

Министерство образования и науки Российской Федерации
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»**

В.В. ЛЕДЕНЕВ, А.В. ХУДЯКОВ

**МЕХАНИЧЕСКИЕ И РЕОЛОГИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ ОСНОВАНИЙ
И ФУНДАМЕНТОВ**

*Утверждено Учёным Советом университета
в качестве учебного пособия для магистрантов,
обучающихся по направлению 270100 «Строительство»*



Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2012

УДК 624.1(075.8)
ББК Н581.1я73
Л39

Рецензенты:

Доктор технических наук, доцент ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
А.Ф. Зубков

Кандидат технических наук, профессор ВГАСУ
П.И. Калугин

Леденев, В.В.

Л39 Механические и реологические модели оснований и фундаментов : учебное пособие / В.В. Леденев, А.В. Худяков. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 80 с. – 50 экз.
ISBN 978-5-8265-1094-0

Рассмотрены механические и реологические модели грунтов, бетона и железобетона, показаны области их рационального применения. Описаны модели классические комбинированные, а также современные, более полно учитывающие реальные свойства материалов.

Предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению 270100 «Строительство».

УДК 624.1(075.8)
ББК Н581.1я73

ISBN 978-5-8265-1094-0

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2012

ВВЕДЕНИЕ

Разработать точные методы расчёта оснований, несущих строительных конструкций, зданий и сооружений не представляется возможным из-за влияния значительного числа факторов. В практике вводят различные гипотезы, допущения, заменяя реальные явления, процессы, свойства упрощёнными, т.е. моделями. Различают модели математические, расчётные, механические, реологические. Например, в механике имеются модели идеального упругого тела, идеально упруго-пластического, жесткопластического, упруго вязкопластического и др.

В общем случае материалы неоднородные (свойства в разных точках разные), анизотропные (механические свойства зависят от направления), иногда ортотропные (в точке есть взаимно ортогональные плоскости, относительно которых механические свойства симметричны). На практике материал часто рассматривают как однородный, изотропный. Твёрдые тела рассматривают как сплошные деформируемые. Модели часто называют по имени учёных, их предложивших.

Наиболее основополагающими моделями явились модели Гука, Винклера. Первую модель называют моделью линейно-деформируемой среды. В основу приняты уравнения линейной теории упругости. Такая среда в применении к грунтам обладает чрезмерной распределительной способностью, а напряжения и деформации распространяются до бесконечности.

Вторая модель не учитывает распределительные свойства грунтов, но более простая в использовании. В действительности грунт обладает ограниченной распределительной способностью, что наблюдается при взаимном влиянии рядом расположенных зданий, сооружений и фундаментов. Комбинированные модели учитывают достоинства обеих моделей.

В реологических моделях присутствует фактор времени. Число идеальных реологических тел неограниченно. Они строятся на основе трёх простейших тел Гука, Ньютона и Сен-Венана. Аналогом модели Гука является пружина, Ньютона – поршень, вставленный в сосуд с вязкой жидкостью, Сен-Венана – элемент сухого трения.

Выбор модели материала является ответственным этапом работы. На различных уровнях нагружения могут быть использованы разные модели.

Математическая модель – математическое описание физической модели. Включает матризованные входные и выходные данные и математически сформулированный оператор перехода от первых ко вторым.

Физическая модель – идеализация свойств заданной конструкции и внешних воздействий.

1. МОДЕЛИ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ

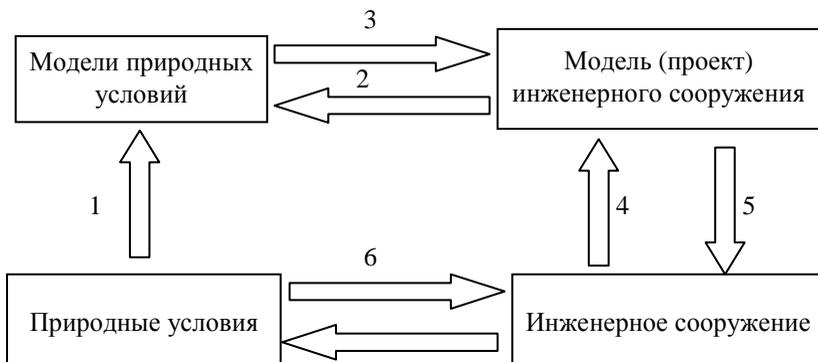
1.1. СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ В ГЕОЛОГИИ

Расчётной схемой инженерной задачи учитывается лишь ограниченное число показателей свойств горных пород [27]. Те или иные формы и особенности залегания горных пород могут быть учтены в расчёте сооружения лишь постольку, поскольку они отражаются на пространственном распределении тех свойств пород основания, которые учитываются расчётной схемой.

В природе наряду с закономерными изменениями свойств пород в пространстве, имеющими чёткую геологическую интерпретацию, обычно наблюдаются хаотические колебания результатов испытаний вокруг некоторых средних значений. При этом возникает очень сложная картина нерегулярной изменчивости свойств пород основания. Чтобы ввести в расчёт информацию, содержащуюся в многочисленных результатах испытаний свойств пород, приходится прибегать к различным упрощающим предположениям о пространственном распределении свойств.

Таким образом, приходят к выводу, что в проектно-строительном деле, как и в любой целенаправленной деятельности человека, полезно различать два уровня: уровень объектов и уровень моделей. Объектами могут быть инженерное сооружение и тот участок земли, где оно должно быть возведено. Соответственно моделями являются проект сооружения и совокупность сведений о природных условиях строительства, служащих обоснованием проекта. Эту совокупность сведений о природных (и в том числе инженерно-геологических) условиях строительства называют моделью природных условий (и в том числе моделью естественного основания сооружения).

Соотношения между указанными реальными объектами и их моделями могут быть представлены в виде схемы;



В качестве исходных используют три понятия:

- 1) «земная кора»,
- 2) «неоднородность»,
- 3) «определяющая область».

Под однородностью объекта по признаку L понимают независимость L в пределах объектах от координат пространства. Наоборот, неоднородным по признаку L считают объект, в пределах которого L зависит от координат.

Определяющей областью в задаче называют часть земной коры, свойства которой находят в результате решения этой задачи. Единственным свойством определяющей области является её характерный размер в трёх-, двух- или одномерном евклидовом пространстве в зависимости от характера решаемой задачи. При этом понятие «характерный размер» определяющей области будет совпадать, очевидно, с понятием характерного размера в решаемой задаче, широко используемым в механике.

Таким образом, по величине отношения размеров элементов неоднородности к размерам определяющей области эксперимента в каждой конкретной задаче выделяются:

1. Ультранеоднородность (неоднородность высшего порядка), выступающая в форме свойств эквивалентной однородной среды.

2. Микронеоднородность (эффективная неоднородность), обуславливающая разброс значений результатов испытаний. Размер элементов этой неоднородности на порядок-два меньше размера области воздействия.

3. Макронеоднородность (неоднородность низшего порядка), размер элементов которой больше размеров области воздействия или примерно равен ему.

Рассмотрены четыре классификации неоднородности горных пород:

1) по абсолютному размеру элементов неоднородности (неоднородность порядков 4-0);

2) по отношению размера элемента неоднородности к размеру определяющей области эксперимента (макро-, микро- и ультранеоднородность);

3) по отношению размеров элементов макронеоднородности к величине шага опробования («хаотическая» «пространственно коррелированная» неоднородность);

4) по относительному размеру элементов макронеоднородности (низкочастотная и высокочастотная составляющие спектра неоднородности).

Среди моделей, используемых в инженерных расчётах, необходимо различать два класса моделей: физические (механические) и структурные (геометрические).

Назначение физической модели состоит в описании свойств горных пород (главным образом механических) в физической точке. Примерами физических моделей могут служить винклеровская модель, линейно-упругое тело, среда с линейным законом сопротивления фильтрации и т.д. Приняв ту или иную физическую модель горной породы, мы должны характеризовать её свойства соответствующими выборной модели параметрами. В приведённых примерах это будут коэффициент постели, модуль упругости и т.д.

Назначение структурной модели состоит в схематизированном описании естественной изменчивости параметров физических моделей между точками массива горных пород. Примерами структурных моделей могут служить слоистые модели, в которых каждый слой горных пород наделяется свойствами, отличными от свойств смежных слоёв, или градиентные модели, в которых параметры непрерывно меняются, например, с глубиной по тому или иному закону

Физические и структурные модели могут быть однородными или многомерными. Структурные модели полезно различать по их мерности в физическом пространстве, выделяя объёмные, плоские и линейные модели.

Задачи научного управления и оптимизации проектно-исследовательских работ делают необходимым широкое применение в технической геологии структурных моделей. С ними теснейшим образом связаны три основные задачи:

- 1) исследование неоднородности горных пород;
- 2) учёт неоднородности в ходе разведки и опробования;
- 3) учёт неоднородности в расчёте инженерных сооружений.

Наиболее целесообразно использовать статистические структурные модели. Это обусловлено «статической природой» свойств горных пород, определяемых в относительно мелкомасштабных экспериментах, нерегулярной изменчивостью усреднённых в малом характеристик и дискретным характером геологических наблюдений.

Структурные модели микронеоднородности горных пород и масштабные эффекты. Простейшим эффективным способом изучения микронеоднородности и локальных распределений является анализ влияния размера определяющей области экспериментов (размера проб) на распределение результатов опробования.

Структурные модели макронеоднородности. На стадии формирования осадков неоднородность является их характерной чертой. Отчётливо проявляется неоднородность разных уровней. В силу осадочной дифференциации вещества, факультальной изменчивости условий осадконакопления и изменения режима осадконакопления во времени формируется неоднородность уровней 0 и 1. Относительно высокочастотная смена времени режима осадконакопления наряду с влиянием

силы тяжести приводит к формированию слоистости, часто к чередованию слоёв разного состава и мощности.

Временные закономерности. В ходе геологической истории на разных этапах петрогенеза меняется геологическая природа неоднородности. Примером могут служить различия в природе фильтрационной неоднородности чередующихся песков и глин, с одной стороны, и трещиноватых песчаников и сланцев, с другой.

Пространственные закономерности. Процессы петрогенеза разделяют на три группы: 1) процессы образования и преобразования пород, связанные с действием геофизических полей и, в первую очередь, силы тяжести, приводящие к вертикальной зональности свойств пород; 2) процессы, формирующие неоднородность свойств пород в горизонтальном направлении и связанные с осадочной дифференциацией и фациальной изменчивостью; 3) наложенные процессы, связанные в большинстве случаев с действием более или менее чётко локализованных в пространстве «источников возмущений» (дневная поверхность, контакты интрузий с вмещающими породами и т.п.).

Уплотнение горных пород с глубиной. Закономерные изменения физических свойств горных пород в вертикальном направлении в большинстве случаев определяются двумя факторами: действием геофизических полей (главным образом гравитационного, в меньшей степени теплового) и изменением литологического состава пород по разрезу. Важную роль играет и возраст пород, тех или иных агентов. Возникает сложная картина изменчивости свойств пород по глубине, отражающая конкретную геологическую историю исследуемого массива. Изменчивость, связанная с литологическим составом пород, полностью определяется особенностями исследуемых разрезов.

Градиентная модель полностью характеризуется видом и параметрами функций $L(x, y, z)$. Однако ясно, что в действительности по отношению простому закону может меняться в плане или в разрезе лишь среднее значение свойства L . Таким образом, в качестве расчётной функции $L(x, y, z)$ практически приходится использовать уравнение тренда. Следовательно, как и для кусочно-однородных моделей, не удастся полностью избежать осреднения. Избегают его лишь частично, вводя в расчёт информацию о низкочастотной составляющей неоднородности.

1.2. МОДЕЛЬ МЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ (ФУССА–ВИНКЛЕРА)

Фусс Н.И., русский академик, в 1798 г. исследовал процесс движения колеса конной повозки с образованием колен, т.е. рассматривал локальное развитие деформаций под нагруженной площадкой. Деформации были полностью необратимыми. По такой схеме ведут себя рыхлые и слабо уплотнённые насыпные грунты [7].

Винклер Э. предложил модель грунта в виде системы ничем не связанных между собой упругих пружин. При нагружении локальной нагрузкой будут сжиматься пружины, непосредственно расположенные под площадкой нагружения. После снятия нагрузки пружины полностью распрямляются. При такой модели упругая среда не обладает распределительной способностью. Её рассматривают как гидростатическое упругое основание [28]. Под влиянием нагрузки балка прогибается и опускается в воду на величину прогиба y . При этом по закону Архимеда создаётся направленная вверх погонная сила

$$p = -\gamma by,$$

где γ – удельный вес жидкости; b – ширина балки.

Реакция со стороны жидкости пропорциональна прогибу. Эту схему используют для расчёта фундаментов. Вместо γ вводится коэффициент жёсткости или постели c или k ($\text{H}/\text{см}^3$). Так, что

$$p = cby.$$

Дифференциальное уравнение упругой балки, к примеру, имеет вид:

$$EIy^4 = q = q^0 - p = q^0 - cby$$

или

$$EIy^4 + cby = q^0,$$

где q^0 – внешняя нагрузка.

В ряде случаев принимают переменную величину коэффициента постели в одном направлении $c(x)$ или в двух $c(x, y)$. При расчёте свай свайных фундаментов на действие вертикальной и горизонтальной нагрузок, момента (метод К.С. Завриева) принимают переменное по глубине значение коэффициента постели:

$$c_z = k_z = \sigma_z / y_z,$$

где k – коэффициент пропорциональности, $\text{кН}/\text{м}^4$.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси сваи

$$EI d^4 y_z / d z^4 - y_z b_p k_z = 0,$$

где b – расчётная ширина сваи;

$$b_p = K_\Phi(1,5d + 0,5) \text{ при } d \leq 1,0 \text{ м};$$

$$b_p = K_\Phi(d + 1) \text{ при } d \geq 1,0 \text{ м};$$

K_Φ – коэффициент формы.

При расчёте свайного фундамента между боковой поверхностью сваи и грунтом вводят горизонтальные связи, их устанавливают и под торцом сваи.

Жёсткость горизонтальных упруго податливых связей

$$B_z = b_p t k_z.$$

При $z = 0$, $B_{z=0} = b_p k t^2 / 8$; при $z = h$, $B_z = h = b_p k h t / 2$, где h – глубина подошвы сваи; t – расстояние между связями.

Филоненко-Бородич М.М. (1940) усовершенствовал модель, наделив её распределительной способностью. Он дополнительно ввёл мембрану, перекрывающую с поверхности упругие элементы. При этом включаются в деформирование зоны под площадкой нагружения и прилегающие области полупространства. Ниже рассмотрены и другие предложения по усовершенствованию модели Винклера.

1.3. МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ

Линейно-деформируемая среда [7 – 9, 26]. В этой модели используют уравнения линейной теории упругости. Вводятся допущения о сплошности (гипотеза сплошной среды); однородности; изотропности, идеальной упругости; линейной деформируемости с малыми деформациями и перемещениями, подчиняющимися обобщённому закону Гука, вне зависимости от объёма, об отсутствии начальных напряжений; допустимости принципа Сен-Венана (в точках твёрдого тела, достаточно удалённых от мест приложения внешних нагрузок на малой поверхности тела, напряжения почти не зависят от их распределения по этой малой поверхности тела, а зависят только от главного вектора и главного момента заданных сил).

Рассматривают три основных направления задач теории упругости:

1. Неизвестными являются перемещения точек

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z).$$

Для решения необходимо в физические уравнения подставить геометрические соотношения, а полученные данные – в три уравнения равновесия:

$$\psi_1(u, v, w) = 0, \quad \psi_2(u, v, w) = 0, \quad \psi_3(u, v, w) = 0.$$

Эти операции называют методом перемещений. Основная система уравнений метода перемещений (уравнения Ляме) является синтезом статического, геометрического и физического соотношений.

2. Неизвестными являются напряжения

$$\sigma_x = \varphi_1(x, y, z), \quad \sigma_y = \varphi_2(x, y, z), \quad \sigma_z = \varphi_3(x, y, z);$$

$$\tau_{xy} = \varphi_4(x, y, z), \quad \tau_{yz} = \varphi_5(x, y, z), \quad \tau_{zx} = \varphi_6(x, y, z).$$

Для решения применяют уравнения деформаций, например, неразрывности деформаций, физические и статические уравнения. В результате приходят к соотношениям:

$$F_1(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}) = 0, \dots, F_6(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}) = 0.$$

Этот метод называется методом сил.

3. За основные неизвестные приняты некоторые перемещения и напряжения.

Закон Гука. При линейном растяжении

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E,$$

где ε_x – относительное удлинение в направлении оси x ; E – модуль упругости при растяжении.

Используя принцип наложения (суперпозиции), получим обобщённый закон Гука при одновременном действии трёх нормальных напряжений [29, 32, 33]:

$$\varepsilon_x = 1/E[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = 1/E[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_z = 1/E[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx};$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\delta_x + \delta_y + \delta_z); \quad \sigma_{cp} = \frac{1}{3} (\delta_x + \delta_y + \delta_z);$$

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Приведём зависимости между деформациями сдвига и касательными напряжениями. При чистом сдвиге (нормальные напряжения на всех гранях равны нулю)

$$\tau = 1/2 \sigma \quad (\sigma_z = \sigma, \quad \sigma_y = -\sigma, \quad \sigma_x = 0);$$

$$\gamma = 2(1 + \nu)\tau / E, \quad G = E / [2(1 + \nu)]; \quad \gamma = \tau / G;$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G, \quad \gamma_{xz} = \tau_{xz} / G, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} / G,$$

G – модуль упругости при сдвиге или модуль сдвига.

Зависимость между объёмным расширением и суммой нормальных напряжений θ имеет вид

$$e = (1 - 2\nu)\theta / E.$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0; .$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + F_z = 0.$$

В тензорной символике имеем:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0.$$

При движении среды

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(t)}{\partial x_j} + F_i(t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Закон парности касательных напряжений имеет вид:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

При условии сплошности среды перемещения как функции координат будут непрерывными:

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z).$$

Относительные перемещения по направлению координатных осей:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Выполняется тождество

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

где индексы 1, 2, 3 относятся к главным осям. Кроме того:

$$\frac{dV}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

где θ – объёмная сжимаемость.

По соотношению Коши

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{zx}.$$

1.3.1. Фундаментальные уравнения теории упругости

Среди пространственных задач теории упругости наибольшее значение имеют задачи Буссинеска (Boussinesq, 1885), Р. Миндлина (Mindlin, 1950) и К. Кельвина (Kelvin). Область, занятая упругой средой, – полупространство $0 \leq z < \infty$.

