 (075)
ББК В174я73

ISBN 978-5-8265-1074-2

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2012

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика является относительно молодой наукой, высокий интерес к ней в настоящее время связан с бурно развивающимися информационными технологиями и внедрением автоматизированных методов и средств обработки информации во все сферы человеческой деятельности. Изучаемая в вузе одноимённая дисциплина обеспечивает фундаментализацию образования, формирует у студентов научное мировоззрение и развивает логическое мышление.

Настоящее пособие знакомит обучающихся с важнейшими разделами дискретной математики и освещает такие понятия, как: множество, функция, отображение, операция; алгебра, фундаментальные алгебры; отношения; модель; алгебраическая система; булевы функции; минимизация булевых функций в классе ДНФ; полнота системы булевых функций; взвешенный граф и его матричное задание; связность и сильная связность; цикломатика; планарность; разрешимые и неразрешимые проблемы; эйлеровы и гамильтоновы графы; покрытия и независимые множества; цепи Маркова; кратчайшие пути в графах; задача о коммивояжёре; конечный автомат и способы его задания.

Содержание пособия соответствует ФГОС ВПО по специальности 090303 «Информационная безопасность автоматизированных систем» и направлениям подготовки 220100 «Системный анализ и управление», 220400 «Управление в технических системах», 230400 «Информационные системы и технологии».

Рассматриваемые в учебном пособии понятия иллюстрируются необходимым количеством примеров. Каждый параграф заканчивается тщательно подобранными для закрепления теоретического материала упражнениями, для которых приведены правильные ответы.

Надеемся, что данная учебная разработка будет способствовать приобретению студентами необходимых знаний, умений и навыков, которые помогут им не только в изучении дисциплин общенаучного и профессионального циклов, но и в решении многих практических задач.

1. МНОЖЕСТВО, ФУНКЦИЯ, ОТОБРАЖЕНИЕ, ОПЕРАЦИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

Множество это объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Такое определение понятия множества дал основатель теории множеств – немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918). Это понятие является в математике первичным и поэтому не имеет строгого определения, удовлетворяющего современным требованиям. Множества будем обозначать, как правило, большими (прописными) буквами латинского алфавита. Объекты, которые образуют множество, называют *элементами множества* и обозначают малыми (строчными) буквами латинского алфавита. Если элемент m принадлежит множеству M , то будем использовать запись $m \in M$, в противном случае – запись $m \notin M$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется *конечным множеством*. Если же множество не содержит ни одного элемента, то оно называется *пустым множеством* и обозначается \emptyset .

Множество может быть задано перечислением элементов (конечные множества) или указанием свойств элементов. При этом для задания множества используют фигурные скобки $\{ \}$. Например, множество M цифр десятичного алфавита можно задать в виде $M = \{0, 1, \dots, 9\}$ или $M = \{i / i - \text{целое}, 0 \leq i \leq 9\}$, где справа от наклонной черты указаны свойства элементов этого множества. Множество M чётных чисел можно записать в виде $M = \{m / m - \text{чётное число}\}$.

Множество M' называется *подмножеством* множества M тогда и только тогда, когда любой элемент множества M' принадлежит множеству M :

$$M' \subset M \leftrightarrow (m \in M' \rightarrow m \in M),$$

где \subset – знак включения подмножества; \rightarrow – «если ..., то ...», \leftrightarrow – «... если и только если ...». В частности, множества M' и M могут совпадать.

Невключение M' в M обозначается так: $M' \not\subset M$.

Очевидно, что если множество M_a – подмножество множества M_b и множество M_b – подмножество множества M_a , то оба этих множества состоят из одних и тех же элементов. Такие множества называют *равными*: $M_a = M_b$.

Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M и только они. Такое множество будем называть *семейством множества M* или *булеаном множества M* и обозначать $B(M)$, а множество M – *универсальным множеством*, *универсумом* или *пространством* и обозначать $\mathbf{1}$.

Рассмотрим образование булеана $B(\mathbf{1})$ от универсума $\mathbf{1}$. Первым элементом в булеан $B(\mathbf{1})$ включается пустое множество \emptyset . Кроме него в булеан входят $C_{|\mathbf{1}|}^1$ подмножеств универсального множества $\mathbf{1}$, содержащих по одному элементу, $C_{|\mathbf{1}|}^2$ подмножеств универсума, содержащих по два элемента и т.д. Наконец, подмножество, содержащее все элементы пространства $\mathbf{1}$. Здесь и далее через $|M|$ будем обозначать количество элементов конечного множества M , называемое *мощностью множества M* .

Мощность булеана $|B(\mathbf{1})|$ от универсума $\mathbf{1}$ равна $2^{|\mathbf{1}|}$:

$$|B(\mathbf{1})| = 2^{|\mathbf{1}|}.$$

Например, булеан $B(\mathbf{1})$ от универсального множества $\mathbf{1} = \{y, x, a\}$ будет иметь вид

$$B(\mathbf{1}) = \{\emptyset, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{a, x\}, \{a, y\}, \{y, x, a\}\},$$

а его мощность

$$|B(\mathbf{1})| = 2^{|\mathbf{1}|} = 2^3 = 8.$$

Множество также часто задают графически с помощью *диаграммы Эйлера*. Например, задание множества $\{a, b, c\}$ в пространстве $\mathbf{1} = \{a, b, c, d, e\}$ приведено на рис. 1, где замкнутая линия, называемая *кругом Эйлера*, соответствует рассматриваемому множеству и ограничивает его элементы. При этом рамка, в верхнем правом углу которой стоит $\mathbf{1}$, ограничивает элементы пространства. Одним из важных понятий теории множеств является понятие декартова произведения множеств.

Декартовым произведением $M_a \times M_b$ множеств M_a и M_b называется множество M вида

$$M = \{(m_i, m_j) / m_i \in M_a, m_j \in M_b\}.$$

Здесь и далее круглыми скобками $()$ обозначается *последовательность*, т.е. множество, в котором зафиксирован порядок элементов.

Подмножество $F \subset M_x \times M_y$ называется *функцией*, если для каждого элемента $x \in M_x$ найдётся не более одного элемента $y \in M_y$ вида $(x, y) \in F$; при этом, если для каждого элемента x имеется точно один элемент y вида $(x, y) \in F$, то функция называется *всюду (полностью) определённой*, в противном случае – *частично определённой (недоопределённой)*. Множество M_x является *областью определения функции F* , множество M_y –

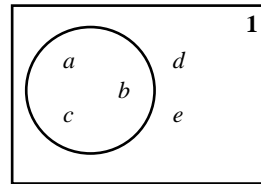


Рис. 1

областью значений функции F . Часто вместо записи $(x, y) \in F$ используют запись $y = F(x)$; при этом элемент x называют *аргументом* или *переменной*, а y – *значением функции F* .

Функция $y = F(x)$ называется *сюрьективной*, если для каждого элемента $y \in M_y$ найдётся элемент $x \in M_x$ вида $(x, y) \in F$.

Полностью определённая функция $y = F(x)$ называется также *отображением* (из) M_x в M_y , а в случае, если она сюрьективна, – *отображением* (из) M_x на M_y .

Имея дело с отображениями вместо $y = F(x)$ часто пишут $y = x^F$, а об элементах области значений и области определения функции говорят, как об образах и прообразах соответственно. Так, элемент $y \in M_y$ называют *образом* элемента x при отображении F , а подмножество $\{x / x \in M_x\}$, для каждого из элементов которого существуют элементы $(x, y) \in F$, – *прообразом* элемента y .

Декартово произведению двух множеств можно сопоставить прямоугольную решётку, узлы которой взаимно однозначно отвечают элементам декартова произведения, а подмножество декартова произведения на решётке отметить штриховкой соответствующих узлов.

На рисунке 2, *a* изображено подмножество декартового произведения множеств $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $M_y = \{y_1, y_2, y_3\}$, не являющееся функцией; на рис. 2, *б* – являющееся полностью определённой функцией и отображением (из) M_x в M_y ; на рис. 2, *в* – полностью определённой функцией и отображением (из) M_x на M_y ; на рис. 2, *г* – частично определённой функцией.

Количество аргументов функции определяет *местность функции*. Выше были рассмотрены одноместные функции.

Частным случаем одноместной функции является одноместная операция. Под *одноместной операцией O_1* в множестве M понимается одноместная функция $y = F(x)$, область определения и область значений которой совпадают: $M_x = M_y = M$.

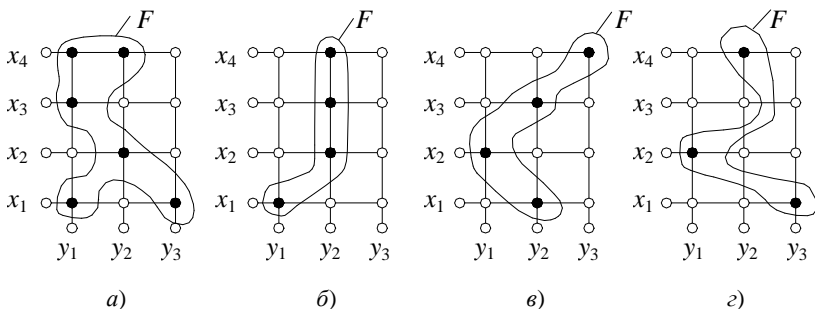


Рис. 2

Аналогично понятию декартова произведения двух множеств определим декартово произведение n множеств.

Декартовым произведением $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \prod_{i=1}^n M_i$ множеств

M_1, M_2, \dots, M_n называется множество

$$M = \{ (m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) / m_{i_1} \in M_1, m_{i_2} \in M_2, \dots, m_{i_n} \in M_n \}.$$

Элементами декартова произведения $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из n элементов, причём первый элемент принадлежит множеству M_1 , второй – множеству M_2 , ..., n -й элемент – множеству M_n .

Если множество M_x в определении функции $y = F(x)$ является декартовым произведением n множеств $M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n}$, то получаем определение n -местной функции

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Частным случаем n -местной функции $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является n -местная операция. Под n -местной операцией O_n в множестве M понимается n -местная функция $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, области определения аргументов и область значений которой совпадают: $M_{x_1} = M_{x_2} = \dots = M_{x_n} = M_y = M$. Таким образом, n -местная операция над n элементами множества M определяет некоторый элемент этого же множества.

Рассмотрим пространство $\mathbf{1}$ и определим в множестве $B(\mathbf{1})$ четыре операции над множествами: объединение, пересечение, разность и дополнение.

Объединением $M_a \cup M_b$ двух множеств M_a и M_b является множество M , состоящее из элементов множества M_a и из элементов множества M_b :

$$M = M_a \cup M_b = \{ m_i / m_i \in M_a \text{ или } m_i \in M_b \}.$$

Пересечением $M_a \cap M_b$ двух множеств M_a и M_b является множество M , состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству M_a , так и множеству M_b :

$$M = M_a \cap M_b = \{ m_i / m_i \in M_a \text{ и } m_i \in M_b \}.$$

Разностью $M_a \setminus M_b$ множеств M_a и M_b является множество M , состоящее из элементов, принадлежащих множеству M_a и не принадлежащих множеству M_b :

$$M = M_a \setminus M_b = \{ m_i / m_i \in M_a \text{ и } m_i \notin M_b \}.$$

Введённые операции являются двухместными. Рассмотрим операцию дополнения, являющуюся одноместной.

Дополнением \overline{M} множества M является множество

$$\overline{M} = \{m_i / m_i \notin M\}.$$

Операции объединения, пересечения, разности и дополнения проиллюстрированы на рис. 3, $a - z$ соответственно, а результаты операций обозначены заштрихованными областями.

Используя эти операции, можно выражать одни множества через другие, при этом сначала выполняется одноместная операция дополнения, затем пересечения и в последнюю очередь операция объединения (разности). Для изменения этого порядка в выражениях используют скобки.

Рассмотрим дополнение множества, являющегося пересечением множеств M_a и M_b . Оно равно объединению дополнений множеств M_a и M_b :

$$\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}.$$

В этом можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера, представленных на рис. 4.

Таким образом, множество можно задать выражением, в которое входят идентификаторы (указатели) множеств, операции и, может быть, скобки. Такой способ задания множества называется *аналитическим*.

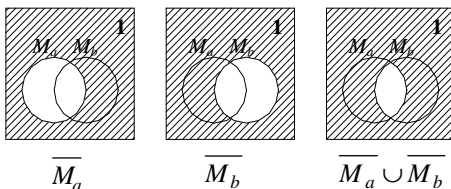
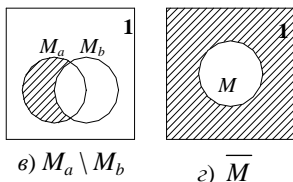
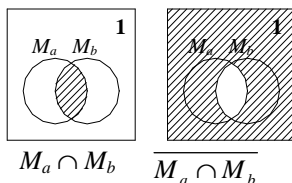
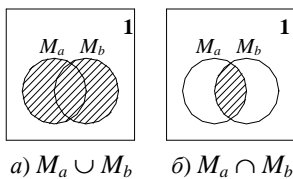


Рис. 3

Рис. 4

Задачи и упражнения

1. Представить перечислением элементов булеан $B(1)$, образованный от универсума 1 , равного:

- а) $\{a\}$; б) $\{b, c, d\}$; в) $\{1, 2\}$; г) $\{2, 3, 4\}$.

2. Изобразить диаграмму Эйлера, задающую множества A , B и C ($A \cap B \cap C \neq \emptyset$), и обозначить на ней штриховкой множество:

- а) $B \setminus \overline{(A \cup C)}$; б) $C \cup \overline{(A \cap B)}$; в) $\overline{A} \setminus (B \cap \overline{C})$; г) $A \cup (C \setminus \overline{B})$.

3. Известно, что из 100 студентов увлекаются:

а) спортом – 19; музыкой – 21; живописью – 23; спортом и музыкой – 7; музыкой и живописью – 9; спортом и живописью – 8; спортом, музыкой и живописью – 3;

б) спортом – 25; музыкой – 38; живописью – 12; спортом и музыкой – 15; музыкой и живописью – 3;

в) спортом – 23; музыкой – 26; живописью – 31; спортом и музыкой – 10; музыкой и живописью – 13; спортом и живописью – 12; спортом, музыкой и живописью – 4;

г) спортом – 17; музыкой – 25; живописью – 32; спортом и живописью – 2; музыкой и живописью – 5.

Изобразить соответствующую диаграмму Эйлера и определить, сколько студентов увлекается только спортом, увлекается только музыкой, ничем не увлекается.

4. Представить перечислением элементов декартова произведения $A \times B$, если:

- а) $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$; в) $A = \{b, c\}$, $B = \{2, 3\}$;

- б) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$; г) $A = \{3, 4\}$, $B = \{b, c, e\}$.

5. Представить перечислением элементов декартова произведения $A \times B \times C$, если:

- а) $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$;

- б) $A = \{т, д\}$, $B = \{o\}$, $C = \{?, !\}$;

- в) $A = \{3, 4\}$, $B = \{d, e\}$, $C = \{*\}$;

- г) $A = \{р, т\}$, $B = \{a, o\}$, $C = \{к, м\}$.

6. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, частично определённую одноместную функцию F_1^q

и полностью определённую одноместную функцию F_1^n с областью определения X и областью значений Y :

- а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$; в) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;
б) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$; г) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

7. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения множеств $X \times Y$ и Z , частично определённую двухместную функцию F_2^u и полностью определённую двухместную функцию F_2^n с областью определения $X \times Y$ и областью значений Z :

- а) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;
б) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$;
в) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$;
г) $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

8. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $X \times Y$, отображение R_1^1 (из) X в Y и отображение R_1^2 (из) X на Y . Определить образы элементов множества X и прообразы элементов множества Y при каждом из заданных отображений R_1^1 и R_1^2 .

- а) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$;
б) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;
в) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$;
г) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

9. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения $M \times M$, частично определённую одноместную операцию O_1^u и полностью определённую одноместную операцию O_1^n в множестве M :

- а) $M = \{a, b\}$; в) $M = \{1, 2, 3, 4\}$;
б) $M = \{a, b, c\}$; г) $M = \{2, 3, 4\}$.

10. Задать перечислением элементов и штриховкой узлов прямоугольной решётки, узлы которой соответствуют элементам декартова произведения множеств $M \times M$ и M , частично определённую двухместную операцию O_2^u и полностью определённую двухместную операцию O_2^n в множестве M :

- а) $M = \{a, b\}$; в) $M = \{0, 1\}$;
б) $M = \{1, 2, 3\}$; г) $M = \{a, b, c\}$.

2. ПОНЯТИЕ АЛГЕБРЫ. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Алгеброй A называется совокупность $\langle \rangle$ множеств M и S :

$$A = \langle M, S \rangle,$$

где $S = \{o_{11}, o_{12}, \dots, o_{1n_1}, o_{21}, o_{22}, \dots, o_{2n_2}, \dots, o_{m1}, o_{m2}, \dots, o_{mn_m}\}$ – множество идентификаторов заданных в M операций, у которых первый символ индекса обозначает их *местность*. При этом множество M называют *носителем*, а множество S – *сигнатурой* алгебры A .

Рассмотрим *фундаментальные алгебры*. Алгебра вида $\langle M, o_2 \rangle$ называется *группоидом*.

Если o_2 – операция типа умножения (\times), то группоид называют *мультипликативным*; если o_2 – операция типа сложения ($+$), то *аддитивным* группоидом.

Рассмотрим группоид $A = \langle M, o_2 \rangle$, при этом операцию o_2 обозначим символом \circ . Тогда элемент $e \in M$ называется *правым нейтральным элементом* группоида $A = \langle M, \circ \rangle$, если для всякого $t \in M$ выполняется равенство $t \circ e = t$; элемент $e \in M$ называется *левым нейтральным элементом* группоида A , если для всех $t \in M$ выполняется равенство $e \circ t = t$. В дальнейшем для краткости вместо слов «все» или «всякий» будем использовать символ \forall . Если элемент $e \in M$ группоида A является одновременно левым и правым нейтральным элементом, то его называют *двусторонним нейтральным элементом* или просто *нейтральным элементом* группоида A . Никакой группоид не может иметь более одного нейтрального элемента. Действительно, если

$$t \circ e = e \circ t = t \text{ и } t \circ e' = e' \circ t = t$$

справедливо для $\forall t \in M$, то

$$e' = e' \circ e = e.$$

Нейтральный элемент мультипликативного группоида называется *единицей* и обозначается символом 1 , а нейтральный элемент аддитивного группоида – *нулём* и обозначается символом 0 .

Группоид $\langle M, \circ \rangle$ называется *идемпотентным группоидом*, если его сигнатура удовлетворяет закону идемпотентности:

$$(\forall t \in M) (t \circ t = t).$$

Группоид $\langle M, \circ \rangle$, сигнатура которого удовлетворяет закону коммутативности

$$(\forall x, y \in M) (x \circ y = y \circ x),$$

называется *коммутативным* или *абелевым группоидом*.

Группоид $\langle M, \circ \rangle$, в котором выполняется закон ассоциативности

$$(\forall x, y, z \in M) (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z),$$

называется *ассоциативным группоидом* или *полугруппой*.

Полугруппа $\langle M, \circ \rangle$, в которой выполнимы обратные операции, т.е. для любых $a, b \in M$ каждое из уравнений $a \circ x = b$, $y \circ a = b$ обладает единственным решением, называется *группой*.

Проиллюстрируем понятие группы на примере *группы подстановок*, которую исследовал французский математик Эварист Галуа (1811 – 1832).

Рассмотрим три элемента x_1, x_2 и x_3 , из которых существует шесть перестановок: $x_1 x_2 x_3, x_1 x_3 x_2, x_2 x_1 x_3, x_2 x_3 x_1, x_3 x_1 x_2$ и $x_3 x_2 x_1$. Записав две какие-либо перестановки из трёх элементов друг под другом, получим подстановку. Например:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Эта запись означает, что элемент x_1 переходит в элемент x_2 , элемент x_2 – в элемент x_3 , x_3 – в x_1 .

Число возможных подстановок равно числу перестановок. Введём следующие обозначения для шести возможных подстановок:

$$a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Определим двухместную операцию умножения над подстановками. *Произведением* двух подстановок называется подстановка, получаемая в результате последовательного выполнения сначала первой, а затем второй из перемножаемых подстановок. Например:

$$c \times b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = e.$$

Значения всех возможных произведений $\alpha \times \beta$ определяет табл. 1.

В рассматриваемой алгебре подстановок выполняется закон ассоциативности, но не выполняется закон коммутативности.

Алгебра $\langle M, \times, + \rangle$, которая по умножению является ассоциативным группоидом, а по сложению – абелевой группой, причём умножение связано со сложением законами *дистрибутивности*:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a,$$

называется *кольцом*.

Таблица 1

α	β					
	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	d	c	f	e
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	b	e	a	c
e	e	c	f	a	d	b
f	f	d	e	b	c	a

Кольцо, в котором все отличные от нуля элементы составляют группу по умножению, называется *телом*.

Тело, у которого мультипликативная группа является абелевой, называется *полем*.

Рассмотрим алгебру множеств (алгебру Кантора)

$$A_k = \langle B(\mathbf{1}), \cup, \cap, \downarrow \rangle,$$

носителем которой является булеан $B(\mathbf{1})$ универсального множества $\mathbf{1}$, сигнатурой – операции объединения \cup , пересечения \cap и дополнения \downarrow .

Для операций алгебры множеств A_k выполняются следующие законы:

– коммутативности объединения и пересечения

$$M_a \cup M_b = M_b \cup M_a, M_a \cap M_b = M_b \cap M_a;$$

– ассоциативности объединения и пересечения

$$M_a \cup (M_b \cup M_c) = (M_a \cup M_b) \cup M_c,$$

$$M_a \cap (M_b \cap M_c) = (M_a \cap M_b) \cap M_c;$$

– дистрибутивности пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения

$$M_a \cap (M_b \cup M_c) = M_a \cap M_b \cup M_a \cap M_c,$$

$$M_a \cup (M_b \cap M_c) = (M_a \cup M_b) \cap (M_a \cup M_c);$$

– идемпотентности объединения и пересечения

$$M_a \cup M_a = M_a, M_a \cap M_a = M_a;$$

– действий с универсальным $\mathbf{1}$ и пустым \emptyset множествами

$$M \cup \emptyset = M, M \cap \emptyset = \emptyset, M \cup \mathbf{1} = \mathbf{1}, M \cap \mathbf{1} = M,$$

$$M \cup \overline{M} = \mathbf{1}, M \cap \overline{M} = \emptyset;$$

– де-Моргана

$$\overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}, \quad \overline{M_a \cup M_b} = \overline{M_a} \cap \overline{M_b};$$

– двойного дополнения

$$\overline{\overline{M}} = M.$$

Алгебра A_k по аддитивной операции объединения \cup и мультипликативной операции пересечения \cap является абелевой полугруппой, так как для этих операций выполняются законы коммутативности и ассоциативности, но она не является группой, поскольку уравнения $M_a \cup X = M_b$, $M_a \cap X = M_b$ не имеют решения, например для случая, когда множества не пересекаются: $M_a \cap M_b = \emptyset$. Следовательно, алгебра Кантора по двухместным операциям объединения и пересечения не является кольцом.

Задачи и упражнения

1. Определить нейтральный элемент группоида $A = \langle M, S \rangle$ с носителем M и сигнатурой S . Выяснить, является ли этот группоид идемпотентным группоидом, абелевым группоидом, полугруппой, абелевой полугруппой, группой, абелевой группой.

а) $M = \{0, 1\}$, $S = \{\oplus\}$, где \oplus – операция сложения по модулю 2;

б) $M = \{0, 1\}$, $S = \{\otimes\}$, где \otimes – операция умножения по модулю 2;

в) $M = B(\mathbf{1})$, $S = \{\cup\}$, где $B(\mathbf{1})$ – булеан от универсума $\mathbf{1} = \{a\}$, \cup – операция объединения множеств;

г) $M = B(\mathbf{1})$, $S = \{\cap\}$, где $B(\mathbf{1})$ – булеан от универсума $\mathbf{1} = \{a\}$, \cap – операция пересечения множеств;

д) $M = \{0, 1, 2\}$, $S = \{\oplus\}$, где \oplus – операция сложения по модулю 3;

е) $M = \{0, 1, 2\}$, $S = \{\otimes\}$, где \otimes – операция умножения по модулю 3;

ж) $M = B(\mathbf{1})$, $S = \{\cup\}$, где $B(\mathbf{1})$ – булеан от универсума $\mathbf{1} = \{a, b\}$, \cup – операция объединения множеств;

з) $M = B(\mathbf{1})$, $S = \{\cap\}$, где $B(\mathbf{1})$ – булеан от универсума $\mathbf{1} = \{a, b\}$, \cap – операция пересечения множеств.

2. Установить, является ли кольцом, телом, полем алгебра A с носителем M и сигнатурой S :

а) $M = \{0, 1\}$, $S = \{\oplus, \otimes\}$, где \oplus, \otimes – операции сложения и умножения по модулю 2;

б) $M = B(\mathbf{1})$, $S = \{\cup, \cap\}$, где $B(\mathbf{1})$ – булеан от универсума $\mathbf{1} = \{a\}$; \cup, \cap – операции объединения и пересечения множеств;

в) $M = \{0, 1, 2\}$, $S = \{\oplus, \otimes\}$, где \oplus, \otimes – операции сложения и умножения по модулю 3;

г) $M = B(\mathbf{1})$, $S = \{\cup, \cap\}$, где $B(\mathbf{1})$ – булеан от универсума $\mathbf{1} = \{a, b\}$; \cup, \cap – операции объединения и пересечения множеств.

3. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ И СВОЙСТВА

Понятие *отношения* является фундаментальным понятием дискретной математики, которое используют для обозначения связей между какими-либо объектами.

Декартово произведение двух равных между собой множеств называют *квадратом множества* M : $M \times M = M^2$. *Бинарным отношением* T в множестве M называется подмножество его квадрата: $T \subset M^2$. Говорят, что элементы m_i и m_j находятся в отношении T , если $(m_i, m_j) \in T$. Совокупность множества M и заданного в нём бинарного отношения T называется *графом* G :

$$G = \langle M, T \rangle,$$

где M – *носитель графа* (множество вершин), T – *сигнатура графа* (множество дуг).

Рассмотрим задание бинарного отношения с помощью матрицы смежности и фактор-множества.

При матричном задании используют двумерную таблицу – *матрицу смежности*, каждой строке (столбцу) которой взаимно однозначно сопоставляют элемент множества M . Тогда каждая клетка (i, j) таблицы взаимно однозначно соответствует элементам множества M^2 . Клетки (i, j) , которые соответствуют элементам бинарного отношения T , как-то отмечают (например, зачерняют или помещают в неё единицу), а остальные клетки оставляют неотмеченными (незачернёнными или записывают в них нули).

В качестве иллюстрации рассмотрим предложенную американским математиком Джоном фон Нейманом (1903 – 1957) блок-схему ЭВМ, которая состоит из множества устройств:

$$M = \{a, b, c, d, e\},$$

где a – устройство ввода; b – арифметическое устройство (процессор); c – устройство управления; d – запоминающее устройство; e – устройство вывода. Если информация из устройства m_i поступает в устройство m_j , то устройства m_i и m_j находятся в отношении T . Бинарное отношение T зададим перечислением элементов:

$$T = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), \\ (c, b), (c, d), (c, e), (d, b), (d, c), (d, e), (e, c)\}.$$

Это же отношение можно задать матрицей смежности следующим образом:

$$B = \left| \begin{array}{ccccc|c} a & b & c & d & e & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \end{array} \right|$$

Граф G , представляющий рассмотренное отношение T , изображён на рис. 5. Здесь (и в дальнейшем) вершины графа изображаются в виде кружков (иногда в виде точек), а дуги – в виде стрелок. Каждая вершина графа соответствует элементу $m \in M$. Если $(m_i, m_j) \in T$, в графе рисуется стрелка, выходящая из вершины m_i и входящая в вершину m_j . При этом вершина m_i называется *началом дуги* (m_i, m_j) , а вершина m_j – её *концом*.

Рассмотрим задание бинарного отношения с помощью фактор-множества.

Окрестностью единичного радиуса элемента $m_i \in M$, которую будем обозначать через $O(m_i)$, называется множество элементов $m_j \in M$ таких, что $(m_i, m_j) \in T$. Довольно часто вместо термина окрестность единичного радиуса используют термин *сечение*.

Множество окрестностей единичного радиуса, взятых для всех элементов множества M при задании в нём отношения $T \subset M^2$, называется *фактор-множеством* M/T множества M по отношению T . Фактор-множество M/T полностью определяет отношение T .

Зададим фактор-множество для рассматриваемого примера блок-схемы ЭВМ в виде двух строк, в первой из которых поместим элементы множества M , во второй под каждым элементом запишем окрестность единичного радиуса этого элемента:

$$M/T = \left| \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \hline \{b c d\} & \{c d e\} & \{a b d e\} & \{b c e\} & \{c\} \end{array} \right|$$

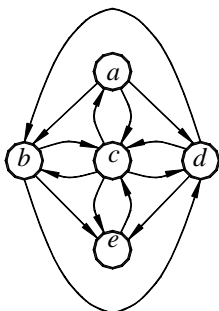


Рис. 5

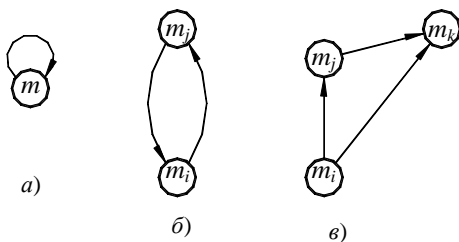


Рис. 6

Рассмотрим наиболее важные свойства бинарных отношений.

Бинарное отношение T в множестве M называется *рефлексивным бинарным отношением*, если

$$(\forall m \in M) ((m, m) \in T).$$

Свойство рефлексивности при задании бинарного отношения матрицей смежности характеризуется тем, что все элементы, лежащие на главной диагонали матрицы, отмечены (равны 1 или зачернены); а при задании отношения графом каждая вершина имеет *петлю* – дугу вида (m, m) (рис. 6, а). Например, рефлексивными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются отношения, представленные с помощью графов на рис. 7, а, б, в, ж, з, к.

Бинарное отношение T в множестве M называется *антирефлексивным бинарным отношением*, если

$$(\forall m \in M) ((m, m) \notin T).$$

Свойство антирефлексивности при задании отношения матрицей смежности характеризуется тем, что ни один элемент, лежащий на её главной диагонали, не отмечен (равен 0 или не зачернён); при задании отношения графом ни одна его вершина не имеет петлю. Антирефлексивными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются отношения, представленные на рис. 7, д, е, и, л.

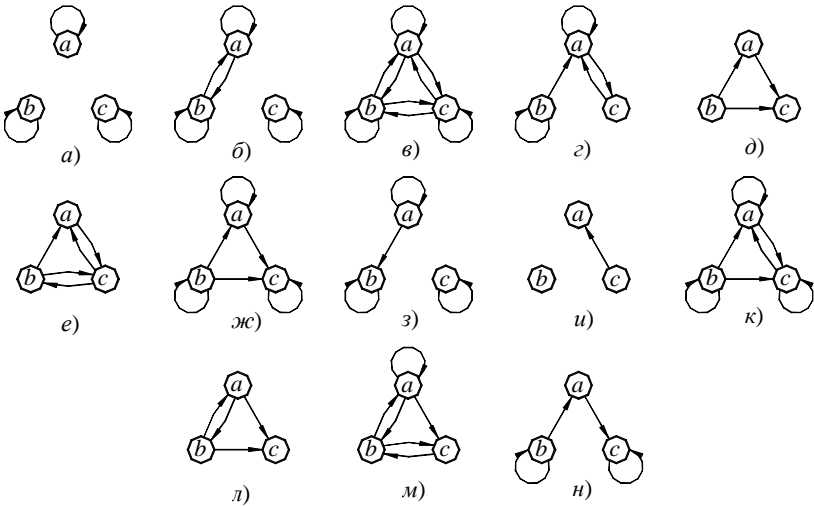


Рис. 7

Бинарное отношение T в множестве M называется *симметричным бинарным отношением*, если

$$(\forall a, b \in M) ((a, b) \in T \rightarrow (b, a) \in T).$$

Матрица смежности симметричного отношения является симметричной относительно главной диагонали, а при задании отношения в виде графа следствием симметричности является наличие между всякой парой вершин, находящихся в отношении T , двух противоположно направленных дуг (рис. 6, б). Симметричными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются отношения, представленные на рис. 7, а, б, в.

Бинарное отношение T в множестве M называется *антисимметричным бинарным отношением*, если

$$(\forall a, b \in M) ((a, b) \in T \text{ и } (b, a) \in T \rightarrow a = b).$$

Антисимметричными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются бинарные отношения, представленные на рис. 7, д, ж, з, и, н.

Бинарное отношение T в множестве M называется *транзитивным бинарным отношением*, если

$$(\forall a, b, c \in M) ((a, b) \in T \text{ и } (b, c) \in T \rightarrow (a, c) \in T).$$

В графе, задающем транзитивное отношение T , для всякой пары дуг таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй дугой (рис. 6, в), – *транзитивно замыкающая дуга*. Транзитивными бинарными отношениями в множестве $M = \{a, b, c\}$ являются все отношения, представленные на рис. 7, кроме отношений г, е, м, н.

Используя эти свойства, определим бинарное отношение упорядоченности, имеющее большое теоретическое и практическое значение.

Бинарное отношение R в множестве M , обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называется *отношением упорядоченности* и обозначается символом \leq . Отношениями упорядоченности являются бинарные отношения, заданные на рис. 7, ж, з.

Бинарное отношение S в множестве M , обладающее свойствами антирефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называется *отношением строгой упорядоченности* и обозначается символом $<$. Отношения строгой упорядоченности представлены на рис. 7, д, и.

Рассмотрим отношение включения множеств \subset . Это отношение рефлексивно: $M_i \subset M_i$ (множество M_i включает само себя); антисимметрично: если $M_i \subset M_j$ и $M_j \subset M_i$, то $M_i = M_j$; транзитивно: если $M_i \subset M_j$ и $M_j \subset M_k$, то $M_i \subset M_k$. Следовательно, отношение включения множеств является отношением упорядоченности.

Множество M с заданным в нём отношением упорядоченности R или отношением строгой упорядоченности S , называется *частично упорядоченным множеством*. Частично упорядоченное множество M , в котором любые два элемента m_i и m_j находятся в отношении упорядоченности, называется *линейно упорядоченным множеством*. Например, частично упорядоченные множества представлены на рис. 7, δ , ε , z , u . Из них первые два являются линейно упорядоченными множествами.

На рисунке 8 приведён ещё один пример частично упорядоченного множества, при этом в качестве отношения упорядоченности рассмотрено отношение включения множеств \subset .

Иногда частично упорядоченные множества изображают в виде графов, у которых удалены все петли и транзитивно замыкающие дуги. Граф H , задающий частично упорядоченное множество с удалёнными петлями и транзитивно замыкающими дугами, называется *диаграммой Хассе*. Диаграмма Хассе частично упорядоченного множества, представленного на рис. 8, изображена на рис. 9, a .

Под *изоморфизмом* между двумя упорядоченными множествами M и M^* будем понимать взаимно однозначное соответствие η между M и M^* такое, что из $m_i \leq m_j$ следует $\eta(m_i) \leq \eta(m_j)$ и из $\eta(m_i) \leq \eta(m_j)$ следует $m_i \leq m_j$.

Два упорядоченных множества называются *изоморфными множествами* тогда и только тогда, когда между ними существует изоморфизм. Например, булеан $B(\{y, x, a\})$ и множество $M = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ являются изоморфными множествами, если булеан упорядочен отношением включения множеств \subset , а множество M упорядочено бинарным отношением $T: (m_i, m_j) \in T$ тогда и только тогда, когда m_i делит m_j без остатка.

