Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет»

**Н.П. ПУЧКОВ, Т.В. ЖУКОВСКАЯ,
Е.А. МОЛОКАНОВА, И.А. ПАРФЁНОВА, А.И. ПОПОВ**

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОРАЗВИТИЯ БАКАЛАВРА

Часть 1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Инноватика»

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2012

УДК 514.12:512.64(075.8)
ББК В11я73
П764

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой распределённых
вычислительных систем ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
С.М. Дзюба

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой
алгебры и геометрии ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина»
А.И. Булгаков

П764 Применение математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра. Ч. 1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебное пособие / Н.П. Пучков, Т.В. Жуковская, Е.А. Молоканова, И.А. Парфёнова, А.И. Попов. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 96 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1151-0.

Содержит базовые понятия высшей линейной алгебры и аналитической геометрии, изложены методы по использованию математических знаний при решении задач профессиональной деятельности, даны рекомендации по организации самостоятельной работы.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 222000 «Инноватика».

УДК 514.12:512.64(075.8)
ББК В11я73

ISBN 978-5-8265-1151-0

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые студенты и преподаватели!

Эффективность работы учреждений профессионального образования во многом определяется эффективностью вашего взаимодействия, поэтому данная учебно-методическая разработка направлена не только на традиционную передачу знаний, а является программным продуктом этого взаимодействия. Основная цель профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, готового к постоянному творческому росту, социальной и профессиональной мобильности.

Конкурентоспособный специалист – это:

– работник, который способен предложить себя на рынке труда, вступить в определённые отношения (экономические, правовые и др.) с работодателем или самому выступить в роли предпринимателя;

– человек, удовлетворяющий потребностям рынка рабочей (в широком смысле) силы по своим профессиональным, психологическим, нравственным и другим качествам, обладающий адаптивностью и мобильностью, способностью быстро перестраиваться в изменяющихся условиях, принимать обоснованные решения и нести за них ответственность;

– это личность, для которой характерны стремление и способность к высокому качеству и эффективности своей деятельности, а также к лидерству в условиях состязательности, соперничества и напряжённой борьбы со своими конкурентами.

Поэтому Ваша задача в вузе заключается, с одной стороны, в получении необходимых знаний, умений и навыков для конкретной профессиональной деятельности, а с другой, в формировании своих личностных качеств, необходимых для любой профессии и общественной жизни, творческой самореализации.

Учебное пособие «Применение математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра» предназначено для студентов 1-го курса технических университетов, изучающих дисциплину «Математика» в соответствии с ФГОС по направлениям подготовки 220100 «Системный анализ и управление» и 222000 «Инноватика».

Кроме того, предлагаемое учебное пособие также может быть использовано студентами высших технических учебных заведений, обучающимися по другим инженерным направлениям.

Овладение основами данной дисциплины предполагает качественное изучение и приобретение необходимых практических навыков, определяющих Вашу готовность к изучению общепрофессиональных и специальных дисциплин.

В пособии изложены теоретические сведения по основным понятиям аналитической геометрии и линейной алгебры. Изложение ведется в строгой логической последовательности, материал представлен полно и доступно. Теоретические положения иллюстрируются примерами и графическими построениями, приведены образцы решения типовых задач, предлагаются задания для самостоятельного решения.

Основной упор в пособии делается на самостоятельную работу различных по уровню знаний студентов, используются задания трёх уровней: А (тестовые задания), В (типовые задачи для самостоятельной работы), С (задачи повышенной сложности и творческие задачи).

Организация самостоятельной работы с использованием данного пособия предполагает несколько этапов (которые необходимо учитывать и преподавателям):

1. Самостоятельное изучение студентом раздела дисциплины по данному пособию и по другим источникам (из списка рекомендованной литературы).
2. Самостоятельное решение студентом задач в соответствии с собственным уровнем овладения дисциплины и проявления креативности при использовании ответов и указаний.
3. Совместная творческая деятельность группы студентов при решении задач повышенной и высокой сложности в рамках факультативных занятий по дисциплине и в студенческих кружках.
4. Использование задач пособия или их модификаций в качестве конкурсных заданий при проведении Всероссийской олимпиады.

Формирование таких качеств осуществляется, в первую очередь, на базе тех учебных дисциплин, которые изучались в школе. Так продолжением школьных предметов «Алгебра» и «Геометрия» в вузе является учебная дисциплина «Математика».

Материал пособия обеспечивает не только углубление математических знаний, но и использование их при изучении других разделов математики, дисциплин математического, естественнонаучного и профессионального циклов, а в дальнейшем и в профессиональной деятельности специалиста инновационной сферы.

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

I. Учебные цели. В результате изучения материала лекции студенты должны *получить представление* об использовании матриц для решения систем линейных алгебраических уравнений; *знать* понятие матрицы, виды матриц, понятие и способы вычисления определителей различного порядка, понятие минора и алгебраического дополнения, свойства определителей и их доказательство на примере определителя третьего порядка.

II. Формирование компетенций. Формирование математической культуры, совершенствование общей культуры мышления, развитие индуктивного мышления. Обучение студентов ведению конспектов по математике.

III. Учебные вопросы:

1.1. Матрицы. Основные понятия.

1.2. Определители 2-го и 3-го порядка, их свойства.

1.3. Вычисление определителей разложением по строке (столбцу). Определители n-го порядка.

1.4. Задание для самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Разумное использование современной вычислительной техники и её программного обеспечения немыслимо без знания теории матриц и определителей. Данные понятия появляются, например, в связи с решением систем линейных алгебраических уравнений, когда система получает компактную математическую запись, методы решения системы легко унифицировать и реализовать на компьютере. Таким образом, упрощаются громоздкие вычисления, достигается высокая степень точности, удобство реализации сложных математических формул.

Изучение данной темы способствует формированию ключевых компонентов общекультурных компетенций специалистов, базирующихся на профессиональных знаниях: владение культурой математического мышления; развитые учебные навыки; готовность к самостоятельной, индивидуальной работе, принятию решений; владение математической логикой, необходимой для формирования суждений по разрешаемым проблемам.

Вопросы для контроля усвоения изложенного материала, на которые надо обратить непосредственное внимание при его изучении:

1. Сформулируйте определение матрицы.
2. Какая матрица называется диагональной?
3. Какая матрица называется единичной?
4. Что является числовой характеристикой квадратной матрицы?
5. Какое различие в обозначениях и смыслах понятий матрицы и определителя?
6. Для каких матриц можно записать определители?

7. Как раскрывается определитель второго порядка?
8. Как раскрывается определитель третьего порядка?
9. Сформулируйте правило треугольников.
10. При каких преобразованиях определитель не меняется?
11. При каких преобразованиях определитель меняет знак на противоположный?
12. Каковы свойства определителя?
13. Что такое минор элемента определителя?
14. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя?
15. Как раскрывается определитель n-го порядка?

1.1. МАТРИЦЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений второго порядка

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4, \\ x - 3y = 5. \end{cases}$$

Эту систему легко решить, например, методом подстановки. Но если увеличить число неизвестных и число уравнений, то решение системы существенно усложнится, запись станет громоздкой. Например, система из трёх уравнений с тремя неизвестными $x_1,\ x_2,\ x_3$ имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Здесь коэффициенты системы a_{ij} имеют два индекса, первый из которых i показывает, в каком уравнении находится этот коэффициент (i =1, 2, 3), второй j – при каком неизвестном (j =1, 2, 3). Требуется исследовать систему, т.е. узнать, имеет ли она решение и, если имеет, определить количество решений, найти все решения. Чтобы ответить на эти вопросы и разработать общие методы решения произвольных систем, выделим в системе составляющие: коэффициенты a_{ij}, неизвестные x_j и свободные члены b_i $(i = \overline{1,\ 3};\ \ j = \overline{1,\ 3})$ и сконструируем на их основе три таблицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Такие таблицы и называются матрицами.

Определение 1.1. *Матрицей* размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел или буквенных выражений a_{ij} (i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n), записанных в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь a_{ij} (i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n) – элементы матрицы, индекс i обозначает номер строки, а индекс j – номер столбца. Матрицы обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита A, B, C и т.д., а также $A = (a_{ij})$ или $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается θ.

Если число строк равно числу столбцов $m = n$, то матрица называется *квадратной* порядка n. Квадратная матрица, у которой все элементы с неравными индексами $i \neq j$ равны нулю, называется *диагональной*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Говорят, что элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} расположены на *главной диагонали* матрицы. Если все отличные от нуля элементы диагональной матрицы равны единице, то матрица называется *единичной* и обозначается буквой **E**:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

В теории матриц также рассматриваются матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ – \textit{матрица-строка}}; \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ – \textit{матрица-столбец}}.$$

Матрица, состоящая из одного элемента, отождествляется с этим элементом:

$$A = (a_{ij})_{1\times 1} = a_{11}.$$

Числовой характеристикой квадратной матрицы является *определитель* (или *детерминант*).

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го ПОРЯДКА И 3-го ПОРЯДКА, ИХ СВОЙСТВА

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определение 1.2. Определителем данной матрицы A или о*пределителем второго порядка* называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Другие обозначения: $|A|$, $\det A$.

Понятие определителя предполагает одновременно и способ его вычисления. Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами, диагональ, образованная элементами a_{11} и a_{22}, называется *главной*, а элементами a_{12} и a_{21} – *побочной*.

Пример 1.1. Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ равен

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot(-2) = 8.$$

Пример 1.2. При каком значении α определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2\alpha+1 \end{vmatrix}$ равен нулю?

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2\alpha+1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-1)\cdot(2\alpha+1) - 3\cdot 1 = 0,$$

$$-2\alpha - 1 - 3 = 0,$$

$$-2\alpha - 4 = 0,$$

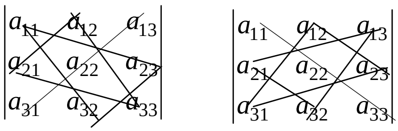
$$\alpha = -2.$$

Соответственно для матрицы третьего порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ рассматривается определитель третьего порядка.

Определение 1.3. О*пределителем третьего порядка* называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для того чтобы запомнить, какие слагаемые в правой части последнего равенства (1.1) берутся со знаком «+», а какие со знаком «–», пользуются символическим правилом треугольников (правилом Саррюса):



(+) (–)

Рис. 1.1

Со знаком «+» берутся произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «–» – произведения элементов побочной диагонали и элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали (см. рис. 1.1).

Пример 1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

Решение. По правилу треугольников составляем произведения элементов:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot 4\cdot 8 + 3\cdot 7\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot 5 - 6\cdot 4\cdot 2 - 0\cdot 5\cdot 7 - 3\cdot 1\cdot 8 = 0 + 42 + 30 - 48 - 0 - 24 = 0.$$

Сформулируем и докажем *свойства определителей* 3-го порядка (легко видеть, что эти свойства присущи и определителям 2-го порядка).

1. Определитель не изменится, если его строки и столбцы поменять местами, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство основано на применении определения (1.3) к обеим частям равенства.

Например: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -10,$

поменяем строки и столбцы местами

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -10.$$

2. Если в определителе переставить местами два столбца или две строки, то определитель изменит свой знак на противоположный.

Аналогично по определению (1.3) можно проверить, например, равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Например: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -23,$

поменяем местами второй и третий столбцы

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 23.$$

3. Если в определителе два столбца или две строки равны, то определитель равен нулю.

Доказательство. При перестановке двух одинаковых столбцов (строк) определитель $|A|$ не изменится. По свойству 2 знак определителя изменится. Поэтому $|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$.

Например: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$.

4. Общий множитель элементов столбца или строки можно выносить за знак определителя.

Например: $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Доказательство основано на применении определения (1.3) к обеим частям последнего равенства.

5. Если в определителе все элементы некоторого столбца или строки равны нулю, то определитель равен нулю (следует из свойства 4 при $\lambda = 0$).

6. Если в определителе соответствующие элементы двух столбцов или двух строк пропорциональны, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть элементы 2-го столбца пропорциональны элементам 1-го столбца (λ – коэффициент пропорциональности). По свойствам 4 и 3 имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если в определителе каждый элемент некоторого столбца или строки представляет собой сумму двух слагаемых, то этот определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, в одном из которых в том же столбце или строке стоят первые слагаемые, а во втором – вторые, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} + a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} + a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство основано на использовании определения (1.3).

8. Если к элементам некоторого столбца или строки определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца или строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

Доказательство. Например, по свойствам 7 и 6 имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ РАЗЛОЖЕНИЕМ ПО СТРОКЕ (СТОЛБЦУ). ОПРЕДЕЛИТЕЛИ *n*-го ПОРЯДКА

Определение 1.4. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется определитель, полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца определителя $|A|$.

Определение 1.5. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Например, для определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ имеем:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{31}a_{23}-a_{21}a_{33};$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13};$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}, \quad A_{32}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{21}a_{13}-a_{11}a_{23}. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1 (*о разложении определителя*). Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любого столбца (или строки), умноженных на их алгебраические дополнения.

Например, разложение по 2-му столбцу определителя имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}.$$

Доказательство. Докажем последнее равенство по определению 1.3 с учётом вычислений (1.2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$= a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) - a_{22}(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) + a_{32}(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}) =$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Аналогично можно показать справедливость разложения определителя по другому столбцу и любой строке. Теорема доказана.

Следствие. Сумма произведений элементов столбца (строки) на соответствующие алгебраические дополнения другого столбца (строки) равна нулю.

Доказательство. По теореме 1.1 определитель 3-го порядка $|A|$ можно записать в виде $|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$. Алгебраические дополнения A_{12}, A_{22}, A_{32} (см. формулы (1.2)) не зависят от элементов 2-го столбца a_{12}, a_{22}, a_{32}. Рассмотрим определитель, у которого первый и второй столбцы равны, по свойству 3 получим

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} -$$

сумма произведений элементов 1-го столбца на соответствующие алгебраические дополнения 2-го столбца. Аналогично доказываются остальные формулы.

Рассмотрим понятие определителя n-го порядка – числа, сопоставимого квадратной матрице n-го порядка.

Определение 1.6. *Определителем n-го порядка* называется число, обозначаемое символом $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и вычисляемое разложением по любой строке (или столбцу).

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Определители n-го порядка можно выразить через определители 3-го порядка.

Пример 1.4. Вычислить определитель четвёртого порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по первой строке, получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(6+6+0-0-0-6) - 0 - 2\cdot(0-2-2-0+2-6) = 12+16 = 28.$$

Для определителей n-го порядка справедливы те же свойства, что и для определителей 3-го порядка. Эти свойства позволяют получать нулевые элементы в строке (столбце), по которой затем раскладывается определитель.

Вычислим определитель примера 1.3 так: умножим третью строку на (–1) и прибавим её к четвёртой, затем разложим определитель по четвёртой строке.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-1) \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(6+0+6+2-0-0) = 28.$$

Заключение

На данной лекции рассмотрены, в основном, определители. Их использование позволяет в дальнейшем более глубоко изучить такие математические объекты, как матрицы, научиться по-новому решать системы линейных алгебраических уравнений.

1.4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Уровень А

1.4.1. Вычислить определители: *а*) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; *б*) $\begin{vmatrix} a & b \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$.

1.4.2. Расположите определители в возрастающем порядке.

1: $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$ **2**: $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ **3**: $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ **4**: $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$.

1.4.3. При каком значении α определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2\alpha-3 \end{vmatrix}$ равен нулю?

1.4.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Уровень В

1.4.5. Используя свойства определителя, вычислить $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix}$.

1.4.6. Доказать, что $\det E = 1$, где E – единичная матрица n-го порядка.

1.4.7. Вычислить алгебраические дополнения определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$$

1.4.8. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 0 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 0 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$

1.4.9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \end{vmatrix}$.

1.4.10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

Уровень С

1.4.11. Используя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}.$$

1.4.12. Не вычисляя определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, показать, что он равен нулю.

1.4.13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos^2\beta & \sin^2\beta & \cos 2\beta \\ \cos^2\gamma & \sin^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$.

1.4.14. Решить неравенство $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0$.

2. АЛГЕБРА МАТРИЦ

I. Учебные цели. Изучить операции над матрицами, их свойства.

В результате изучения материала лекции студенты должны *знать* определение и свойства операций над матрицами, понятие обратной матрицы, алгоритм вычисления обратной матрицы, понятие эквивалентных преобразований матрицы, ранг матрицы.

II. Формирование компетенций. Формирование математической культуры, совершенствование общей культуры мышления, развитие аналитического и логического мышления. Закрепление умений вести конспекты, лаконично и точно формулировать понятия и теоремы, грамотно записывать математические формулы.

III. Учебные вопросы:

2.1. Линейные операции над матрицами. Транспонирование.

2.2. Умножение матриц. Степень матрицы.

2.3. Обратная матрица.

2.4. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы.

2.5. Задание для самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Представление совокупностей чисел и других объектов в виде прямоугольных таблиц оказалось чрезвычайно удобным и эффективным способом упорядочения информации. Это обусловило быстрое развитие матричного аппарата и его широкое применение в науке и технике. Владение действиями над матрицами позволяет программировать любые матричные объекты, будь то базы данных, электронные таблицы или объекты графики, необходимые подчас для визуализации какого-либо процесса и способствует тем самым формированию необходимых общекультурных компетенций.