Задача Буссинеска [8, 32]. Граница области – горизонтальная плоскость $z = 0$ – везде свободна от напряжений, кроме начала координат, в котором приложена сосредоточенная вертикальная сила P (рис. 1).

Решение задачи дается формулами:

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{x^2 z}{R^5} + \frac{(1-2\nu)}{3} \left(\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{(R+z)^2 R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right];$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{y^2 z}{R^5} + \frac{(1-2\nu)}{3} \left(\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{(R+z)^2 R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right];$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} = K \frac{P}{z^2} = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2\right)^{5/2}} \cdot \frac{P}{z^2};$$

$$\sigma_z = \frac{1}{z^2} \sum_{i=1}^n K_i P_i, \quad \tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{R^5};$$

$$\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{R^5}, \quad K = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2\right)^{5/2}};$$

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{xyz}{R^5} - \frac{(1-2\nu)}{3} \frac{(2R+z)xy}{(R+z)^2 R^3} \right],$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

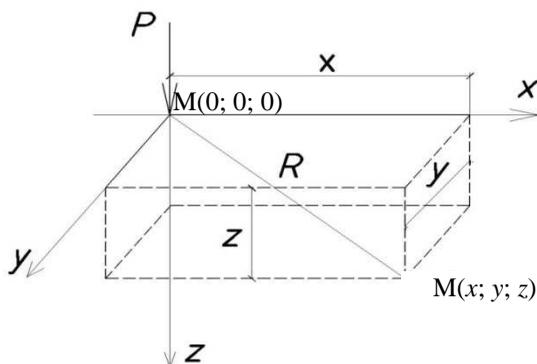


Рис. 1. Схема к задаче Буссинеска

Перемещения, параллельные осям координат:

$$u = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{xz}{R^3} - (1-2\nu) \frac{x}{R(R+z)} \right];$$

$$v = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{yz}{R^3} - (1-2\nu) \frac{y}{R(R+z)} \right];$$

$$w = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{z^2}{R^3} + 2(1-\nu) \frac{1}{R} \right].$$

На основе решения задачи Буссинеска путём интегрирования могут быть получены решения задач для полупространства при действии произвольной вертикальной нагрузки, распределённой по некоторой площади на поверхности полупространства. Некоторые решения этой задачи приводятся в [8].

Аналогом задачи Буссинеска является задача о сосредоточенной касательной силе, приложенной к поверхности полупространства. Некоторые формулы этой задачи приводятся в [8]. Посредством суперпозиции решений данной задачи и задачи Буссинеска можно получить решение для произвольной наклонной нагрузки на поверхность полупространства.

Возможность применения рассмотренных выше решений для определения напряжений в грунтовых основаниях основывается на приближённой аппроксимации связи между напряжениями и деформациями линейными соотношениями закона Гука, что справедливо для некоторого диапазона допредельных напряжённых состояний. Отсюда следует,

что данные решения тем лучше будут соответствовать реальному распределению напряжений в грунте, чем меньше развитие получили в основании области предельного равновесия и тем более течения.

Так как законы деформирования грунта для нагрузки и разгрузки неодинаковы, то следует избегать применения решений теории упругости без учёта последовательности изменения силовых факторов, т.е. без учёта истории нагружения основания.

Наконец, следует отказаться от формального использования решений теории упругости в случаях, когда решением предсказываются значительные растягивающие напряжения в грунте, поскольку в действительности грунт практически не способен сопротивляться растяжению.

Задача Р. Миндлина [8, 32]. Сила P приложена внутри упругого полупространства на расстоянии c от поверхности основания (рис. 2).

Решение задачи даётся следующими формулами.

Перемещение в радиальном направлении:

$$u = \frac{P \cdot r}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} \right],$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига;

$$R_1 = \sqrt{(z-c)^2 + r^2}; \quad R_2 = \sqrt{(z+c)^2 + r^2}.$$

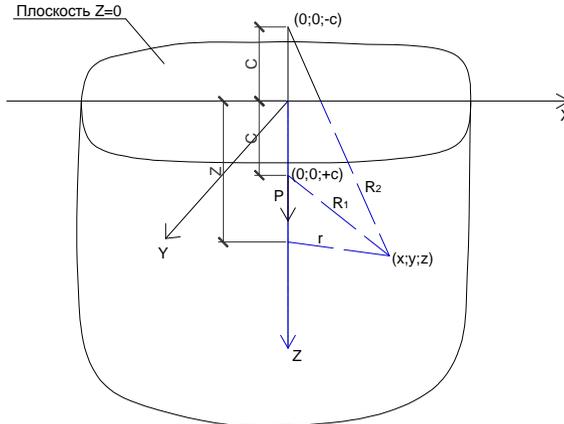


Рис. 2. Схема к задаче Р. Миндлина для вертикальной силы, приложенной внутри упругого полупространства

Перемещение в вертикальном направлении:

$$w = \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right];$$

$$\sigma_x = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{3x^2(z-c)}{R_1^5} + \frac{(1-2\nu)[3(z-c) - 4\nu(z+c)]}{R_2^3} - \frac{3(3-4\nu)x^2(z-c) - 6c(z+c)[(1-2\nu)z - 2\nu c]}{R_2^5} - \frac{30cx^2z(z+c)}{R_2^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{x^2}{R_2^2} \right) \right];$$

$$\sigma_y = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{3y^2(z-c)}{R_1^5} + \frac{(1-2\nu)[3(z-c) - 4\nu(z+c)]}{R_2^3} - \frac{3(3-4\nu)y^2(z-c) - 6c(z+c)[(1-2\nu)z - 2\nu c]}{R_2^5} - \frac{30cy^2z(z+c)}{R_2^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \left(1 - \frac{y^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{y^2}{R_2^2} \right) \right];$$

$$\sigma_z = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)z(z+c)^2 - 3c(5z-c)}{R_2^5} - \frac{30cz(z+c)^3}{R_2^7} \right];$$

$$\tau_{yz} = \frac{Py}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)z(z+c) - 3c(3z+c)}{R_2^5} - \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right];$$

$$\tau_{zx} = \frac{Px}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)z(z+c) - 3c(3z+c)}{R_2^5} - \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right].$$

Решение задачи даётся формулами:

$$u = \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)x^2}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+c} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} \right) \right]; \quad (33)$$

$$v = \frac{Pxy}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)}{R_2^3} - \frac{6cz}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \right]; \quad (34)$$

$$w = \frac{Px}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \right]; \quad (35)$$

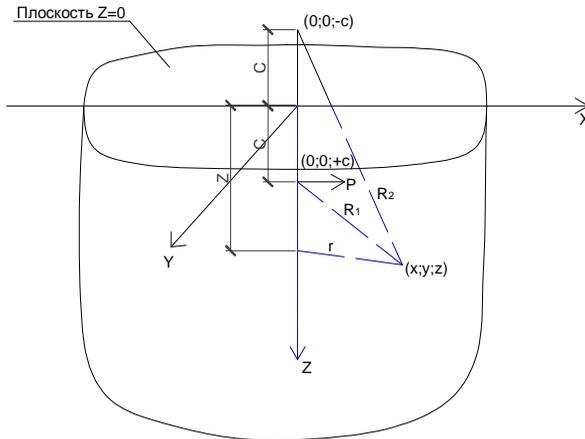


Рис. 3. Схема к задаче Р. Миндлина для горизонтальной силы, приложенной внутри упругого полупространства

$$\sigma_x = \frac{Px}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R_2^3} - \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left(3 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right) \frac{6c}{R_2^5} \left\{ 3c - (3-2\nu)(z+c) + \frac{5x^2}{R_2^2} \right\} \right];$$

$$\sigma_y = \frac{Py}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R_2^3} - \frac{3y^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)y^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left\{ -\frac{y^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} + \frac{6c}{R_2^5} \left(c - (1-2\nu)(z+c) + \frac{5y^2z}{R_2^2} \right) \right\} \right];$$

$$\sigma_z = \frac{Pz}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R_1^3} - \frac{1-2\nu}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)(z+c)^2}{R_2^5} + \frac{6c}{R_2^5} \left(c + (1-2\nu)(z+c) + \frac{5z(z+c)^2}{R_2^2} \right) \right];$$

$$\tau_{yz} = \frac{Pxy}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{3(z-c)}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)(z+c)}{R_2^5} + \frac{6c}{R_2^5} \left\{ 1-2\nu + \frac{5z(z+c)}{R_2^2} \right\} \right];$$

$$\tau_{zx} = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{3x^2(z-c)}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x^2(z+c)}{R_2^5} - \frac{6c}{R_2^5} \left\{ z(z+c) - (1-2\nu)x^2 - \frac{5x^2z(z+c)}{R_2^2} \right\} \right];$$

$$\tau_{xy} = \frac{Py}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{1-2\nu}{R_2^3} - \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)x^2}{R_2(R_2+z+c)^2} \left\{ 1 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right\} - \frac{6cz}{R_2^5} \left(1 - \frac{5x^2}{R_2^5} \right) \right].$$

Задача Л. Кельвина [32]. Сила приложена на значительной глубине ($z \rightarrow \infty$), когда её влияние на деформацию граничной плоскости ($z = 0$) незначительно.

Решение задачи даётся следующими формулами.

Перемещения в направлении оси x:

$$u_x = \frac{P(\lambda + \mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{xz}{r^3}.$$

Перемещения в направлении оси y:

$$u_y = \frac{P(\lambda + \mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{yz}{r^3}.$$

Вертикальные перемещения:

$$w = \frac{P(\lambda + \mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{z^2}{r^3} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{r} \right].$$

В горизонтальной плоскости приложения нагрузки осадки определяются формулой:

$$w = \frac{(3 - 4\nu)(1 + \nu)}{8\pi(1 - \nu)r}.$$

Напряжения определяются формулами:

$$\sigma_r = P/8\pi(1 - \nu) \left[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} - 3r^2z(r^2 + z^2)^{-5/2} \right];$$

$$\sigma_\Theta = P/8\pi(1 - \nu)(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2};$$

$$\sigma_z = P/8\pi(1 - \nu) \left[(1 - 2\nu)z(r^2 + z^2)^{-3/2} - 3z(r^2 + z^2)^{-5/2} \right];$$

$$\sigma_{rz} = P/8\pi(1 - \nu) \left[(1 - 2\nu)r(r^2 + z^2)^{-3/2} - 3rz^2(r^2 + z^2)^{-5/2} \right].$$

В формулах λ и μ – постоянные Ляме;

$$\lambda = E\nu/(1 + \nu)(1 - 2\nu);$$

$$\mu = E/2(1 + \nu).$$

Решение Р. Миндлина применяют для расчёта свай (Н.М. Дорошкевич, А.А. Бартоломей и др.), фундаментов мелкого заложения (М.И. Горбунов-Посадов, Р.С. Шеляпин, В.В. Леденев и др.). Однако по фундаментальному решению упругая среда одинаково сопротивляется сжатию и растяжению. Грунт на растяжение практически не рабо-

тает. Вследствие этого за силой должны возникать разрывы сплошности (для реальных грунтовых оснований).

Предлагаются [7, 8] приближённые методы снижения растягивающих напряжений, например, введением двойных сил [7, 8] или принятие их равным нулю.

Плоские задачи теории упругости. Задача Фламана [8, 32]. Относится к числу статических задач теории упругости. Областью, занятой упругой средой, в данной задаче является полупространство $0 \leq z < \infty$ (рис. 4). Граница области $z = 0$ свободна от напряжений везде, за исключением оси y , вдоль которой приложена линейная нагрузка равномерной интенсивности P .

Рассматриваемая задача принадлежит к классу задач плоской деформации. Это обусловлено структурой области и граничных условий: очевидно, что все плоскости, перпендикулярные оси y , являются в данной задаче равноправными, поэтому все искомые функции не зависят от координаты y .

Следовательно, достаточно рассмотреть только одну из таких плоскостей, например плоскость XOZ . Также очевидно, что компонента v вектора смещения вдоль оси y тождественно равна нулю, однако нормальное напряжение σ_y отлично от нуля. Из сказанного следует, что вектор смещения в задачах этого класса равен

$$\bar{S} = u\bar{i} + w\bar{k},$$

а из соотношений Коши – что тензор деформации имеет вид

$$\Theta = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

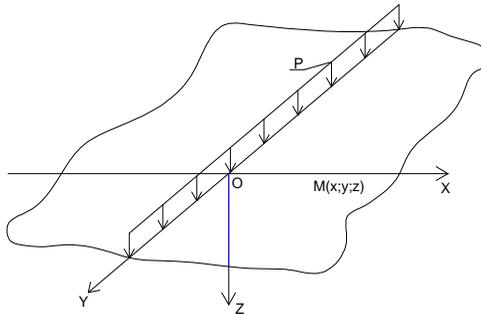


Рис. 4. Схема к задаче Фламана

Из формул закона Гука в этом случае вытекает, что только одно касательное напряжение не равно нулю:

$$\pi = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Решение задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2}; \\ \sigma_z &= \frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}; \\ \sigma_y &= \nu(\sigma_x + \sigma_z); \\ \tau_{xz} &= \frac{2P}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

В реальных ситуациях грунтовое основание нередко вполне обоснованно может рассматриваться как полупространство, однако внешние нагрузки, как правило, только в немногих случаях и с большой степенью условности могут быть сведены к линейной.

Из этого не следует, однако, практическая бесполезность задачи Фламана. Решения задачи Фламана могут быть легко обобщены на случай полосовой нагрузки, для которого приводится ряд важных инженерных задач.

1.3.2. Перемещения и деформации

Перемещение точки – изменение её положения:

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z.$$

Соотношения между перемещениями и деформациями при пренебрежении поворотами имеют вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Линейные деформации часто вычисляют по формуле:

$$\varepsilon = \frac{(l_f - l_i)}{l_i},$$

где l_i и l_f – длина линейного элемента до и после деформации.

Используют и другие представления деформации (табл. 1).

Деформациями сдвига называется степень изменения прямого угла при деформировании:

$$\begin{cases} \gamma^L = \pi/2 - \xi_f; \\ \gamma^E = \xi_i - \pi/2, \end{cases}$$

где ξ_f – конечное значение угла, который до деформации был прямым; ξ_i – начальное значение угла, который после деформации становится прямым.

В теории упругости принимают малыми величины такие, когда производимые перемещения малы, так что ими можно пренебречь по сравнению с единицей, а их произведениями и отношениями по сравнению с самими производными.

Рассматривают случаи, когда малы только деформации или только повороты и деформации, или повороты.

1. Различные определения линейной деформации

Деформация	Определение	Деформация	Определение
1. Деформация Лагранжа (техническая)	$\varepsilon^L = \frac{l_f - l_i}{l_i}$	6. Гибридное определение	$\frac{l_f^2 - l_i^2}{2l_f l_i}$
2. Деформация Лагранжа (тензорная)	$\varepsilon^L = \frac{l_f^2 - l_i^2}{2l_i^2}$	7. Деформация Эйлера (техническая)	$\varepsilon^E = \frac{l_f - l_i}{l_f}$
3. Деформация Грина – Сен – Венана	l_f^2 / l_i^2	8. Деформация Эйлера (тензорная)	$\varepsilon^E = \frac{l_f^2 - l_i^2}{2l_f^2}$
4. Степень удлинения	l_f / l_i	9. Деформация Альманзи – Коши (тензорная)	l_i^2 / l_f^2
5. Натуральная деформация	$l_n l_f / l_i$	10. Величина, обратная степени удлинения	l_i / l_f

В случае больших деформаций и поворотов имеют место соотношения:

$$l_f = \sqrt{(1 + \partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2 + (\partial w / \partial x)^2};$$

$$l_i = \sqrt{(1 - \partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2 + (\partial w / \partial x)^2};$$

$$\varepsilon_x^L = \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1;$$

$$\varepsilon_y^L = \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} - 1;$$

$$\varepsilon_z^L = \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2} - 1.$$

1.3.3. Расчёт деформаций основания

Совместная деформация основания и сооружения может характеризоваться:

- абсолютной осадкой отдельного фундамента S_i ;
- средней осадкой основания сооружения S_m ;
- относительной неравномерностью осадок фундаментов

$$\overline{\Delta S} = |S_i - S_{i-1}| / L_o$$

- креном фундамента или сооружения в целом;
- относительным углом закручивания здания или сооружения θ ;
- горизонтальным перемещением фундамента или сооружения в целом U .

При этом

$$S_i \leq [S], \quad I \leq [I], \quad U_i \leq [U], \quad \overline{\Delta S} \leq [\overline{\Delta S}].$$

В скобках приведены предельно допустимые значения.

Конечные величины осадок вычисляют различными способами.

Приведём основные зависимости по определению вертикальных перемещений для однородного линейно-деформируемого основания (Н.А. Цытович, 1963).

Вертикальные перемещения точек на плоскости $z = 0$

$$W(x, y, 0) = \frac{P(1 - \nu^2)}{\pi ER} = \frac{P}{\pi CR},$$

где $C = E/(1 - \nu^2)$.

Вертикальные перемещения нагруженной прямоугольной площади от действия равномерно распределённой нагрузки интенсивностью:

$$W(x, y) = \frac{1}{\pi C} \int_F \int_F \frac{p(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta.$$

Средняя осадка всей загруженной площади:

$$W_m = \frac{\int_0^{l_1} dx \int_0^{b_1} W_{x,y} dy}{l_1 b_1},$$

где l_1, b_1 – полудлина и полуширина площадки.

Осадки в центре круга радиусом r :

$$W(0) = \frac{p2r}{C};$$

то же по периметру круга:

$$W(r) = \frac{4 rp}{\pi C};$$

средняя осадка всей загруженной площадки:

$$W_m = \frac{16rp}{3\pi C};$$

средняя осадка абсолютно жёсткого штампа:

$$W = \frac{\pi pD}{4 C};$$

в общем виде

$$S_y = \frac{pb\omega(1 - \nu^2)}{E},$$

где $W(0)$ – максимальная осадка над центром площадки; W_m – коэффициент для значения средней осадки.