Под отношением, *обратным* отношению R , понимают такое отношение \bar{R} , при котором $(m_i, m_j) \in \bar{R}$ тогда и только тогда, когда $(m_j, m_i) \in R$.

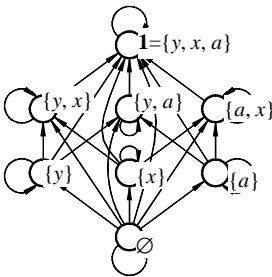


Рис. 8

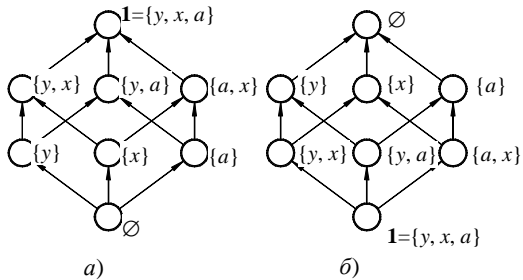


Рис. 9

Принцип, в соответствии с которым отношение, обратное отношению упорядоченности, также является отношением упорядоченности, называется *принципом двойственности*.

Двойственным к частично упорядоченному множеству называется частично упорядоченное множество, определённое на том же носителе с помощью обратного отношения. На рисунке 9, б изображена диаграмма, являющаяся двойственной к диаграмме Хассе (см. рис. 9, а).

Другим важным бинарным отношением является *отношение эквивалентности* \sim , под которым понимается бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Классом эквивалентности $K(m_a)$ элемента m_a называется множество всех элементов m_i , каждый из которых находится с элементом m_a в отношении эквивалентности:

$$K(m_a) = \{ m_i / m_i \sim m_a \}.$$

Два различных класса эквивалентности $K(m_x)$ и $K(m_y)$ не пересекаются: $K(m_x) \cap K(m_y) = \emptyset$.

Представление множества M в виде попарно непересекающихся подмножеств вида M_i будем называть *разбиением* этого множества:

$$\bigcup_i M_i = M, \quad M_{i_a} \cap M_{i_b} = \emptyset, \quad i_a \neq i_b.$$

Таким образом, классы эквивалентности образуют разбиение множества. Тестом распознавания отношения эквивалентности может быть приведение его матрицы смежности с помощью перестановки строк и столбцов к *клеточному виду*, при котором вдоль главной диагонали матрицы расположены единичные подматрицы, а остальные элементы матрицы равны нулю. Каждая единичная подматрица называется *клеткой* и соответствует своему классу эквивалентности.

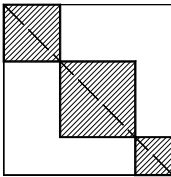


Рис. 10

На рисунке 10 приведён пример клеточной матрицы, в которой единичные подматрицы заштрихованы. Данная матрица имеет три клетки и представляет отношение эквивалентности с тремя классами эквивалентности.

Графы, представленные на рис. 7, а, б и в, задают отношения эквивалентности с тремя, двумя и одним классами соответственно.

Задачи и упражнения

1. Представить с помощью матрицы смежности, графа и фактор-множества бинарное отношение T в множестве $M = \{a, b, c, d\}$, заданное перечислением элементов:

- а) $T = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (d, d)\}$;
 б) $T = \{(a, c), (b, a), (b, d), (c, c), (c, d)\}$;
 в) $T = \{(a, b), (b, a), (b, d), (c, a), (d, b), (d, c)\}$;
 г) $T = \{(a, d), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$.

2. Задать с помощью графа бинарное отношение в множестве $M = \{a, b, c, d\}$, являющееся одновременно:

- а) рефлексивным, симметричным и нетранзитивным;
 б) рефлексивным, несимметричным и транзитивным;
 в) нерефлексивным, антисимметричным и транзитивным;
 г) антирефлексивным, антисимметричным и нетранзитивным.

3. Установить, является ли заданное в множестве $M = \{a, b, c, d\}$ бинарное отношение T бинарным отношением упорядоченности \leq :

- а) $T = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d)\}$;
 б) $T = \{(a, a), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (c, d), (d, b), (d, d)\}$;
 в) $T = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$;
 г) $T = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (d, c), (d, d)\}$;
 д) $T = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, a), (c, b), (c, d), (d, d)\}$;
 е) $T = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, d)\}$.

В случае положительного ответа указать, является ли множество M частично или линейно упорядоченным множеством, и построить соответствующую диаграмму Хассе.

4. Определить, является ли заданное с помощью матрицы смежности бинарное отношение T в множестве $M = \{a, b, c, d\}$ отношением строгой упорядоченности $<$:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>			1	
<i>b</i>				
<i>c</i>				
<i>d</i>		1		

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>		1		
<i>b</i>				
<i>c</i>	1	1		1
<i>d</i>		1		

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>		1		1
<i>b</i>			1	1
<i>c</i>	1			1
<i>d</i>				

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>			1	
<i>b</i>	1		1	1
<i>c</i>				
<i>d</i>	1		1	

В случае положительного ответа получить отношение \bar{T} , которое является обратным отношению T .

5. Установить, является ли заданное с помощью матрицы смежности бинарное отношение в множестве $M = \{a, b, c, d\}$ отношением эквивалентности:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	1	1		
<i>b</i>	1	1		
<i>c</i>			1	1
<i>d</i>			1	1

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	1	1	1	
<i>b</i>		1	1	
<i>c</i>		1	1	
<i>d</i>				1

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	1	1	1	
<i>b</i>	1	1		
<i>c</i>	1		1	
<i>d</i>				1

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	1			
<i>b</i>		1	1	1
<i>c</i>		1	1	1
<i>d</i>		1	1	1

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
д)	<i>a</i>	1		
	<i>b</i>		1	1
	<i>c</i>		1	1
	<i>d</i>			1

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
е)	<i>a</i>	1	1	1
	<i>b</i>	1	1	1
	<i>c</i>			1
	<i>d</i>	1	1	1

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
ж)	<i>a</i>	1		
	<i>b</i>	1	1	
	<i>c</i>		1	1
	<i>d</i>	1		1

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
з)	<i>a</i>	1		1
	<i>b</i>		1	
	<i>c</i>	1		1
	<i>d</i>		1	1

Для каждого из отношений эквивалентности указать число классов эквивалентности n , класс эквивалентности $K(a)$ и разбиение множества M на непересекающиеся подмножества M_1, M_2, \dots, M_n .

4. ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Аналогично введённому ранее понятию бинарного отношения определим понятие n -арного отношения.

Декартово произведение n равных между собой множеств M называется n -й степенью M^n множества M . Под n -арным отношением T в множестве M понимается подмножество его n -й степени: $T \subset M^n$. Если элементы $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}$ принадлежат множеству M , а последовательность $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n})$ – множеству T , то говорят, что элементы $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}$ находятся в отношении T . Любое n -арное отношение может быть задано перечислением элементов.

Рассмотрим свойство симметричности n -арных отношений, позволяющее эффективно использовать эти отношения при формализации многих практических задач. *Симметричным n -арным отношением* называется n -арное отношение S в множестве M такое, что если последовательность $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) \in S$, то и любая другая последовательность вида $(m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_n})$, полученная из $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n})$ перестановкой элементов, также принадлежит S .

По существу, n -арное отношение, обладающее свойством симметричности, задаёт подмножества, которые состоят из n элементов – подмножества мощности n . В дальнейшем симметричное n -арное отношение S будем называть *S -ричным отношением* или *S -отношением*. При этом элементы множества M , в котором определено S -отношение, будем называть *буквами*, а подмножества, определяемые S -отношением, – *словами*.

Однозначно задать S -отношение можно перечислением элементов, матрицей инцидентности, модельным графом, гиперграфом и двудольным графом.

Матрицей инцидентности Q называется двумерная матрица, j -му столбцу которой взаимно однозначно соответствует буква $m_j \in M$,

i -й строке – слово μ_i , определяемое S -отношением, а значение её произвольного элемента q_{ij} определяется выражением:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_j \in \mu_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Например, 3-отношение в множестве $M = \{a, и, о, р, с, ы\}$, определяющее слова $\mu_1 = \{с, о, р\}$, $\mu_2 = \{р, и, с\}$, $\mu_3 = \{с, ы, р\}$, $\mu_4 = \{о, с, а\}$, с помощью матрицы инцидентности Q можно задать следующим образом:

$$Q = \begin{array}{cccccc|c} & а & и & о & р & с & ы & \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mu_1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mu_2 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \mu_3 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mu_4 \end{array} .$$

Модельным графом (мографом) называется граф, в котором вершины соответствуют буквам, а каждой его вершине сопоставляется множество идентификаторов слов, в которые входит соответствующая буква. Процесс сопоставления каждой букве множества идентификаторов слов будем называть *моделизацией* графа. Две вершины графа, имеющие хотя бы один общий идентификатор, называются *смежными* и соединяются *ребром* (неориентированной дугой).

Модельный граф, изображённый на рис. 11, представляет рассматриваемое в качестве примера 3-отношение в множестве $M = \{a, и, о, р, с, ы\}$.

Гиперграфом называется граф, вершинам которого сопоставлены буквы, а кругами Эйлера заданы слова, определяемые S -отношением. Геометрическая интерпретация гиперграфа, соответствующего приведённому выше мографу, представлена на рис. 12.

Граф $G = \langle V, U \rangle$ называется *двудольным*, если его носитель V разбит на непересекающиеся подмножества V^+ и V^- и начало каждой дуги из множества U принадлежит подмножеству V^+ , а конец – подмножеству V^- .

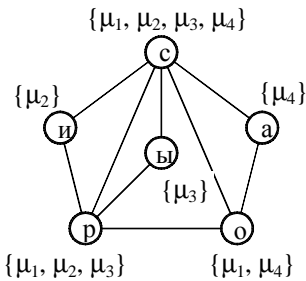


Рис. 11

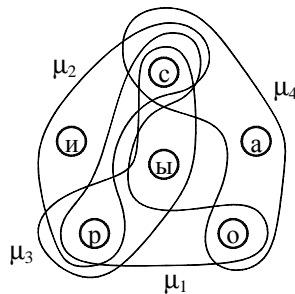


Рис. 12

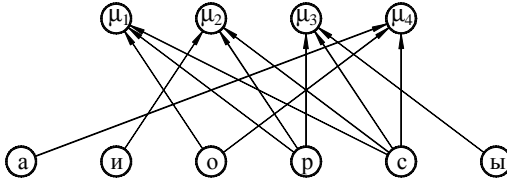


Рис. 13

При задании S -отношений при помощи двудольного графа буквы выступают в качестве элементов подмножества V^+ , слова – в качестве элементов подмножества V^- , и дуга (v_α, v_β) имеет место тогда и только тогда, когда буква, соответствующая вершине $v_\alpha \in V^+$, входит в слово, соответствующее вершине $v_\beta \in V^-$. Двудольный граф, задающий пример рассматриваемого 3-отношения, изображён на рис. 13.

Понятие модели является одним из основных в дискретной математике. *Моделью* Ψ называется совокупность множества M и множества заданных в нём отношений S :

$$\Psi = \langle M, R \rangle.$$

При этом множество M называют *носителем модели*, а множество $R = \{R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1n_1}, R_{21}, R_{22}, \dots, R_{2n_2}, \dots, R_{m1}, R_{m2}, \dots, R_{mn_m}\}$ – *сигнатурой модели*. Здесь отношение $R_{ij} \subset M^i$, а значение i определяет *арность отношения*.

Алгебраической системой называется совокупность множества M с заданными в нём операциями и отношениями. Частным случаем алгебраической системы является алгебра отношений.

Задачи и упражнения

1. Установить, является ли симметричным заданное 3-арное отношение T в множестве $M = \{a, b, c, d, e, g\}$:

- а) $T = \{(a, b, c), (c, b, a), (b, c, d), (d, c, b)\}$;
- б) $T = \{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\}$;
- в) $T = \{(a, b, c), (c, b, a), (b, c, d), (d, c, b), (c, d, e), (e, d, c)\}$;
- г) $T = \{(a, b, d), (a, d, b), (b, a, d), (b, d, a), (d, a, b), (d, b, a), (a, e, g), (a, g, e), (e, a, g), (e, g, a), (g, a, e), (g, e, a)\}$;
- д) $T = \{(a, c, e), (a, e, c), (c, a, e), (c, e, a), (e, a, c), (e, c, a), (a, b, g), (a, g, b), (b, a, g), (b, g, a), (g, a, b), (g, b, a), (b, d, e), (b, e, d), (d, b, e), (d, e, b), (e, b, d), (e, d, b)\}$.

Симметричные отношения представить матрицей инцидентности Q , модельным графом, гиперграфом и двудольным графом, а также указать какие слова они определяют.

5. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ. МИНИМИЗАЦИЯ В КЛАССЕ ДНФ

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значением которой может быть 0 или 1, от n переменных, каждая из которых может принимать значения 0 или 1, называется *булевой функцией от n переменных*. При этом единица соответствует значению «истина», а ноль – значению «ложь».

Булеву функцию от n переменных можно задать различными способами: таблицей, дизъюнкцией конъюнктов, гиперкубом и перечислением десятичных эквивалентов.

При табличном задании булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ строят прямоугольную таблицу размером $(2^n + 1) \times (n + 1)$, первую строку которой заполняют идентификаторами переменных и обозначением самой функции, а оставшиеся 2^n строки – всевозможными комбинациями значений переменных и соответствующими значениями функции. Например, с помощью табл. 2 задана одна из возможных булевых функций трёх переменных.

При задании булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не равной 0, дизъюнкцией конъюнктов используется разложение Шеннона:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \\ \text{на которых} \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1}} \big\& x_i^{\sigma_i},$$

где $\big\&_{i=1}^n x_i^{\sigma_i}$ – конъюнкта; $x_i^{\sigma_i}$ – первичный терм, определяемый как

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i & \text{при } \sigma_i = 1, \\ \bar{x}_i & \text{при } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Здесь операции дизъюнкция \bigvee , конъюнкция $\big\&$ и отрицание $\bar{}$ определены традиционно, как показано в табл. 3, 4 и 5.

Таблица 2

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблица 3

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 4

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 5

x	\bar{x}
0	1
1	0

Эти операции удовлетворяют следующим основным законам:

- *идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции*

$$a \vee a = a, a \& a = a;$$

- *коммутативности дизъюнкции и конъюнкции*

$$a \vee b = b \vee a, a \& b = b \& a;$$

- *ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции*

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, a \& (b \& c) = (a \& b) \& c;$$

- *дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции*

$$a \& (b \vee c) = a \& b \vee a \& c, a \vee (b \& c) = (a \vee b) \& (a \vee c);$$

- *двойного отрицания*

$$\overline{\bar{a}} = a;$$

- *де-Моргана*

$$\bar{a} \vee \bar{b} = \overline{a \& b}, \bar{a} \& \bar{b} = \overline{a \vee b};$$

- *склеивания*

$$a \& b \vee a \& \bar{b} = a, (a \vee b) \& (a \vee \bar{b}) = a;$$

- *поглощения*

$$a \vee a \& b = a, a \& (a \vee b) = a;$$

- *действий с константами 0 и 1*

$$a \vee 0 = a, a \& 0 = 0, a \vee 1 = 1,$$

$$a \& 1 = a, a \vee \bar{a} = 1, a \& \bar{a} = 0.$$

Задание рассматриваемой булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ (см. табл. 2) в виде дизъюнкции конstituент будет выглядеть следующим образом:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \& x_3 \vee x_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3 \vee x_1 \& x_2 \& \bar{x}_3 \vee x_1 \& x_2 \& x_3.$$

При этом знак конъюнкция & часто для простоты опускают:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3.$$

В дальнейшем представление булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде дизъюнкции конституент будем называть *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) функции от n переменных.

Количество первичных термов в совершенной ДНФ функции f называется *сложностью представления* и обозначается $L(f)$. Так, сложность представления $L(f)$ рассматриваемой в качестве примера булевой функции равна 15.

Для задания булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с помощью *гиперкуба* строят граф, вершинам которого сопоставляют всевозможные двоичные наборы значений переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) . Вершины этого графа упорядочивают по ярусам так, что в i -й ярус входят $\binom{n}{i}$ вершин, которым со-

ответствуют двоичные наборы, содержащие по i единиц каждый. Каждую пару вершин графа соединяют ребром, если соответствующие им наборы отличаются в одном и только в одном разряде. Вершины, соответствующие наборам $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на которых функция принимает значение 1, заштриховываются.

Гиперкуб для рассматриваемой булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ представлен на рис. 14.

Часто двоичные наборы $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на которых функция равна 1, задают десятичными эквивалентами $\sum_{i=1}^n \sigma_i 2^{n-i}$, а булеву функцию – перечислением этих десятичных эквивалентов.

Булева функция, представленная выше таблицей, совершенной ДНФ и гиперкубом может быть задана и перечислением десятичных эквивалентов следующим образом:

$$f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee (0, 3, 4, 6, 7).$$

Минимальной ДНФ булевой функции называется ДНФ этой функции, которая имеет минимальную сложность.

Рассмотрим *метод Квайна (импликантных таблиц)* для получения минимальной ДНФ булевой функции, который заключается в последовательном выполнении следующих двух этапов.

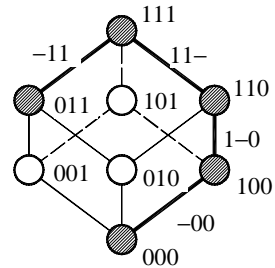


Рис. 14

Этап 1. Выделение максимальных единичных интервалов и построение сокращённой ДНФ булевой функции.

Под *единичным интервалом* булевой функции понимается множество двоичных наборов, на которых функция принимает значение 1 и которые образуют гиперкуб некоторой размерности. Мощность единичного интервала может быть равна степени числа 2. Так, интервал мощности 2^0 представляет собой гиперкуб размерности 0 (вершину), интервал мощности 2^1 – гиперкуб размерности 1 (ребро), мощности 2^2 – гиперкуб размерности 2 (грань) и т.д.

Единичные интервалы булевой функции образуют *множество единичных интервалов I*. Множество единичных интервалов для рассматриваемого примера будет содержать пять вершин и четыре ребра:

$$I = \{000, 100, 110, 111, 011, \text{--}00, 1\text{--}0, 11\text{--}, \text{--}11\}.$$

При этом вершины из множества *I* в гиперкубе на рис. 14 заштрихованы, а ребра отмечены толстой линией.

Выявление всех единичных интервалов булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ возможно и без представления её с помощью гиперкуба, что особенно актуально для больших значений *n*. Для этого выписывают единичные интервалы нулевой размерности (вершины), разбивая их на пояса так, что в некотором *i*-м поясе будут содержаться интервалы с *i* единицами в каждом из них. Затем попарно сравнивают элементы из соседних поясов и для каждой пары интервалов, отличающихся только в одном разряде, записывают единичный интервал размерности 1 (ребро). Полученные единичные интервалы также разбивают на пояса и выявляют интервалы размерности 2 (грань), каждая из которых образуется двумя парами противоположных рёбер. Описанную процедуру продолжают до тех пор, пока не прекратится образование новых единичных интервалов.

На рисунке 15 изображена схема выявления всех единичных интервалов для рассматриваемого примера.

Здесь и далее, если в некотором разряде единичного интервала размещён символ «–», то соответствующая этому разряду переменная в конъюнкции отсутствует. Например, ребру «–00» соответствует конъюнкция $\bar{x}_2 \bar{x}_3$, в которой отсутствует переменная x_1 .

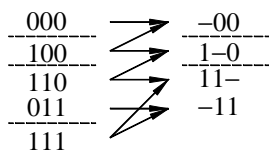


Рис. 15

Заметим, что исключение переменной из конъюнкции происходит в результате склеивания. Так, например, множество вершин {000, 100} образует ребро «–00», что соответствует преобразованию дизъюнкции соответствующих этим вершинам конъюнкций с по-

следовательным применением законов ассоциативности, коммутативности и склеивания:

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 (\bar{x}_2 \bar{x}_3) \vee x_1 (\bar{x}_2 \bar{x}_3) = (\bar{x}_2 \bar{x}_3) \bar{x}_1 \vee (\bar{x}_2 \bar{x}_3) x_1 = \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Единичный интервал булевой функции $I_\alpha \in I$ называется *максимальным единичным интервалом*, если не найдётся другого единичного интервала большей размерности $I_\beta \in I$ этой функции, содержащего интервал I_α . Например, единичные интервалы -00 , $1-0$, $11-$, -11 являются соответствующими рёбра (см. рис. 14). Но интервалы 000 , 100 , 110 , 111 , 011 нельзя считать максимальными единичными интервалами, поскольку каждая из соответствующих вершин гиперкуба содержится по крайней мере в одном ребре. Заметим, что в схеме на рис. 15 из максимальных единичных интервалов не выходят стрелки, т.е. они не содержатся в единичных интервалах большей размерности.

Максимальные единичные интервалы образуют *множество максимальных единичных интервалов* I_{\max} . Конъюнкция, соответствующая максимальному единичному интервалу булевой функции, называется *простой импликантой* этой функции, а дизъюнкция простых импликант представляет её *сокращённую ДНФ*. В рассматриваемом примере множество I_{\max} состоит из четырёх рёбер:

$$I_{\max} = \{-00, 1-0, 11-, -11\},$$

а сокращённая ДНФ имеет следующий вид:

$$f_s(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3.$$

Получением сокращённой ДНФ булевой функции заканчивается первый этап метода импликантных таблиц. Заметим, что на этом этапе сложность представления булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee(0, 3, 4, 6, 7)$ в классе ДНФ уменьшилась от 15 до 8.

Этап 2. *Получение тупиковых ДНФ булевой функции и выбор из них минимальной ДНФ.*

Тупиковой ДНФ булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется такая её ДНФ, которая при вычёркивании хотя бы одного первичного терма не определяет функцию f . Заметим, что минимальная ДНФ булевой функции является тупиковой ДНФ.

Покрытием столбцов строками в двумерной таблице называется такое множество строк, при котором для каждого столбца найдётся хотя бы одна строка, на пересечении с которой этот столбец имеет единицу, а при исключении хотя бы одного элемента из этого множества строк указанное свойство не выполняется.

Построение тупиковых ДНФ булевой функции сводится к покрытию столбцов строками в таблице Квайна.

Таблица 6

Максимальные единичные интервалы		Конституента				
		000	100	110	011	111
a	–00	1	1	0	0	0
b	1–0	0	1	1	0	0
c	11–	0	0	1	0	1
d	–11	0	0	0	1	1
		a	$a \vee b$	$b \vee c$	d	$c \vee d$

Таблицей Квайна называется двумерная таблица, каждой строке которой соответствует максимальный единичный интервал, а столбцу – конституента. На пересечении i -й строки и j -го столбца таблицы ставится единица, если j -я конституента входит в i -й интервал, иначе в клетке (i, j) ставится ноль или она не заполняется ничем. Для рассматриваемого примера таблица Квайна представлена табл. 6, строки которой обозначены буквами a, b, c и d .

Покрытия таблицы Квайна могут быть определены путём составления некоторой мультипликативно-аддитивной формы и преобразования её в аддитивно-мультипликативную. При составлении мультипликативно-аддитивной формы для каждого j -го столбца записывают дизъюнкцию строк, в которых содержится единица, и полученные дизъюнкции логически перемножают. В полученной после преобразований аддитивно-мультипликативной форме каждая конъюнкция будет соответствовать покрытию таблицы Квайна.

Для нашего примера исходная мультипликативно-аддитивная форма и её преобразование с использованием законов коммутативности, поглощения и дистрибутивности будут выглядеть следующим образом:

$$a \& (a \vee b) \& (b \vee c) \& d \& (c \vee d) = a \& (b \vee c) \& d = a \& b \& d \vee a \& c \& d.$$

Полученные конъюнкции определяют покрытия $\{a, b, d\}$ и $\{a, c, d\}$ таблицы Квайна, которые обозначают множества максимальных единичных интервалов $\{-00, 1-0, -11\}$ и $\{-00, 11-, -11\}$. Дизъюнкции простых импликант, соответствующих элементам этих множеств, являются тупиковыми ДНФ булевой функции f :

$$f_{11}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3,$$

$$f_{12}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3.$$

В качестве минимальной ДНФ булевой функции выбирают такую её тупиковую ДНФ, которая имеет минимальную сложность. В нашем случае сложности обеих тупиковых ДНФ функции f одинаковы (равны 6).

Поэтому в качестве минимальной ДНФ можно выбрать любую из них. Выберем, например, первую:

$$f_{\min}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3.$$

Получением минимальной ДНФ булевой функции заканчивается второй этап метода Квайна, на нём сложность ДНФ взятой в качестве примера булевой функции уменьшилась от 8 до 6.

Таким образом, в результате минимизации булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee(0, 3, 4, 6, 7)$ в классе ДНФ сложность $L(f)$ уменьшилась с 15 до 6.

Дальнейшее уменьшение сложности выражения, определяющего заданную функцию, возможно при переходе из класса ДНФ в класс скобочных форм. Выражение, определяющее булеву функцию, называется *скобочной формой*, если кроме первичных термов и знаков операций конъюнкции и дизъюнкции в него входят скобки (,).

Для рассматриваемой функции сложность её минимальной ДНФ, равная 6, может быть уменьшена до 5 в результате перехода в скобочную форму с применением закона дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$f_b(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3(\bar{x}_2 \vee x_1) \vee x_2x_3.$$

Задачи и упражнения

1. Представить таблицей, совершенной ДНФ и гиперкубом булеву функцию, заданную перечислением десятичных эквивалентов:

- а) $f(x_1, x_2) |_1 = \vee(0, 2, 3)$;
- б) $f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee(1, 4, 5, 7)$;
- в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) |_1 = \vee(0, 2, 6, 9, 10, 11, 14)$.

2. Минимизировать методом Квайна трёхместную булеву функцию:

- а) $f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee(0, 1, 7)$;
- б) $f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee(0, 4, 5, 7)$;
- в) $f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee(0, 4, 5, 6, 7)$;
- г) $f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee(0, 1, 2, 4, 5, 7)$;
- д) $f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee(0, 1, 2, 3, 6, 7)$;
- е) $f(x_1, x_2, x_3) |_1 = \vee(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7)$.

3. Минимизировать методом Квайна четырёхместную булеву функцию:

- а) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) |_1 = \vee(4, 5, 9, 11, 13, 15)$;
- б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) |_1 = \vee(0, 1, 4, 5, 6, 7, 14, 15)$;
- в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) |_1 = \vee(0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 14)$;
- г) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) |_1 = \vee(0, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$.

6. СЛАБООПРЕДЕЛЁННЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. МИНИМИЗАЦИЯ В КЛАССЕ ДНФ

Под *нулевым интервалом* булевой функции понимают множество двоичных наборов, на которых функция принимает значение 0 и которые образуют гиперкуб некоторой размерности.

Слабоопределённой булевой функцией от n переменных называется булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, обладающая следующими свойствами:

- а) число n достаточно велико;
- б) единичная и нулевая области V_1, V_0 задаются единичными и нулевыми интервалами;
- в) мощность объединения единичной V_1 и нулевой V_0 областей на много меньше, чем 2^n .

В качестве примера слабоопределённой булевой функции рассмотрим семиместную булеву функцию:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_7) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } 0-0-0-0, 11-0-01, 0--001-; \\ 0 \text{ на интервалах } 10-0-01, 00--10-, 1101-0-, \end{cases}$$

единичная область которой задана единичными кубами $0-0-0-0$, $0--001-$ и гранью $11-0-01$, а нулевая область – нулевыми гранями $10-0-01$, $1101-0-$ и кубом $00--10-$. Мощность объединения единичной и нулевой областей $|V_1 \cup V_0|$ равна 36, а это значительно меньше, чем 2^7 .

Таблицей различий называется двумерная таблица, каждой строке которой соответствует разряд рассматриваемого единичного интервала, столбцу – нулевой интервал, а в ячейке (i, j) находится результат операции:

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0, & 1 \oplus 0 &= 1, & - \oplus 0 &= 0, \\ 0 \oplus 1 &= 1, & 1 \oplus 1 &= 0, & - \oplus 1 &= 0, \\ 0 \oplus - &= 0, & 1 \oplus - &= 0, & - \oplus - &= 0, \end{aligned}$$

причём в качестве первого аргумента берётся значение i -го разряда единичного интервала, в качестве второго аргумента – значение i -го разряда j -го нулевого интервала.

При минимизации слабоопределённых булевых функций методом Квайна получение максимальных единичных интервалов сводится к покрытию столбцов строками таблицы различий, которая строится для каждого из единичных интервалов. Единица в ячейке (i, j) таблицы различий, построенной для некоторого единичного интервала, говорит о том, что если в этом единичном интервале оставить только i -й разряд, то в полученном единичном интервале не будет содержаться j -й нулевой интервал. Поэтому каждое покрытие столбцов строками таблицы различий порождает максимальный единичный интервал слабоопределённой булевой функции. Заметим, что при формировании максимального единичного интервала в него переписывают те разряды единичного интервала, которые соответствуют строкам, вошедшим в покрытие, а в оставшихся раз-

рядах записывают символ «-». Максимальные единичные интервалы в слабоопределённых функциях состоят из вершин единичной и недоопределённой областей.

Для иллюстрации сказанного в предыдущем абзаце рассмотрим слабоопределённую булеву функцию от трёх переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 & \text{на интервалах } 000, 110; \\ 0 & \text{на интервалах } 011, 100, \end{cases}$$

представление которой в виде гиперкуба будет выглядеть как это показано на рис. 16.

Таблицу различий, построенную для первого единичного интервала данной трёхместной функции, представляет табл. 7. Для удобства обращения к строкам они идентифицированы буквами a , b и c . Единица, например в ячейке (1, 2) этой таблицы, говорит о том, что если в единичном интервале 000 оставить только первый разряд, то в полученной единичной грани 0 -- не будет содержаться вершина 100.

Покрытия $\{a, b\}$ и $\{a, c\}$ столбцов строками порождают максимальные единичные интервалы 00 -- и 0 -- 0. При этом максимальный интервал 00 -- состоит из вершины 000 единичной области и вершины 001 недоопределённой области. Аналогично максимальный интервал 0 -- 0 включает единичную вершину 000 и недоопределённую вершину 010.

Получим максимальные единичные интервалы рассматриваемой в качестве примера семиместной булевой функции. Таблица 8 представляет таблицу различий, соответствующую единичному интервалу 0 -- 0 -- 0 -- 0.

Найдём в этой таблице все покрытия столбцов строками:

$$(a \vee h) ea = a (a \vee h) e = ae.$$

В данном случае имеем одно покрытие $\{a, e\}$, которое соответствует максимально-му единичному интервалу $I_{\max, 1} = 0 --- 0 ---$ и простой импликанте $\bar{x}_1 \bar{x}_5$.

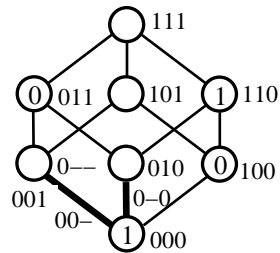


Рис. 16

Таблица 7

Единичный интервал		Нулевые интервалы	
		011	100
a	0	0	1
b	0	1	0
c	0	1	0

Таблица 8

	Единичный интервал	Нулевой интервал		
		10 – 0 – 01	00 – – 10 –	1101 – 0 –
<i>a</i>	0	1	0	1
<i>b</i>	–	0	0	0
<i>c</i>	0	0	0	0
<i>d</i>	–	0	0	0
<i>e</i>	0	0	1	0
<i>g</i>	–	0	0	0
<i>h</i>	0	1	0	0

Аналогично по табл. 9 и 10 определим максимальные единичные интервалы для единичной грани 11 – 0 – 01 и куба 0 – – 001 –.

Найдём покрытия столбцов строками:

$$b(a \vee b) d = b(b \vee a) d = bd.$$

Единственному покрытию $\{b, d\}$ соответствует максимальный единичный интервал $I_{\max, 2} = -1-0---$ и простая импликанта $x_2\bar{x}_4$.

Таблица 9

	Единичный интервал	Нулевой интервал		
		10 – 0 – 01	00 – – 10 –	1101 – 0 –
<i>a</i>	1	0	1	0
<i>b</i>	1	1	1	0
<i>c</i>	–	0	0	0
<i>d</i>	0	0	0	1
<i>e</i>	–	0	0	0
<i>g</i>	0	0	0	0
<i>h</i>	1	0	0	0

Таблица 10

	Единичный интервал	Нулевой интервал		
		10 – 0 – 01	00 – – 10 –	1101 – 0 –
<i>a</i>	0	1	0	1
<i>b</i>	–	0	0	0
<i>c</i>	–	0	0	0
<i>d</i>	0	0	0	1
<i>e</i>	0	0	1	0
<i>g</i>	1	1	1	1
<i>h</i>	–	0	0	0

Определим покрытия:

$$(a \vee g) (e \vee g) (a \vee d \vee g) = (a \vee g) (a \vee g \vee d) (e \vee g) = \\ = (a \vee g) (e \vee g) = (g \vee a) (g \vee e) = g \vee ae.$$

Покрытия $\{a, e\}$ и $\{g\}$ определяют полученный ранее максимальный единичный интервал $I_{\max, 1} = 0 - - - 0 - -$ и новый максимальный интервал $I_{\max, 3} = - - - - - 1 -$, которому соответствует простая импликанта x_6 .

Дизъюнкция простых импликант даёт сокращённую ДНФ булевой функции, которая становится теперь полностью определённой:

$$f_s(x_1, x_2, \dots, x_7) = \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee x_6.$$

Заметим, что единичная область функции f_s содержит единичную область рассматриваемой слабоопределённой функции f , а нулевая область функции f_s – нулевую область функции f .

Этим заканчивается первый этап минимизации слабоопределённой булевой функции.

На втором этапе получают тупиковые ДНФ этой функции и выбирают среди них минимальную ДНФ.

Тупиковой ДНФ слабоопределённой булевой функции называется ДНФ, не задающая эту функцию с точностью до неопределённой области при вычеркивании хотя бы одного первичного терма. Тупиковые ДНФ булевой функции получают в результате покрытия столбцов строками импликантной таблицы, каждой строке которой соответствует максимальный единичный интервал, а столбцу – единичный интервал. При этом в ячейке на пересечении i -й строки и j -го столбца находится единица, если j -й единичный интервал содержится в i -м максимальном единичном интервале, и находится ноль в противном случае.

Таблица 11 представляет импликантную таблицу для рассматриваемого примера слабоопределённой булевой функции.

Определим покрытия столбцов строками этой таблицы:

$$a b (a \vee c) = a (a \vee c) b = a b.$$

Таблица 11

	Максимальные единичные интервалы	Единичные интервалы		
		0 – 0 – 0 – 0	11 – 0 – 01	0 – – 001 –
a	0 – – – 0 – –	1	0	1
b	– 1 – 0 – – –	0	1	0
c	– – – – – 1 –	0	0	1

Единственному покрытию $\{a, b\}$ соответствует множество максимальных единичных интервалов $I_{\max} = \{0 - - - 0 - -, - 1 - 0 - - -\}$ и тупиковая ДНФ:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_7) = \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee x_2 \bar{x}_4,$$

которая и является минимальной ДНФ нашей слабоопределённой булевой функции:

$$f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_7) = \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee x_2 \bar{x}_4.$$

Задачи и упражнения

1. Минимизировать в классе ДНФ слабоопределённую булеву функцию, заданную перечислением единичных и нулевых интервалов:

- а) $f(x_1, x_2, \dots, x_5) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } 1-011, -0011, 1101-; \\ 0 \text{ на интервалах } 01-00, 111-0, 00-10; \end{cases}$
- б) $f(x_1, x_2, \dots, x_6) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } 01--11, 1-01-0, 11-0-1; \\ 0 \text{ на интервалах } -011-1, 01-0-0, 1-1-10; \end{cases}$
- в) $f(x_1, x_2, \dots, x_7) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } 010010-, ---0011, 0-1---0; \\ 0 \text{ на интервалах } 1-0-1-0, 000000-, 1--0-00; \end{cases}$
- г) $f(x_1, x_2, \dots, x_7) = \begin{cases} 1 \text{ на интервалах } -011100, 00-001-, -1--1-0; \\ 0 \text{ на интервалах } 01111-1, 1001-01, -11-01-. \end{cases}$

7. ПОЛНОТА

Выясним, какими свойствами должно обладать некоторое множество (система) булевых функций S , чтобы с помощью функций из этого множества можно было бы выразить любую булеву функцию.