Операции над матрицами являются естественными и легко запоминаются. Особое внимание при рассмотрении операций над матрицами следует обратить на то, что: нулевая матрица при сложении матриц обладает теми же свойствами, что и число ноль при сложении чисел; единичная матрица при рассмотрении операции умножения матриц и формулировке понятия обратной матрицы играет ту же роль, что и единица при умножении чисел. В то же время, в отличие от чисел, умножение матриц – не коммутативно; нет понятия деления матриц. Вводится понятие ранга матрицы, который не относится к операциям над матрицами, но даёт её качественную характеристику и используется при исследовании систем линейных алгебраических уравнений.

При изучении материала лекции обратите внимание на следующие вопросы для контроля усвоения изложенного материала:

1. Какие операции с матрицами называются линейными?
2. Какие матрицы можно умножать? Складывать?
3. Какие матрицы называются равными?
4. Сформулируйте правило сложения двух матриц.
5. Какими свойствами обладает операция сложения двух матриц?
6. Какой элемент является нейтральным относительно операции сложения двух матриц?
7. Сформулируйте правило умножения матрицы на число.

8. Какими свойствами обладает операция умножения матрицы на число?

9. В чём заключается операция транспонирования матриц?

10. Какими свойствами обладает операция транспонирования?

11. Какая матрица называется симметрической?

12. По какому алгоритму производится операция умножения двух матриц?

13. Какую размерность должны иметь умножаемые матрицы?

14. Какой элемент является нейтральным относительно операции умножения матриц?

15. Приведите примеры матриц, обладающих свойством коммутативности при умножении.

16. Какая матрица называется обратной матрице A?

17. Какие матрицы имеют обратную?

18. Как найти матрицу, обратную к матрице второго порядка?

19. Какая матрица называется невырожденной?

20. Какие матрицы называются ступенчатыми (трапециевидными)?

21. Какие операции над матрицами называются элементарными?

22. Чему равен ранг единичной матрицы? Нулевой?

2.1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ. ТРАНСПОНИРОВАНИЕ

С матрицами, т.е. таблицами вида

$$A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

можно осуществлять различные математические операции.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного и того же размера $m\times n$ называются *равными*, если равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$, $i=1, \dots, m;\ j=1, \dots, n$. Понятия «больше», «меньше» можно использовать только для размерностей матриц.

Линейными операциями над матрицами являются сложение матриц и умножение матрицы на число.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначение: $C = A + B$.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Правило сложения двух матриц обобщается на любое конечное число слагаемых. Операция сложения матриц обладает свойствами:

1. $A + B = B + A$ – коммутативность сложения;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ – ассоциативность сложения;
3. $A + \theta = A$ – свойство нулевой матрицы θ.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ *на число* λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, полученная умножением всех элементов матрицы A на число λ, т.е. $b_{ij} = \lambda a_{ij}$. Обозначение: $B = \lambda A$.

$$B = \lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, найти

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 6 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 0 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & 9 \\ -6 & 0 & 12 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Для произвольных чисел μ и λ имеют место свойства:

1. $\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A$ – ассоциативность.
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ – дистрибутивность относительно умножения на матрицу.
3. $(A + B)\lambda = \lambda A + \lambda B$ – дистрибутивность относительно умножения на число.

Сложение матриц имеет обратное действие – вычитание. *Разность двух матриц* (одинакового размера) определяется равенством

$$(A - B) = A + (-1)B.$$

Пример 2.1. Найти $A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-3 & 3-0 & 1+3 \\ -2-6 & 0-3 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -8 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операцией *транспонирования* называется замена строк матрицы столбцами с сохранением их номеров. Матрица, полученная путём транспонирования матрицы A, называется *транспонированной* по отношению A и обозначается A^T. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Операция транспонирования обладает следующими очевидными свойствами:

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $\det A = \det A^T$ – свойство определителя;
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$ – свойство аддитивности;
4. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ – свойство однородности.

Если матрица A не меняется при транспонировании, т.е. $A^T = A$, то она называется *симметрической*. У симметрической матрицы элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны. Квадратная нулевая матрица θ и единичная матрица E являются симметрическими.

2.2. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ. СТЕПЕНЬ МАТРИЦЫ

Операция *умножения матрицы A на матрицу B* определена только для случая, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением матрицы $A = \left(a_{ik}\right)_{m\times n}$ на матрицу $B = \left(b_{kj}\right)_{n\times l}$ называется такая матрица $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times l}$, $C = AB$, каждый элемент которой определяется равенством

$$c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \ ,$$

т.е. для того чтобы найти элемент c_{ij} матрицы C берём i-ю строку матрицы A и j-й столбец матрицы B и находим сумму произведений их соответствующих элементов.

Пример 2.2. Найти произведение матриц AB, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Такое произведение существует, так как количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы (равно 3).

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot(-2) & 2\cdot 3+3\cdot 2+1\cdot 3 & 2\cdot(-1)+3\cdot 5+1\cdot 0 \\ -2\cdot 1+0\cdot 0+3\cdot(-2) & -2\cdot 3+0\cdot 2+3\cdot 3 & -2\cdot(-1)+0\cdot 5+3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 15 & 13 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

В обратном порядке перемножить матрицы примера 2.2, т.е. найти произведение BA, нельзя, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A. Даже если произведение матриц BA существует, оно может отличаться от AB. Произведение двух матриц в общем случае *не обладает свойством коммутативности*, т.е. $AB \neq BA$. Поэтому при умножении матриц надо строго следить за порядком следования сомножителей.

Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot(-2) & 2\cdot 3+1\cdot 0 \\ 4\cdot 1-2\cdot(-2) & 4\cdot 3-2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+3\cdot 4 & 1\cdot 1+3\cdot(-2) \\ -2\cdot 2+0\cdot 4 & -2\cdot 1+0\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$AB \neq BA.$$

Матрицы, для которых выполняется равенство $AB = BA$, называются *перестановочными*.

Правило умножения матриц обобщается на любое конечное число сомножителей. Произведение матриц обладает следующими свойствами:

1. $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность;
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
3. $(A + B)C = AC + BC$ – дистрибутивность относительно сложения;
4. $C(A + B) = CA + CB$ – дистрибутивность относительно сложения;
5. $(AB)^T = B^T A^T$;
6. $\det(AB) = \det A \det B$;
7. $EA = AE = A$ – свойство единичной матрицы E.

Таким образом, единичная матрица E порядка n перестановочна с любой квадратной матрицей A того же порядка.

Целая неотрицательная степень матрицы определяется равенствами

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}} = A^{n-1}A = A\,A^{n-1} \text{ и } A^0 = E .$$

Для произведения степеней матриц справедливо равенство

$$A^p A^q = A^q A^p = A^{p+q}, \quad p, q = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пример 2.3. Найти A^n для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим вторую и третью степень матрицы:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Установив закономерность, сделаем предположение: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Докажем этот факт по индукции:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположение подтвердилось: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Если теперь возвратиться к системе (1.1), то её в матричной форме можно записать в виде

$$AX = B .$$

2.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Операция деления для матриц не определена. Аналогом её является умножение на обратную матрицу. Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц. Итак, пусть A – квадратная матрица.

Определение 2.1. Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \qquad (2.1)$$

где E – единичная матрица.

Определение 2.2. Матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$.

Теорема 2.1 (*о существовании обратной матрицы*). Всякая невырожденная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, равную

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}, \qquad (2.2)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения матрицы A.

Матрица $\tilde{A}$ называется *присоединённой* матрицей.

Доказательство. Пусть дана квадратная невырожденная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для получения присоединённой матрицы $\tilde{A}$ на место каждого элемента матрицы A записывается его алгебраическое дополнение, и полученная матрица транспонируется.

Докажем формулу (2.2) проверкой равенства (2.1). Проверим сначала, что

$$A\,A^{-1} = A\frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{\det A}A\tilde{A} = E.$$

Действительно, при умножении матриц $A\tilde{A}$ получается матрица C, элементы которой c_{ij} образуются при умножении i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы $\tilde{A}$.

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j, \end{cases}$$

так как при $i = j$ получаем сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на их алгебраические дополнения, т.е. определитель матрицы A; при $i \neq j$ получаем сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на алгебраические дополнения другой строки (j-й), что равно нулю, по свойствам определителей. Тогда

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Аналогично показывается, что

$$\frac{1}{\det A}\tilde{A}A = E .$$

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Формула (2.2) даёт способ вычисления обратной матрицы, который включает следующие этапы:

1. Вычисление определителя $\det A$ и проверка условия $\det A \neq 0$;
2. Вычисление алгебраических дополнений A_{ij} элементов определителя.
3. Составление из алгебраических дополнений присоединённой матрицы $\tilde{A}$.
4. Умножение матрицы $\tilde{A}$ на число $\dfrac{1}{\det A}$.

Замечание 2.2. Справедлив факт, обратный теореме 1: если матрица A имеет обратную, то она является невырожденной.

Теорема 2.2 (*о единственности обратной матрицы*). Если матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, то матрица A^{-1} единственная.

Доказательство. Предположим, что матрицы B и C являются обратными к A, т.е. по определению 2.1:

$$BA = AB = E \text{ и } CA = AC = E .$$

Тогда по свойствам произведения матриц (свойство ассоциативности и свойство единичной матрицы) имеем:

$$BAC = (BA)C = EC = C ,$$
$$BAC = B(AC) = BE = B ,$$

т.е. $B = C$. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые свойства обратной матрицы.

Найдём матрицу, *обратную к матрице второго порядка* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Алгебраическими дополнениями элементов матрицы A являются:

$$A_{11} = a_{22} , \quad A_{12} = -a_{21} , \quad A_{21} = -a_{12} , \quad A_{22} = a_{11} ,$$

поэтому присоединённая матрица принимает вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица будет

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Итак, для матрицы A второго порядка присоединённая матрица $\tilde{A}$ получается перестановкой элементов главной диагонали матрицы A и изменением знака у элементов побочной диагонали.

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Действительно, по определению обратной матрицы и по свойствам произведения матриц получаем:

$$A\,A^{-1} = E \Rightarrow \det\left(A\,A^{-1}\right) = \det E \Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} .$$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Проверим, является ли матрица, стоящая в правой части равенства, обратной к AB:

$$AB\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Аналогично $\left(B^{-1}A^{-1}\right)AB = E$.

Пример 2.4. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим определитель:

$$\det A = -4 + 6 = 2,$$

так как $\det A \neq 0$, то обратная матрица существует.

Здесь очень легко найти $\tilde{A}$, так как

$$A_{11} = -2; \quad A_{12} = -2; \quad A_{21} = 3; \quad A_{22} = 2 \text{ и } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

а обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1{,}5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1{,}5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2.5. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-3 + 2) = 2.$$

Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&0\\3&3\end{vmatrix}=-6;\; A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0&0\\2&3\end{vmatrix}=0;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0&2\\2&3\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&0\\3&-1\end{vmatrix}=-2;\; A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0&0\\-1&-1\end{vmatrix}=0;\; A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}0&2\\-1&3\end{vmatrix}=2.$$

Запишем присоединённую матрицу

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}12&-6&-2\\1&0&0\\-9&4&2\end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица составляется по формуле (2.2):

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}12&-6&-2\\1&0&0\\-9&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-1\\0{,}5&0&0\\-4{,}5&2&1\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку (равенство (2.1)):

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}6&-3&-1\\0{,}5&0&0\\-4{,}5&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&3&-1\\2&3&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3-2&12-9-3&3-3\\0&1&0\\-2+2&-9+6+3&-2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}6&-3&-1\\0{,}5&0&0\\-4{,}5&2&1\end{pmatrix}.$

2.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ. РАНГ МАТРИЦЫ

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1) умножение всех элементов некоторой строки или столбца на число $\lambda \neq 0$;

2) прибавление к элементам некоторой строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на произвольное число α;

3) перестановка любых строк или столбцов матрицы;
4) транспонирование.

Определение 2.3. Матрицы, полученные одна из другой при помощи конечного числа элементарных преобразований, называются *эквивалентными*.

Обозначение: $A \sim B$.

Рассмотрим без доказательства ещё один *метод построения обратной матрицы*, который называется *методом Гаусса* и легко реализуется на компьютере. Для квадратной матрицы A порядка n составляется прямоугольная матрица размера $n\times 2n$ приписыванием справа единичной матрицы порядка n. Затем с помощью элементарных преобразований строк (только строк!) прямоугольной матрицы получаем матрицу, у которой слева находится единичная матрица порядка n, тогда оставшаяся правая половина преобразованной прямоугольной матрицы и будет являться обратной матрицей A^{-1}.

Рассмотрим метод Гаусса построения обратной матрицы на примере. Построим матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&3&-1\\2&3&3\end{pmatrix}$ примера 2.4.

Запишем прямоугольную матрицу и проведём элементарные преобразования строк так, чтобы ниже главной диагонали матрицы A все элементы обратились в нули, а на главной диагонали все элементы стали равны единице:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&2&0&1&0&0\\-1&3&-1&0&1&0\\2&3&3&0&0&1\end{array}\right)\updownarrow\overset{(1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&3&-1&0&1&0\\0&2&0&1&0&0\\2&3&3&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-1)\\ \times 0{,}5\\ \end{matrix}\overset{(2)}{\sim}$$

$$\overset{(2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&1&0&-1&0\\0&1&0&0{,}5&0&0\\2&3&3&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-2)\\ \\ \hookleftarrow\end{matrix}\overset{(3)}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&1&0&-1&0\\0&1&0&0{,}5&0&0\\0&9&1&0&2&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \times(-9)\\ \hookleftarrow\end{matrix}\overset{(4)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&1&0&-1&0\\0&1&0&0{,}5&0&0\\0&0&1&-4{,}5&2&1\end{array}\right).$$

Выше проведены следующие элементарные преобразования матриц: (1) – поменяли местами 1-ю и 2-ю строки; (2) – первую строку умножили на –1, вторую – на 0,5; (3) – изменили третью строку, прибавив к ней первую, умноженную на –2; (4) – изменили третью строку, прибавив к ней вторую, умноженную на –9. Получили матрицу, эквивалентную исходной, у которой с левой стороны квадратная матрица с единицами на главной диагонали и нулями ниже главной диагонали. Осталось получить нулевые элементы выше главной диагонали в левой квадратной матрице. Продолжим преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4{,}5 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{ll} & \\ \times 3 & \\ & \times(-1) \end{array} \overset{(5)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4{,}5 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Получили матрицу, левая половина которой является единичной матрицей, поэтому правая является матрицей, обратной A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -4{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований строк или столбцов матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Определение 2.4. Матрица называется *ступенчатой*, если в каждой её строке, начиная со второй, первый отличный от нуля элемент расположен правее ненулевого элемента предыдущей строки.

Например, ступенчатой является матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение 2.5. Квадратная матрица A называется *верхней* (*нижней*) *треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ $(i < j)$.

Общий вид треугольных матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что среди диагональных элементов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ могут быть равные нулю элементы.

Определение 2.6. Матрица A называется *верхней трапециевидной*, если выполнены следующие три условия:

1. $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

2. Существует такое натуральное число r, удовлетворяющее неравенствам $1 \le r \le \min(m,n)$, что $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \ne 0$.

3. Если какой-либо диагональный элемент $a_{ij} = 0$, то все элементы i-й строки и всех последующих строк равны нулю.

Общий вид верхних трапециевидных матриц:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при $r = m = n$ верхняя трапециевидная матрица является треугольной матрицей с отличными от нуля диагональными элементами.

Определение 2.7. *Рангом* матрицы A называется число ненулевых строк ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A.

Ранг матрицы A обозначается r_A или $r(A)$, или $rank\,A$. Очевидно, если матрица A имеет размер $m \times n$, то $r(A) \le \min\{m,n\}$, а ранг невырожденной квадратной матрицы равен её порядку. В приведённом выше примере ступенчатой матрицы $r(A) = 4$.

Теорема 2.3. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.

Без доказательства.

Пример 2.6. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Элементарными преобразованиями приведём матрицу к ступенчатой. Проведём сначала преобразования со строками так, чтобы в первом столбце все элементы, начиная со второго, обратились в ноль. Для этого переставим первую и четвёртую строки, применим ко второй и четвёртой строкам элементарное преобразование 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \; \times(-2) \\ \hookleftarrow \quad\quad \\ \\ \quad\quad \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая второй и пятый столбцы, видим, что их элементы, начиная со второго, пропорциональны, поэтому легко получить нули во втором столбце, прибавив к элементам второго столбца соответствующие элементы пятого столбца. Далее – к третьей и четвёртой строкам применим элементарное преобразование 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 3/2 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу. Количество ненулевых строк в ступенчатой матрице равно 3, следовательно, $r(A)=3$.

Ответ: $r(A)=3$.

Можно было провести другие элементарные преобразования и получить другую ступенчатую матрицу, эквивалентную данной, но ранг её при этом остаётся неизменным (теорема 2.3).

Заключение

На лекции рассмотрели понятие матрицы, изучили операции над ними, ввели понятие обратной матрицы и научились её находить. Рассмотрели вычисление ранга матрицы.

Все это необходимо знать при решении систем линейных алгебраических уравнений, чему будет посвящена следующая лекция.

2.5. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Уровень А

2.5.1. Сумма произведений элементов, расположенных на главной диагонали, и произведений элементов, взятых с противоположным знаком, расположенных на побочной диагонали матрицы $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ равна

1) 5; 2) 9; 3) 13; 4) –34.

2.5.2. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, тогда сумма $a_{11}+a_{32}$ равна:

1) 9; 2) –7; 3) 7; 4) –9.

2.5.3. Найдите транспонированную матрицу A^T матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -7 & 2 & 6 \\ 11 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.5.4. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, найдите матрицу $3A$.