Метод послойного суммирования применяют при $b < 10$ м и $E_i \leq 10$ МПа . Он заключается в определении осадок элементарных слоёв основания в пределах сжимаемой толщи от дополнительных

напряжений σ_{zp} . Среднее давление (под центром, серединой стороны и краем фундамента) ограничивают пределом (R или $1,2R$; $1,5R$), при котором области возникающих пластических деформаций незначительно нарушают линейную деформируемость основания. Толщину сжимаемой толщи H_c определяют из соотношения напряжений и собственного веса грунта σ_{zp} и дополнительных нагрузок от внешней нагрузки σ_{zp} . Часто принимают $z = H_c$ из условия

$$\sigma_{zp} = 0,2\sigma_{zg}.$$

При наличии слабых слоёв грунта ($E \leq 5$ МПа)

$$\sigma_{zp} = 0,1\sigma_{zg}.$$

Однородные слои грунта ниже подошвы мысленно разделяют на слои толщиной $h_i \approx 0,4b$.

Используют следующие зависимости:

$$\sigma_{zg} = \gamma d_n + \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i;$$

$$\sigma_{zp} = \alpha(p - \sigma_{zg,i}) = \alpha p_0;$$

$$\alpha = f(\xi = 2z/b, \eta = l/b);$$

$$s = \beta \sum_{i=1}^n (\sigma_{zpi} h_i) / E_i.$$

В основу метода послойного суммирования положены следующие допущения:

- грунт в основании представляет собой сплошное, изотропное, линейно-деформированное тело;
- осадка обусловлена действием только напряжения σ_{zp} , остальные пять компонентов напряжений не учитываются;
- боковое расширение грунта в основании невозможно;
- напряжение σ_{zp} определяется под центром подошвы фундамента;
- при определении напряжения σ_{zp} различием в сжимаемости грунтов отдельных слоёв пренебрегают;
- фундаменты не обладают жёсткостью;
- деформации рассматриваются только в пределах сжимаемой толщи мощностью H_c ;
- значение коэффициента β принимается равным 0,8 независимо от характера грунта.

Модель линейно-деформируемого слоя. Применение модели линейно-деформируемого пространства приводит к неограниченному по глубине распределению напряжений. Фактически напряжение под фундаментом зона распространяется на глубину (1,5...2) м, что подтверждено экспериментами авторов. В связи с этим, К.Е. Егоровым основана модель в виде линейно-деформируемого слоя [8, 9].

Расчёт осадка по этой модели допускается (СНиП) в следующих случаях:

а) $b(d) \geq 10$ м и $E \geq 10$ МПа;

б) в пределах сжимаемой толщины H_c , определённой как для линейно-деформируемого пространства, залегает слой с $E \geq 100$ МПа и толщиной h_1

$$h_1 \geq H_c (1 - \sqrt[3]{E_2 / E_1}),$$

где E_2 – модуль деформации грунта подстилающего слоя с E_1 .

Расчётная толщина линейно-деформируемого слоя H_c применяется до кровли малосжимаемых грунтов с $E \geq 100$ МПа. При $E \geq 10$ МПа и $b(d) \geq 10$ м

$$H_c = (H_0 + \psi_b) K_p,$$

где H_0, ψ_b применяются для оснований, сложенных глинистыми грунтами – 9 и 0,15 м, песчаными – 6 и 0,1 м, K_p – коэффициент; $K_p = 0,8$ при $p = 100$ кПа и $K_p = 1,2$ при $p = 500$ кПа.

При промежуточных значениях давления используют интерполяцию.

Если основание сложено глинистыми и песчаными грунтами, то

$$H_c = H_s + h_{cl},$$

где H_c – толщина слоя, вычисляемая по предыдущей формуле, в предположении, что основание сложено только песчаными грунтами; h_{cl} – суммарная толщина слоя глинистых грунтов от подошвы до глубины, равной $h_{cl} = H_c$, вычисленной в предположении, что основание сложено только глинистыми грунтами.

Осадки основания вычисляются по формуле:

$$S = \frac{pbK_c}{K_m} \sum_1^n \frac{k_i - k_{i-1}}{E_i},$$

где p – среднее давление под подошвой фундамента; K_c – коэффициент, $K_c = \frac{2H_c}{b}$; $K_m = f(E, b(d))$; k_i, k_{i-1} – коэффициенты определяются по таблицам в зависимости от формы подошвы фундамента и глубины, на которой расположены подошва и кровля i -го слоя.

При этом вводят следующие допущения:

- грунт рассматриваемого слоя представляет собой линейно-деформируемое тело;
- деформации в слое грунта развиваются под действием всех компонентов напряжений;
- осадка фундамента равна средней осадке поверхности слоя грунта, развивающейся под действием местной равномерно распределённой нагрузки;
- фундамент не обладает жёсткостью;
- распределение напряжений в слое грунта соответствует задаче однородного полупространства, а жёсткость подстилающего слоя учитывается поправочным коэффициентом K_c .

Метод эквивалентного слоя Н.А. Цыговича. Эквивалентным слоем называют толщу грунта h_3 , которая в условиях невозможности бокового расширения (при загрузении всей поверхности сплошной нагрузкой) даёт осадку, равную по величине осадке фундамента, имеющего ограниченные размеры в плане при нагрузке той же интенсивности, т.е. пространственная задача заменяется одномерной. Мощност эквивалентного слоя зависит от коэффициента Пуассона ν , коэффициента формы площади, жёсткости фундамента ω и его ширины b :

$$h_3 = A \omega b,$$

где $A = (1 - \nu)^2 / (1 - 2\nu)$.

Осадка фундамента однородного основания

$$S = p_0 h_3 m_\nu,$$

где p_0 – дополнительное давление по подошве фундамента; m_ν – коэффициент относительной сжимаемости грунта.

Криволинейная эпюра давления в основании с достаточной для практики точностью заменяется эквивалентной по площади треугольной эпюрой с высотой $H_c = 2h_3$.

Основные допущения:

- грунт однороден в пределах полупространства;
- грунт представляет собой линейно-деформируемое тело, т.е. деформации его пропорциональны напряжениям;
- деформации грунта в пределах полупространства принимаются по теории упругости (по формуле Шлейхера [8]):

$$S = \omega b (1 - \nu^2) p_0 / E_0.$$

1.4. КОМБИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

Упругое основание с двумя коэффициентами постели. Уравнение изгиба балки представлено в виде

$$EJ_y^4 - k_2 y'' + k_1 y = q.$$

Пастернак П.Л. [23] получил это уравнение, исходя из представления об упругом сопротивлении основания поворотам оси балки. Реакция основания предполагается в виде поперечной нагрузки $p = -k_d y$ и в виде распределённых моментов $m = k_2 y'$. Изгибающие моменты

$$M = -\iint (q - p) dx^2 - \int m dx = -EJy''.$$

После двойного дифференцирования приходят к уравнению изгиба балки.

Власов В.З. [28] учитывал деформацию сдвига основания. Основание создаёт вертикальные реакции $p_1 = -y'k_1$ и поперечные силы $Q = -y'k_2$, вызывающие $p_2 = -Q' = y''k_2$.

Тогда

$$p = p_1 + p_2 = -k_1 y' + k_2 y''$$

Филоненко-Бородич М.М. [16] в развитие модели Фусса – Винклера ввел мембрану, перекрывающую с поверхности упругие элементы. При этом включаются в работу не только область под площадкой нагружения, но и прилегающие к ней области полупространства. В зависимости от соотношения жёсткостей мембраны и основания поверхность деформирования принимает ту или иную форму. Реакция основания пропорциональна кривизне оси балки. При этом

$$p_1 = k_1 y'; \quad p_2 = k_2 y''.$$

1.5. МОДЕЛЬ ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЫ

Покровский Г.И. (1923) и Кандауров И.И. (1959) показали, что характер развития напряжений в зернистом основании подчиняется статистическим закономерностям. Эпюры вертикальных напряжений на различных горизонтах описываются законом нормального распределения.

Предложены модели безраспорные (блочные) и распорные зернистые среды (И.И. Кандауров). Анализ моделей приведён в [9].

В безраспорных средах не возникает распора (клинового эффекта) при распределении внешней нагрузки между частицами внутри массива. Примерами могут служить сухие кирпичные и бутовые кладки.

Для распорных зернистых сред характерны образование распора при передаче внешних нагрузок и невозможность воспринимать растя-

гивающие напряжения. К ним относят песчаные и крупнообломочные грунты.

Пусть на блочную среду действует единичная сосредоточенная сила F . На два блока нижерасположенного ряда передаётся одинаковая нагрузка, равная $\frac{1}{2} F$ и т.д. В результате происходит распределение вертикальных усилий F_z по блокам подобно системе чисел треугольника Паскаля, с помощью которого вычисляются биномиальные коэффициенты.

В теории вероятности доказывается, что кривая биномиального распределения может быть аппроксимирована кривой нормального распределения. Тогда функция распределения усилий по блокам принимает вид

$$F_{mn} = F = \sqrt{\frac{2 \exp\left(-\frac{2m^2}{n}\right)}{\pi n}},$$

где n, m – порядковый номер слоя и блока в слое при начале координат в точке приложения силы F .

Вертикальные напряжения σ_z от сосредоточенной линейной нагрузки F_0 равны:

$$\sigma_z = F_0 = \sqrt{\frac{a \exp\left(-\frac{ax^2}{2z}\right)}{2\pi n}},$$

где a – коэффициент структуры, зависящий от геометрических параметров блока и коэффициента неравномерности передачи усилий между ними.

В распорных средах передача вертикальных усилий F_z от частицы к частице осуществляется через систему взаимных контактов. Величина контактных напряжений зависит от модуля упругости обломочного материала, размера частиц и количества точек взаимного контакта. Если контактные напряжения превышают предел прочности материала, то контактные грани разрушаются, сглаживаются и происходит измельчение частиц. Кроме того, происходит взаимное скольжение и поворот частиц.

1.6. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В [17] модель Винклера представлена в виде

$$p(x) = c\omega(x),$$

где $x\{x_1, x_2\}$ – координатный вектор на поверхности контакта; c – коэффициент пропорциональности (постели); $b = 1/c$ – податливость грунтового массива; c, b – случайные функции.

Болотин В.В. и Соболев Д.Н. рассматривали $c(x)$ как случайную однородную (стационарную) функцию гауссовского типа. При значительном разбросе упругих свойств основания гауссовская модель может стать неприемлемой.

Для расчёта реологических свойств винклеровской модели предложено уравнение

$$p(x, t) = c(x)[\omega(x, t) - \int_0^t \omega(x, t)R(t, r)dr],$$

где $p(x, t)$ – реакция основания; $R(t, r)$ – ядро релаксации, представляющее собой резольвенту ядра ползучести $K(t, r)$.

В этом уравнении упругие свойства (c) не зависят от времени.

Для упругого полупространства как случайно неоднородной среды линейные соотношения имеют вид

$$\sigma_{jk} = \lambda_{jk} l_m \varepsilon_{lm},$$

где σ_{jk} и ε_{lm} – компоненты тензоров напряжений и деформаций;

$\lambda_{jk} l_m$ – тензор коэффициентов упругости;

$$\lambda_{jk} l_m = \lambda \sigma_{jk} \sigma_{lm} + \mu (\sigma_{jl} \sigma_{km} + \sigma_{jm} \sigma_{kl}),$$

σ_{jk} – символ Кронекера.

Стохастические соотношения с учётом реологических свойств имеют вид:

$$E(t)\varepsilon_x(t) = \sigma_x(t) - v(t)[\sigma_y(t) + \sigma_k(t)] + \int_0^t \{\sigma_x(r) - v(\tau)[\sigma_y(\tau) + \sigma_z(\tau)]\} K(t, \tau) d\tau.$$

Пшеничкин А.П. обосновал [26] обобщённую расчётную **модель стохастического грунтового основания**. Физико-механические характеристики основания $\Pi(r)$ с учётом микро- и макронеоднородности представлены в виде тренда и случайной флуктуационной составляющей случайных полей:

$$\Pi(r) = \bar{\Pi}(r) + \tilde{\Pi}(r).$$

Например, модуль деформации рассматривают в виде случайной функции геометрических координат:

$$E_0(x, y, z) = \bar{E}_0(x, y, z) + \tilde{E}_0(x, y, z).$$

Описание таких случайных полей возможно методами теории случайных функций. Они являются статистически неоднородными случайными полями. Неоднородность поля связана с переменностью в пространстве геометрических координат математического ожидания.

Модель с переменным по глубине модулем деформации.

В большинстве работ [8] рекомендуется степенная зависимость от глубины

$$E(z) = E_0 z^n,$$

где E_0, n – параметры; z – расстояние от данной поверхности.

Модели слоистых оснований. При числе упругих слоёв не больше трёх материал каждого из них принимают как случайно-неоднородный со своими статистическими характеристиками. При большем числе слоёв, имеющих преимущественно горизонтальное направление, основание рассматривают как случайно-неоднородную ортотропную среду.

Пусть толщина деформируемого массива H , число слоёв n . Средневзвешенный модуль деформации

$$E = (1/H) \sum h_j E_j$$

или

$$E = \sum h_j \sigma_j / \sum (h_j \sigma_j / E_j),$$

где σ_j – среднее нормальное напряжение в j -м слое.

Уравнения ползучести для балок и плит на неоднородном основании с постоянными во времени свойствами. В основу принята простейшая модель ползучести

$$\sigma(t) = E(t) \left[\varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(r) R(t, \tau) d\tau \right];$$

$$\varepsilon(t) = \left[\sigma(t) + \int_0^t \sigma(r) K(t, \tau) d\tau \right] 1/E(t),$$

где $E(t)$ – мгновенный модуль упругости; $K(t, r)$ – ядро ползучести; $R(t, r)$ – ядро релаксации.

Реакция основания для прогиба балки $\omega(x, t)$ при коэффициенте упругости основания (коэффициента постели) $c(x)$ по аналогии с вышенаписанными уравнениями записана в виде:

$$p(x, t) = c(x)[\omega(x, t) - \int_0^t \omega(x, \tau) R(t - \tau) d\tau].$$

Уравнение изгиба балки представлено в виде

$$EJ (d^4\omega / dx^4) + c(x) \omega(x, t) - c(x) \int_0^t \omega(x, \tau) R(t - \tau) d\tau = q(x, t), \quad (89)$$

где EJ – изгибная жёсткость балки; $q(x)$ – интенсивность нормальной нагрузки.

1.7. ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ (ФИЛЬТРАЦИОННАЯ КОНСОЛИДАЦИЯ СЛОЯ ГРУНТА)

В [34, 35] приведены модели для описания механических процессов, происходящих в земной коре и возникающих в результате крупномасштабной строительной деятельности людей, под действием массовых, гравитационных, сейсмических и других процессов.

Изложены модели и теории консолидации и ползучести многофазных грунтов; лёссовых и набухающих вечно-мерзлых грунтов. В [34] используются решения В.А. Флорина (1961), Ю.К. Зарецкого (1967), Н.У. Арутюняна (1952), К. Терцаги (1925, 1961), Л.С. Лейбензон (1947), С.С. Вялова (1959, 1978) и др.

В основу теории консолидации в многофазных грунтах положена модель, состоящая из упруго-вязкого скелета и сжимаемой газосодержащей жидкости.

Для описания НДС многосвязной среды в пространстве и времени использованы уравнения равновесия, геометрические уравнения, физические уравнения для скелета грунта и газосодержащей поровой жидкости.

Так, одно из уравнений равновесия имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = x - \frac{\partial p_\omega}{\partial x},$$

где p_ω – поровое давление.

Физические уравнения для скелета грунта базируются на деформационной теории пластичности (Л.М. Качанов, 1969).

Зависимости между напряжениями и деформациями при изменении объёма имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) &= 2\Psi_i^0 \sigma_i(t) + 2\tilde{\Phi}_i[\Psi_i \sigma_i(t)], \\ \varepsilon_v(t) &= \Psi_v^0 \sigma_v(t) + \tilde{\Phi}_v[\Psi_v \sigma_v(t)]; \end{aligned}$$

где $\tilde{\Phi}_i[y(t)]$, $\tilde{\Phi}_v[y(t)]$ – интегральные операторы Вольтера с ядрами $k_i(t, \tau)$ и $k_v(t, \tau)$, характеризующие скорость ползучести скелета грунта при изменении формы и объёма.

Пусть слой грунта находится под действием сплошной равномерно распределённой нагрузки, безгранично распространённой во все стороны по горизонтальной поверхности слоя. Необходимо сделать прогноз развития одномерной консолидации грунта.

Принимаются следующие допущения:

- поровая вода и минеральные частицы грунта не сжимаемы;
- характеристики сжимаемости и фильтрации грунта в рассматриваемом диапазоне изменения давлений являются величинами постоянными;
- фильтрация поровой жидкости подчиняется закону Дарси;
- ползучесть скелета грунта учитывается;
- все поры грунта полностью заполнены водой;
- в момент приложения нагрузки вся она передаётся на поровую воду;
- когда отсутствует нагрузка, поровое давление равно нулю;
- часть давления от нагрузки передаётся на скелет грунта p_z , а другая – на поровую воду, создавая в ней напор p_w , т.е. $p_0 = p_z + p_w$;
- с течением времени давление на воду будет уменьшаться, а на скелет возрастать.

Для полностью водонасыщенного грунта соблюдаются условия неразрывности – увеличение расхода воды равно уменьшению пористости:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\partial n}{\partial t}.$$

По закону ламинарной фильтрации

$$q = -K_\phi \frac{\partial H}{\partial z}$$

и

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -K_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}.$$

Учитывая, что напор воды H равен давлению в воде p_w (поровому давлению), делённому на удельный вес воды γ_w , то

$$p_w = p_0 - p_z; \quad H = p_w / \gamma_w; \quad H = (p_0 - p_z) / \gamma_w;$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{K_\phi}{\gamma_w} \frac{\partial^2 P_z}{\partial z^2}.$$

Вводится коэффициент консолидации

$$C_v = \frac{K_\phi}{m_v \gamma_w},$$

где m_v – коэффициент относительной сжимаемости грунта.

Тогда

$$C_v \frac{\partial^2 P_z}{\partial z^2} = \frac{\partial p_z}{\partial t}.$$

Это дифференциальное уравнение одномерной задачи теории фильтрационной консолидации водонасыщенного грунта.

Давление в скелете грунта на глубине z :

$$p_z = \rho_0 \left[1 - \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi z}{2h} e^{-N} - \frac{4}{3\pi} \sin \frac{3\pi z}{2h} e^{-9N} \right],$$

где e – основание натуральных логарифмов;

$$N = \frac{\pi^2 C_v t}{4h_\phi^2},$$

где h_ϕ – максимальная длина пути фильтрации, $h_\phi = h_c / 2$.

