

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

В.А. ВАНИН, А.Н. КОЛОДИН, В.Г. ОДНОЛЬКО

РАСЧЁТ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИВОДОВ МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКОВ

Рекомендовано Учёным советом университета
в качестве учебного пособия для студентов всех форм обучения,
направления подготовки бакалавров
151900.62 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств» и 150700.62 «Машиностроение»,
специалистов 151001.65 «Технология машиностроения» и
магистров 151900.68 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»



Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2012

УДК 621(075.8)
ББК К63-52-041я73
В172

Рецензенты:

Начальник КБ редукторов и специальных приводов
ЗАО «Тамбовполимермаш», член Российской ассоциации
инженеров механических трансмиссий
К.С. Козлов

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория машин,
механизмов и детали машин» ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
Ю.В. Родионов

Ванин, В.А.

В172 Расчёт и исследование динамических характеристик приводов металлорежущих станков : учеб. пособие / В.А. Ванин, А.Н. Колодин, В.Г. Однолько. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 120 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1103-9.

Учебное пособие включает в себя элементы общей динамики и теории колебаний, методику разработки модели динамических систем приводов главного движения станков и других динамических систем станков, методы определения динамических характеристик станков и их общий анализ.

Предназначено для студентов всех форм обучения, направления подготовки бакалавров 151900.62 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» и 150700.62 «Машиностроение», специалистов 151001.65 «Технология машиностроения» и магистров 151900.68 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», при изучении дисциплин «Металлорежущие станки», «Расчёт, моделирование и конструирование оборудования с компьютерным управлением», «Математическое моделирование в машиностроении», «Математические методы в технологии машиностроения» выполнении дипломного проектирования, курсового проекта по дисциплине «Металлорежущие станки», написании магистерской диссертации.

УДК 621(075.8)
ББК К63-52-041я73

ISBN 978-5-8265-1103-9

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2012

ВВЕДЕНИЕ

Система главного привода станка является основным источником энергии необходимой для осуществления рабочего процесса резания металлов.

Система главного привода передаёт и воспринимает наибольшие нагрузки при высоких скоростях её элементов и звеньев. Для обеспечения надёжности станка эта система должна обладать высокой прочностью как при постоянных, так и при переменных нагрузках. Для обеспечения устойчивого резания при интенсивных режимах, высокой точности обработки эта система должна обладать значительной жёсткостью в статических и динамических режимах.

Система главного привода не должна быть чрезмерно металлоёмкой и обеспечивать широкий диапазон изменения скорости, причём это изменение должно производиться бесступенчато.

Комплекс разнообразных и противоречивых технических требований, предъявляемых к системам главного привода, ставит задачу расчётного определения динамических характеристик.

Знание динамических характеристик позволяет правильно оценить нагрузки, действующие в системе главного привода, и выбрать конструктивные параметры системы так, чтобы ограничить эти нагрузки заданными пределами. Также эти знания необходимы для правильной оценки влияния процесса резания на устойчивость, так как эта система является элементом замкнутой динамической системы станка.

При расчёте системы главного привода основное внимание уделяется крутильным колебаниям в стационарных периодических режимах, обусловленных периодическим характером изменения момента силы резания, погрешностями изготовления зубчатых колёс, монтажными погрешностями передач.

Методы математического моделирования систем главного привода позволяют решить ряд задач, связанных с определением их динамических характеристик:

1. Определить собственные частоты и формы колебаний системы в линейном приближении и построить АФЧХ.

2. Определить характер и уровень колебаний, возникающих в системе, с учётом нелинейности её характеристик.

3. Определить параметры переходных режимов при пуске и торможении, увеличение и снижение нагрузки с учётом свойств приводного двигателя.

4. Определить вышеперечисленные характеристики при изменении конструктивных параметров системы.

5. Найти оптимальные параметры системы при заданных ограничениях и критериях оптимальности.

Целью выполняемой студентами практической работы является освоение практических навыков в разработке расчётной схемы динамической системы привода главного движения станка и определение её параметров по чертежам станка на стадии проектирования.

Разработка математической модели привода главного движения состоит из следующих этапов:

1. Анализ разработанной конструкции привода главного движения и определение его параметров по сборочным чертежам, и построение расчётной схемы динамической системы привода.

2. Описание расчётной схемы привода системой дифференциальных уравнений.

3. Определение передаточных функций динамической системы привода главного движения.

4. Построение частотных и переходных частотных характеристик привода.

5. Анализ динамического качества привода главного движения по его динамическим характеристикам.

Итогом практической работы является защита отчёта, представляющего собой полный расчёт для составления математической модели привода главного движения станка и включающего в себя:

- 1) кинематическую схему привода главного движения станка;
- 2) расчётную схему динамической системы привода;
- 3) упрощённую расчётную схему привода;
- 4) передаточную функцию динамической системы привода главного движения;
- 5) частотные характеристики системы;
- 6) переходные характеристики системы.

1. РАЗРАБОТКА РАСЧЁТНОЙ СХЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИВОДА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕЁ ПАРАМЕТРОВ

Привод станка представляет собой сложную многозвенную динамическую систему с распределёнными массами. Параметры системы (масса элементов, жёсткость, неупругое сопротивление) могут быть определены после анализа конструкции и условий её эксплуатации.

Для определения динамических характеристик привода, прежде всего, готовят расчётную схему, т.е. необходимо вычислить моменты инерции вращающихся элементов привода (валов, зубчатых колёс), жёсткости (податливости) упругих звеньев между этими деталями, характеристики демпфирования, а также выполнить динамическое приведение этих элементов к системе, все элементы которой имеют одинаковую среднюю скорость.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИВОДА

Вращающиеся детали привода станка (валы, зубчатые колёса) рассматривают как элементы с сосредоточенными массами. Обычно детали привода имеют цилиндрическую форму с большим количеством уступов (ступенчатые валы, шестерни), поэтому для определения моментов инерции эти элементы разбивают на части с постоянными диаметрами и определяют момент инерции каждого участка по формуле

$$I = \frac{\gamma \pi l d^4}{32g}, \text{ [Н}\cdot\text{м}^2], \quad (1)$$

где γ – удельный вес материала детали, $\text{Н}/\text{м}^2$; l – длина участка, м; d – диаметр участка, м; $g = 9,81$ – ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$, а затем суммируют:

$$I = \frac{\gamma \pi}{32g} \sum \ell_i d^4, \text{ [Н}\cdot\text{м}^2]. \quad (2)$$

Если деталь имеет полости цилиндрической формы, то сначала рассчитывают момент инерции детали как сплошного тела вращения, а затем вычитают момент инерции полости. Детали фасонного профиля удобно заменять телами ступенчатой формы, количество ступеней вы-

бирается в зависимости от требуемой точности расчёта. Зубчатое колесо рассматривается как сплошное тело (без учёта профиля зубьев), диаметр которого равен делительному диаметру ($d = mz$; m – модуль колеса; z – число зубьев). При определении момента инерции ротора электродвигателя, фрикционных и упругих муфт пользуются каталогами, где приводятся значения «махового момента» GD^2 :

$$I = 2,5GD^2, \text{ [кг}\cdot\text{м}^2], \quad (3)$$

где G – вес ротора (муфты), кг; D – диаметр ротора, м.

Если каталожные данные электродвигателя не известны, то пользуются приближённой формулой

$$GD^2 \approx 0,36Gd_p, \text{ [Н}\cdot\text{м}^2], \quad (4)$$

где d_p – наружный диаметр ротора, м.

Для учёта момента инерции валов треть полного момента инерции разбивают по сосредоточенным массам, находящимся на валу (рис. 1). Если I_1 и I_2 – моменты инерции шестерен, а I_B – момент инерции вала, то его расчётная схема будет представлена в виде двух сосредоточенных масс соответственно с моментами инерции I_1^* и I_2^* , соединённых невесомым валом с податливостью e (рис. 2). При этом

$$I_1^* = I_1 + I_B/6; \quad I_2^* = I_2 + I_B/6 .$$

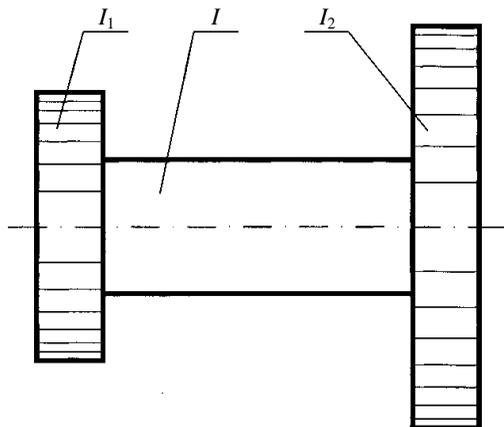


Рис. 1. Вал с шестернями

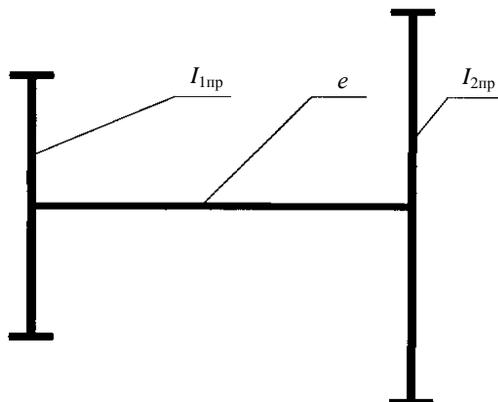


Рис. 2. Расчётная схема вала с шестернями

Примечание. Такое преобразование справедливо для валов, чья длина не превышает 300 мм. Если же вал имеет длину более 300 мм, то его разбивают на участки меньшей длины, для каждого рассчитывают момент инерции, с учётом того, что на концах он равен $I/6$, а затем суммируют полученные результаты. Алгоритм разбиения вала на участки показан на рис. 3.

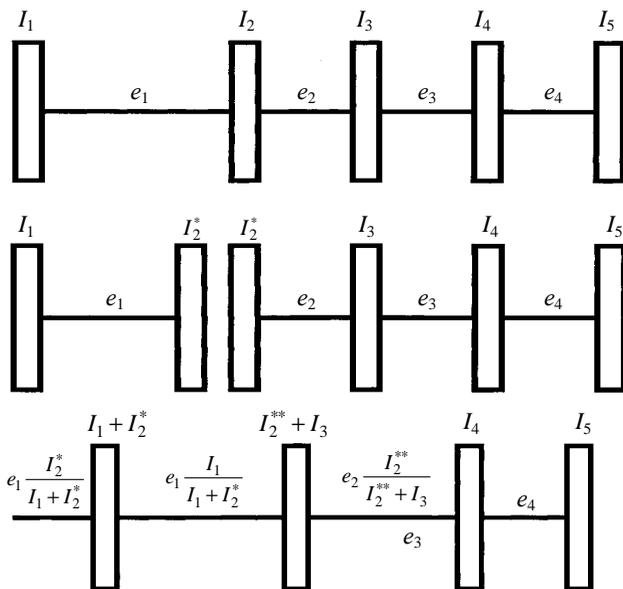
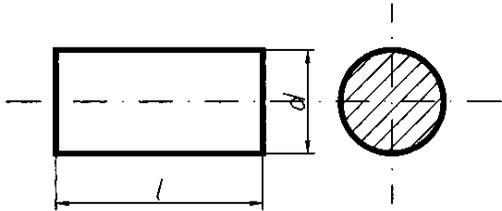
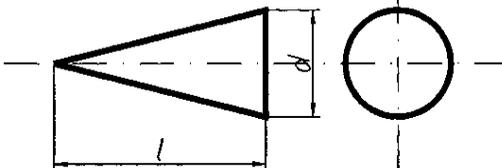
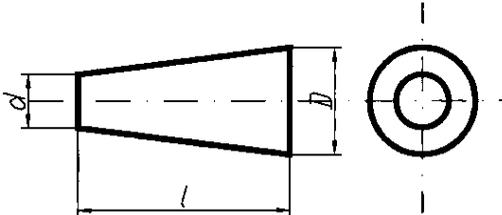
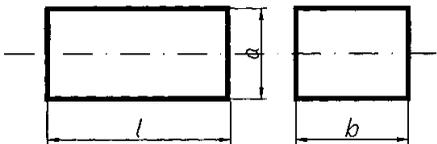


Рис. 3. Алгоритм разбиения вала на участки

Примечание. В итоге по завершении расчёта по п. 1.1 должны получиться приведённые моменты инерции каждого из валов рассчитываемого механизма, как сумма моментов инерции валов и находящихся на них зубчатых колёс.

Расчётные формулы моментов инерции валов различного сечения приведены в табл. 1.

1. Моменты инерции

Эскиз	Моменты инерции
<p data-bbox="165 427 434 459">Сплошной круглый вал</p> 	$I = \frac{\pi}{32} \rho l d^4$
<p data-bbox="165 695 348 722">Конический вал</p> 	$I = \frac{\pi}{160} \rho l d^4$
<p data-bbox="165 946 479 973">Усеченный конический вал</p> 	$I = \frac{\pi \rho}{160} l \frac{D^5 - d^5}{D - d}$
<p data-bbox="165 1214 529 1241">Вал с прямоугольным сечением</p> 	$I = \frac{\pi}{12} a b l (a^2 + b^2)$

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТИЛЬНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИВОДА

1.2.1. Крутильная податливость валов

Податливостью участка вала называется выраженный в радианах угол относительного поворота концевых сечений этого участка при приложении к ним единичного крутящего момента

$$e = \frac{d\varphi}{dM}, \quad (5)$$

Крутильная податливость участка вала определяется по формуле

$$e = \frac{32}{\pi G} \frac{\ell k_{\phi}}{d^4}, \left[\frac{\text{рад}}{\text{Н} \cdot \text{м}} \right], \quad (6)$$

где ℓ – длина участка вала, м; d – наружный диаметр вала, м; G – модуль упругости материала вала при сдвиге; $G = 8,5 \cdot 10^9 \cdot \text{Н/м}^2$ – для стали; $G = 4,5 \cdot 10^9 \cdot \text{Н/м}^2$ – для чугуна; $G = 2,7 \cdot 10^9 \cdot \text{Н/м}^2$ – для алюминия; k_{ϕ} – коэффициент формы поперечного сечения.

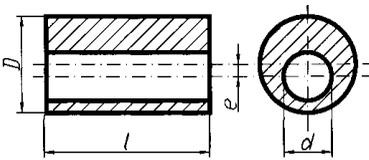
Коэффициент формы поперечного сечения принимается:

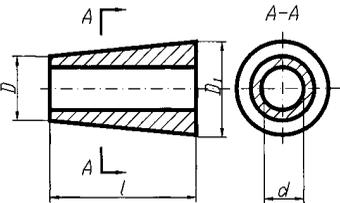
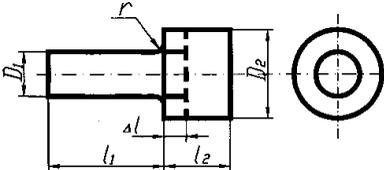
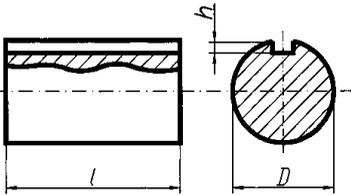
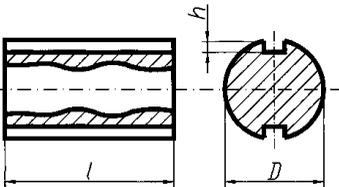
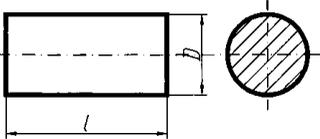
- для цилиндрического сплошного круглого вала $I_1 + I_2^* k_{\phi} = 1$;
- для цилиндрического круглого вала с концентричным сверлением, где $\alpha = d_1/d$ – отношение внутреннего и наружного диаметров $k_{\phi} = (1 - \alpha^4)^{-1} - I_1 + I_2^*$;

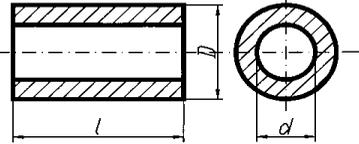
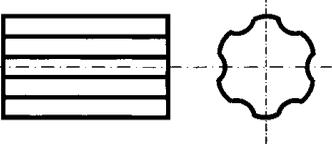
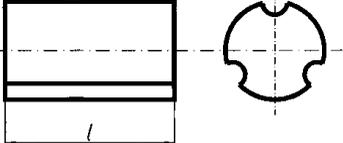
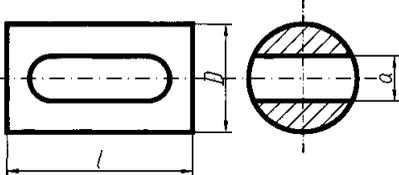
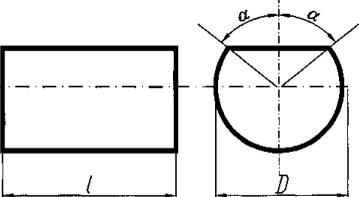
- для цилиндрического круглого вала с эксцентричным сверлением $k_{\phi} = \lambda^{-1}(1 - \alpha^4)^{-1} - I_1 + I_2^*$.