Суперпозицией системы $S = \{\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{k_1}), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{k_2}), \dots, \varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_{k_l})\}$ функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ называется любая функция f , полученная:

- а) из функции $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{k_j})$ переименованием переменных;
- б) подстановкой вместо некоторых переменных функции $\varphi_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{k_\alpha})$ функции $\varphi_\beta(x_1, x_2, \dots, x_{k_\beta})$. При этом подп. а) и б) могут применяться многократно.

Система S называется *полной системой* в k -значной логике P_k , если любая функция $f \in P_k$ представима в виде суперпозиции системы S . Полная система S называется *базисом* B , если она перестаёт быть полной (теряет полноту) при удалении из неё любой функции.

В качестве примера рассмотрим систему $S = \{ \}$, состоящую из одной четырёхместной булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3$.

Установим, можно ли каждую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представить в виде суперпозиции системы $S = \{ \}$.

Как известно, любую булеву функцию можно задать с помощью функций конъюнкции $\&$, дизъюнкции \vee и отрицания $\bar{}$. Выразив отрицание и дизъюнкцию через функцию α :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \bar{\alpha} \vee 0 = \bar{\alpha} \bar{\alpha} \vee \alpha \bar{\alpha} = (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha); \\ \alpha \vee \beta &= \overline{\bar{\alpha} \bar{\beta}} = (\bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) = \\ &= ((\alpha, \alpha, \alpha, \alpha), \beta, (\beta, \beta, \beta, \beta), (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)), \end{aligned}$$

на основании разложения Шеннона и закона де-Моргана можно сделать заключение о том, что любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить в виде суперпозиции системы $S = \{ \}$.

В общем случае для установления полноты системы S булевых функций в двужначной логике P_2 используют следующий критерий.

Критерий полноты Поста–Яблонского. Система булевых функций S является полной тогда и только тогда, когда она: содержит функцию, не принадлежащую классу K_0 ; содержит функцию, не принадлежащую классу K_1 ; содержит функцию, не принадлежащую классу K_2 ; содержит функцию, не принадлежащую классу K_c и содержит функцию, не принадлежащую классу K_m .

Определим упомянутые в критерии пять классов булевых функций.

Классом K_0 булевых функций, сохраняющих константу 0, называется множество булевых функций вида:

$$K_0 = \{ f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) / f_i(0, 0, \dots, 0) = 0 \}.$$

Классом K_1 булевых функций, сохраняющих константу 1, называется множество булевых функций вида:

$$K_1 = \{ f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) / f_i(1, 1, \dots, 1) = 1 \}.$$

Определим принадлежность функции к классам K_0 и K_1 :

$$(0, 0, 0, 0) = \overline{00} \vee 0\overline{00} = 1 \vee 0 = 1, \notin K_0,$$

$$(1, 1, 1, 1) = \overline{11} \vee 1\overline{11} = 0 \vee 0 = 0, \notin K_1.$$

Классом K_n линейных булевых функций называется множество булевых функций вида:

$$\{ f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) / f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus \sum_{j=1}^n c_j x_j \},$$

где c_0, c_j – коэффициенты, которые могут принимать значения 0 или 1; \oplus, \sum – знаки операции «сложение по модулю два»: $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$.

Определим, принадлежит ли функция к классу $K_{\text{л}}$. Для этого получим линейное представление функции в виде:

$$f_{\text{л}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus c_3 x_3 \oplus c_4 x_4$$

и сравним его с функцией f .

Для определения значения коэффициента c_0 вычислим значения функций f и $f_{\text{л}}$ на наборе значений переменных 0000:

$$f(0, 0, 0, 0) = \overline{00} \vee \overline{00} = 1 \vee 0 = 1,$$

$$f_{\text{л}}(0, 0, 0, 0) = c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 0 \oplus c_3 0 \oplus c_4 0 = c_0, c_0 = 1.$$

Аналогично найдём значения коэффициентов c_1, c_2, c_3 и c_4 , фиксируя соответственно наборы значений переменных 1000, 0100, 0010, 0001:

$$f(1, 0, 0, 0) = \overline{10} \vee \overline{00} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f_{\text{л}}(1, 0, 0, 0) = 1 \oplus c_1 1 \oplus c_2 0 \oplus c_3 0 \oplus c_4 0 = 1 \oplus c_1, \\ 1 \oplus c_1 = 0, c_1 = 1;$$

$$f(0, 1, 0, 0) = \overline{00} \vee \overline{10} = 1 \vee 1 = 1,$$

$$f_{\text{л}}(0, 1, 0, 0) = 1 \oplus 1 \oplus c_2 1 \oplus c_3 0 \oplus c_4 0 = 1 \oplus c_2, \\ 1 \oplus c_2 = 1, c_2 = 0;$$

$$f(0, 0, 1, 0) = \overline{00} \vee \overline{01} = 1 \vee 0 = 1,$$

$$f_{\text{л}}(0, 0, 1, 0) = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus c_3 1 \oplus c_4 0 = 1 \oplus c_3, \\ 1 \oplus c_3 = 1, c_3 = 0;$$

$$f(0, 0, 0, 1) = \overline{01} \vee \overline{00} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f_{\text{л}}(0, 0, 0, 1) = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus c_4 1 = 1 \oplus c_4, \\ 1 \oplus c_4 = 0, c_4 = 1.$$

Таким образом, $f_{\text{л}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus x_1 \oplus x_4$.

Сравним значения функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3}$ и полученного линейного представления на каждом из 11 оставшихся наборов. При этом устанавливаем существование набора, например 1111, на котором значения функций f и $f_{\text{л}}$ не совпадают:

$$f(1, 1, 1, 1) = \overline{11} \vee 1\overline{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f_{\text{л}}(1, 1, 1, 1) = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$

$$(1, 1, 1, 1) \neq f_{\text{л}}(1, 1, 1, 1), \notin K_{\text{л}}.$$

Классом K_c самодвойственных булевых функций называется множество булевых функций вида:

$$\{ f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) / f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \},$$

Другими словами, функция является самодвойственной, если на любой паре противоположных наборов она принимает противоположные значения.

Для проверки самодвойственности булевой функции представим её табличным способом (см. табл. 11).

Из таблицы видно, что существует пара противоположных наборов, например 0001 и 1110, на которых значения функции равны:

$$(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 1, 0), \quad \notin K_c.$$

Классом K_m монотонных булевых функций называется множество булевых функций вида:

$$\begin{aligned} & \{ f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) / ((\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*) \geq (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (\sigma_1^* \geq \sigma_1, \sigma_2^* \geq \sigma_2, \dots, \sigma_n^* \geq \sigma_n) \rightarrow f_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*) \geq f_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \}. \end{aligned}$$

Для проверки принадлежности булевой функции $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к классу K_m при небольших значениях n удобно использовать её представление гиперкубом. При этом для каждого ребра гиперкуба характерно, что верхней его вершине соответствует двоичный набор $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$, а нижней вершине – двоичный набор $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Следовательно, если в гиперкубе найдётся хотя бы одно ребро, в котором значение функции 0 будет размещено выше значения 1, то функция не является монотонной.

Протестировать функцию на монотонность можно с помощью соответствующего ей гиперкуба, представленного на рис. 17.

Таблица 11

x_1	x_2	x_3	x_4	(x_1, x_2, x_3, x_4)	x_1	x_2	x_3	x_4	(x_1, x_2, x_3, x_4)
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0

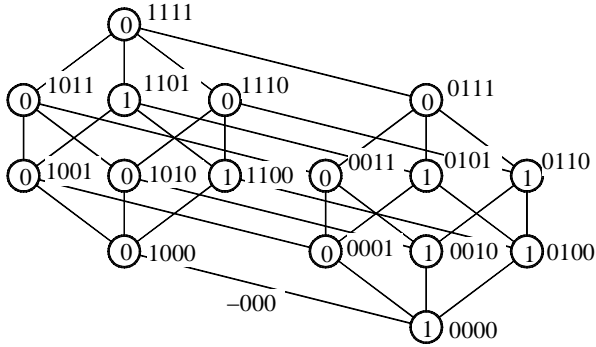


Рис. 17

В гиперкубе существует ребро, например -000 :

$$((1, 0, 0, 0) \geq (0, 0, 0, 0)) \leftrightarrow ((1 \geq 0), (0 \geq 0), (0 \geq 0), (0 \geq 0)),$$

$$(1, 0, 0, 0) < (0, 0, 0, 0), \notin K_M.$$

В соответствии с критерием Поста–Яблонского, система $S = \{ \}$ является полной, поскольку функция не принадлежит ни одному из классов K_0, K_1, K_L, K_C и K_M .

Используя этот критерий и метод Петрика, получим возможные базисы в двузначной логике P_2 с нуль-, одно- и двухместными операциями.

Все булевы функции от двух переменных заданы табл. 12. Заметим, что в ней наборы значений функций являются двоичными эквивалентами десятичных индексов соответствующих идентификаторов.

Представим эти булевы функции аналитически и укажем их названия.

Функция $f_0(x_1, x_2) = 0$ – константа нуль.

Функция $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$ – конъюнкция.

Функция $f_2(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \rightarrow x_2 = x_1 \mapsto x_2$ – левая импликация (читается «не (если x_1 , то x_2)», приставка «ко» от лат. *conversus* – обратный).

Функция $f_3(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_1$.

Таблица 12

Переменные		Булевы функции															
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция $f_4(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1}x_2} = \overline{x_1 \vee \overline{x_2}} = \overline{x_1 \leftarrow x_2} = x_1 \dashv x_2$ – правая ко-импликация.

Функция $f_5(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_2 \vee x_1x_2 = x_2$.

Функция $f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2} = x_1 \oplus x_2$ – сложение по модулю два или неравнозначность, неэквивалентность.

Функция $f_7(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$ – дизъюнкция.

Функция $f_8(x_1, x_2) = \overline{x_1x_2} = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \circ x_2$ – функция Вебба.

Функция $f_9(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1}x_2 \vee x_1x_2} = x_1 \sim x_2$ – эквивалентность, равнозначность.

Функция $f_{10}(x_1, x_2) = \overline{x_2}$ – отрицание.

Функция $f_{11}(x_1, x_2) = \overline{x_1x_2 \vee x_1\overline{x_2} \vee x_1x_2} = \overline{x_2 \vee x_1} = x_1 \leftarrow x_2$ – правая импликация (читается «если x_2 , то x_1 »).

Функция $f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x_1}$ – отрицание.

Функция $f_{13}(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2} \vee x_1x_2} = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \rightarrow x_2$ – левая импликация (читается «если x_1 , то x_2 »).

Функция $f_{14}(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2} \vee x_1x_2} = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 | x_2$ – функция Шеффера.

Функция $f_{15}(x_1, x_2) = 1$ – константа единица.

Для получения всех базисов в P_2 построим двумерную таблицу (табл. 13), каждой строке которой сопоставим одну из выбранных одиннадцати функций, столбцу – один из классов $K_0, K_1, K_\perp, K_\subset$ и K_M . В клетке (i, j) таблицы ставим 1, если i -я функция не принадлежит j -му классу; в противном случае в этой клетке ставим 0. Заметим, что функции f_3, f_4, f_5, f_{10} и f_{11} не рассматриваются, так как в строках f_3 и f_5 были бы проставлены все нули, а строки f_4, f_{10} и f_{11} повторили бы строки f_2, f_{12} и f_{13} соответственно.

Таблица 13

Функция	Класс				
	K_0	K_1	K_\perp	K_\subset	K_M
<i>a</i> f_0	0	1	0	1	0
<i>b</i> f_1	0	0	1	1	0
<i>c</i> f_2	0	1	1	1	1
<i>d</i> f_6	0	1	0	1	1
<i>e</i> f_7	0	0	1	1	0
<i>g</i> f_8	1	1	1	1	1
<i>k</i> f_9	1	0	0	1	1
<i>m</i> f_{12}	1	1	0	0	1
<i>n</i> f_{13}	1	0	1	1	1
<i>p</i> f_{14}	1	1	1	1	1
<i>r</i> f_{15}	1	0	0	1	0

В соответствии с методом Петрика для получения всех покрытий столбцов строками этой таблицы составим мультипликативную-аддитивную форму и преобразуем её в аддитивно-мультипликативную:

$$\begin{aligned}
 & (g \vee k \vee m \vee n \vee p \vee r) (a \vee c \vee d \vee g \vee m \vee p) (b \vee c \vee e \vee g \vee n \vee p) \& \\
 & \& (a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee g \vee k \vee n \vee p \vee r) (c \vee d \vee g \vee k \vee m \vee n \vee p) = \\
 & = (g \vee ak \vee kc \vee kd \vee m \vee an \vee cn \vee dn \vee p \vee ar \vee cr \vee rd) \& \\
 & \& (b \vee c \vee e \vee g \vee n \vee p) (c \vee d \vee g \vee k \vee m \vee n \vee p) = \\
 & = (g \vee ak \vee kc \vee kd \vee m \vee an \vee cn \vee dn \vee p \vee ar \vee cr \vee rd) \& \\
 & \& (c \vee g \vee n \vee p \vee bd \vee bk \vee bm \vee ed \vee ek \vee em) = \\
 & = g \vee p \vee abk \vee kc \vee an \vee cn \vee dn \vee ake \vee kbd \vee ked \vee \\
 & \vee mc \vee mn \vee bm \vee me \vee cr \vee rbd \vee red = \\
 & = g \vee p \vee kc \vee an \vee cn \vee dn \vee mc \vee mn \vee bm \vee me \vee \\
 & \vee cr \vee abk \vee ake \vee kbd \vee ked \vee rbd \vee red.
 \end{aligned}$$

Каждое из полученных покрытий π_i порождает базис B_i в двузначной логике:

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= \{g\} \leftrightarrow B_1 = \{\circ\} - \text{базис Вебба}; \\
 \pi_2 &= \{p\} \leftrightarrow B_2 = \{|\} - \text{базис Шеффера}; \\
 \pi_3 &= \{k, c\} \leftrightarrow B_3 = \{\mapsto, \sim\}; \\
 \pi_4 &= \{a, n\} \leftrightarrow B_4 = \{\rightarrow, 0\} - \text{импликативный базис}; \\
 \pi_5 &= \{c, n\} \leftrightarrow B_5 = \{\rightarrow, \lrcorner\}; \\
 \pi_6 &= \{d, n\} \leftrightarrow B_6 = \{\rightarrow, \oplus\}; \\
 \pi_7 &= \{m, c\} \leftrightarrow B_7 = \{\mapsto, \bar{\quad}\} - \text{коимпликативный базис}; \\
 \pi_8 &= \{m, n\} \leftrightarrow B_8 = \{\rightarrow, \bar{\quad}\} - \text{импликативный базис}; \\
 \pi_9 &= \{b, m\} \leftrightarrow B_9 = \{\&, \bar{\quad}\} - \text{конъюнктивный базис Буля}; \\
 \pi_{10} &= \{m, e\} \leftrightarrow B_{10} = \{\vee, \bar{\quad}\} - \text{дизъюнктивный базис Буля}; \\
 \pi_{11} &= \{c, r\} \leftrightarrow B_{11} = \{\mapsto, 1\} - \text{коимпликативный базис}; \\
 \pi_{12} &= \{a, b, k\} \leftrightarrow B_{12} = \{\sim, \&, 0\}; \\
 \pi_{13} &= \{a, k, e\} \leftrightarrow B_{13} = \{\sim, \vee, 0\}; \\
 \pi_{14} &= \{k, b, d\} \leftrightarrow B_{14} = \{\oplus, \&, \sim\}; \\
 \pi_{15} &= \{k, e, d\} \leftrightarrow B_{15} = \{\oplus, \vee, \sim\}; \\
 \pi_{16} &= \{r, b, d\} \leftrightarrow B_{16} = \{\oplus, \&, 1\} - \text{базис Жегалкина}; \\
 \pi_{17} &= \{r, e, d\} \leftrightarrow B_{17} = \{\oplus, \vee, 1\}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что любую булеву функцию можно представить в виде суперпозиции любого из полученных базисов.

Техническая реализация булевых функций, вошедших в базисы, может быть основана на использовании различных физических явлений. Так, например, магнитные явления используются для реализации импликации и коимпликации, явления в полупроводниках – для реализации функций Шеффера и Вебба.

Задачи и упражнения

1. Установить, сохраняет ли константы 0 и 1, является ли линейной, самодвойственной и монотонной булева функция:

а) $f(x_1, x_2) = x_1 \vee \bar{x}_2$;

г) $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_1 x_3$;

д) $f(x_1) = \bar{x}_1$;

в) $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2$;

е) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$.

2. Определить, является ли полная система S булевых функций, и образует ли она базис в двузначной логике:

а) $S = \{x_1, x_1 x_2 \vee \bar{x}_3, x_1 \vee x_2\}$; г) $S = \{x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3, x_1 x_2 \vee x_2 x_3\}$;

б) $S = \{x_1 x_2, x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3, \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2\}$; д) $S = \{\bar{x}_1 \vee x_2, x_1 x_2 x_3, \bar{x}_1\}$;

в) $S = \{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1, \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3\}$; е) $S = \{x_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1\}$.

8. ВЗВЕШЕННЫЙ ГРАФ И ЕГО МАТРИЧНОЕ ЗАДАНИЕ

Ранее понятие графа G было определено как совокупность множества вершин V и множества дуг $U \subset V^2$:

$$G = \langle V, U \rangle.$$

Введём некоторые дополнительные понятия. Говорят, что дуга $u \in U$, соединённая с вершиной $v \in V$, *инцидентна вершине* v , а вершина v при этом *коинцидентна дуге* u . В дуге (v_i, v_j) вершины v_i и v_j называются *граничными вершинами*, причём v_i – её *начало*, а v_j – *конец*.

При удалении дуг из графа $G = \langle V, U \rangle$ получают *частичный граф* G' графа G :

$$G' = \langle V, U' \rangle, \quad U' \subset U.$$

Исключая из графа G вершины и инцидентные им дуги, получают *подграф* G'' графа G :

$$G'' = \langle V'', U'' \rangle, \quad V'' \subset V, \quad U'' \subset U.$$

В результате удаления дуг из подграфа G'' получают *частичный подграф* \tilde{G} графа G :

$$\tilde{G} = \langle V'', \tilde{U} \rangle, \quad \tilde{U} \subset U''.$$

Например, для графа G , изображённого на рис. 18, а, частичный граф G' , подграф G'' и частичный подграф \tilde{G} представлены на рис. 18, б, в и г соответственно.

Две дуги u_α и u_β графа называются *смежными дугами*, если они инцидентны одной и той же вершине. Две вершины v_a и v_b графа называются *смежными вершинами*, если они соединены одной и той же дугой.

Определим понятие взвешенного графа. Для этого сопоставим каждой вершине v_i из множества вершин $V = \{v_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ графа $G = \langle V, U \rangle$ вес w_j из множества весов $W = \{w_j / j = 1, 2, \dots, m\}$. В результате получим множество *взвешенных вершин* $\{V, W\}$. При этом необязательно, чтобы веса различных вершин были различными.

Сопоставим каждой дуге u_i из множества дуг $U = \{u_i / i = 1, 2, \dots, k\}$ графа $G = \langle V, U \rangle$ вес p_j из множества весов $P = \{p_j / j = 1, 2, \dots, l\}$. В результате получим множество *взвешенных дуг* $\{U, P\}$. При этом необязательно, чтобы веса различных дуг были различными.

Определённые выше множества взвешенных вершин и взвешенных дуг определяют в совокупности *взвешенный граф* G :

$$G = \langle \{V, W\}, \{U, P\} \rangle.$$

При задании графов матричным способом используют два типа матриц: матрицы инциденций и матрицы смежности.

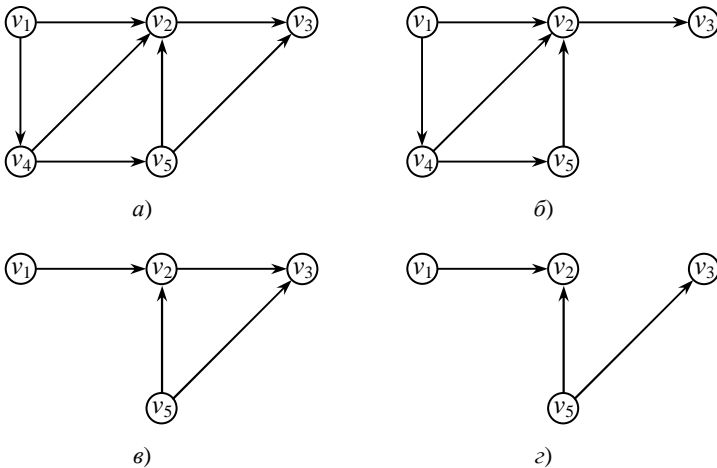


Рис. 18

Элемент матрицы инцидентий $A(G) = [a_{ij}]_{m \times n}$ графа G , содержащего n вершин и m дуг, определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_j \text{ является началом дуги } u_i; \\ -1, & \text{если вершина } v_j \text{ – конец дуги } u_i; \\ 0, & \text{если вершина } v_j \text{ не коинцидентна дуге } u_i. \end{cases}$$

Если граф G имеет петли, т.е. дуги вида (v_i, v_i) , некоторые элементы матрицы $A(G)$ одновременно должны быть равны и 1, и -1 , что приводит к неоднозначности. Поэтому для задания графа G с петлями матрицу инцидентий «расщепляют» на две матрицы: начальную матрицу инцидентий $A^+(G) = [a_{ij}^+]_{m \times n}$, в которой элемент

$$a_{ij}^+ = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_j \text{ – начало дуги } u_i; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и конечную матрицу инцидентий $A^-(G) = [a_{ij}^-]_{m \times n}$, где элемент

$$a_{ij}^- = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_j \text{ – конец дуги } u_i; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для графа без петель справедливо равенство $A(G) = A^+(G) - A^-(G)$. Заметим, что матрицы $A(G)$, $A^+(G)$ и $A^-(G)$ описывают граф G без учёта весов его вершин и дуг.

Зададим веса вершин графа G в виде матрицы-столбца $W(G)$, а веса дуг – в виде диагональной матрицы $P(G)$:

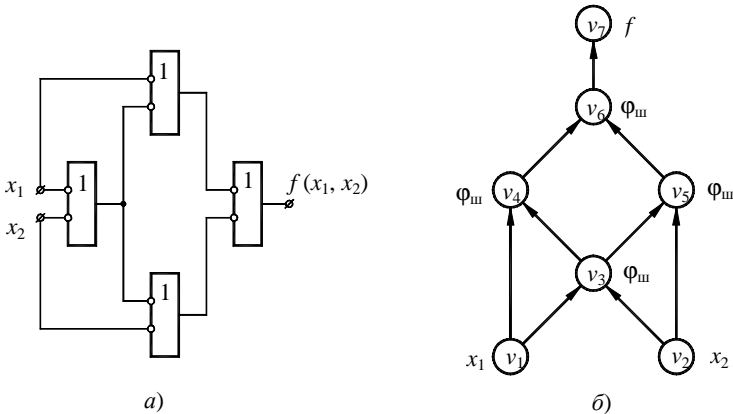


Рис. 19

$$W(G) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad P(G) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицы $A^+(G)$, $A^-(G)$, $W(G)$ и $P(G)$ полностью описывают взвешенный граф $G = \langle \{V, W\}, \{U, P\} \rangle$.

Рассмотрим логическую схему (рис. 19, а), реализующую функцию сложения по модулю два $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ в базисе Шеффера $B = \{\varphi_{\text{ш}}\}$, где $\varphi_{\text{ш}}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ – одноимённая функция. Эта схема содержит четыре базисных элемента, каждый из которых представляет функцию $\varphi_{\text{ш}}$, а соответствующий ей взвешенный граф $G = \langle \{V, W\}, U \rangle$ изображён на рис. 19, б.

Вершины v_1 и v_2 графа взвешены переменными x_1 и x_2 соответственно, каждая из вершин v_3, v_4, v_5 и v_6 – функциональной переменной $\varphi_{\text{ш}}$, а вершина v_7 – функциональной переменной f . Упомянутый взвешенный граф G задаётся с использованием матрицы инцидентий следующим образом:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad W(G) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi_{\text{ш}} \\ \varphi_{\text{ш}} \\ \varphi_{\text{ш}} \\ \varphi_{\text{ш}} \\ f \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы смежности $S(G) = [s_{ij}]_{n \times n}$ графа G , содержащего n вершин и m дуг, определяется следующим образом:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in U; \\ 0, & \text{если } (v_i, v_j) \notin U, \end{cases}$$

а если дуги этого графа взвешены, то:

$$s_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, & \text{если дуга } (v_i, v_j) \in U \text{ имеет вес } p_{ij}; \\ 0, & \text{если } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases}$$

Матрицы $S(G)$ и $W(G)$ полностью описывают взвешенный граф $G = \langle \{V, W\}, \{U, P\} \rangle$. Например, граф $G = \langle \{V, W\}, U \rangle$ (рис. 19, б) с помощью матрицы смежности следует задать так:

$$S(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W(G) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \Phi_{\text{ш}} \\ \Phi_{\text{ш}} \\ \Phi_{\text{ш}} \\ \Phi_{\text{ш}} \\ f \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все ненулевые элементы матрицы $S(G)$ равны 1, так как дуги этого графа не взвешены.

Между графами $G = \langle V, U \rangle$ и $G' = \langle V', U' \rangle$ имеет место *изоморфизм*, если существует такое взаимно-однозначное соответствие между вершинами из множеств V и V' , что вершины v_i и v_j соединены дугой (v_i, v_j) в графе G тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины v'_i и v'_j соединены дугой (v'_i, v'_j) в графе G' . Графы, между которыми имеет место изоморфизм, называются *изоморфными графами*. Например, изоморфными графами являются графы, изображённые на рис. 20, а и б.

Матрицы инцидентий и смежности задают графы с точностью до изоморфизма.

С учётом обозначения через $(A^+)^T$ транспонированной матрицы A^+ , связь между матрицами инцидентий и смежности, а также матрицей весов дуг может быть представлена следующим равенством:

$$S = (A^+)^T \times P \times (A^-).$$

При помощи матрицы смежности можно задавать и неориентированные графы. Так, например, граф на рис. 19, б без учёта ориентации его дуг (назовём его графом G) будет описывать матрица смежности:

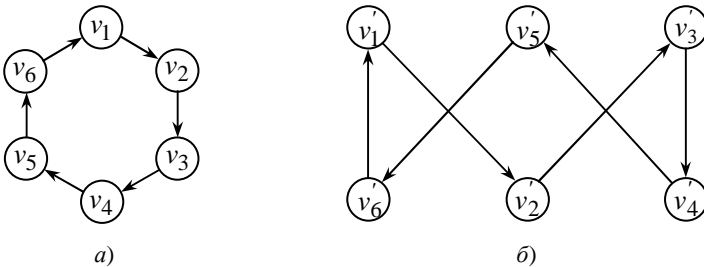


Рис. 20

$$S(G) = \begin{array}{c|ccccccc|c} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & v_2 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & v_3 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & v_4 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & v_5 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & v_6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & v_7 \\ \hline \end{array} .$$

Большие неориентированные графы, матрицы смежности которых слабо заполнены единицами, можно задавать более эффективно с точки зрения затрачиваемого объёма информации.

Неориентированный граф $G = \langle V, U \rangle$ без петель представим матрицей $Q_0(G)$, полученной из матрицы смежности $S(G)$ путём заполнения главной диагонали единицами:

$$Q_0(G) = \begin{array}{c|ccccccc|c} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & v_2 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & v_3 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & v_4 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & v_5 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & v_6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & v_7 \\ \hline \end{array} .$$

Минимизация затрачиваемого объёма информации при задании неориентированного графа G сводится к поиску минимальных покрытий. При этом находят минимальное покрытие столбцов строками матрицы $Q_0(G)$ и удаляют недиагональные единичные элементы в строках и столбцах, соответствующих элементам этого покрытия. Затем находят минимальное покрытие полученной матрицы $Q_1(G)$ и удаляют соответствующие недиагональные элементы и т.д. до тех пор, пока все недиагональные элементы не будут равны нулю.

Для уменьшения трудоёмкости поиска минимального покрытия матрицы $Q_i(G)$ из неё исключают сначала поглощаемые столбцы, а затем поглощаемые строки. При этом *столбец α поглощает столбец β* , если множество строк M_β , покрывающих столбец β , содержит в себе множество строк M_α , покрывающих столбец α , т.е. $M_\alpha \subset M_\beta$. *Строка α поглощает строку β* , если множество столбцов M_α , покрываемых строкой α , содержит в себе множество столбцов M_β , покрываемых строкой β ($M_\beta \subset M_\alpha$).

Применительно к нашему примеру в матрице $Q_0(G)$ столбец v_1 поглощает столбцы v_3 и v_4 , столбцы v_2 и v_7 поглощают столбцы v_5 и v_6 соответственно. С учётом поглощённых столбцов, строка v_3 поглощает строки v_1, v_2, v_4 и v_5 , а каждая из строк v_6 и v_7 может поглотить другую строку –

пусть, для определённости, строка v_6 поглощает строку v_7 . Выделение поглощаемых столбцов и строк выполним на копии матрицы $Q_0(G)$:

$$Q'_0(G) = \begin{array}{c|ccccccc|c} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & v_2 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & v_3 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & v_4 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & v_5 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & v_6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & v_7 \\ \hline \end{array}.$$

Вычеркнув из матрицы $Q'_0(G)$ поглощаемые столбцы и строки, получим матрицу:

$$Q''_0(G) = \left\| \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_7 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} v_3 \\ v_6 \end{array}.$$

Заметим, что покрытие $\{v_3, v_6\}$ матрицы $Q''_0(G)$ является минимальным покрытием матрицы $Q_0(G)$. Это покрытие порождает две окрестности единичного радиуса $O(v_3) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ и $O(v_6) = \{v_4, v_5, v_7\}$.

В матрице $Q_0(G)$ заменим недиагональные единичные элементы в строках и столбцах, соответствующих элементам её минимального покрытия $\{v_3, v_6\}$, на нули, а затем, исключив строки и столбцы, не содержащие недиагональных единичных элементов, получим матрицу $Q_1(G)$:

$$Q_1(G) = \left\| \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_4 & v_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}.$$

С матрицей $Q_1(G)$ проведём манипуляции, аналогичные тем, которые были выполнены с матрицей $Q_0(G)$, за исключением поиска окрестностей единичного радиуса для элементов минимального покрытия.

Покажем на копии матрицы $Q_1(G)$, что столбцы v_1 и v_2 поглощают столбцы v_4 и v_5 соответственно, после чего строки v_1 и v_2 поглощают строки v_4 и v_5 соответственно:

$$Q'_1(G) = \left\| \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_4 & v_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}.$$

Исключив из матрицы $Q'_1(G)$ поглощаемые столбцы и строки, получим матрицу $Q''_1(G)$:

$$Q''_1(G) = \begin{vmatrix} & v_1 & v_2 \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{vmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix},$$

единственное покрытие $\{v_1, v_2\}$ которой является минимальным покрытием матрицы $Q_1(G)$.

Заменяя в матрице $Q_1(G)$ нулями недиагональные единичные элементы в строках и столбцах, соответствующих элементам минимального покрытия $\{v_1, v_2\}$, и исключив затем из неё строки и столбцы, не содержащие недиагональных единичных элементов, получим пустую матрицу $Q_2(G)$, что свидетельствует об окончании процесса минимизации.

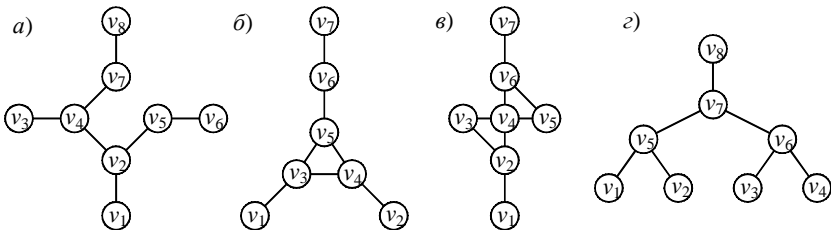
Наконец, сформируем результирующую матрицу $\tilde{Q}(G)$, которая задаёт рассматриваемый граф G с минимально затрачиваемым объёмом информации. При этом строкам матрицы $\tilde{Q}(G)$ сопоставим элементы минимальных покрытий $\{v_3, v_6\}$ и $\{v_1, v_2\}$, а столбцам – элементы объединения окрестностей $O(v_3)$ и $O(v_6)$ элементов первого покрытия:

$$\tilde{Q}(G) = \begin{vmatrix} & v_1 & v_2 & v_4 & v_5 & v_7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{vmatrix} \begin{matrix} v_3 \\ v_6 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix}.$$

Заметим, что для задания рассматриваемого графа G матрицей $\tilde{Q}(G)$ необходимо 20 бит информации вместо 49 бит при задании этого же графа матрицей смежности $S(G)$.

Задачи и упражнения

1. Получить матрицу $\tilde{Q}(G)$, которая минимизирует затрачиваемый объём информации при задании неориентированного графа G :



9. СВЯЗНОСТЬ И СИЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

Понятия связности и сильной связности относятся к неориентированным и ориентированным графам соответственно.

Рассмотрим неориентированный граф G и его свойство быть связным графом.

Цепью в неориентированном графе G называется такая последовательность его рёбер $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$, в которой каждая пара соседних элементов имеет общую вершину. Некоторая цепь, соединяющая вершины v_i и v_j , может быть представлена в следующем виде:

$$(\{v_i, v_{x_1}\}, \{v_{x_1}, v_{x_2}\}, \{v_{x_2}, v_{x_3}\}, \dots, \{v_{x_{n-1}}, v_j\}).$$

При этом вершины v_i и v_j называются *концевыми вершинами цепи*, из них v_i – *начальная*, а v_j – *конечная вершина*. Число рёбер в цепи, соединяющей вершины v_i и v_j , называется *длиной цепи* и обозначается $l(v_i, v_j)$. Цепь называется *составной цепью*, если в ней повторяется хотя бы одно ребро; *сложной цепью*, если в ней повторяется хотя бы одна вершина, и *простой цепью* – в противном случае.

Циклом называется цепь, концевые вершины которой совпадают. Любая вершина v цикла имеет степень $s(v) \geq 2$. Цикл, в котором степень каждой вершины равна двум, называется *простым циклом*, в противном случае – *сложным циклом*.

Рассмотрим неориентированный граф, изображённый на рис. 20. В нём, например, цепь (a, b, c, d) соединяет вершины 1 и 5, имеет длину 4 и может быть представлена в виде $(\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\})$. Она является простой цепью, имеет концевые вершины 1 и 5, из них 1 – начальная, а 5 – конечная вершина. Цепь (a, b, c, d, e) является сложной цепью и простым циклом.

Неориентированный граф G называется *связным графом*, если любая пара его вершин соединена цепью. Максимальный по включению вершин связный подграф графа G называется его *компонентой связности*. Граф G называется *несвязным графом*, если он имеет более одной компоненты связности. Например, граф, состоящий из двух несмежных вершин, имеет две компоненты связности и является несвязным графом.

Рассмотрим задачу определения числа компонент связности неориентированного графа.