2.5.5. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, какова будет матрица $3A+B$?

2.5.6. Установите соответствие между позициями А, Б, В, Г и 1, 2, 3, 4, 5:

А) $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

Б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

В) $A=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$;

Г) $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

1) $\det A=16$;
2) $\det A=0$;
3) $\det A=8$;
4) $\det A=-3$;
5) $\det A=-16$.

Уровень В

2.5.7. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, найдите матрицу $D=2A+B-C$.

2.5.8. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу $D=AB-2C$.

2.5.9. Найдите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ 9 & -6 & 21 \end{pmatrix}$.

2.5.10. Найдите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 18 & 1 \\ 1 & 7 & 41 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

2.5.11. Найдите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5.12. Найти обратную матрицу для $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Уровень С

2.5.13. Решите матричное уравнение:

а) $AXB+AX=E$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5.14. Найти матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$.

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Учебные цели. Изучить методы исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В результате изучения материала лекции студенты должны *знать* основные понятия теории систем линейных алгебраических уравнений, формулировку теоремы Кронекера – Капелли, методы решения систем (матричный, Крамера, Гаусса).

II. Формирование компетенций. Материал лекции способствует формированию математической культуры, совершенствованию общей культуры мышления, поддержанию творческой активности, активизации студентов к обсуждению доказательств и выводу формул, закреплению умений вести конспекты, грамотно записывать математические формулы.

III. Учебные вопросы:

3.1. Системы m уравнений с n неизвестными.

3.2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

3.2.1. Матричный метод.

3.2.2. Метод Крамера.

3.3. Решение СЛАУ произвольной размерности. Метод Гаусса.

3.4. Задание для самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Решение систем линейных уравнений – одна из центральных задач вычислительной математики, наиболее часто встречающаяся в инженерной практике. К этой задаче сводятся процедуры анализа и синтеза физических систем различной природы: электрических, механических, гидравлических и т.п. Она играет важную роль в прикладных методах математической статистики и экономики, в теории оптимального кодирования при передаче информации и т.д. Умение решать системы уравнений устойчиво формирует готовность к самостоятельной, индивидуальной работе при изучении профессионально направленных дисциплин.

Вопросы для контроля усвоения изложенного материала:

1. Что называется решением системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными?
2. Какая система линейных алгебраических уравнений называется однородной (неоднородной)?

3. Какая система линейных алгебраических уравнений называется совместной (несовместной)?

4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие совместности системы.

5. Может ли система иметь более одного решения?

6. В каком случае система называется неопределённой?

7. Когда применяются формулы Крамера?

8. Что можно сказать о решении однородной системы?

9. Каким является решение определённой однородной системы?

10. Сколько решений может иметь система, если число уравнений меньше числа неизвестных?

11. Сколько решений может иметь система, если число уравнений больше числа неизвестных?

3.1. СИСТЕМЫ *m* УРАВНЕНИЙ С *n* НЕИЗВЕСТНЫМИ

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы; x_j – неизвестные; b_i – свободные члены (i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n). Если все свободные члены системы (3.1) равны нулю: $b_i = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Набор из n чисел, в результате подстановки которых вместо соответствующих неизвестных в уравнения системы (3.1) получаем m тождеств, называется *решением* системы (3.1). Если система (3.1) имеет решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*. Если решение системы единственное, то она называется *определённой*, если система имеет несколько решений (более одного), то она называется *неопределённой*.

Однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

всегда совместна, так как она имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Рассмотрим матрицы: матрицу A, составленную из коэффициентов системы,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

называемую *матрицей системы*, матрицы-столбцы X и B, называемые соответственно столбцами неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (3.1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B. \qquad (3.3)$$

В частности, если система является однородной, то её запись в матричной форме имеет вид

$$AX = \theta,$$

где θ – нулевой столбец.

Вопрос о совместности системы линейных уравнений полностью решается теоремой Кронекера – Капелли. Рассмотрим матрицу A', отличающуюся от A тем, что в ней присутствует ещё один (n + 1)-й столбец – столбец свободных членов:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_m \end{array}\right).$$

A' называется расширенной матрицей системы (3.1).

Теорема Кронекера – Капелли. Для того чтобы система линейных уравнений (3.1) была *совместна*, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы был равен рангу матрицы системы $r(A') = r(A)$.

Без доказательства.

Пример 3.1. Исследовать на совместность систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$

Решение. Приведём расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -7 & 2 \end{array}\right) \times(-1)\times(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

По первым трём столбцам находим ранг матрицы системы: $r(A) = 3$; ранг расширенной матрицы $r(A') = 4$. Ранги расширенной матрицы и матрицы системы различны, поэтому система несовместна.

3.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.2.1. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД

Если число уравнений системы (3.1) равно числу неизвестных *n* = *m*, то матрица (3.2) системы является квадратной и определитель Δ называется *главным определителем* системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим методы и решения систем с квадратной матрицей на примере систем трёх линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{3.5}$$

Матричное уравнение для этой системы $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ – матрица системы;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец неизвестных;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов.

Если $\Delta \neq 0$, то существует обратная A^{-1}. Умножим обе части последнего уравнения (слева) на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Тогда
$$X = A^{-1}B, \tag{3.6}$$

так как $A^{-1}A = E$, $EX = E$. Здесь X – решение системы в матричной форме.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A (i, j = 1, 2, 3).

3.2.2. МЕТОД КРАМЕРА

Если мы хотим получить формулы для непосредственного вычисления элементов матрицы X, то осуществим следующие преобразования.

По формуле (3.6)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} \\ b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \end{pmatrix},$$

тогда

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}\right),\ x_2 = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}\right).$$

В то же время, используя разложение определителя по первому столбцу, выражение $b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$ можно представить в виде

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогично

$$\Delta_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (3.7)$$

Формулы (3.7) называются *формулами Крамера* для системы (3.5).

Для линейной алгебраической системы (3.1) с квадратной матрицей любого порядка *n*, главный определитель которой отличен от нуля $\Delta \neq 0$, формулы Крамера имеют аналогичный вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Пример 3.2. Решить по формулам Крамера систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Решение. Главный определитель системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 8 - 3 - 18 = 5.$$

Вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9+4-9-9=-5, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3+18+8-8-3-18=0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6+6-6-1=5.$$

Тогда решение системы: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Итак, если система (3.1) имеет квадратную матрицу, определитель которой отличен от нуля $\Delta \neq 0$, то она имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Формулы Крамера могут быть рекомендованы для решения систем с небольшим числом неизвестных (n = 2, 3), так как их применение на практике приводит к слишком громоздким вычислениям.

3.3. РЕШЕНИЕ СЛАУ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ. МЕТОД ГАУССА

В случаях, когда главный определитель системы равен нулю $\Delta = 0$ или когда число неизвестных не равно числу уравнений $n \neq m$, рассмотренные методы не применимы. Поэтому рассмотрим универсальный метод решения систем – метод Гаусса.

Метод Гаусса заключается в том, что исходную систему преобразуют к *ступенчатому* виду (матрица системы ступенчатая), сохраняя при этом эквивалентность.

Например, систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ приводим к виду $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{22}^* x_2 = b_2^*. \end{cases}$

По сути дела – это метод последовательного исключения неизвестных, который изучался в школе.

Метод Гаусса состоит из двух процедур, условно называемых *прямой* и *обратный ход*. Прямой ход заключается в приведении расширенной матрицы системы (3.1) к ступенчатому виду путём элементарных преобразований над строками. После чего осуществляется исследование системы на совместность и определённость.

Исследование ступенчатой системы в конце прямого хода происходит по теореме Кронекера – Капелли сравнением рангов матрицы системы A и расширенной матрицы A'. При этом возможны следующие случаи:

1) если $r(A') > r(A)$, то система несовместна (по теореме Кронекера – Капелли);

2) если $r(A') = r(A) = n$, то система (3.1) является определённой (без доказательства);

3) если $r(A') = r(A) < n$, то система (3.1) является неопределённой (без доказательства).

Для системы с квадратной матрицей, т.е. если $n = m$, равенства $r(A') = r(A) = n$ равносильны тому, что $\Delta \neq 0$.

Если система является неопределённой, т.е. выполняется $r(A') = r(A) < n$, то некоторые её неизвестные объявляются свободными, а остальные через них выражаются. Количество свободных неизвестных равно $k = n - r(A)$.

При выполнении обратного хода метода Гаусса по ступенчатой матрице восстанавливается система уравнений и находится её решение. Если в очередном уравнении после подстановки найденных ранее переменных, неизвестных остаётся более одного, то свободными неизвестными объявляются любые неизвестные, кроме одного.

Пример 3.3. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 5y + z = -5, \\ x + 2y - z = -6, \\ -2x - y + z = 3. \end{cases}$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк (прямой ход):

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \times(-2) \times 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & -9 \end{array}\right) \times(-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -30 \end{array}\right) : (-10) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

$r(A') = r(A) = n = 3$, поэтому система совместна и имеет единственное решение, т.е. является определённой.

Составим систему ступенчатого вида и решим её (обратный ход):

$$\begin{cases} x+2y-z=-6, \\ y+3z=7, \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-6, \\ y=7-3z, \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6-2y+z, \\ y=-2, \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y-2, \\ z=3. \end{cases}$$

Проверка подтверждает, что найденные числа являются решением.

Ответ: $x = 1$, $y = –2$, $z = 3$.

Пример 3.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1+\ x_2-\ x_3=\ 5, \\ x_1-2x_2+2x_3=-5, \\ 7x_1+\ x_2-\ x_3=10. \end{cases}$

*Решение***.** Выпишем расширенную матрицу системы.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}(-3) \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}(-1) \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r(A')=r(A)=2=r<n=3,$ следовательно, система имеет бесконечное множество решений. Найдём общее решение системы. Число свободных неизвестных равно $n-r=3-2=1$, т.е.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ -2x_1+x_2=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=4x_1-10, \\ x_2=2x_1-5, \\ x_1\in R. \end{cases}$$

Проверка с помощью частного решения, например, $x_1=0,$ $x_2=-5,\ x_3=-10$, подтверждает, что найденное общее решение системы верно.

Ответ: $\begin{cases} x_3=4x_1-10, \\ x_2=2x_1-5, \\ x_1\in R. \end{cases}$

Пример 3.5. Решить в случае совместности систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2+\ x_3=-2, \\ x_1+2x_2+3x_3=-1, \\ x_1-3x_2-2x_3=\ 3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк (прямой ход)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \vert & -2 \\ 1 & 2 & 3 & \vert & -1 \\ 1 & -3 & -2 & \vert & 3 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & \vert & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \vert & -1 \\ 1 & -3 & -2 & \vert & 3 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & \vert & -1 \\ 0 & 5 & 5 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 2 \end{pmatrix}.$$

$r(A') = 3 > 2 = r(A)$, следовательно, система несовместна.

Ответ: система несовместна.

3.4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Уровень А

3.4.1. Если (x_0, y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 5, \end{cases}$ тогда $x_0 y_0$ равно:

1) –3; 2) 3; 3) –4; 4) –2.

3.4.2. Система линейных уравнений называется неопределённой, если она имеет:

1) пустое множество решений;
2) хотя бы одно решение;
3) бесконечное множество решений;
4) единственное решение.

3.4.3. Рассматривается система n линейных уравнений с n неизвестными. Найдите соответствие между позициями А, Б, В, Г и 1, 2, 3, 4, 5:

А) однородная;	1) определитель главной матрицы системы отличен от нуля;
Б) несовместная;	2) имеет нулевое решение;
В) определённая;	3) имеет два свободных неизвестных;
Г) неопределённая;	4) ранг основной матрицы системы меньше ранга расширенной матрицы;
	5) ранг расширенной матрицы системы равен N.

3.4.4. При каком значении α система линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ \alpha x + 5y = -2 \end{cases}$ не имеет решений?

Уровень В

3.4.5. Решить по формулам Крамера систему $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12, \\ 4x_1 - 7x_2 = -2. \end{cases}$

3.4.6. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса:

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3; \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} 7x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Уровень С

3.4.7. Упорядоченная тройка чисел $\{1;\ -1;\ 1\}$ – одно из решений системы $\begin{cases} x + ay + z = 3a, \\ ax + 3az = 2, \\ 2x + 3ay = a. \end{cases}$

Найти параметр a и определить, есть ли другие решения при найденном a. Если есть, то найти их.

3.4.8. При каких значениях a система однородных уравнений $\begin{cases} ax + y + z = 0, \\ x + ay + z = 0, \\ x + y + az = 0 \end{cases}$ имеет нулевое решение?

4. ВЕКТОРЫ

I. Учебные цели. Познакомиться с новым математическим понятием, понятием вектора, его геометрическим и физическим смыслом. Изучить простейшие операции над векторами, их возможную взаимосвязь и представление.

На лекции закладываются основы математической дисциплины «Векторная алгебра».

II. Формирование компетенций. Формирование математической культуры, совершенствование общей культуры мышления, поддерживать творческую активность, привлекая студентов к обсуждению доказательств и выводу формул. Прививать умения вести конспекты, грамотно записывать математические формулы.

III. Учебные вопросы:

4.1. Векторы, линейные операции над векторами.

4.2. Линейные операции над векторами и их свойства.

4.3. Коллинеарность векторов. Базисы R^2 и R^3. Координаты вектора.

4.4. Операции над векторами в координатной форме.

4.5. Задание для самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Многие физические величины полностью определяются заданием некоторого числа. Например, объём, масса, плотность, температура и др. Такие величины называются *скалярными*. Для других величин, кроме числа, требуется указывать направление. Например, скорость, сила и др. Они получили название векторных. Над векторными математическими величинами выполняются действия по правилам векторной алгебры. Например, вычисление равнодействующей двух сил приводит к сложению векторов (рис. 4.1)

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 .$$

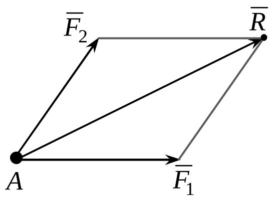


Рис. 4.1

Основные положения векторной алгебры также являются одним из элементов фундамента среднего образования техника-программиста и имеют большое значение для развития учебных навыков и готовности к продолжению образования, являющегося ключевым компонентом общекультурных компетенций специалистов инновационной сферы, базирующихся на профессиональных знаниях.

Знания в этой области математики позволят овладевать графическими программами: профессиональными редакторами векторной графики, редакторами растровых изображений, программами создания векторной анимации, графическими редакторами для работы с цифровыми фотографиями, программным обеспечением для рисования и оформления, программами, предназначенными для создания высокопрофессиональных точных и подробных технических иллюстраций.

Вопросы для контроля усвоения изложенного материала:

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Сформулируйте условие коллинеарности векторов.
4. Какие векторы называются равными?
5. Какие векторы называются компланарными?
6. Каковы линейные операции над векторами?
7. Какими свойствами обладает операция сложения векторов?
8. Какими свойствами обладает операция умножения вектора на число?
9. Что такое координаты вектора?
10. Какие векторы называются базисом на плоскости (в пространстве)?
11. Каковы правила выполнения линейных операций над векторами в координатной форме?

4.1. ВЕКТОРЫ, ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Определение 4.1. *Вектором* называется некоторая величина, характеризующаяся числовым значением и направлением.

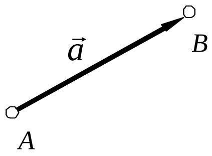


Рис. 4.2

Геометрически вектор изображается направленным отрезком (рис. 4.2). Обозначение вектора: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$, где точка A – начало вектора, точка B – конец вектора. Каждому вектору соответствует число, называемое *длиной* или *модулем* вектора, равное расстоянию между началом и концом. Обозначение модуля: $|\vec{a}|, |\overrightarrow{AB}|$. Вектор, модуль которого равен нулю, называется *нулевым*. Обозначение $\vec{\theta}$. Направление вектора $\vec{\theta}$ может выбираться произвольно.

Определение 4.2. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Из последнего определения следует, что любой вектор в пространстве (на плоскости) можно переносить параллельно самому себе в любую точку этого пространства (плоскости), т.е. вектора являются «свободными».

Рассмотрим *линейные операции* над векторами: сложение векторов и умножение вектора на число.

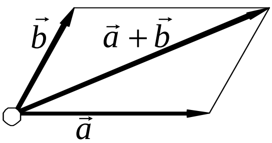


Рис. 4.3

Определение 4.3. *Суммой* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (правило треугольника, рис. 4.3).

Векторы можно также складывать по правилу параллелограмма: искомый вектор $\vec{a}+\vec{b}$ представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах (рис. 4.3). Легко проверить, что для сложения векторов справедливы свойства:

1) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$;
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Сумма нескольких векторов находится с помощью последовательного применения правила треугольника к каждой паре векторов до тех пор, пока в результате не останется один вектор. Например, для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ результирующий вектор $\vec{S}$ равен замыкающей OM пространственной ломаной линии, построенной на этих векторах (рис. 4.4).

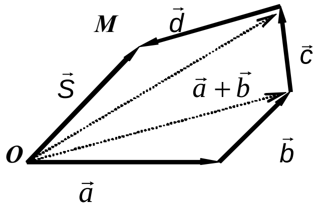


Рис. 4.4

Определение 4.4. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$, имеющий длину $\left|\vec{b}\right|=|\lambda|\left|\vec{a}\right|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если λ >0; противоположно вектору $\vec{a}$, если $\lambda<0$ (рис. 4.5).