Податливость валов на кручение определяется по формулам, приведённым в табл. 2

2. Податливости валов при кручении

Эскиз	e_k [рад/(Н·м)]
<p>Вал с эксцентричным сверлением</p> 	$k = 1,25$ при $\frac{d}{D} = 0,4$ $\frac{2e}{D-d} = 0,6$ $k = 1,75$ при $\frac{d}{D} = 0,5$ $\frac{2e}{D-d} = 0,7$

Эскиз	e_k [рад/(Н·м)]
<p>Конический вал с отверстием</p> 	$\frac{320}{3\pi G} \frac{Dl}{D_1(D^4 - d^4)} \times \left(1 + \frac{D}{D_1} + \frac{D^2}{D_1^2} \right)$
<p>Ступенчатый вал с галтелью</p> 	$\frac{320}{\pi G} \left(\frac{l_1 + \Delta l}{D_1^4} + \frac{l_2}{D_2^4} \right)$ $r \leq \frac{D_1}{4}$
<p>Вал со шпоночной канавкой</p> 	$\frac{320}{\pi G} \frac{l}{(D - 0,5h)^4}$
<p>Вал с двумя шпоночными канавками</p> 	$\frac{320}{\pi G} \frac{l}{(D - 1,2h)^4}$
<p>Сплошной круглый вал</p> 	$\frac{320}{\pi G} \frac{l}{D^4}$

Эскиз	e_k [рад/(Н·м)]
<p>Вал с осевым сверлением</p> 	$\frac{320}{\pi G} \frac{l}{D^4 - d^4}$
<p>Шлицевый вал</p> 	$\frac{320}{\pi G} \frac{l}{D^4}$
<p>Шлицевый вал произвольного сечения</p> 	$\frac{320}{\pi G} \frac{4I_p l}{F^4}$ <p>J_p – полярный момент инерции сечения; F – площадь сечения</p>
<p>Вал с поперечной прорезью</p> 	$\frac{320}{\pi G} \frac{kl}{D^4}$ <p>$k = 4$ при $\frac{a}{D} = 0,2; \frac{l}{D} = 5$ $k = 6$ при $\frac{a}{D} = 0,3; \frac{l}{D} = 4$</p>
<p>Вал с лыской</p> 	$\frac{320}{\pi G} \frac{kl}{D^4}$ <p>$k = 1,8$ при $\alpha = 60^\circ$ $k = 1$ при $\alpha = 30^\circ$ $k = 2,5$ при $\alpha = 70^\circ$</p>

1.2.2. Крутильная податливость шпоночных и шлицевых соединений

Податливость шлицевых и шпоночных соединений обуславливается деформациями контактных поверхностей, предполагается пропорциональной нормальным давлениям:

$$e = \frac{k_{\text{ш}}}{d^2 l h z}, \text{ [рад/Н}\cdot\text{м]}, \quad (7)$$

где d – диаметр соединения (для шлицевых соединений – средний диаметр по шлицам), м; l – длина соединения, м; h – рабочая высота шлица (шпонки), м; z – число шпонок (шлицев); $k_{\text{ш}}$ – коэффициент удельной контактной податливости, м³/Н:

- для соединения с призматической шпонкой $k_{\text{ш}} = 6,5 \cdot 10^{-11}$;
- для соединения с сегментной шпонкой $k_{\text{ш}} = 13,9 \cdot 10^{-11}$;
- для шлицевого соединения $k_{\text{ш}} = 4,1 \cdot 10^{-11}$.

Примечание. Так как нормальное давление распределяется неравномерно по длине шпонок и шлицев, то расчётную длину вала при определении крутильной податливости следует принимать как расстояние между точками, которые являются центрами эпюр крутящих моментов по длине соединений.

1.2.3. Крутильная податливость соединительных муфт

Податливость кулачковых муфт определяется контактной податливостью кулачков:

$$e_{\text{км}} = \frac{4k_1}{D_{\text{ср}}^2 k_2 z h b}, \text{ [рад/Н}\cdot\text{м]}, \quad (8)$$

где $D_{\text{ср}}$ – средний диаметр муфты по кулачкам, м; z – число кулачков; b и h – рабочая ширина и высота кулачка, м; $k_1 = (0,3 \dots 0,4) \cdot 10^{-12}$ м²/Н – коэффициент контактной податливости; $k_2 = (0,3 \dots 0,5)$ – коэффициент, учитывающий фактическое количество кулачков, передающих крутящий момент.

Примечание. При определении податливости вала шпоночные канавки учитываются лишь в том случае, если они выходят из под ступицы. Так как крутящий момент распределяется по длине контакта в шлицевом соединении неравномерно, то расчётную длину l_p вала принимают равной расстоянию между точками приложения равнодействующих эпюр крутящих моментов на длине контакта шлицев.

Расчётная длина для шлицевых валов l в случае посадок с зазором будет определяться по формуле

$$l = l_0 + 0,3(l_1 + l_2), \text{ [м]}, \quad (9)$$

а для посадок с натягом

$$l = l_0 + 0,25(l_1 + l_2), \text{ [м]}. \quad (10)$$

Благодаря большой контактной податливости шпоночного соединения расчётную длину берут по серединам ступиц колёс и шкивов.

При расчёте податливости муфт с резиновыми упругими элементами следует учитывать разную жёсткость резины при статическом нагружении $k_{ст}$ и при колебаниях $k_{д.к}$. Динамический коэффициент $k_{дин} = k_{д.к}/k_{ст}$ зависит от состава резины и амплитуды колебаний. От таких же свойств зависит демпфирование резины: относительное расщепление ψ или логарифмический декремент затухания колебаний Θ .

Среднее значение $k_{дин} = 2 \dots 2,5$; $\psi = 0,6$; $\Theta = 0,5$ в диапазоне частот $0,1 \dots 200$ Гц.

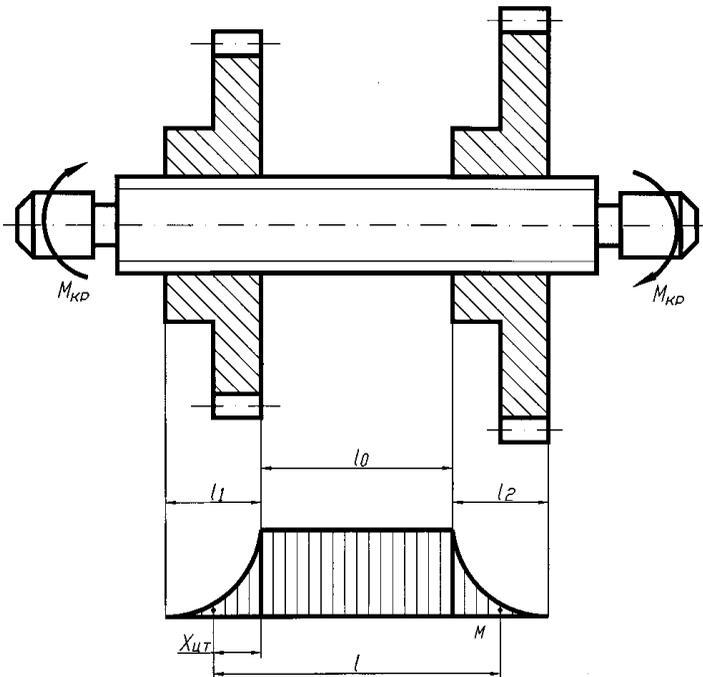


Рис. 4. Расчётная длина вала

Податливость упругих втулочно-пальцевых муфт определяется по эмпирической зависимости

$$e_{\text{впм}} = \frac{0,16 \cdot 10^{-5}}{K_{\text{дин}} \sqrt{H^3 d_{\text{max}}^3}}, \text{ [рад/Н}\cdot\text{м]}, \quad (11)$$

где d_{max} – наибольший диаметр соединённых валов, м; $H = 7,4\text{HRD}$ – твёрдость резины по Шору.

Податливость муфт с резиновой звёздочкой рассчитывается по зависимости

$$e_{\text{мз}} = \frac{k \cdot 10^{-5}}{K_{\text{дин}} \sqrt{H^3 D^3}}, \text{ [рад/Н}\cdot\text{м]}, \quad (12)$$

где D – номинальный наружный диаметр муфты, м; $K = 10$ для $D = (0,025 \dots 0,040)$ м; $K = 4,5$ для $D = (0,05 \dots 0,1)$ м.

1.2.4. Крутильная податливость ременных передач

Крутильная податливость ременной передачи является результатом деформации ремня под действием окружной силы. Вследствие того, что ремень подвергается предварительному натяжению, окружная сила воспринимается обеими его ветвями и только в случае высоких передаваемых нагрузок, превышающих двойную величину предварительного натяжения P_0 , вся нагрузка воспринимается одной ветвью передачи.

Приведённая крутильная податливость ременной передачи получается из выражения

$$e_p = \frac{l_{\text{эф}}}{\alpha R^2 EF}, \text{ [рад/Н}\cdot\text{м]}, \quad (13)$$

где R – радиус шкива, к которому приводится крутильная податливость всей передачи; $l_{\text{эф}}$ – расчётная длина ветви между шкивами, м; F – площадь сечения ремня, м²; E – модуль упругости ремня, МПа; α – коэффициент, учитывающий условия работы передачи:

$$\alpha = 2 \text{ при } P < 2P_0;$$

$$\alpha = 1 \text{ при } P > 2P_0.$$

$$l_{\text{эф}} \approx l + \frac{v}{100} (R_1 \alpha_1 + R_2 \alpha_2) \approx l + \frac{v}{100} \left[\pi(R_1 + R_2) + \frac{2(R_1 - R_2)^2}{L} \right], \quad (14)$$

где v – скорость ремня, м/с; R_1 и R_2 – радиусы шкивов, м; L – межосевое расстояние, м; α_1 и α_2 – углы охвата, рад; l – расстояние между точками касания ремня со шкивами, м.

3. Модули упругости ремней

Профиль ремня	Материал	Модуль упругости E , МПа
Плоский ремень	Прорезиненная ткань	80...120
	Хлопчатобумажная ткань	30...60
	Высокополимерные материалы	2250...3800
Зубчатый ремень	Со стальным кордом	6000...39000
Клиновые ремни	Хлопчатобумажный корд	80...120
	Кордотканевые	250...400
	Шнуровой корд из волокна анид	600...800

Значения модуля упругости для всех типов применяемых ремней приведены в табл. 3.

1.2.5. Крутильная податливость цепных передач

Приведённая крутильная податливость цепных передач определяется по формуле:

$$e_{цп} = \frac{k_{ц} l}{FtR^2}, \text{ [рад/Н}\cdot\text{м]}, \quad (15)$$

где R – радиус начальной окружности звёздочки на валу приведения, м; $F = ld$ – проекция площади опорной поверхности шарнира, м²; l – длина втулки, для цепей – ширина звена, м; d – диаметр валика, м; t – шаг цепи; $k_{ц}$ – коэффициент податливости:

- для втулочно-роликовых цепей $k_{ц} = (0,8 \dots 1,0) \cdot 10^{-14}$ м²/Н;
- для зубчатых цепей $k_{ц} = (2,0 \dots 2,5) \cdot 10^{-14}$ м²/Н.

1.3. УЧЁТ ИЗГИБНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ВАЛОВ И ПОДАТЛИВОСТИ ОПОР

В зубчатых передачах нагрузка на зубчатые колёса сопровождается изгибом валов и упругой деформацией опор, что приводит к дополнительным взаимным поворотам зацепляющихся зубчатых колёс. Эту взаимную податливость можно рассчитать, если поместить эквивалентные упругие звенья между сосредоточенными, соответствующими зубчатым колёсам звеньями.

1.3.1. Эквивалентная крутильная податливость

Эквивалентная крутильная податливость определяется по приведённой ниже последовательности.

1. Определяются силы, действующие на зубчатые колёса:

$$P_k = \frac{M_{кр}}{R_k} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \rho)}, \quad [H], \quad (16)$$

где R_k – радиус начальной окружности k -го зубчатого колеса, м; $M_{кр}$ – передаваемый колесом крутящий момент, Н·м; α – угол зацепления (принимается равным 20°); ρ – угол трения ($\operatorname{tg} \rho = 0,1$; $\rho \sim 5,71^\circ$).

2. Определяется \overline{u}_k – суммарный прогиб вала под зубчатым колесом от всех сил P_k , действующих на данный вал (черта сверху указывает на векторный характер величины).

3. Вычисляется перемещение δ_k k -го зубчатого колеса, вызванное податливостью опор:

$$\delta_i = (\delta_b - \delta_a) \frac{a}{a+b} + \delta_b = \delta_b \left(\frac{a}{a+b} \right) + \delta_a \left(\frac{b}{a+b} \right), \quad (17)$$

где $\delta_a = e_{0a} P_A$; $\delta_b = e_{0b} P_B$; P_A, P_B – суммарная реакция от сил P_i в опорах A и B , Н; e_{0a}, e_{0b} – податливость опоры A и B , рад/Н·м.

4. Полное линейное перемещение зубчатого колеса рассчитывается по формуле

$$\overline{\Delta}_i = y_i + \delta_i, \quad [M]. \quad (18)$$

5. Относительное смещение колёс i и $i + 1$, соответственно передаваемых крутящий момент с одного вала на другой, рассчитывается по формуле

$$\Delta_{i, i+1} = \Delta_i - \Delta_{i+1}, \quad [M]. \quad (19)$$

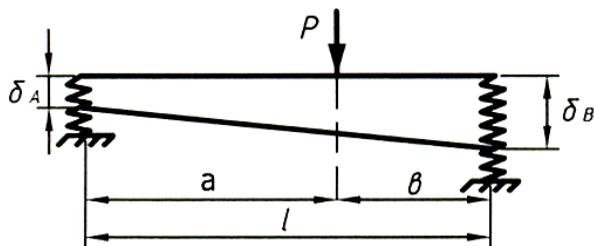


Рис. 5. Схема смещения вала

Примечание. Относительное смещение является векторной величиной, следовательно, может иметь положительное или отрицательное направление в зависимости от направления выбранной оси.

6. Расчёт взаимного угла поворота зубчатых колёс, приведённого к i -му колесу и вызванному относительным смещением на величину $\Delta_{i, i+1}$:

$$\alpha_i = \frac{\Delta_{i, i+1}^{-T} + \Delta_{i, i+1}^{-R} \operatorname{tg}(\alpha + \rho)}{R_i}, \text{ [рад]}, \quad (20)$$

где $\Delta_{i, i+1}^{-T}$ и $\Delta_{i, i+1}^{-R}$ – соответственно тангенциальная и радиальная проекция вектора $\Delta_{i, i+1}$, м; R_i – радиус начальной окружности шестерни, к валу которой приводится податливость, м.

7. Определение эквивалентной крутильной податливости:

$$e'_{\text{ЭКВ}} = \frac{\alpha_i}{M_i} = \frac{\Delta_{i, i+1}^{-T} + \Delta_{i, i+1}^{-R} \operatorname{tg}(\alpha + \rho)}{R_i^2 P_i^T}, \text{ [рад/Н}\cdot\text{м]}, \quad (21)$$

где P_i^T – окружная сила на зубчатых колёсах i и $i + 1$, Н

8. Определение податливости опор с подшипниками качения. Податливость опор зависит от типа, серии и размера, от конструктивного решения, посадок и технологии обработки монтажных поверхностей. Податливость таких опор определяется упругим сближением δ'_i тел качения и колец, и контактными деформациями δ''_i в местах посадки колец на вал и в корпус.

Для однорядовых шарикоподшипников δ' определяется по формулам:

$$\delta' = (0,7 - 2d) \cdot 10^{-6} \cdot \left[\frac{P}{10} \right]^{\frac{2}{3}}, \text{ [м]}, \quad (22)$$

– для роликовых подшипников:

$$\delta' = k_{\text{ш}} P \cdot 10^{-2}, \quad (23)$$

При расчёте роликовых подшипников нормальной серии:

– для широких серий $k_{\text{ш}} = \frac{0,52 \cdot 10^{-9}}{d}$, $k_{\text{ш}} = \frac{0,33 \cdot 10^{-9}}{d}$;

- для подшипников с короткими роликами $k_{ш} = \frac{0,65 \cdot 10^{-9}}{d}$;
- для двухрядных роликоподшипников $k_{ш} = \frac{0,4 \cdot 10^{-9}}{d}$.

Деформацию δ'' рассчитывают по формуле

$$\delta'' = \frac{4Pk_{к.п}}{\pi db} \left(1 + \frac{d}{D} \right), \text{ [м]}, \quad (24)$$

где $k_{к.п} = (1 \dots 2,5)10^{-12} \text{ м}^3/\text{Н}$ – коэффициент контактной податливости.

Примечание. Во всех приведённых выше формулах P – нагрузка на подшипник, кг; d , D , b – соответственно внутренний, наружный диаметры и ширина подшипника, м.

1.3.2. Податливость зубчатой передачи, приведённая к крутильной податливости

Данная деформация определяется изгибными и контактными деформациями зубьев. Приведённая к одному из валов крутильная податливость зубчатой передачи выражается формулой

$$e_{п.з} = \frac{k_3}{bR^2 \cos^2 \alpha}, \text{ [рад/Н}\cdot\text{м]}, \quad (25)$$

где b – рабочая ширина колеса, м; α – угол зацепления, рад; R – радиус начальной окружности зубчатого колеса, расположенного на валу, к которому приводится податливость передачи, м; k_3 – упругая деформация пары зубьев при действии единичного нормального давления, приложенного на единицу ширины зуба:

- для стальных прямозубых колёс $k_3 = 6 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$;
- для стальных косозубых колёс $k_3 = 3 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$;
- для стальных шевронных колёс $k_3 = 4,4 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$.