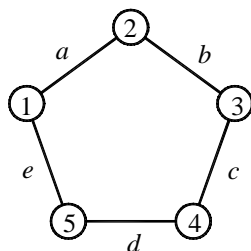


Рис. 20

Пусть $S(G)$ – такая матрица смежности графа G , что её произвольный элемент определяется следующим образом:

$$s_{ij} = \begin{cases} \text{символ ребра, соединяющего вершины } v_i, v_j; \\ \text{пустой символ, если вершины } v_i, v_j \text{ не смежны.} \end{cases}$$

При возведении матрицы $S(G)$ в степень умножение будем понимать как конкатенацию двух строк символов – присоединение второй строки символов к первой, например:

$$\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle ab \rangle, \langle b \rangle \cdot \langle a \rangle = \langle ba \rangle, \langle ab \rangle \cdot \langle c \rangle = \langle abc \rangle.$$

Заметим, что если среди двух сомножителей окажется хотя бы одна пустая строка символов, то произведение будет пустой строкой.

Под сложением будем понимать объединение множеств строк символов, например:

$$\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle b \rangle + \langle a \rangle = \{ \langle a \rangle, \langle b \rangle \}, \langle ab \rangle + \langle c \rangle = \{ \langle ab \rangle, \langle c \rangle \}.$$

При этом пустые строки символов не включаются в результат объединения.

Для таких операций умножения и сложения элемент матрицы $S^n(G)$ на пересечении i -й строки и j -го столбца будет представлять собой множество цепей длиной n , соединяющих вершины v_i и v_j .

Рассмотрим распределение цепей в неориентированном графе G , представленном на рис. 20. Матрица смежности этого графа имеет следующий вид:

$$S(G) = \begin{array}{ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline & & a & & & e & 1 \\ \hline a & & & b & & & 2 \\ \hline & & b & & c & & 3 \\ \hline & & & c & & d & 4 \\ \hline e & & & & d & & 5 \\ \hline \end{array}$$

Заметим, что матрица $S(G)$ характеризует распределение рёбер (цепей единичной длины) в графе G . Для определения цепей длиной 2 графа G возведём эту матрицу в квадрат:

$$S^2(G) = \begin{array}{ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline aa ee & & & ab & ed & & 1 \\ \hline & aa bb & & & bc & ae & 2 \\ \hline ba & & bb cc & & & cd & 3 \\ \hline de & cb & & cc dd & & & 4 \\ \hline & ea & dc & & ee dd & & 5 \\ \hline \end{array}$$

Суммируя матрицы $S(G)$ и $S^2(G)$, получим матрицу:

$$S(G) + S^2(G) = \begin{array}{ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline & aa\ ee & a & ab & ed & e & 1 \\ \hline & a & aa\ bb & b & bc & ae & 2 \\ \hline & ba & b & bb\ cc & c & cd & 3 \\ \hline & de & cb & c & cc\ dd & d & 4 \\ \hline & e & ea & dc & d & ee\ dd & 5 \\ \hline \end{array}$$

в которой отсутствуют пустые элементы, что означает существование цепи длиной 1 или 2 между любой парой вершин графа G . Следовательно, рассматриваемый граф является связным графом, т.е. имеет одну компоненту связности.

Понятие цепи используется при изучении метрических свойств неориентированного графа.

Длина кратчайшей цепи из всех цепей, соединяющих вершины v_i и v_j , называется *расстоянием между вершинами* v_i и v_j и обозначается $r(v_i, v_j)$:

$$r(v_i, v_j) = \min_k l_k(v_i, v_j),$$

где $l_k(v_i, v_j)$ – длина k -й цепи, соединяющей вершины v_i и v_j .

Введённая на множестве пар вершин (v_i, v_j) графа G функция $r(v_i, v_j)$ удовлетворяет трём аксиомам:

$$\begin{aligned} (\forall v_i, v_j \in V) (r(v_i, v_j) = 0) &\leftrightarrow v_i = v_j, \\ (\forall v_i, v_j \in V) (r(v_i, v_j) &= r(v_j, v_i)), \\ (\forall v_i, v_j, v_k \in V) (r(v_i, v_j) &+ r(v_j, v_k) \geq r(v_i, v_k)) \end{aligned}$$

и определяет его метрику.

Последнюю аксиому обычно называют *неравенством треугольника*.

Максимальное расстояние между вершинами графа G называется *диаметром графа* G и обозначается $d(G)$:

$$d(G) = \max_{i,j} r(v_i, v_j).$$

Матрица называется *k -клеточной*, если она имеет клеточный вид с k клетками или преобразуется к такому виду в результате перестановки строк и соответствующей перестановки столбцов. Каждая клетка матрицы клеточного вида не содержит пустых элементов, за исключением, быть может, элементов её главной диагонали.

Теорема. *Граф G состоит из k компонент связности тогда и только тогда, когда его матрица достижимости*

$$D(G) = \sum_{i=1}^{d(G)} [S(G)]^i,$$

где $S(G)$ – матрица смежности графа G ; $d(G)$ – диаметр графа G ; является k -клеточной матрицей. ■

Отметим, что граф G на рис. 20 имеет диаметр $d(G) = 2$, а матрица $S(G) + S^2(G)$ является его матрицей достижимости. Эта матрица одноклеточная и, следовательно, граф G имеет одну компоненту связности, т.е. является связным графом.

Рассмотрим далее ориентированный граф G и его свойство быть сильно связным.

Путь в ориентированном графе G называется такая последовательность его дуг $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, что в каждой паре её соседних элементов конец первой из дуг совпадает с началом второй дуги. Некоторый путь, ведущий из вершины v_i в вершину v_j , может быть представлен в виде следующей последовательности:

$$((v_i, v_{x_1}), (v_{x_1}, v_{x_2}), (v_{x_2}, v_{x_3}), \dots, (v_{x_n}, v_j)).$$

При этом вершины v_i и v_j называются *концевыми вершинами пути*, из них v_i – *начальная*, а v_j – *конечная вершина пути*. Число дуг в пути, ведущем из вершины v_i в вершину v_j , называется *длиной пути* и обозначается $l(v_i, v_j)$. Путь называется *составным путём*, если в нём повторяется хотя бы одна дуга; *сложным путём*, если в нём повторяется хотя бы одна вершина, и *простым путём* – в противном случае.

Контуром называется путь, концевые вершины которого совпадают. Каждая вершина v контура имеет степень $s(v) \geq 2$. Контур, в котором степень любой вершины равна двум, называется *простым контуром*, в противном случае – *сложным контуром*.

Рассмотрим ориентированный граф, изображённый на рис. 21. В нём, например, путь (e, n, c) ведёт из вершины 1 в вершину 6, имеет длину 3 и может быть представлен в виде $((1, 2), (2, 5), (5, 6))$. Этот путь простой, имеет концевые вершины 1 и 6, из них 1 – начальная, а 6 – конечная

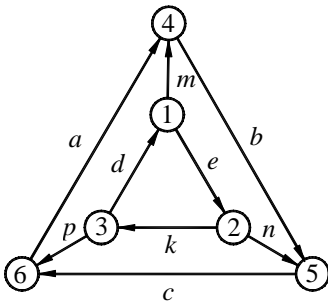


Рис. 21

вершина. Путь (d, e, k, d) является составным путём, а сложный путь (a, b, c) – простым контуром.

Ориентированный граф G называется *сильно связным графом*, если любая пара его вершин соединена путём. Максимальный по включению вершин сильно связный подграф графа называется его *компонентой сильной связности*. Граф называется *несильно связным графом*, если он имеет более одной компоненты сильной связности.

Задача определения числа компонент сильной связности ориентированного графа аналогична рассмотренной выше задаче определения числа компонент связности неориентированного графа. Решим её для графа G , представленного на рис. 21.

Матрица смежности этого графа имеет следующий вид:

$$S(G) = \begin{array}{cccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline & & e & & m & & & 1 \\ & & & k & & n & & 2 \\ & d & & & & & p & 3 \\ & & & & & b & & 4 \\ & & & & & & c & 5 \\ & & & & a & & & 6 \\ \hline \end{array}$$

Получим матрицу достижимости графа G . Поскольку диаметр $d(G)$ этого графа равен 3, матрица достижимости $D(G)$ будет представлять собой сумму $\sum_{i=1}^3 [S(G)]^i$ и выглядеть следующим образом:

$$D(G) = \begin{array}{cccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline & ekd & e & ek & m & en mb & ekp enc mbc & 1 \\ & kd & kde & k & kdm kpa nca & n & kp nc & 2 \\ & d & de & dek & dm pa & den dmb pab & p & 3 \\ & & & & bca & b & bc & 4 \\ & & & & ca & cab & c & 5 \\ & & & & a & ab & abc & 6 \\ \hline \end{array}$$

Заметим, что компонентам сильной связности в матрице достижимости ориентированного графа соответствуют квадратные подматрицы, лежащие на её главной диагонали. Каждый элемент такой подматрицы, за исключением, быть может, элементов главной диагонали, является непустой строкой символов. При этом в матрице достижимости могут существовать непустые элементы и вне упомянутых подматриц. Такие элементы характеризуют связи между компонентами сильной связности.

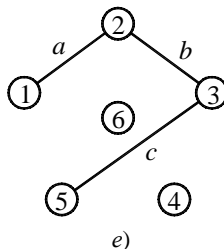
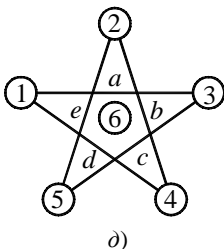
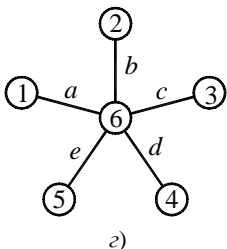
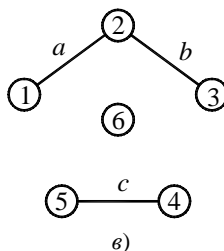
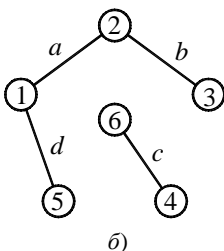
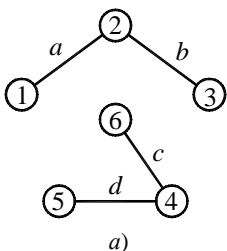
В нашем примере матрица $D(G)$ имеет на главной диагонали две клетки. Они соответствуют компонентам сильной связности графа G с множествами вершин $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5, 6\}$. Непустая область $(1, 4) - (3, 6)$ матрицы характеризует существующие пути из вершин первой компоненты сильной связности в вершины второй компоненты.

Задачи и упражнения

1. Установить длину, множество конечных вершин, начальную и конечную вершину, а также тип (простая цепь, сложная цепь, составная цепь, простой цикл, сложный цикл) цепи:

- а) $\{(2, 6), \{6, 5\}, \{5, 4\}, \{4, 3\}\}$;
- б) $\{(3, 2), \{2, 1\}, \{1, 6\}, \{6, 2\}, \{2, 5\}\}$;
- в) $\{(1, 6), \{6, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 6\}, \{6, 4\}, \{4, 5\}\}$;
- г) $\{(4, 5), \{5, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$;
- д) $\{(3, 2), \{2, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 3\}\}$.

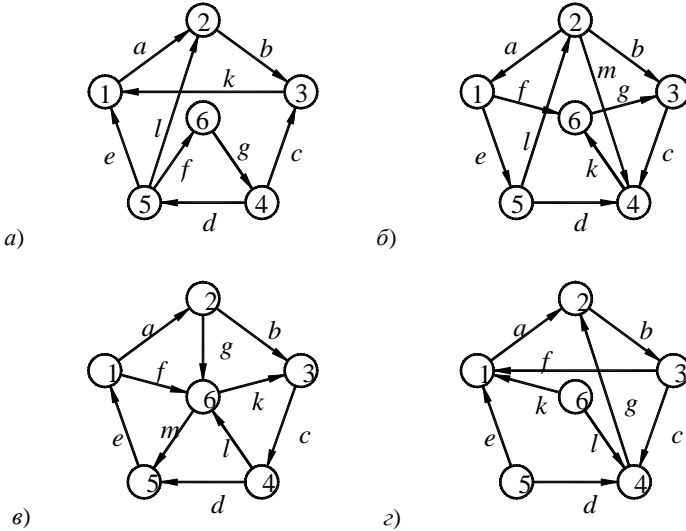
2. Определить диаметр $d(G)$, матрицу достижимости $D(G)$, число компонент связности $k(G)$ и множества вершин, образующих компоненты связности неориентированного графа G :



3. Установить длину, множество конечных вершин, начальную и конечную вершину, а также тип (простой путь, сложный путь, составной путь, простой контур, сложный контур) пути:

- а) $((1, 3), (3, 4), (4, 6), (6, 5), (5, 2))$;
- б) $((4, 6), (6, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 6), (6, 3))$;
- в) $((2, 3), (3, 4), (4, 6), (6, 3), (3, 4))$;
- г) $((3, 2), (2, 1), (1, 6), (6, 4), (4, 3))$;
- д) $((5, 1), (1, 3), (3, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 5))$.

4. Определить диаметр $d(G)$, матрицу достижимости $D(G)$, число компонент сильной связности $k(G)$ и множества вершин, образующих компоненты сильной связности ориентированного графа G :



10. ЦИКЛОМАТИКА

Множество $C(G)$ всех циклов графа G образует пространство, называемое *пространством циклов графа G* . При этом для любых двух циклов C_i и C_j из множества $C(G)$ таких, что $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, существует некоторый третий цикл $(C_i \oplus C_j) \in C(G)$, где символ \oplus обозначает поразрядное сложение по модулю два.

Базисом циклов графа G называется всякое множество простых циклов $B(G)$, порождающее пространство циклов этого графа. Любой цикл пространства циклов графа G можно представить в виде линейной комбинации базисных циклов. Если пространство циклов графа G имеет базис $B(G)$, состоящий из n циклов B_1, B_2, \dots, B_n , то это пространство называется *n -мерным пространством*.

Деревом называется связный граф G , не содержащий ни одного цикла. *Остовный подграф* графа G – это подграф, содержащий все вершины графа G . *Остовом $D(G)$ графа G* называется остовный подграф графа G , являющийся деревом. *Хордой остова связного графа G* называется всякое ребро графа G , не принадлежащее его остову.

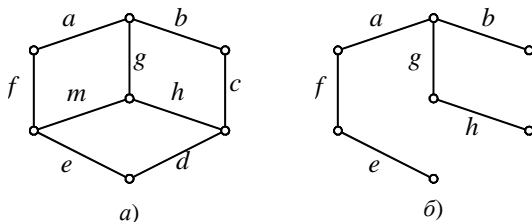


Рис. 23

Например, на рис. 23, *a* изображён связный граф G , в качестве остова которого может выступать дерево, представленное на рис. 23, *б*. При этом хордами остова $D(G)$ являются рёбра c , d и m .

Цикломатическим числом $\nu(G)$ графа G называется число хорд любого остова графа G . Если граф G , имеющий p вершин и q рёбер, связан, то его цикломатическое число $\nu(G)$ определяется выражением

$$\nu(G) = q - p + 1.$$

Если граф G содержит k компонент связности, то его цикломатическое число $\nu(G)$ можно вычислить по более общей формуле

$$\nu(G) = q - p + k.$$

Цикломатическое число графа G , состоящего из k компонент связности G_1, G_2, \dots, G_k , может быть определено как сумма цикломатических чисел этих компонент:

$$\nu(G) = \sum_{i=1}^k \nu(G_i).$$

Заметим, что цикломатическое число $\nu(G)$ выбранного в качестве примера связного графа G (рис. 23, *a*), имеющего девять рёбер и семь вершин, равно трём.

Теорема (Эйлера). Число базисных циклов графа G постоянно и равно его цикломатическому числу $\nu(G)$. ■

Матрица, представляющая базис циклов графа G относительно некоторого остова $D(G)$, называется *базисной цикломатической матрицей* $B(G)$. При этом каждый из $\nu(G)$ базисных циклов матрицы $B(G)$ образуется некоторой хордой и соответствующими ей рёбрами остова $D(G)$.

В нашем случае базисная цикломатическая матрица $B(G)$ графа G (рис. 23, *a*) относительно остова $D(G)$ (рис. 23, *б*) будет содержать три базисных цикла:

$$B(G) = \left| \begin{array}{ccc|cccc} & \text{хорды} & & \text{рёбра остова} & & & & & \\ & c & d & m & a & b & e & f & g & h \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array}$$

Заметим, что эта матрица задаёт простые циклы (b, c, h, g) , (a, f, e, d, h, g) и (a, f, m, g) графа G (см. рис. 23, а).

Для исследования циклов в графе используют прямоугольную *цикломатическую матрицу* $C(G)$, в которой каждому из $(2^{v(G)} - 1)$ циклов графа G сопоставляется отдельная строка, а каждому из рёбер – отдельный столбец. Некоторый элемент c_{ij} цикломатической матрицы $C(G)$ определяется следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-е ребро входит в } i\text{-й цикл;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Включив в цикломатическую матрицу $v(G)$ базисных циклов, а также $(2^{v(G)} - v(G) - 1)$ их различных линейных комбинаций, можно получить всё множество циклов графа G .

В нашем примере матрица $C(G)$ будет содержать семь строк, которые представляют три базисных цикла и четыре возможные линейные комбинации этих базисных циклов, полученные в результате поразрядного сложения по модулю два:

$$C(G) = \left| \begin{array}{ccc|cccc} & \text{хорды} & & \text{рёбра остова} & & & & & \\ & c & d & m & a & b & e & f & g & h \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_1 \oplus B_2 \\ B_1 \oplus B_3 \\ B_2 \oplus B_3 \\ B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \end{array}$$

После сортировки столбцов этой матрицы в алфавитном порядке, она примет свой окончательный вид:

$$C(G) = \left| \begin{array}{ccccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h & m \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{array}$$

Изучая свойства циклов какого-либо графа, можно определить принадлежность этого графа к определённому классу, например к классу двудольных графов.

Теорема (Кёнига). *Неориентированный граф G является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют чётную длину (чётны).* ■

Так, граф G на рис. 23, *a* является двудольным графом, поскольку все семь его циклов чётны. Этот же граф на рис. 24 изображён в традиционном для двудольных графов виде, когда множество вершин разбито на два подмножества. Заметим, что вершины любого ребра графа G размещены в разных его долях.

Если в двудольном неориентированном графе G каждая вершина из одного множества вершин V_1 соединена ребром с каждой вершиной из другого множества вершин V_2 , то граф G называется *полным двудольным графом* и обозначается $K_{m,n}$, где m – число вершин в множестве V_1 , а n – число вершин в множестве V_2 . Заметим, что граф $K_{m,n}$ имеет всего $(m+n)$ вершин и mn рёбер.

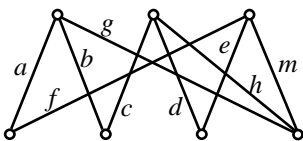


Рис. 24

Полный двудольный граф $K_{1,n}$ называется *звёздным графом* (звездой), он не содержит ни одного цикла и является деревом. *Колесом* W_n при $n \geq 3$ называется звезда $K_{1,n-1}$, у которой вершины со степенью, равной 1, образуют простой цикл.

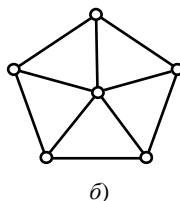
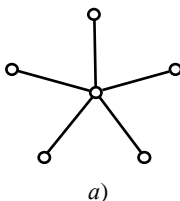


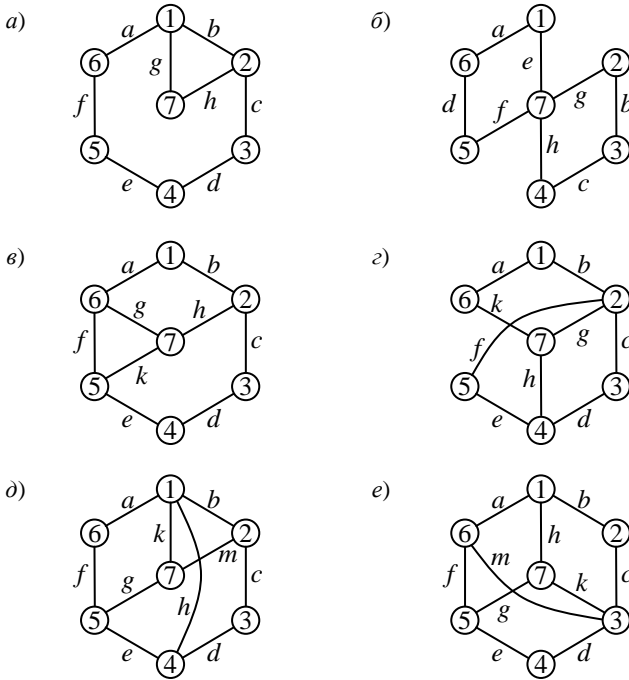
Рис. 25

Например, на рис. 25, *a* и *б* изображены звезда $K_{1,5}$ и колесо W_6 соответственно.

Задачи и упражнения

1. Определить цикломатическое число $\nu(G)$, выбрать остов $D(G)$ и построить соответствующую ему базисную цикломатическую матрицу $B(G)$, а также построить цикломатическую матрицу $C(G)$ представленного ниже графа G . Если граф G является двудольным графом, то изобра-

зять его в традиционном для двудольных графов виде (с разбиением множества вершин на два подмножества).



11. ПЛАНАРНОСТЬ

Рассмотрим топологические свойства неориентированных графов, которые определяются топологическими инвариантами относительно их гомеоморфных преобразований.

Два графа называются *гомеоморфными графами*, если они изоморфны с точностью до вершин степени два. Другими словами, два графа гомеоморфны тогда и только тогда, когда они преобразуются до изоморфных друг другу графов заменой некоторых рёбер простыми цепями какой-нибудь длины.

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы рёбра пересекались только в вершинах. Проблема характеристики планарных графов долгое время оставалась нерешённой. В 1927 г. советский математик Л.С. Понтрягин (1908 – 1988) доказал (но не опубликовал) критерий планарности, который независимо от него в 1930 г. был открыт и опубликован польским математиком К. Куратовским (1896 – 1980).

Теорема (Понтрягина). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа или частичного графа, гомеоморфного графу F_5 или графу $K_{3,3}$ (рис. 26, а, б). ■*

Основываясь на критерии Понтрягина, можно получить ещё один критерий планарности. Этот критерий использует понятие *элементарного стягивания*, заключающегося в следующем. При стягивании какого-либо ребра графа оно исчезает, а вершины, коинцидентные этому ребру отождествляются. Например, в результате стягивания ребра $\{a, b\}$ графа, изображённого на рис. 27, а, получаем граф, представленный на рис. 27, б. При этом полученная вершина $a(b)$ коинцидентна тем же ребрам, что и вершины a, b в исходном графе (кроме ребра, которое выброшено).

Теорема. *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа или частичного графа, стягиваемых к графу F_5 или к графу $K_{3,3}$. ■*

Толщиной $t(G)$ графа G называется наименьшее число планарных графов, объединение которых даёт граф G . Заметим, что толщина планарного графа равна 1. Нижняя оценка толщины $t(G)$ графа $G = \langle V, U \rangle$ определяется неравенством

$$t(G) \geq 1 + \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n s_i - 2}{6(n-2)} \right\rceil,$$

где $\lceil \dots \rceil$ – целая часть; n – мощность множества V ; s_i – степень i -й вершины.

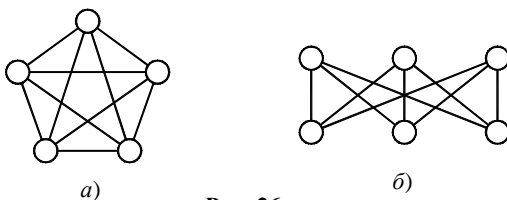


Рис. 26

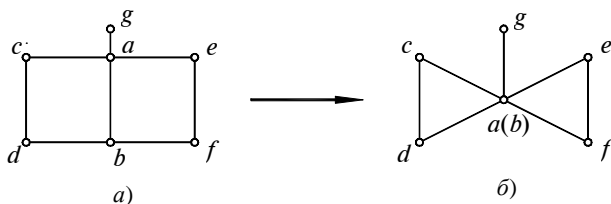


Рис. 27

Рассмотрим задачу проектирования печатной схемы электронного устройства. При изготовлении такой схемы соединительные проводники наносят печатным способом на плоскую поверхность изоляционного материала. Эти проводники не изолированы и поэтому не должны пересекаться. Если граф электронного устройства, в котором роль вершин играют выводы приборов, а роль рёбер – соединительные проводники, является планарным, то печать проводников может быть выполнена на одной плоскости. В противном случае печать проводников осуществляется на нескольких плоскостях, число которых определяется толщиной этого графа.

Предположим, что граф G , изображённый на рис. 28, a , является графом некоторого электронного устройства. Определим, является ли этот граф планарным или непланарным. Если граф G окажется непланарным, то выясним, сколько потребуется плоскостей для нанесения проводников при изготовлении печатной схемы соответствующего устройства.

Согласно критерию Понтрягина этот граф является непланарным, поскольку содержит запрещённые фигуры: частичный подграф и подграф, гомеоморфные графу F_5 (рис. 29, a , $в$), и подграфы, гомеоморфные графу $K_{3,3}$ (рис. 29, $б$, $з$).

Заметим, что графы на рис. 29, a и $б$ преобразуются в графы, изоморфные графам F_5 и $K_{3,3}$, в результате замены цепей $(\{4, 5\}, \{5, 7\})$ рёбрами $\{4, 7\}$. Граф на рис. 29, $в$ преобразуется в граф, изоморфный графу F_5 , при замене цепи $(\{1, 7\}, \{7, 5\})$ ребром $\{1, 5\}$ и последующем стягивании ребра $\{1, 2\}$. Граф на рис. 29, $з$ преобразуется в граф, изоморфный графу $K_{3,3}$, в результате замены цепи $(\{1, 2\}, \{2, 4\})$ ребром $\{1, 4\}$.

Оценим толщину рассматриваемого графа G :

$$t(G) \geq 1 + \left\lfloor \frac{32-2}{6(7-2)} \right\rfloor = 2, \quad t(G) \geq 2.$$

Чтобы определить, какие рёбра графа G следует удалить для преобразования его в планарный граф, необходимо выделить все содержащиеся в нём запрещённые фигуры Q_1, Q_2, \dots, Q_m и построить двумерную таб-

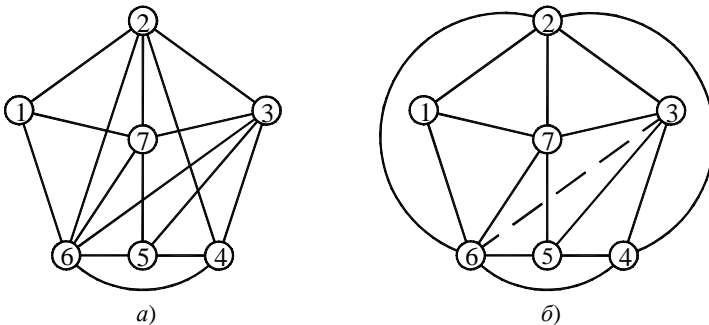


Рис. 28

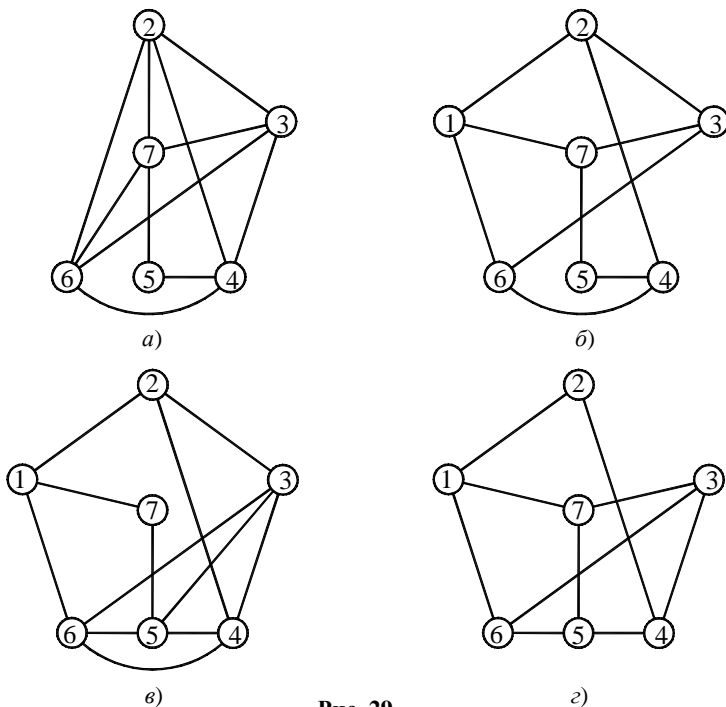


Рис. 29

лицу, каждой строке которой соответствует запрещённая фигура Q_i , а каждому столбцу – ребро p_j графа G . Эту таблицу следует заполнить так, чтобы элемент (i, j) был равен 1, если в запрещённой фигуре Q_i имеется ребро p_j , и был равен 0 – в противном случае. Тогда каждое покрытие строк столбцами таблицы определит множество рёбер графа G , удаление которых преобразует его в планарный граф. При этом покрытие минимальной мощности определит минимальное решение задачи.

Для рассматриваемого графа G (рис. 28, а) в качестве запрещённых фигур Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 выступают графы, представленные на рис. 29, а, б, в и г соответственно, а таблица выглядит следующим образом.

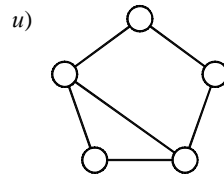
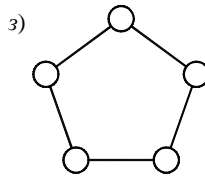
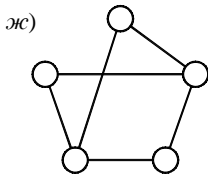
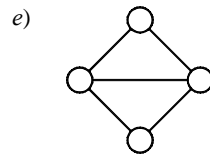
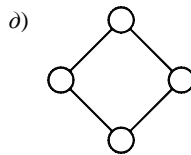
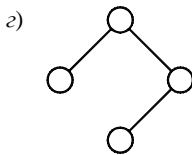
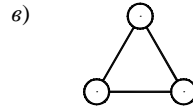
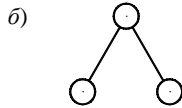
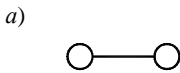
Таблица 14

Q_i	p_j															
	{1,2}	{1,6}	{1,7}	{2,3}	{2,4}	{2,6}	{2,7}	{3,4}	{3,5}	{3,6}	{3,7}	{4,5}	{4,6}	{5,6}	{5,7}	{6,7}
Q_1				1	1	1	1	1		1	1	1	1		1	1
Q_2	1	1	1	1	1					1	1	1	1		1	
Q_3	1	1	1	1	1			1	1	1		1	1	1	1	
Q_4	1	1	1		1			1		1	1	1		1	1	

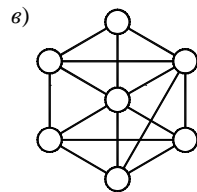
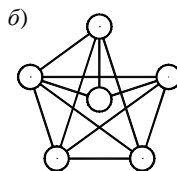
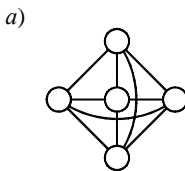
При этом в качестве минимального покрытия строк столбцами может выступать любое из рёбер $\{2, 4\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ и $\{5, 7\}$. После удаления, для определённости, ребра $\{3, 6\}$ получаем планарный граф, плоское представление которого изображено на рис. 28, б. Соединение, которое соответствует удалённому ребру $\{3, 6\}$, показано штриховой линией и должно быть реализовано на второй плоскости.

Задачи и упражнения

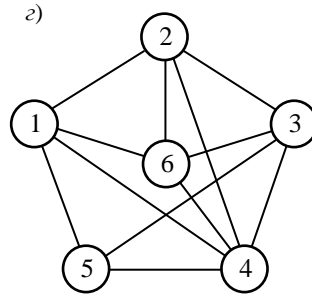
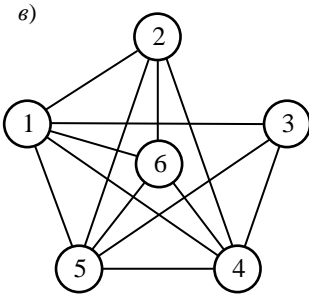
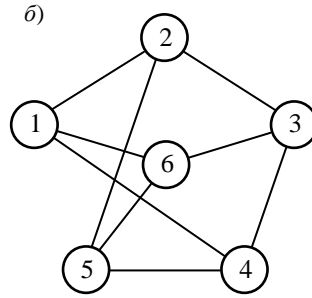
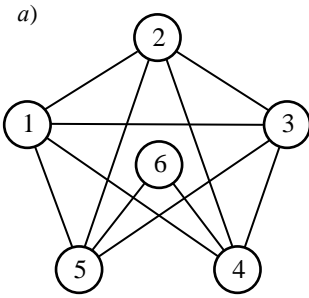
1. Определите разбиение множества заданных неориентированных графов на классы гомеоморфных графов:



2. Оцените толщину $t(G)$ графа G :



3. Выделите все запрещённые фигуры в заданном непланарном графе G и найдите все рёбра, удаление каждого из которых преобразует его в планарный граф:



12. РАЗРЕШИМЫЕ И НЕРАЗРЕШИМЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим систему подстановок, задаваемую алфавитом $M = \{m_i / i = 1, 2, \dots, p\}$ и *базисными подстановками*

$$\alpha_i \rightarrow \beta_i,$$

где α_i, β_i – формулы (слова), быть может пустые, в алфавите M .

Элементы некоторого конечного множества отношений между формулами называются *правилами вывода*.

Каждую подстановку будем понимать как правило вывода. Часто систему подстановок называют *полусистемами Туэ*, по имени норвежского математика Акселя Туэ (1863 – 1922). Используя эти полусистемы, американский лингвист Ноам Хомский (р. 1928) сформулировал и развил аппарат формальных грамматик.

Определим понятие *формальной грамматики*, которую в дальнейшем будем называть просто *грамматикой*. Рассмотрим конечный алфавит $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, элементы которого будем называть *символами* (буквами), а конечные последовательности символов – *словами*.

Обозначим всё множество слов, на длину которых не наложены никакие ограничения, через Y_0 . Если множество слов $Y \subset Y_0$, то будем говорить, что Y – это *язык* в алфавите M .

Пусть G – некоторая совокупность правил, с помощью которых в M порождаются все слова, принадлежащие языку Y , и только они. Совокупность правил G будем называть *грамматикой языка Y* . Два языка называются *эквивалентными*, если множества слов, из которых они состоят, совпадают. Две грамматики G_1 и G_2 языка Y будем называть *эквивалентными*, если они порождают эквивалентные языки.

Условимся говорить, что грамматика G является *грамматикой с конечным числом состояний*, если правила порождения слов в алфавите $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ задаются следующим образом.

Существует конечное множество состояний $\{s_0, s_1, \dots, s_r\}$ и каждому состоянию s_j ($j = 1, 2, \dots, r$) сопоставляется набор пар вида (m_i, s_q) , где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $q \in \{1, 2, \dots, r\}$. Состоянию s_0 сопоставляются пары вида (m_0, s_h) , где $h \in \{1, 2, \dots, r\}$. Символ m_0 это специальный знак пробела между словами.

Конструирование слов происходит так. Из состояния s_0 совершают переход в любое состояние s_q из тех состояний, которые являются вторыми членами упорядоченных пар вида (m_0, s_q) , и в начале слова ставят знак пробела. Исходя из пар, сопоставленных выбранному состоянию s_q , берут любую пару (m_i, s_l) . Этот выбор определяет следующее состояние s_l и первый символ m_i конструируемого слова. Далее процесс построения слова происходит аналогичным образом. Заканчивается слово при переходе к заключительному состоянию, как правило, состоянию s_0 .