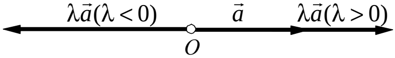


Рис. 4.5

При этом справедливы следующие свойства:

1) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

2) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

3) $1\cdot\vec{a}=\vec{a},\ 0\cdot\vec{a}=\vec{\theta}$,

здесь λ и μ – числа.

Для каждого вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ существует *противоположный* вектор $-\vec{a}=\overrightarrow{OB}$, имеющий ту же длину, но противоположное направление (рис. 4.6). Из определения 4.4 следует, что $-\vec{a}=(-1)\vec{a}$, тогда $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{\theta}$.

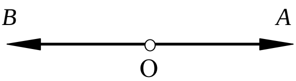


Рис. 4.6

Под *разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ (рис. 4.7).

Выражение вида

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n,$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – числа.

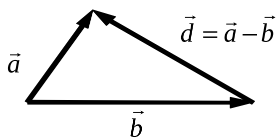


Рис. 4.7

4.2. КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ. БАЗИС В R^2 И R^3. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Определение 4.5. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если существует такое число λ (число μ), что выполняется равенство

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}\left(a=\mu\vec{b}\right). \tag{4.1}$$

По определению 4.4 коллинеарные векторы расположены на одной прямой или на параллельных прямых.

Теорема 4.1. Любой вектор плоскости единственным образом можно представить в виде линейной комбинации двух любых неколлинеарных векторов этой плоскости.

Доказательство. Приведём геометрическое доказательство теоремы. Рассмотрим на плоскости (рис. 4.8) два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и произвольный вектор $\vec{x}$. Поместим начала всех трёх векторов в одну точку *O*. На рисунке 4.8 приведена одна из возможных ситуаций взаимного расположения векторов. Построим параллелограмм, диагональю которого является вектор $\vec{x}$, со сторонами, параллельными прямым, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда по правилу параллелограмма

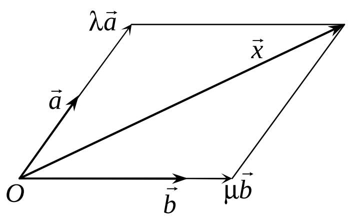


Рис. 4.8

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\ . \qquad (4.2)$$

Если вектор $\vec{x}$ коллинеарен одному из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$, то параллелограмм вырождается в отрезок, и одно из чисел λ или μ будет равно нулю.

Докажем единственность выражения (4.2). От противного: предположим, что существуют два других числа α и β, например, $\alpha \neq \lambda$, такие, что

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\ .$$

Вычтем из последнего равенства равенство (4.2), тогда по свойствам линейных операций

$$\vec{\theta} = (\alpha - \lambda)\vec{a} + (\beta - \mu)\vec{b} \Rightarrow (\alpha - \lambda)\vec{a} = (\mu - \beta)\vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\mu - \beta}{\alpha - \lambda}\vec{b}\ .$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ связаны равенством (4.1), т.е. коллинеарные, что противоречит условию теоремы. Следовательно, выражение (4.2) единственное.

Теорема доказана.

Определение 4.6. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются компланарными, если один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных, т.е. существуют такие числа λ и μ, что выполняется равенство

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\ . \qquad (4.3)$$

Из равенства (4.3) следует, что вектор $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\lambda\vec{a}$ и $\mu\vec{b}$, следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ лежат в одной плоскости. Итак, компланарные векторы лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях (так как векторы можно перемещать параллельно себе в пространстве).

Теорема 4.2. Любой вектор $\vec{x}$ пространства единственным образом можно представить в виде линейной комбинации трёх некомпланарных векторов, т.е.

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

где векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны; λ, μ, γ – числа.

Доказательство геометрически аналогично доказательству теоремы 4.1.

Определение 4.7. Любые два упорядоченных неколлинеарных вектора называются *базисом на плоскости*. Любые три упорядоченных некомпланарных вектора называются *базисом в пространстве*.

Плоскость и пространство будем обозначать R^2 и R^3, соответственно, по числу базисных векторов. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базис в пространстве R^3. Аналогично теореме 4.1, для любого вектора $\vec{x} \in R^3$ выполняется равенство

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3, \tag{4.4}$$

которое называется разложением вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Аналогичное разложение можно записать и для векторов плоскости R^2.

Определение 4.8. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в разложении вектора по базису называются *координатами* вектора в этом базисе.

Обозначение: $\vec{x} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Для дальнейшего изучения пространств R^2 и R^3 необходимо ввести в рассмотрение прямоугольный декартовый базис. Рассмотрим три упорядоченных вектора единичной длины (орта) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, попарно перпендикулярных и направленных так, что из конца третьего вектора ($\vec{k}$) кратчайший поворот от первого вектора ($\vec{i}$) ко второму вектору ($\vec{j}$) виден против часовой стрелки (рис. 4.9). Такая ориентация векторов называется *правой*. В противном случае (когда поворот по часовой стрелке) тройка векторов называется *лево ориентированной* (тройка $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – левая).

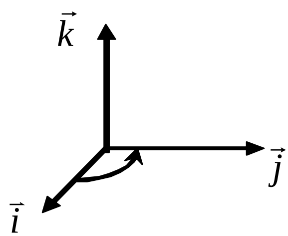


Рис. 4.9

Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – образуют базис в R^3. Этот базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ получил название *прямоугольного декартова базиса*. Базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ широко пользуются в геометрии и в теории любых прикладных векторных полей. В дальнейшем все преобразования с векторами будут, по умолчанию, производиться в прямоугольном декартовом базисе. На плоскости (в R^2) прямоугольный декартовый базис образует пара векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$.

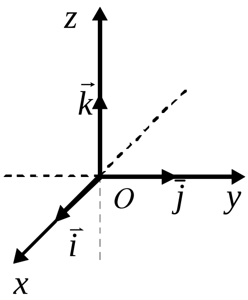


Рис. 4.10

Введём систему координат в пространстве R^3 следующим образом: перенесём начала векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в общую точку *O*, которая будет началом отсчёта (рис. 4.10); построим три оси O_x, O_y, O_z, начало отсчёта на которых точка *O* (начало координат), а направление и масштаб задают векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, соответственно. Получили *прямоугольную декартовую систему координат*.

Из условия коллинеарности вектора можно вывести формулы для деления отрезка в заданном отношении.

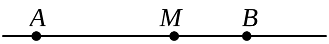


Рис. 4.11

Дано: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $M(x, y, z)$ лежат на одной прямой (рис. 4.11) и $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \lambda\left|\overrightarrow{MB}\right|$, $0 \le \lambda \le \infty$.

Тогда $\overrightarrow{AM} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$, $\overrightarrow{MB} = \{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\}$. Так как $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$,

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2, \\ y(1+\lambda) = y_1 + \lambda y_2, \\ z(1+\lambda) = z_1 + \lambda z_2, \end{cases}$$

откуда координаты точки

$$A\colon\ x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

4.3. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Из единственности разложения вектора по базису следует, что вектор задаётся своими координатами однозначно. Тогда для выполнения линейных операций над векторами не требуется проводить геометрических построений.

Рассмотрим два вектора в пространстве R^3:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}\ ,$$
$$\vec{b} = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}\ .$$

Сумма и произведение вектора на число в соответствии со свойствами этих операций равны:

$$\vec{a} + \vec{b} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} + \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k} =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1)\vec{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{j} + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{k};$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3) = (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\vec{e}_3.$$

Таким образом, координаты суммы векторов $\vec{a} + \vec{b}$ равны сумме соответствующих координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Координаты произведения вектора на число $\lambda\vec{a}$ равны произведениям координат вектора $\vec{a}$ на число λ.

Задача. Найти координаты вектора $\vec{a} = \{0,\ 0,\ 11\}$ в базисе $\vec{e}_1 = \{1,\ -2,\ 3\}$, $\vec{e}_2 = \{1,\ 0,\ 4\}$, $\vec{e}_3 = \{3,\ -2,\ 0\}$.

Решение. Если не оговорено иначе, то все векторы рассматриваются в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. Векторы $\vec{a},\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ заданы также в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. Для нахождения координат вектора $\vec{a}$ в другом базисе необходимо разложить вектор $\vec{a}$ по этому базису согласно формуле (4.4). Если векторы расписать в виде столбцов, то разложение по базису примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_{3.} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выполняем операции сложения векторов и умножения вектора на число в координатной форме, приравниваем соответствующие координаты у равных векторов, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 11. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Прямой ход:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right)\begin{matrix}\times 2\times(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 11 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \times(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 22 & -22 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ :22 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Обратный ход: $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0, \\ \lambda_2-9\lambda_3=11, \\ \lambda_3=-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=1, \\ \lambda_2=2, \\ \lambda_3=-1. \end{cases}$

Итак, разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3.$$

Ответ: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1$ – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Замечание 4.1. Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны. Действительно, запишем равенство (4.1) в координатной форме, располагая координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в виде столбцов:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta_1=\lambda\alpha_1,\ \beta_2=\lambda\alpha_2,\ \beta_3=\lambda\alpha_3,$$

число λ является коэффициентом пропорциональности.

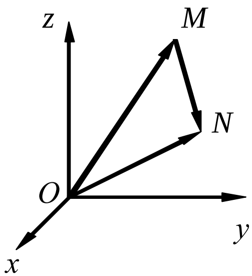


Рис. 4.12

Замечание 4.2. Любую точку M в пространстве R^3 можно задать *радиусом-вектором* $\overrightarrow{OM}$ (рис. 4.12), начало которого находится в начале координат, а конец – в точке M, и рассматривать координаты точки, как координаты радиуса-вектора. Тогда произвольный вектор $\overrightarrow{MN}$ можно представить как разность радиусов-векторов

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$$

(рис. 4.12). Если известны координаты конца $N(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и начала $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ вектора (такие же координаты имеют соответственно векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$), то по правилам линейных операций над векторами координатами вектора $\overrightarrow{MN}$ будут:

$$\overrightarrow{MN}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}.$$

Итак, чтобы найти координаты вектора, надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала.

Заключение

Получаем новое представление векторов – координатное. Это – или упорядоченная пара (на плоскости), или тройка (в пространстве) чисел. Такое представление существенно упрощает алгебраические операции над векторами, включая решение задач их взаимного расположения.

4.4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Уровень А

4.4.1. Даны векторы $\vec{a}=\{2,\ -3,\ 1\}$ и $\vec{b}=\{4,\ 6,\ -2\}$. Найти вектор $2\vec{a}+3\vec{b}$.

4.4.2. Даны точки *A* (3, –1, 2) и *B*(–1, 2, 1). Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.

4.4.3. В треугольнике ABC, где $A(-1,3,2)$, $B(3,3,-2)$, $C(5,0,-3)$, найти векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

Уровень В

4.4.4. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\alpha\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-6\vec{j}+\beta\vec{k}$ коллинеарны.

4.4.5. Найти модуль вектора $\vec{a}=\{6,\ 3,-2\}$.

4.4.6. Найти модули суммы и разности векторов $\vec{a}=\{3,\ -5,\ 8\}$ и $\vec{b}=\{-1,1,\ -4\}$.

4.4.7. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\{12,\ -15,\ -16\}$.

4.4.8. Даны $|\vec{a}|=11$; $|\vec{b}|=23$; $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. Найти $|\vec{a}+\vec{b}|$.

4.4.9. Проверить, что четыре точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ являются вершинами трапеции.

4.4.10. Разложить вектор $\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ по базису $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

4.4.11. В треугольнике ABC заданы вершины $A(1,\ 0,\ -1)$, $B(2,\ 2,\ 1)$ и точка $E(-1,\ 2,\ 1)$ пересечения медиан. Найти координаты точки C.

Уровень C

4.4.12. Разложить вектор $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по трём некомпланарным векторам $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{p}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

4.4.13. Доказать, что если $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ – медианы ΔABC, то $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

4.4.14. Доказать, что если M – точка пересечения медиан ΔABC, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

I. Учебные цели. Изучить понятие скалярного произведения векторов, его основные свойства и вычисление в координатной форме, условия ортогональности векторов, механический смысл скалярного произведения и основные типы задач, решаемых с помощью скалярного произведения векторов.

В результате изучения материала лекции студенты должны *знать* понятие скалярного произведения векторов, его основные свойства; *иметь представление* о решении основных типов задач, решаемых с помощью скалярного произведения.

II. Формирование компетенций. Формирование математической культуры, совершенствование общей культуры мышления, поддерживать творческую активность, привлекая студентов к обсуждению доказательств и выводу формул.

III. Учебные вопросы:

5.1. Проекция вектора на ось. Орт вектора.

5.2. Скалярное произведение векторов, его свойства.

5.3. Вычисление скалярного произведения в координатах. Основные типы задач.

5.4. Задание для самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Кроме линейных операций над векторами можно производить и другие действия, например, находить скалярное произведение двух векторов. Эти действия позволяют решать многие геометрические, механические, электродинамические и другие задачи теории векторных полей, а также прикладные графические задачи.

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на геометрический смысл скалярного произведения векторов, признак ортогональности векторов, так как в дальнейшем именно это понятие и признак будут применяться при изучении темы «Прямые и плоскости» для определения их взаимного расположения. Кроме того, необходимо обратить внимание на то, что основным базисом в теории векторной алгебры является прямоугольный декартовый базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. В этом базисе координаты вектора имеют простой геометрический смысл. Все операции над векторами в координатах будем выполнять в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Вопросы для контроля усвоения изложенного материала:

1. Сформулировать определение проекции вектора на ось.
2. В чём заключается разница между проекцией точки и проекцией вектора на ось?
3. Чему равна проекция вектора на ось?
4. Каковы линейные операции над проекциями вектора на ось?
5. Какой вектор называется ортом вектора?
6. Каков смысл направляющих косинусов?
7. Сформулировать определение скалярного произведения векторов?
8. Какие векторы называются ортогональными?
9. Каковы свойства скалярного произведения векторов?
10. Каков физический смысл скалярного произведения векторов?
11. Записать формулу вычисления скалярного произведения в координатах.
12. Сформулировать условие ортогональности векторов.

5.1. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. ОРТ ВЕКТОРА

Для дальнейшего изучения пространств R^2 и R^3 необходимо рассмотреть некоторые положения теории проекций. Под *осью* понимается прямая линия, на которой задано начало отсчёта, масштаб и положительное направление отсчёта.

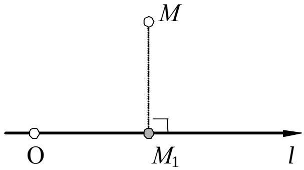


Рис. 5.1

Определение 5.1. *Проекцией точки* M на ось l называется точка M_1, которая является основанием перпендикуляра, проведённого из точки M на эту ось (см. рис. 5.1).

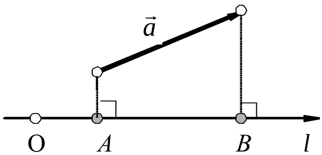


Рис. 5.2

Определение 5.2. *Проекцией вектора* $\vec{a}$ на ось l называется число, равное длине отрезка AB этой оси, заключённого между проекциями начала и конца вектора $\vec{a}$, взятое со знаком «+», если отрезок AB ориентирован (считая от A к B) в положительном направлении оси l и знаком «–» – в противном случае (см. рис. 5.2).

Обозначение: $\text{пр}_l\vec{a}$.

Теорема 5.1. Проекция вектора на ось равна произведению его модуля на косинус угла между вектором и положительным направлением оси (рис. 5.3):

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

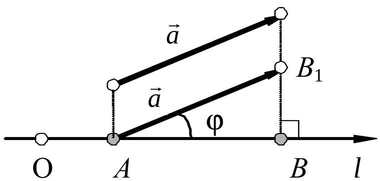


Рис. 5.3

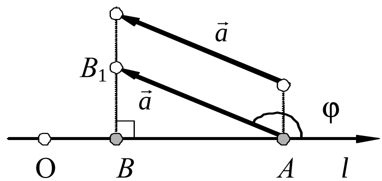


Рис. 5.4

Доказательство. Параллельно перенесём вектор $\vec{a}$ так, чтобы его начало оказалось на оси l. В случае, когда угол между вектором $\vec{a}$ и осью l острый, проекцией вектора на ось будет отрезок AB (рис. 5.3). Из ΔABB_1 получаем $AB = AB_1\cos\varphi = |\vec{a}|\cos\varphi$. Направление отрезка AB совпадает с положительным направлением оси l, поэтому справедливо равенство $\text{пр}_l\vec{a} = AB = |\vec{a}|\cos\varphi$. В случае противоположной ориентации (рис. 5.4) имеем $\text{пр}_l\vec{a} = -AB = AB_1\cos(\pi-\varphi) = |\vec{a}|\cos\varphi$. Теорема доказана.

Рассмотрим свойства проекций, отражающие линейные операции над ними.

Свойство 5.1. Проекция суммы двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на ось равна сумме их проекций на ту же ось, т.е. $\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b}$.