Примечание. Для конических колёс R – среднее значение радиуса начальной окружности.

1.3.3. Полная эквивалентная крутильная податливость

Для определения полной эквивалентной крутильной податливости зубчатых передач $e_{экр}^n$ необходимо знать эквивалентную крутиль-

ную податливость $e'_{\text{ЭКВ}}$ передачи и податливость зубчатой передачи, приведённой к крутильной податливости $e_{\text{П.З}}$:

$$e_{\text{ЭКВ}}^n = e'_{\text{ЭКВ}} + e_{\text{П.З}}, \text{ [рад/Н}\cdot\text{м]}, \quad (26)$$

Примечание. В итоге данного этапа расчётов должны получиться полные эквивалентные крутильные податливости зубчатых передач всего рассчитываемого механизма (по каждому валу отдельное значение) и полные моменты инерции каждого вала, состоящие из суммы приведённых моментов инерции колёс участвующих в передаче крутящего момента, т.е. колёса, получающие и передающие вращение.

1.4. УЧЁТ ПАРАМЕТРОВ ПРИВОДНОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

Электромагнитное поле двигателя обладает свойствами упругости и демпфирования. Можно приближённо считать, что электромагнитный момент двигателя пропорционален угловому смещению ротора при крутильных колебаниях; коэффициент пропорциональности – податливость электромагнитной связи. Тогда двигатель можно приближённо представить в виде колебательной системы с одной степенью свободы, записав уравнение ротора двигателя в виде

$$I_{\text{р}} \ddot{\phi}_1 + c_{\text{э.д}} \dot{\phi}_1 + \frac{1}{e_{\text{э.д}}} \phi_1 = M_{\text{н}}, \text{ [Н}\cdot\text{м]}, \quad (27)$$

где $I_{\text{р}}$ – момент инерции ротора, $\text{Н}\cdot\text{м}^2$; $c_{\text{э.д}}$ – коэффициент демпфирования электромагнитной связи, $\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$; $M_{\text{н}}$ – момент, действующий на ротор со стороны механической системы привода, $\text{Н}\cdot\text{м}$.

Двигатель приближённо можно представить в виде колебательной системы с одной степенью свободы, ротор двигателя с моментом инерции $I_{\text{р}}$, электромагнитная упругая связь с податливостью $e_{\text{э.д}}$ и коэффициентом демпфирования $c_{\text{э.д}}$.

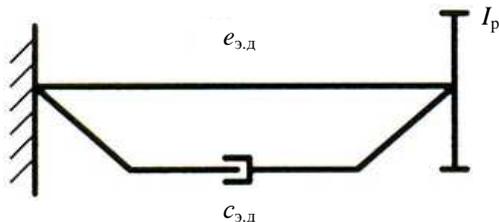


Рис. 6. Эквивалентная схема двигателя

Для асинхронного электродвигателя:

$$e_{\text{э.д}} = \frac{1}{2pM_{\text{к}}} [\text{рад/Н}\cdot\text{м}];$$

$$c_{\text{э.д}} = S_{\text{к}} \omega_{\text{э}} I_{\text{р}}, [\text{Н}\cdot\text{с/рад}],$$
(28)

где p – число пар полюсов; $M_{\text{к}}$ – критический (максимальный) момент, Н·м; $S_{\text{к}}$ – скольжение электродвигателя.

$$M_{\text{к}} = \lambda M_{\text{н}}, [\text{Н}\cdot\text{м}];$$

$$S_{\text{к}} = S_{\text{н}} \left\{ [\lambda + S(\lambda - 1)S_{\text{н}}] + \sqrt{[(\lambda + S(\lambda - 1)S_{\text{н}})^2 - 1]} - 1 \right\},$$
(29)

где $S_{\text{н}}$ – скольжение при нормальном моменте; λ – кратность максимального момента;

$$\omega_{\text{э}} = 2\pi f_{\text{э}}, [\text{Гц}],$$

где $f_{\text{э}}$ – частота энергосети, Гц.

Значение $M_{\text{к}}$ определяется по каталогам, исходя из номинальной мощности двигателя $N_{\text{н}}$ (кВт) и номинальной частоты вращения ротора $n_{\text{н}}$ (мин⁻¹) по формуле

$$M_{\text{к}} = 9549\lambda \frac{N_{\text{н}}}{n_{\text{н}}}, [\text{Н}\cdot\text{м}];$$

$$\lambda = \frac{M_{\text{к}}}{M_{\text{ном}}}$$
(30)

для двигателя постоянного тока:

$$e_{\text{э.д}} = \nu \omega_0 T_{\text{э}}, \left[\frac{\text{рад}}{\text{кг}\cdot\text{м}} \right];$$

$$c_{\text{э.д}} = \frac{I_{\text{р}}}{T_{\text{э}}}, \left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{рад}} \right]$$
(31)

где $\nu = \frac{S}{M}$ – крутизна статической характеристики двигателя в координатах; M – момент – S – скольжение; ω – скорость холостого хода, рад/с; $T_{\text{э}} = \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}$ – электромагнитная постоянная времени двигателя, с;

$L_{\text{я}}$, $R_{\text{я}}$ – индуктивность и активное сопротивление якорной цепи.

Уравнение движения ротора

$$I_p \ddot{\varphi}_p + C_{э,д} \dot{\varphi}_p + \frac{1}{e_{э,д}} \varphi_p = M_m, \quad (32)$$

где I_p – момент инерции ротора; $C_{э,д}$ – коэффициент демпфирования электромагнитной связи; $e_{э,д}$ – коэффициент демпфирования; M_m – момент, действующий на ротор со стороны механической части привода.

1.5. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЁТНОЙ СХЕМЫ ПРИВОДА ГЛАВНОГО ДВИЖЕНИЯ СТАНКА

Полученная в результате подсчёта моментов инерции сосредоточенных масс приводных механизмов и податливостей упругих участков между ними расчётная схема представляет собой цепную систему весьма громоздкую, так как валы вращаются с разными скоростями и соединяются между собой посредством передач.

Кинематическая схема коробки скоростей с графиком частот вращения, обеспечивающая шесть значений частот вращения шпинделя ($n_1 \dots n_6$), приведена на рис.7.

Моменты инерции динамической расчётной схемы соответствуют массам шкивов, зубчатых колёс и ротора электродвигателя. Податливости валов на кручение, соединений вал – ступица, соединительных муфт

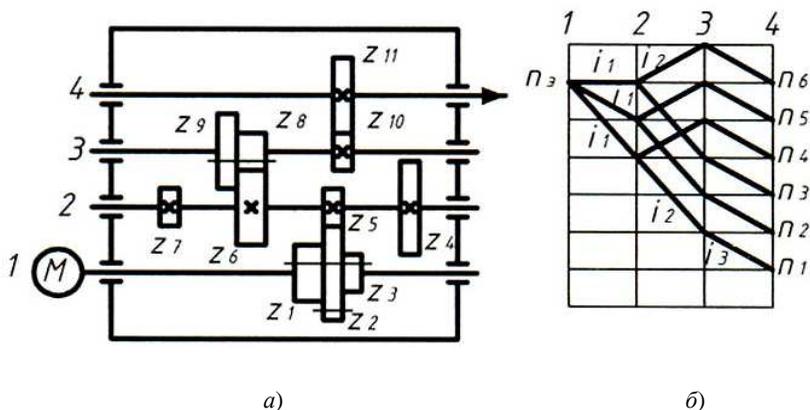


Рис. 7. Пример привода главного движения станка:

a – кинематическая схема; *б* – график частот

и других элементов, расположенных между массами, вращающимися с одинаковой скоростью, располагаются в расчётной схеме между соответствующими моментами инерции; податливости ременных и зубчатых передач и изгиба валов, а также деформации опор и других элементов, действующие между массами, вращающимися с различной скоростью, определяются как относящиеся к одной из этих масс.

Для цепи передачи крутящего момента $\frac{z_2}{z_5} \frac{z_6}{z_8} \frac{z_{10}}{z_{11}} = i_1 i_2 i_3$ (показа-

ний на рис. 7, а), получаем расчётную схему, приведённую на рис. 8.

На расчётной схеме обозначено: e_1 – податливость электромагнитного поля электродвигателя; e_2, e_3, e_4 – эквивалентные крутильные податливости механических связей привода, учитывающие крутильную податливость валов, муфт, контактные деформации шлицевых и шпоночных соединений, изгибные деформации опор, зубчатых зацеплений и др.; I_1 – момент инерции ротора электродвигателя; I_2, I_3, I_4 – приведённые моменты инерции вращающихся элементов механической части привода. Горизонтальные линии на расчётной схеме обозначают упругие связи, вертикальные сплошные – приведённые моменты инерции (диски), а вертикальные пунктирные линии соответствуют безинерционным зубчатым колёсам, характеризующим кинематические связи (передаточные отношения i_1, i_2, i_3).

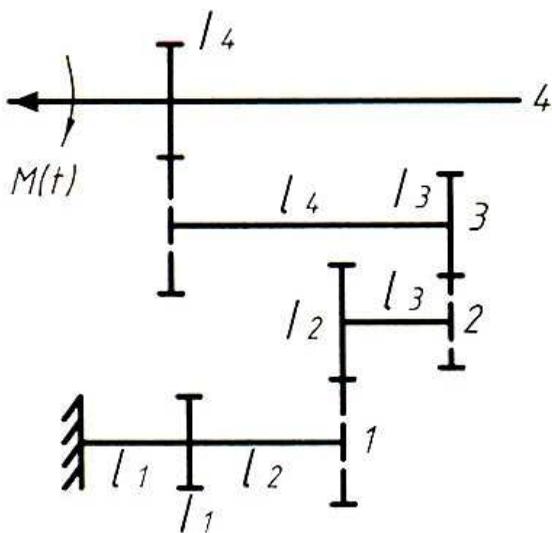


Рис. 8. Расчётная схема динамической системы привода

Многоступенчатую расчётную схему заменяют линейной. При этом моменты инерции вращающихся масс J'_k и податливости e'_k приводят к одному валу, обычно валу электродвигателя 1. Подобное преобразование расчётной схемы можно проводить, исходя из равенства кинетической T и потенциальной Π энергии исходной и приведённой динамических систем привода.

Потенциальная и кинетическая энергия исходной системы равны:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2; \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 I_p \varphi_i^2 \end{aligned} \quad (33)$$

Исключая в исходной расчётной схеме передаточные отношения всех передач, необходимо их учитывать при перерасчёте податливостей и моментов инерции приведённой расчётной схемы. Так как $\varphi_i^k = \varphi_i i_{m,k}$; $\dot{\varphi}_i^k = \dot{\varphi}_i i_{m,k}$, то для сохранения постоянства T и Π необходимо изменить соответствующие значения податливостей и моментов инерции следующим образом:

$$\begin{aligned} e_i^k &= e_i i_{m,k}^2; \\ I_i^k &= \frac{I_i}{i_{m,k}^2}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $i_{m,k}$ – передаточное отношение между валом m , на котором находится данный элемент, и валом K , к которому осуществляется приведение, верхний индекс k указывает вал, к которому осуществляется приведение.

Приведённая динамическая система представлена на рис. 9

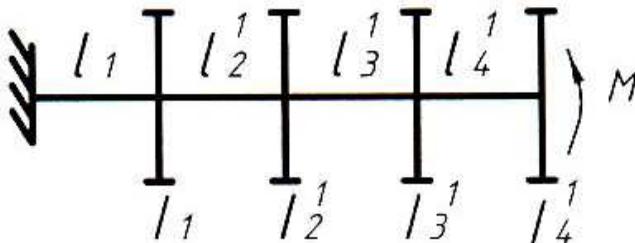


Рис. 9. Приведённая динамическая система

2. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ПРИВОДА ГЛАВНОГО ДВИЖЕНИЯ СТАНКА

Особенностью динамического расчёта привода станков является большое количество степеней скоростей, каждая из которых имеет отличные от других динамические параметры, большая номенклатура приводных механизмов. Проведение динамического расчёта привода станка осуществляется в следующей последовательности.

1. Уменьшение числа степеней свободы в расчётных схемах.
2. Составление дифференциальных уравнений системы привода.
3. Определение передаточной функции системы.
4. Расчёт частотных характеристик системы.
5. Расчёт собственных частот и определение форм колебаний системы.
6. Анализ частотных характеристик системы.
7. Построение переходных и импульсных переходных характеристик системы.
8. Определение реакции системы на произвольное входное воздействие.
9. Оценка показателей динамического качества системы.

Расчётная схема приведённой динамической системы привода приведена на рис. 10.

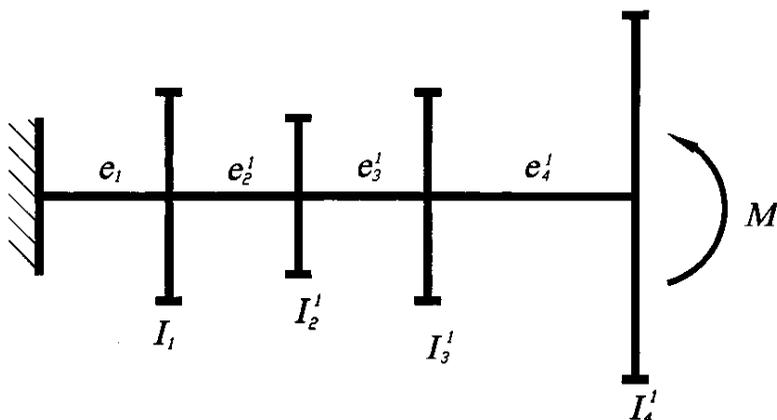


Рис. 10. Расчётная схема приведённой динамической системы привода

2.1. УПРОЩЕНИЕ РАСЧЁТНОЙ СХЕМЫ ПРИВОДА

Колебательная система имеет столько различных частот собственных колебаний, сколько у неё степеней свободы. В большинстве случаев диапазон возмущающих сил такой, что не требуется знание высших собственных частот системы и форм колебаний на этих частотах.

После приведения параметров динамической системы привода к валу электродвигателя расчётная схема принимает следующий вид (для упрощения промежуточных преобразований демпфирование пока не учитывается)

Такая схема имеет S степеней свободы (по числу инерционных элементов) и соответственно столько же частот собственных колебаний.

Количество элементов расчётной модели упругой системы можно уменьшить, преобразовав её в эквивалентную упругую систему, имеющую такие же энергетические показатели.

Поскольку динамические нагрузки в многомассовой системе определяются низкочастотными колебаниями масс, амплитуда которых имеет наибольшие значения, то для упрощения динамических расчётов исходную динамическую систему заменяют системой с меньшим числом степеней свободы, которая в заданном в частотном диапазоне $0 < \omega < \omega_{\max}$ с требуемой точностью имеет частоты и формы собственных колебаний, соответствующие исходной системе.

Для проведения упрощения динамическая система расчленяется на чередующиеся одномассовые (типа a) и двухмассовые (типа b) парциальные системы (системы с одной степенью свободы), которые не искажают характеристик при $\omega^2 \gg \omega_{\max}^2$ (рис. 11).

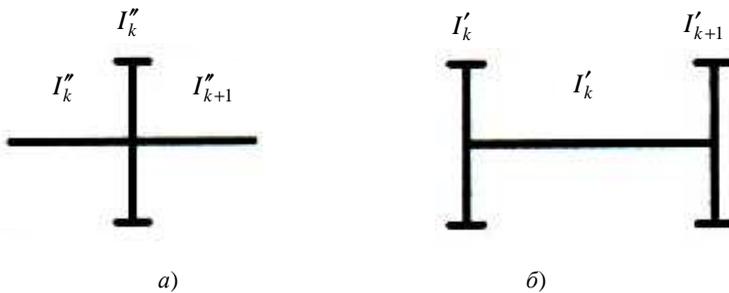


Рис. 11. Парциальные системы одномассовая (типа a) и двухмассовая (типа b) (или $Ie \ll \omega^2 \lim$)

Где $\omega_{\text{lim}} = 2\pi f_{\text{lim}}$ и могут заменяться одна другой, т.е. двухмассовая система $(I_k'' - e_k' - I_{k+1}'')$ – одномассовой, $e_k'' - I_k'' - e_{k+1}'$, где

$$I_k' = \frac{e_k I_{k+1}}{I_k + I_{k+1}}; \quad e_{k+1}' = \frac{e_k' I_k}{I_k + I_{k+1}}; \quad I_k' = I_k + I_{k+1},$$

а одномассовая система $e_k - I_k - e_{k+1}$ – двухмассовой $I_k'' - e_k'' - I_{k+1}''$, где

$$I_k'' = \frac{I_k e_{k+1}}{e_k + e_{k+1}}; \quad I_{k+1}'' = \frac{I_k e_k}{e_k + e_{k+1}}; \quad e_k'' = e_k + e_{k+1}.$$

Для каждой парциальной системы определяется квадрат её собственной круговой частоты $w^2 = \frac{1}{Ie}$:

– для одномассовой системы (типа *a*)

$$w_k^2 = \frac{e_k + e_{k+1}}{I_i e_k e_{k+1}}; \quad (35)$$

– для двухмассовой системы (типа *b*)

$$w_k^2 = \frac{I_k + I_{k+1}}{e_k I_k I_{k+1}}. \quad (36)$$

Из полученного массива $\{w_k^2\}_{k=1}^s$ выбирают максимальное значение частоты, соответствующее номеру парциальной системы:

$$w_N = \max\{w_k^2\}_{k=1}^s,$$

проверяют условие $\frac{w_N}{w} \geq \alpha$,

где w – заданная частота внешнего возмущающего воздействия; α – коэффициент определяющий точность сохранения динамических характеристик системы $\alpha = (2 \dots 3,5)$.