Язык, порождаемый грамматикой с конечным числом состояний, называется *языком с конечным числом состояний*. Структуру таких языков удобно изображать в виде графа, вершины которого сопоставлены состояниям s_j ($j = 1, 2, \dots, r$), а дуги – парам (m_i, s_q) , где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $q \in \{1, 2, \dots, r\}$. На рисунке 30 приведён пример такого графа.

С помощью грамматики, задаваемой этим графом, порождается язык, который состоит из следующего множества слов: $\{m_1m_1, m_1m_2m_3m_1, m_1m_2m_3m_3m_1\}$.

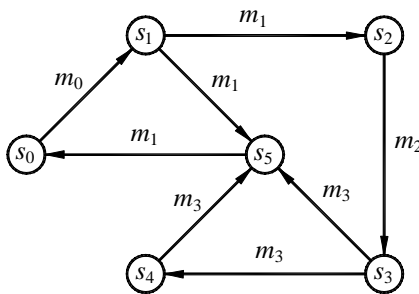


Рис. 30

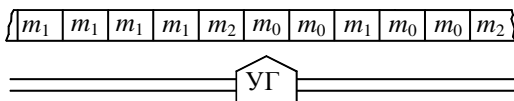


Рис. 31

Порождение цепочек символов можно рассматривать как результат работы некоторого гипотетического устройства, схема которого изображена на рис. 31.

Вдоль бесконечной (в одну или обе стороны) ленты, разделённой на клетки, перемещается управляющая головка (УГ). Заданы внешний алфавит $M = \{m_0, m_1, m_2, \dots, m_n\}$, символы которого называются *буквами*, внутренний алфавит $S = \{s_0, s_1, \dots, s_r\}$, символы которого называются *состояниями*, и алфавит перемещений $D = \{L, \bar{L}, H\}$. Все клетки ленты заполнены символами из алфавита M , по одному символу в каждой клетке. Символ m_0 играет роль пустого символа (если в некоторой клетке стоит символ m_0 , то «в клетке ничего не записано»). Предполагается, что вся бесконечная лента всюду заполнена символами m_0 , за исключением тех клеток, где записаны какие-либо другие символы из алфавита M .

Управляющая головка может находиться в тех или иных состояниях, характеризуемых символами из множества S . Состояние s_0 – начальное состояние УГ. Предполагается, что в конце работы машины управляющая головка всегда переходит в некоторое конечное состояние s_2 . В процессе работы машины УГ перемещается в дискретные такты времени вдоль ленты. Перемещение управляющей головки в данный такт работы происходит либо на одну клетку вправо (L), либо на одну клетку влево (\bar{L}), либо может отсутствовать (H).

В каждый такт работы машины УГ совершает следующие действия: 1) считывает символ m_i , находящийся в клетке ленты, которую в этом такте она «видит»; 2) в соответствии со считанным символом m_i и своим состоянием s_j записывает символ m_k в эту клетку; 3) движется или не движется вдоль ленты; 4) переходит в следующее состояние s_p .

Всю работу машины можно задать с помощью функциональной таблицы T , клетки которой заполнены тройками вида (m_k, d_l, s_p) , где $d_l \in D$ – символ, определяющий перемещение. Таким образом, функциональная таблица определяет отображение множества $M \times S$ в множество $M \times D \times S$. Содержательный смысл отображения $(m_i, s_j) \rightarrow (m_k, d_l, s_p)$ состоит в том, что, УГ, находясь в состоянии s_j , считывает из видимой клетки ленты символ m_i ; записывает в данную клетку ленты символ m_k ; производит движение, определяемое символом d_l , и переходит в состояние s_p . Условимся считать, что функциональная таблица T всегда устроена так, что имеет место отображение $(m_i, s_2) \rightarrow (m_i, H, s_2)$. Это означает, что машина «выключена» и не работает.

До начала функционирования машины следует заполнить (если это необходимо) некоторые клетки ленты символами, отличными от m_0 , перевести УГ в состояние s_0 и задать её исходное положение относительно ленты. После этого машина будет функционировать в соответствии с таблицей T . Функционирование машины можно задать и с помощью графа, вершины которого соответствуют состояниям этого устройства, дуги – переходам из одного состояния в другое, при этом каждая дуга (s_j, s_p) графа взвешена упорядоченной парой $(m_i, m_k d_i)$.

Описанное гипотетическое устройство называется по имени английского математика Алана Тьюринга (1912 – 1954) *машиной Тьюринга*.

Рассмотрим пример машины Тьюринга, предназначенной для сложения двух чисел в унарной системе счисления.

Внешний алфавит этой машины представляет собой множество $M = \{\lambda, 1, 0, *, =\}$, в котором элемент λ обозначает пустой символ; внутренний алфавит – множество $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ состояний УГ и алфавит перемещений – множество $D = \{L, J, H\}$. Пусть на ленте (рис. 32) записаны два числа, представленные с помощью цифры ‘1’ и разделённые символом ‘*’, а УГ находится в состоянии s_0 и видит первую слева единицу.

Работа машины Тьюринга характеризуется функциональной таблицей T (табл. 15).

В соответствии с этой таблицей УГ машины считывает числа с ленты, записывает непосредственно после них символ ‘=’, а затем результат сложения также в унарной системе счисления. На рисунке 33 представлены конечное содержимое ленты, а также конечное положение и состояние УГ.

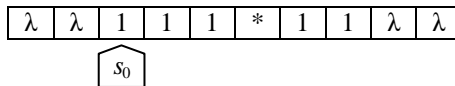


Рис. 32

Таблица 15

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
λ		$(=, J, s_2)$	$(1, J, s_3)$		(λ, J, s_5)	
1	$(0, J, s_1)$	$(1, J, s_1)$	$(1, J, s_2)$	$(1, J, s_3)$		$(1, H, s_5)$
0				$(0, J, s_0)$	$(1, J, s_4)$	
*	$(*, J, s_0)$	$(*, J, s_1)$		$(*, J, s_3)$	$(*, J, s_4)$	
=	$(=, J, s_4)$	$(=, J, s_2)$		$(=, J, s_3)$		

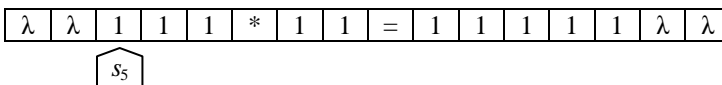


Рис. 33

Приведём *интуитивное (наивное) определение алгоритма*. Совокупность правил, обладающих свойствами *массовости* (инвариантности относительно входной информации), *детерминированности* (однозначности применения этих правил на каждом шаге), *результативности* (получения после применения этих правил информации, являющейся результатом) и *элементарности* (отсутствии необходимости дальнейшего уточнения правил), называется *алгоритмом*.

Рассмотренное понятие машины Тьюринга является строгим уточнением этого наивного определения алгоритма и позволяет решить вопрос алгоритмической (машинной) разрешимости той или иной проблемы.

Тезис Тьюринга. *Для любого алгоритма, понимаемого в интуитивном смысле, можно построить машину Тьюринга, функционирование которой эквивалентно этому алгоритму.* ■

В соответствии с данным тезисом некоторая проблема является *алгоритмически разрешимой*, если существует алгоритм (соответствующая машина Тьюринга) для её решения, и *алгоритмически неразрешимой* – в противном случае.

Заметим, что каждая отдельная машина Тьюринга может быть представлена программой произвольного вида для цифровой вычислительной машины с потенциально бесконечной памятью.

Задачи и упражнения

1. На ленте записана непрерывная последовательность символов ‘+’ и УГ в своём начальном положении видит один из этих символов. Разработать машину Тьюринга, которая заменяет, начиная с левого конца, каждый второй символ ‘+’ на символ ‘-’.

2. В начальном положении УГ видит самую правую цифру неотрицательного целого числа, записанного на ленте в троичной системе счисления. Разработать машину Тьюринга, которая увеличивает заданное число на 1 и возвращает УГ в исходное положение.

3. На ленте записано натуральное число в четверичной системе счисления и УГ в своём начальном положении видит самую правую цифру этого числа. Разработать машину Тьюринга, которая уменьшает заданное число на 1, не оставляя образующихся при этом незначащих нулей, и возвращает УГ в исходное положение.

13. ЭЙЛЕРОВЫ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

Эйлеровым циклом в связном неориентированном графе G называется цикл, в котором каждое ребро этого графа содержится ровно один раз. Граф G называется *эйлеровым графом*, если в нём существует эйлеров цикл. Граф G называется *полуэйлеровым графом*, если в нём существует

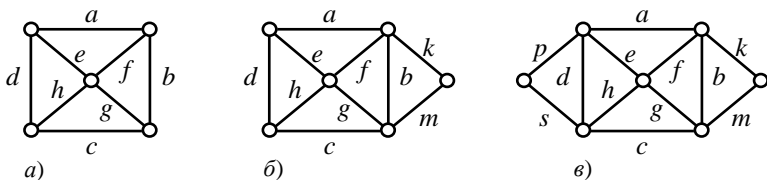


Рис. 34

незамкнутая цепь, в которую каждое ребро графа входит ровно один раз. Граф G , который не является эйлеровым и не является полуэйлеровым графом, будем называть *неэйлеровым графом*.

Для иллюстрации на рис. 34, а, б и в изображены соответственно неэйлеров, полуэйлеров и эйлеров графы.

Заметим, что первая работа о графах принадлежит швейцарскому математику Леонарду Эйлеру (1707 – 1783). Она появилась в 1736 г. в публикациях Петербургской Академии наук. Эйлер начал её с рассмотрения одной головоломки – так называемой «задачи о кёнигсбергских мостах». Вопрос заключался в том, можно ли, совершая прогулку по городу, выйти из дома и вернуться обратно, пройдя в точности один раз по каждому мосту (рис. 35).

Эйлер обобщил постановку задачи и нашёл критерий существования такого маршрута.

Теорема. Для связного графа G следующие утверждения эквивалентны: G – эйлеров граф; каждая вершина графа G имеет чётную степень; множество рёбер графа G можно разбить на простые циклы. ■

Например, каждая вершина эйлерова графа на рис. 34, в имеет чётную степень, а множество его рёбер $\{a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, p, s\}$ можно разбить на подмножества, определяющие простые циклы (a, b, c, d) , (e, h, s, p) и (f, k, m, g) .

Граф на рис. 36, представляющий схему кёнигсбергских мостов, содержит вершины нечётной степени и, в соответствии с теоремой, не является эйлеровым графом. Таким образом, упомянутую выше прогулку по мостам совершить нельзя.

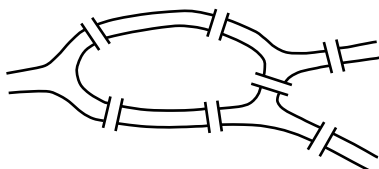


Рис. 35

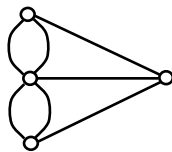


Рис. 36

Следствие 1. Пусть G – связный граф, в котором $2n$ вершин имеют нечётные степени, $n \geq 1$. Тогда множество рёбер графа G можно разбить на n незамкнутых цепей. ■

Так, неэйлеров граф на рис. 34, а имеет четыре вершины нечётной степени, а множество его рёбер $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ можно разбить на два подмножества, определяющие незамкнутые цепи (d, a, f, g) и (b, c, h, e) .

Следствие 2. Пусть G – связный граф, в котором две вершины имеют нечётные степени. Тогда в графе G есть незамкнутая цепь, содержащая все вершины и все рёбра графа G (и начинающаяся в одной из вершин с нечётной степенью и кончающаяся в другой). ■

Например, полуэйлеров граф на рис. 34, б имеет две вершины нечётной степени и незамкнутую цепь $(a, k, t, b, f, e, d, h, g, c)$, в которой одна из этих вершин является начальной, а другая – конечной вершиной.

Разделяющим множеством связного графа G называется подмножество его рёбер, удаление которых из графа G приводит к несвязному графу. Разделяющее множество графа G , никакое подмножество которого не является разделяющим, называется *разрезом графа G* . *Мостом графа G* называется разрез, состоящий ровно из одного ребра.

Рассмотрим алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе.

Алгоритм Флэри. Пусть G – эйлеров граф. Тогда к эйлерову циклу графа G приводит следующая процедура. Выходя из произвольной вершины v этого графа, необходимо идти по его рёбрам произвольным образом, соблюдая лишь следующие два правила: 1) стирать рёбра по мере их прохождения и стирать вершины с нулевой степенью, которые при этом образуются; 2) на каждом шаге идти по мосту тогда и только тогда, когда нет других возможностей. ■

Применение алгоритма Флэри к эйлерову графу на рис. 34, в может дать, например, эйлеров цикл $(a, f, g, b, k, t, c, s, p, e, h, d)$.

Гамильтоновым циклом в связном неориентированном графе G называется цикл, в котором каждая вершина этого графа содержится ровно один раз. Граф G называется *гамильтоновым графом*, если в нём существует гамильтонов цикл. Граф G называется *полугамильтоновым графом*, если в нём существует простая цепь, содержащая каждую вершину графа ровно один раз. Граф G , который не является гамильтоновым и не является полугамильтоновым графом, будем называть *негамильтоновым графом*.

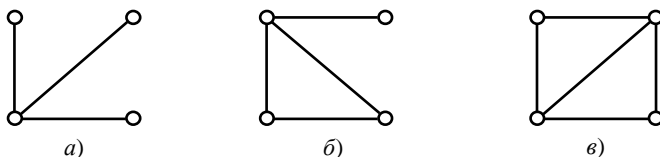


Рис. 37

Например, на рис. 37, *а*, *б* и *в* изображены соответственно негамильтонов, полугамильтонов и гамильтонов графы.

Название «гамильтонов цикл» возникло в связи с тем, что ирландский математик и астроном Уильям Гамильтон (1805 – 1865) занимался исследованием существования таких циклов в графе, соответствующем додекаэдру (правильному двенадцатиграннику).

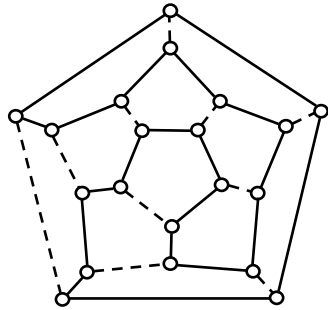


Рис. 38

Этот граф, изображённый на рис. 38, является гамильтоновым графом. В нём рёбра, принадлежащие гамильтонову циклу, показаны сплошными линиями.

Отметим, что необходимое и достаточное условие гамильтоновости графа до сих пор не получено. Поиск такого критерия остаётся одной из главных нерешённых задач теории графов. Разработаны лишь достаточные условия, одно из которых сформулировал Габриэль Дирак (1925 – 1984).

Теорема (Дирака). *Если в связном графе G , имеющем $n \geq 3$ вершин, степень каждой вершины больше или равна $n/2$, то граф G является гамильтоновым графом. ■*

Например, гамильтонов граф на рис. 37, *в* имеет четыре вершины и степень каждой из них не меньше чем два. Заметим, что граф на рис. 38 тоже гамильтонов, хотя он имеет двадцать вершин, а степень каждой вершины равна трём.

Задачи и упражнения

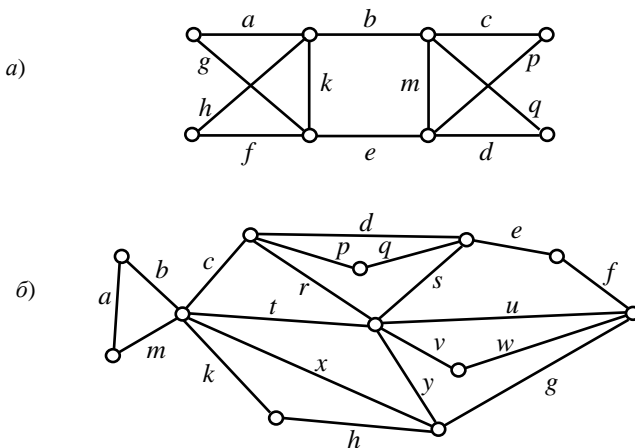
1. Для каких значений m и n следующие графы являются эйлеровыми графами:

- а) полный граф F_n ;
- б) полный двудольный граф $K_{m,n}$;
- в) колесо W_n ($n \geq 3$).

2. Найдите (с помощью алгоритма Флёрри) эйлеров цикл в заданном эйлеровом графе, а также разбиение его рёбер на простые циклы.

3. Для каких значений m и n следующие графы являются гамильтоновыми:

- а) полный граф F_n ;
- б) полный двудольный граф $K_{m,n}$;
- в) колесо W_n ($n \geq 3$).



4. Приведите пример связного неориентированного графа, который является одновременно:

- эйлеровым и гамильтоновым;
- эйлеровым и негамильтоновым;
- неэйлеровым и гамильтоновым;
- неэйлеровым и негамильтоновым.

14. ПОКРЫТИЯ И НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Независимым множеством вершин графа G называется множество попарно не смежных вершин неориентированного графа G , порождающее пустой подграф этого графа. Независимое множество вершин графа G называется *максимальным независимым множеством вершин графа G* , если оно не является собственным подмножеством другого независимого множества вершин этого графа. Максимальное независимое множество вершин графа G называется *наибольшим независимым множеством вершин графа G* , если оно содержит наибольшее количество вершин. Мощность наибольшего независимого множества вершин графа G будем называть *числом независимости графа G* и обозначать $\alpha(G)$.

Для графа G , изображённого на рис. 39, независимыми множествами вершин являются, например, множества $\{2, 4\}$, $\{2, 4, 7\}$ и $\{1, 3, 4, 7\}$; максимальными независимыми множествами вершин – множества $\{2, 4, 7\}$ и $\{1, 3, 4, 7\}$; наибольшим независимым множеством вершин – множество $\{1, 3, 4, 7\}$, а число независимости графа $\alpha(G) = 4$.

Кликкой графа G называется множество его попарно смежных вершин, порождающее полный подграф графа G . Клика графа G называется *максимальной кликой графа G* , если она не является собственным под-

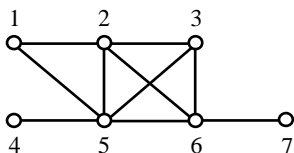


Рис. 39

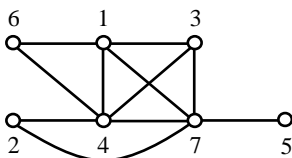


Рис. 40

множеством другой клики этого графа. Максимальная клика графа G называется *наибольшей кликой графа G* , если она содержит наибольшее количество вершин. Мощность наибольшей клики графа G будем называть *кликовым числом* и обозначать $\omega(G)$.

Применительно к графу G на рис. 39, кликами являются множества $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 5\}$ и $\{2, 3, 5, 6\}$; максимальными кликами – множества $\{1, 2, 5\}$ и $\{2, 3, 5, 6\}$; наибольшей кликой – множество $\{2, 3, 5, 6\}$, а кликовое число $\omega(G) = 4$.

Число независимости графа G связано с его кликовым числом соотношением $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$, где \bar{G} – дополнение графа G до полного графа. На рисунке 40 изображён граф \bar{G} , его кликовое число $\omega(\bar{G}) = 4$.

Множество вершин графа G такое, что любое ребро графа инцидентно хотя бы одной из вершин этого множества, называется *вершинным покрытием графа G* . Вершинное покрытие графа G , которое является собственным подмножеством любого другого вершинного покрытия этого графа, называется *минимальным вершинным покрытием графа G* . Минимальное вершинное покрытие графа G наименьшей мощности называется *наименьшим вершинным покрытием графа G* . Мощность наименьшего вершинного покрытия графа G называется *числом вершинного покрытия графа G* и обозначается $\beta(G)$.

Для графа G на рис. 39 вершинными покрытиями являются множества $\{2, 5, 6\}$, $\{1, 3, 5, 6\}$ и $\{1, 3, 5, 6, 7\}$; минимальными вершинными покрытиями – множества $\{2, 5, 6\}$ и $\{1, 3, 5, 6\}$; наименьшим вершинным покрытием – множество $\{2, 5, 6\}$, а число вершинного покрытия $\beta(G) = 3$.

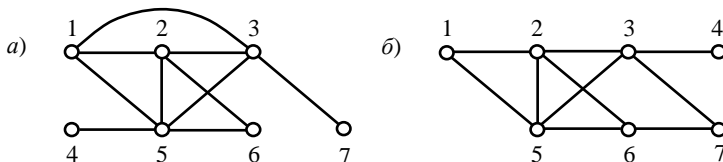
Между независимым множеством вершин графа G и вершинным покрытием графа G существует связь, которую определяет следующее утверждение.

Теорема. *Подмножество V' множества V вершин графа G является вершинным покрытием тогда и только тогда, когда $\bar{V}' = V \setminus V'$ – независимое множество вершин. ■*

Из этой теоремы следует, что $\alpha(G) + \beta(G) = n$ для любого графа G с n вершинами. Для графа G на рис. 39 имеет место равенство $\alpha(G) + \beta(G) = 7$.

Задачи и упражнения

1. Укажите независимые множества вершин; максимальные независимые множества вершин; наибольшее независимое множество вершин; число независимости $\alpha(G)$; клики; максимальные клики; наибольшую клику; кликовое число $\omega(G)$; дополнение до полного графа \overline{G} ; кликовое число $\omega(\overline{G})$; вершинные покрытия; минимальные вершинные покрытия; наименьшее вершинное покрытие; число вершинного покрытия $\beta(G)$ графа G :



15. ЦЕПИ МАРКОВА

Цепью Маркова называется дискретная абстрактная система, которая состоит из: 1) конечного множества состояний $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$; 2) матрицы переходов $P = [p_{ij}]_{n \times n}$, где p_{ij} – вероятность того, что в следующий момент времени система будет находиться в состоянии s_j при условии, что в текущий момент времени она находится в состоянии s_i .

Заметим, что $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Определённую таким образом цепь Маркова называют иногда *стационарной*, поскольку вероятности переходов p_{ij} не являются функциями времени.

Цепи Маркова можно поставить в соответствие ориентированный взвешенный граф, вершины которого обозначают состояния цепи, а дуги – переходы из состояния s_i в состояние s_j (при условии, что $p_{ij} > 0$).

Например, цепи Маркова, состоящей из множества состояний $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ и матрицы переходов

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

соответствует граф, представленный на рис. 41.

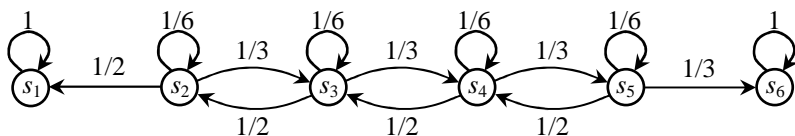


Рис. 41

Матрица переходов P характеризует распределение вероятностей перехода системы из одного состояния в другое за один, а матрица P^k – за k интервалов времени.

Так, матрица

$$P^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7/12 & 7/36 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/6 & 13/36 & 1/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/6 & 13/36 & 1/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/6 & 7/36 & 7/18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

характеризует распределение вероятностей перехода системы из одного состояния в другое за два интервала времени.

Если начальное состояние цепи Маркова задано вектором x , то нахождение её в различных состояниях через k интервалов времени будет определять вектор $x P^k$.

Пусть начальным состоянием в рассматриваемом примере цепи Маркова будет состояние s_4 , заданное вектором $x = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$. Тогда вероятности нахождения системы в определённых состояниях через один интервал времени описываются вектором $x P = (0, 0, 1/2, 1/6, 1/3, 0)$, через два интервала времени – вектором $x P^2 = (0, 1/4, 1/6, 13/36, 1/9, 1/9)$.

Качественная классификация состояний цепи Маркова может быть проведена на основе структурных свойств соответствующего графа (без учёта конкретных весов его дуг). При этом дуги графа будем разделять на входящие дуги, выходящие дуги и петли.

Преходящее состояние соответствует вершине графа, которая не имеет входящих дуг и имеет по крайней мере одну выходящую дугу. *Тупиковое состояние* – вершине, которая не имеет выходящих дуг, но имеет по крайней мере одну входящую дугу. *Изолированное состояние* – вершине, не имеющей ни входящих, ни выходящих дуг.

Множество состояний нашей цепи Маркова содержит два тупиковых состояния (s_1 и s_6) и не содержит изолированных и преходящих состояний.

Цепь Маркова называется *эргодической*, если соответствующий ей ориентированный граф сильно связан. Эргодическая цепь Маркова называется *регулярной*, если существует положительное целое число t_0 такое,

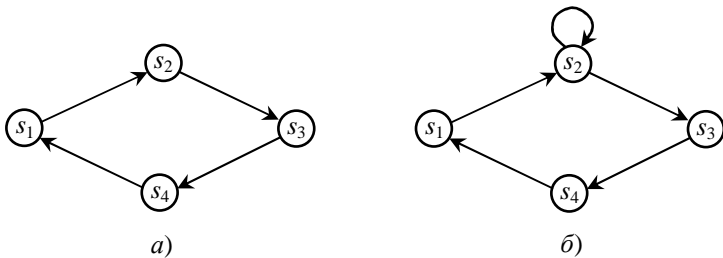


Рис. 42

что для любых состояний s_i и s_j в графе существует путь из вершины s_i в вершину s_j длиной t для всех $t \geq t_0$.

Рассматриваемая цепь Маркова не является эргодической. Цепь Маркова, соответствующая графу на рис. 42, а, эргодическая, но не регулярная. В отличие от последней, цепь, представленная графом на рис. 42, б, является регулярной.

Отметим, что если граф эргодической цепи Маркова имеет по крайней мере одну петлю, то цепь регулярна.

Задачи и упражнения

1. Шесть человек, сидящих за круглым столом, играют в кости. Если у игрока, бросающего кость, выпадает 1, 3 или 5 очков, то он отдаёт кость своему соседу слева; если выпадает 2 или 4 очка, то он отдаёт кость игроку, сидящему справа от него через одного игрока; если выпадает 6 очков, то он оставляет кость у себя и бросает её снова.

Представьте эту игру цепью Маркова: задайте множество состояний, приведите матрицу переходов и изобразите соответствующий этой цепи граф. Проанализируйте, является ли эта цепь эргодической.

Определите вероятности нахождения кости у каждого из игроков после одного, двух и трёх бросаний, если изначально кость находилась у игрока номер 3.

2. Найдите минимальное значение t_0 , которое удовлетворяет условию регулярности цепи, представленной графом на рис. 42, б.

16. КРАТЧАЙШИЕ ПУТИ В ГРАФАХ

Рассмотрим взвешенный ориентированный граф $G = \langle V, U \rangle$ с множеством вершин V и множеством дуг U .

Пусть вес каждой дуги $u \in U$ является некоторым действительным числом, называемым *длиной дуги*. Тогда *длина пути* из некоторой верши-

ны $v_i \in V$ в некоторую вершину $v_j \in V$, которую обозначим через $l(v_i, v_j)$, также будет представлять собой действительное число.

В зависимости от конкретного приложения эти действительные числа могут служить мерой физического расстояния, времени, стоимости или какого-либо другого важного параметра. Для дальнейшего рассмотрения существенно, что длина должна быть аддитивна, т.е. длина пути должна быть равна сумме длин дуг, составляющих этот путь.

Пусть v_0 и v_k представляют две какие-либо вершины графа G . Тогда, если в графе G существует по крайней мере один путь из v_0 в v_k , задача нахождения кратчайшего пути из вершины v_0 в вершину v_k состоит в нахождении пути минимальной длины $l_{\min}(v_0, v_k)$ с начальной вершиной v_0 и конечной вершиной v_k .

Можно решать и более общую задачу нахождения кратчайших путей из некоторой исходной вершины v_0 в любую вершину $v_k \in V$, достижимую из вершины v_0 .

Деревом кратчайших расстояний графа G относительно исходной вершины v_0 называется ориентированное дерево с корнем в вершине v_0 такое, что единственный путь из v_0 до любой вершины v_k этого дерева является кратчайшим путём из вершины v_0 в вершину v_k в графе G .

Максимальным деревом кратчайших расстояний графа G относительно вершины v_0 называется дерево кратчайших расстояний, которое включает в себя все вершины графа G , достижимые из вершины v_0 .

Обозначим длину $l(v_0, v_k)$ пути от вершины v_0 до какой-либо вершины v_k графа G через $L(v_k)$ и приведём следующую теорему.

Теорема. Пусть T – дерево с корнем v_0 в ориентированном графе $G = \langle V, U \rangle$, которое содержит все вершины графа, достижимые из вершины v_0 . Дерево T является деревом кратчайших расстояний относительно вершины v_0 тогда и только тогда, когда для любой достижимой из v_0 вершины v_k любая хорда вида (v_j, v_k) , граничные вершины которой принадлежат T , удовлетворяет соотношению $L(v_k) \leq L(v_j) + l(v_j, v_k)$. ■

Эта теорема даёт основу для итерационной процедуры, в которой через $L_i(v_k)$ обозначается расстояние от вершины v_0 до вершины v_k в дереве T_i , полученном на i -й итерации:

а) Задать на нулевой итерации любое дерево T_0 с корнем v_0 , которое включает в себя все вершины, достижимые из вершины v_0 .

б) Если на i -й итерации каждая хорда вида (v_j, v_k) по отношению к дереву T_i удовлетворяет условию $L_i(v_k) \leq L_i(v_j) + l(v_j, v_k)$, то дерево T_i есть максимальное дерево кратчайших расстояний. Если условие $L_i(v_k) \leq L_i(v_j) + l(v_j, v_k)$ не выполняется, то пусть (v_j^*, v_k) – «улучшающая» хорда такая, что $L_i(v_k) > L_i(v_j^*) + l(v_j^*, v_k)$. Получить дерево T_{i+1} из дерева T_i добавлением дуги (v_j^*, v_k) и вычёркиванием другой дуги, конечной вершиной которой также является вершина v_k .

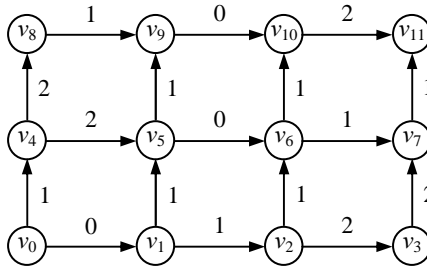


Рис. 43

с) Повторить пункт б) с предварительным увеличением номера итерации на 1. ■

В результате выполнения этой процедуры на некоторой n -й итерации получим, что условие $L_n(v_k) \leq L_n(v_j) + l(v_j, v_k)$ выполняется для каждой дуги (v_j, v_k) , являющейся хордой дерева T_n . В этом случае, согласно теореме, дерево T_n является максимальным деревом кратчайших расстояний.

Проиллюстрируем применение итерационной процедуры поиска максимального дерева кратчайших расстояний на примере взвешенного ориентированного графа, представленного на рис. 43.

Зададим в качестве нулевой итерации дерево T_0 с корнем v_0 , которое включает в себя все вершины, достижимые из вершины v_0 (рис. 44, а). Каждой вершине v_k этого дерева сопоставлено значение $L_0(v_k)$.

Хорда (v_1^*, v_5) является «улучшающей» хордой, поскольку $L_0(v_5) = 3 > L_0(v_1^*) + l(v_1^*, v_5) = 0 + 1 = 1$. Получим дерево T_1 из дерева T_0 добавлением этой хорды и вычёркиванием дуги (v_4, v_5) , конечной вершиной которой также является вершина v_5 (рис. 44, б).

Хорды (v_2, v_6) и (v_3, v_7) «улучшающими» не являются, так как $L_1(v_6) = 1 \leq L_1(v_2) + l(v_2, v_6) = 1 + 1 = 2$ и $L_1(v_7) = 2 \leq L_1(v_3) + l(v_3, v_7) = 3 + 2 = 5$.

Добавлением «улучшающей» хорды (v_5^*, v_9) и вычёркиванием дуги (v_8, v_9) получаем дерево T_2 из дерева T_1 (рис. 44, в).

Наконец, включение последней «улучшающей» хорды (v_7^*, v_{11}) даёт дерево кратчайших расстояний T_3 (рис. 44, г).

Проверяя все хорды дерева T_3 , можно убедиться, что оно действительно является деревом кратчайших расстояний.

Заметим, что полагая длину $l(u) = 1$ для всех дуг $u \in U$ графа G , можно найти кратчайшие пути в том смысле, что они содержат наименьшее число дуг.

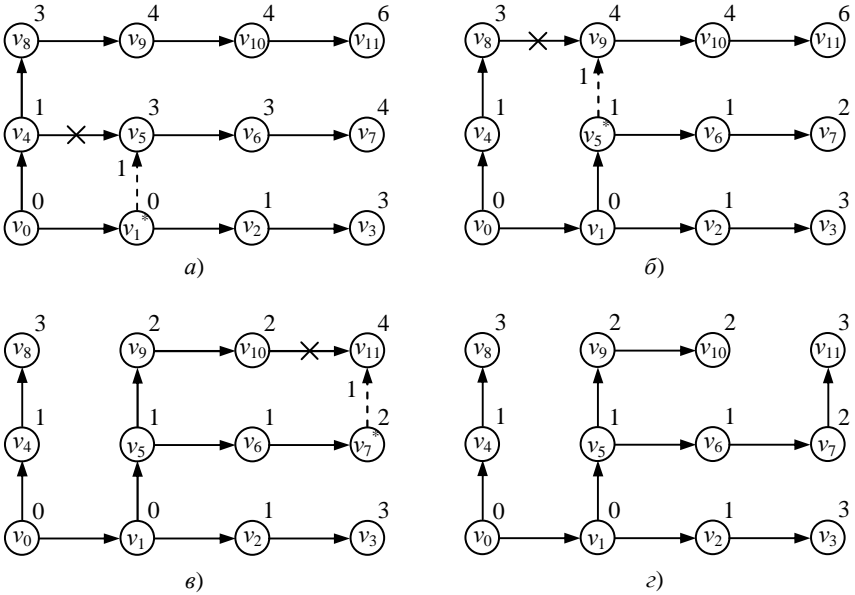


Рис. 44

Рассмотрим другой алгоритм для нахождения кратчайших путей во взвешенном ориентированном графе. Он основан на методе *динамического программирования*.

Иллюстративный взвешенный граф представлен на рис. 45.

Предполагается, что все дуги этого графа ориентированы слева направо, но для простоты изображения стрелки опущены. Число над дугой обозначает её длину.

Задача состоит в нахождении кратчайшего пути из любой вершины v_i до вершины v_k .

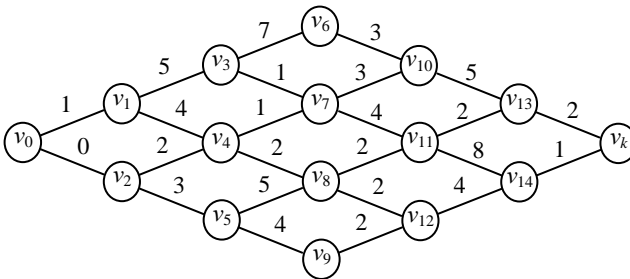


Рис. 45

Метод динамического программирования использует важную особенность, которая заключается в следующем. Если последовательность вершин $v_{i_n}, v_{i_{n-1}}, \dots, v_{i_1}, v_k$ определяет кратчайший путь от вершины v_{i_n} до вершины v_k , то последовательность вершин $v_{i_{n-1}}, v_{i_{n-2}}, \dots, v_{i_1}, v_k$ определяет кратчайший путь от вершины $v_{i_{n-1}}$ до вершины v_k . Следовательно, для определения кратчайших путей вершины графа можно рассматривать по шагам, учитывая на некотором j -м шаге ($j = 1, 2, \dots, n$) только те вершины, которые удалены от вершины v_k на j дуг.

На первом шаге поставим в соответствие каждой вершине v_{x_1} , удалённой от вершины v_k на одну дугу, единственную дугу $D(v_{x_1}) = (v_{x_1}, v_k)$. Вершине v_{x_1} соответствует расстояние $L(v_{x_1}) = l(v_{x_1}, v_k)$ от вершины v_{x_1} до вершины v_k , которое равно в данном случае длине дуги $D(v_{x_1})$.