1.8. ДИНАМИКА СЫПУЧИХ СРЕД

В условиях плоской деформации движущейся сыпучей среды следует ввести в рассмотрение пять неизвестных функций: $X_x(x, y, t)$; $Y_y(x, y, t)$; $X_y(x, y, t)$; $v_x(x, y, t)$; $v_y(x, y, t)$ – три компонента тензора напряжений и две проекции вектора скорости на оси x и y .

Исходя из следующей системы уравнений, описывающей состояние движущейся сыпучей среды [6]:

$$X - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y};$$

$$Y - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y};$$

$$(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2 = \sin^2 \varphi (X_x + Y_y + 2kctg \varphi)^2;$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{2X_y}{X_x - Y_y} = \frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \pm \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \operatorname{tg} \varphi}{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \pm \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \operatorname{tg} \varphi}.$$

Уравнения движения среды являются условием предельного равновесия, заключающимся в том, что в каждой точке среды максимальная разность касательного напряжения и соответствующего нормального напряжения, умноженного на тангенс угла внутреннего трения φ , равна предельному напряжению сцепления k . Условие

$$|\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi = k$$

выполняется в каждой точке на двух площадках, составляющих с направлением максимального главного нормального напряжения σ_1 острые углы $\pm \gamma$, где $\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

Два семейства линий, совпадающих в каждой точке с направлениями этих площадок, принято называть линиями скольжения. Уравнение представляет собой условие сплошности для несжимаемой среды и выражает условие совпадения направления максимальной скорости деформаций сдвига с одним из семейств линий скольжения, которое будем называть в дальнейшем активным семейством.

1.9. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Реология – наука, устанавливающая общие законы образования и развития во времени деформаций любого вещества от различных причин в различных термодинамических и физико-химических условиях.

Для прогноза деформации неустановившейся затухающей ползучести применяют линейную (в отношении напряжений) теорию наследственной ползучести Больцмана–Вольтера [3, 21, 33 – 35].

Уравнение состояния при однократном нагружении имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + k(t-t_0)\sigma(t_0)t_0,$$

где $\varepsilon(t)$ – изменение относительной деформации во времени; $\sigma(t)/E$ – мгновенная деформация в момент времени t при модуле E ; $k(t-t_0)\sigma(t_0)t_0$ – ядро ползучести.

При непрерывном нагружении

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} \int_0^t k(t-t_0)\sigma(t_0)\Delta t_0.$$

Ядро ползучести – скорость ползучести при постоянном напряжении, отнесённая к единице действующего давления.

Для глинистых грунтов

$$k(t-t_0) = \delta e^{-\delta'(t-t_0)},$$

где δ и δ' – параметры ползучести, определяемые опытным путём.

Уравнение Бингама–Шведова имеет вид:

$$\frac{1}{r} \varepsilon_{yz} = \tau - \tau_0,$$

откуда

$$\tau = \tau_0 + v \frac{d\varepsilon}{dt},$$

где $v = 1/\eta$ – коэффициент вязкости; τ_0 – начальное ($\varepsilon_{yz} = 0$) двиговое напряжение.

Месчан С.Р. предложил модели формоизменения глинистых грунтов при сдвиге под действием уплотняющего давления. Эксперименты подтвердили положения Маслова–Арутюняна, теории наследственной ползучести стареющих материалов.

Уравнение ползучести принято в виде:

$$\gamma_t = \omega(t, \sigma_z) f(\tau, \sigma_z, t),$$

где $f(\tau, \sigma_z, t) = \alpha(\sigma_z, t)\tau + \beta(\sigma_z, t)t\eta(\sigma_z)$, $\omega(\sigma_z, t)$ – мера сдвиговой ползучести; $f(\tau, \sigma_z, t)$ – функция касательного напряжения, зависящая от σ_z ; n – показатель нелинейности деформации сдвиговой ползучести.

Уравнение ползучести при простом сдвиге для любого его состояния получено в виде (закон ползучести при простом сдвиге):

$$\gamma_t = \omega(t-v) f(\tau/\tau_{f.st}) = \omega(t-v) f\left(\frac{\tau}{\sigma_z \operatorname{tg}\phi + c}\right),$$

где v – момент приложения касательного напряжения; $\tau_{f,st}$ – стандартное сопротивление сдвигу.

Для описания процессов термо- и виброползучести предложено уравнение:

$$\gamma_t = \omega(t - v) f[\tau / \tau_{f,st} (\sigma_{z,t} - v, T_0, a_0, \omega_0, \omega)],$$

где T_0 – температура; ω_0 – частота колебаний; a_0 – амплитуда колебаний.

Ползучесть может происходить с постоянной или уменьшающейся скоростью, но может возникать (при больших уровнях напряжений) и незатухающая с увеличивающейся скоростью (прогрессирующая ползучесть), приводящая к разрушению.

При приложении или снятии нагрузок происходят процессы уплотнения или разбухания водонасыщенного грунта, т.е. возникают процессы отжижения или притока. Продолжительность консолидации определяется водопроницаемостью грунта, структурной прочностью, ползучестью скелета, характером напластований.

Для прогноза развития осадок во времени используют теорию фильтрационной консолидации. При этом рассматривают полностью водонасыщенные грунты. Вода из пор отжимается только в вертикальном направлении. В начальный момент времени (приложения нагрузки) давление передаётся на воду, а затем постепенно на скелет грунта. Осадка в любой момент времени

$$S_t = US,$$

где U – степень уплотнения во времени; S – конечная осадка, например, вычисленная по СНиП.

Величина $U = f(N_R)$, где $N_R = \pi^2 C_v t / 4h_s^2$, t – время от начала приложения нагрузки, h_s – толщина уплотняемого слоя, C_v – коэффициент консолидации,

$$C_v = K_\phi E / \gamma_\omega \beta,$$

K_ϕ – коэффициент фильтрации, $\beta = f(v)$.

1.10. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Упругость – свойство тел восстанавливать свои размеры и форму после удаления внешних сил, вызвавших деформацию. Наибольшее применение вызвала линейная теория упругости, когда деформация пропорциональна нагрузкам.

Пластичность – свойство твёрдых тел приобретать необратимые (остаточные) деформации, называемые пластическими.

Модель идеально пластического тела является классической моделью тела, способного деформироваться необратимо и приобретать остаточные деформации. Простейшим видом идеально пластического тела является модель изотропного несжимаемого жесткопластического тела. Эта модель не учитывает упругую деформацию. Это имеет место, когда работа внутренних сил на пластических деформациях существенно превосходит работу внутренних сил на упругих деформациях. Такие тела не деформируются, пока напряжения не достигнут предела текучести.

Для сложного напряжённого состояния условие пластичности или текучести имеет вид:

$$f(\sigma_{ij}) = 0; i, j = 1, 2, 3,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

При $f(\sigma_{ij}) < 0$ имеет место жёсткое состояние, при $f(\sigma_{ij}) = 0$ – пластическое.

В пространстве компонент тензора напряжений условия пластичности изображаются в виде некоторой поверхности текучести. В течении процесса деформирования жесткопластическое тело сохраняет начальную изотропию или анизотропию.

Модель жёсткопластического тела включает также свойство несжимаемости материала.

Если в теории упругости рассматривается связь между напряжениями и деформациями, то в теории идеальной пластичности – связь между напряжениями и скоростями пластической деформации.

Мощность диссипации механической энергии при пластическом деформировании определяется равенством:

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij},$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}$ – компоненты скорости пластической деформации.

Согласно принципу Р. Мизеса

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}$$

или

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0,$$

где σ_{ij} – значения компоненты напряжения, соответствующие заданным значениям $\dot{\epsilon}_{ij}$; σ_{ij}^0 – возможные значения компонент напряжений, удовлетворяющие условию пластичности.

Следствием принципа максимума Р. Мизеса является зависимость:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}};$$

$$\lambda > 0 \text{ при } f(\sigma_{ij}) = 0, \quad \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} = 0;$$

$$\lambda = 0 \text{ при } f(\sigma_{ij}) = 0, \quad \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} < 0.$$

Приведённая зависимость является ассоциированным законом пластического течения, а функция $f(\sigma_{ij})$ является пластическим потенциалом.

Важным понятием в теории идеальной пластичности является диссипативная функция (потенциал напряжения)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}.$$

В пространстве компонент скоростей пластической деформации диссипативная функция имеет геометрический образ в виде поверхности равного уровня мощности диссипации внутренних сил.

Для решения статических задач привлекаются (М.И. Ерхов, 1978):
а) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + x_i = 0; \quad i, j = 1, 2, 3;$$

б) граничные условия для напряжений

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на } S_p;$$

в) условия пластичности

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0;$$

г) условия несжимаемости и граничные условия для скоростей и перемещений

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^s \text{ на } S_u;$$

д) соотношения ассоциированного закона течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

где x_i – компоненты вектора объёмных сил; p_i – компоненты вектора поверхностной нагрузки; S_p и S_u – части поверхности тела S , на ко-

торых заданы поверхностные нагрузки и скорости перемещений; n_j – компоненты к нормали поверхности S .

При малых деформациях

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}).$$

При действии динамических нагрузок на конструкции из жёстко-пластического материала вводят следующие условия:

а) уравнения движения:

$$\sigma_{ij,j} - X_i - \gamma \dot{u}_i = 0; \quad i, j = 1, 2, 3;$$

б) граничные условия для напряжений:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = p_i \quad \text{на } S_u;$$

в) условия пластичности:

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0;$$

г) условия несжимаемости и граничные условия для скоростей и перемещений:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^s \quad \text{на } \dot{S}_u; \quad u_i = u_i^s \quad \text{на } S_u;$$

д) соотношения ассоциированного закона течения:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}};$$

е) связи компонентов ускорения с компонентами скорости:

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t};$$

ж) начальные условия для скоростей и перемещений:

$$\dot{u}_i|_{t=0} = \dot{u}_i(t_0); \quad u_i|_{t=0} = u_i(t_0),$$

где \dot{S}_u и S_u – части поверхности S , на которых заданы значения скоростей и перемещений.

Диаграмма Прандля соответствует модели упруго-идеально-пластического тела. Горизонтальный участок описывает идеальную пластичность.

Если $\sigma < \sigma_T$, то $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.

Исключение упругих деформаций приводит к жёстко-пластическому телу. При $\sigma < \sigma_T$ тело абсолютно жёсткое; $\sigma = \sigma_T$ возможны только пластические деформации. Концепция жёстко-пластического тела реализована в теории предельного равновесия.

Условия пластичности Треска: течение происходит при достижении максимального касательного напряжения определённого уровня. По предложению Сен-Венана

$$\max(|\sigma_i|, |\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_T \leq 0,$$

где σ_i ($i = 1, 2, 3$) – главные напряжения; σ_T – предел текучести при одноосном напряжённом состоянии.

Главные касательные напряжения:

$$\tau_k = \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_j), \quad k \neq i, \quad i \neq j, \quad k \neq j.$$

При чистом сдвиге

$$|\tau_k| = \frac{1}{2}\sigma_T.$$

Условие пластичности Мизеса имеет вид:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_T^2 \leq 0.$$

Поверхность пластичности Мизеса регулярная – эллипсоид вращения. Условие Мизеса-Сен-Венана описывает нерегулярную поверхность с рёбрами.

Важное значение для описания процесса образования пластических деформаций играет постулат Друккера (1951).

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})\delta\varepsilon_{ij}^* \geq 0,$$

где σ_{ij}^* – действительное напряжение; σ_{ij} – любое возможное напряжение; при этом должно выполняться условие пластичности $\varphi(\sigma^*) \leq 0$, $\varphi(\sigma) \leq 0$, ε_{ij} – приращение пластической деформации, соответствующее напряжению σ^* .

Знак равенства возможен при $\sigma\varepsilon_{ij} = 0$, а напряжение σ^* – строго внутри области, ограниченной условием пластичности. Поверхность пластичности – выпуклая область, вектор приращения пластических

деформаций направлен по нормали к поверхности пластичности в точке σ^* , а $\varphi(\sigma^*) = 0$.

Приведём уравнения текучести (предельного напряжённого состояния) для жёстко-пластичных сред для пространственного напряжённого состояния.

Условие Губера-Мизеса ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$):

$$\sqrt{I_2} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \text{ или } \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T.$$

Для плоского напряжённого состояния ($\sigma_3 = 0$):

$$\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_T.$$

Условие прочности Мизеса–Шлейхера-Боткина

($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2];$$

$$a = \frac{\sin \varphi}{[3(3 - \sin^2 \varphi)]^{\frac{1}{2}}} \approx \sin \frac{\varphi}{3};$$

$$k = c(1 - 12a^2)^{\frac{1}{2}} \approx c \cos \varphi.$$

Условие прочности по Морю–Кулону (плоская деформация $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$):

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi \leq 0.$$

В нелинейной механике используют такие понятия, как интенсивность напряжений

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

и интенсивность деформаций

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)} .$$

Часто принимают $\varepsilon_i = \beta \sigma_i^m$; $\sigma_i = E' \varepsilon_i$.

Для каждой точки нелинейно деформируемого упругого тела интенсивность напряжений σ_i пропорциональна интенсивности относительных деформаций ε_i . Коэффициент пропорциональности $E' = f(\varepsilon_i)$ – переменная величина.

Если $\mu \approx 0,5$, то материал в процессе деформирования меняет лишь форму без изменения объёма.

Для одноосного напряжённого состояния

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}} &= G' \varepsilon_{\text{окт}}; \sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \\ \tau_{\text{окт}} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_1; G = \frac{\tau_{\text{окт}}}{\gamma_{\text{окт}}}; \sigma_i = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) \tau_{\text{окт}}; \gamma_{\text{окт}} \approx \sqrt{2} \varepsilon_1; \\ \gamma_{\text{окт}} &\approx \frac{\sqrt{2}}{3} [3\varepsilon_1 - \sigma_1 / 3k]; \gamma_{\text{окт}} \approx \sqrt{2} \varepsilon_i . \end{aligned}$$

где $\tau_{\text{окт}}$, $\varepsilon_{\text{окт}}$ – октаэдрическое сдвигающее напряжение и сдвигающая деформация; $G_i = G' 3\varepsilon_i$ – секущий модуль сдвига; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – модуль объёмного сжатия.

Для сложного напряжённого состояния

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = F(\sigma_{\text{окт}}); \\ \sigma_{\text{окт}} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1; \\ I_2 &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]. \end{aligned}$$

Параметр Надаи – Лоде

$$\lambda_\sigma = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)} .$$

Он изменяется от -1 до $+1$. Здесь $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Зависимость между напряжениями и упруго-пластическими деформациями описывается уравнением Г. Генки [21]:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \frac{2\sigma_i}{2\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}); \quad \sigma_y - \sigma_{cp} = \frac{2\sigma_i}{2\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_{cp});$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = \frac{2\sigma_i}{2\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}); \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{xy};$$

$$\tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{yz}; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{zx}.$$

Предельное сопротивление грунтов сдвигу:

для плоскостного сдвига (уравнение Кулона)

$$\tau_{np} = f(\sigma);$$

для связных грунтов

$$\tau_{np} = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi;$$

для прямолинейной огибающей кругов Мора (сложное напряжённое состояние)

$$\tau_{np} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{3}\right);$$

по кривым Мора

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \operatorname{ctg} \varphi} = \sin \varphi;$$

в составляющих напряжений

$$\frac{(\sigma_z - \sigma_y) + 4\tau_{yz}^2}{(\sigma_z + \sigma_y + 2c \operatorname{ctg} \varphi)^2} = \sin^2 \varphi.$$

Более общий критерий разрушения:

$$F(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad \text{или} \quad F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0,$$

где $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$; $I_2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1$; $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Применение уравнений нелинейной механики грунтов (механики, разрешающая система уравнений которой не линейна). В качестве объекта исследования является среда с двумя основными особенностями: с внутренним трением и многокомпонентностью (обычно трёхкомпонентная среда – частицы грунта + вода + воздух).

Нелинейность разрешающей системы проявляется в трёх случаях [10]:

- при зависимости консолидационных параметров от изменяющейся пористости – нелинейные консолидационные свойства;

- при нелинейной связи между напряжениями, деформациями и их производными во времени – физическая нелинейность;
- при нелинейной связи между компонентами деформаций и градиентами перемещений – геометрическая нелинейность.

Для решений задач используются уравнения состояния, вытекающие из теории пластичности. В основе теории пластического течения лежит принцип максимума Мизеса: скорость диссипации механической энергии в единице объёма во время пластического деформирования имеет максимальное значение для действительного напряжённого состояния из всех возможных, допускаемых данным критерием пластичности.

В качестве допущений принимают следующие:

- поверхность нагружения не должна быть вогнута;
- направление вектора приращений пластических деформаций должно совпадать с нормалью к поверхности нагружения в точке нагружения (ассоциированный закон пластического течения).

При учёте вязкопластичности вводится понятие мгновенной поверхности нагружения. Циклические нагружения вызывают дополнительные вязкопластические деформации (вторичные пластические деформации).

К числу основных факторов, определяющих процесс деформирования, относят:

- физическое состояние грунта;
- деформация грунтов при активном нагружении;
- пластические деформации, зависящие нелинейно от напряжения, а также от пути нагружения и вида напряжённого состояния;
- дилатансия (дополнительное уплотнение или разуплотнение), зависящая от плотности грунта, его физического состояния, степени приближения к предельному состоянию, траектории нагружения, характера воздействия;
- многофазность грунтов;
- запаздывание пластических деформаций во времени, особенно для связных грунтов;
- характер воздействия (статические, циклические, динамические нагружения).

Для анализа нелинейного поведения грунтов используют различные методы вычислительной математики: конечно-разностные, вариационно-разностные, конечных и граничных элементов и др.

Кроме того, используют и другие нелинейные методы расчёта: нелинейная деформационная теория пластичности; ассоциированный закон пластического течения Друккера-Прагера, неассоциированный закон пластического течения, критического состояния, пластического

течения с упрочнением, обобщённый ассоциированный закон течения упрочняющихся пластических сред Койтера.

Величина пластических деформаций зависит от пути нагружения и вида напряжённого состояния. При сдвиге грунт либо доуплотняется (контракция), либо разуплотняется. Знак и величина дилатационной части объектной деформации зависит от плотности грунта, степени приближения к предельному состоянию, траектории нагружения. Пластические деформации запаздывают во времени по отношению к нагружаемому состоянию от нагрузки. Время запаздывания зависит от свойств грунта, величины и характера воздействия.

Феноменологическое описание реологических процессов в грунтах проводятся на основе теории наследственной ползучести, теории течения и упрочнения.