Если это условие выполняется, то данную систему можно упрощать, в случае выполнения этого условия её оставляют без изменений. При выполнении условия в расчётной схеме выделяются эквивалентные парциальные системы

а) одномассовые (тип *a*)

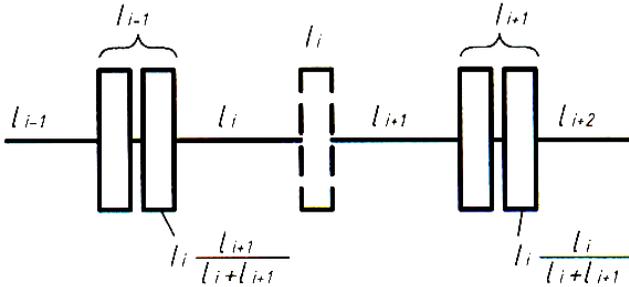
$$e_N; I_N; e_{N+1}; I_{N+1}; e_{N+2};$$

б) двухмассовые (тип б)

$$I_{N-1}; e_N; I_N; e_{N+1}; I_{N+1}$$

Выделенным элементам присваивают значения:

а) При замене одномассовой системы двухмассовой системой момент инерции I_i распределяется на части, пропорциональные податливостям противоположных участков связи, и эти части присоединяются соответственно к моментам инерции I_{i-1} и I_{i+1} , а общая податливость равна сумме податливостей обоих участков.

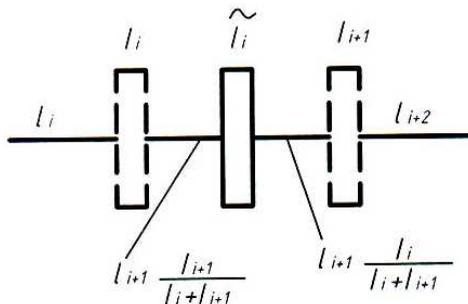


$$\bar{I}_{i-1} = I_{i-1} + \frac{I_i e_{i+1}}{(e_i + e_{i+1})}; \bar{I}_i = 0;$$

$$\bar{I}_{i+1} = I_{i+1} + \frac{I_i e_{i+1}}{(e_i + e_{i+1})}; \bar{e}_i = 0;$$

$$\bar{e}_{i+1} = e_i + e_{i+1}; i = \frac{(N+1)}{2}.$$

б) При замене двухмассовой системы одномассовой системой её момент инерции равен сумме моментов инерции, а податливость e_{i+1} распределяется на части, пропорциональные противоположным моментам инерции



$$\begin{aligned}\tilde{I}_i &= I_i + I_{i+1}; \\ \tilde{e}_i &= e_i + \frac{e_{i+1}I_i}{I_i + I_{i+1}}; \quad \tilde{e}_{i+1} = 0; \\ \tilde{e}_{i+2} &= e_{i+2} + \frac{e_{i+1}I_i}{I_i + I_{i+1}}; \quad i = \frac{N}{2}.\end{aligned}$$

Отбрасываются элементы $\tilde{e}_i = 0$ и $\tilde{I}_i = 0$; или $\tilde{I}_{i+1} = 0$ и $\tilde{e}_{i+1} = 0$ в зависимости от чётности и приводят сквозную нумерацию $(n - 1)$ оставшихся масс и податливостей. Повторяют процедуру упрощения расчётной схемы, приняв в качестве нового « n » значение $(n - 1)$ до двух- или трёхмассовой системы.

Упрощение динамической системы по данному методу путём расчленения на парциальные одномассовые и двумассовые системы представлено на рис. 12. Расчётные формулы крутильной податливости валов представлены в табл. 4.

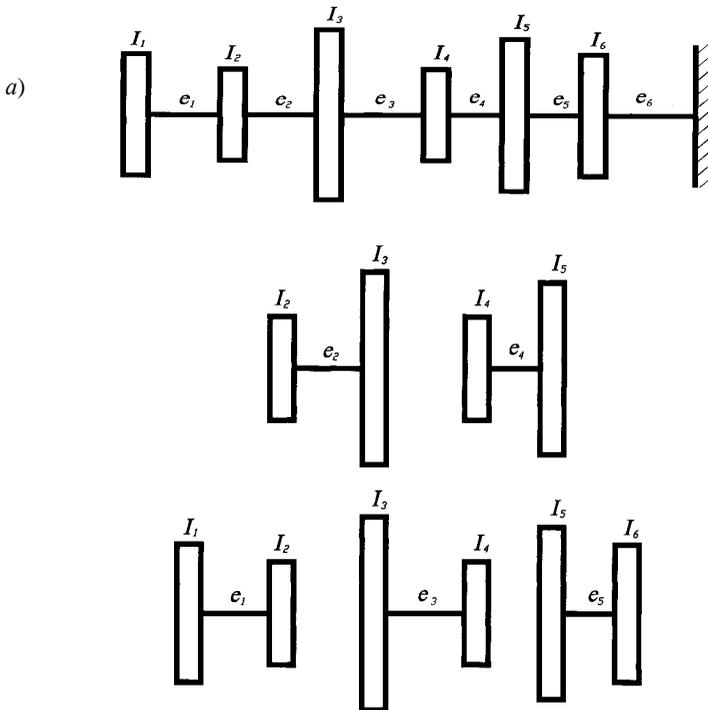


Рис. 12. Последовательность упрощения динамической системы

a)

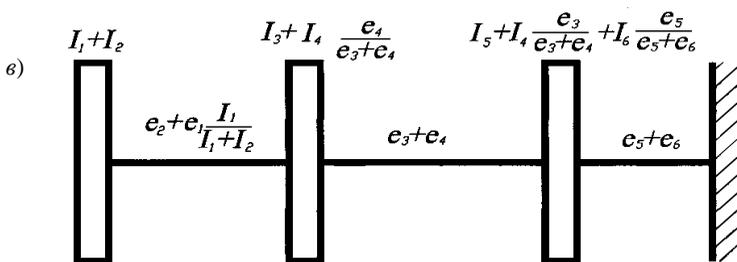
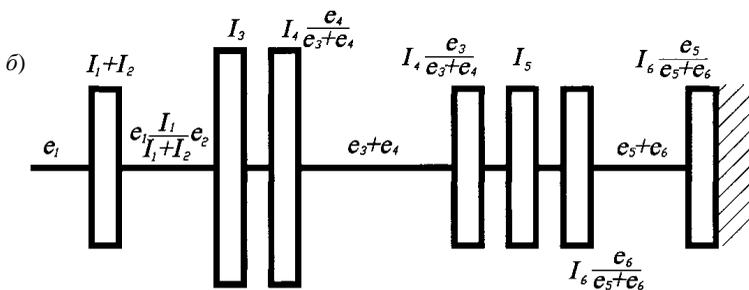
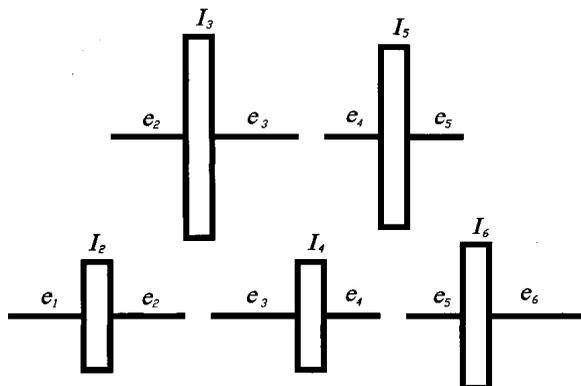
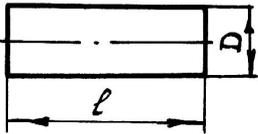
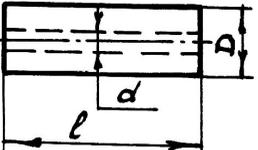
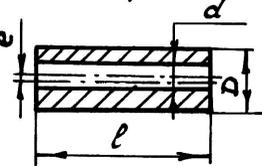
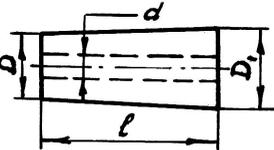
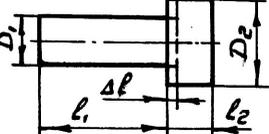


Рис. 12. Продолжение

4. Крутильная податливость валов

Эскиз	рад/(Н·м)	Примечание
<p>Сплошной круглый вал</p> 	$e_k = \frac{32}{\pi G} \frac{l}{D^4}$	
<p>Вал с осевым сверлением</p> 	$e_k = \frac{32}{\pi G} K_c \frac{l}{D^4}$	$K_c = \frac{1}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}$
<p>Вал с эксцентричным сверлением</p> 	$e_k = \frac{32}{\pi G} K_c K_3 \frac{l}{D^4}$	$K_c = \frac{1}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}$ $K_3 = 1,25$ при $\frac{d}{D} = 0,4$ и $\frac{2e}{D-d} = 0,6$
<p>Конический вал с отверстием</p> 	$e_k = \frac{32}{\pi G} K_c K_k \frac{l}{D^4}$	$K_k = \frac{1}{3} \frac{D}{D_1} \times \left(1 + \frac{D}{D_1} + \frac{D^2}{D_1^2}\right)$
<p>Ступенчатый вал с галтелью</p> 	$e_k = \frac{32}{\pi G} \times \left(\frac{l_1 + \lambda D_1}{D_1^4} + \frac{l_2}{D_2^4} \right)$	$\lambda = \frac{\Delta l}{D_1}$ при $r \leq \frac{D_1}{4}$

2.1.1. Упрощение динамических расчётных схем станков на ЭВМ

Преобразование n – массовой динамической расчётной схемы станка в $(n - m)$ – массовую схему, эквивалентную по своим динамическим характеристикам в заданном частотном диапазоне внешних сил, необходимо для обеспечения возможности моделирования на компьютере и для повышения эффективности методов моделирования.

Алгоритм и программа упрощения на ЭВМ многомассовой схемы включают в себя операции формирования и последующего преобразования $(n - m)$ – массовых матриц инерций и жёсткостей системы.

Алгоритм построения расчётной схемы:

1. Цепную расчётную схему динамической системы (рис. 13) расчлняют на $s = 2(n - 1)$ чередующихся одно- и двухмассовых парциальных систем с одной степенью свободы.

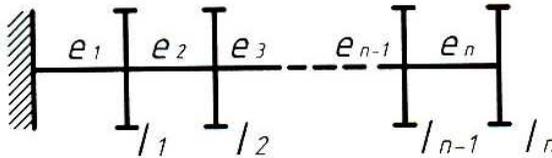


Рис. 13. Цепная расчётная схема динамической системы

2. Присваивают нечётные номера ($k = 1, 3, 5, \dots, S - 1$) одномассовым парциальным системам $e_i - I_i - e_{i+1}$, $i = (k + 1)/2$ и чётные номера ($k = 2, 4, 6, \dots, S$) двухмассовым системам $I_i - e_i - I_{i+1}$, $i = k/2$. Здесь e – податливость соединения; I – момент инерции звена.

3. Вычисляют собственные частоты колебаний парциальных систем по соответствующим формулам:

$$\omega_k^2 = (e_k + e_{k+1}) / (e_k e_{k+1} I) \quad \text{при } k = 1, 3, 5, \dots, S - 1;$$

$$\omega_k^2 = (I_k + I_{k+1}) / (e_k I_{k+1} I_k) \quad \text{при } k = 2, 4, 6, \dots, S.$$

4. Из полученного массива значений собственных частот $\{\omega_k\}_{k=1}^S$ выбирают максимальное значение частоты с соответствующим ей номером парциальной системы $\omega_N = \max\{\omega_k\}_{k=1}^S$.

5. Проверяют выполнение условия $\omega_N / \omega \geq \alpha$, где ω – частота внешней силы; α – коэффициент, определяющий точность сохранения динамических характеристик системы. При выполнении этого условия динамическая схема подвергается упрощению, в противном случае оно не производится.

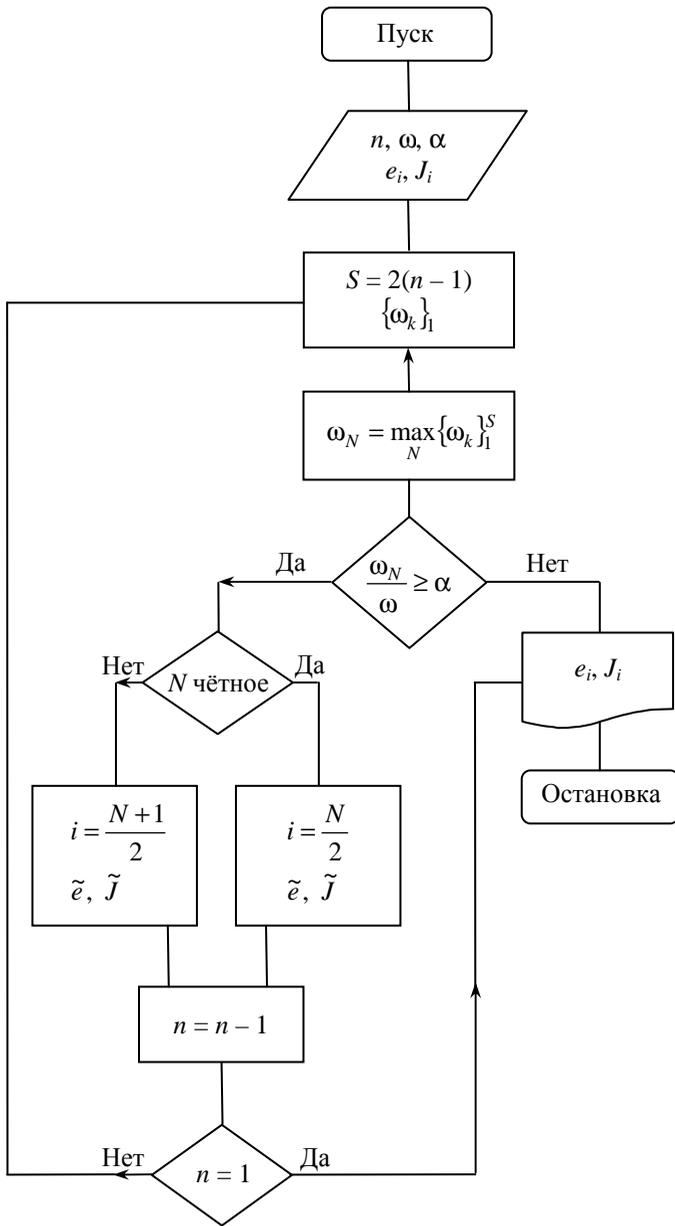


Рис. 14. Блок-схема алгоритма упрощения динамической расчётной схемы

6. Для упрощения динамической схемы по номеру N (принадлежащему парциальной системе с максимальной собственной частотой) выделяют из неё элементы $I_{N-1} - e_N - I_N - e_{N+1} - I_{N+1}$, если N – чётное, и элементы $e_{N-1} - I_N - e_{N+1} - I_{N+1} - e_{N+2}$, если N – нечётное.

7. Выделенным элементам системы при нечётном N присваивают значения:

$$\tilde{I}_{i-1} = I_{i-1} + I_i [e_{i+1}/(e_i + e_{i+1})]; \quad \tilde{e}_i = 0; \quad \tilde{I}_i = 0;$$

$$\tilde{e}_{i+1} = e_{i+1} + e_i;$$

$$\tilde{I}_{i+1} = I_{i+1} + I_i \cdot [e_i/(e_i + e_{i+1})]; \quad i = (N + 1)/2,$$

а при чётном – значения:

$$\tilde{e}_i = e_i + e_{i+1} [I_{i+1}/(I_i + I_{i+1})]; \quad \tilde{I}_i = I_i + I_{i+1};$$

$$\tilde{e}_{i+1} = 0; \quad \tilde{I}_{i+1} = 0;$$

$$\tilde{e}_{i+2} = e_{i+2} + e_{i+1} [I_i/(I_i + I_{i+1})]; \quad i = N/2.$$

8. Отбрасывают элементы $\tilde{I}_i = 0$ и $\tilde{e}_i = 0$ либо $\tilde{e}_{i+1} = 0$ и $\tilde{I}_{i+1} = 0$ (в зависимости от чётности N) и делают сквозную нумерацию $n - 1$ оставшихся масс и их податливых соединений. Таким образом, получают систему с $(n - 1)$ степенями свободы.

9. Возвращаются к пункту 1, приняв в качестве n значение $(n - 1)$.

Блок-схема алгоритма упрощения динамической расчётной схемы представлена на рис. 14.

2.2. УЧЁТ ДЕМПФИРУЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ ПРИВОДА В РАСЧЁТНОЙ СХЕМЕ

При проведении динамического расчёта привода необходимо знать характеристики демпфирования или рассеяние энергии колебаний, так как величина демпфирования определяет интенсивность крутильных колебаний и динамических нагрузок в приводе при резонансных режимах.