Доказательство в случае одного из возможных расположений векторов следует из рис. 5.5. Действительно, по определению 5.2

$$\text{пр}_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=AC=AB+BC=$$
$$=\text{пр}_l\vec{a}+\text{пр}_l\vec{b}.$$

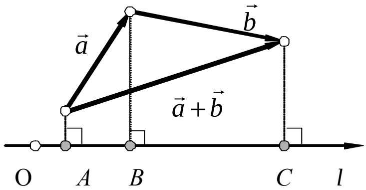


Рис. 5.5

Свойство 5.2. При умножении вектора на число λ его проекция умножается на это число

$$\text{пр}_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\text{пр}_l\vec{a}\ . \qquad (5.1)$$

Докажем равенство (5.1). При $\lambda>0$ векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ образуют с осью l один и тот же угол. По теореме 5.1

$$\text{пр}_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\left|\lambda\vec{a}\right|\cos\varphi=\lambda\left|\vec{a}\right|\cos\varphi=\lambda\text{пр}_l\vec{a}\ .$$

При $\lambda<0$ векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ образуют с осью l соответственно углы φ и $\varphi+\pi$. По теореме 5.1

$$\text{пр}_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\left|\lambda\vec{a}\right|\cos\left(\varphi+\pi\right)=\left|\lambda\right|\left|\vec{a}\right|\left(-\cos\varphi\right)=\lambda\vec{a}\cos\varphi=\lambda\text{пр}_l\vec{a}\ .$$

При $\lambda=0$ получаем очевидное равенство

$$\text{пр}_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\text{пр}_l\vec{\theta}=0=0\cdot\text{пр}_l\vec{a}\ .$$

Следствие из свойств 5.1 и 5.2. Проекция линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации проекций этих векторов, т.е.

$$\text{пр}_l\left(\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}\right)=\lambda_1\text{пр}_l\vec{a}+\lambda_2\text{пр}_l\vec{b}\ .$$

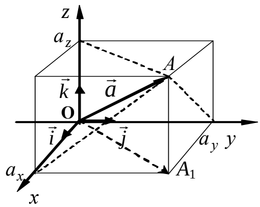


Рис. 5.6

Координаты вектора в прямоугольном декартовом базисе принимают простой геометрический смысл. Возьмём произвольный вектор $\vec{a}\in R^3$, начало которого совместим с началом координат. На рисунке 5.6 приведено одно из возможных расположений вектора $\vec{a}$ – в первом октанте. Построим параллелепипед, у которого три ребра лежат на осях координат, а диагональю является вектор $\vec{a}$. Тогда по правилу параллелограмма

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\text{пр}_{0z}\vec{a}\cdot\vec{k}\ ,$$

где A_1 – проекция точки A (конца вектора $\vec{a}$) на координатную плоскость Oxy. Вектор $\overrightarrow{OA_1}$ тоже можно разложить на сумму двух векторов по правилу параллелограмма:

$$\overrightarrow{OA_1}=\text{пр}_{0x}\vec{a}\cdot\vec{i}+\text{пр}_{0y}\vec{a}\cdot\vec{j}\ .$$

Разложение вектора $\vec{a}$ по прямоугольному декартову базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ примет вид

$$\vec{a} = \text{пр}_{0x}\vec{a} \cdot \vec{i} + \text{пр}_{0y}\vec{a} \cdot \vec{j} + \text{пр}_{0z}\vec{a} \cdot \vec{k}\ , \tag{5.2}$$

т.е. *координатами вектора являются его проекции на соответствующие координатные оси* (направления базисных векторов). Обозначим их a_x, a_y и a_z соответственно, тогда $\vec{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$. Если вектор $\vec{a}$ расположен в другом координатном октанте, то некоторые из его проекций, а следовательно, и координат, будут отрицательными.

Направление любого вектора определяется его ортом.

Определение 5.3. Единичным вектором или ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, который имеет одинаковое направление с вектором $\vec{a}$ и модуль, равный единице.

Очевидным является равенство

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\ . \tag{5.3}$$

Найдём координаты орта вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ из формул (5.2) и (5.3):

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\left(\text{пр}_{0x}\vec{a} \cdot \vec{i} + \text{пр}_{0y}\vec{a} \cdot \vec{j} + \text{пр}_{0z}\vec{a} \cdot \vec{k}\right) = \frac{\text{пр}_{0x}\vec{a}}{|\vec{a}|}\vec{i} + \frac{\text{пр}_{0y}\vec{a}}{|\vec{a}|}\vec{j} + \frac{\text{пр}_{0z}\vec{a}}{|\vec{a}|}\vec{k}\ .$$

Координатами вектора $\vec{a}^0$ являются коэффициенты при базисных векторах. По теореме 5.1 отношение проекции вектора на ось к модулю вектора равно косинусу угла между осью и вектором, т.е.

$$\frac{\text{пр}_{0x}\vec{a}}{|\vec{a}|} = \cos\alpha,\ \ \frac{\text{пр}_{0y}\vec{a}}{|\vec{a}|} = \cos\beta,\ \ \frac{\text{пр}_{0z}\vec{a}}{|\vec{a}|} = \cos\gamma\ ,$$

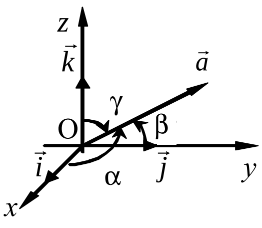


Рис. 5.7

где α, β, γ – углы между соответствующими осями координат и вектором $\vec{a}$ (рис. 5.7), косинусы этих углов называются *направляющими косинусами*. Таким образом, *координатами орта являются направляющие косинусы*

$$\vec{a}^0 = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\lambda\}.$$

5.2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ, ЕГО СВОЙСТВА

Определение 5.4. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a}\,\vec{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a}\,\vec{b} = \left(\vec{a},\, \vec{b}\right) = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi. \qquad (5.4)$$

Из определения 5.4 по теореме 5.1 следует (см. рис. 5.8)

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}\,. \qquad (5.5)$$

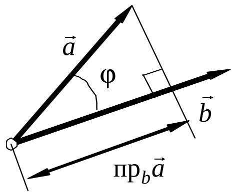


Рис. 5.8

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$;

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$;

3) $\left(\vec{a},\, \lambda\vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a},\, \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a},\, \vec{b}\right)$;

4) $\vec{a}\,\vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Доказательство свойств скалярного произведения.

1. Непосредственно из формулы (5.4) получаем

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = \left|\vec{b}\right||\vec{a}|\cos\varphi = \vec{b}\,\vec{a}\,.$$

2. Из формулы (5.5) и по свойствам проекций

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c} = \text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}\,.$$

3. Пусть $\lambda > 0$, тогда угол между векторами $\vec{a}$ и $\lambda\vec{b}$ такой же, как и между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. равен φ, тогда по определению 5.4

$$\left(\vec{a},\, \lambda\vec{b}\right) = |\vec{a}|\left|\lambda\vec{b}\right|\cos\varphi = \lambda|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = \left(\lambda\vec{a},\, \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a},\, \vec{b}\right).$$

Пусть $\lambda < 0$, тогда угол между векторами $\vec{a}$ и $\lambda\vec{b}$ равен $\varphi \pm \pi$, так как направление вектора $\lambda\vec{b}$ отличается на π от направления вектора $\vec{b}$ (противоположное к $\vec{b}$), тогда

$$\left(\vec{a},\, \lambda\vec{b}\right) = |\vec{a}|\left|\lambda\vec{b}\right|\cos(\varphi+\pi) = (-\lambda)|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|(-\cos\varphi) = \lambda|\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = \left(\lambda\vec{a},\, \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a},\, \vec{b}\right).$$

При $\lambda = 0$ свойство очевидно.

4. $\left(\vec{a},\, \vec{a}\right) = \vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2$.

5. *Признак ортогональности* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \perp \vec{b}$).

Теорема 5.2. Для того чтобы два ненулевых вектора были ортогональны (перпендикулярны), необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов равнялось нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Дано: $\vec{a} \perp \vec{b}$, следовательно, $\cos\varphi = 0$, где φ – угол между векторами. Тогда скалярное произведение

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0.$$

Достаточность. Дано: $\vec{a}\vec{b} = 0$. По определению скалярного произведения

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Из условия теоремы следует, что $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, следовательно, $\cos\varphi = 0$. Тогда $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ или $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$, поэтому векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. Теорема доказана.

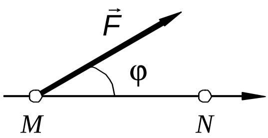


Рис. 5.9

Рассмотрим *механический смысл* скалярного произведения. Пусть материальная точка движется по прямой l, перемещаясь из точки M в точку N под действием силы $\vec{F}$ ($\vec{F}$ – вектор силы). Как известно из механики, работа A силы $\vec{F}$ будет равна (рис. 5.9)

$$A = |\vec{F}||\overrightarrow{MN}|\cos\varphi.$$

В правой части равенства, по определению 5.4, – скалярное произведение векторов $|\vec{F}|$ и $|\overrightarrow{MN}|$:

$$A = \vec{F}\,\overrightarrow{MN}.$$

Таким образом, работа, совершаемая при перемещении материальной точки под действием силы $\vec{F}$, равна скалярному произведению силы на вектор перемещения.

5.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КООРДИНАТАХ. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ

Найдём формулы вычисления скалярного произведения векторов, если векторы заданы координатами в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\};$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = \{b_x,\ b_y,\ b_z\}.$$

По свойствам скалярного произведения

$$\vec{a}\,\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = a_xb_x\vec{i}\,\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\,\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\,\vec{k} +$$
$$+ a_yb_x\vec{j}\,\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\,\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\,\vec{k} + a_zb_x\vec{k}\,\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\,\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\,\vec{k}.$$

Найдём скалярные произведения векторов прямоугольного декартового базиса по свойствам 4 и 5 скалярного произведения, учитывая, что они являются попарно ортогональными ортами:

$$\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1,\ \vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{i} = \vec{k}\,\vec{j} = 0.$$

Тогда окончательно

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z, \tag{5.6}$$

т.е. скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Используя формулу (5.6), запишем *признак ортогональности векторов в координатной форме*:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Пример. Доказать, что диагонали AC и BD четырёхугольника с вершинами $A(1, –2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(–4, 1, 1)$, $D(–5, –5, 3)$ взаимно перпендикулярны.

Решение. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ (рис. 5.10), вычитая из координат конца соответствующие координаты начала вектора:

$$\overrightarrow{AC} = \{–4 – 1, 1 + 2, 1 – 2\} = \{–5, 3, –1\};$$
$$\overrightarrow{BD} = \{–5 – 1, –5 – 4, 3 – 0\} = \{–6, –9, 3\}.$$

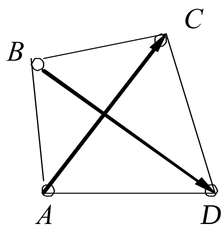


Рис. 5.10

По признаку ортогональности векторов

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD} = 0,$$

поэтому вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ по формуле (5.6):

$$\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD} = –5\cdot(–6) + 3\cdot(–9) – 1\cdot3 = 30 – 27 – 3 = 0,$$

следовательно, векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ ортогональны (взаимно перпендикулярны), что и требовалось доказать.

С помощью скалярного произведения можно находить различные геометрические характеристики векторов, т.е. решать следующие задачи.

1. Нахождение *модуля вектора*. Из свойства 4 скалярного произведения и формулы (5.6)

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ .$$

2. Нахождение *косинуса угла между векторами*. Из определения скалярного произведения и формулы (5.6)

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \ .$$

3. Нахождение *проекции вектора на вектор* (или вектора на ось, сонаправленную с ним). Из формул (5.5) и (5.6)

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \ .$$

4. Нахождение *координат орта*. Координатами орта являются направляющие косинусы: $\vec{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Учитывая геометрический смысл координат вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, имеем:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \ , \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \ ,$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \ .$$

Из формулы нахождения модуля вектора в координатах, учитывая, что $\vec{a}^0 = 1$, получаем *основное свойство направляющих косинусов*:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \, .$$

5. Нахождение *площади параллелограмма,* построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

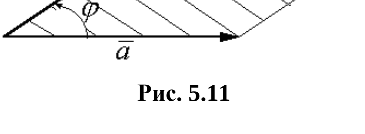


Рис. 5.11

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - \frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2}} \ ,$$

$$S_{\text{пар}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2} \ .$$

Заключение

На лекции рассмотрено скалярное произведение векторов, его основные свойства и вычисление в координатной форме. Изучены условия ортогональности векторов, механический смысл скалярного произведения и основные типы задач, решаемых с помощью скалярного произведения.

5.4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Уровень А

5.4.1. Если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°, то $\vec{a}\,\vec{b}$ равно:

1) $3\sqrt{3}$; 2) 3; 3) –3; 4) $-3\sqrt{3}$.

5.4.2. Если векторы $\vec{a}=\{-2,\,-4,\,1\}$ и $\vec{b}=\{-4,\,2,\,2\}$, то $\vec{a}\,\vec{b}$ равно:

1) 5; 2) 2; 3) 5; 4) 3.

5.4.3. Найдите значение α, при котом векторы $\vec{a}=\{3,\,2,\,-1\}$ и $\vec{b}=\{-2,\,\alpha,\,-2\}$ перпендикулярны.

5.4.4. Найдите угол между векторами $\vec{a}=\{2,\,3,\,-1\}$ и $\vec{b}=\{4,\,6,\,-2\}$.

Уровень В

5.4.5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ним углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ |\vec{c}|=8$, вычислить $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$.

5.4.6. Известно, что $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$ и $\vec{m}\perp\vec{n}$. Найти скалярное произведение векторов $3\vec{m}+2\vec{n}$ и $2\vec{m}-3\vec{n}$.

5.4.7. Известно, что $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$ и $\vec{m}\perp\vec{n}$. Найти длину вектора $3\vec{m}-2\vec{n}$.

5.4.8. Известно, что $|a| = 3$, $|b| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $a + \alpha b$, $a - \alpha b$ будут взаимно перпендикулярны.

5.4.9. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$ **.** Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

5.4.10. В вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2 и 3, направленные по диагоналям граней куба. Определить величину равнодействующей силы.

Уровень С

5.4.11. Известно, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ и $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Доказать, что:

а) среди векторов нет ни одной пары коллинеарных;

б) вычислить $A = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{c}$.

5.4.12. Раскрыть скобки и упростить выражение:
$(2\vec{i} - \vec{j})\vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k})\vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2$.

6. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

I. Учебные цели. Изучить основные понятия аналитической геометрии, уравнения прямой на плоскости, взаимное расположение прямых.

В результате изучения материала лекции студенты должны *иметь представление* об аналитической геометрии на плоскости и возможностях использования векторной алгебры в решении задач аналитической геометрии; *знать* формулы уравнений прямой на плоскости, исследовать взаимное расположение прямых.

II. Формирование компетенций. Формировать математическую культуру, развивать способность к обобщению и творческую активность студентов, требовательность к себе и другим, настойчивость, самообладание.

III. Учебные вопросы:

6.1. Уравнение линии на плоскости.

6.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

6.3. Общее и нормальное уравнения прямой.

6.4. Каноническое и параметрические уравнения прямой.

6.5. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

6.6. Задание для самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия обязана своим возникновением французским математикам Рене Декарту (1596 – 1650) и Пьеру Ферма (1601 – 1665). Объектом исследования аналитической геометрии являются линии на плоскости (в R^2) и линии и поверхности в пространстве (R^3).

Аналитическая геометрия – это раздел геометрии, в котором средствами алгебры исследуются геометрические объекты и их свойства. Наиболее активно при составлении уравнений геометрических объектов и решении задач используется векторная алгебра и так называемый метод координат. Каждому геометрическому соотношению этот метод ставит в соответствие некоторое уравнение, связывающее координаты фигуры или тела.

Две основные задачи аналитической геометрии:

1. Дан геометрический объект (линия или поверхность) как множество точек на плоскости или в пространстве. Составить уравнение этого объекта.

2. Дано некоторое уравнение линии или поверхности. Изучить по этому уравнению геометрические свойства (форму и расположение) данного объекта.

Вопросы для контроля усвоения изложенного материала:

1. В чём заключается метод координат?
2. Сформулируйте определение уравнения линии на плоскости.
3. Перечислите геометрические свойства прямой, однозначно определяющие её на плоскости.
4. Перечислите основные уравнения прямой на плоскости.
5. Каков геометрический смысл коэффициента при x в уравнении прямой с угловым коэффициентом?
6. Каков геометрический смысл чисел, стоящих в знаменателе в уравнении прямой в отрезках?
7. Каков смысл коэффициентов перед x и y в общем уравнении прямой?
8. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямых.
9. Сформулируйте и объясните принципы решения задач о расстоянии на плоскости.

6.1. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим уравнение основного геометрического объекта аналитической геометрии на плоскости (в R^2) – линии.

Предположим, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy. Уравнение линии можно получить, рассматривая линию как геометрическое место точек с координатами x и y.

Используя геометрические свойства окружности, выведем её уравнение. Окружностью является геометрическое место точек, равноудалённых от данной фиксированной точки, называемой центром. Дан центр $C(x_0, y_0)$, дано расстояние, на которое удалены точки окружности от центра, называемое радиусом – R. Составим уравнение окружности. Возьмём произвольную точку на окружности $M(x, y)$ (рис. 6.1) и рассмотрим вектор

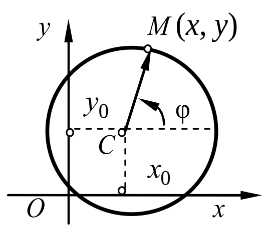


Рис. 6.1

$$\overrightarrow{CM} = \{x - x_0, y - y_0\},$$

длина которого равна радиусу R окружности, т.е.

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R \Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (6.1)$$

Получили уравнение окружности (6.1). Ему удовлетворяют координаты x и y всех точек, лежащих на окружности, и не удовлетворяют координаты других точек, так как для других расстояние до центра либо больше, либо меньше R.

Уравнение окружности с центром в начале координат имеет более простой вид, а именно

$$x^2+y^2=R^2.$$

Если точка $M(x, y)$ перемещается по линии, то её координаты x и y, изменяясь «все время», удовлетворяют уравнению этой кривой. Поэтому координаты произвольной точки $M(x, y)$ называются *текущими координатами*.