Для нашего примера $D(v_{13}) = (v_{13}, v_k)$, $L(v_{13}) = l(v_{13}, v_k) = 2$; $D(v_{14}) = (v_{14}, v_k)$, $L(v_{14}) = l(v_{14}, v_k) = 1$. На рисунке 46 дуги $D(v_{13})$ и $D(v_{14})$ выделены утолщённой линией, а значения расстояний $L(v_{13})$ и $L(v_{14})$ выступают в качестве весов соответствующих вершин.

В общем случае, найдя $D(v_{x_j})$ и $L(v_{x_j})$ для каждой вершины v_{x_j} , удалённой от вершины v_k на j дуг ($j = 1, 2, \dots, n - 1$), определим расстояние $L(v_{x_{j+1}})$ и соответствующую ему дугу $D(v_{x_{j+1}})$ для каждой вершины $v_{x_{j+1}}$, удалённой от вершины v_k на $(j + 1)$ дугу. При этом $L(v_{x_{j+1}})$ определяется по формуле $L(v_{x_{j+1}}) = \min \{l(v_{x_{j+1}}, v_{x_j}) + L(v_{x_j})\}$ для всех дуг вида $(v_{x_{j+1}}, v_{x_j})$, у которых $v_{x_{j+1}}$ является начальной вершиной, а в качестве $D(v_{x_{j+1}})$ выбирается дуга, на которой достигается этот минимум.

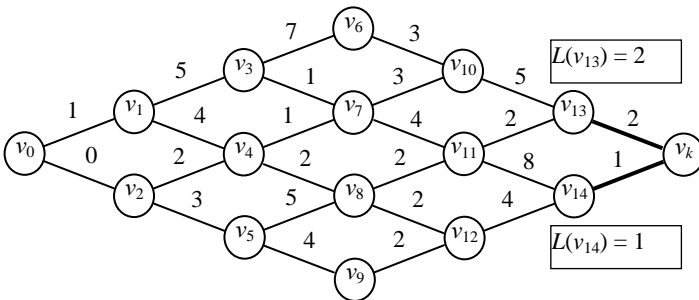


Рис. 46

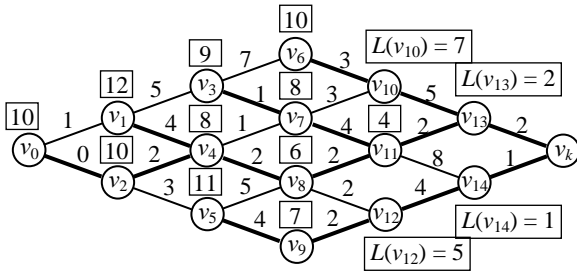


Рис. 47

Для нашего графа на втором шаге получим:

$$L(v_{10}) = \min \{l(v_{10}, v_{13}) + L(v_{13})\} = \min \{5 + 2\} = \min \{7\} = 7 \Rightarrow D(v_{10}) = (v_{10}, v_{13});$$

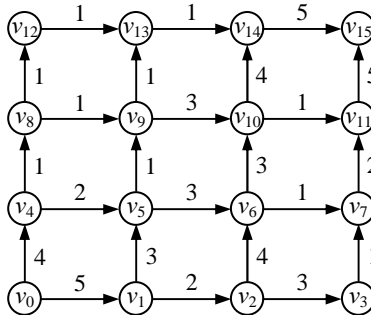
$$L(v_{11}) = \min \{l(v_{11}, v_{13}) + L(v_{13}), l(v_{11}, v_{14}) + L(v_{14})\} = \min \{2 + 2, 8 + 1\} = \min \{4, 9\} = 4 \Rightarrow D(v_{11}) = (v_{11}, v_{13});$$

$$L(v_{12}) = \min \{l(v_{12}, v_{14}) + L(v_{14})\} = \min \{4 + 1\} = \min \{5\} = 5 \Rightarrow D(v_{12}) = (v_{12}, v_{14}).$$

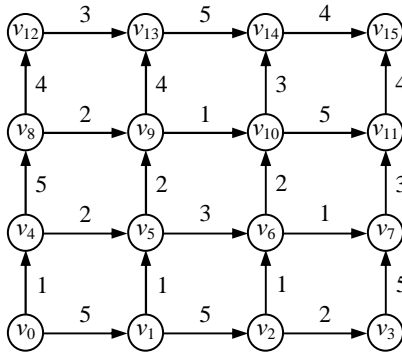
Продолжив определение кратчайших расстояний $L(v_{x_{j+1}})$ и выбор соответствующих им дуг $D(v_{x_{j+1}})$ для $j = 2, 3, 4$ и 5 , в результате получим дерево кратчайших расстояний, представленное утолщёнными рёбрами на рис. 47.

Задачи и упражнения

1. Определите по алгоритму, основанному на итерационном уточнении дерева расстояний, длины кратчайших путей от вершины v_0 до каждой вершины графа G :



2. Определите по алгоритму, основанному на методе динамического программирования, длины кратчайших путей от каждой вершины до вершины v_{15} графа G :



17. ЗАДАЧА О КОММИВОЯЖЁРЕ

Пусть имеется матрица $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ с элементами $a_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и $a_{ij} = \infty$ в противном случае. Пусть $S(n)$ является множеством подстановок порядка n и $Z(n)$ – множеством циклических подстановок из $S(n)$. Каждому

элементу $Z(n)$ вида $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ сопоставим число $\sigma(\pi) = \sum a_{i, \pi(i)}$.

Требуется найти подстановку π_0 такую, что $\sigma(\pi_0) = \min_{\pi \in Z(n)} \sigma(\pi)$.

Величину $\sigma(\pi_0)$ будем обозначать иногда через $\sigma_0(A)$, подстановку π_0 называть *оптимальной подстановкой*, матрицу A – *матрицей расстояний*.

Для получения геометрического смысла сформулированной задачи о коммивояжёре элементы a_{ij} матрицы A следует рассматривать как длины дуг полного ориентированного графа G с n вершинами, задающего антирефлексивное бинарное отношение. Тогда любая подстановка $\pi \in Z(n)$ определяет в графе гамильтонов контур, и задача состоит в определении кратчайшего из всех таких контуров.

На практике задача о коммивояжере встречается там, где возникает вопрос о наилучшем упорядочении каких-либо объектов, действий и т.п. Например, при определении маршрута развозки товаров по торговым точкам такого, чтобы длина пробега машины была бы минимальной; при определении порядка обработки деталей на станке, который обеспечит минимальное суммарное время переналадки станка, необходимой при переходе от одной детали к другой.

Поскольку прямой перебор всех $(n - 1)!$ возможностей в задаче о коммивояжёре высокой размерности (при $n \sim 10^2 \dots 10^3$) даже с использованием современных ЭВМ практически неосуществим, рассмотрим эффективный метод *ветвей и границ*, который даёт точное решение данной задачи.

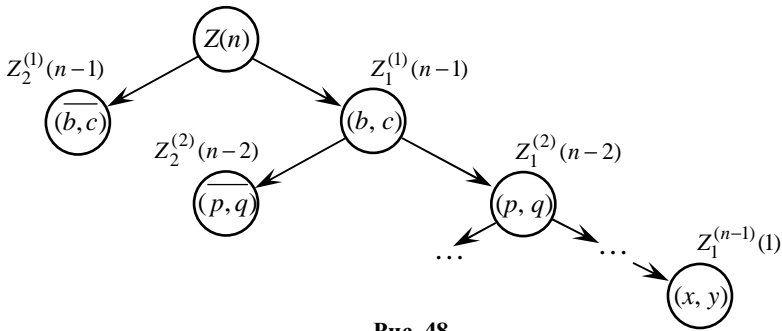


Рис. 48

Этот метод заключается в том, что в графе G выбирается некоторая дуга ветвления (b, c) и множество $Z(n)$ разбивается на подмножество $Z_1^{(1)}(n-1)$ всех контуров, содержащих дугу (b, c) , и подмножество $Z_2^{(1)}(n-1)$ всех контуров, не содержащих дугу (b, c) . Затем в G выбирается вторая дуга ветвления (p, q) и множество $Z_1^{(1)}(n-1)$ разбивается на подмножество $Z_1^{(2)}(n-2)$ всех контуров, содержащих дуги (b, c) и (p, q) , и подмножество $Z_2^{(2)}(n-2)$ всех контуров, содержащих дугу (b, c) , но не содержащих дугу (p, q) . Подобное разбиение множеств продолжается и фиксируется, наконец, последняя дуга (x, y) , определяющая множество $Z_1^{(n-1)}(1)$ из единственного гамильтонова контура, который составлен из дуг (b, c) , (p, q) , ..., (x, y) . На рисунке 48 изображено дерево T , представляющее такое ветвление.

Каждой вершине этого дерева сопоставляется значение *нижней границы* соответствующего множества контуров.

Вычисление нижней границы множества $Z(n)$ производится после *приведения* матрицы расстояний A , заключающегося в том, что: из каждого элемента каждой строки вычитают минимальный элемент этой строки и получают матрицу A' (приведение по строкам); затем из каждого элемента каждого столбца матрицы A' вычитают минимальный элемент этого столбца и получают матрицу \tilde{A} (приведение по столбцам).

Очевидно, что длина оптимального контура $\sigma_0(\tilde{A})$, вычисленная по *приведённой* матрице \tilde{A} , связана с длиной оптимального контура $\sigma_0(A)$, вычисленной по матрице A , соотношением:

$$\sigma_0(A) = \sigma_0(\tilde{A}) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \right),$$

где α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – минимальный элемент i -й строки матрицы A ; β_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – минимальный элемент j -го столбца A' . Величину

$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \right)$ назовём *константой приведения* и обозначим через h :

$$h = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j .$$

Элементы матрицы \tilde{A} являются неотрицательными величинами. Поэтому длина $\sigma(\pi)$ любого контура $\pi \in Z(n)$, вычисленная по матрице \tilde{A} , также будет неотрицательной величиной и, следовательно, длина оптимального контура $\sigma_0(\tilde{A}) \geq 0$. Из этого факта и двух предыдущих уравнений следует справедливость соотношения $\sigma_0(A) \geq h$, т.е. константа приведения является нижней границей $\gamma(Z)$ множества $Z(n)$:

$$\gamma(Z) = h .$$

Приведённая матрица \tilde{A} содержит в каждой строке и каждом столбце не менее одного нулевого элемента. Обозначим через D множество дуг, отвечающих нулевым элементам матрицы \tilde{A} :

$$D = \{(k, l) / \tilde{a}_{kl} = 0\} .$$

Для организации первого ветвления выберем дугу ветвления (b, c) , которая определяется максимальной величиной:

$$\alpha'_{bc} = \max_{(k, l) \in D} \alpha'_{kl} ,$$

где

$$\alpha'_{kl} = \min_{r \neq l} \tilde{a}_{kr} + \min_{r \neq k} \tilde{a}_{rl} .$$

Нижняя граница множества $Z_2^{(1)}(n-1)$ вычисляется путём увеличения нижней границы его непосредственного предшественника $Z(n)$ на α'_{bc} :

$$\gamma(Z_2^{(1)}) = \gamma(Z) + \alpha'_{bc} .$$

Далее в результате *стягивания* матрицы \tilde{A} по выбранной дуге ветвления (b, c) получается матрица A_1 порядка $(n-1)$, соответствующая множеству $Z_1^{(1)}(n-1)$. При этом стягивание матрицы \tilde{A} заключается в том, что из неё исключается строка b и столбец c , а элемент \tilde{a}_{cb} полага-

ется равным ∞ , так как гамильтонов контур должен быть простым по определению. Заметим, что в дальнейшем номера b и c считаются эквивалентными.

Аналогично приведению матрицы A , приводится матрица A_1 и определяется константа приведения h_1 . Нижняя граница множества $Z_1^{(1)}(n-1)$ вычисляется путём прибавления к нижней границе его непосредственного предшественника $Z(n)$ константы h_1 :

$$\gamma(Z_1^{(1)}) = \gamma(Z) + h_1.$$

Для приведённой матрицы \tilde{A}_1 составляется множество D дуг, отвечающих её нулевым элементам, определяется следующая дуга ветвления (p, q) и вычисляется нижняя граница множества $Z_2^{(2)}(n-2)$:

$$\gamma(Z_2^{(2)}) = \gamma(Z_1^{(1)}) + \alpha'_{pq}.$$

Затем матрица \tilde{A}_1 стягивается по выбранной дуге ветвления (p, q) и получается матрица A_2 порядка $(n-2)$, соответствующая множеству $Z_1^{(2)}(n-2)$, а номера p и q полагаются эквивалентными.

Нижняя граница множества $Z_1^{(2)}(n-2)$ вычисляется путём прибавления к нижней границе его непосредственного предшественника $Z_1^{(1)}(n-1)$ константы приведения матрицы A_2 :

$$\gamma(Z_1^{(2)}) = \gamma(Z_1^{(1)}) + h_2.$$

Подобным образом процесс ветвления и вычисления нижних границ множеств контуров продолжается до тех пор, пока не будет зафиксирован последний элемент (x, y) множества $Z_1^{(n-1)}(1)$, составленного из дуг (b, c) , (p, q) , ..., (x, y) гамильтонова контура π_1 , и вычислена нижняя граница $\gamma(Z_1^{(n-1)})$, равная длине $\sigma(\pi_1)$ этого контура.

Если $\sigma(\pi_1)$ окажется не больше любой из нижних границ $\gamma(Z_2^{(1)})$, $\gamma(Z_2^{(2)})$, ..., $\gamma(Z_2^{(n-2)})$ множеств, соответствующих другим конечным узлам дерева (см. рис. 48), то контур π_1 следует считать искомым оптимальным контуром π_0 . В противном случае необходимо произвести ветвление тех узлов $Z_2^{(k)}(n-k)$, для которых $\sigma(\pi_1) < \gamma(Z_2^{(k)})$, получить контуры π_2 , ..., π_m и, сравнив их длины между собой, выбрать оптимальный контур.

Рассмотрим пример решения задачи о коммивояжёре методом ветвей и границ для матрицы расстояний A , представленной табл. 16.

В столбце α_i этой таблицы размещены минимальные элементы соответствующих строк.

В результате приведения матрицы A по строкам получим матрицу A' (табл. 17). В строке β_j таблицы размещены минимальные элементы столбцов.

Приведение по столбцам матрицы A' даст матрицу \tilde{A} , представленную табл. 18.

Таблица 16

$$A = \begin{array}{c|cccccc} \begin{array}{c} i \backslash j \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \alpha_i \\ \hline 1 & \infty & 30 & 40 & 15 & 6 & 6 \\ 2 & 10 & \infty & 18 & 7 & 9 & 7 \\ 3 & 20 & 30 & \infty & 0 & 10 & 0 \\ 4 & 25 & 10 & 35 & \infty & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 8 & 7 & 6 & \infty & 6 \end{array}$$

Таблица 17

$$A' = \begin{array}{c|ccccc} \begin{array}{c} i \backslash j \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \beta_j \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 24 & 34 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & \infty & 11 & 0 & 2 \\ 3 & 20 & 30 & \infty & 0 & 10 \\ 4 & 20 & 5 & 30 & \infty & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & \infty \\ \beta_j & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Таблица 18

$$\tilde{A} = \begin{array}{c|ccccc} \begin{array}{c} i \backslash j \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 22 & 33 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 10 & 0 & 2 \\ 3 & 17 & 28 & \infty & 0 & 10 \\ 4 & 17 & 3 & 29 & \infty & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{array}$$

Вычислим константу приведения h :

$$h = \sum_{i=1}^5 \alpha_i + \sum_{j=1}^5 \beta_j = 24 + 6 = 30$$

и нижнюю границу $\gamma(Z)$ множества $Z(5)$:

$$\gamma(Z) = h = 30.$$

По матрице \tilde{A} сформируем множество D :

$$D = \{(k, l) / \tilde{a}_{kl} = 0\} = \{(1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

и для каждого его элемента вычислим соответствующее значение α'_{kl} :

$$\begin{aligned} \alpha'_{15} &= \min_{r \neq 5} \tilde{a}_{1r} + \min_{r \neq 1} \tilde{a}_{r5} = \min \{ \tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{13}, \tilde{a}_{14} \} + \\ &+ \min \{ \tilde{a}_{25}, \tilde{a}_{35}, \tilde{a}_{45}, \tilde{a}_{55} \} = \min \{ \infty, 22, 33, 9 \} + \\ &+ \min \{ 2, 10, 0, \infty \} = 9 + 0 = 9, \end{aligned}$$

$$\alpha'_{21} = \min \{ \infty, 10, 0, 2 \} + \min \{ \infty, 17, 17, 0 \} = 0 + 0 = 0,$$

$$\alpha'_{24} = 0 + 0 = 0, \quad \alpha'_{34} = 10 + 0 = 10,$$

$$\alpha'_{45} = 3 + 0 = 3, \quad \alpha'_{51} = 0 + 0 = 0,$$

$$\alpha'_{52} = 0 + 3 = 3, \quad \alpha'_{53} = 0 + 10 = 10,$$

$$\alpha'_{54} = 0 + 0 = 0.$$

Далее определим α'_{bc} :

$$\alpha'_{bc} = \max_{(k, l) \in D} \alpha'_{kl} = \max \{ 9, 0, 0, 10, 3, 0, 3, 10, 0 \} = 10.$$

Заметим, что здесь $\alpha'_{34} = 10$ и $\alpha'_{53} = 10$, следовательно, в качестве дуги ветвления (b, c) может быть выбрана дуга $(3, 4)$ или дуга $(5, 3)$. Выберем для определённости первую из них.

Вычислим нижнюю границу множества $Z_2^{(1)}$:

$$\gamma(Z_2^{(1)}) = \gamma(Z) + \alpha'_{bc} = \gamma(Z) + \alpha'_{34} = 30 + 10 = 40.$$

Стянув матрицу \tilde{A} по выбранной дуге ветвления $(3, 4)$ путём удаления строки 3 и столбца 4, а также заменой значения элемента \tilde{a}_{43} на ∞ ,

Таблица 19

$A_1 =$	$i \backslash j$	1	2	3	5
	1	∞	22	33	0
	2	0	∞	10	2
	4	17	3	∞	0
	5	0	0	0	∞

получим матрицу A_1 (табл. 19), которая соответствует множеству $Z_1^{(1)}$. Далее номера 3 и 4 будем считать эквивалентными.

Приведение матрицы A_1 не изменит её, т.е. $\tilde{A}_1 = A_1$ и $h_1 = 0$. Вычислим нижнюю границу множества $Z_1^{(1)}$:

$$\gamma(Z_1^{(1)}) = \gamma(Z) + h_1 = 30 + 0 = 30.$$

Для приведённой матрицы \tilde{A}_1 составим множество D :

$$D = \{(1, 5), (2, 1), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\},$$

выберем в качестве следующей дуги ветвления дугу (1, 5) и вычислим нижнюю границу множества $Z_2^{(2)}$:

$$\gamma(Z_2^{(2)}) = \gamma(Z_1^{(1)}) + \alpha'_{pq} = 30 + 22 = 52.$$

Стянем матрицу \tilde{A}_1 по выбранной дуге ветвления (1, 5) и получим матрицу A_2 (табл. 20), соответствующую множеству $Z_1^{(2)}$, а номера 1 и 5 будем считать эквивалентными.

Вычислим нижнюю границу множества $Z_1^{(2)}$:

$$\gamma(Z_1^{(2)}) = \gamma(Z_1^{(1)}) + h_2 = 30 + 3 = 33.$$

Таблица 20

$A_2 =$	$i \backslash j$	1	2	3
	2	0	∞	10
	4	17	3	∞
	5	∞	0	0

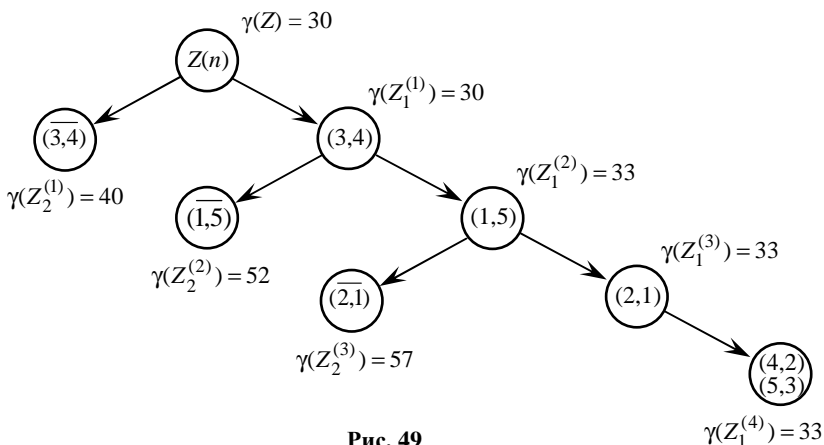


Рис. 49

Далее выбирается третья дуга ветвления (2, 1), матрица расстояний после стягивания принимает размер 2×2 и к уже имеющимся дугам (3, 4), (1, 5), (2, 1) контура π_1 добавляются две однозначно определяемые дуги (4, 2), (5, 3). Нижняя граница множества $Z_1^{(4)}$ будет равна длине этого контура, вычисляемой суммированием длин входящих в него дуг:

$$\gamma(Z_1^{(4)}) = \sigma(\pi_1) = 0 + 6 + 10 + 10 + 7 = 33.$$

На рисунке 49 изображено дерево T , полученное в результате выполненных ветвлений.

Поскольку длина $\sigma(\pi_1) = 33$ оказалась не больше любой из нижних границ $\gamma(Z_2^{(1)})$, $\gamma(Z_2^{(2)})$, $\gamma(Z_2^{(3)})$, которые соответствуют другим конечным узлам дерева, контур π_1 , составленный из дуг (3, 4), (1, 5), (2, 1), (4, 2) и (5, 3), является искомым оптимальным контуром π_0 .

Задачи и упражнения

1. Решите методом ветвей и границ задачу о коммивояжере для матрицы расстояний A :

a)

$A =$	$i \backslash j$	1	2	3	4	5
	1	∞	5	8	17	19
	2	18	∞	23	21	6
	3	23	11	∞	7	19
	4	6	18	9	∞	12
	5	10	16	14	20	∞

б)

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	6	6	21	19
2	8	∞	15	17	14
3	13	6	∞	16	12
4	18	6	5	∞	17
5	12	7	9	20	∞

$A =$

в)

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	8	19	20	12
2	8	∞	8	21	22
3	18	21	∞	10	21
4	23	9	15	∞	17
5	6	15	10	18	∞

$A =$

18. ОСНОВНАЯ МОДЕЛЬ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

Пусть имеется некоторая система, которая характеризуется *входными*, *выходными* и *промежуточными* переменными, зависящими от времени. Представим эту систему «чёрным ящиком» с конечным числом внешних полюсов, доступных для исследователя (рис. 50).

Предполагается, что имеется независимый *синхронизирующий источник*, вырабатывающий *синхронизирующие сигналы* через некоторые (необязательно постоянные) интервалы времени. Все переменные системы измеряются только в соответствующие синхронизирующим сигналам дискретные моменты времени, которые называются *тактовыми моментами*. Значение какой-либо переменной $y(t)$ в v -й тактовый момент времени t_v ($v = 1, 2, 3, \dots$) далее будем представлять в виде y_v . В соответствии

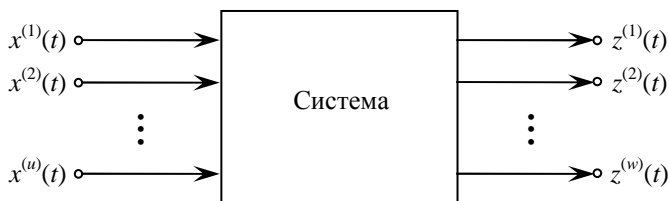


Рис. 50

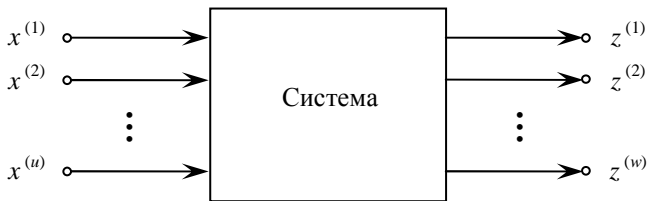


Рис. 51

с предположением о дискретности времени система называется *синхронной* и может быть представлена в виде, изображённом на рис. 51.

Пусть каждая переменная может принимать только конечное число различных значений (числовых или не числовых). Множество значений, которые может принимать переменная y , называется *алфавитом* переменной y и обозначается Y . При этом каждый элемент множества Y называется *символом*. Если алфавиты входных переменных $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(u)}$ обозначить через $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(u)}$ соответственно, то *входной алфавит* X системы будет определяться выражением:

$$X = X^{(1)} \times X^{(2)} \times \dots \times X^{(u)}.$$

Аналогично, если алфавиты выходных переменных $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(w)}$ обозначить через $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(w)}$, то *выходной алфавит* Z системы будет определяться выражением:

$$Z = Z^{(1)} \times Z^{(2)} \times \dots \times Z^{(w)}.$$

Из определений входного и выходного алфавитов следует, что одного *входного символа* $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(u)})$ алфавита X достаточно для описания всех u входных переменных, а одного *выходного символа* $z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(w)})$ алфавита Z – для описания всех w выходных переменных системы. В результате получим схематическое представление дискретной системы в виде двухполюсного ящика, показанное на рис. 52.

Для иллюстрации рассмотрим вычислительное устройство, которое имеет два входа $x^{(1)}, x^{(2)}$ и два выхода $z^{(1)}, z^{(2)}$. На вход $x^{(1)}$ в моменты времени t_v ($v = 1, 2, 3, \dots$) могут быть поданы символы 0 и 1, а на вход $x^{(2)}$ – символы 1, 2 и 3. На выходе в v -й тактовый момент устройство выдаёт величины $z_v^{(1)} = x_v^{(1)}x_v^{(2)} + x_{v-1}^{(1)}x_{v-1}^{(2)}$ и $z_v^{(2)} = |x_v^{(1)}x_v^{(2)} - x_{v-1}^{(1)}x_{v-1}^{(2)}|$. Таким образом, имеем:

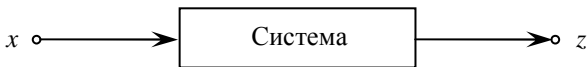


Рис. 52

$$X^{(1)} = \{0, 1\}, \quad X^{(2)} = \{1, 2, 3\},$$

$$Z^{(1)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad Z^{(2)} = \{0, 1, 2, 3\}$$

и, следовательно,

$$X = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\},$$

$$Z = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3),$$

$$(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3),$$

$$(4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3),$$

$$(6, 0), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}.$$

Значения промежуточных переменных системы определяют *состояние* системы. Состояние системы в момент времени t_v будем обозначать через s_v . Совокупность всех возможных состояний системы, которые ей присущи, называется *множеством состояний* системы и обозначается через S . Состояние s_v вместе с входным символом x_v в v -й тактовый момент времени определяет выходной символ z_v системы в данный момент и её состояние s_{v+1} в следующий $(v + 1)$ -й момент.

Формирование множества состояний в общем случае является сложной задачей, которая решается не обязательно однозначно. Так как не существует общих правил её решения, часто прибегают к методу последовательных приближений путём проб и ошибок. Затраты времени на выбор множества S зависят от интуиции исследователя и степени знания им исследуемой системы.

Конечным автоматом M (автоматом Мили) называется синхронная система с конечным входным алфавитом $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p\}$, с конечным выходным алфавитом $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q\}$, с конечным множеством состояний $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ и двумя характеристическими функциями:

$$z_v = f_z(x_v, s_v),$$

$$s_{v+1} = f_s(x_v, s_v),$$

где x_v , z_v и s_v – соответственно входной символ, выходной символ и состояние автомата M в момент времени t_v ($v = 1, 2, 3, \dots$).

Если характеристическая функция f_z конечного автомата M зависит только от его состояния, т.е. $f_z(x_v, s_v) = f_z(s_v)$, автомат называется *автоматом Мура*.

Если характеристическая функция f_z конечного автомата M зависит только от входного символа, т.е. $f_z(x_v, s_v) = f_z(x_v)$, автомат называется *тривиальным автоматом (автоматом без памяти или комбинационным устройством)*.

Далее под конечным автоматом будем понимать автомат Мили, если не оговорена его модификация.

В качестве примера рассмотрим конечный автомат (назовём его автомат A), который обрабатывает случайную последовательность гербов и цифр, получающуюся в результате многократного подбрасывания монеты, и производит отметки при появлении каждого первого герба в серии гербов и каждой, исключая первые две, цифры в серии цифр.

Входным алфавитом автомата A является множество $X = \{\text{цифра } (\text{Ц}), \text{ герб } (\text{Г})\}$, выходным алфавитом – множество $Z = \{\text{отметка } (\vee), \text{ нет отметки } (-)\}$, а множеством состояний – множество $S = \{\text{нет появления ни цифры ни герба (НПН)}, \text{ появление первой цифры (ППЦ)}, \text{ появление двух цифр (ПДЦ)}, \text{ появление первого герба (ППГ)}\}$. Отметка производится в случаях, когда автомат находится в состоянии ПДЦ и входом является Ц, или когда автомат находится в состоянии, отличном от состояния ППГ и входом является Г. При любом настоящем состоянии и появлении на входе символа Г автомат переходит в состояние ППГ. Если на вход автомата поступает *цифра*, то он из состояний НПН и ППГ переходит в состояние ППЦ, а из состояний ППЦ и ПДЦ переходит в состояние ПДЦ.

Ещё одним примером конечного автомата является автомат $A1$ для подсчёта числа слов, начинающихся с *in* и заканчивающихся на *d* (*united*, *understand* и т.п.), в тексте, который составлен из 26 строчных букв английского алфавита и пробелов. Пробел обозначим символом π , а все буквы, кроме *d*, *n* и *u*, – символом λ .

Входным алфавитом автомата $A1$ является множество $X = \{d, n, u, \pi, \lambda\}$, выходным алфавитом – множество $Z = \{\text{считать}, \text{ не считать}\}$, множеством состояний – $S = \{\text{новое слово}, \text{ ожидание нового слова}, \text{ появление } u, \text{ появление } u-n, \text{ появление } u-n-d\}$.

При настоящем состоянии автомата $A1$ *появление $u-n-d$* и входе π на его выходе появляется символ *считать*, а во всех остальных случаях – символ *не считать*. Если автомат находится в любом состоянии и на вход подаётся символ π , автомат переходит в состояние *новое слово*. При состоянии *новое слово* и входе *u* наступает состояние *появление u* , а при входе *d*, *n* или λ – состояние *ожидание нового слова*. При настоящем состоянии *появление u* и входе *n* автомат переходит в состояние *появление $u-n$* , а при входе *d*, *u* или λ – в состояние *ожидание нового слова*. Если состоянием в данный тактовый момент является *появление $u-n$* или *появление $u-n-d$* и на вход поступает *d*, то наступает состояние *появление $u-n-d$* , а при входе *n*, *u* или λ – состояние *появление $u-n$* . При состоянии *ожидание нового слова* и входе, отличном от π , автомат переходит в то же самое состояние.

Последовательность входных символов вида $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_l}$ называется *входной последовательностью*. Входная последовательность $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_l}$ имеет длину l и вызывает выходную последовательность

Таблица 21

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Вход	Г	Г	Ц	Г	Ц	Ц	Ц	Г	Ц	Ц	Ц	Г	Г	Ц	Ц	Г	Ц	Г
Состояние	НПН	НПГ	НПЦ	НПГ	НПЦ	НПЦ	НПЦ	НПГ	НПЦ	НПЦ	НПЦ	НПЦ	НПГ	НПГ	НПЦ	НПЦ	НПГ	НПЦ
Выход	√	–	–	√	–	–	√	√	–	–	√	√	–	–	–	√	–	√

$\zeta_{j_1}, \zeta_{j_2}, \dots, \zeta_{j_l}$ такой же длины. Реакцию автомата на входную последовательность можно предсказать только в том случае, если известно начальное состояние автомата.

Например, табл. 21 иллюстрирует реакцию описанного выше автомата, который предназначен для обработки входной последовательности гербов и цифр, на входную последовательность Г, Г, Ц, Г, Ц, Ц, Ц, Г, Ц, Ц, Ц, Г, Г, Ц, Ц, Г, Ц, Г, если его начальным состоянием будет состояние НПН.

Задачи и упражнения

1. Ниже описаны системы, которые могут быть представлены конечными автоматами. При этом входная переменная x и выходная переменная z указываются в скобках. Для каждого конечного автомата перечислите входной алфавит X , выходной алфавит Z и множество состояний S , а также дайте обоснование выбора множества состояний:

а) двоичные цифры 0 и 1 подаются на устройство, которое считает по модулю 3 накопленное число единиц (x – входные цифры, z – накопленное число);

б) монета подбрасывается многократно и делается отметка при чётных выпадениях цифры в последовательности цифр и при каждом втором (не обязательно подряд) выпадении герба (x – сторона монеты, z – отметка при броске);

в) грузовой лифт, обслуживающий трёхэтажный магазин, имеет кнопку вызова на каждом этаже и работает по следующим правилам: если нажата одна кнопка, то лифт движется на этаж, на котором расположена данная кнопка; если нажаты одновременно две или три кнопки, то лифт движется на самый нижний из всех этажей, на которых нажаты кнопки. Ни одна кнопка не может быть нажата во время движения лифта (x – этаж, на котором нажата кнопка, z – направление, в котором будет двигаться лифт, и число этажей, которые он при этом пройдёт без остановки).

19. ТАБЛИЦА ПЕРЕХОДОВ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

Таблица, состоящая из z_v -подтаблицы и s_{v+1} -подтаблицы, которые задают соответственно характеристические функции $f_z(x_v, s_v)$ и $f_s(x_v, s_v)$, называется *таблицей переходов* конечного автомата. Общий вид таблицы переходов представляет табл. 22. В некоторой ячейке z_v -подтаблицы на пересечении столбца ξ_i ($i = 1, 2, \dots, p$) и строки σ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) записывается значение функции $f_z(\xi_i, \sigma_j) \in Z$, а в соответствующей ячейке s_{v+1} -подтаблицы – значение функции $f_s(\xi_i, \sigma_j) \in S$.

Для иллюстрации рассмотрим табл. 23, представляющую собой таблицу переходов автомата А1, который приведён в качестве примера конечного автомата в предыдущем параграфе. В её z_v -подтаблице цифры 1 и 0 соответствуют выходным символам «считать» и «не считать», а в s_{v+1} -подтаблице цифры 1, 2, 3, 4 и 5 – состояниям «новое слово», «ожидание нового слова», «появление u », «появление $u-n$ » и «появление $u-n-d$ ».

Заметим, что таблица переходов позволяет более кратко и компактно, по сравнению со словесным описанием, охарактеризовать работу конечного автомата.

Одним из важных применений таблицы переходов является её использование для перечисления автоматов, принадлежащих к тому или иному классу.

Таблица 22

		z_v					s_{v+1}				
		ξ_1	...	ξ_i	...	ξ_p	ξ_1	...	ξ_i	...	ξ_p
x_v	s_v
	σ_1
x_v
	σ_j	$f_z(\xi_i, \sigma_j)$	$f_s(\xi_i, \sigma_j)$
x_v
	σ_n

Таблица 23

		z_v					s_{v+1}				
		d	n	u	π	λ	d	n	u	π	λ
x_v	s_v	0	0	0	0	0	2	2	3	1	2
	1	0	0	0	0	0	2	2	2	1	2
x_v	2	0	0	0	0	0	2	4	2	1	2
	3	0	0	0	0	0	5	4	4	1	4
x_v	4	0	0	0	1	0	5	4	4	1	4
	5	0	0	0	1	0	5	4	4	1	4

Автомат, имеющий n состояний, p входных и q выходных символов, называется (n, p, q) -автоматом. Мощность $N_{n, p, q}$ класса (n, p, q) -автоматов определяется формулой

$$N_{n, p, q} = (qn)^{pn}.$$

Явно минимальным (n, p, q) -автоматом называется (n, p, q) -автомат такой, когда для каждого i и каждого $j \neq i$ существует k , при котором $f_z(\xi_k, \sigma_i) \neq f_z(\xi_k, \sigma_j)$. В z_v -подтаблице явно минимального (n, p, q) -автомата все строки различны. Мощность $N'_{n, p, q}$ класса явно минимальных (n, p, q) -автоматов равна

$$N'_{n, p, q} = n^{pn} \prod_{r=0}^{n-1} (q^p - r),$$

где отрицательные значения $N'_{n, p, q}$ считаются равными нулю.