Демпфирование в приводе определяется электромагнитным демпфированием двигателя, рассеянием энергии в стыках (шпоночные и шлицевые соединения, опоры валов, неподвижные посадки) и в специальных упруго-демпфирующих элементах.

Рассеяние энергии в материале деталей можно не учитывать, так как относительное рассеяние энергии ψ мало $\psi \approx (0,01 \dots 0,02)$ для стыков $\psi \approx (0,6 \dots 1,2)$. Если в приводе нет специальных демпфирующих элементов (муфты, динамические гасители и т.п.), то демпфирование механической системы привода определяется рассеянием энергии в стыках.

После упрощения расчётная схема двухмассовой линейной динамической системы привода принимает следующий вид (на схеме рис. 15 наряду с массами и податливостями показаны элементы демпфирования, рассеивающие энергию колебаний).

Коэффициент h_1 определяется по формулам разд. 1.2.5. В механических элементах привода демпфирование соответствует логарифмическому декременту затухания $\lambda = (0,15 \dots 0,3)$, а коэффициент демпфирования h_2 можно определить по формуле:

$$h_2 = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{I_2}{e_2}}. \quad (37)$$

Составим дифференциальные уравнения системы, показанной на рис. 12. В качестве переменных состояния выберем $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – угловые отклонения приведённых масс I_1 и I_2 в системе координат, равномерно вращающейся со средней скоростью вала электродвигателя. Введём также обозначения

$$C_1 = \frac{1}{e_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{1}{e_2},$$

где C_1 и C_2 – коэффициенты жёсткости соответствующих участков цепи привода.

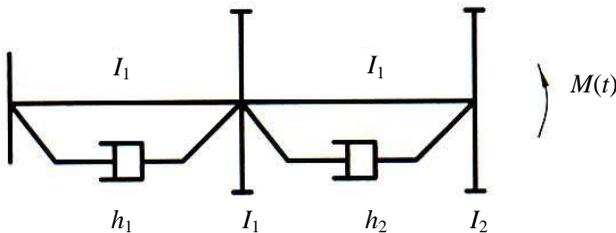


Рис. 15. Расчётная схема двухмассовой динамической системы привода:

h_1 – электромагнитное демпфирование электродвигателя;

h_2 – коэффициент демпфирования в механических элементах привода

Для разомкнутой системы, какой является рассматриваемая система привода, одним из основных показателей, характеризующих качество работы, является реакция на внешнее возмущающее воздействие. Рассмотрим случай возбуждения системы привода крутящим моментом $M(t)$, приложенным к шпинделю станка (рис.15). Момент $M(t)$ является переменной составляющей общего крутящего момента $M_{\text{вн}}(t)$, действующего на шпиндель:

$$M_{\text{вн}}(t) = M_0 + M(t), \quad (38)$$

где M_0 – постоянная составляющая момента. Составляющая $M(t)$ может быть вызвана переменностью сил резания при работе станка (при врезании инструмента, колебании припуска, фрезеровании и т.п.) или кинематическими погрешностями элементов привода (зубчатых колёс, ременных передач и др).

В последнем случае переменный момент $M(t)$ считаем приведённым к массе I_2 . Считая задачу исследования динамики привода линейной, т.е. не учитывая зазоры в передачах дифференциальные уравнения системы привода имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\varphi} + (h_1 + h_2) \dot{\varphi}_1 + (C_1 + C_2) \varphi_1 - h_2 \dot{\varphi}_2 - C_2 \varphi_2 &= 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + h_2 \dot{\varphi} + C_2 \varphi_2 - h_2 \varphi_1 - C_2 \varphi_1 &= M(t). \end{aligned} \quad (39)$$

Примечание. При нулевых начальных условиях к уравнениям применимо преобразование Лапласа, для этого символ дифференцирования заменяют на некоторое комплексное число:

$$\frac{d}{dt} = S; \quad \frac{dy}{dt} = S y; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = S^2 y \dots \dots \dots \frac{d^n y}{dt^n} = S^n y,$$

в результате

$$\begin{aligned} [I_1 S^2 + (h_1 + h_2) S + (C_1 + C_2)] \varphi_1(S) - (h_2 C + C_2) \varphi_2(S) &= 0; \\ -(h_2 S + C_2) \varphi_1(S) + [I_2 S^2 + h_2 S + C_2] \varphi_2(S) &= M(S). \end{aligned}$$

2.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ

Достаточно полную характеристику поведения привода при внешнем воздействии $M(t)$ даёт соответствующая передаточная функция. В зависимости от цели расчёта определяются следующие передаточные функции.

1) При исследовании динамических нагрузок в механической части привода

$$W_M(S) = \frac{M_{12}(S)}{M(S)}, \quad (40)$$

где $M_{12}(S)$ – изображение по Лапласу момента упругих сил в механической части привода при возбуждении привода моментом $M(S)$.

2) При исследовании крутильных колебаний шпинделя

$$W_\varphi(S) = \frac{\varphi_2(S)}{M(S)}, \quad (41)$$

где $\varphi_2(S)$ – изображение крутильных колебаний шпинделя при возбуждении привода моментом $M(S)$.

Используя правило Крамера, можно найти решение системы уравнений:

$$\varphi_1(S) = \frac{M(S)}{\Delta(S)} \begin{vmatrix} 0 & -(h_2 S + C_2) \\ I_2 S^2 + h_2 S + C_2 & \end{vmatrix} = \frac{(h_2 S + C_2)}{\Delta(S)} M(S); \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(S) &= \frac{\begin{vmatrix} I_1 S^2 + (h_1 + h_2)S + (C_1 + C_2) & 0 \\ -(h_2 S + C_2) & M(S) \end{vmatrix}}{\Delta(S)} = \\ &= \frac{I_1 S^2 + (h_1 + h_2)S + (C_1 + C_2)}{\Delta(S)} M(S), \end{aligned}$$

где

$$\Delta S = \begin{vmatrix} I_1 S^2 + (h_1 + h_2)S + (C_1 + C_2) & -(h_2 S + C_2) \\ -(h_2 S + C_2) & I_2 S^2 + h_2 S + C_2 \end{vmatrix},$$

ΔS – определитель системы уравнений.

Учитывая, что

$$M_{12}(S) = C_2 [\varphi_2(S) - \varphi_1(S)] = \frac{I_1 C_2 \left[\frac{C_1}{I_1} + \frac{h_1}{J_1} S + S^2 \right]}{\Delta S} M(S), \quad (43)$$

передаточная функция системы привода

$$W_M(S) = K_M \frac{a_{1M} + a_{2M} S + S^2}{b_1 + b_2 S + b_3 S^2 + b_4 S^3 + S^4};$$

где

$$\begin{aligned}
 K_M &= \frac{C_2}{I_2} = \frac{1}{e_2 I_2}; & a_{1M} &= \frac{C_1}{I_1} = \frac{1}{e_1 I_1}; \\
 a_{2M} &= \frac{h_1}{I_1}; & b_1 &= K_M a_{1M}; \\
 b_2 &= K_M \frac{h_1}{I_1} + a_{1M} \frac{h_2}{I_2}; \\
 b_3 &= K_M + a_{1M} + \frac{1}{e_2 I_1} + \frac{h_1 h_2}{I_1 I_2}; \\
 b_4 &= \frac{h_2}{I_2} + \frac{h_1}{I_1} + \frac{h_2}{I_1}.
 \end{aligned}$$

Используя вышеперечисленный ход решения, можно найти вторую передаточную функцию:

$$W_\varphi(S) = K_\varphi \frac{a_{1\varphi} + a_{2\varphi} S + S^2}{b_1 + b_2 S + b_3 S^2 + b_4 S^3 + S^4}, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned}
 K_\varphi &= \frac{1}{I_2}; & a_{1\varphi} &= \frac{(C_1 + C_2)}{I_1} = \frac{1}{e_1 I_1} + \frac{1}{e_2 I_2}; \\
 a_{2\varphi} &= \frac{(h_1 + h_2)}{I_1} = \frac{h_1}{I_1} + \frac{h_2}{I_2}.
 \end{aligned}$$

2.4. РАСЧЁТ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Выражения, полученные для передаточных функций, позволяют определить частотные характеристики системы привода при возбуждении крутящим моментом $M(t)$.

Исходными данными для этого является дробно-рациональная передаточная функция

$$W(S) = \frac{X_{\text{вых}}(S)}{X_{\text{вх}}(S)} = \frac{A(P)}{B(P)}, \quad (45)$$

где изображения выходного и входного сигналов по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned}
 A(P) &= b_0 P^3 + b_1 P^2 + b_2 P + b_3; \\
 B(P) &= C_0 P^6 + C_1 P^5 + C_2 P^4 + C_3 P^3 + C_4 P^2 + C_5 P.
 \end{aligned}$$

Переход от передаточной функции к амплитудно-фазовой частотной характеристике (АФЧХ) сводится к замене комплексного параметра S на jw .

После подстановки $S = jw$ амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы равна

$$W(jw) = \frac{b_0 j^3 w^3 + b_1 j^2 w^2 + b_2 jw + b_3}{C_0 j^6 w^6 + C_1 j^5 w^5 + C_2 j^4 w^4 + C_3 j^3 w^3 + C_4 j^2 w^2 + C_5 jw} =$$

$$= \frac{-jw^3 b_0 - w^2 b_1 + jwb_2 + b_3}{-w^6 C_0 + jw^5 C_1 + w^4 C_2 - jw^3 C_3 - w^2 C_4 + jw C_5} = \text{Re} + i\text{Im}.$$

Примечание. Чтобы выделить вещественную Re и мнимую $i\text{Im}$ частотные характеристики, необходимо умножить числитель и знаменатель амплитудно-фазовой характеристики на сопряженное со знаменателем комплексное число, т.е. на

$$\left(-w^6 C_0 + jw^5 C_1 + w^4 C_2 - jw^3 C_3 - w^2 C_4 + jw C_5\right).$$

Разделив вещественную и мнимую части амплитудно-фазовой характеристики $W(jw)$, следует подставить в них численные значения параметров системы.

Для построения АФЧХ задаются рядом значений частоты w , вычисляются модуль (амплитуда A) и аргумент (разность фаз φ_i по формулам:

$$A(w) = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2};$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{\text{Im}}{\text{Re}}.$$
(46)

Результаты расчёта сводятся в таблицу:

w	$\text{Re}(w)$	$\text{Im}(w)$	A	$\text{tg}\varphi$	φ , град

По точкам, нанесённым на комплексную плоскость $\text{Re} - \text{Im}$ необходимо построить амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы (рис. 16).

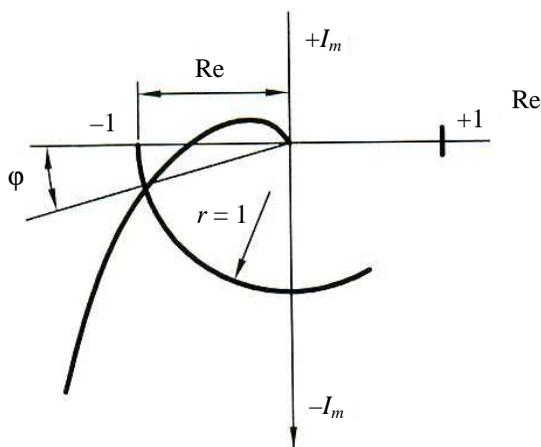


Рис. 16. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы

Примечание. По построенной амплитудно-фазовой характеристике оценивается устойчивость разомкнутой системы. Система является устойчивой, если АФЧХ не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$.

Для определения запаса устойчивости по фазе проводится окружность радиусом, равным единице, с центром в начале координат. Затем отрезком прямой начало координат соединяется с точкой пересечения АФЧХ с окружностью единичного радиуса.

Угол, образованный отрезком прямой с отрицательной вещественной осью, определяет запас устойчивости по фазе. Запас устойчивости по модулю определяется как выраженное в процентах отношение отрезка вещественной оси, заключенного между точкой $(-1; j0)$ и точкой пересечения АФЧХ с вещественной осью, к отрезку, равному единице, т.е. $(1 - \text{Re}) \cdot 100\%$.

Частотные характеристики системы привода позволяют не только определить её реакцию на внешнее воздействие, но и установить значение собственных частот колебаний (w_{c1} и w_{c2}). Значениям w_{c1} и w_{c2} соответствуют максимумы модуля соответствующей АФЧХ.

2.5. РАСЧЁТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ

Представление о собственных частотах линейной двухмассовой системы привода можно получить другим путём. Известно, что в реальных приводах главного движения станков демпфирование мало.

Пренебрегая им ($h_1 = h_2 = 0$) в уравнениях системы и заменяя S на jw , получим при равенстве нулю определителя $\Delta(S)$ характеристическое уравнение системы:

$$\begin{aligned}aw^4 + bw^2 + C &= 0; \\a &= I_1 I_2; \\b &= -(I_1 C_2 + I_2 C_1 + I_2 C_2); \\C &= C_1 C_2.\end{aligned}\tag{47}$$

Из него может быть найдено два различных действительных положительных корня:

$$w_{ci}^2 = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right) / 2a; \quad i = 1, 2, \dots,\tag{48}$$

а по ним значения w_{c1} и w_{c2} собственных частот системы привода, которые незначительно отличаются от истинных (определяемых с учётом демпфирования).

Примечание. Для каждой из собственных частот можно построить форму колебаний системы привода. Используя выражения для расчёта $\varphi_1(S)$ и $\varphi_2(S)$, можно найти относительные амплитуды крутильных колебаний приведённых масс привода на собственных частотах (при $h_1 = h_2 = 0$):

$$\frac{\varphi_2(w_{ci})}{\varphi_1(w_{ci})} = \frac{C_1 + C_2 - I_1 w_{ci}^2}{C_2}, \quad i = 1, 2, \dots.\tag{49}$$

Для каждой собственной частоты (w_{c1} и w_{c2}) значения относительных амплитуд колебаний можно графически изобразить на расчётной схеме системы в виде ординат, расположенных в тех сечениях валопровода, где находятся сосредоточенные массы. Линия, соединяющая концы ординат, называется формой колебаний на соответствующей собственной частоте (рис. 17).

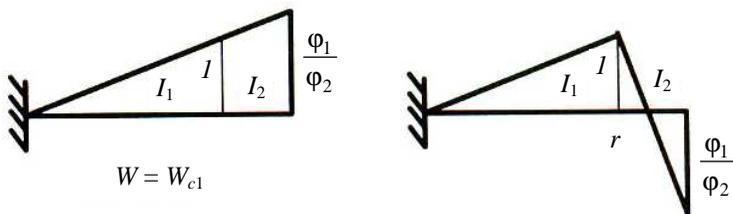


Рис. 17. Формы колебаний двухмассовой системы привода станка

Форма колебаний не только показывает относительные амплитуды собственных колебаний каждой массы системы, но позволяет найти узловые точки (точки пересечения формы колебаний с осью эквивалентного вала), т.е. те сечения валопровода, которые при колебаниях остаются неподвижными (на рис. 17 точка τ является узловой).

Если в расчётной схеме расстояния между массами изобразить отрезками, в определенном масштабе изображающими податливости соответствующих участков валопровода, то тангенсы углов наклона отдельных участков формы колебаний будут пропорциональны упругим крутящим моментам на этих участках. Следовательно, изображённая в масштабе форма колебаний даёт наглядное представление о напряжённости отдельных участков привода [4].

2.6. АНАЛИЗ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Частотная характеристика привода станка позволяет определить амплитудное значение момента при известной частоте возмущающего воздействия $M_{12}(t)$ при известной частоте w_b возмущающего воздействия $M(t)$

$$M_{12a} = (w_b) = |W_M(jw)| M_a(w_b), \quad (50)$$

где $M_{12a}(w_b)$ и $M_a(w_b)$ – амплитудные значения моментов $M_{12}(t)$ и $M(t)$ на частоте $w_b = 2\pi f_b$; $|W_M(jw)|$ – модуль АФЧХ привода.

Тогда общая величина момента упругих сил в механической части привода при установившемся режиме колебаний с частотой w_b возмущающего воздействия на шпиндель станка

$$M_{12\text{общ}}(w_b) = M_0 + M_{12a}(w_b), \quad (51)$$

где M_0 – постоянная составляющая момента на шпинделе. Естественно, что при $M_0 = \text{const}$ максимальные значения.

$M_{12a}(w_b)$ и $M_{12\text{общ}}(w_b)$ наблюдаются при совпадении частоты возмущающего воздействия w_b или её гармоник с одной из собственных частот w_{ci} (в данном случае w_{c2}) системы.

В этом случае имеет место явление резонанса. Величина $M_{12a}(t)$ при резонансе ($w_b = w_{c2}$) в значительной степени зависит от демпфирования в системе (в частности, от коэффициента демпфирования h_2). Для уменьшения $M_{12a}(w_b)$ необходимо увеличивать h_2 , что достигается встраиванием в привод различных демпферов или упруго – демпфирующих элементов (последнее обычно на высоких $n_{\text{шп}}$).

Другим путём уменьшения $M_{12a}(w_b)$, а следовательно, и $M_{12\text{общ}}(w_b)$, является отстройка системы от резонанса, т.е. изменение w_{c2} за счёт изменения таких параметров системы, как C_2, J_1, J_2 .

2.7. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Если АФЧХ позволяет определить реакцию системы в стационарном режиме, то кривая переходного процесса определяет её в переходном режиме. Определение свойств системы производится непосредственно путём оценки вида полученной кривой.