Определение 6.1. *Уравнением линии* на плоскости R^2 называется уравнение

$$F(x, y) = 0, \qquad (6.2)$$

которому удовлетворяют текущие координаты x и y точек линии и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой линии.

Если линию рассматривать как геометрическое место последовательных положений движущейся точки, т.е. как путь, пройденный материальной точкой, непрерывно движущейся по определённому закону, то получим другой способ задания уравнений линии: *параметрические уравнения линий*.

В этом случае текущие координаты x и y выражаются при помощи третьей вспомогательной переменной (параметра). При составлении уравнений окружности в качестве вспомогательной переменной возьмём угол между положительным направлением оси Ox и вектором $\overrightarrow{CM}(x-x_0,\ y-y_0)$. Выразим координаты вектора $\overrightarrow{CM}$ через параметр φ (рис. 6.1):

$$\begin{cases} x-x_0=R\cos\varphi, \\ y-y_0=R\sin\varphi \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=x_0+R\cos\varphi, \\ y=y_0+R\sin\varphi. \end{cases}$$

Получили параметрические уравнения окружности. Для того, чтобы точка $M(x, y)$ один раз обошла окружность, следует ограничить область изменения параметра полуинтервалом $0 \le \varphi < 2\pi$.

Параметрические уравнения окружности с центром в начале координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Чаще параметр обозначают буквой t. Переменная t представляет собой время, отсчитываемое от некоторого начального момента, и задание закона движения представляет собой задание координат x и y движущейся точки как некоторых непрерывных функций времени.

Вообще линию на плоскости задают параметрическими уравнениями вида:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{6.3}$$

где $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – произвольные функции, непрерывные на каком-нибудь конечном или бесконечном интервале Δ числовой оси.

Исключение из двух уравнений (6.3) параметра t приводит к уравнению вида (6.2). Для исключения параметра φ из параметрических уравнений окружности достаточно возвести в квадрат $x - x_0$ и $y - y_0$ и сложить. При этом получим уравнение (6.1).

Начнём изучение уравнений линий с линии первого порядка – прямой на плоскости. Прямая на плоскости является одним из основных понятий аналитической геометрии и задаётся уравнением первого порядка относительно неизвестных x и y. Из школьного курса геометрии известно, что прямая на плоскости однозначно определяется двумя точками, что обосновывает способ задания прямой двумя принадлежащими ей точками.

Кроме того, прямая на плоскости однозначно определена и может быть задана принадлежащей ей точкой и направляющим вектором, принадлежащей ей точкой и вектором, перпендикулярным к ней (нормальным вектором).

Отдельно можно выделить уравнения прямой на плоскости, имеющие явный геометрический смысл: уравнение прямой в отрезках; нормальное уравнение прямой; уравнение прямой с угловым коэффициентом.

6.2. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

При составлении уравнений линии будем исходить из геометрических свойств, определяющих её единственным образом.

Прямая однозначно определяется точкой и углом наклона.

Дано: φ – угол наклона прямой l к оси Ox и точка $M_0(x_0, y_0) \in l$.

Найти: уравнение прямой l.

Решение. Возьмём на прямой *l* точку $M(x, y)$ с текущими координатами. Из геометрических соображений (рис. 6.2) следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|MN|}{|M_0N|} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

где $|MN|$ и $|M_0N|$ – длины отрезков MN и M_0N соответственно.

Обозначим: $k = \operatorname{tg}\varphi$, параметр *k* будем называть *угловым коэффициентом*, получим

$$y - y_0 = k(x - x_0) \; –$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Если в уравнении раскрыть скобки и обозначить $b = y_0 - kx_0$, то получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y = kx + b\,. \tag{6.4}$$

Геометрический смысл параметра *b*: ордината (рис. 6.2) точки пересечения прямой *l* с осью *Oy* (*x* = 0 в уравнении (6.4)).

Пример 6.1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A*(2; 5) и имеющей угловой коэффициент $k = 3$.

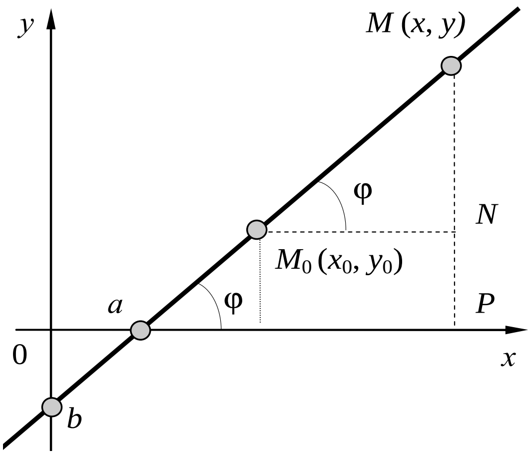


Рис. 6.2

Решение. Используем уравнение прямой с угловым коэффициентом *k*, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Подставим координаты точки A и значение углового коэффициента в уравнение:

$$y - 5 = 3 \cdot (x - 2),$$
$$3x - y - 1 = 0 \ -$$

уравнение искомой прямой.

Ответ: $3x - y - 1 = 0$.

6.3. ОБЩЕЕ И НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Прямая однозначно определяется точкой и нормальным вектором.

Вектор $\vec{N}$, перпендикулярный прямой (рис. 6.3), называется *нормальным*. Очевидно, что нормальных векторов данной прямой бесконечно много.

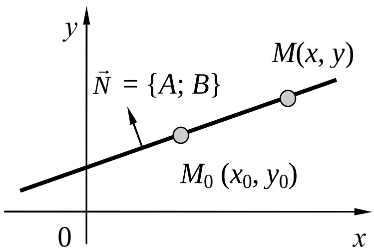


Рис. 6.3

Дано: $\vec{N} = \{A; B\}$ – нормальный вектор прямой *l*, точка $M_0(x_0, y_0) \in l$.

Найти: уравнение прямой *l*.

Решение. Возьмём на прямой *l* точку $M(x, y) \in l$ с текущими координатами (рис. 6.3). Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$. Векторы $\vec{N}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ ортогональны. Из условия ортогональности $\vec{N}\,\overrightarrow{M_0M} = 0$ (скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю) и правила вычисления скалярного произведения в координатах получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 - \tag{6.5}$$

уравнение прямой с нормальным вектором $\vec{N}$, *проходящей через данную точку* $M_0(x_0, y_0)$. Если в уравнении (6.5) раскрыть скобки и обозначить $C = -Ax_0 - By_0$, то получим *общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0. \tag{6.6}$$

В этом уравнении коэффициенты A и B являются координатами нормального вектора $\vec{N}$.

Пример 6.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\,-2)$ и перпендикулярной к вектору $\vec{N}=(3;\,1)$.

Решение: Используем уравнение прямой с нормальным вектором $\vec{N}$, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\,.$$

Подставим координаты нормального вектора и точки, лежащей на прямой, в уравнение:

$$3\cdot(x-1)+1\cdot(y+2)=0\,,$$
$$3x+y-1=0\ -$$

уравнение искомой прямой.

Ответ: $3x+y-1=0$.

Уравнение (6.6) – это уравнение вида (6.2), левая часть его является линейной функцией переменных x и y, т.е. многочленом первой степени, поэтому *прямая является алгебраической линией первого порядка*.

Если в уравнении (6.6) $C\neq 0$, перенесём слагаемое C в правую часть равенства и разделим обе части на «$-C$», получим:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ -$$

уравнение прямой в отрезках, где $a=-\dfrac{C}{A}$, $b=-\dfrac{C}{B}$. Геометрический смысл параметров a и b: абсцисса и ордината соответственно точек пересечения прямой с координатными осями Ox и Oy (рис. 6.2). При C = 0 прямая линия проходит через начало координат.

Задача. Вывести формулу для вычисления d – *расстояния от точки до прямой*.

Дано: прямая l: $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0,y_0)$.

Найти: расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой l (рис. 6.4).

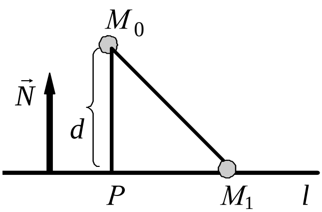


Рис. 6.4

Решение. Возьмём на прямой l точку $M_1(x_1,y_1)\in l$. Из общего уравнения прямой (6.6) находим вектор нормали $\vec{N}=\{A,B\}$. Расстояние $d=|M_0P|$ можно рассматривать как абсолютную величину проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1\}$ на направление нормали:

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{N}}\,\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Координаты точки $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяют уравнению прямой l, т.е. $Ax_1 + By_1 = -C$, поэтому

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Пример 6.3. Вычислить расстояние от точки $M(-1,\ 4)$ до прямой l: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{3}$.

Решение. Приведём уравнение прямой к общему виду

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3}\,,$$

$$3(x-3) = 2(y+2)\,,$$

$$3x - 2y - 13 = 0\ \ (l).$$

Используем формулу для нахождения расстояния от точки до прямой:

$$d(M,l) = \frac{\left|3\cdot(-1) - 2\cdot 4 - 13\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{24}{\sqrt{13}}\text{, ед.}$$

Ответ: $d(M,l) = \dfrac{24}{\sqrt{13}}$ ед.

В частности, расстояние от начала координат $O(0,\ 0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$ равно

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\,. \tag{6.7}$$

Если в качестве нормали прямой $Ax + By + C = 0$ взять орт

$$\vec{N}^0 = \pm\frac{1}{\left|\vec{N}\right|}\,\vec{N} = \pm\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\},$$

то общее уравнение (6.6) преобразуется к виду

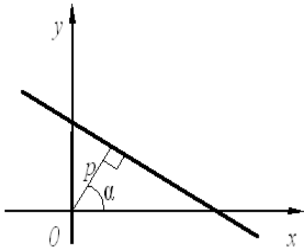


Рис. 6.5

$$\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)=0 . \tag{6.8}$$

Рассмотрим смысл коэффициентов уравнения. Координаты орта – направляющие косинусы вектора нормали, поэтому (рис. 6.5)

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\alpha ;$$

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha .$$

По формуле (6.7) расстояние от начала координат до прямой равно (рис. 6.5)

$$p=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} .$$

Выберем направление орта так, чтобы уравнение (6.8), учитывая геометрический смысл коэффициентов, можно было записать следующим образом:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 , \tag{6.9}$$

где $p>0$. Уравнение (6.9) называется *нормальным уравнением прямой*.

6.4. КАНОНИЧЕСКОЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

*Прямая однозначно определяется точкой и направляющим вектором***.**

Вектор $\vec{S}$, параллельный прямой (рис. 6.6), называется *направляющим*.

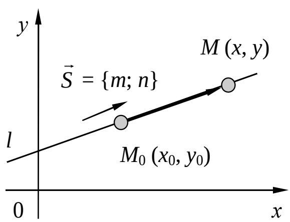


Рис. 6.6

Дано: $\vec{S}=\{m;n\}$ – направляющий вектор прямой *l* и точка $M_0(x_0,y_0)\in l$.

Найти: уравнение прямой *l*.

Решение. Возьмём на прямой *l* точку $M(x,y)\in l$ с текущими координатами (рис. 6.6). Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0)$. Из коллинеарности векторов: $\vec{S}\,||\,\overrightarrow{M_0M}$ следует пропорциональность их координат:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \quad - \tag{6.10}$$

каноническое уравнение прямой.

Возьмём в качестве параметра t коэффициент пропорциональности:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t\ .$$

Выразим из этих уравнений x и y, получим:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt \end{cases} -$$

параметрические уравнения прямой, уравнения вида (6.3), $t\in(-\infty;+\infty)$.

Прямая однозначно определяется двумя точками, лежащими на прямой.

Дано: $M_1(x_1,y_1)\in l,\ M_2(x_2,y_2)\in l$.

Найти: уравнение прямой l.

Решение. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ является направляющим вектором прямой l (рис. 6.7), его координаты:

$$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}.$$

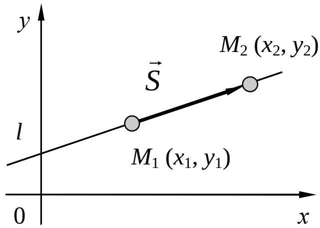


Рис. 6.7

Подставляем в каноническое уравнение (6.10), получаем

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad -$$

уравнение прямой, проходящей через две точки.

6.5. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

Пусть прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1:\quad y=k_1x+b_1\,,\quad l_2:\quad y=k_2x+b_2\,.$$

Угол φ – меньший угол между прямыми l_1 и l_2 (рис. 6.8), а φ_1 и φ_2 – соответствующие углы наклона прямых к оси Ox. Внешний угол φ_2 треугольника ABC равен сумме внутренних углов, не смежных с ним: $\varphi_2=\varphi_1+\varphi$, поэтому

$$\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\mathrm{tg}\varphi_2-\mathrm{tg}\varphi_1}{1+\mathrm{tg}\varphi_2\,\mathrm{tg}\varphi_1}\ .$$

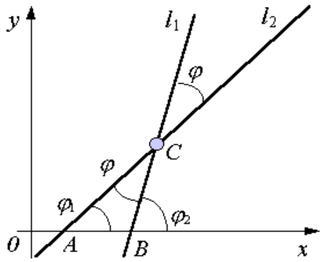


Рис. 6.8

Заменяя тангенсы углов угловыми коэффициентами k_1 и k_2, получаем

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \qquad (6.11)$$

Формула (6.11) определяет тангенс угла между двумя прямыми. Между прямыми l_1 и l_2 два угла: φ и $\pi - \varphi$. Если при вычислении по формуле (6.11) получили $\mathrm{tg}\,\varphi > 0$, то угол φ – меньший, $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, если $\mathrm{tg}\,\varphi < 0$, то $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Если $\varphi_2 = \varphi_1$, т.е. $l_1 \| l_2$, то

$$k_1 = k_2 -$$

условие параллельности прямых. Если $l_1 \perp l_2$, т.е. $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{tg}\,\varphi_2 = \mathrm{tg}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}\varphi_1$, следовательно, $\mathrm{tg}\varphi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 = -1$ или

$$k_1 k_2 = -1 - \qquad (6.12)$$

условие перпендикулярности прямых. При выполнении условия (6.12) формула (6.11) теряет смысл.

Если прямые заданы общими уравнениями:

$$l_1: \; A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \quad l_2: \; A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

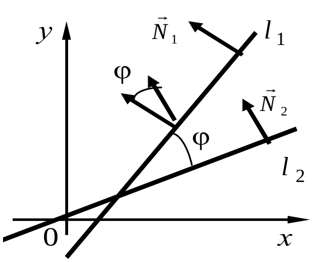


Рис. 6.9

то известны нормали этих прямых: $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2\}$. Угол между прямыми равен углу между их нормалями (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 6.9)). По формуле вычисления косинуса угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|}$$

получаем

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \; -$$

формулу для вычисления угла между прямыми.

По признаку ортогональности векторов их скалярное произведение равно нулю, поэтому *признак перпендикулярности прямых*

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0 .$$

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны, поэтому *признак параллельности прямых*

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} .$$

Если выполняются равенства:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} ,$$

то прямые l_1 и l_2 совпадают.

Заключение

На лекции рассмотрены основные понятия аналитической геометрии, рассмотрены уравнения прямой на плоскости, взаимное расположение прямых. Прямая на плоскости описывается алгебраическим уравнением первой степени и является алгебраической линией первого порядка. Использование векторной алгебры во многих случаях облегчает решение задач аналитической геометрии, вывод формул опирается на методы векторной алгебры. На следующей лекции будут рассмотрены кривые второго порядка на плоскости.

6.6. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Уровень А

6.6.1. Уравнением прямой, параллельной прямой $y = -\frac{2}{3}x + 2$, является

1) $2x - 3y + 5 = 0$; 2) $4x + 3y + 5 = 0$;

3) $2x + 3y + 2 = 0$; 4) $5x + 2y - 4 = 0$.

6.6.2. Уравнением прямой, перпендикулярной прямой $y = 3x + 2$, является:

1) $3x - y + 5 = 0$; 2) $2x + 3y - 3 = 0$; 3) $x + 3y + 2 = 0$; 4) $x - 3y - 7 = 0$.

6.6.3. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(-1; 1)$ и $B(2; 5)$;

б) проходящей через точку $A(2; -6)$ и параллельной вектору $\vec{p} = (1; -1)$;

в) отсекающей на осях координат отрезки $a = 3$, $b = -2$;

г) проходящей через точку $A(3; 5)$ и параллельной оси Ox;

д) проходящей через точку $A(2; 5)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 3$;

е) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол 120°;

ж) отсекающей от оси Oy отрезок $b = 2$ и имеющей угловой коэффициент $k = -3$;

з) проходящей через точку $A(-1; 3)$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (2; 1)$.

Уровень B

6.6.4. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно данной прямой.

6.6.5. Определить угол между прямыми $l_1 : 5x - y + 7 = 0$; $l_2 : 3x + 2y = 0$.

6.6.6. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.

6.6.7. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(4; -3)$, $B(-2; 6)$ и $C(5; 4)$.

6.6.8. Найти расстояние между прямыми $3x - 4y + 5 = 0$ и $3x - 4y - 10 = 0$.

Уровень C

6.6.9. При каких $k \in \boldsymbol{R}$ три прямые $kx - y - k = 0$, $2kx - y - 2k = 0$, $4kx - y - 4k = 0$ пересекаются в одной точке.

6.6.10. Прямая, параллельная прямой $3x + 4y - 12 = 0$, пересекает положительные полуоси координат, образуя треугольник площадью $S = 54$. Написать уравнение этой прямой.