Математическая модель вязкопластического деформирования грунтов. В основу положена теория пластического течения упрочняющихся сред [10].

Приращение полных деформаций принимают в виде суммы

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p,$$

где $d\epsilon_{ij}^e = c_{ij,kl}^e d\sigma_{kl}$, $d\sigma_{kl}$ – приращение компонент упругих деформаций, $c_{ij,kl}^e$ – матрица упругих характеристик, определяемых по разгрузке; приращение пластических деформаций по всем регулярным участкам поверхности нагружения $f_2 = 0$.

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum d\lambda_r \frac{df_2}{d\sigma_{ij}},$$

где $d\lambda_r$ – пластические множители.

Принят обобщённый ассоциированный закон пластического течения Койтера. Граница области упругого деформирования совпадает с поверхностью нагружения $f_2 = 0$, имеющей регулярные участки и особые (сингулярные) точки.

В пределах поверхности нагружения грунт ведёт себя упруго. При нагружениях, выходящих за предел этой области, развиваются необратимые пластические деформации сдвига и объёма, характеризующиеся интервалами ϵ_i^p и ϵ_v^p . Положение поверхности изменяется в процессе деформирования по мере накопления пластических деформаций.

Функция нагружения имеет вид

$$f_r = f_r(\sigma_i; \sigma; \omega_i; \omega_v; k_r),$$

где k_r – характерные константы регулярных участков; ω_i и ω_v – параметры упрочнения.

Предельные сдвиговые деформации разрушения ε_i^* и объёмные ε_{vd} связаны линейной зависимостью

$$\varepsilon_{vd}^* = -n^* \varepsilon_i^* .$$

Закономерности изменения поверхности нагружения определяют функции упрочнения, зависящими от накопления пластических деформаций, параметров упрочнения.

Функциями упрочнения являются: $p(\omega_i; \omega_v)$; $q(\omega_i; \omega_v)$; $q_d(\omega_i; \omega_v)$; $\Psi(\omega_i)$.

Функция упрочнения $p(\omega_i; \omega_v)$ является описанием диаграммы объёмного деформирования по данным трёхосных испытаний; функция упрочнения $q(\omega_i; \omega_v)$ является описанием деформации грунта.

$$q = \sigma_i^*(\sigma) \Phi \left(\frac{\omega_i}{\omega_i^*} \right) ;$$

$$\sigma_i^*(\sigma) = c_{\text{окт}}^* - \sigma \text{tg} \varphi_{\text{окт}} ;$$

$$\Phi \left(\frac{\omega_i}{\omega_i^*} \right) = \frac{\omega_i}{\left[(1-B)\omega_i^* + B\omega_i \right]} ,$$

где $\sigma_i^*(\sigma)$ – условие предельного состояния грунта, определяемое в зависимости от принятого критерия прочности.

Модели основания буронабивной сваи. Математическая модель грунта принята [10] на основе теории пластического течения. Деформация грунта и их приращения складываются из упругой и пластической частей. Приращения упругих деформаций связаны с приращением напряжений законом Гука. Приращение пластических деформаций определяются на основании обобщённого ассоциированного закона течения. Функции нагружения приняты в виде соотношений

$$f_r = \sigma_i + k_r(\omega_i; \omega_v)\sigma - c_r(\omega_i; \omega_v) ,$$

где k_r и c_r – функция нагружения для каждого участка поверхности нагружения.

Решение задачи выполнено методом конечных элементов при совместном рассмотрении вышеприведённого уравнения и математического уравнения

$$[k]\{u\} = \{F_\gamma\} + \{F_q\} + \{F_p\} ,$$

где $k = \sum_s 2\pi \int [B]^T [D] [B] R ds$ – глобальная матрица жёсткости;

$\{u\} \begin{Bmatrix} U_R \\ U_Z \end{Bmatrix}$ – вектор узловых перемещений; $\{F_\gamma\}$ и $\{F_q\}$ – векторы массо-

вых и внешних сил; $\{F_p\}$ – вектор сил, определённый соотношением:

$$\{F_p\} = \sum_s 2\pi \int [B]^T [D_{cb}] \{\epsilon^p\} R ds,$$

где $[B]$ – матрица, характеризующая геометрическую форму элемента; $[D]$ – матрица упругих характеристик; R – расстояние от оси симметрии; $\{F_p\}$ – вектор пластических деформаций.

Расчётная область аппроксимировалась асимметричными треугольными элементами второго порядка.

В области, занятой сваей, вводится дополнительная фиктивная сила

$$\{F_\phi\} = \sum_s 2\pi \int [B]^T [D_{cb}] [B] \{u\} R ds,$$

где $[D_{cb}]$ – матрица упругих характеристик ствола сваи.

В теории предельного равновесия [19] в основном рассматриваются две группы задач – для условий плоской деформации и для условий осевой симметрии. Наибольшие успехи были достигнуты в области решения прикладных задач для условий плоской деформации. Здесь решены основные задачи о вдавливании штампа в жёстко-пластическую среду, об устойчивости консолидирующихся оснований, о влиянии эксцентриситета и наклона равнодействующей на величину предельной нагрузки, о взаимовлиянии близкорасположенных фундаментов, об устойчивости слабых оснований дорожных насыпей и ряд других. Большинство из названных решений успешно применяются в практических расчётах оснований инженерных сооружений.

Для условий осевой симметрии получение подобных результатов встречает значительные трудности. Это объясняется тем, что задачи для условий осевой симметрии являются статически неопределимыми. Применение для раскрытия статической неопределимости условия полной пластичности грунтов существенно ограничивает как область определения предельной нагрузки, так и разнообразие расчётных схем. До сих пор не были получены статические решения задачи о предельном давлении круглого фундамента на основании для общего случая произвольных боковых пригрузок, а также задачи о предельном давлении кольцевого фундамента при развитии области предельного равновесия как с наружной, так и с внутренней стороны кольца.

Основной вопрос анализа упруго-пластического деформирования грунтов заключается в разработке модели, адекватно отражающей их свойства. Определение параметров грунта для большинства моделей упруго-пластической среды с упрочнением требует наличия нестандартных приборов и методик испытания. Оценка устойчивости в рамках упруго-пластического решения предполагает качественное описание заключительного этапа деформирования, когда преобладает пластическое течение грунта, что представляет значительные трудности.

Современная практика расчётного обоснования конструкций проектируемых зданий, их фундаментов и оснований предполагает проведение исследований напряжённо-деформированного состояния (НДС) полной системы «здание – фундамент – грунтовое основание» по вычислительным программам, реализующим метод конечных элементов. Ввиду сложности корректного совместного расчёта всей системы, учёт взаимодействия здания с грунтовым основанием осуществляется с помощью коэффициентов постели основания, вычисляемых по упрощённым нормативным методикам. Расчёт грунтового основания при взаимодействии с фундаментом осуществляется без учёта реальной жёсткости самого здания.

Перечисленные расчёты выполняются с использованием специализированных для решения различных задач вычислительных программ и никак не связаны между собой.

В то же время в реальных условиях распределение вертикальных перемещений и коэффициентов постели основания по площади фундамента весьма неоднородно и зависит от жёсткости здания; характера распределения нагрузки, передаваемой на фундамент; инженерно-геологического строения основания; свойств грунтов и многих других факторов.

Учёт реального распределения нагрузок от здания на фундаментную плиту для данной конструкции приводит к значительному увеличению прогиба фундаментной плиты и максимальной осадки здания. При этом учёт реальной жёсткости здания позволяет существенно уменьшить прогиб фундаментной плиты и снизить максимальную прогнозируемую осадку здания.

Однако учёт реальной жёсткости здания позволяет получить наиболее высокие значения коэффициентов постели основания, которые (вместо приближённых) могут быть использованы при уточнённом расчёте прочности самого здания по его конечно элементной модели, построенной для создания суперэлемента.

Кроме того, для получения более достоверного прогноза НДС здания и грунтового основания целесообразно проводить итерационные расчёты, моделирующие поэтапное возведение здания с пересчё-

том коэффициентов постели основания и распределения нагрузки, передаваемой на фундамент.

Условия предельного равновесия Мора–Кулона и Мизеса–Боткина наиболее применимы в механике сыпучих сред. Условие Мора–Кулона лучше соответствует экспериментальным данным, но крайне затруднительно в использовании из-за наличия на предельной поверхности сингулярных точек, а Мизеса–Боткина удобно в применении, но приводит к повышению по сравнению с опытом влияния промежуточного главного напряжения σ_2 на прочность.

В последнее время получили распространение различные обобщения условия предельного равновесия Мора–Кулона, имеющие регулярную поверхность и основанные на учёте вида напряжённого состояния, например предложенное Г.А. Гениевым [6]. Вопрос о физическом объяснении влияния вида напряжённого состояния на прочность сыпучих сред остаётся открытым.

Наиболее приемлемым с физической точки зрения является обобщение условия Мора–Кулона, предложенное Накай и Мацуоки [19]:

$$\tau_v = \sigma_v \operatorname{tg} \Phi, \quad (*)$$

где

$$\sigma_v = \frac{3I_3}{I_2}; \quad \tau_v = \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3 - 9I_3^2}{I_2^2}} -$$

соответственно нормальное и касательное напряжения на пространственной площадке предельного равновесия; Φ – эффективный угол внутреннего трения;

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3;$$

$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ – инварианты тензора напряжений.

Нормаль площадки предельного равновесия v определяется направляющими косинусами

$$l = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_1}}; \quad m = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_2}}; \quad n = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_3}},$$

где $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ – главные напряжения (сжатию соответствует $\sigma_i > 0$, нумерация напряжений принята исходя из условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Предельная поверхность, соответствующая (*), в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ имеет вид некруговой конической поверхности, описывающей пирамиду Мора–Кулона, с вершиной в начале координат. Ус-

ловие (*) предсказывает одинаковую прочность при напряжённых состояниях обобщённого сжатия $\sigma_2 = \sigma_3$ и растяжения $\sigma_1 = \sigma_2$ и несколько повышенную прочность при промежуточных значениях σ_2 .

Для различных состояний грунта по плотности дилатансия может быть как отрицательной (разрыхление), так и положительной (уплотнение). Деформация разрыхления наблюдается при сдвиге грунта плотного сложения при низких напряжениях или при напряжениях меньших тех, которые привели её к данной степени уплотнения. Сдвиг рыхлых грунтов характеризуется деформацией уплотнения, т.е. для грунтов ассоциированный закон течения Мизеса не выполняется, а вектор приращения пластической деформации в общем случае не ортогонален предельной поверхности.

Пластическое деформирование сыпучих сплошных сред в микроточке происходит в результате возникновения сдвигов на площадках с некоторым критическим значением касательных сил, которое зависит от нормальных. Площадки предельного равновесия не самые опасные, так как скольжение по ним требует пересечения значительного числа частиц.

Пусть сила сопротивления среды t отклоняется от площадки предельного равновесия и лежит в плоскости истинного проскальзывания частиц, уравновешивая напряжения σ_v и τ_v , действующие на площадках предельного равновесия.

Уравнение предельного течения имеет вид

$$t = \operatorname{tg} \varphi_0 s, \quad (**)$$

где

$$s = \sigma_1 l l' + \sigma_2 m m' + \sigma_3 n n';$$

$$t = \sqrt{(\sigma_1 l m' - \sigma_2 m l')^2 + (\sigma_2 m n' - \sigma_3 n m')^2 + (\sigma_3 n l' - \sigma_1 n l')^2} -$$

нормальная и касательная силы, действующие на площадке скольжения и численно равные проекциям напряжений σ_v и τ_v на нормаль к площадке скольжения l' и на неё саму; φ_0 – истинный угол внутреннего трения; l , m' , n' – направляющие косинусы нормали площадки скольжения.

С математической точки зрения, под площадкой скольжения подразумевается поверхность, на которой имеется или предполагается разрыв скорости при условии, что нормальная компонента разрыва равна нулю.

Если к критически напряжённой точке приложить приращения напряжений $d\sigma_i$, вследствие малости этого приращения направления главных напряжений и связанных с ними площадок предельного равновесия не изменятся, а тензоры напряжений и скоростей пластиче-

ских деформации будут коаксиальными. Применяя к уравнению предельного равновесия (*) ассоциированный закон течения Мизеса с учётом указанного допущения, получаем выражения для направляющих косинусов нормали площадки скольжения:

$$\left\{ \begin{aligned} l' &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_2^p \dot{\varepsilon}_3^p - J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1 J_3}}{(\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_2^p)(\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_3^p)}}; \\ m' &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_3^p - J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1 J_3}}{(\dot{\varepsilon}_2^p - \dot{\varepsilon}_1^p)(\dot{\varepsilon}_2^p - \dot{\varepsilon}_3^p)}}; \\ n' &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_2^p - J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1 J_3}}{(\dot{\varepsilon}_3^p - \dot{\varepsilon}_1^p)(\dot{\varepsilon}_3^p - \dot{\varepsilon}_2^p)}} \end{aligned} \right. \quad (***)$$

где $J_1 = \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p$, $J_2 = \dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_2^p \dot{\varepsilon}_3^p + \dot{\varepsilon}_3^p \dot{\varepsilon}_1^p$, $J_3 = \dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_2^p \dot{\varepsilon}_3^p$ – инварианты тензора скоростей пластической деформации; $\varepsilon_i^p = d\varepsilon_i^p / dt$ ($i = 1, 2, 3$) – главные скорости пластической деформации.

Если среда обладает хотя бы некоторой регулярной упаковкой, ориентация площадки скольжения является функцией ориентации площадки предельного равновесия и дилатансии. Тогда формулы (***) будут справедливы и при произвольной дилатансии, так как направляющие косинусы выражены через скорости пластической деформации. Здесь стоит отметить, что лучшее согласие теории и эксперимента будет наблюдаться для грунтов, состоящих из твёрдых частиц округлой формы.

Если среда практически не сжимаема, то $J_1 = 0$, и из выражений (***) следует, что площадка скольжения совпадает с октаэдрической с направляющими косинусами нормали. Площадка скольжения в общем случае не совпадает с площадками предельного равновесия, а её ориентация определяется деформированным состоянием среды.

На площадке скольжения тангенциальная компонента скорости пластической деформации

$$\dot{\gamma}_{v'}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1 J_3}},$$

нормальная компонента $\dot{\varepsilon}_{v'}^p = 0$.

Определяющие связи получены в виде:

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_1^p l'^2 + \dot{\epsilon}_2^p m'^2 + \dot{\epsilon}_3^p n'^2,$$

$$\dot{\gamma}_v^p = 2\sqrt{(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}^p)^2 l'^2 m'^2 + (\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 m'^2 n'^2 + (\dot{\epsilon}_3^p - \dot{\epsilon}_1^p)^2 l'^2},$$

где $\dot{\epsilon}_1^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma_1 l}{l'} - s \right)$; $\dot{\epsilon}_2^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma_2 m}{m'} - s \right)$; $\dot{\epsilon}_3^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma_3 n}{n'} - s \right)$; $\dot{\lambda} = d\lambda/dt$ –

бесконечно малый скалярный множитель ($\lambda > 0$); l' , m' , n' – направляющие косинусы, определяющие площадки скольжения в пространстве главных скоростей пластической деформации $\dot{\epsilon}_1^p \geq \dot{\epsilon}_2^p \geq \dot{\epsilon}_3^p$.

Из вышеприведенных соотношений следует, что тензоры скоростей пластических деформаций и напряжений не пропорциональны. Это затрудняет их использование. За скорости пластической деформации приняты разности между полными скоростями пластической деформации и их гидростатической части.

В общем случае тензоры напряжений и скоростей пластической деформации не подобны. Зависимость параметра вида напряжённого состояния

$$\mu_\sigma = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$$

от параметра вида для скоростей пластической деформации устанавливается при решении системы уравнений относительно l , m , n при известных l' , m' , n' .

Допущение о подобии напряжённого и деформированного состояния подтверждено экспериментами других учёных (МИСИ) и может быть использовано для описания процессов деформирования дилатансионно уплотняющегося грунта.

Осесимметричное предельное напряжённое состояние определяется в цилиндрической системе координат ORZ (ось симметрии OZ вертикальна) при условии прочности Кулона–Мора [15]:

$$\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} = (\sigma_r + \sigma_z + 2c \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi,$$

где c , φ – удельное сцепление и угол внутреннего трения грунта.

Промежуточное главное напряжение $\sigma_2 = \sigma_\theta$, действующее в тангенсальной плоскости, выражается при условии неполной пластичности формулой:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) + \frac{\mu_\sigma}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2},$$

где $\mu_\sigma = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ – параметр Лоде, $-1 < \mu_\sigma < 1$.

Доказано, что система дифференциальных уравнений осесимметричной теории предельного равновесия имеет два семейства действительных характеристик (линий скольжения) и принадлежит к гиперболическому типу.

Каноническая система уравнений с использованием условия неполной пластичности получена в виде

$$dr = dz \operatorname{tg}(\alpha \pm \mu), \quad \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

$$d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg}\varphi da = \frac{\sigma}{r} \operatorname{tg}\varphi [\mu\sigma(dr \cos\varphi \pm dz \sin\varphi) \pm dz] + \gamma(dz \mp dr \operatorname{tg}\varphi),$$

где $\sigma = (\sigma_r + \sigma_z)/2 + c \operatorname{ctg}\varphi$ – среднее приведённое напряжение; α – угол между направлением σ_1 и осью OZ .

Верхние знаки в уравнениях относятся к линиям скольжения первого семейства, нижние – ко второму семейству.

Система уравнений будет статически определимой, если конкретизировать значение параметра μ_σ . При условии полной пластичности это достигается равенствами $\mu_\sigma = -1 = \operatorname{const}$ (при деформациях, направленных от оси) или $\mu_\sigma = 1 = \operatorname{const}$ (при деформациях к оси). Для условия неполной пластичности ($-1 < \mu_\sigma < 1$) определение параметра Лоде является специальной задачей.

Для идеально-связной среды ($\varphi = 0$), с помощью замены переменной: $s = \sigma + \gamma z$, $\sigma = (\sigma_r + \sigma_z)/2$, дифференциальные уравнения принимают вид:

$$dr = dz \operatorname{tg} \left(\alpha \pm \frac{\pi}{4} \right); \quad ds \pm 2cda = \frac{c}{r} (d\mu_\sigma dr \pm z),$$

которому отвечает следующее решение в малой окрестности оси симметрии:

$$dr = dz \operatorname{tg} \left(\alpha \pm \frac{\pi}{4} \right); \quad ds \pm 4cda = 0.$$

Необходимость перехода к условию неполной пластичности возникла при решении задачи о предельном давлении круглого штампа на основании при больших боковых пригрузках.