Построение кривой переходного процесса в системе привода производится по вещественной частотной характеристике $\text{Re}W(j\omega)$.

Если входное воздействие $M(t)$ представляет собой единичный скачок, то на выходе получается переходная функция системы:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Re}W(j\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (52)$$

Интегрирование этого выражения затруднительно, поэтому используют обычно приближённое решение, для чего вводится понятие единичной трапецеидальной вещественной характеристики (рис.18).

Примечание. Единичная трапецеидальная вещественная частотная характеристика представляет собой трапецию, высота которой равна единице, а основание, называемое частотой среза, равно $\omega'_{\text{ср}} = -1 \cdot \text{с}^{-1}$. Изменяющимся параметром является отношение меньшей параллельной стороны к большей (основанию), которое называется коэффициентом наклона.

$$x = \frac{\omega_{\text{с1}}}{\omega_{\text{ср}}} \quad (0 < x < 1). \quad (53)$$

Для единичных трапеций с различными X составлены таблицы h функций, т.е. значение функции времени $\tau = t\omega_{\text{ср}}$ условно соответствующие единичной трапеции с коэффициентом наклона X (табл. 1П).

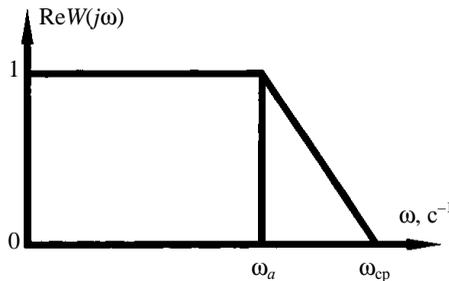


Рис. 18. Единичная трапецеидальная вещественная характеристика

Построение переходной характеристики $h(t)$ вещественной частотной характеристике методом трапеций состоит из следующих этапов:

1. Вещественную частотную характеристику $\text{Re}W(j\omega)$ системы (рис. 19) приближённо разбивают на ряд трапеций таким образом, чтобы при их сложении получилась исходная характеристика.

2. Определяют параметры трапеций. Для каждой i -й трапеции по графику определяют частоты ω_{ai}, ω_{ni} и высоту $\text{Re}W_{0i}$. Частоты отсчитывают от начала осей координат. По значениям ω_{ai}, ω_{ni} вычисляют коэффициент наклона $x = \frac{\omega_{ai}}{\omega_{ni}}$ и его значение округляют до 0,05.

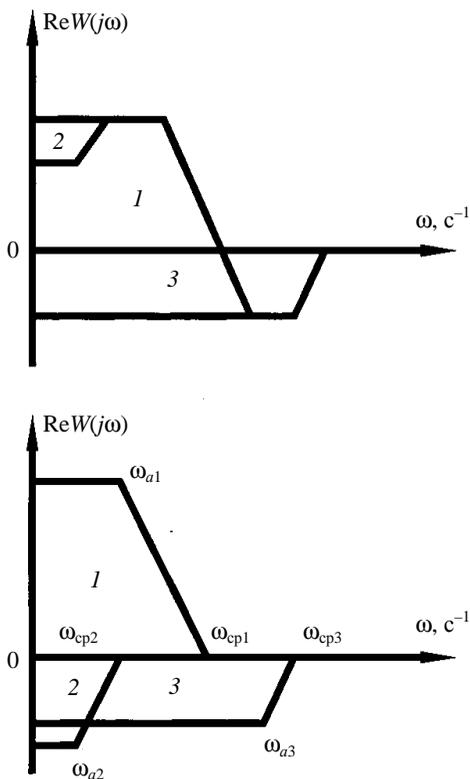


Рис. 19. Разложение вещественной частотной характеристики на трапецеидальные составляющие

Величине Re приписывают знак плюс, если меньшая параллельная сторона трапеции расположена выше большей, и знак минус, если наоборот. Сумма высот всех трапеций равна $Re(0)$. Параметры трапеций, аппроксимирующих характеристику $Re(w)$, заносятся в расчётную таблицу:

Номер трапеции	Re	w_d , рад/с	w_0 , рад/с	$x = \frac{w_d}{w_0}$

3. Определяют составляющие переходной характеристики. В таблице h -функции для каждой i -й трапеции отыскивают столбец, соответствующий значению X .

4. Построение h -функции проводят на общем графике с учётом следующих правил масштабов.

Поскольку таблица h -функций вычислена для трапеции с высотой $ReW_{0i} = 1$ и $w_0 = 1$, то для получения истинного значения ординат и абсцисс кривой переходного процесса следует ординаты кривых умножить на действительную высоту трапеции, ReW_{0i} , а каждый из табличных интервалов времени, необходимо делить на частоту среза соответствующей трапецеидальной характеристики

$$t = \frac{\tau}{w_{cpi}}. \quad (54)$$

Рассчитанные по таблицам h -функций отдельные составляющие переходного процесса сводятся в таблицу:

Номер трапеции	Параметры	τ							
	$h(\tau)$								
	t, c								
	$S_{\text{вых}}(t)$								

Иногда можно брать лишь часть h -функции. Чем больше значение w_{ni} , тем меньше точек h -функции нужно брать. При этом следует выбирать точки, равномерно отстоящие одна от другой и определяющие максимумы, и минимумы h -функции.

5. Строится график переходной характеристики. Ординаты переходной характеристики определяют суммированием ординат всех составляющих в выбранные моменты времени. Сначала определяют ординаты через равные промежутки времени. Затем определяют дополнительные точки там, где вероятны максимумы или минимумы характеристики и имеются максимумы или минимумы составляющих. После построения достаточного числа точек характеристики их соединяют плавной кривой.

Располагая вещественными частотными характеристиками $\text{Re}W_M(jw)$ и $\text{Re}W_\varphi(jw)$, можно построить переходные функции: $h_M(t)$ – для упругого момента в механической части привода; $h_\varphi(t)$ – для крутильных колебаний шпинделя.

Если на входе системы происходит скачок момента на величину M_0 , то для получения кривой переходного процесса в системе нужно ординаты соответствующей переходной функции в каждый момент времени увеличить в M_0 раз.

Для нахождения реакции системы привода на единичный импульс $\delta(t)$ момента, т.е. определения весовой функции $W(t)$ продифференцируем выражение

$$W(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}W(jw) \cos \omega t \, dw. \quad (55)$$

Если разбить исходную вещественную характеристику $\text{Re}W_M(jw)$ на h трапецеидальных характеристик, то можно данное выражение представить в виде

$$W(t) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \text{Re}W_i(jw) \cos \omega t \, dw. \quad (56)$$

В работе [1] показано, что это выражение приводится к виду

$$w_i = \frac{1-x_i}{2} w_{cpi}; \quad \Omega_i = \frac{1+x_i}{2} w_{cpi}; \quad A_i = \Omega_i \text{Re}W_i(0).$$

Следовательно, весовая функция может быть приближённо определена простым подсчётом её ординат для разных t и последующим построением по точкам.

При этом можно воспользоваться готовыми таблицами значений $\sin \alpha / \alpha$, которые содержатся в справочниках.

Как и в случае переходных функций, по вещественным частотным характеристикам $\operatorname{Re} W_M(j\omega)$ и $\operatorname{Re} W_\varphi(j\omega)$ можно построить весовые функции (импульсные переходные функции):

– для упругого момента в механической части привода $W_M(t)$;

– для крутильных колебаний шпинделя $W_\varphi(t)$.

2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ВХОДНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Для определения реакции системы привода на любую внешнюю возмущающую функцию $M(t)$, аналитическое выражение которой задано, можно воспользоваться интегралом свёртки

$$\begin{aligned} M_{12}(t) &= L^{-1}[W_M(S)M(S)]_t = W_M(t)M(t) = \int_0^t W_M(\tau)M(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_0^t W_M(t-\tau)M(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Примечание. Данное уравнение показывает, что реакция линейной системы привода на возмущающую функцию $M(t)$ есть свёртка реакции системы на единичный импульс и возмущающей функции.

Аналогично:

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= L^{-1}[W_\varphi(S)M(S)] = W_\varphi(t)M(t) = \int_0^t W_\varphi(\tau)M(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_0^t W_\varphi(t-\tau)M(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Если аналитические выражения весовых функций $W_M(t)$, $W_\varphi(t)$ и возмущающей функции $M(t)$ известны, то интеграл свёртки можно вычислить численными методами.

2.9. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКОГО КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ

Известно, что запас устойчивости и быстродействие системы можно оценить по виду кривой переходного процесса, например, при входном воздействии в виде единичного скачка момента на шпинделе станка.

Склонность системы к колебаниям, а, следовательно, и запас устойчивости можно характеризовать максимальным значением выходной величины $M_{12\max}$ (или $\varphi_{2\max}$) или перегулированием

$$G = \frac{M_{12\max} - M_{12}(\infty)}{M_{12}(\infty)}, \quad (57)$$

где $M_{12}(\infty) \neq 0$ – установившееся значение выходной величины после завершения переходного процесса.

Быстродействие системы определяется по длительности переходного процесса t_n , которая определяется как время от момента приложения на вход единичного скачка нагрузки до момента, после которого имеет место неравенство

$$| M_{12}(t) - M_{12}(\infty) | \leq \Delta, \quad (58)$$

где Δ – заданная малая постоянная величина.

Примечание. Обе эти характеристики также могут служить хорошими показателями динамического качества системы привода.

3. ДИНАМИКА МНОГОМАССНОЙ СИСТЕМЫ ПРИВОДА

3.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРИВОДА

Для уточнения динамических процессов происходящих в приводах, необходимо рассматривать более сложные модели, чем рассмотренная в предыдущих главах трёхмассная модель. При составлении таких моделей инерционные элементы будем нумеровать, начиная от двигателя, при этом выходному звену роторного двигателя присваивается нулевой номер. Величины обратные податливостям упругих элементов, т.е. жёсткости k и коэффициенты сопротивления с упругих элементов снабжаются двойными индексами, образуемыми номерами соединяемых инерционных элементов. В качестве обобщённых координат выбираются углы поворота твёрдых тел. Кинетическая энергия привода равна сумме кинетических энергий его инерционных элементов

$$T = \frac{1}{2} \sum_{S=1}^n \tilde{I}_S \dot{q}_S^2, \quad (59)$$

где n – число инерционных элементов привода, не считая ротора двигателя. Пусть i_{1S} – передаточное отношение, связывающее ротор с выходным звеном S -го инерционного элемента.

Обобщённой координатой S -го инерционного элемента, приведённой к ротору, будет называться величина

$$\Phi_S = i_{1S} q_S,$$

где q_S – абсолютная координата.

Для привода, показанного на рис. 20, приведёнными координатами будут

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= q_1; \quad \Phi_2 = q_2 i_{12}; \quad \Phi_3 = q_3 i_{13}; \quad \Phi_4 = q_4 i_{14}; \\ \Phi_6 &= q_6 i_{16}; \quad \Phi_7 = q_7 i_{17}. \end{aligned} \quad (60)$$

В приводе с упругими элементами начало отсчета q_S выбирают таким образом, чтобы все Φ_S равнялись q_1 при недеформированных упругих элементах. Перейдём в (61) к координатам (60).

$$T = \frac{1}{2} \sum_{S=1}^n I_S \dot{\Phi}_S^2, \quad (61)$$

где $I_S = i_{iS}^{-2} \tilde{I}_S$ – момент инерции S -го элемента, приведённый к оси ротора. Выражение (61) можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^T I \dot{\varphi}, \quad (62)$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{II} \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{II} \end{pmatrix} = \text{diag}(I_1, I_2, \dots, I_{II}), \quad (64)$$

где n – мерный вектор столбец и диагональная матрица $n \times n$ – матрица.

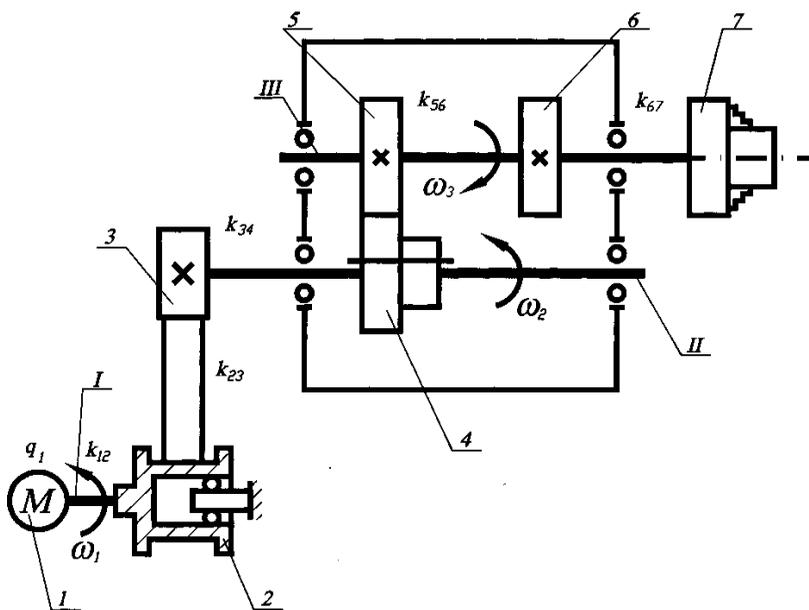


Рис. 20. Кинематическая схема привода главного движения станка

Активными силами в приводе являются упругие и диссипативные силы, возникающие при деформации упругих элементов; движущие силы, приводящиеся к движущему моменту M_1 , приложенному к ротору двигателя; силы сопротивления (сила резания, силы внешнего трения). Для составления уравнений Лагранжа второго рода необходимо определить обобщённые силы, соответствующие всем этим активным силам. Рассмотрим силы, действующие на S -й инерционный элемент (рис. 21); q_S – угол поворота его входного звена. Силы сопротивления, приложенные к звеньям этого механизма, могут быть сведены к обобщённой силе сопротивления – приведённому моменту M_S .

Деформация упругого элемента, соединяющего S -й и $(S - 1)$ -й инерционные элементы равна

$$\theta_{S-1, S} = q_{S-1} i_1, S - 1/i_{1S} - q_S.$$

Момент упругих и диссипативных сил, возникающих в этом элементе, определяем по формуле

$$M_{S-1, S} = k_{S-1, S} (q_{S-1} i_{1, S-1} / i_{1S} - q_S) + c_{S-1, S} (\dot{q}_{S-1} i_{1, S-1} / i_{1S} - \dot{q}_S) = [k_{S-1, S} (\varphi_{S-1} - \varphi_S) + c_{S-1, S} (\dot{\varphi}_{S-1} - \dot{\varphi}_S)] / i_{1S}. \quad (65)$$

Аналогично находим момент в упругом элементе, соединяющем S -й и $(S + 1)$ -й элементы:

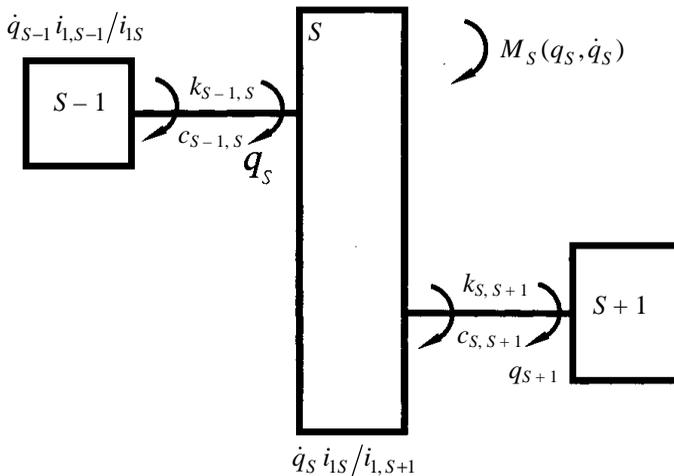


Рис. 21. Модель инерционного элемента

$$M_{S, S+1} = k_{S, S+1}(q_{S+1} - q_S i_{1S}/i_{1, S+1}) + c_{S, S+1}(\dot{q}_{S+1} - \dot{q}_S i_{1S}/i_{1, S+1}) = \\ = [k_{S, S+1}(\varphi_{S+1} - \varphi_S) + c_{S, S+1}(\dot{\varphi}_{S+1} - \dot{\varphi}_S)]/i_{1, S+1}. \quad (66)$$

Работа всех сил на возможном перемещении

$$\delta A = i_{1S}^{-1} [M_S \delta \varphi_S + M_{S-1, S} \delta \varphi_S] + M_{S, S+1} \delta \varphi_S i_{1, S+1}^{-1}.$$

Таким образом, обобщённая сила равна

$$Q_S = i_{1S} [M_S + M_{S-1, S}] + i_{1, S+1}^{-1} M_{S, S+1} = i_{1S}^{-1} M_S (\varphi_S i_{0S}^{-1}, \dot{\varphi}_S i_{1S}^{-1}) + \\ + k_{S-1, S} i_{1S}^{-2} (\varphi_{S-1} - \varphi_S) + b_{S-1, S} i_{1S}^{-2} (\dot{\varphi}_{S-1} - \dot{\varphi}_S) + \\ + k_{S, S+1} i_{1, S+1}^{-2} (\varphi_{S+1} - \varphi_S) + b_{S, S+1} i_{1, S+1}^{-2} (\dot{\varphi}_{S+1} - \dot{\varphi}_S) = \quad (67) \\ = \dot{M}_S - k_{S-1, S}^* (\varphi_{S-1} - \varphi_S) + c_{S-1, S}^* (\dot{\varphi}_{S-1} - \dot{\varphi}_S) + \\ + k_{S, S+1}^* (\varphi_{S+1} - \varphi_S) + c_{S, S+1}^* (\dot{\varphi}_{S+1} - \dot{\varphi}_S).$$

Здесь $M_S^*(\varphi_S, \dot{\varphi}_S)$ момент сил сопротивления, приведённый к ротору двигателя:

$$M_S^*(\varphi_S, \dot{\varphi}_S) = i_{1S}^{-1} M_S (\varphi_S i_{1S}^{-1}, \dot{\varphi}_S i_{1S}^{-1}). \quad (68)$$

При $S = 1$ вместо M_S^* следует подставить M_1 . Приведённые к ротору жёсткости и коэффициенты сопротивления определяются формулами:

$$k_{S-1, S}^* = k_{S-1, S} i_{1S}^{-2}; \quad k_{S, S+1}^* = k_{S, S+1} i_{1, S+1}^{-2}; \\ c_{S-1, S}^* = c_{S-1, S} i_{1S}^{-2}; \quad c_{S, S+1}^* = c_{S, S+1} i_{1, S+1}^{-2}. \quad (69)$$

Примечание. Когда одним из упругих элементов является зубчатое зацепление, в выражения подставляется жёсткость передачи $k = c d^2 B$, где d – начальный диаметр колеса, к оси которого приводится жёсткость; B – ширина зубчатого венца, c – коэффициент определяемый экспериментально.

Уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_S} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_S} \right) = Q_S \quad (70)$$

после преобразования принимают вид:

$$\begin{aligned}
 J_S \ddot{\varphi}_S &= k_{S-1, S}^* (\varphi_{S-1} - \varphi_S) + c_{S-1, S}^* (\dot{\varphi}_{S-1} - \dot{\varphi}_S) + \\
 &+ k_{S, S+1}^* (\varphi_{S+1} - \varphi_S) + c_{S, S+1}^* (\dot{\varphi}_{S+1} - \dot{\varphi}_S) + M_S^*, \quad (71) \\
 S &= 2, 3, \dots, n; \\
 J_1 \ddot{\varphi}_1 &+ k_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + c_{12} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = M_1.
 \end{aligned}$$

Добавив к (73), динамическую характеристику двигателя, получим

$$\tau \dot{M}_1 + M_1 = M_{\text{ст}}, \quad (72)$$

где τ – собственная постоянная времени двигателя, получим замкнутую систему уравнений движения привода станка.

Представляя момент в форме

$$M_S^* = M_{SO}^* + \tilde{M}_S^*, \quad M_{\text{ст}} = M_{\text{до}} + \tilde{M}_{\text{ст}}; \quad (73)$$

$$M_{SO}^* - (2\pi i_S)^{-1} \int_0^{2\pi i_S} M_S^* d\varphi_S; \quad M_{\text{до}} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} M_{\text{ст}} dq_1,$$

система принимает вид:

$$\begin{aligned}
 I_{S1} \ddot{\varphi}_S &+ c_{S-1, S} (\dot{\varphi}_S - \dot{\varphi}_{S-1}) + c_{S, S+1} (\dot{\varphi}_S - \dot{\varphi}_{S+1}) + \\
 &+ k_{S-1, S} (\varphi_S - \varphi_{S-1}) + k_{S, S+1} (\varphi_S - \varphi_{S+1}) - M_{SO} = \tilde{M}_S, \quad (74) \\
 s &= 2, 3, \dots, n;
 \end{aligned}$$

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{12} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + k_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) - M_1 = 0; \quad (75)$$

$$\tau \dot{M}_1 + M_1 - M_{D0} = \tilde{M}_{\text{ст}}. \quad (76)$$

где звёздочки опущены.

Уравнения (74), (75), (76) можно записать в форме одного векторного уравнения:

$$I \ddot{\varphi} + c \dot{\varphi} + k \varphi = M(u, \varphi) + U(u, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}), \quad (77)$$

где

$$I = \text{diag}(I_1, I_2, \dots, I_{\Pi})$$

$$c = \begin{pmatrix} c_{12} & -c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -c_{12} & c_{12} + c_{23} & -c_{23} & \dots & 0 \\ 0 & -c_{23} & c_{23} + c_{24} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{\Pi-1, \Pi} \end{pmatrix}; \quad (78)$$

$$k = \begin{pmatrix} k_{12} & -k_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -k_{12} & k_{12} + k_{23} & -k_{23} & \dots & 0 \\ 0 & -k_{23} & k_{23} + k_{24} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{\Pi-1, \Pi} \end{pmatrix}; \quad (79)$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{D0}(u, \dot{\varphi}_1) \\ M_{10}(\dot{\varphi}_2) \\ \dots \\ M_{D0}(\dot{\varphi}_n) \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} U_0(U\dot{\varphi}_1\varphi_1) \\ U_1(\varphi_1\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) \\ \dots \\ U_n(\varphi_n\dot{\varphi}_n\ddot{\varphi}_n) \end{pmatrix}; \quad (80)$$

$$U_0 = M_{\text{cr}}(U, \dot{\varphi}_1, \varphi_1);$$

$$U_S = -\tilde{I}_S(\varphi_S)\ddot{\varphi}_S + \tilde{M}_S(\varphi_S, \dot{\varphi}_S). \quad (81)$$

Примечание. Уравнения описывают движение механической системы, изображённой на рис. 22.

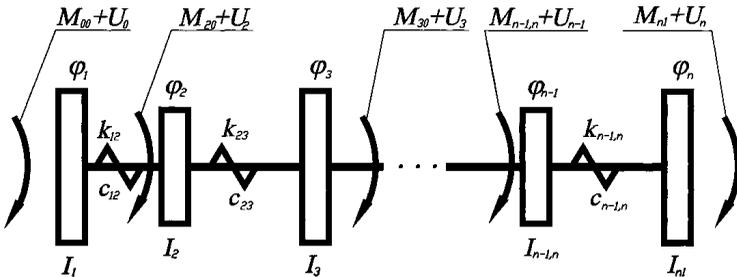


Рис. 22. Приведённая модель свободной цепной системы

Введём новую систему обобщённых координат:

$$\varphi_1, \psi_3 = \varphi_s - \varphi_1; \quad s = 2, 3, \dots, n. \quad (82)$$

Координаты φ_3 определяют приведённые углы поворота входных звеньев инерционных элементов относительно ротора. В новых координатах уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} I_{S1} \ddot{\psi}_S + c_{S-1, S} (\dot{\psi}_S - \dot{\psi}_{S-1}) + c_{S, S+1} (\dot{\psi}_S - \dot{\psi}_{S+1}) + \\ + k_{S-1, S} (\psi_S - \psi_{S-1}) + k_{S, S+1} (\psi_S - \psi_{S+1}) = \\ = M_{S0} (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\psi}_S) + U_S (\varphi_1 + \psi_S), \quad (\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_S, \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\psi}_S); \end{aligned} \quad (83)$$

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 - c_{12} \dot{\psi}_1 - k_{12} \psi_1 = M_1. \quad (84)$$

Этой системе соответствует приведённая модель цепной системы с закреплённой первой массой, изображённая на рис. 23.

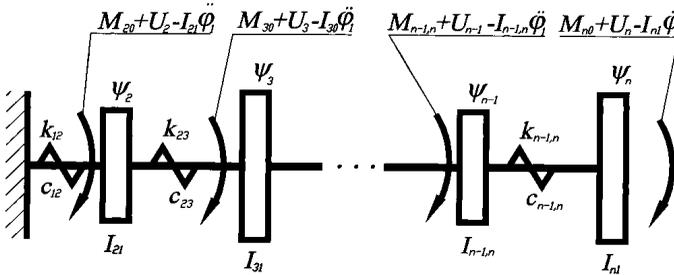


Рис. 23. Приведённая модель системы с закреплённой массой

3.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЦЕПНОЙ СИСТЕМЫ ПРИВОДА

Представим уравнение (84) в операторной форме:

$$(Ip^2 + cp + K)\varphi = M + U. \quad (85)$$

Решая его относительно φ , получаем

$$\varphi = (Ip^2 + cp + K)^{-1}(M + U) = E(p)(M + U). \quad (86)$$

Матрица

$$E(p) = (Ip^2 + cp + K)^{-1} = \|e_{rs}(p)\|_{r, S=1}^{\Pi}. \quad (87)$$

называется матрицей операторов динамической податливости, а её элементы $e_{rs}(p)$ – операторами динамической податливости привода. Операторы динамической податливости – передаточные функции, связывающие входные воздействия $M_{SO} + U_S$ с выходными параметрами системы – приведёнными углами поворота.

$$\Phi_r = \sum_{S=1}^n e_{rS}(p)(M_{SO} + U_S), \quad r = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (88)$$

Определение операторов $e_{rS}(p)$ связано с обращением матриц, элементы которых являются полиномами от p , а коэффициенты этих полиномов представляют собой инерционные, упругие и диссипативные параметры механической системы. В результате получаются сложные выражения, по которым трудно проследить влияние отдельных параметров. Поэтому, исследуя общие свойства колебательных систем, получим передаточные функции в более удобной для анализа форме.

3.3. СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ

В общем случае уравнения свободных колебаний цепной системы, изображённой на рис. 23, может быть записано в векторной форме

$$I\ddot{\varphi} + K\varphi = 0. \quad (89)$$

Оно получается при $c = 0$, $M + U = 0$. Аналогично для системы с закреплённым концом:

$$I^0\ddot{\psi} + K^0\psi = 0, \quad (90)$$

где I^0 , K^0 – получаются из матриц I , K вычёркиванием первой строки первого столбца. Таким образом, анализ обоих уравнений будем вести одновременно.

Частное решение уравнения (89) ищем в виде

$$\varphi = A \cos(kt + \alpha). \quad (91)$$

Подставляя (91) в (89), получаем векторное уравнение для A :

$$(K - Ik^2)A = 0. \quad (92)$$

Эта система однородных уравнений имеет ненулевое решение, если

$$\det(K - Ik^2) = 0. \quad (93)$$

Это частотное уравнение имеет следующую структуру:

$$\begin{vmatrix} k_{12} - Ik^2 & -k_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -k_{12} & k_{12} + k_{23} - I_{21}k^2 & -k_{23} & \dots & 0 \\ 0 & -k_{23} & k_{23} + k_{34} - I_{31}k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1, n} - I_{n1}k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (94)$$

Аналогичное частотное уравнение для системы с закреплённым концом имеет вид

$$\begin{vmatrix} k_{12} + k_{23} + I_{21}k^2 & -k_{23} & \dots & 0 \\ -k_{23} & k_{23} + k_{34} - I_{31}k^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1, n} - I_{n1}k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (95)$$

Уравнение (94) всегда имеет корень $k_1^2 = 0$, соответствующий вращению системы как жёсткого механизма.

Остальные корни k_S^2 являются положительными числами и, следовательно, цепная система имеет $n - 1$ ненулевых собственных частот. Для цепных неразветвлённых систем все корни являются различными. Пронумеруем их в порядке возрастания:

$$k_1^2 < k_2^2 < k_3^2 \dots < k_n^2$$

Для каждого K_S^2 уравнение (91) имеет бесчисленное множество решений, так как оно представляет собой систему линейных однородных алгебраических уравнений, с определителем равным нулю. Эти решения представим в форме

$$A_S = l \begin{vmatrix} 1 \\ A_{S2} \\ \dots \\ A_{Sn} \end{vmatrix}, \quad (96)$$

где l – произвольный скалярный множитель.

Положив $A_{S1} = 1$ из (87) можно однозначно определить все остальные компоненты векторов A_S , которые и называются собственными формами колебаний системы. Вектор A_1 соответствующий частоте $k_1 = 0$ состоит из единиц и соответствует вращению системы как жёсткого механизма.

Примечание. Аналогично для каждого значения k_S^0 системы с закреплённым концом можно однозначно определить все компоненты векторов A_S^0 собственных форм. Собственные частоты всегда удовлетворяют условиям

$$k_0 < k_1^0 < k_1 < k_1^2 < \dots < k_n^0 < k_n. \quad (97)$$

Любые две собственные формы A_S и A_m ортогональны в метриках I и K . Действительно, так как A_S и A_m являются решениями уравнения (94), должны выполняться равенства:

$$K A_S = k_S^2 I A_S, \quad K A_m = k_m^2 I A_m.$$

Умножим скалярно первое равенство на A_m , а второе на A_S и вычтем из первого второе. Получим

$$(K A_S)^T A_m - (K A_m)^T A_S = k_S^2 (I A_S)^T A_m - k_m^2 (I A_m)^T A_S, \quad (98)$$

но K и I – симметричные матрицы, поэтому

$$(K A_S)^T A_m = (K A_m)^T A_S \text{ и} \\ (I A_S)^T A_m = (I A_m)^T A_S.$$

Учитывая это, получим из (94)

$$(k_S^2 - k_m^2) (I A_S)^T A_m = 0,$$

но $k_S \neq k_m$, следовательно, $(I A_S)^T A_m = 0$. Тогда из соотношения

$$(k A_S)^T A_m = k_S^2 (I A_S)^T A_m$$

следует, что $(k A_S)^T A_m = 0$. Аналогично можно доказать, что собственные формы A_S^0 и A_m^0 ортогональны в метриках K^0 и I^0 .

Векторы собственных форм являются линейно независимыми, т.е. равенство

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = 0$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Линейно независимыми являются и формы A_S^0 . Это следует из того, что

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} A_{11}^0 & A_{21}^0 & \dots & A_{n1}^0 \\ A_{12}^0 & A_{22}^0 & \dots & A_{n2}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}^0 & A_{2n}^0 & \dots & A_{nn}^0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В последовательности чисел $A_{S1}A_{S2}\dots A_{Sn}$ образующих S -ю форму простой цепной системы с незакреплёнными концами, имеются всегда $S-1$ перемена знака. Соответственно S -я форма имеет $S-1$ узел. В системе с закреплёнными концами S -я форма имеет $S-2$ перемены знака, число её узловых точек, включая закреплённый конец также равно $S-1$. Таким образом, определив какую-нибудь собственную форму и собственную частоту колебаний, можно определить их порядковый номер по числу узловых точек (числу перемен знака) формы.

Умножив обе части равенства $KA_S = k_S^2 IA_S$ скалярно на A_S , получим

$$(KA_S)^T A_S = k_S^2 (IA_S)^T A_S.$$

Отсюда находим

$$k_S^2 = \frac{(KA_S)^T A_S}{(IA_S)^T A_S}, \quad S = 1, 2, \dots, n. \quad (99)$$

Таким образом, квадраты собственных частот могут быть выражены через собственные формы системы. Аналогично, для системы с закреплённым концом

$$(k_S^0)^2 = \frac{(K A_S^0)^T A_S}{(I A_S^0)^T A_S}, \quad S = 1, 2, \dots, n. \quad (100)$$

В скалярной форме (99), (100) имеют вид:

$$k_S^2 = \frac{\sum_{m=1}^{n-1} k_{m, m+1} (A_{Sm} - A_{S, m+1})^2}{\sum_{m=1}^n I_{m1} A_{Sm}^2}. \quad (101)$$

$$(k_S^0)^2 = \frac{\sum_{m=1}^n k_{m-1, m} (A_{Sm}^0 - A_{S, m-1}^0)^2}{\sum_{m=1}^n I_{m0} (A_{Sm}^0)^2}, \quad S = 1, 2, \dots, n. \quad (102)$$

3.4. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПРИВодОВ

При свободных колебаниях консервативной цепной системы со свободными концами все массы колеблются по гармоническому закону: или в одной и той же фазе, или в противофазе. По гармоническому закону, следовательно, изменяются и моменты, возникающие в упругих элементах. Рассмотрим некоторый упругий элемент, выделенный из цепной системы и имеющий жёсткость k_0 (рис. 24, а).

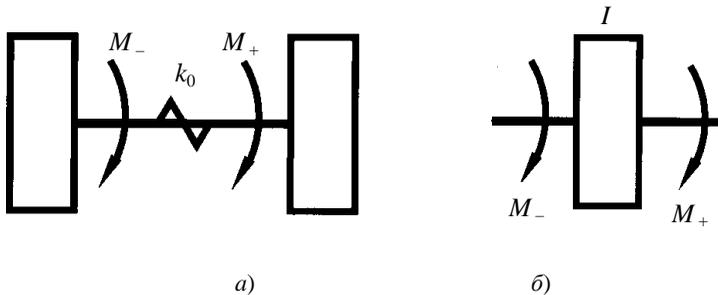


Рис. 24. Выделенные упругий и инерционный элементы цепной системы

Пусть

$$\varphi_-(t) = a_- \cos(kt), \quad \varphi_+ = a_+ \cos(kt).$$

Законы движения масс, расположенных слева и справа от этого элемента, а

$$M_-(t) = \mu_- \cos(kt), \quad M_+ = \mu_+ \cos(kt).$$

Законы изменения упругих моментов, возникающих в крайних сечениях элемента при свободных колебаниях с частотой k . Так как сам элемент имеет нулевую массу, то

$$\mu + \cos kt = \mu_- \cos(kt).$$

Но крутящий момент $M(t)$ вызывает закручивание элемента на угол $M(t)/k_0$, поэтому

$$\varphi_+ = \varphi_- + M_-(t)e; \quad a_+ \cos kt = a_- \cos(kt) + e\mu_- \cos(kt),$$

где $e = k_0^{-1}$ – податливость элемента.