6.6.11. Заданы уравнения двух сторон ромба $4x + 3y - 1 = 0$, $3x + 4y + 1 = 0$ и одна из его вершин $(-6; 6)$. Найти площадь S ромба.

7. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. Учебные цели. Изучить понятия, геометрические свойства и уравнения плоских кривых второго порядка.

В результате изучения материала лекции студенты должны *иметь представление* о геометрических объектах, определяемых алгебраическими уравнениями второй степени – кривых второго порядка; *знать* геометрические свойства и канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

II. Формирование компетенций. Формировать математическую культуру, развивать способность к обобщению и творческую активность студентов, требовательность к себе и другим, настойчивость, самообладание, воспитывать убежденность в необходимости изучения материала.

III. Учебные вопросы:

7.1. Эллипс и окружность: понятие, уравнение, форма.

7.2. Гипербола: понятие, уравнение, форма.

7.3. Парабола: понятие, уравнение, форма.

7.4. Эксцентриситет и директрисы эллипса и гиперболы.

7.5. Приведение общего уравнения кривой к каноническому виду.

7.6. Задание для самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

Геометрические объекты плоскость и прямая определяются алгебраическими уравнениями первой степени. Рассмотрим геометрические объекты, которые описываются алгебраическими уравнениями второй степени – кривые второго порядка на плоскости.

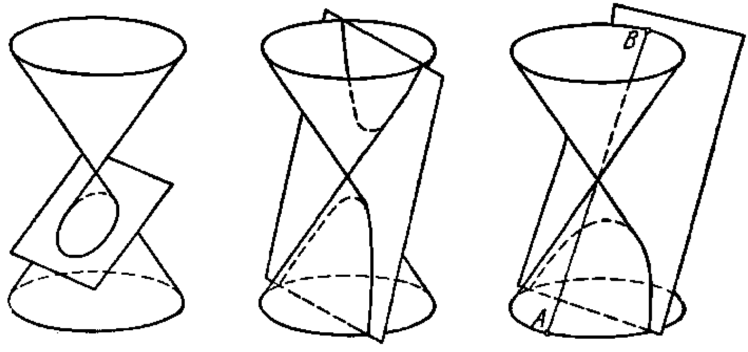


Рис. 7.1. Конические сечения:
а – эллипс; *б* – гипербола; *в* – парабола

Рассмотрим алгебраическое уравнение второй степени в общем виде:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,, \tag{7.1}$$

здесь *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* – некоторые постоянные (коэффициенты), $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Уравнения вида (7.1) определяют следующие геометрические объекты:

– точку (например, $x^2 + y^2 = 0$);

– прямые (например, $x^2 - y^2 = 0$);

– эллипс, гиперболу и параболу – кривые второго порядка.

Эллипс, гипербола и парабола представляют собой линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину (рис. 7.1). Если секущая плоскость пересекает все прямолинейные образующие одной полости конуса, то в сечении получается *эллипс*; если – образующие обеих полостей, то в сечении получается *гипербола;* если – параллельна одной из образующих конуса (рис. 7.1, *в*, образующая *AB*), то в сечении получается *парабола*.

Вопросы для контроля усвоения изложенного материала:

1. Сформулируйте определение плоской линии второго порядка.
2. Сформулируйте определение эллипса, перечислите его основные геометрические свойства, запишите каноническое уравнение.
3. Сформулируйте определение гиперболы, перечислите её основные геометрические свойства, запишите каноническое уравнение.
4. Сформулируйте определение параболы, перечислите её основные геометрические свойства, запишите каноническое уравнение.
5. Сформулируйте общее геометрическое свойство эллипса, гиперболы, параболы.

7.1. ЭЛЛИПС И ОКРУЖНОСТЬ: ПОНЯТИЕ, УРАВНЕНИЕ, ФОРМА

Определение 7.1. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Замечание. Если фокусы совпадают, то эллипс представляет собой *окружность*, центр которой находится в точке совпадения фокусов.

Составим уравнение эллипса. Обозначим: F_1, F_2 – *фокусы*; *M* – точка, лежащая на кривой; $2a$ – данная в определении 7.1 постоянная; $2c$ – расстояние между фокусами F_1 и F_2. По свойствам треугольника (треугольник F_1F_2M на рис. 7.2) сумма двух его сторон больше третьей стороны, поэтому $2a > 2c$. Для составления уравнения линии необходима система координат. Введём её следующим образом (рис. 7.2). Положительным направлением оси Ox будем считать направление от F_1 к F_2. Начало координат возьмём в середине отрезка F_1F_2. Тогда координаты точек F_1, F_2 и M будут соответственно $(-c, 0)$, $(c, 0)$, и (x, y). По определению имеем:

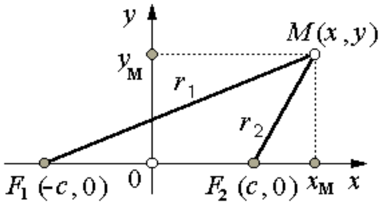


Рис. 7.2

$$|F_1M|+|F_2M|=2a \quad \text{или} \quad r_1+r_2=2a,$$

где r_1 и r_2 – *фокальные радиусы* (расстояния от текущей точки эллипса M до фокусов F_1 и F_2). Находим фокальные радиусы:

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \ r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{7.2}$$

Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{7.3}$$

Иррациональное уравнение (7.3) является уравнением эллипса. Найдём эквивалентное ему рациональное уравнение вида (7.1). Для этого перенесём в правую часть один радикал и возведём обе части полученного равенства в квадрат (лишние решения не появятся, так как обе части равенства положительны):

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \tag{7.4}$$

Возведём ещё раз обе части уравнения в квадрат и приведём подобные:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

или

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Введём в рассмотрение новую величину

$$b^2=a^2-c^2, \ b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

Параметр b можно ввести, так как $a > c$. Тогда уравнение эллипса примет вид

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 .$$

Поделив обе части равенства на его правую часть, получим *каноническое уравнение эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \tag{7.5}$$

При $c = 0$ имеем $a = b$, получаем уравнение окружности радиуса a:

$$x^2 + y^2 = a^2 . \tag{7.6}$$

Определим форму эллипса. Из уравнения (7.5) выразим переменную y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} .$$

Область изменения переменной x определяется неравенствами $-a \le x \le a$ (поэтому правая часть уравнения (7.4) положительна и при возведении в квадрат не были приобретены посторонние корни). При этом переменная y удовлетворяет неравенствам: $-b \le y \le b$, т.е. эллипс находится внутри прямоугольника со сторонами $x = -a$, $x = a$, $y = -b$, $y = b$. Уравнение (7.5) содержит только квадраты текущих координат x и y, поэтому оси координат являются осями симметрии, а начало координат – центром симметрии (*центр эллипса*), точки пересечения эллипса с осями симметрии называются *вершинами эллипса*.

Чтобы точнее представить себе форму эллипса, сопоставим его уравнение (7.5) ($a > b$) с уравнением окружности радиуса a и центром в начале координат (7.6). Возьмём на окружности и на эллипсе точки с одинаковыми абсциссами x и сравним их ординаты:

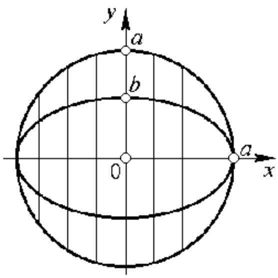


Рис. 7.3

$$y_{\text{эл}} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} ,$$

$$y_{\text{окр}} = \pm\sqrt{a^2 - x^2} ,$$

$$y_{\text{эл}} = \pm\frac{b}{a}y_{\text{окр}} \quad \left(\frac{b}{a} < 1\right),$$

т.е. эллипс можно рассматривать как сжатую окружность, в которой a и b – *большая и малая полуоси* эллипса (рис. 7.3).

7.2. ГИПЕРБОЛА: ПОНЯТИЕ, УРАВНЕНИЕ, ФОРМА

Определение 7.2. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Составим уравнение гиперболы. Обозначим: F_1, F_2 – *фокусы*; M – точка, лежащая на кривой; $2a$ – данная постоянная; $2c$ – расстояние между фокусами F_1 и F_2. По свойствам сторон треугольника (треугольник F_1F_2M на рис. 7.4) разность двух его сторон меньше третьей стороны, поэтому $2a < 2c$. Для составления уравнения линии введём систему координат (рис. 7.2) так же, как в п. 7.1 при выводе уравнения эллипса. По определению 7.2 имеем

$$|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a \quad \text{или} \quad r_1 - r_2 = \pm 2a.$$

Но
$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \; r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \; –$$

иррациональное уравнение гиперболы. Преобразуем это уравнение так, как это было сделано в случае эллипса. Получим

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).$$

Введём в рассмотрение новую величину

$$b^2 = c^2 - a^2, \; b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Такой параметр можно ввести, так как $a < c$. Уравнение гиперболы примет вид

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

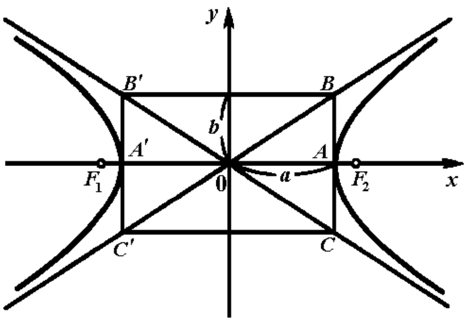


Рис. 7.4

Поделим обе части на a^2b^2, получим *каноническое уравнение гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (7.7)$$

Определим форму гиперболы. Так как текущие координаты x и y входят в уравнение гиперболы (7.7) во второй степени, то она симметрична относительно осей координат и начала координат (*центр гиперболы*). Гипербола пересекает ось Ox в точках $(–a, 0)$, $(a, 0)$ – *вершинах гиперболы*, с осью Oy гипербола не пересекается. Числа a и b называются *действительной* и *мнимой полуосями*.

Из уравнения гиперболы можно выразить

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Тогда область изменения x определяется неравенствами $x^2-a^2\ge 0$ или $x\in(-\infty;-a]\cup[a;+\infty)$, координата y принимает все действительные значения, следовательно, гипербола расположена левее прямой $x = –a$ и правее прямой $x = a$.

Найдём точки пересечения гиперболы с прямой линией $y = kx$ (проходящей через начало координат). При каких значениях k прямая пересекает гиперболу, т.е. система уравнений

$$\begin{cases} y=kx, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

имеет решение? Имеем:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{k^2x^2}{b^2}=1 \Rightarrow x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2k^2}}.$$

Значение x можно найти в случае, если $b^2-a^2k^2>0$, тогда $-\frac{b}{a}<k<\frac{b}{a}$. Таким образом, гипербола (рис. 7.4), пересекая ось Ox в точках $(–a, 0)$, $(a, 0)$, находится между прямыми $y=-\frac{b}{a}x$, $y=\frac{b}{a}x$, которые называются *асимптотами*.

Особенностью асимптот является то, что при увеличении x разность $y_{\text{ас}}-y$ стремится к нулю. Здесь y – ордината точки, лежащей на гиперболе; $y_{\text{ас}}$ – ордината точки, лежащей на асимптоте, т.е. гипербола сколь угодно близка к асимптоте при неограниченном удалении её точек от начала координат. В первой координатной четверти ($x \ge 0,\ y \ge 0$) это следует из равенств

$$y_{\text{ac}} - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} =$$

$$= \frac{b\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{c\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

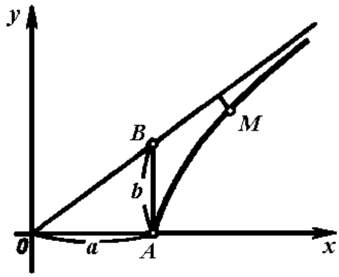


Рис. 7.5

Так как знаменатель последней дроби увеличивается при увеличении x, то $y_{\text{ac}} - y \to 0$. При этом $y_{\text{ac}} > y$ при всех $x \ge 0$ (рис. 7.5). В силу симметрии проводим аналогичные построения в других координатных четвертях. На рисунке 7.4 приведён чертёж гиперболы.

7.3. ПАРАБОЛА: ПОНЯТИЕ, УРАВНЕНИЕ, ФОРМА

Определение 7.3. *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Замечание. Предполагается, что фокус не принадлежит директрисе.

Для составления уравнения параболы введём систему координат. За ось Ox примем прямую, проходящую через *фокус* перпендикулярно *директрисе*. Положительным направлением будем считать направление от директрисы к фокусу. Начало координат выберем посередине между директрисой и фокусом (рис. 7.6). Обозначим расстояние от фокуса до директрисы p, p – *параметр*. Тогда координаты фокуса F будут $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$; координаты текущей точки M параболы обозначим $(x,\ y)$; *уравнение директрисы* будет

$$x = -\frac{p}{2}.$$

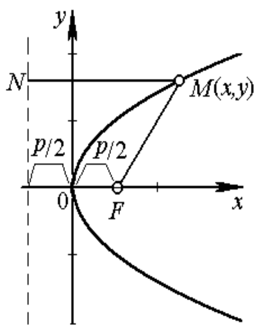


Рис. 7.6

По определению параболы имеем (рис. 7.6):

$$|NM| = |MF|,$$

где точка $N\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ есть основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. По построению

$$|NM| = x + \frac{p}{2}, \quad |MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Возводя обе части равенства в квадрат, получим

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2.$$

Раскрывая скобки, находим *каноническое уравнение параболы*

$$y^2 = 2px. \tag{7.8}$$

Парабола, описываемая уравнением (7.8), имеет ось симметрии Ox, которую называют *осью параболы*. Точка $O(0, 0)$ пересечения параболы с осью называется *вершиной* параболы.

В зависимости от положения параболы на плоскости, её каноническое уравнение принимает разный вид: $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$.

Форма параболы известна из курса средней школы, где она изучалась в качестве графика квадратичной функции $y = x^2$.

7.4. ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ И ДИРЕКТРИСЫ ЭЛЛИПСА И ГИПЕРБОЛЫ

По определению эллипса имеем: $r_1 + r_2 = 2a$. Из формул (7.2) получаем $r_1^2 - r_2^2 = 4xc$. Решим полученную систему относительно неизвестных r_1 и r_2:

$$\begin{cases} r_1^2 - r_2^2 = 4cx, \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx, \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x, \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r_1 = 2a + 2\frac{c}{a}x, \\ 2r_2 = 2a - 2\frac{c}{a}x. \end{cases}$$

Итак, фокальные радиусы равны:

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x\,,\ r_2 = a - \frac{c}{a}x\,.$$

Величину

$$\frac{c}{a} = \varepsilon \tag{7.9}$$

называют *эксцентриситетом*. Выразим фокальные радиусы эллипса через эксцентриситет:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x\,.$$

Для гиперболы имеем: для правой ветви $r_1 - r_2 = 2a$, для левой ветви $r_2 - r_1 = 2a$. Так же как и для эллипса, получим $r_1^2 - r_2^2 = 4xc$. Аналогично решением двух систем являются:

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x, \\ r_2 = -a + \varepsilon x; \end{cases} \text{(правая ветвь)}; \quad \begin{cases} r_1 = -a - \varepsilon x, \\ r_2 = a - \varepsilon x; \end{cases} \text{(левая ветвь).}$$

Выясним геометрический смысл эксцентриситета. Рассмотрим прямую $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ (рис. 7.7) и найдём отношение расстояний r_2 (от точки $M(x, y)$ эллипса до правого фокуса F_2) и d_2 (от точки $M(x, y)$ до прямой $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$):

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{a/\varepsilon - x} = \varepsilon\,.$$

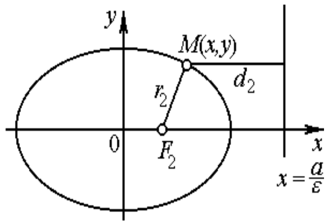


Рис. 7.7

Легко убедиться, что в силу симметрии эллипса таким же свойством обладает прямая $x = -a/\varepsilon$ для левого фокуса эллипса.

Определение 7.4. Две прямые, перпендикулярные фокальной оси эллипса и отстоящие на расстоянии a/ε от его центра, называются *директрисами*.

Уравнения директрис для эллипса, заданного уравнением (7.5),

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}\,.$$

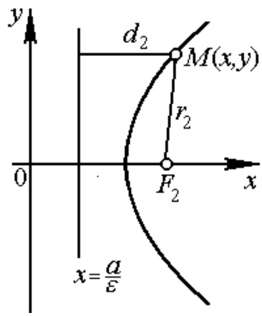


Рис. 7.8

Геометрический смысл эксцентриситета: отношение расстояния от точки эллипса до фокуса к расстоянию от этой точки до ближайшей к данному фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Для гиперболы директрисы обладают таким же свойством. Например, для правого фокуса (рис. 7.8)

$$\frac{r_2}{d_2}=\frac{-a+\varepsilon x}{x-\dfrac{a}{\varepsilon}}=\varepsilon .$$

Таким образом, для эллипса, гиперболы и параболы справедливо *общее геометрическое свойство*: отношение расстояний любой точки кривой до данной точки (фокуса) и до данной прямой (ближайшей к фокусу директрисы) есть величина постоянная, равная эксцентриситету ε, причём

ε < 1 – для эллипса,

ε = 1 – для параболы,

ε > 1 – для гиперболы.

Это свойство отражает общую характеристику конического сечения, показывающую степень его отклонения от окружности.

7.5. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

У кривых, определяемых уравнениями (7.5), (7.7) и (7.8), осями симметрии являются оси координат, центры эллипса и гиперболы, вершина параболы расположены в начале координат. При другом расположении кривых второго порядка уравнение уже не будет иметь канонический вид.