Установлено, что статическое решение существует для целого диапазона значений параметра Лоде: $\mu_{\sigma 0} < \mu_\sigma < 1$, причём с увеличением значения μ_σ предельная нагрузка уменьшалась.

Поскольку на оси симметрии необходимо иметь $\mu_\sigma = -1$ (иначе напряжения у оси бесконечно возрастают), интегрирование в зонах радиального веера и под штампом осуществлялось при переменном значении μ_σ . Изменение μ_σ было задано кусочно-линейной зависимостью от угла α :

$$\mu_{\sigma} = \mu_{\sigma_0} \text{ при } \alpha > \frac{\pi}{2}; \quad \mu_{\sigma} = -1 \text{ при } \alpha < 0;$$

$$\mu_{\sigma} = \left(1 + \mu_{\sigma_0}\right) \frac{2\alpha}{\pi} - 1 \quad \text{при } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Согласно первой теореме теории пластичности, при статическом решении следует находить максимальную величину предельной нагрузки. Этой величине будет соответствовать минимально возможное значение параметра μ_{σ_0} , при котором статическое решение существует.

Леденевым В.В. и Икониным С.В. проведено большое число полевых и лабораторных опытов с моделями и натурными фундаментами на песчаных и глинистых грунтах естественной и нарушенной структуры. Особое внимание уделялось исследованию характера деформирования и разрушения основания незаглублённых и заглублённых фундаментов при разных схемах нагружения, оценке взаимного влияния подземных конструкций.

Установлено, что область деформирования грунта находится в пределах $(1,5 \dots 4)d$ фундаментов. Напряжённое состояние песчаного основания естественного сложения, определённое по осыпанию песка с боковых стенок шурфов и траншей, распространялось до $5,5d$ от боковой поверхности буронабивных фундаментов. Эти данные могут служить проверкой достоверности грунтовых моделей.

Леденев В.В. и Иконин С.В. и позднее совместно с А.В. Худяковым экспериментально определяли форму и размеры областей выпора грунта из-под подошвы и перед смещающейся боковой поверхностью буронабивных фундаментов при разных схемах нагружения, формах и размерах фундамента, плотности и вида грунта. Длина зон выпора достигала $(1 \dots 4)d$ от тела фундамента.

2. МОДЕЛИ БЕТОНА, ЖЕЛЕЗОБЕТОНА, ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

В последние годы появились выдающиеся монографии [1, 12] по моделям силового сопротивления железобетона. Они отличаются глубиной и обоснованностью положений, учётом большого числа влияющих факторов: трещин и схем армирования (Н.И. Карпенко), реологических свойств (В.М. Бондаренко, В.И. Колчунов). Работы [1, 12] являются надёжной базой для совершенствования теории расчёта и проектирования конструкций.

2.1. ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

Анализ модели сделали А.С. Залесов и Т.А. Мухамедков [11]. К железобетонным конструкциям представляются требования прочности, устойчивости, эксплуатационной пригодности, долговечности и надёжности. Особенности железобетона как композитного материала являются: образование и развитие трещин в бетоне, нелинейные свойства бетона и арматуры, реологические свойства бетона, изменяющиеся во времени. Указанные особенности могут быть реализованы через физические свойства, связывающие напряжения и деформации бетона и арматуры. Они определяются на основе обобщённого закона Гука для анизотропного тела.

Деформационные модели разработаны для линейных и плоских элементов при одноосном и двухосном напряжённо-деформированном состоянии при действии изгибающих, крутящих моментов и продольных сил.

Согласно евростандартам, деформационная модель основывается на четырёх гипотезах:

- а) плоских сечений;
- б) считают известными зависимости напряжения–деформации для бетона и арматуры;
- в) диаграммы напряжения–деформации при неоднородном напряжённом (вследствие изгиба) состоянии получают из опытов по однородному напряжённому состоянию простого сжатия или растяжения;
- г) считают совпадающими нейтральные оси напряжений и деформаций при длительном нагружении.

Первая гипотеза является условием совместности деформаций бетона и стали железобетонного элемента. Основное условие применимости этой модели – малость сдвигов по сравнению с углами поворота.

Вторая гипотеза позволяет по известным относительным деформациям рассчитать напряжения бетона и арматуры в различных точках сечения. Для бетона используется криволинейная диаграмма с ниспадающей ветвью.

Из анализа деформационной модели следует частный предельный случай пластического шарнира. Зоны пластического растяжения–сжатия снижаются. Эпюра напряжений в сжатой зоне бетона достигает прямоугольного очертания. Кривизна изогнутой оси элемента в этом сечении равна бесконечности.

Для линейных железобетонных элементов. Модель включает уравнения равновесия внешних и внутренних сил, условия деформирования в виде гипотезы плоских сечений и полные диаграммы, связывающие напряжения и деформации в бетоне и арматуре.

В результате решения получают систему уравнений, связывающих изгибающие моменты в двух направлениях, продольные силы с кривизнами в двух направлениях и продольными деформациями через жёсткостные характеристики.

Для плоских элементов рассматривается выделенный элемент с изгибающими и крутящими моментами, сдвигающими и нормальными силами, действующими по боковым сторонам.

Деформационная модель определяется из уравнений равновесия внешних усилий, действующих по боковым сторонам, внутренних усилий в диагональном нормальном сечении в виде гипотезы плоских сечений и полных диаграмм напряжения–деформации в бетоне и арматуре.

Как и для линейных элементов, в плоских получают систему уравнений, связывающих изгибающие и крутящие моменты, продольные и сдвигающие силы в двух взаимно перпендикулярных направлениях с кривизнами, усилиями закручивания и сдвиге, продольными деформации через жёсткостные характеристики элементов.

В деформационной модели используются диаграммы криволинейные, упрощённые трёхлинейные, включающие условно упругий, неупругий и условно пластический участки, двухлинейные по типу диаграммы Прандтля.

В качестве условия деформирования сечения принята гипотеза плоских сечений. Критериями прочности допускается принимать деформации бетона и арматуры некоторых предельных значений.

В деформационной модели допускается сжатая зона над трещиной и растянутая с трещиной. Учитывается работа растянутого бетона между трещинами. Имеется возможность выполнять расчёты с учётом физической и геометрической нелинейности по прочности, устойчивости, деформативности и трещиностойкости; расчёт систем и элементов различной конструкции и состава.

В новых нормативных документах допускаются упрощённые расчёты на прочность (основанные на методе предельного равновесия), деформации (основанные на учёте первых условно линейных участков двухлинейных диаграмм бетона и арматуры), трещиностойкости (в условии упругой постановки с понижающим модулем упругости сжатого бетона и повышающим за счёт влияния растянутого бетона между трещинами).

Рекомендуется разработка таких расчётных моделей и методов расчёта, которые позволяли бы инженеру понимать и оценивать характер работы конструкций в целом.

Предусматривается разработка общего метода расчёта долговечности железобетонных конструкций с прямым учётом фактора времени; разработка методов расчёта железобетона, основанных на общих правилах строительной механики и единых расчётных моделях. Конкретные особенности элементов следует учитывать введением дополнительных запасов.

Расчёт высотных зданий производится как пространственной системы с учётом податливости основания, а несущей системы и отдельных элементов – с учётом физической и геометрической нелинейно-

сти. Рекомендуется стремиться к более простым конструктивным системам регулярных в плане и по высоте, с совмещёнными центрами тяжести и жёсткости, с разрезкой деформационными швами распознающих блоков здания, уделять внимание повышению сопротивления внешних специальных воздействий, например, при выходе из строя одного конструктивного элемента или его части.

Расчёт прочности по нормальным сечениям железобетонных конструкций при действии изгибающих моментов и продольных сил проводят на основе деформационной модели.

Модель для расчёта прочности включает:

– уравнения равновесия внешних и внутренних сил в нормальном сечении

$$M_x = \sum_i \sigma_{bi} A_{bi} Z_{bxi} + \sum_j \sigma_{sj} A_{sj} Z_{sxj} ;$$

$$M_y = \sum_j \sigma_{bj} A_{bj} Z_{byj} + \sum_i \sigma_{si} A_{si} Z_{sxi} ;$$

$$N = \sum_i \sigma_{bi} A_{bi} + \sum_j \sigma_{sj} A_{sj} ;$$

– уравнения, устанавливающие распределение деформаций в бетоне и арматуре по нормальному сечению исходя из условия плоского поворота и плоского смещения сечения (гипотезы плоских сечений):

$$\varepsilon_{bi} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} Z_{bxi} + \frac{1}{r_y} Z_{byi} ,$$

$$\varepsilon_{bj} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} Z_{sxj} + \frac{1}{r_y} Z_{syj} ,$$

– уравнения, определяющие связь между напряжениями и относительными деформациями бетона и арматуры:

$$\sigma_{bi} = f(\varepsilon_{bi}) ;$$

$$\sigma_{bj} = f(\varepsilon_{sj}) .$$

В уравнениях (*) – (***) M_x, M_y, N – изгибающие моменты в плоскостях XOZ и YOZ и продольная сила от внешней нагрузки; $A_{bi}, Z_{bxi}, Z_{byi}, \sigma_{bi}, \varepsilon_{bi}$ – площадь, координаты центра тяжести i -го элементарного участка сжатой зоны бетона, напряжение и деформация на уровне его центра тяжести; $A_{sj}, Z_{sxj}, Z_{syj}, \sigma_{sj}, \varepsilon_{sj}$ – площадь, координаты центра тяжести j -го стержня арматуры, напряжение и деформация в нём; ε_0 – относительная деформация волокна, расположенного на пе-

ресечении выбранных осей X и Y ; $\frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}$ – кривизны в плоскости действия моментов M_x, M_y .

За расчётные диаграммы состояния сжатого бетона принимают криволинейную диаграмму с ниспадающей ветвью или более простые диаграммы трёхлинейную и двухлинейную – типа диаграммы Прандтля.

Для высокопрочных арматурных сталей принимают криволинейную, трёхлинейную или двухлинейную диаграммы.

Расчёт прочности по нормальным сечениям железобетонных конструкций производят путём решения приведённой выше системы уравнений. При этом прочность сечения проверяют из условий

$$|\varepsilon_{b \max}| \leq \varepsilon_{b, ult};$$

$$|\varepsilon_{s \max}| \leq \varepsilon_{s, ult},$$

где $\varepsilon_{b \max}, \varepsilon_{s \max}$ – максимальные относительные деформации в сжатом бетоне и растянутой арматуре от действия внешней нагрузки; $\varepsilon_{b, ult}, \varepsilon_{s, ult}$ – предельные относительные деформации сжатого бетона и растянутой арматуры.

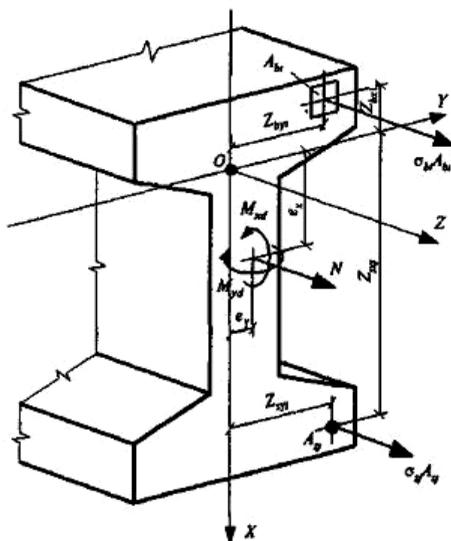


Рис. 6. Расчётная схема нормального сечения железобетонного элемента

Предельные относительные деформации сжатого бетона при двухзначной эпюре деформаций в нормальном сечении принимают равны-

ми $\varepsilon_{b,ult} = \varepsilon_{b2}$ – при однозначной равномерной эпюре деформаций, $\varepsilon_{b,ult} = \varepsilon_{b0}$ – при однозначной неравномерной эпюре – по линейной интерполяции.

Предельные относительные деформации растянутой арматуры принимают равными $\varepsilon_{s,ult} = \varepsilon_{s2}$.

Для общего случая система уравнений для расчёта прочности по деформационной модели имеет вид:

$$M_x = D_{11} \frac{1}{r_x} + D_{12} \frac{1}{r_y} + D_{13} \varepsilon_0;$$

$$M_y = D_{12} \frac{1}{r_x} + D_{22} \frac{1}{r_y} + D_{23} \varepsilon_0;$$

$$N = D_{13} \frac{1}{r_x} + D_{23} \frac{1}{r_y} + D_{33} \varepsilon_0,$$

где D_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – жёсткостные характеристики.

Коэффициенты упругости i -го участка бетона v_{bi} и j -го стержня арматуры v_{sj} определяют по формулам:

$$v_{bi} = \frac{\sigma_{bi}}{E_b \varepsilon_{bi}};$$

$$v_{sj} = \frac{\sigma_{sj}}{E_{sj} \varepsilon_{sj}};$$

а напряжения и относительные деформации сжатого бетона и арматуры $\sigma_{bi}, \varepsilon_{bi}, \sigma_{sj}, \varepsilon_{sj}$ определяют из приведённых выше зависимостей для диаграмм состояния бетона и арматуры.

Мурзенко А.Ю. предложен метод расчёта фундаментов по шести критериальным состояниям. Введено понятие о критериальных нагрузках, соответствующих определённому количественному состоянию конструкции и имеющих количественные нормативные ограничения по СНиП.

Состояния 1 и 2 относятся к условиям работы по второй группе предельных состояний; 1 – соответствует стадии работы до образования трещин; 2 – в условиях образования раскрытия трещин.

Состояния 3 и 4 относятся к расчётам по предельным состояниям первой группы и соответствуют условиям статического метода предельного равновесия. Критериальная нагрузка для состояния 3 определяется из условия $N \leq N_3$, где N_3 – определяется из расчёта по несущей способности статическим методом предельного равновесия. Состояние 4 относится к расчёту фундамента на продавливание плитной части. При этом должно выполняться условие $N \leq N_4$, где N_4 определяется из условия расчёта на продавливание. Фактически при $N = N_4$ ещё не происходит исчерпание несущей способности на продавливание, так как в расчёте не учитываются упрочнение бетона в сжатой зоне сечения, действительная форма призмы продавливания и реактивные эпюры давления с учётом перераспределения напряжений в основании, а также концентрация реактивных давлений в основании призмы продавливания. Вследствие этого общее сопротивление продавливанию повышается и в рассматриваемых состояниях система имеет значительные внутренние резервы несущей способности.

За счёт образования трещин в фундаменте формируются упруго-пластические шарниры, которые разделяют плитную часть на жёсткие звенья и превращают фундамент в кинематическую систему. Это позволяет перейти от расчёта в одном, наиболее нагруженном сечении, к расчёту плитной части в целом как статически неопределимой системы.

Состояние 5 соответствует исчерпанию несущей способности по кинематической схеме работы на изгиб, а б – на продавливание с учётом перераспределения усилий в материале фундамента и грунте основания, упрочнения бетона сжатой зоны.

Нижний предел несущей способности определяется из условия статического равновесия и предельных условий, верхний – из рассмотрения кинематически возможных состояний конструкции. Эти пределы образуют зону, в пределах которой может быть назначена расчётная нагрузка с учётом надёжности и риска.

Основной целью расчёта и проектирования является обеспечение нормальной эксплуатации объектов в течение заданного периода времени, прогноз возможных изменений контролируемых параметров.

2.2. МОДЕЛИ ФУНДАМЕНТНЫХ ПЛИТ

Разработке методов расчёта фундаментных плит и балок посвящены труды: Винклера, Б.Г. Коренева, В.З. Власова, М.М. Филоненко-Бородича, П.Л. Пастернака, Б.Н. Жемочкина, А.П. Синицина, Н.Н. Леонтьева, М.И. Горбунова-Посадова, И.А. Симвулиди, А.А. Мустафаева, А.П. Пшеничкина, В.И. Травуша, А.Г. Юрьева и других. Анализ моделей грунтовых оснований и фундаментных конструкций дан в [2, 3, 5, 8, 9, 13, 16 – 20, 23 – 28].

Рассмотрим исходные данные о технической теории работы плит [15]. Она применяется для плит, толщина которых мала по сравнению с размерами в плане, а прогибы малы – с толщиной. Предполагается, что все точки плиты, которые до деформации находились на одной вертикали, получают одинаковые перемещения в направлении оси Z . Горизонтальные перемещения точек средней плоскости принимаются равными нулю, а других точек определяются исходя из так называемой гипотезы прямых нормалей. При расчёте плит определяется не только прогиб $\omega(x, y)$, но и реактивное давление $\sigma(x, y)$. Соотношение между ними представлено моделью Винклера $p(x, y) = k_0\omega(x, y)$.

Для модели основания с двумя упругими характеристиками

$$p(x, y) = k_1\omega(x, y) - k_2\Delta\omega(x, y), \text{ где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

k_1 и k_2 – соответственно первая и вторая упругие характеристики; k_1 имеет размерность кг/см², а k_2 – кг/см.

Для модели упругого полупространства

$$\omega(x, y) = \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}.$$

В отдельных случаях реактивное давление на некоторой части плиты может быть отрицательным (растягивающим).

В процессе расчёта определяются перемещения, усилия и размеры зоны контакта. В пределах зоны контакта остаются справедливыми уравнения, учитывающие реакцию упругого основания, а в зоне отрыва балка или плита работает как свободная, т.е. на неё действуют только те активные нагрузки, которые приложены к этой части конструкции.

Юрьев А.Г. предложил методику оценки НДС полов промышленных зданий. Механические характеристики основания зависят от геометрических и физических параметров конструкции. Физической моделью пола принята многослойная плита на упругом основании. Разработана математическая модель для многослойной плиты на двухпараметрическом основании с характеристиками, полученными на вариационной основе.

При

$$U = V = 0 \quad W = (x, y, z) = \omega_1(x, y) \Phi(z),$$

где $\omega_1(x, y)$ – вертикальные перемещения верхней поверхности основания; $\Phi(z)$ – функция вертикального распределения перемещений.

По методу Ритца–Тимошенко

$$\omega_1(x, y) = BX(x) \cdot Y(y),$$

где $X(x)$, $Y(y)$ – функции, отражающие прогиб плиты.

Работа внешних сил

$$T = \iint p(x, y)\omega_1 dx dy.$$

Условия стационарности функционала энергии

$$\Delta = (U - T) = 0,$$

где U – потенциальная энергия деформирования основания плиты.