Явно сократимым (n, p, q) -автоматом называется (n, p, q) -автомат с таблицей переходов, в которой существует по крайней мере одна пара строк, например σ_i и σ_j , которые одинаковы в обеих подтаблицах или становятся одинаковыми при замене каждого символа σ_i на символ σ_j (или σ_j на σ_i). Оценка мощности $N''_{n, p, q}$ класса явно сократимых (n, p, q) -автоматов определяется неравенством

$$N''_{n, p, q} \geq (qn)^{pn} - \prod_{r=0}^{n-1} [(qn)^p - r].$$

Два автомата, у которых характеристические функции одинаковы, за исключением возможных различий в обозначениях состояний, называются *изоморфными* друг другу. Таблицей 24 представлен автомат, изоморфный автомату A1. Он получен заменой первоначальных обозначений состояний 1, 2, 3, 4 и 5 на 5, 4, 3, 2 и 1 соответственно.

Таблица 24

		z_v					s_{v+1}				
		d	n	u	π	λ	d	n	u	π	λ
x_v	s_v										
1	0	0	0	0	1	0	1	2	2	5	2
2	0	0	0	0	0	0	1	2	2	5	2
3	0	0	0	0	0	0	4	2	4	5	4
4	0	0	0	0	0	0	4	4	4	5	4
5	0	0	0	0	0	0	4	4	3	5	4

Мощность $N_{n,p,q}^{\text{ЯМ}}$ класса явно минимальных (n, p, q) -автоматов, не содержащих изоморфных автоматов, определяется формулой

$$N_{n,p,q}^{\text{ЯМ}} = \frac{n^{pn}}{n!} \prod_{r=0}^{n-1} (q^p - r),$$

где отрицательные значения $N_{n,p,q}^{\text{ЯМ}}$ принимаются равными нулю.

Задачи и упражнения

1. Постройте таблицу переходов для каждого конечного автомата из упр. 1, $a - в$ предыдущего параграфа и проверьте корректность его работы для некоторой случайной входной последовательности при заданном начальном состоянии.

2. Постройте автомат, изоморфный автомату с приведённой ниже таблицей переходов, посредством замены обозначений состояний 1, 2, 3, 4, 5 и 6 на 2, 3, 4, 5, 6 и 1 соответственно:

		z_v		s_{v+1}				z_v		s_{v+1}	
		α	β	α	β			α	β	α	β
s_v	x_v	α	β	α	β	s_v	x_v	α	β	α	β
1		0	0	1	1	4		0	1	4	2
2		0	0	2	1	5		1	0	5	3
3		0	1	3	2	6		1	0	6	3

20. ГРАФ ПЕРЕХОДОВ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

Графом переходов (n, p, q) -автомата называется взвешенный ориентированный граф, вершины которого соответствуют состояниям $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ этого автомата, а дуги – возможным переходам из одного состояния в другое. Каждая дуга графа переходов вида (σ_i, σ_j) имеет вес, равный логической сумме $(\xi_{k_1} / \zeta_{l_1}) \vee (\xi_{k_2} / \zeta_{l_2}) \vee \dots \vee (\xi_{k_r} / \zeta_{l_r})$. Для любого слагаемого вида $(\xi_{k_h} / \zeta_{l_h})$, называемого *парой вход-выход*, верны равенства $\zeta_{l_h} = f_z(\xi_{k_h}, \sigma_i)$, $\sigma_j = f_s(\xi_{k_h}, \sigma_i)$, т.е. автомат, находясь в состоянии σ_i , при входе ξ_{k_h} выдаёт выходной символ ζ_{l_h} и переходит в состояние σ_j .

На рисунке 53 изображён граф переходов автомата $A1$, соответствующий табл. 23.

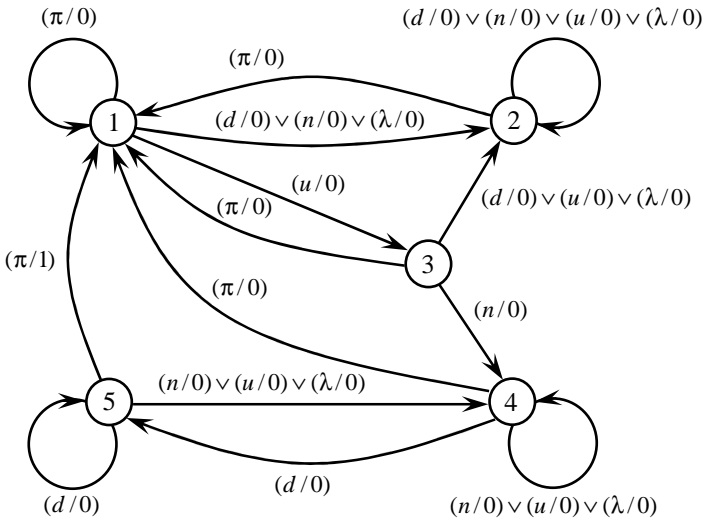


Рис. 53

Заметим, что дуги, выходящие из любой вершины графа переходов, содержат полное число p пар вход-выход, равное мощности входного алфавита. Так, каждая вершина графа переходов автомата $A1$ содержит на выходящих из неё дугах по пять таких пар, поскольку мощность входного алфавита этого автомата равна пяти.

Непосредственное преимущество графа переходов состоит в том, что он облегчает определение реакции автомата на входную последовательность. Например, реакцией автомата $A1$ на входную последовательность $\pi, u, n, \lambda, \lambda, d, \pi$ при начальном состоянии 3 будет выходная последовательность $0, 0, 0, 0, 0, 0, 1$, которая легко определяется по рис. 53. При этом автомат последовательно побывает в состояниях 1, 3, 4, 4, 4, 5 и 1.

В терминах графов переходов легко ввести классификацию состояний и подавтоматов, разделив все дуги на входящие, выходящие и петли.

Преходящим состоянием называется состояние, соответствующее вершине графа переходов, которая не имеет входящих дуг, но имеет по крайней мере одну выходящую дугу. *Тупиковое состояние* соответствует вершине графа, которая не имеет выходящих дуг, но имеет по крайней мере одну входящую дугу. *Изолированное состояние* определяет вершина без входящих и без выходящих дуг. Автомат $A2$, граф переходов которого приведён на рис. 54, имеет преходящие состояния 1 и 5, тупиковые состояния 2 и 4, изолированное состояние 6.

Любое разбиение множества S состояний автомата на подмножества определяет *подавтоматы* этого автомата.

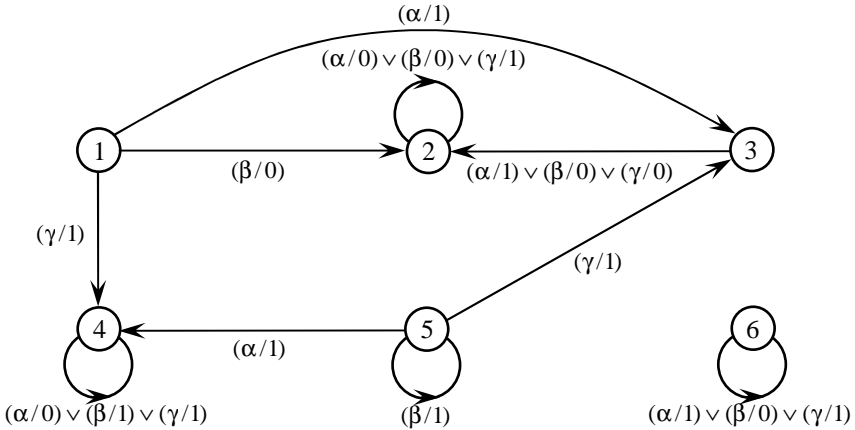


Рис. 54

Преходящим подавтоматом называется такой подавтомат, который можно покинуть, но нельзя вернуться обратно. В *тупиковый подавтомат* можно попасть из некоторого другого подавтомата и после уже нельзя покинуть. *Изолированный подавтомат* не может быть достигнут ни из какого другого подавтомата и не может быть переведён ни в какой другой подавтомат. Множество состояний $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ автомата A_3 разбито, как это видно из рис. 55, на подмножества $S_1 = \{1, 4, 7\}$, $S_2 = \{2, 5, 8\}$ и $S_3 = \{3, 6, 9\}$, которые определяют соответственно тупиковый, преходящий и изолированный подавтоматы.

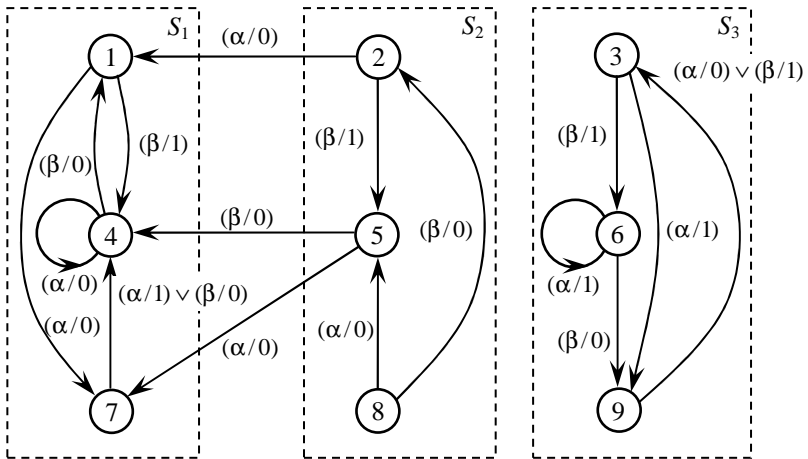


Рис. 55

Пусть $G_k(S_i)$ обозначает множество всех состояний автомата, в которые можно попасть из состояний подмножества S_i при подаче на вход последовательности не длиннее, чем k , а $G(S_i)$ – множество всех состояний, в которые можно попасть при подаче на вход последовательности любой длины. Множество $G(S_i)$ позволяет определить следующий алгоритм.

Алгоритм G .

- 1) Задать S_i .
- 2) $G_0(S_i) \leftarrow S_i, k \leftarrow 1$.
- 3) $G_k(S_i) \leftarrow G_{k-1}(S_i) \cup O[G_{k-1}(S_i)]$, где $O[G_{k-1}(S_i)]$ – окрестность единичного радиуса множества $G_{k-1}(S_i)$.
- 4) Если $G_k(S_i) \neq G_{k-1}(S_i)$, то $k \leftarrow k + 1$ и вернуться к шагу 3; иначе $G(S_i) = G_k(S_i)$. ■

Применительно к автомату $A3$ этот алгоритм для $S_i = \{5, 6\}$ найдёт $G(S_i) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Если подмножество S_i образовано только из одного состояния σ_j , то множество $G(S_i) = G(\sigma_j)$ называется σ_j -достижимым множеством. Например, 4-достижимым множеством автомата $A3$ является множество $S_1 = \{1, 4, 7\}$, определяющее его тупиковый подавтомат.

Пусть σ_i и σ_j – два состояния в автомате с n состояниями. Если состояние σ_j вообще достижимо из состояния σ_i , то оно достижимо при подаче входной последовательности длиной не более чем $(n - 1)$.

Когда известно, что начальным состоянием автомата M является состояние σ_j , автомат можно сократить, заменив множество состояний S на σ_j -достижимое множество. Так, для начального состояния 4 поведение автомата $A3$ эквивалентно поведению его тупикового подавтомата с множеством состояний $S_1 = \{1, 4, 7\}$, а для начального состояния 6 – поведению изолированного подавтомата с множеством состояний $S_3 = \{3, 6, 9\}$.

Предположим, что в графе переходов автомата M все его дуги заменены соответствующими рёбрами. При этом пусть $H_k(S_i)$ обозначает множество всех состояний автомата, соединённых с состояниями из множества S_i цепями не длиннее k , а $H(S_i)$ – множество всех состояний автомата, соединённых с состояниями из множества S_i цепями произвольной длины. Если подмножество S_i состоит только из σ_j , то множество $H(S_i) = H(\sigma_j)$ является множеством всех состояний, соединённых с σ_j цепями любой длины.

Множество $H(S_i)$ можно определить с помощью алгоритма H , полученного из алгоритма G путём замены каждого символа G на символ H . Например, для автомата $A3$ при $S_i = \{1, 4\}$ множество $H(S_i)$ равно множеству $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, а при $S_i = \{9\}$ – множеству $\{3, 6, 9\}$.

Автомат называется *разложимым автоматом*, если он содержит два или более изолированных подавтомата. Если для автомата M множество $H(\sigma_j) = S$, то автомат M неразложим, в противном случае $H(\sigma_j)$ определяет неразложимый изолированный подавтомат автомата M . Макси-

мальное разложение автомата, т.е. разложение автомата на максимально возможное число изолированных подавтоматов, позволяет выполнить следующий алгоритм.

Алгоритм К.

1) $S_1 \leftarrow S, k \leftarrow 1$.

2) Из S_k выбрать любое состояние σ_{i_k} и найти $H(\sigma_{i_k})$, определяющее k -й изолированный подавтомат.

3) Если $H(\sigma_{i_1}) \cup H(\sigma_{i_2}) \cup \dots \cup H(\sigma_{i_k}) \neq S$, то $S_{k+1} \leftarrow S \setminus (H(\sigma_{i_1}) \cup H(\sigma_{i_2}) \cup \dots \cup H(\sigma_{i_k}))$, $k \leftarrow k + 1$ и вернуться к шагу 2. В противном случае k изолированных подавтоматов, определяемых множествами $H(\sigma_{i_1}), H(\sigma_{i_2}), \dots, H(\sigma_{i_k})$, представляют максимальное разложение автомата. ■

В применении к автомату $A3$ алгоритм K найдёт его разложение на два изолированных подавтомата, определяемых множествами $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ и $\{3, 6, 9\}$. Применительно к автомату $A1$ этот же алгоритм обнаружит единственный изолированный подавтомат, определяемый множеством $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, которое равно множеству S , т.е. автомат $A1$ неразложим.

Два или более автоматов называются *сравнимыми*, когда они имеют одинаковые входные алфавиты. Пусть M_1, M_2, \dots, M_N – сравнимые автоматы, представляющие N различных систем. Если автоматы M_1, M_2, \dots, M_N понимать как изолированные подавтоматы автомата M , то M называется *расцепляемым автоматом* автоматов M_1, M_2, \dots, M_N и обозначается $\Delta(M_1, M_2, \dots, M_N)$. Граф переходов расцепляемого автомата $\Delta(M_1, M_2, \dots, M_N)$ является объединением графов переходов автоматов M_1, M_2, \dots, M_N , в которых состояния переименованы так, чтобы в $\Delta(M_1, M_2, \dots, M_N)$ не было двух одинаковых обозначений его состояний.

В качестве примера на рис. 56, 57 представлены графы переходов автоматов $A4$ и $A5$, а на рис. 58 – граф переходов расцепляемого автомата $\Delta(A4, A5)$.

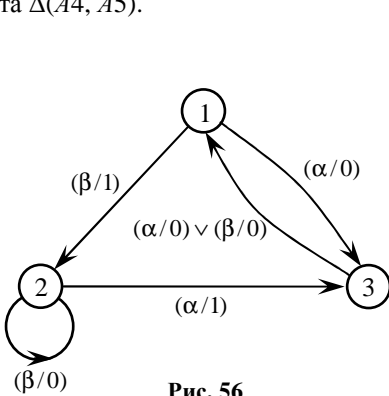


Рис. 56

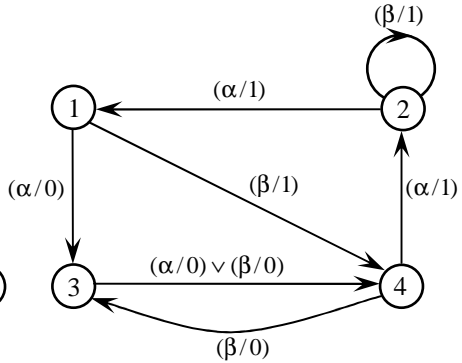


Рис. 57

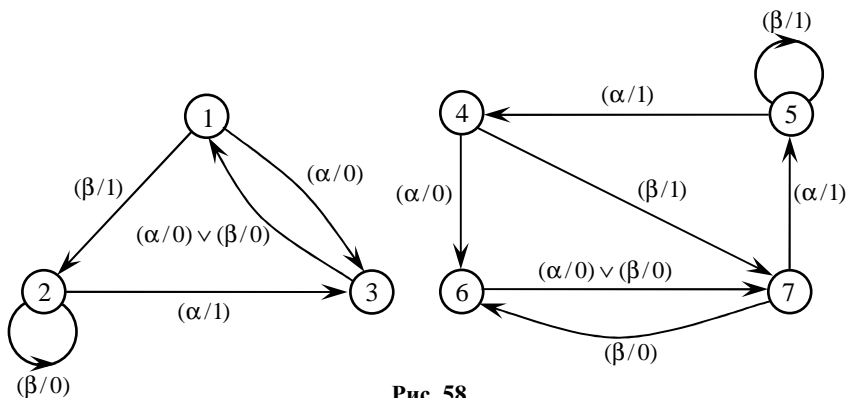


Рис. 58

Задачи и упражнения

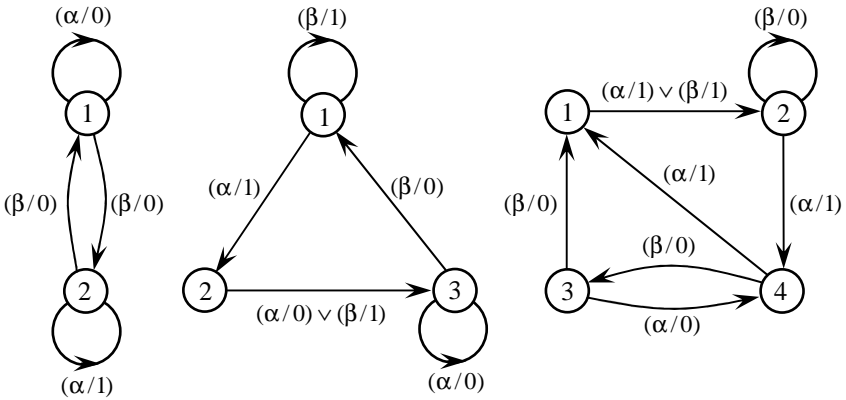
1. Постройте граф переходов для каждого конечного автомата из упр. 1, $a - в$ параграфа 18.
2. Для автомата, характеристические функции которого заданы ниже таблицей переходов: а) постройте граф переходов; б) определите переходящие, тупиковые и изолированные состояния; в) определите 1, 2, ..., 8-достижимые множества $G(1), G(2), \dots, G(8)$.

		z_v		s_{v+1}				z_v		s_{v+1}	
		α	β	α	β			α	β	α	β
s_v	x_v					s_v	x_v				
1		0	1	2	2	5		1	0	1	6
2		1	0	2	2	6		0	1	7	1
3		1	0	7	6	7		1	1	7	7
4		0	1	4	3	8		1	0	8	8

3. Найдите по алгоритму K максимальное разложение автомата A , представленного таблицей переходов:

		z_v		s_{v+1}				z_v		s_{v+1}	
		α	β	α	β			α	β	α	β
s_v	x_v					s_v	x_v				
1		0	1	3	2	6		1	0	5	4
2		0	0	2	1	7		1	1	9	8
3		1	0	2	2	8		1	0	8	9
4		0	1	1	5	9		0	1	7	7
5		0	0	3	2						

4. Постройте таблицу переходов для расщепляемого автомата, который состоит из приведённых ниже автоматов.



21. МАТРИЦА ПЕРЕХОДОВ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

Матрицей переходов (n, p, q) -автомата M называется матрица $M = [m_{ij}]_{n \times n}$, элементы которой определяются следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} (\xi_{k_1} / \zeta_{l_1}) \vee (\xi_{k_2} / \zeta_{l_2}) \vee \dots \vee (\xi_{k_r} / \zeta_{l_r}), & \text{если } (\sigma_i, \sigma_j) \in G; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $(\xi_{k_1} / \zeta_{l_1}) \vee (\xi_{k_2} / \zeta_{l_2}) \vee \dots \vee (\xi_{k_r} / \zeta_{l_r})$ – дизъюнкция пар вход-выход, каждая из которых переводит автомат из состояния σ_i в состояние σ_j .

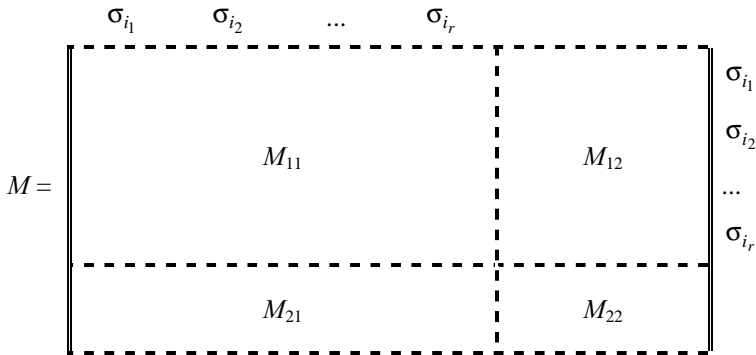
Каждая строка матрицы переходов должна содержать ровно p пар вход-выход. Если в столбце σ_k все недиагональные элементы равны нулю, а в строке σ_k существуют недиагональные элементы, отличные от нуля, то состояние σ_k является переходящим состоянием. Если в строке σ_k все недиагональные элементы нулевые, а в столбце σ_k существуют ненулевые недиагональные элементы, состояние σ_k является тупиковым. Если в столбце σ_k и в строке σ_k все недиагональные элементы равны нулю, σ_k – изолированное состояние.

Например, матрица переходов автомата A_2 будет иметь следующий вид:

	1	2	3	4	5	6	
A2 =	0	$(\beta/0)$	$(\alpha/1)$	$(\gamma/0)$	0	0	1
	0	$(\alpha/0) \vee (\beta/0) \vee (\gamma/1)$	0	0	0	0	2
	0	$(\alpha/1) \vee (\beta/0) \vee (\gamma/0)$	0	0	0	0	3
	0	0	0	$(\alpha/0) \vee (\beta/1) \vee (\gamma/1)$	0	0	4
	0	0	$(\gamma/1)$	$(\alpha/1)$	$(\beta/1)$	0	5
	0	0	0	0	0	$(\alpha/1) \vee (\beta/0) \vee (\gamma/1)$	6

Каждая строка этой матрицы содержит ровно три пары вход-выход. Состояния 1 и 5 являются переходящими, состояния 2 и 4 – тупиковыми, а состояние 6 – изолированным.

Для того чтобы установить, определяет ли множество $S_i = \{ \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_r} \}$ переходящий, тупиковый или изолированный подавтомат, надо строки и соответственно столбцы матрицы M переставить так, чтобы строки и столбцы $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_r}$ заняли соседние положения, начиная с первой строки и первого столбца. Такая перестановка делит матрицу M на четыре подматрицы M_{11}, M_{12}, M_{21} и M_{22} :



Если M_{21} целиком заполнена нулями ($= 0$), а M_{12} нет ($\neq 0$), то множество S_i определяет переходящий подавтомат; если $M_{21} \neq 0$ и $M_{12} = 0$, то оно определяет тупиковый подавтомат; если $M_{21} = 0$ и $M_{12} = 0$, то – изолированный подавтомат.

Строки и столбцы матрицы переходов автомата $A3$ переставлены так, что строки и столбцы 1, 4, 7 оказались собранными вместе, а их пересечения находятся в области подматрицы M_{11} :

$$A3 = \begin{array}{ccccccccc|c}
 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & \\
 \hline
 & 0 & (\beta/1) & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & (\beta/0) & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
 \hline
 & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) & 0 & (\alpha/1) & 3 \\
 & 0 & (\beta/0) & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) & 0 & (\beta/0) & 6 \\
 & 0 & 0 & 0 & (\beta/0) & 0 & (\alpha/1) & 0 & 0 & 0 & 8 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
 \hline
 \end{array}$$

Здесь подматрица $M_{21} \neq 0$, а подматрица $M_{12} = 0$. Следовательно, множество состояний $\{1, 4, 7\}$ автомата $A3$ определяет его тупиковый подавтомат.

Каждый ненулевой элемент матрицы M , который находится в ячейке (i, j) и соответствует пути из состояния σ_i в состояние σ_j длины 1, представим в виде π_{ij} . Преобразованную таким образом матрицу переходов обозначим \overline{M} . Тогда каждый ненулевой элемент в ячейке (i, j) матрицы \overline{M}^k вида $\pi_{i_1 j_1}, \pi_{i_1 j_2}, \dots, \pi_{i_{k-1} j}$ будет представлять путь длины k , ведущий из σ_i в состояние σ_j . Например, матрицы переходов $\overline{A1}$ и $\overline{A1}^2$ автомата $A1$ будет выглядеть следующим образом:

$$\overline{A1} = \begin{array}{ccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 \hline
 & \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 1 \\
 & \pi_{21} & \pi_{22} & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 & \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} & 0 & 3 \\
 & \pi_{41} & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & 4 \\
 & \pi_{51} & 0 & 0 & \pi_{54} & \pi_{55} & 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\overline{A1}^2 = \begin{array}{ccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 \hline
 & \pi_{11}\pi_{11} + \pi_{12}\pi_{21} + \pi_{13}\pi_{31} & \pi_{11}\pi_{12} + \pi_{12}\pi_{22} + \pi_{13}\pi_{32} & & & & \\
 & \pi_{21}\pi_{11} + \pi_{22}\pi_{21} & \pi_{21}\pi_{12} + \pi_{22}\pi_{22} & & & & \\
 & \pi_{31}\pi_{11} + \pi_{32}\pi_{21} + \pi_{34}\pi_{41} & \pi_{31}\pi_{12} + \pi_{32}\pi_{22} & & & & \\
 & \pi_{41}\pi_{11} + \pi_{44}\pi_{41} + \pi_{45}\pi_{51} & \pi_{41}\pi_{12} & & & & \\
 & \pi_{51}\pi_{11} + \pi_{54}\pi_{41} + \pi_{55}\pi_{51} & \pi_{51}\pi_{12} & & & & \\
 \hline
 & 3 & 4 & 5 & & & \\
 & \pi_{11}\pi_{13} & \pi_{13}\pi_{34} & 0 & & & 1 \\
 & \pi_{21}\pi_{13} & 0 & 0 & & & 2 \\
 & \pi_{31}\pi_{13} & \pi_{34}\pi_{44} & \pi_{34}\pi_{45} & & & 3 \\
 & \pi_{41}\pi_{13} & \pi_{44}\pi_{44} + \pi_{45}\pi_{54} & \pi_{44}\pi_{45} + \pi_{45}\pi_{55} & & & 4 \\
 & \pi_{51}\pi_{13} & \pi_{54}\pi_{44} + \pi_{55}\pi_{54} & \pi_{54}\pi_{45} + \pi_{55}\pi_{55} & & & 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

Из матрицы $\overline{A1}^2$ видно, в частности, что имеются два пути длиной 2 из состояния 3 в состояние 2, а именно $\pi_{31}\pi_{12}$ и $\pi_{32}\pi_{22}$, и нет путей длиной 2 из состояния 2 в состояние 4 или 5.

Путь $\pi_{i_1}, \pi_{l_1 l_2}, \dots, \pi_{l_{k-1} j}$, ведущий из σ_i в σ_j , называется *элементарным путём* (длиной k), если индексы $i, l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, j$ различны, и *элементарным контуром* (длиной k), если индексы l_1, l_2, \dots, l_{k-1} различны, а индексы i, j равны. В автомате с n состояниями длина элементарного пути не может быть больше $(n - 1)$, а длина элементарного контура не может быть больше n . Путь, который не является элементарным, называется *избыточным*.

Обозначим через $\overline{M}^{(k)}$ матрицу, элемент в ячейке (i, j) которой содержит только элементарные пути длиной k , ведущие из σ_i в σ_j . По заданной матрице \overline{M} получить матрицу $\overline{M}^{(l)}$ для $l > 0$ позволяет следующий алгоритм.

Алгоритм L.

1) Получить $\overline{M}' = \overline{M}^{(1)}$ из матрицы \overline{M} , заменяя нулями все ненулевые элементы её главной диагонали. Переменной $k \leftarrow 1$.

2) Найти произведение $\overline{M}^{(1)} \overline{M}^{(k)}$ и заменить в нём каждый избыточный путь на ноль, получив таким образом $\overline{M}^{(k+1)}$.

3) Если $k + 1 < l$, то $k \leftarrow k + 1$ и вернуться к шагу 2; в противном случае $\overline{M}^{(k+1)} = \overline{M}^{(l)}$. ■

Проиллюстрируем применение алгоритма L для построения матриц $\overline{A1}'$, $\overline{A1}^{(2)}$, $\overline{A1}^{(3)}$, $\overline{A1}^{(4)}$:

$$\overline{A1}' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} & 0 \\ \pi_{41} & 0 & 0 & 0 & \pi_{45} \\ \pi_{51} & 0 & 0 & \pi_{54} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\overline{A1}^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \pi_{13}\pi_{32} & 0 & \pi_{13}\pi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{32}\pi_{21} + \pi_{34}\pi_{41} & \pi_{31}\pi_{12} & 0 & 0 & \pi_{34}\pi_{45} \\ \pi_{45}\pi_{51} & \pi_{41}\pi_{12} & \pi_{41}\pi_{13} & 0 & 0 \\ \pi_{54}\pi_{41} & \pi_{51}\pi_{12} & \pi_{51}\pi_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\overline{A1}^{(3)} = \begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{13}\pi_{34}\pi_{45} & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13}\pi_{34} & 0 & 2 \\ \hline & \pi_{34}\pi_{45}\pi_{51} & \pi_{34}\pi_{41}\pi_{12} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & \pi_{41}\pi_{13}\pi_{32} + \pi_{45}\pi_{51}\pi_{12} & \pi_{45}\pi_{51}\pi_{13} & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & \pi_{51}\pi_{13}\pi_{32} + \pi_{54}\pi_{41}\pi_{12} & \pi_{54}\pi_{41}\pi_{13} & \pi_{51}\pi_{13}\pi_{34} & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\overline{A1}^{(4)} = \begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{21}\pi_{13}\pi_{34}\pi_{45} & 2 \\ & 0 & \pi_{34}\pi_{45}\pi_{51}\pi_{12} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & \pi_{45}\pi_{51}\pi_{13}\pi_{32} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & \pi_{54}\pi_{41}\pi_{13}\pi_{32} & 0 & 0 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Если существует путь, который ведёт из состояния σ_i в состояние σ_j автомата M с n состояниями, то кратчайший такой путь представляется некоторым элементом (i, j) одной из матриц $\overline{M}^{(k)}$ при $1 \leq k \leq n - 1$ и может быть найден с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм P.

1) $k \leftarrow 1$.

2) Найти $\overline{M}^{(k)}$.

3) Если элемент (i, j) матрицы $\overline{M}^{(k)}$ равен нулю и $k < n - 1$, то $k \leftarrow k + 1$ и вернуться к шагу 2.

4) Если элемент (i, j) этой матрицы равен нулю и $k = n - 1$, то путь из σ_i в σ_j не существует; иначе элемент (i, j) представляет кратчайший путь из состояния σ_i в состояние σ_j . ■

Например, кратчайшим путём из состояния 1 в состояние 5 является путь $\pi_{13}\pi_{34}\pi_{45}$, поскольку элемент $(1, 5)$ в матрицах $\overline{A1}^{(1)}$ и $\overline{A1}^{(2)}$ равен нулю, но в матрице $\overline{A1}^{(3)}$ — этому пути.

В автомате с n состояниями *полным (гамильтоновым) контуром* называется элементарный контур длины n . Главная диагональ матрицы $\overline{M}^{(n-1)}$ содержит все полные контуры автомата M .

Так, все элементы главной диагонали матрицы $\overline{A1}^{(n-1)}$ равны нулю, следовательно автомат $A1$ не содержит полных контуров. Напротив, автомат $A4$ с тремя состояниями и матрицей

$$\overline{A4} \overline{A4}^{(2)} = \begin{array}{ccc|ccc} & 1 & 2 & 3 & & \\ \hline & \pi_{12}\pi_{23}\pi_{31} & \pi_{13}\pi_{31}\pi_{12} & 0 & 1 & \\ & 0 & \pi_{23}\pi_{31}\pi_{12} & 0 & 2 & \\ & 0 & 0 & \pi_{31}\pi_{12}\pi_{23} & 3 & \end{array}$$

имеет полные контуры $\pi_{12}\pi_{23}\pi_{31}$, $\pi_{23}\pi_{31}\pi_{12}$ и $\pi_{31}\pi_{12}\pi_{23}$.

Задачи и упражнения

1. Постройте матрицу переходов для каждого конечного автомата из упр. 1, $a - e$ параграфа 18.

2. В автомате A , заданном приведённой ниже матрицей переходов:
 а) определите преходящие, тупиковые и изолированные состояния;
 б) определите $G_1(5, 7)$ и $H_1(2, 3)$; в) путём изменения порядка строк и столбцов матрицы переходов определите, составляют ли множества состояний $\{1, 2, 4, 7\}$ и $\{3, 5, 6, 8\}$ пару из преходящего и тупикового подавтоматов, пару изолированных подавтоматов или пару подавтоматов, не принадлежащих ни к одному из указанных типов.

$$A = \begin{array}{cccccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \hline & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & (\alpha/0) & 0 & (\beta/1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & 0 & (\alpha/1) & 0 & (\beta/0) & 0 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & (\alpha/0) & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/1) & 5 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/1) \vee (\beta/0) & 0 & 0 & 6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta/0) & 0 & 0 & (\alpha/1) & 7 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha/0) \vee (\beta/1) & 0 & 0 & 8 \end{array}$$

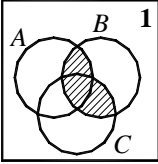
3. Для автомата A из предыдущей задачи: а) построьте \overline{A} , \overline{A}^{-2} , \overline{A}^{-3} ;
 б) построьте $\overline{A}^{(1)}$, $\overline{A}^{(2)}$, ..., $\overline{A}^{(7)}$; в) установите, что этот автомат не имеет полных контуров.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ И УПРАЖНЕНИЯМ

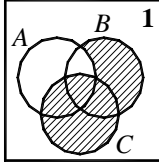
Параграф 1

1. **а)** $\{\emptyset, \{a\}\}$; **б)** $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$;
в) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$; **г)** $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

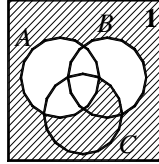
2.



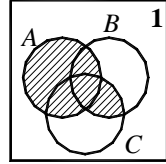
а)



б)



в)



г)

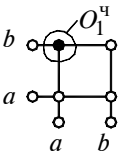
3. **а)** 7, 8, 58; **б)** 10, 20, 43; **в)** 5, 7, 51; **г)** 15, 20, 33.

4. **а)** $\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$; **б)** $\{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$; **в)** $\{(b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\}$; **г)** $\{(3, b), (3, c), (3, e), (4, b), (4, c), (4, e)\}$.