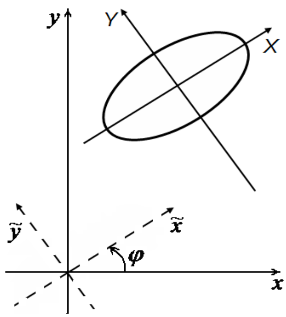


Рис. 7.9

Для определения формы и расположения кривой общее уравнение (7.1) приводится к каноническому виду: выбирается специальная система координат, при переходе к которой общее уравнение становится простейшим (каноническим). С геометрической точки зрения происходит поворот осей исходной системы координат на некоторый угол φ (переход к координатам $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$) и параллельный перенос повёрнутой системы координат в некоторую точку – переход к новым координатам X и Y (рис. 7.9).

Пусть в общем уравнении линии второго порядка (7.1)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$B \neq 0$. Легко видеть из рис. 7.10, что при повороте осей координат на угол φ старые координаты x и y связаны с новыми $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ формулами:

$$x = \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi,$$
$$y = \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi.$$

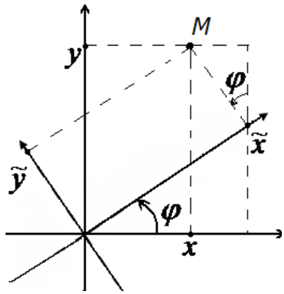


Рис. 7.10

В новых координатах уравнение (7.1) будет иметь вид

$$A(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)^2 + 2B(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi) +$$
$$+ C(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi)^2 + 2D(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi) + 2E(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi) + F = 0\,.$$

Раскрывая скобки и приведя подобные, получим уравнение данной линии в новой системе координат:

$$\tilde{A}\tilde{x}^2 + 2\tilde{B}\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{C}\tilde{y}^2 + 2\tilde{D}\tilde{x} + 2\tilde{E}\tilde{y} + F = 0\,, \tag{7.10}$$

где

$$\tilde{A} = A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi,$$
$$\tilde{B} = (C - A)\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \text{ и т.д.}$$

Выберем угол φ так, чтобы $\tilde{B} = 0$:

$$(C - A)\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0\,,$$
$$2B\cos 2\varphi = (A - C)\sin 2\varphi\,.$$

Из последнего уравнения видно, что $2\varphi \neq 0$, иначе $B = 0$. Отсюда

$$\operatorname{ctg}2\varphi = \frac{A - C}{2B}\,. \tag{7.11}$$

По формулам тригонометрии

$$\cos 2\varphi = \frac{\operatorname{ctg}2\varphi}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\varphi}}, \quad \sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}, \quad \cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}$$

находим угол φ, на который нужно повернуть оси координат. Знаки $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ выбираются произвольно.

В уравнении (7.10) при $\tilde{B}=0$ выделим полный квадрат по переменным $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, если $\tilde{A}\neq 0$ и $\tilde{C}\neq 0$, получим:

$$\tilde{A}\left(\tilde{x}^2+2\frac{\tilde{D}}{\tilde{A}}\tilde{x}+\frac{\tilde{D}^2}{\tilde{A}^2}\right)+\tilde{C}\left(\tilde{y}^2+2\frac{\tilde{E}}{\tilde{C}}\tilde{y}+\frac{\tilde{E}^2}{\tilde{C}^2}\right)=-F+\frac{\tilde{D}^2}{\tilde{A}}+\frac{\tilde{E}^2}{\tilde{C}}.$$

Обозначим $X=\tilde{x}+\frac{\tilde{D}}{\tilde{A}}$, $Y=\tilde{y}+\frac{\tilde{E}}{\tilde{C}}$, т.е. перенесём начало координат в точку $\left(-\frac{\tilde{D}}{\tilde{A}};\ -\frac{\tilde{E}}{\tilde{C}}\right)$, $\tilde{H}=-F+\frac{\tilde{D}^2}{\tilde{A}}+\frac{\tilde{E}^2}{\tilde{C}}$. Получим простейшее уравнение кривой второго порядка

$$\tilde{A}X^2+\tilde{C}Y^2=\tilde{H},$$

которое, в зависимости от коэффициентов $\tilde{A}, \tilde{C}$ и $\tilde{H}$, может быть уравнением эллипса или гиперболы.

Если же $\tilde{A}=0$ или $\tilde{C}=0$, то аналогичными преобразованиями получаем каноническое уравнение параболы, выделяя полный квадрат по одной из соответствующих переменных и вынося за скобку коэффициент перед второй переменной, группируя её со свободным членом F.

Пример. Определить тип кривой второго порядка

$$4x^2-y^2+8x+4y=4,$$

найти её каноническое уравнение и построить эту кривую.

Решение. В уравнении отсутствует произведение переменных, поэтому задача решается проще. Выделим в уравнении кривой полные квадраты

$$4x^2+8x+4-(y^2-4y+4)=4$$

и приведём его к каноническому виду

$$\frac{(x+1)^2}{1}-\frac{(y-2)^2}{4}=1.$$

Это уравнение определяет гиперболу с центром в точке (–1; 2), действительная ось которой параллельна оси Ox, а мнимая – оси Oy. Построим линию (рис. 7.11): отметим центр C(–1; 2), построим прямоугольник со сторонами $2a$ (a = 1) и $2b$ (b = 2), у которого C является центром, проведём диагонали прямоугольника (асимптоты гиперболы) и впишем гиперболу.

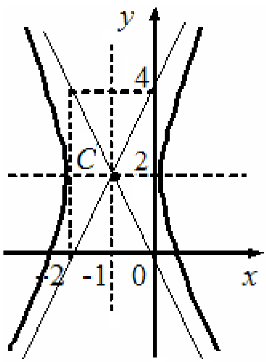


Рис. 7.11

Заключение

На лекции рассмотрено общее уравнение кривой второго порядка и его частные случаи, выведены канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы, а также изучены особенности форм этих кривых. Получено общее геометрическое свойство кривых второго порядка, связанное с понятием эксцентриситета.

7.6. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Уровень А

7.6.1. Составить уравнение окружности, если:

1) центр окружности совпадает с началом координат и радиус $R = 3$;
2) центр окружности совпадает с точкой $C(2, -3)$ и радиус $R = 7$.

7.6.2. Задано уравнение кривой второго порядка $x^2+y^2-2x+4y-20=0$. Определите, к какому из типов относится эта кривая:

1) окружность; 2) эллипс; 3) гипербола; 4) парабола.

7.6.3. Дано уравнение гиперболы $16x^2-9y^2=144$, определите координаты её фокусов.

7.6.4. Дано уравнение параболы $y^2=-28x$. Определите координаты её фокуса.

7.6.5. Определите полуоси a и b эллипса $25x^2+9y^2=1$.

7.6.6. Определите координаты вершины параболы $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$.

7.6.7. Найдите уравнения директрис гиперболы $16x^2-9y^2=-144$.

7.6.8. Определите координаты центра C и радиус R сферы $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$.

7.6.9. Составить уравнение параболы (изобразить схематично), вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и её параметр $p=3$;

б) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и её параметр $p=3$.

Уровень B

7.6.10. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y=15+\sqrt{64-x^2}$; 2) $y=+\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; 3) $x=-\dfrac{4}{3}\sqrt{y^2+9}$; 4) $x=+4\sqrt{-y}$.

7.6.11. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между фокусами $2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 3/5$.

7.6.12. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично началу координат, зная, кроме того, что его малая ось равна 16, а эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$.

7.6.13. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{2}$.

7.6.14. Фокус кривой второго порядка находится в точке $F(3;\ 0)$, директрисой, соответствующей этому фокусу, является прямая $x = 12$. Определить вид линии и составить её уравнение, зная, что она проходит через точку $A(7;\ 3)$.

7.6.15. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $16x^2+25y^2-400=0$.

7.6.16. Найти вершину, фокус и директрису параболы $y=-2x^2+8x-5$, построить эскиз графика.

Уровень C

7.6.17. Написать уравнение кривой второго порядка, разность квадратов расстояний от точек которой до точек $M_1(-a,\ 0)$ и $M_2(a,\ 0)$ постоянна и равна c.

7.6.18. Найти уравнения касательных, общих для кривых $y^2=4x$ и $x^2+4y^2=8$.

7.6.19. Написать уравнения касательных к гиперболе $4x^2-y^2=4$, проведённых из точки (1; 4).

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Матрицы. Основные понятия.
2. Определители 2-го порядка и 3-го порядка, их свойства.
3. Вычисление определителей разложением по строке (столбцу). Определители n-го порядка.
4. Линейные операции над матрицами. Транспонирование.
5. Умножение матриц. Степень матрицы.
6. Обратная матрица.
7. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы.
8. Системы m уравнений с n неизвестными.
9. Метод решения систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.
10. Метод Гаусса.
11. Векторы, линейные операции над векторами.
12. Коллинеарные векторы. Базис в R^2 и R^3. Координаты вектора.
13. Операции над векторами в координатной форме.
14. Проекция вектора на ось. Орт вектора.
15. Скалярное произведение векторов, его свойства.
16. Вычисление скалярного произведения в координатах. Основные типы задач.
17. Уравнение линии на плоскости.
18. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
19. Общее и нормальное уравнения прямой.
20. Каноническое и параметрические уравнения прямой.
21. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
22. Эллипс и окружность: понятие, уравнение, форма.
23. Гипербола: понятие, уравнение, форма.
24. Парабола: понятие, уравнение, форма.
25. Эксцентриситет и директрисы эллипса и гиперболы.
26. Приведение общего уравнения кривой к каноническому виду.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

1.4.1. а) –7; б) $5a - 2b$. **1.4.2.** 1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 1. **1.4.3.** $\alpha = 3$. **1.4.4.** 1. **1.4.5.** 0. **1.4.6.** Указание. Использовать теорему о разложении определителя. **1.4.7.** $A_{11} = 46$, $A_{12} = -10$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -5$, $A_{22} = 20$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -15$, $A_{32} = -27$, $A_{33} = 6$. **1.4.8.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$. **1.4.9.** $2\lambda^3$. **1.4.10.** –6. **1.4.11.** 35. **1.4.13.** 0. **1.4.14.** $x \in (-\infty; -0{,}5) \cup (0; 1)$. Указание. Вынести x из 3-го столбца за знак определителя. **2.5.1.** 4. **2.5.2.** 2. **2.5.3.** $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ 4 & 2 & -8 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

2.5.4. $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$. **2.5.5.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. **2.5.6.** А – 2; Б – 4; В – 1; Г – 3. **2.5.7.** $\begin{pmatrix} -8 & 0 & -6 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **2.5.8.** $\begin{pmatrix} 12 & -15 & 10 \\ 1 & 0 & -49 \\ 6 & -7 & -61 \end{pmatrix}$. **2.5.9.** 2. **2.5.10.** 4. **2.5.11.** 3. **2.5.12.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3{,}5 \\ 1 & 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$. **2.5.13.** а) $X = A^{-1}(B+E)^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Указание. Записать $AX = AXE$; б) $X = (-3\ \ -1)^T$. Указание. Сначала определить размеры матрицы *X*. **2.5.14.** $\begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{99} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$. **3.4.1.** 1. **3.4.2.** 3. **3.4.3.** А – 2, Б – 4, В – 1, Г – 3. **3.4.4.** –2. **3.4.5.** $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. **3.4.6.** а) $(2, 1, 2)$; б) $(z,\ 3z,\ z \in R)$. **3.4.7.** При $a = \dfrac{1}{2}$ множество решений: $y = 4z - 5,\ x = 4 - 3z,\ z \in R$. Заданное решение одно из этого множества при $z = 1$. **3.4.8.** $a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = -2$. **4.4.1.** $\{16, 12, -4\}$. **4.4.2.** $\overrightarrow{AB} = \{-4, 3, -1\}$, $\overrightarrow{BA} = \{4, -3, 1\}$ $\{4, -3, 1\}$. **4.4.3.** $\overrightarrow{AB} = \{4, 0, -4\}$, $\overrightarrow{AC} = \{6, -3, -5\}$, $\overrightarrow{BC} = \{2, -3, -1\}$. **4.4.4.** $\alpha = -4$, $\beta = \dfrac{3}{2}$. **4.4.5.** 7. **4.4.6.** 6; 4. **4.4.6.** $\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$, $\cos\beta = -\dfrac{15}{25}$, $\cos\gamma = -\dfrac{16}{25}$. **4.4.8.** 20. **4.4.10.** $\vec{d} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. **4.4.12.** $\dfrac{2}{5}\vec{m} + \dfrac{3}{5}\vec{n} + \dfrac{3}{5}\vec{p}$. **4.4.13.** Указание. Выразить медианы через векторы, совпадающие с двумя из сторон ΔABC. **4.4.14.** Указание. Использовать свойство медиан треугольника в точке их пересечения и указание к 4.5.13. **5.4.1.** 1. **5.4.2.** 2. **5.4.3.** 2. **5.4.4.** 0. **5.4.5.** –17. **5.4.6.** 0. **5.4.7.** $\sqrt{13}$. **5.4.8.** $\pm\dfrac{3}{5}$. **5.4.9.** $-\dfrac{52}{13}$. **5.4.10.** 5. **5.4.11.** а) указание. Утверждение доказать методом от противного; б) использовать, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ совпадают со сторонами правильного треугольника, или найти $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2$. **5.4.12.** 2. **6.6.1.** 3. **6.6.2.** 3. **6.6.4.** 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$. **6.6.5.** $\dfrac{\pi}{4}$. **6.6.6.** $(-12,\ 5)$. **6.6.7.** $5{,}1\sqrt{2}$. **6.6.8.** 2,5. **6.6.9.** $k \neq 0$. Указание. Найти *k* из условия, что система уравнений имеет единственное решение. **6.6.10.** $3x + 4y - 36 = 0$.

6.6.11. $S = 7$ кв. ед. Указание. Найти координаты двух других вершин ромба, используя свойства диагоналей. Или найти острый угол ромба и длину его высоты. **7.6.1.** 1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$. **7.6.2.** 1. **7.6.3.** $F_1(-5,\ 0)$, $F_2(5,\ 0)$. **7.6.4.** $F(-7,\ 0)$. **7.6.5.** $a = \frac{1}{5},\ b = \frac{1}{3}$. **7.6.6.** $A(-2,\ 1)$. **7.6.7.** $y = \pm\frac{16}{5}$. **7.6.8.** $C(0,\ 0,\ 3)$, $R = 4$. **7.6.9**. а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = -6y$. **7.6.10.** 1) окружность; 2) эллипс; 3) гипербола; 4) парабола. **7.6.11.** $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$. **7.6.12.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$. **7.6.13.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. **7.6.14.** $y^2 + 18x - 135 = 0$. **7.6.15.** $a = 5,\ b = 4$, $F_1(-3,\ 0), F_2(3,\ 0)$, $\varepsilon = 0{,}6$, $x = \pm\frac{25}{3}$. **5.6.16.** $(2,\ 3)$, $F(2,\ 2\frac{7}{8})$, $y = 3\frac{1}{8}$. **7.6.17.** $c \pm 4ax = 0$. Указание. Пусть имеется некоторая кривая Г, удовлетворяющая условию задачи $M(x,\ y) \in$ Г. Начертим чертёж задачи (рис. 1). По условиям задачи $r_1^2 - r_2^2 = c$.

Подставляем сюда значения r_1 и r_2.

$r_1^2 (a+x)^2 + y^2$, $r_2^2 (a-x)^2 + y^2$.

С учётом значений r_1 и r_2 получаем

$(a+x)^2 + y^2 - (a-x)^2 + y^2 = c$.

Сокращаем y и раскрываем скобки

$a^2 + 2ax + x^2 - a^2 + 2ax - x^2 = c$.

Сокращаем x, приводим подобные и получаем

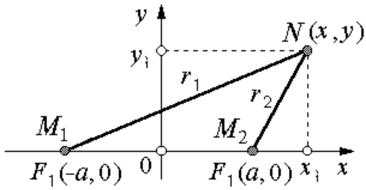


Рис. 1.

$$4ax = c.$$

Поскольку записанное нами соотношение будет выполняться как выше, так и ниже оси ординат, то перед величиной $4ax$ поставим знак (±). В результате окончательно получаем $c \pm 4ax = 0$. **7.6.18.** $x \pm 2y + 4 = 0$. Указание. Исключить одну переменную, например y, из системы уравнений, задающих кривую и прямую, и исследовать полученное квадратное уравнение. Использовать условия касания эллипса и прямой, параболы и прямой. **7.6.19.** $x = 1$, $5x - 2y + 3 = 0$. Указания. Исключить одну переменную, например y, из системы уравнений, задающих кривую и прямую, и исследовать полученное квадратное уравнение. Использовать условия касания гиперболы и прямой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учебник / Д.В. Беклемишев. – 2-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2009. – 312 с. – URL : http://e.lanbook.com/.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д.В. Клетеник. – 17-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2011. – 224 с. – URL : http://e.lanbook.com/.
3. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин и др. – 7-е изд.– М. : Айрис-пресс, 2008. – 576 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. / Д.Т. Письменный. – 5-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2006. – Ч. 1 – 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПУЧКОВ Николай Петрович,
ЖУКОВСКАЯ Татьяна Владимировна,
МОЛОКАНОВА Елена Анатольевна,
ПАРФЁНОВА Ирина Анатольевна,
ПОПОВ Андрей Иванович

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОРАЗВИТИЯ БАКАЛАВРА

Часть 1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинкина
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 11.12.2012
Формат 60×84 /16. 5,58 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 619

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14