Усовершенствованная двухпараметрическая модель В.З. Власова обладает распределительным свойством по трём направлениям.

Для многослойной плиты нейтральный слой смещается на величину e .

Цилиндрическая жёсткость определяется из уравнения:

$$\bar{D} = \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-t/2-e}^{t/2+e} E(z) z^2 dz,$$

где t – толщина многослойной плиты.

В процессе эксплуатации зданий происходит накопление разного рода повреждений за счёт усталости, коррозионного износа, неблагоприятных внешних воздействий.

Критерии повреждённости бетона представляют в виде:

$$D = \varepsilon(t) / \varepsilon_u,$$

где ε_u – предельные деформации.

Уравнение повреждённости модели (определено из фундаментального реологического уравнения) имеет вид:

$$En\dot{\varepsilon}(t) + H\varepsilon(t) = n\dot{\sigma}(t) + \sigma(t)$$

и выражается в виде

$$EndD / dt + HD = [nV_{\sigma} + E\sigma(t)] / \varepsilon_u,$$

где H – длительный модуль упругости, соответствующий предельным деформациям; E – мгновенный модуль упругости; $n = \eta/E$ – время релаксации; η – параметр вязкости.

Решение последнего уравнения имеет вид

$$D = [nV_{\sigma} + E\sigma(t)](1 - e^{-Ebt/n}) / H\varepsilon.$$

Расчётные модели оснований для балок, плит и зданий подробно рассмотрены в [24]. Особое внимание уделено неоднородным в плане основаниям. Так, зависимость между реакцией основания и его осадкой имеет вид

$$p(x, y) = c(x, y)\omega(x, y).$$

Дифференциальное уравнение изгиба плиты с переменным коэффициентом $c(x,y)$ представляют в виде:

$$D\nabla^4\omega(x,y)+c(x,y)\omega(x,y)=q(x,y),$$

а изгиба балки

$$EI_y^4(x)+c(x)y(x)=q(x).$$

Рассмотрим предложения В.В. Болотина, Д.Н. Соболева, Б.П. Макарова.

Для статически неоднородного упругого полупространства

$$p(x,y)=\bar{p}(x,y)+\tilde{p}(x,y)=-\bar{c}_3\bar{\omega}(x,y)+\bar{q}_3(x,y)-\tilde{c}_3\tilde{\omega}(x,y)+\tilde{q}_3(x,y),$$

где $\bar{p}(x,y)$ – математическое ожидание реактивного давления на полупространство; $\tilde{p}(x,y)$ – собственно случайное реактивное давление.

Здесь учтён метод эквивалентного слоя Н.А. Цытовича. Для плиты дифференциальное уравнение представлено в виде системы:

$$D\nabla^4\bar{\omega}(x,y)+\bar{c}_3\bar{\omega}(x,y)=\bar{q}(x,y)+\bar{q}_3(x,y);$$

$$D\nabla^4\tilde{\omega}(x,y)+\tilde{c}_3\tilde{\omega}(x,y)=\tilde{q}(x,y)+\tilde{q}_3(x,y).$$

В [20] дан анализ расчётных моделей системы «сооружение–основание» как монолитных балок с проёмами, сопротивляющихся изгибным и сдвиговым деформациям (Б.Д. Васильев, Б.И. Далматов, Д.Д. Сергеев, и др.); в виде призматических оболочек (Б.А. Косицын, Б.С. Васильков, В.И. Лишак, А.П. Пшеничкин).

Дифференциальные уравнения изгиба и кручения оболочки имеют вид:

$$EI_y^4(x)+\frac{EI}{GF}q_u''(x)-q_u(x)=0;$$

$$EI_\omega\theta^4(x)+\frac{EI_\omega}{GF_a}q_k''(x)-q_k(x)=0,$$

EI , GF – изгибная и сдвиговая жёсткости здания; $q_u(x)$, $q_k(x)$ – нагрузки, вызывающие изгиб и кручение коробки здания; EI_ω , GF_a – секториальная и крутильная жёсткости здания; $\theta(x)$ – угол искажения контура поперечного сечения коробки.

Осадка здания рассматривается как аддитивная случайная функция координат

$$S_{ik}(x,y)=\bar{S}_{ik}(x,y)+\tilde{S}_{ik}(x,y),$$

где $\bar{S}_{ik}(x, y)$ – математическое ожидание осадки, вызываемой деформированными составляющими деформации основания; $\tilde{S}_{ik}(x, y)$ – флуктуационная составляющая осадки, которая центрирована относительно переменного математического ожидания.

2.3. ПРИЗМАТИЧЕСКИЕ И ПИРАМИДАЛЬНЫЕ СВАИ

Сопrotивляемость просадочных грунтов оснований поперечным воздействиям, очевидно, так же как и фундаментов неглубокого заложения, будет изменяться в соответствии с закономерностями продвижения влаги при случайном увлажнении оснований. Поэтому в расчётной схеме коэффициент жёсткости каждого прорезаемого конструкцией просадочного грунта становится переменным по глубине. Функция жёсткости $EJ(x)$ в зависимости от особенности изгибаемой конструкции может быть непрерывной по всей глубине опоры или же кусочно-непрерывной в пределах каждого прорезаемого ею слоя грунта. Характер функции $k(x)$, отображающей взаимодействие грунта с конструкцией, будет зависеть от многих факторов (от свойства и степени просадочности грунтов, особенности конструкции, её загрузки и др.). Представить эту функцию в общем виде для всех встречающихся в практике случаев пока ещё не представляется возможным. В первом приближении для назначения вида функции $k(x)$ можно исходить из применяемых в расчётах свай на горизонтальную нагрузку законов нарастания сопротивляемости грунта по глубине. В литературе встречаются различные предложения по данному вопросу. Так, например, в рекомендациях по расчёту фундаментов глубокого заложения опор мостов грунт рассматривается как упругая линейно-деформируемая среда, характеризующаяся коэффициентом постели

$$k(x) = mbx,$$

где m – коэффициент, зависящий от свойств грунта, т/м⁴; x – глубина расположения точки от поверхности грунта.

В работе И.В. Урбана коэффициент постели с учётом перехода грунта в состояние предельного равновесия на поверхности грунта принимается нарастающим с глубиной по линейному закону

$$k(x) = \bar{k}(x)b = \frac{k_h}{h} x,$$

где k_h – коэффициент постели грунта в горизонтальном направлении на глубине h .

На основании экспериментальных данных Риффат рекомендуют принимать

$$k(x) = \bar{k}(x)b = k_h(1 - e^{-\beta x}),$$

где k_h – предельное значение коэффициента на глубине h ; β – экспериментально определяемый параметр, учитывающий нелинейность изменения сопротивляемости грунта по глубине. По данным опыта Риффата, $\beta = 0,02$.

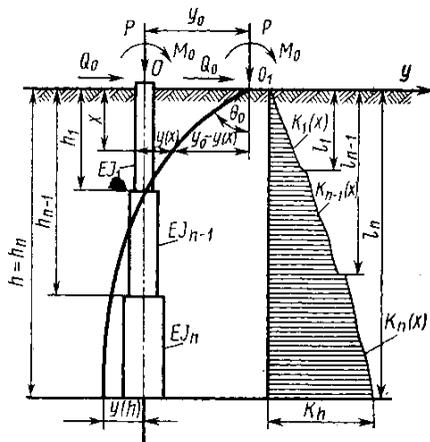


Рис. 7. Расчётная схема гибких фундаментов глубокого заложения при продольно-поперечном изгибе

Воспринимаемое конструкцией внешнее воздействие в общем случае может быть сведено на уровне поверхности грунта к комбинации вертикальной P и поперечной нагрузок Q_0 , а также момента M_0 . Расчёт заглублённой в грунте опоры статически тождествен расчёту балки, свободно лежащей на сплошном упругом основании переменной сопротивляемости, находящейся под действием приложенных на одном из концов поперечной нагрузки Q_0 и момента M_0 , а также продольной силы P . В случае гибкого фундамента с уширенной подошвой добавляются реакции упругого защемления подошвы в виде момента и поперечной силы (трение).

Аналитическое решение задачи сводится к интегрированию известного дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба балки на упругом основании:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + k(x)y = 0.$$

Краевые условия в зависимости от особенности конструкции опоры и инженерно-геологических условий могут быть приняты в следующем виде.

1. Опора со свободными концами (рис. 8, а):

$$\begin{aligned}y(0) &= y_0; \quad y'(0) = \theta_0; \\ [EJ(x)y''(x)]|_{x=0} &= M_0; \quad [EJ(x)y''(x)]'|_{x=0} = Q_0 - P\theta_0; \\ [EJ(x)y'']|_{x=h} &= [EJ(x)y''(x)]'|_{x=h} = 0.\end{aligned}$$

2. Опора с жёстко закреплённым подвижным верхним и свободным нижним концами (рис. 8, б):

$$\begin{aligned}y(0) &= y_0; \quad y'(0) = \theta_0; \\ [EJ(x)y''(x)]|_{x=0} &= -M_3; \quad [EJ(x)y''(x)]'|_{x=0} = Q_0; \\ [EJ(x)y''(x)y''(x)]|_{x=h} &= [EJ(x)y''(x)y''(x)]'|_{x=h}.\end{aligned}$$

3. Опора со свободным верхним и жёстко закреплённым нижним концом (свая–стойка) (рис. 8, в):

$$\begin{aligned}y(0) &= y_0; \quad y'(0) = \theta_0; \\ [EJ(x)y''(x)]|_{x=h} &= M_0; \quad [EJ(x)y''(x)]'|_{x=0} = Q_0 - P\theta_0; \\ y(h) &= y'(h) = 0.\end{aligned}$$

4. Опора с жёстко закреплённым подвижным верхним и жёстко закреплённым неподвижным нижним концами (свая–стойка) (рис. 8, г):

$$\begin{aligned}y(0) &= y_0; \quad y(0) = \theta_0 = 0; \\ [EJ(x)y''(x)]|_{x=0} &= M_3; \quad [EJ(x)y''(x)]|_{x=0} = Q_0; \\ y(h) &= y'(h) = 0.\end{aligned}$$

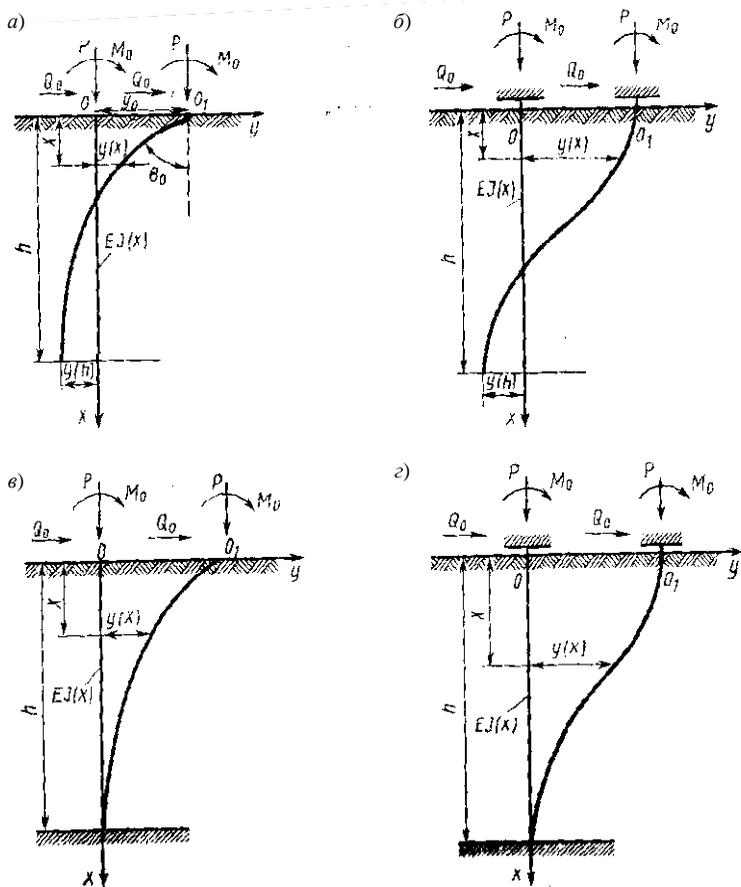


Рис. 8. Расчётные схемы опор с различными краевыми условиями

Общее решение однородного уравнения, построенного методом последовательного приближения, согласно формуле, имеет вид:

$$y_n(x) = y_0 A(x) + \theta_0 B(x) + M_0 C(x) + M_1 D(x),$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и $D(x)$ – функции.

В расчёте свай переменного сечения на совместные действия вертикальной и горизонтальных нагрузок методом конечных элементов свая рассматривается как гибкий стержень, заглублённый в многослойное основание, характеризуемый коэффициентом постели $C(x)$. Свая по длине мысленно разбивается на n конечных элементов.

Выделенный конечный элемент имеет четыре степени свободы – перемещения U_1 и U_2 , углы поворота φ_1 и φ_2 концов элемента в узлах. Функция прогибов элемента принята в виде кубического полинома. Коэффициенты при переменных определяются с учётом граничных условий на концах элемента.

Уравнения для перемещений записаны в матричной форме

$$U(x) = \{r\}^T \{U\},$$

где $\{r\}^T = \{r_1 r_2 r_3 r_4\}$; $r_1, r_2, r_3, r_4 = f(\ell, x)$; $\{U\} = \{U_1 \varphi_1 U_2 \varphi_2\}^T$.

Для определения матрицы жёсткости сваи, заглубленной в линейно-деформируемое грунтовое основание, характеризуемое коэффициентом постели, использован принцип Лагранжа о минимуме потенциальной энергии системы «сваи – грунт» в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2(x)}{EI(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell bC(x) dx - (P_1 + N_1 \varphi_1) U_1 - (M_1 + N_1 U_1) \varphi_1 = \min,$$

где $M(x)$ – изгибающий момент в сечении x ; N_1, P_1 и M_1 – вертикальная, горизонтальная нагрузки и изгибающий момент, приложенные к голове сваи; U_1 и φ_1 – перемещения и угол поворота головы сваи; $C(x)$ – коэффициент постели в сечении x ; $b(x)$ – ширина элемента в сечении.

Матрица жёсткости элемента $\|K_s\|$ состоит из матрицы жёсткости изгиба сваи $\|K_c\|$ и матрицы жёсткости отпора грунта $\|K_r\|$.

$$\|K_s\| = \|K_c\| + \|K_r\|,$$

где

$$\|K_c\| = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} EI(x) \frac{d^2\{r\}}{dx^2} \frac{d^2\{r\}}{dx^2} dx;$$

$$\|K_r\| = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} bC(x) \{r\} \{r\} dx.$$

Коэффициент постели принят постоянным в пределах каждого конечного элемента.

Обобщённое матричное уравнение имеет вид

$$\{F\} = \|K_{об}\| \{U_{об}\},$$

где $\{F\} = \{P_1 M_1 P_2 M_2 \dots P_{n+1} M_{n+1}\}^T$ – матрица обобщённых сил;

$\{U_{об}\} = \{U_1 \Phi_1 U_2 \Phi_2 \dots U_{n+1} \Phi_{n+1}\}^T$ – матрица обобщённых перемещений;

$\|K_{об}\|$ – обобщённая матрица жёсткости системы.

В НИИ оснований под руководством В.Г. Федоровского исследована НДС комбинированных плитно-свайных фундаментов (КПСФ). В таком фундаменте нагрузку воспринимает плита и сваи. Решена осесимметричная задача теории упругости МКЭ. Конечные элементы для свай, грунта и плиты – прямоугольные, составленные из двух треугольных. Жёсткости контактных КЭ для контакта свай и плиты с грунтом, а также внутри грунта принимали по модулю деформации грунта, а на контакте плиты со свайей и внутри плиты – по модулю Юнга железобетона.

При разработке метода расчёта принимали жёсткость одиночной сваи на вдавливание K_p , одиночной плиты как фундамента K_z , плитно-свайного фундамента $K_{pz} = K_p + K_z$.

Идеальное сложение жёсткостей происходит при $K_p / K_z = 0$, т.е. для чисто плитного фундамента. С ростом отношения K_p / K_z эффективность использования плиты падает, а свай возрастает.

Для расчёта свай используют модель коэффициента постели, касательные напряжения по боковой поверхности свай определяют по формуле

$$\tau(z) = K(z)(\omega_p(z) - \omega_z(z, 0)),$$

где $\omega_z(z, 0)$ – смещения грунта под плитой (без свай) по оси сваи; $\omega_p(z)$ принимается из расчёта КПСФ, а $\omega_z(z, 0)$ – из расчёта одиночной плиты.

Подобно этому изменение контактного давления рассмотрено с использованием модели коэффициента постели:

$$\sigma_z(z) = K_0(\omega_z(z) - \omega_p(0, z)),$$

где ω_z – осадка плиты в составе КПСФ; $\omega_p(0, z)$ – осадка поверхности основания вокруг одиночной сваи.

2.4. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БЕТОНА

Реология – наука, устанавливающая общие законы образования и развития во времени деформации любого вещества от различных причин в различных термодинамических и физико-химических условиях.

Для прогноза деформации неустановившейся затухающей ползучести применяют линейную (в отношении напряжений) теорию наследственной ползучести Больцмана–Вольтера.

Уравнение состояния при однократном нагружении имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + k(t - t_0)\sigma(t_0)t_0,$$

где $\varepsilon(t)$ – изменение относительной деформации во времени; $\frac{\sigma(t)}{E}$ – мгновенная деформация в момент времени t при модуле E ; $k(t - t_0)\sigma(t_0)t_0$ – ядро ползучести.

При непрерывном нагружении

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} \int_0^t k(t - t_0)\sigma(t_0)\Delta t_0.$$

Ядро ползучести – скорость ползучести при постоянном напряжении, отнесённая к единице действующего давления.

Для глинистых грунтов

$$k(t - t_0) = \delta e^{-\delta'(t - t_0)},$$

где δ и δ' – параметры ползучести, определяемые опытным путём.

Уравнение Бингама – Шведова имеет вид:

$$\frac{1}{r} \varepsilon_{yz} = \tau - \tau_0,$$

откуда

$$\tau = \tau_0 + v \frac{d\varepsilon}{dt},$$

где $v = \frac{1}{\eta}$ – коэффициент вязкости; τ_0 – начальное ($\varepsilon_{yz} = 0$) сдвиговое напряжение.

Основными элементами механических реологических моделей являются упругий (пружина) и вязкий (цилиндр, заполненный жидкостью, с расположенным внутри поршнем).