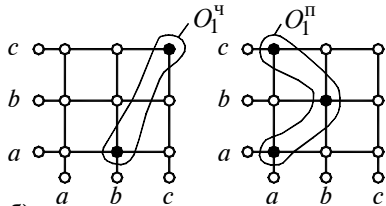
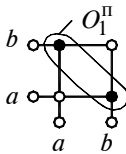
5. **а)** $\{(a_1, b_1, c_1), (a_1, b_1, c_2), (a_1, b_2, c_1), (a_1, b_2, c_2), (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_1), (a_2, b_2, c_2)\}$; **б)** $\{(т, о, ?), (т, о, !), (д, о, ?), (д, о, !)\}$; **в)** $\{(3, d, *), (3, e, *), (4, d, *), (4, e, *)\}$; **г)** $\{(р, а, к), (р, а, м), (р, о, к), (р, о, м), (т, а, к), (т, а, м), (т, о, к), (т, о, м)\}$.

7. Решения не единственные: **а)** $F_2^{\text{ч}} = \{(x_1, y_1, z_3), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\}$;
 $F_2^{\text{н}} = \{(x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_3), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\}$; **б)** $F_2^{\text{ч}} = \{(x_1, y_1, z_2), (x_3, y_1, z_1)\}$;
 $F_2^{\text{н}} = \{(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_2, z_3), (x_2, y_1, z_2), (x_2, y_2, z_3), (x_3, y_1, z_1), (x_3, y_2, z_2)\}$; **в)** $F_2^{\text{ч}} = \{(x_1, y_3, z_2), (x_2, y_2, z_1), (x_2, y_3, z_2)\}$;
 $F_2^{\text{н}} = \{(x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_2), (x_1, y_3, z_1), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_2, y_3, z_2)\}$; **г)** $F_2^{\text{ч}} = \{(x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_4)\}$;
 $F_2^{\text{н}} = \{(x_1, y_1, z_4), (x_1, y_2, z_3), (x_2, y_1, z_3), (x_2, y_2, z_2)\}$.

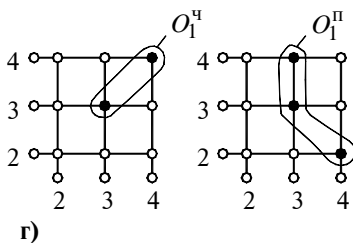
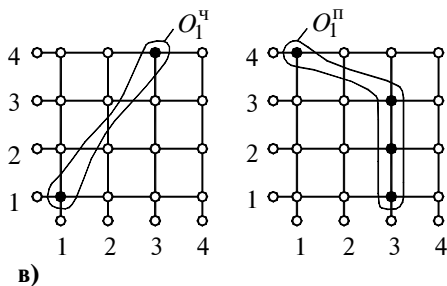
9. Решения не единственные:



а)



б)



10. Решения не единственные: **а)** $O_2^ч = \{(a, a, b)\}$; $O_2^п = \{(a, a, b), (a, b, b), (b, a, b), (b, b, a)\}$; **б)** $O_2^ч = \{(1, 1, 3), (2, 2, 2), (3, 2, 1)\}$; $O_2^п = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 3, 3), (2, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 3), (3, 1, 3), (3, 2, 2), (3, 3, 1)\}$; **в)** $O_2^ч = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$; $O_2^п = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$; **г)** $O_2^ч = \{(a, a, b), (b, c, c), (c, a, b), (c, b, a)\}$; $O_2^п = \{(a, a, a), (a, b, a), (a, c, a), (b, a, c), (b, b, c), (b, c, c), (c, a, b), (c, b, b), (c, c, a)\}$.

Параграф 2

1. **а), д)** нейтральный элемент 0. Неидемпотентный группоид, абелев группоид, полугруппа, абелева полугруппа, группа, абелева группа; **б)** нейтральный элемент 1. Идемпотентный группоид, абелев группоид, полугруппа, абелева полугруппа, не группа, не является абелевой группой; **е)** нейтральный элемент 1. Неидемпотентный группоид, абелев группоид, полугруппа, абелева полугруппа, не группа, не является абелевой группой; **в), ж)** нейтральный элемент \emptyset . Идемпотентный группоид, абелев группоид, полугруппа, абелева полугруппа, не группа, не является абелевой группой; **г), з)** нейтральный элемент 1. Идемпотентный группоид, абелев группоид, полугруппа, абелева полугруппа, не группа, не является абелевой группой.

2. **а), в)** кольцо, тело, поле; **б), г)** не кольцо, не тело, не поле.

Параграф 3

1.

а)

	a	b	c	d
a	1	1		
b		1	1	
c	1			
d				1

б)

	a	b	c	d
a			1	
b	1			1
c			1	1
d				

в)

	a	b	c	d
a		1		
b	1			1
c	1			
d		1	1	

г)

	a	b	c	d
a				1
b			1	
c		1	1	
d	1			1

3. **а)** да, частично упорядоченное множество; **б)** нет; **в)** нет; **г)** да, частично упорядоченное множество; **д)** нет; **е)** да, линейно упорядоченное множество.

4. **а)** да, частично упорядоченное множество; **б)** да, частично упорядоченное множество; **в)** нет; **г)** да, линейно упорядоченное множество.

5. **а)** да, $n = 2$, $K(a) = \{a, b\}$; $M = \bigcup_{i=1}^2 M_i$, $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{c, d\}$;

б) нет; **в)** нет; **г)** да, $n = 2$, $K(a) = \{a\}$; $M = \bigcup_{i=1}^2 M_i$, $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{b, c, d\}$;

д) да, $n = 3$, $K(a) = \{a\}$; $M = \bigcup_{i=1}^3 M_i$, $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{b, c\}$, $M_3 = \{d\}$;

е) да, $n = 2$, $K(a) = \{a, b, d\}$; $M = \bigcup_{i=1}^2 M_i$, $M_1 = \{a, b, d\}$, $M_2 = \{c\}$; **ж)** нет;

з) да, $n = 2$, $K(a) = \{a, c\}$; $M = \bigcup_{i=1}^2 M_i$, $M_1 = \{a, c\}$, $M_2 = \{b, d\}$.

Параграф 4

1. **а)** нет; **б)** да, $\mu = \{c, a, b\}$; **в)** нет; **г)** да, $\mu_1 = \{b, a, d\}$, $\mu_2 = \{a, g, e\}$;
д) да, $\mu_1 = \{a, c, e\}$, $\mu_2 = \{b, a, g\}$, $\mu_3 = \{b, e, d\}$.

Параграф 5

2. **а)** $f_{\min}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$; **б)** $f_{\min}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3$;
в) $f_{\min}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1$; **г)** $f_{\min}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_2$;
д) $f_{\min}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \vee x_2$; **е)** $f_{\min}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_2$.

3. **а)** $f_{\min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_4$; **б)** $f_{\min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3$;
в) $f_{\min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_4$; **г)** $f_{\min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1$.

Параграф 6

1. **а)** $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_5) = x_1 \bar{x}_3 \vee x_5$; **б)** $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_6) = x_2 x_6 \vee x_1 \bar{x}_3$,
ИЛИ $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_6) = x_2 x_6 \vee \bar{x}_3 x_4$; **в)** $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_7) = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_5 x_6 \vee \bar{x}_1 x_3$,
ИЛИ $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_7) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_6 x_7 \vee \bar{x}_1 x_3$, ИЛИ $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_7) =$
 $= \bar{x}_1 x_5 \vee \bar{x}_5 x_6 \vee \bar{x}_1 x_3$, ИЛИ $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_7) = \bar{x}_1 x_5 \vee x_6 x_7 \vee \bar{x}_1 x_3$;
г) $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_7) = x_5 \bar{x}_7 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$, ИЛИ $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_7) = x_5 \bar{x}_7 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$, ИЛИ
 $f_{\min}(x_1, x_2, \dots, x_7) = x_5 \bar{x}_7 \vee \bar{x}_2 x_6$.

Параграф 7

1. **а)** не сохраняет константу 0, сохраняет константу 1, нелинейная, несамодвойственная, немонотонная; **б)** сохраняет константу 0, сохраняет константу 1, нелинейная, несамодвойственная, монотонная; **в)** не сохраняет константу 0, не сохраняет константу 1, нелинейная, несамодвойственная, немонотонная; **г)** сохраняет константу 0, сохраняет константу 1, нелинейная, несамодвойственная, монотонная; **д)** не сохраняет константу 0, не сохраняет константу 1, линейная, самодвойственная, немонотонная; **е)** сохраняет константу 0, сохраняет константу 1, нелинейная, самодвойственная, немонотонная.

2. **а)** неполная, не базис; **б)** полная, не базис; **в)** полная, базис; **г)** неполная, не базис; **д)** полная, не базис; **е)** полная, базис.

Параграф 8

1.

$$\text{а) } \begin{array}{c} v_2 \quad v_4 \quad v_6 \quad v_8 \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \\ v_7 \\ v_2 \end{array} \end{array}$$

$$\text{б) } \begin{array}{c} v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_7 \\ \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} v_3 \\ v_4 \\ v_6 \end{array} \end{array}$$

$$\text{в) } \begin{array}{c} v_1 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_7 \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} v_2 \\ v_6 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

$$\text{г) } \begin{array}{c} v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \quad v_7 \quad v_8 \\ \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \end{array}$$

Параграф 9

1.

	Длина	Концевые вершины	Начальная вершина	Конечная вершина	Тип
а)	4	{2, 3}	2	3	простая цепь
б)	5	{3, 5}	3	5	сложная цепь
в)	6	{1, 5}	1	5	составная цепь
г)	5	{4}	4	4	простой цикл
д)	6	{3}	3	3	сложный цикл

2. а) $d(G) = 2, k(G) = 2; \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$

	1	2	3	4	5	6	
$D(G) =$	<i>aa</i>	<i>a</i>	<i>ab</i>				1
	<i>a</i>	<i>aa bb</i>	<i>b</i>				2
	<i>ba</i>	<i>b</i>	<i>bb</i>				3
				<i>dd cc</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	4
				<i>d</i>	<i>dd</i>	<i>dc</i>	5
				<i>c</i>	<i>cd</i>	<i>cc</i>	6

б) $d(G) = 3, k(G) = 2; \{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6\}$

	1	2	3	5	4	6	
$D(G) =$	<i>aa dd</i>	<i>a aaa</i> <i>dda abb</i>	<i>ab</i>	<i>d aad</i> <i>ddd</i>			1
	<i>a aaa</i> <i>bba add</i>	<i>aa bb</i>	<i>b aab</i> <i>bbb</i>	<i>ad</i>			2
	<i>ba</i>	<i>b baa</i> <i>bbb</i>	<i>bb</i>	<i>bad</i>			3
	<i>d daa</i> <i>ddd</i>	<i>da</i>	<i>dab</i>	<i>dd</i>			5
					<i>cc</i>	<i>c ccc</i>	4
					<i>c ccc</i>	<i>cc</i>	6

в) $d(G) = 2, k(G) = 3; \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}$

	1	2	3	4	5	6	
$D(G) =$	<i>aa</i>	<i>a</i>	<i>ab</i>				1
	<i>a</i>	<i>aa bb</i>	<i>b</i>				2
	<i>ba</i>	<i>b</i>	<i>bb</i>				3
				<i>cc</i>	<i>c</i>		4
				<i>c</i>	<i>cc</i>		5
							6

г) $d(G) = 2, k(G) = 1; \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

д) $d(G) = 2, k(G) = 2; \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\}$

е) $d(G) = 3, k(G) = 3; \{1, 2, 3, 5\}, \{4\}, \{6\}$

3.

	Длина	Концевые вершины	Начальная вершина	Конечная вершина	Тип
а)	5	{1, 2}	1	2	простой путь
б)	6	{3, 4}	4	3	сложный путь
в)	5	{2, 4}	2	4	составной путь
г)	5	{3}	3	3	простой контур
д)	6	{5}	5	5	сложный контур

4. а) $d(G) = 3, k(G) = 2; \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$

	1	2	3	4	5	6	
$D(G) =$	abk	a	ab				1
	bk	bka	b				2
	k	ka	kab				3
	$ck\ de$	$dl\ cka$ dea	$c\ dlb$	dfg	d	df	4
	$e\ lbk$	$l\ ea$	$lb\ eab$ fgc	fg	fgd	f	5
	$gck\ gde$	gdl	gc	g	gd	gdf	6

б) $d(G) = 2, k(G) = 2; \{1, 2, 5\}, \{3, 4, 6\}$

	1	2	5	3	4	6	
$D(G) =$		el	e	fg	ed	f	1
	a		ae	b	$m\ bc$	$af\ mk$	2
	la	l		lb	$d\ lm$	dk	5
					c	ck	3
				kg		k	4
				g	gc		6

в) $d(G) = 4, k(G) = 1; \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

г) $d(G) = 3, k(G) = 3; \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6\}$

Параграф 10

1. а) $\nu(G) = 2, G$ – недвудольный граф

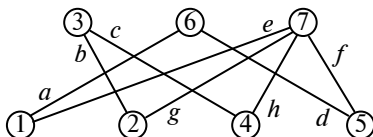
$$B(G) = \left\| \begin{array}{cc|cccccc|} \text{хорды} & & & & & & & & \\ d & h & a & b & c & e & f & g & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & B_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & B_2 \end{array} \right\|$$

$$C(G) = \left\| \begin{array}{cccccc|c} a & b & c & d & e & f & g & h & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & C_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & C_3 \end{array} \right\|$$

б) $\nu(G) = 2, G$ – двудольный граф

$$B(G) = \left\| \begin{array}{cc|cccc|} \text{хорды} & & & & & & & & \\ c & f & a & b & d & e & g & h & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & B_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & B_2 \end{array} \right\|$$

$$C(G) = \begin{vmatrix} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix}$$

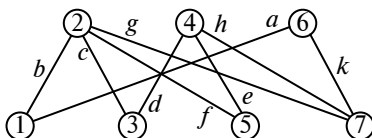


в) $\nu(G) = 3$, G – недвудольный граф

г) $\nu(G) = 3$, G – двудольный граф

$$B(G) = \begin{vmatrix} & \text{хорды} & & & & & & & & & \\ & d & f & g & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & e & h & k & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{vmatrix} \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{matrix}$$

$$C(G) = \begin{vmatrix} & a & b & c & d & e & f & g & h & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{matrix}$$



д) $\nu(G) = 4$, G – недвудольный граф

е) $\nu(G) = 4$, G – двудольный граф

Параграф 11

1. {а, б, г}, {в, д, з}, {е, ж, и}.
2. **а)** $\nu(G) \geq 2$; **б)** $\nu(G) \geq 1$; **в)** $\nu(G) \geq 1$.
3. **а)** {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 6}, {5, 6}; **б)** {1, 2}, {1, 4}, {1, 6}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 6}, {4, 5}, {5, 6}; **в)** {1, 2}, {1, 6}, {2, 4}, {2, 5}, {4, 6}, {5, 6}; **г)** {1, 2}, {1, 5}, {1, 6}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 6}.

Параграф 12

1. $M = \{\lambda, +, -\}, S = \{s_0, s_1, s_2\}$.

Функциональная таблица

	s_0	s_1	s_2
λ	(λ, II, s_1)	(λ, H, s_1)	(λ, H, s_2)
$+$	$(+, II, s_0)$	$(+, II, s_2)$	$(-, II, s_1)$
$-$			

2. $M = \{\lambda, 0, 1, 2\}, S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$.

Функциональная таблица

	s_0	s_1	s_2	s_3
λ		(λ, II, s_3)	$(1, II, s_1)$	
0	$(1, H, s_3)$	$(0, II, s_1)$	$(1, II, s_1)$	$(0, H, s_3)$
1	$(2, H, s_3)$	$(1, II, s_1)$	$(2, II, s_1)$	$(1, H, s_3)$
2	$(0, II, s_2)$	$(2, II, s_1)$	$(0, II, s_2)$	$(2, H, s_3)$

3. $M = \{\lambda, 0, 1, 2, 3\}, S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

Функциональная таблица

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
λ		(λ, II, s_5)		(λ, II, s_4)		
0	$(3, II, s_2)$	$(0, II, s_1)$	$(3, II, s_2)$	$(0, II, s_1)$	(λ, II, s_1)	$(0, H, s_5)$
1	$(0, H, s_5)$	$(1, II, s_1)$	$(0, II, s_3)$	$(1, II, s_1)$		$(1, H, s_5)$
2	$(1, H, s_5)$	$(2, II, s_1)$	$(1, II, s_1)$	$(2, II, s_1)$		$(2, H, s_5)$
3	$(2, H, s_5)$	$(3, II, s_1)$	$(2, II, s_1)$	$(3, II, s_1)$		$(3, H, s_5)$

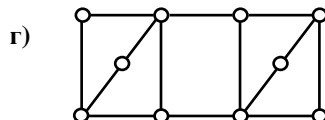
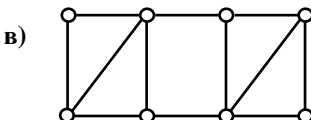
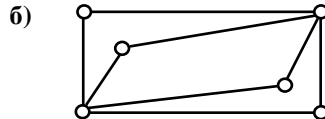
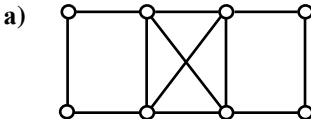
Параграф 13

1. **а)** n – нечётное; **б)** n – чётное и m – чётное; **в)** ни для каких n .

2. **а)** например, эйлеров цикл $(a, b, c, p, m, q, d, e, k, h, f, g)$; простые циклы (a, h, f, g) , (b, m, e, k) и (c, p, d, q) ; **б)** например, эйлеров цикл $(a, b, t, s, d, p, q, e, f, u, r, c, x, g, w, v, y, h, k, m)$; простые циклы (a, b, m) , (c, r, t) , (p, d, q) , (e, f, u, s) , (y, v, w, g) и (k, x, h) .

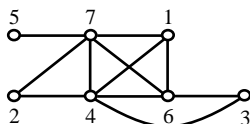
3. **а)** $n \geq 1$; **б)** $n = m$ и $n \geq 2$; **в)** $n \geq 3$.

4.



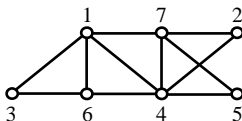
Параграф 14

1. а) Независимые множества вершин: например, $\{1, 4\}$, $\{1, 4, 6\}$ и $\{1, 4, 6, 7\}$; максимальные независимые множества вершин: $\{5, 7\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{3, 4, 6\}$ и $\{1, 4, 6, 7\}$; наибольшее независимое множество вершин $\{1, 4, 6, 7\}$; число независимости $\alpha(G) = 4$; клики: например, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 5\}$ и $\{1, 2, 3, 5\}$; максимальные клики: например, $\{4, 5\}$, $\{2, 5, 6\}$ и $\{1, 2, 3, 5\}$; наибольшая клика $\{1, 2, 3, 5\}$; кликовое число $\omega(G) = 4$; дополнение до полного графа \bar{G} :



кликовое число $\omega(\bar{G}) = 4$; вершинные покрытия: например, $\{2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 5, 6\}$ и $\{1, 2, 3, 5, 6\}$; минимальные вершинные покрытия: $\{2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 5, 6\}$; наименьшее вершинное покрытие $\{2, 3, 5\}$; число вершинного покрытия $\beta(G) = 3$;

б) Независимые множества вершин: например, $\{1, 3\}$, $\{1, 3, 6\}$ и $\{2, 4, 7\}$; максимальные независимые множества вершин: $\{1, 3, 6\}$, $\{2, 4, 7\}$ и $\{4, 5, 7\}$; наибольшее независимое множество вершин: $\{1, 3, 6\}$ или $\{2, 4, 7\}$ или $\{4, 5, 7\}$; число независимости $\alpha(G) = 3$; клики: например, $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$ и $\{2, 3, 5\}$; максимальные клики: например, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$ и $\{2, 5, 6\}$; наибольшая клика: $\{1, 2, 5\}$ или $\{2, 3, 5\}$ или $\{2, 5, 6\}$; кликовое число $\omega(G) = 3$; дополнение до полного графа \bar{G} :



кликовое число $\omega(\bar{G}) = 3$; вершинные покрытия: например, $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 5, 7\}$, $\{2, 3, 4, 5, 7\}$ и $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$; минимальные вершинные покрытия: $\{1, 2, 3, 6\}$ и $\{2, 4, 5, 7\}$; наименьшее вершинное покрытие: $\{1, 2, 3, 6\}$ или $\{2, 4, 5, 7\}$; число вершинного покрытия $\beta(G) = 4$.

Параграф 15

1. $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Цепь эргодическая.

$$x = (0, 0, 1, 0, 0, 0), \quad xP = (1/3, 0, 1/6, 1/2, 0, 0), \quad xP^2 = (1/9, 1/3, 1/36, 1/6, 13/36, 0), \quad xP^3 = (1/36, 1/6, 7/24, 1/24, 13/72, 7/24).$$

2. $t_0 = 6$, поскольку матрица длин путей имеет вид

s_1	s_2	s_3	s_4	
4, 5, 6, ...	1, 2, 3, ...	2, 3, 4, ...	3, 4, 5, ...	s_1
3, 4, 5, ...	1, 2, 3, ...	1, 2, 3, ...	2, 3, 4, ...	s_2
2, 6, 7, 8, ...	3, 4, 5, ...	4, 5, 6, ...	1, 5, 6, 7, ...	s_3
1, 5, 6, 7, ...	2, 3, 4, ...	3, 4, 5, ...	4, 5, 6, ...	s_4

Параграф 16

1.

$$\begin{array}{llll} L(v_{12}) = 6; & L(v_{13}) = 7; & L(v_{14}) = 8; & L(v_{15}) = 13; \\ L(v_8) = 5; & L(v_9) = 6; & L(v_{10}) = 9; & L(v_{11}) = 10; \\ L(v_4) = 4; & L(v_5) = 6; & L(v_6) = 9; & L(v_7) = 10; \\ L(v_0) = 0; & L(v_1) = 5; & L(v_2) = 7; & L(v_3) = 10. \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{llll} L(v_{12}) = 12; & L(v_{13}) = 9; & L(v_{14}) = 4; & L(v_{15}) = 0; \\ L(v_8) = 10; & L(v_9) = 8; & L(v_{10}) = 7; & L(v_{11}) = 4; \\ L(v_4) = 12; & L(v_5) = 10; & L(v_6) = 8; & L(v_7) = 7; \\ L(v_0) = 13; & L(v_1) = 11; & L(v_2) = 9; & L(v_3) = 12. \end{array}$$

Параграф 17

1. **а)** $\sigma(\pi_0) = 38$; **б)** $\sigma(\pi_0) = 52$; **в)** $\sigma(\pi_0) = 49$.

Параграф 18

1. **а)** $X = \{0, 1\}$, $Z = \{0, 1, 2\}$, $S = \{\text{накоплено ноль единиц (0), накоплено одна единица (1), накоплено две единицы (2)}\}$;

б) $X = \{\text{цифра (II), герб (Г)}\}$, $Z = \{\text{отметка (v), нет отметки (-)}\}$, $S = \{\text{выпала нечётная цифра в последовательности цифр после чётного числа гербов (1), выпала нечётная цифра в последовательности цифр после нечётного числа гербов (2), выпало чётное число гербов (3), выпало нечётное число гербов (4)}\}$;

в) $X = \{\text{кнопка не нажата ни на одном этаже (000), кнопка нажата только на первом этаже (100), кнопка нажата только на втором этаже (010), кнопка нажата только на третьем этаже (001), кнопки нажаты одновременно на первом и втором этажах (110), кнопки нажаты одновременно на первом и третьем этажах (101), кнопки нажаты одновременно на втором и третьем этажах (011), кнопки нажаты одновременно на всех трёх этажах (111)}\}$, $Z = \{\text{двигаться на два этажа вниз (-2), двигаться на один этаж вниз (-1), не двигаться (0), двигаться}$

на один этаж вверх (1), двигаться на два этажа вверх (2)}, $S = \{\text{лифт находится на первом этаже (1), лифт находится на втором этаже (2), лифт находится на третьем этаже (3)}\}$.

Параграф 19

1. а)

		z_v		s_{v+1}	
		x_v			
s_v		0	1	0	1
	0	0	1	0	1
	1	1	2	1	2
	2	2	0	2	0

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Вход	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
Состояние	0	1	1	2	2	0	1	2	0	0	0	1	2	0	0	1	1	2
Выход	1	1	2	2	0	1	2	0	0	0	1	2	0	0	1	1	2	2

б)

		z_v		s_{v+1}	
		x_v			
s_v		Ц	Г	Ц	Г
	1	✓	–	3	4
	2	✓	✓	4	3
	3	–	–	1	4
	4	–	✓	2	3

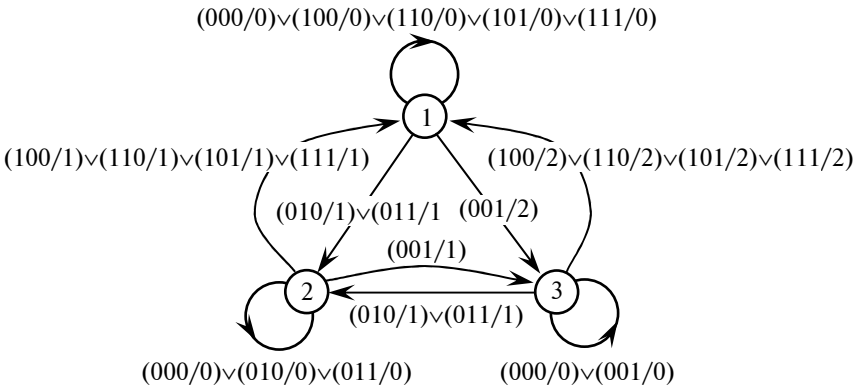
v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Вход	Г	Г	Ц	Ц	Г	Г	Г	Г	Ц	Г	Ц	Г	Г	Ц	Ц	Ц	Г	Г
Состояние	3	4	3	1	3	4	3	4	3	1	4	2	3	4	2	4	2	3
Выход	–	✓	–	✓	–	✓	–	✓	–	–	–	✓	–	–	✓	–	✓	–

2.

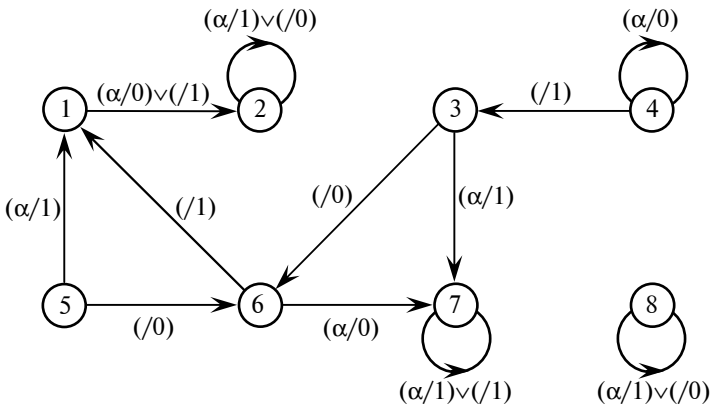
		z_v		s_{v+1}				z_v		s_{v+1}	
		x_v						x_v			
s_v		α	β	α	β	s_v		α	β	α	β
	1	1	0	1	4	4		0	1	4	3
	2	0	0	2	2	5		0	1	5	3
	3	0	0	3	2	6		1	0	6	4

Параграф 20

1. в)



2. а)



б) переходящие состояния: 4, 5; тупиковые состояния: 2, 7; изолированные состояния: 8;

в) $G(1) = \{1, 2\}$, $G(2) = \{2\}$, $G(3) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, $G(4) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $G(5) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$, $G(6) = \{1, 2, 6, 7\}$, $G(7) = \{7\}$, $G(8) = \{8\}$.

3. Два изолированных подавтомата, определяемые множествами состояний $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{7, 8, 9\}$.

4.

		z_v		s_{v+1}				z_v		s_{v+1}	
		α	β	α	β			α	β	α	β
s_v	x_v					s_v	x_v				
1		0	0	1	2	6		1	1	7	7
2		1	0	2	1	7		1	0	9	7
3		1	1	4	3	8		0	0	9	6
4		0	1	5	5	9		1	0	6	8
5		0	0	5	3						

Параграф 21

1. а)

$$\begin{array}{ccc|c} & 0 & 1 & 2 \\ \parallel & (0/0) & (1/1) & 0 \\ & 0 & (0/1) & (1/2) \\ \parallel & (1/0) & 0 & (0/2) \parallel 0 \\ & & & 1 \\ & & & 2 \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \parallel & 0 & 0 & (\Pi/\vee) & (\Gamma/-) \\ & 0 & 0 & (\Gamma/\vee) & (\Pi/\vee) \\ \parallel & (\Pi/-) & 0 & 0 & (\Gamma/-) \\ & 0 & (\Pi/-) & (\Gamma/\vee) & 0 \parallel 1 \\ & & & & 2 \\ & & & & 3 \\ & & & & 4 \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{ccc|c} & 1 & 2 & 3 \\ \parallel & (000/0)\vee(100/0)\vee(110/0)\vee(101/0)\vee(111/0) & (010/1)\vee(011/1) & (001/2) \\ & (100/-1)\vee(110/-1)\vee(101/-1)\vee(111/-1) & (000/0)\vee(010/0)\vee(011/0) & (001/1) \\ \parallel & (100/-2)\vee(110/-2)\vee(101/-2)\vee(111/-2) & (010/-1)\vee(011/-1) & (000/0)\vee(001/0) \parallel 1 \\ & & & 2 \\ & & & 3 \end{array}$$

2. а) переходящие состояния: 2, 7; тупиковые состояния: 3, 6; изолированные состояния: 1;

б) $G_1(5, 7) = \{3, 5, 8\}$, $H_1(2, 3) = \{2, 3, 4, 5\}$;

в) множества состояний $\{1, 2, 4, 7\}$ и $\{3, 5, 6, 8\}$ составляют пару из переходящего и тупикового подавтоматов.

3.

$$\mathbf{a)} \quad \bar{A} = \begin{array}{c|cccccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \hline & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & \pi_{22} & 0 & \pi_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & 0 & \pi_{43} & 0 & \pi_{45} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & \pi_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{58} & 5 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} & 0 & 0 & 6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{75} & 0 & 0 & \pi_{78} & 7 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{86} & 0 & 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{A}^{-2} = \begin{array}{c|cccccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \hline & \pi_{11}\pi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & \pi_{22}\pi_{22} & \pi_{24}\pi_{43} & \pi_{22}\pi_{24} & \pi_{24}\pi_{45} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & \pi_{33}\pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & 0 & \pi_{43}\pi_{33} + \pi_{45}\pi_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{45}\pi_{58} & 4 \\ & 0 & 0 & \pi_{53}\pi_{33} & 0 & 0 & \pi_{58}\pi_{86} & 0 & 0 & 5 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66}\pi_{66} & 0 & 0 & 6 \\ & 0 & 0 & \pi_{75}\pi_{53} & 0 & 0 & \pi_{78}\pi_{86} & 0 & \pi_{75}\pi_{58} & 7 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{86}\pi_{66} & 0 & 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{A}^{-3} = \begin{array}{c|cccccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \hline & \pi_{11}\pi_{11}\pi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & \pi_{22}\pi_{22}\pi_{22} + \pi_{22}\pi_{24}\pi_{43} + \pi_{22}\pi_{22}\pi_{24} & \pi_{24}\pi_{43}\pi_{33} + \pi_{24}\pi_{45}\pi_{53} & \pi_{22}\pi_{24}\pi_{45} & 0 & 0 & 0 & \pi_{24}\pi_{45}\pi_{58} & 2 \\ & 0 & 0 & \pi_{33}\pi_{33}\pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & 0 & \pi_{43}\pi_{33}\pi_{33} + \pi_{45}\pi_{53}\pi_{33} & 0 & 0 & \pi_{45}\pi_{58}\pi_{86} & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & \pi_{53}\pi_{33}\pi_{33} & 0 & 0 & \pi_{58}\pi_{86}\pi_{66} & 0 & 0 & 5 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66}\pi_{66}\pi_{66} & 0 & 0 & 6 \\ & 0 & 0 & \pi_{75}\pi_{53}\pi_{33} & 0 & 0 & \pi_{78}\pi_{86}\pi_{66} + \pi_{75}\pi_{58}\pi_{86} & 0 & 0 & 7 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{86}\pi_{66}\pi_{66} & 0 & 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{b)} \quad \bar{A}^{-(1)} = \begin{array}{c|cccccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \pi_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & 0 & \pi_{43} & 0 & \pi_{45} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & \pi_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{58} & 5 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{75} & 0 & 0 & \pi_{78} & 7 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{86} & 0 & 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в пособии понятия множества, функции, отображения, операции, алгебры, отношения и модели являются основой создания алгебраических систем, имеющих большое практическое применение при разработке математического обеспечения компьютерной техники.

Освещённые темы булевы функции, минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм и полнота системы булевых функций относятся к математической логике, которая используется при описании переключаемых цепей в цифровой технике. Темы взвешенный граф, связность и сильная связность графа, цикломатика, планарность, эйлеровы и гамильтоновы графы, кратчайшие пути в графах представляют основы теории графов, которая широко применяется в задачах управления производством и разработки математического обеспечения современных информационных систем. Цепи Маркова служат отправной точкой теории случайных процессов и их современных приложений, например, в телекоммуникациях и обработке сигналов. Конечные автоматы широко используются на практике в лексических и синтаксических анализаторах и являются подходящей моделью многих алгоритмов, реализуемых электронными схемами и компьютерными программами.

Изучение теоретического материала и выполнение упражнений пособия позволит студентам высших учебных заведений получить необходимые знания, умения и навыки, а также общекультурные и профессиональные компетенции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басакер, Р. Конечные графы и сети / Р. Басакер, Т. Саати ; пер. с англ. – М. : Наука, 1973. – 368 с.
2. Бауэр, Ф.Л. Информатика. Вводный курс : В 2-х ч. / Ф.Л. Бауэр, Г. Гооз ; пер. с нем. – М. : Мир, 1990. – Ч. 2. – 423 с.
3. Белов, В.В. Теория графов : учеб. пособие для втузов / В.В. Белов, Е.М. Воробьев, В.Е. Шаталов. – М. : Высшая школа, 1976. – 392 с.
4. Гаврилов, Г.П. Сборник задач по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – М. : Наука, 1977. – 368 с.
5. Горбатов, В.А. Основы дискретной математики : учеб. пособие для студентов вузов / В.А. Горбатов. – М. : Высшая школа, 1986. – 311 с.
6. Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
7. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. – СПб. : Питер, 2004. – 302 с.
8. Оре, О. Графы и их применение / О. Оре ; пер. с англ. – М. : Мир, 1965. – 174 с.
9. Уилсон, Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон ; пер. с англ. – М. : Мир, 1977. – 208 с.
10. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари ; пер. с англ. – М. : Мир, 1973. – 301 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Множество, функция, отображение, операция. Способы задания	4
2. Понятие алгебры. Фундаментальные алгебры	11
3. Бинарные отношения. Способы задания и свойства	15
4. Понятие модели. Алгебраическая система	22
5. Булевы функции. Способы задания. Минимизация в классе ДНФ	25
6. Слабоопределённые булевы функции. Минимизация в классе ДНФ	32
7. Полнота	36
8. Взвешенный граф и его матричное задание	43
9. Связность и сильная связность графа	51
10. Цикломатика	57
11. Планарность	61
12. Разрешимые и неразрешимые проблемы	66
13. Эйлеровы и гамильтоновы графы	70
14. Покрытия и независимые множества	74
15. Цепи Маркова	76
16. Кратчайшие пути в графах	78
17. Задача о коммивояжёре	84
18. Основная модель конечного автомата	92
19. Таблица переходов конечного автомата	97
20. Граф переходов конечного автомата	99
21. Матрица переходов конечного автомата	105
Ответы к задачам и упражнениям	111
Заключение	126
Список литературы	126

Учебное издание

ГРОМОВ Юрий Юрьевич,
ИВАНОВА Ольга Геннадьевна,
КУЛАКОВ Юрий Владимирович,
ГРИДНЕВ Виктор Алексеевич,
ОДНОЛЬКО Валерий Григорьевич

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор Л.В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 01.03.2012.
Формат 60 × 84 / 16. 7,44 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 73

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14