При последовательном соединении упругого и вязкого элементов получают уравнение Максвелла:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta},$$

где η – коэффициент вязкости.

В случае параллельного соединения упругого и вязкого элементов получают модель тела Фойгта:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 - \exp \left(-\frac{E}{\eta} t \right) \right].$$

Более сложная модель представляет собой систему из упругого элемента, последовательно соединённого с двумя параллельно соединёнными упругим и вязким элементами (модель тела Кельвина):

$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\sigma = E \left(\frac{ds}{dt} + \beta\varepsilon \right),$$

где $\alpha = \frac{E_1 + E_2}{\eta}$; $\beta = \frac{E_2}{\eta}$; $E = E_1$.

Если при нагружении тело получило упругую деформацию $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, а затем в течение времени t_1 происходит процесс ползучести, а далее напряжение мгновенно уменьшается до нуля, то упругая составляющая деформации уменьшается на $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, а далее происходит процесс обратной ползучести (обратное последствие). При $t \rightarrow \infty$ $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. вся деформация ползучести является обратимой и последствие в теле Кельвина упругое.

Рассмотрим предложение В.М. Бондаренко. Для бетона как стареющего материала обработка экспериментальных данных осуществляется в рамках инварианта С.В. Александровского – В.Д. Харлаба

$$\frac{\frac{1}{E_0^M(t_0)} - \frac{1}{E_0^M(t)}}{C_0^*(t, t_0) - C_0(t, t_0)} = 1,$$

где E_0^M – модуль мгновенной деформации; C_0 – мера простой ползучести без учета старения бетона; C_0^* – мера простой ползучести стареющего бетона; t, t_0 – начало нагружения, время.

Мера простой ползучести – относительная деформация ползучести бетона при $\sigma_b \leq 0,3b_n$, накопившаяся к моменту времени t при нагружении образцов ($t_0 < 1$) и приходящаяся на 1 МПа действующего постоянного напряжения:

$$C_0(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cr}(t, t_0)}{\sigma_b}.$$

Она равна тангенсу угла наклона к оси напряжений σ секущей хорды, проходящей через начало координат и рассматриваемую точку.

Так как $\varepsilon_{cr} = \lambda \varepsilon_B$, $\sigma_B = E'_B \varepsilon_B = \nu E_B \varepsilon_B$, то

$$C_B = \frac{\varphi}{E_B},$$

где $\varphi = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{(1-\nu)}{\nu} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ – характеристика нелинейности деформирования бетона.

В современных теориях силового сопротивления бетона в качестве эталонного режима принимают неизменные во времени напряжения. Деформации ползучести, соответствующие эталонному режиму, называются деформациями простой ползучести.

Реологическое уравнение силового сопротивления бетона имеет вид:

$$E(t, t_0) = \frac{S_H[\sigma(t_0)]}{E_0^H} + S_H \left[\sigma(t) \Omega(t_0) C_0^*(t, t_0) \int_{t_0}^t S_0[\sigma(\tau)] \Omega(t_0) C_0^*(t, \tau) \right],$$

где E – полная относительная деформация; σ – напряжение; S_H – функция напряжения для деформации ползучести; t , t_0 , τ – время начала нагружения, текущее время, время окончания отсчёта нагружения; E_0^H – начальный модуль мгновенных деформаций; $C_0^*(t, \tau)$ – начальная мера деформаций простой ползучести; $\Omega(t_0)$ – функция старения для ползучести, введённая с целью разделения временных влияний возраста и нагружения.

При $\sigma = \text{const}$

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{S_H[\sigma(t_0)]}{S_0^M} + S_0(t_0) \Omega(t_0) C_0^*(t, t_0).$$

В формулах первый член – относительные мгновенные деформации; второй член – относительная кратковременная ползучесть быстротекучая ползучесть; третий – относительные режимные деформации ползучести.

2.5. РАСЧЁТ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОСАДОЧНЫХ ГРУНТАХ

Для структурно-неустойчивых просадочных грунтов, которые в увлажнённом состоянии теряют свои распределительные свойства и превращаются под подошвой фундамента как бы в систему не связан-

ных между собой отдельных частиц, подходит модель местных деформаций, не учитывающая естественную неоднородность в плане сооружения, т.е. модель местных деформаций с переменным коэффициентом жёсткости [19].

Другие представления переменного коэффициента жёсткости

$$k(x) = p(x) / s(x),$$

где $s(x)$ – возможная осадка поверхности грунта в пределах плана здания от действия удельного давления.

По А.А. Мустафаеву

$$k(x) = k(1 - \beta) - \frac{2k\beta}{l}(1 - e^{-\alpha})x + \frac{k\beta}{l^2}(1 - e^{-\alpha})x^2,$$

где k – расчётный параметр, измеряемый так же, как и коэффициент постели, характеризующий сопротивление грунта осадке без учёта краевого эффекта; α и β – безразмерные параметры, характеризующие влияние краевого эффекта на величину и распределение реактивных давлений по подошве балки.

Применение метода местных упругих деформаций в теории расчёта фундаментов на упругом основании обосновывается ещё и следующим обстоятельством. В случае использования фундаментального решения Фламана для действия равномерно распределённой полосовой нагрузки на поверхности упругого полупространства наблюдается следующий эффект. При значительном отходе от нагрузки граница полуплоскости не только оседает, но и деформируется вверх, возрастая до бесконечности. Это противоречит реальному поведению грунта, где осадка быстро затухает по мере удаления от фундамента.

Приведём дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба ленточных фундаментов. Пусть на фундамент действует внешняя нагрузка (сосредоточенные силы и моменты, распределённая нагрузка, сжимающие горизонтальные центрально приложенные силы), а также отпор грунта $p = k(x)q$.

Изгибная жёсткость конструкции характеризуется цилиндрической жёсткостью

$$D(x) = \frac{EI_n(x)}{1 - \mu_0^2},$$

где $I_n(x)$ – переменный момент инерции поперечного сечения; μ_0 – пуассоновское отношение материала полосы.

Изгибающий момент в любом сечении фундамента на расстоянии x от левого конца равен

$$M(x) = M + \int k(\xi) \eta (x - \xi) d\xi + P(y - y_0),$$

где M – изгибающий момент от внешних поперечных нагрузок; поперечная сила

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \bar{Q} + \int_0^x k(\xi) \eta d\xi + P \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) + k(x)y + P \frac{d^2 y}{dx^2},$$

где Q – перерезывающая сила от внешней поперечной нагрузки $q(x)$.

Травуш В.И. рассмотрел применение функциональных прерывателей для описания прерывных законов изменения жёсткости фундаментов, грунтового основания и внешних нагрузок (принимаются кусочно-непрерывные законы).

Приводятся законы изменения $EI(x)$, $k(x)$, $q(x)$. Используется теория функциональных прерывателей Н.М. Герсванова.

Пусть

$$\phi(x) = \frac{1}{EI(x)}; \quad \varphi\psi(x) = \frac{1}{GF(x)} -$$

законы изменения изгибной и сдвиговой жёсткости фундамента с использованием односторонних прерывателей;

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 = \varphi_1 + \Gamma_{b1} \varphi_{2,1} + \Gamma_{b2} \varphi_{3,2} + \dots + \Gamma_{bi} \varphi_{i+1,i} = \\ &= \varphi_1 + \sum \Gamma_{bi} \varphi \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \end{aligned}$$

где Γ_{b1} , Γ_{b2} , ..., Γ_{bi} – односторонние протяжённые прерыватели; l_1 , l_2 , l_i – расстояние от левого конца до конца рассматриваемой ступени фундамента;

$$\varphi_1 = \frac{1}{EI_1}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{EI_2}; \quad \varphi_i = \frac{1}{EI_i};$$

$$\varphi_{2,1} = \varphi_2 - \varphi_1; \quad \varphi_{3,2} = \varphi_3 - \varphi_2; \quad \varphi_{i+1,i} = \varphi_{i+1} - \varphi_i;$$

Для сдвиговой жёсткости

$$\psi(x) = \frac{1}{GF(x)} = \psi_1 + \sum_{i=1}^m \Gamma_{ai} \varphi_{i+l,i} = \varphi_{i+1} - \varphi_i.$$

Пусть фундамент опирается на различные по своим свойствам грунты в пределах $0 \leq x \leq l_1$ и $l - l_1 \leq x \leq l$. Коэффициенты жёсткости основания будут $k_1(x)$ и $k_2(x)$.

Тогда $k(x) = k_1(x) + \Gamma_{L1} k_{2,1}(x)$, $k_{2,1}(x) = k_2(x) - k_1(x)$.

При $x < l_1$ $\Gamma_{L1} = 0$ и $k(x) = k_1(x) + k_{2,1}(x) = k_2(x)$.

Для многослойного основания, когда имеются $k_1(x), k_2(x), \dots, k_i(x)$:

$$k(x) = k_1(x) + \sum_{i=1}^m \Gamma_{Li} k_{i+1,i}.$$

При действии сосредоточенных сил N_i , распределённых нагрузок $q_i(x)$, моментов M_i функция нагрузки

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m_1} \Gamma_{ai} N_i + \sum_{i=1}^{m_2} \Gamma_{bi} M_i + \sum_{i=1}^{m_3} \Gamma_{chi} q_i(x),$$

где m_1, m_2, m_3 – количество сосредоточенных сил, моментов, распределённых нагрузок; a_i, b_i, c_{hi} – расстояния от левого конца фундамента, где приложены сосредоточенные силы, моменты, а также начало и конец участка с $q_i(x)$; Γ_{ai} – мгновенный прерыватель первого рода; Γ_{bi} – мгновенный прерыватель второго рода; Γ_{chi} – двухсторонний прерыватель.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчёт конструкций, оснований, зданий и сооружений основан на принятых механических и реологических моделях, устанавливающих зависимости между напряжениями, перемещениями, деформациями, их развитием во времени.

Используемые в практике модели отличаются сложностью (вследствие учёта большого числа параметров) или простотой, областями рационального применения, надёжностью, обоснованностью и т.п. Некоторые модели базируются на фундаментальных решениях, например, механики деформированного тела. Другие используют упрощённые взаимосвязи, наблюдаемые на практике.

В пособии описаны механические и реологические модели, наиболее часто применяемые при проектировании. Для некоторых сред, например грунтов, в разных случаях применяют разные модели (Винклера, линейно-деформируемого полупространства, линейно-деформируемого слоя, зернистой среды, комбинированные, например, П.Л. Пастернака). В пособии рассмотрены достоинства и недостатки моделей, случаи их целесообразного применения.

Другие модели, например, механики железобетона (Н.И. Карпенко) чрезвычайно сложны и требуют вдумчивого изучения. В то же время рекомендуем ознакомиться с монографией Н.И. Карпенко [13].

Во времени проявляются реологические свойства материалов и конструкций: ползучесть, релаксация, длительная прочность. Приведены классические реологические модели.

Целью пособия является углубление понятия о структуре расчётной техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондаренко, В.М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона : монография. / В.М. Бондаренко, В.И. Колчунов. – М. : ВСВ, 2004. – 472 с.
2. Воробьева, Е.Ю. Универсальная расчетная модель грунтового основания и ее практическое применение / Е.Ю. Воробьева, И.И. Черкасов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1980. – № 10. – С. 3 – 15.
3. Вялов, С.С. Реологические основы механики грунтов : монография / С.С. Вялов. – М. : Высшая школа, 1978. – 447 с.
4. Галин, Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкопластичности : монография / Л.А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
5. Гарагаш, Б.А. Надёжность стохастических пространственных систем сооружений и оснований при неоднородных деформациях оснований : дис. ... д-ра техн. наук / Б.А. Гарагаш. – Волгоград, 2001. – 519 с.
6. Гениев, Г.А. Динамика пластической и сыпучей среды : монография / Г.А. Гениев, М.Н. Эстрин. – М. : Стройиздат, 1972. – 216 с.
7. Горбунов-Посадов, М.И. Давление грунта на жесткий закругленный фундамент и свободные деформации котлована / М.И. Горбунов-Посадов, О.Я. Шехтер, В.А. Кофман // Тр. НИИоснований, 1954. – Вып. 24. – С. 39 – 80.
8. Горбунов-Посадов М.И. Расчёт конструкций на упругом основании : монография / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.
9. Добров, Э.М. Механика грунтов : учеб. / Э.М. Добров. – М. : Изд. центр «Академия», 2008. – 272 с.
10. Зарецкий, Ю.К. Вязкопластичность грунтов и расчёты сооружений : монография / Ю.К. Зарецкий. – М. : Стройиздат, 1988. – 352 с.
11. Звездов, А.И. Расчёт прочности железобетонных конструкций при действии изгибающих моментов и продольных сил по новым нормативным документам / А.И. Звездов, А.С. Залесов, Т.А. Мухамедов, Е.А. Чистяков // Бетон и железобетон. – 2002. – № 2. – С. 21 – 25.
12. Ильичев, В.А. Метод расчёта деформаций оснований зданий вблизи глубоких котлованов / В.А. Ильичев, Н.С. Никифорова, Е.Б. Корнеева // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2006. – № 6.
13. Карпенко, Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами : монография / Н.И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1996. – 208 с.
14. Карпенко, Н.И. Общие модели механики железобетона : монография / Н.И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1996. – 416 с.
15. Караулов, А.И. Несущая способность оснований осесимметричных фундаментов зданий и сооружений: автореф. дис. ... д-ра наук / А.И. Караулов. – СПб., 2009. – 46 с.
16. Коренев, Б.Г. Расчёт плит на упругом основании : монография. / Б.Г. Коренев, Е.И. Черниговская. – М. : Госстройиздат, 1954. – 350 с.
17. Леденев, В.В. Проектирование плитных фундаментов : метод. указ. / В.В. Леденев, А.В. Худяков. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2010. – 45 с.
18. Макаров, Б.П. Расчёт фундаментов сооружений на случайно-неоднородном основании при ползучести : монография / Б.П. Макаров, Б.Е. Кочетков. – М. : Стройиздат, 1987. – 256 с.

19. Миронов, В.А. Прочность и деформируемость грунтов при сложном напряженном состоянии / В.А. Миронов, О.Е. Софьин, А.Н. Гудий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2007. – № 4. – С. 5 – 9.
20. Мустафаев, А.А. Расчёт оснований и фундаментов на просадочных грунтах : учеб. пособие / А.А. Мустафаев. – М. : Высшая школа, 1979. – 368 с.
21. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел : монография / А. Надаи. – М. : Мир, 1968. – Т. 2. – 863 с.
22. Методика районирования территории Москвы для строительства объектов с заглубленными основаниями / В.И. Осипов, В.И. Кутенов, Н.Г. Анисимова, И.А. Кожевникова, И.В. Козлякова. // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2010. – № 4. – С. 8 – 14.
23. Пастернак, П.Л. Основы нового метода расчёта жёстких и гибких фундаментов на упругом основании / П.Л. Пастернак // Материалы совещания по теории расчета балок и плит на сжимаемость основания : сб. ст. / МИСИ. – М. : Госстройиздат, 1956. – № 14. – С. 116 – 144.
24. Пилягин, А.В. Проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений : учеб. пособие / А.В. Пилягин. – М. : АСВ, 2005. – 248 с.
25. Пушилин, А.Н. Метод расчёта усилий в конструкциях зданий при деформировании оснований из-за проходки подземной выработки / А.Н. Пушилин, А.В. Фаворов, В.И. Шейнин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2007. – № 3. – С. 2 – 6.
26. Пшеничкин, А.П. Основы вероятностно-статистической теории взаимодействия сооружений с неоднородными грунтовыми основаниями : монография / А.П. Пшеничкин. – Волгоград : ВолгГАСУ, 2010. – 336 с.
27. Рац, М.В. Структурные модели в инженерной геологии : монография / М.В. Рац. – М. : Недра, 1973. – 216 с.
28. Ржаницын, А.Р. Строительная механика : учеб. / А.Р. Ржаницын. – М. : Высшая школа, 1982. – 400 с.
29. Седов, Л.И. Механика сплошной среды : монография / Л.И. Седов. – М. : Наука, 1973. – 584 с.
30. Симвулиди, И.А. Расчёт инженерных конструкций на упругом основании : учеб. пособие / И.А. Симвулиди. – М. : Высшая школа, 1978. – 480 с.
31. Софьин, О.Е. Результаты теоретико-экспериментального анализа моделей прочности грунта / О.Е. Софьин // Академические чтения Н.А. Цытович и 2-е Денисовские чтения – М. : МГАСУ, 2003. – С. 84 – 88.
32. Тимошенко, С.П. Теория упругости : учеб. для вузов / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
33. Филин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела : монография / А.П. Филин. – М. : Наука, 1975. – Т. 1. – 832 с.
34. Цытович, Н.А. Основы прикладной геомеханики в строительстве : монография / Н.А. Цытович, З.Г. Тер-Мартirosян. – М. : Высшая школа, 1981. – 317 с.
35. Шукле, Л. Реологические проблемы механики грунтов : монография / Л. Шукле ; пер. с англ. – М. : Мир, 1978. – 485 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. МОДЕЛИ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ	4
1.1. Структурные модели в геологии	4
1.2. Модель местных деформаций (Фаусса-Винклера)	7
1.3. Модель линейно-деформируемой среды	9
1.3.1. Фундаментальные уравнения теории упругости	12
1.3.2. Перемещения и деформации	20
1.3.3. Расчёт деформаций основания	22
1.4. Комбинированные модели	27
1.5. Модель зернистой среды	27
1.6. Стохастические модели	28
1.7. Фильтрационные модели (фильтрационная консолидация слоя грунта)	31
1.8. Динамика сыпучих сред	33
1.9. Реологические модели	34
1.10. Нелинейные модели	36
2. МОДЕЛИ БЕТОНА, ЖЕЛЕЗОБЕТОНА, ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ	55
2.1. Деформационная модель	55
2.2. Модели фундаментных плит	61
2.3. Призматические и пирамидальные сваи	64
2.4. Реологические модели бетона	69
2.5. Расчёт конструкций на просадочных грунтах	72
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	76
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	77

Учебное издание

ЛЕДЕНЕВ Виктор Васильевич,
ХУДЯКОВ Александр Владимирович

МЕХАНИЧЕСКИЕ И РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинкина

Инженер по компьютерному макетированию М.С. Анурьева

Подписано в печать 09.04.2012.

Формат 60 × 84 / 16. 4,65 усл. печ. л. Тираж 50 экз. Заказ № 168

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14