Сокращая полученные равенства на $\cos kt$, приходим к следующим соотношениям между амплитудами углов поворота и моментов на левом и правом концах элемента:

$$a_+ = a_- + e\mu_-, \quad \mu_+ = \mu_-. \quad (103)$$

Введём в рассмотрение двумерные векторы-столбцы

$$r_- = \begin{Bmatrix} a_- \\ \mu_- \end{Bmatrix}, \quad r_+ = \begin{Bmatrix} a_+ \\ \mu_+ \end{Bmatrix}.$$

Тогда выражения (103) запишутся в виде

$$r_+ = \tilde{A}_e r_- /$$

Матрица

$$\tilde{A}_e = \begin{Bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

называется матрицей переноса через упругий элемент.

Аналогично для выделенного инерционного элемента:

$$\varphi_+ = \varphi_-, \quad a_+ = a_-.$$

Составим уравнение движения массы I :

$$I\ddot{\varphi}_- = M_+ - M_- .$$

но так как $\ddot{\varphi}_- = -a_- k^2 \cos(kt)$, то

$$-Ik^2 a_- \cos(kt) = (\mu_+ - \mu_-) \cos(kt),$$

или

$$\mu_+ = \mu_- - Ik^2 a_- .$$

Полученные соотношения между a_- , μ_- , a_+ , μ_+ , могут быть записаны в матричной форме:

$$r_+ = \tilde{A}_I r_- ,$$

где

$$\tilde{A}_I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -Ik^2 & 1 \end{vmatrix} = A_I(k^2)$$

является матрицей переноса через инерционный элемент I .

Рассмотрим четырёхмассовую систему (рис. 25).

Обозначив через r_{S-} и r_{S+} векторы амплитуд слева и справа от S -й массы, будем проходить систему слева направо, последовательно применяя матрицы переноса через первую массу $\tilde{A}_{I_1}(k^2)$ через элемент с жёсткостью $k_{12} - \tilde{A}_{e_{12}}$ через вторую массу $\tilde{A}_{I_2}(k^2)$ и т.д.

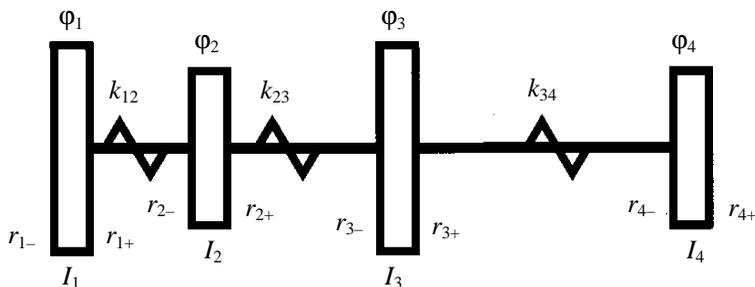


Рис. 25. Определение собственных частот колебаний цепной системы со свободными концами

При этом

$$r_{1+} = \tilde{A}_{J1}(k^2) r_{1-}; \quad r_{2-} = \tilde{A}_{e12} r_{1+} = \tilde{A}_{e12} \tilde{A}_{J1}(k^2) r_{1-} \text{ и т.д.}$$

Дойдя до сечения справа от n -й массы, найдём

$$r_{n+} = \tilde{A}_{In}(k^2) \tilde{A}_{en-1,n} \tilde{A}_{In-1}(k^2) \dots \tilde{A}_{e12} \tilde{A}_{J1} r_{0-} = \tilde{A}(k^2) r_{-}. \quad (104)$$

Матрица A , равная произведению всех матриц переноса, зависит от k^2 .

Пусть

$$\tilde{A}(k^2) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(k^2) & \alpha_{12}(k^2) \\ \alpha_{21}(k^2) & \alpha_{22}(k^2) \end{vmatrix}.$$

Тогда скалярные аналоги соотношения (106) имеют вид

$$\begin{aligned} a_{n+} &= \alpha_{11}(k^2) a_{1-} + \alpha_{12}(k^2) \mu_{1-}; \\ \mu_{n+} &= \alpha_{21}(k^2) a_{1-} + \alpha_{22}(k^2) \mu_{1-}. \end{aligned} \quad (105)$$

Так как оба конца системы привода свободны, то $\mu_{1-} = \mu_{n+} = 0$, но $a_{1-} \neq 0$, поэтому из второго уравнения следует, что

$$\alpha_{21}(k^2) = 0. \quad (106)$$

Примечание. Уравнение (106) является частотным уравнением системы со свободными концами. Для системы с закреплённым концом уравнение, связывающее амплитуды углов и моментов на концах, принимает форму

$$r_{n+} = I_n(k^2) \tilde{A}_{en-1,n} \dots \tilde{A}_{e12} r_{1+} = \tilde{A}^0(k^2) r_{1+}. \quad (107)$$

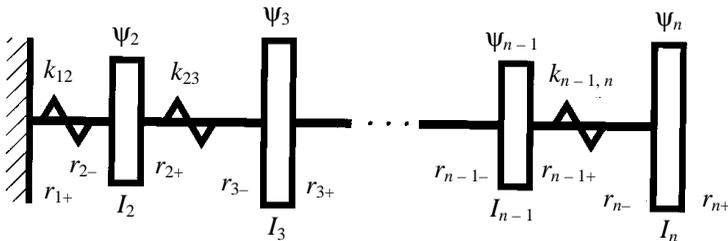


Рис. 26. Определение собственных частот колебаний системы с закреплённым концом

Сравнивая (103) с (100), получаем

$$\tilde{A}^0(k^2) \tilde{A}_{I1}(k^2) = \tilde{A}(k^2);$$

из условия $a_{1+} = 0, H_{1+} \neq 0$ получаем частотное уравнение

$$\alpha_{22}^0(k^2) = 0. \quad (108)$$

При практическом применении метода матриц переноса в матрицы \tilde{A}_3 подставляют пробные значения k^2 или $(k^0)^2$, матрицы перемножают и вычисляют значения α_{21} или α_{22}^0 . Перемена знака α_{21} при переходе от k_*^2 к k_{**}^2 , или знака α_{22}^0 при переходе от $(k_*^0)^2$ к $(k_{**}^0)^2$ означает, что в соответствующем интервале имеется, по крайней мере, одна собственная частота. Добавочными пробами уточняются значения k или k^0 , при которых α_{21} или α_{22}^0 обращаются в нуль.

После определения собственной частоты k_S^2 можно определить собственную форму A_S . Для этого в системе со свободными концами задаемся вектором $r_{1-} = (1, 0)^T$ (учитывая, что $M_{1-} = 0, a_{1-} = A_{S1} = 1$), а затем, последовательно умножая его слева на матрицы A_{I1} , A_{e11} и т.д., находим векторы r_{m-} и r_{m+} . Первые компоненты этих векторов определяют коэффициенты A_{Sm} . В системе с закреплённым концом принимаем $r_{1+} = (0, k_{12})^T$. Умножая этот вектор на \tilde{A}_{e12} , получаем $r_{1-} = (e_{12}, k_{12}, k_{12}) = (1, k_{12})^T$; при этом значение коэффициента формы на первой массе A_{S1}^0 оказывается равным 1, что соответствует принятой выше договоренности. Остальные элементы A_S^0 находим, последовательно умножая r_{1-} на последующие матрицы переноса.

После определения собственных частот, собственные формы могут быть найдены и без использования матриц переноса. Раскрывая векторное уравнение (84) при $k = k_S$, получаем систему скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} (k_{12} - J_1 k_S^2) A_{S1} - k_{12} A_{S2} &= 0; \\ -k_{m-1, m} A_{S, m-1} + (k_{m-1, m} + k_{m, m+1} - J_{m1} k_S^2) A_{Sm} - k_{m, m+1} A_{S, m+1} &= 0. \end{aligned}$$

Приняв $A_{S1} = 1$, можно из этих уравнений определить остальные элементы S -й собственной формы:

$$A_{S1} = 1; \quad A_{S2} = (k_{12} - I_1 k_S^2) k_{12}^{-1};$$

$$A_{S, m+1} = k_{m, m-1}^{-1} [(k_{m-1, m} + k_{m, m+1} - I_{m1} k_S^2) A_{Sm} - k_{m-1, m} A_{S, m-1}], \quad (109)$$

$$(m = 1, 2, \dots, n-1).$$

Аналогично можно найти элементы собственной формы A_S^0 :

$$A_{S1}^0 = 1; \quad A_{S2}^0 = [k_{12} + k_{23} + -I_{21} (k_S^0)^2] k_{23}^{-1};$$

$$A_{S, m+1}^0 = k_{m, m+1}^{-1} \{ [k_{m-1, m} + k_{m, m+1} - I_{m1} (k_S^0)^2] A_{Sm}^0 - k_{m-1, m} A_{S, m-1}^0 \}, \quad (110)$$

$$(m = 2, 3, \dots, n-1).$$

Примечание. Для приближённого определения собственных частот можно использовать метод Релея. Метод Релея основан на использовании формул (95), (96). При их применении задаются приближёнными собственными формами. При этом оказывается, что даже грубое приближение при выборе собственной формы даёт достаточно точные значения собственных частот. Приближённые формы колебаний выбирают, используя свойства, рассмотренные ранее, прежде всего, – правило числа перемен знака. Применим метод Релея к системе, изображённой на рис. 27.

У первой собственной формы нет перемен знака, поэтому выберем $A_1^0 = (1, 2)^T$, подставив которое в (102), получаем

$$(k_1^0)^2 = \frac{k_{12}(A_{11}^0)^2 + k_{23}(A_{11}^0 - A_{12}^0)^2}{I_2(A_{11}^0)^2 + I_3(A_{12}^0)^2} = \frac{k_{12} + k_{23}}{I_2 + 4I_3}.$$

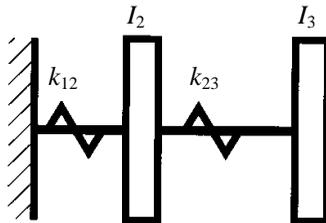


Рис. 27. Модель колебательной системы

При $k_{12} = k_{23} = k$, $I_2 = I_3 = I$ имеем $(k_1^0)^2 \approx 0,4k/I$. Этот результат лишь на 4,5% отличается от точного значения $(k_1^0)^2 = 0,5(3 - \sqrt{5})k/I = 0,382k/I$. Для определения второй собственной частоты выберем вторую собственную форму с одной переменной знака $A_2^0 = (1, -1)^T$. Тогда

$$(k_2^0)^2 = \frac{k_{12}(A_{21}^0)^2 + k_{23}(A_{21}^0 - A_{22}^0)^2}{I_2(A_{21}^0)^2 + I_3(A_{22}^0)^2} = \frac{k_{12} + 44k_{23}}{I_2 + I_3}.$$

При $k_{12} = k_{23} = c$, $I_2 = I_3 = I$ получаем $(k_2^0)^2 = 2,5k/I$, что на 4,7% отличается от точного значения $(k_1^0)^2 = 2,618k/I$.

При анализе динамики приводов металлорежущих станков важно определить первую собственную частоту и первую форму колебаний. Для системы с закреплённым концом это возможно сделать следующим образом. Приложим к массам системы постоянные моменты M_m , пропорциональные I_m :

$$M_m = k_{12} I_m / J_C ; \quad I_C = I_1 + I_2 + \dots + I_n .$$

Возникающие при этом статические углы поворота масс могут быть приняты за коэффициенты первой формы. Определяя их, находим

$$A_{1r}^0 = \frac{k_{12}}{I_C} \sum k_{e-1, e}^{-1} \sum_{m=1}^n I_m . \quad (111)$$

Затем, пользуясь формулой Релея, можно определить приближённое значение первой собственной частоты. В качестве примера определим низшую частоту для системы, показанной на рис. 28.

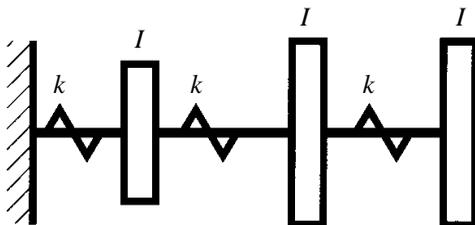


Рис. 28. Модель трёхмассовой системы с закреплённым концом

По формуле (107) находим

$$A_{11}^0 = 1; \quad A_{12}^0 = \frac{k}{3I} \left(\frac{3I}{k} + \frac{2I}{k} \right) = \frac{5}{3};$$

$$A_{13}^0 = \frac{k}{3I} \left(\frac{3I}{k} + \frac{2I}{k} + \frac{I}{k} \right) = 2.$$

Затем получаем

$$(k_1^0)^2 \approx \frac{k}{I} \frac{1 + (5/3 - 1)^2 + (2 - 5/3)^2}{1 + (5/3)^2 + 2^2} = 0,2 \frac{k}{I}.$$

Точное значение $(k_1^0)^2 = 0,19806k/I$ отличается от приближённого на 1%. Точная собственная форма $A_1^0 = (1; 1,802; 2,247)^T$ отличается от приближённой $A_1^0 = (1; 1,667; 2)^T$ более значительно.

3.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФОРМАМ. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Перейдём от обобщённых координат механической системы привода со свободными концами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ к новым обобщённым координатам z_1, z_2, \dots, z_n с помощью линейного преобразования

$$\varphi_r = \sum_{m=1}^n A_{mr} Z_m, \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (112)$$

или в векторной форме

$$\varphi = \sum_{m=1}^n A_m Z_m. \quad (113)$$

Здесь A_m – собственные формы колебаний привода.

Координаты Z_m называются главными координатами [15]:

$$I \sum_{m=1}^n A_m \ddot{Z}_m + C \sum_{m=1}^n A_m \dot{Z}_m + K \sum_{m=1}^n A_m Z_m = M + U.$$

Умножим это уравнение последовательно на векторы A_1, A_2, \dots, A_n :

$$\sum_{m=1}^n (I A_m)^T A_S \ddot{Z}_m + \sum_{m=1}^n (S A_m)^T \dot{Z}_m + k \sum_{m=1}^n A_m^T A_S Z_m = (M + U)^T A_S, \quad (114)$$

$$(S = 1, 2, \dots, n).$$

Используя свойство ортогональности собственных форм, получаем

$$(I A_m)^T A_S = 0; \quad (K A_m)^T A_S = 0 \quad \text{при } s \neq m.$$

Учитывая это, приводим уравнение к следующему виду:

$$\alpha_S \ddot{Z}_S + \sum_{m=1}^n \beta_{Sm} \dot{Z}_m + \gamma_S Z_S = Z_S. \quad (115)$$

Здесь

$$\alpha_S = (I A_S)^T A_S, \quad \beta_S = (C A_S)^T A_m;$$

$$\alpha_S = (K A_S)^T A_S; \quad Z_S = (M + U)^T A_S.$$

В уравнении (115) главные координаты остались связанными между собой только из-за наличия диссипативных сил. При $C = 0$ происходит полное разделение переменных z_S в уравнениях движения, которые при этом принимают наиболее простую форму

$$\alpha_S \ddot{Z}_S + \gamma_S Z_S = Z_S, \quad S = 1, 2, \dots, n. \quad (116)$$

Полное разделение переменных происходит и в том случае, если все коэффициенты сопротивления пропорциональны соответствующим жёсткостям. Тогда $C = \lambda K$, где λ – некоторый скалярный множитель. Следовательно

$$\beta_{sm} = (C A)^T A_S = \lambda (K A_m)^T A_S = 0 \quad \text{при } S \neq m.$$

В этом случае уравнения принимают вид:

$$\alpha_S \ddot{Z}_S + \beta_S \dot{Z}_S + \gamma_S Z_S = Z_S, \quad S = 1, 2, \dots, n, \quad (117)$$

где $\beta_S = (C A_S)^T A_S$.

В общем случае доказывается (см., например, [16], что при слабой диссипации, т.е. при малых значениях $C_{S-1, S}$, в уравнениях (111) можно пренебречь всеми коэффициентами β_{Sm} , соответствующими $S \neq m$.

При этом в передаточных функциях механической системы пренебрегаем слагаемыми, содержащими малые коэффициенты сопротивления во второй степени. Учитывая это, в дальнейшем во всех случаях будем приводить систему уравнений движения к виду (113). Поскольку $A_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$, то $(kA_1)^T A_1$ равно сумме всех элементов матрицы K , которая всегда равна нулю. То же можно сказать и о $(CA_1)^T A_1$. Таким образом,

$$\gamma_1 = (KA_1)^T A_1 = 0; \quad \beta_1 = (CA_1)^T A_1 = 0, \quad \alpha_1 = \sum_{m=1}^n I_m = I_c.$$

Отсюда уравнение (117), соответствующее $S = 1$, принимает вид

$$I_S \ddot{Z}_1 = Z_1 = (M + U)A_1 = \sum_{S=1}^n (\mu_{S0} + U_S). \quad (118)$$

Это уравнение движения привода как твёрдого тела с моментом инерции J_S .

Перепишем уравнения (112) в операторной форме:

$$(\alpha_S P^2 + \beta_S P + \gamma_S)Z_S = Z_S, \quad (S = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Z_S &= (\alpha_S P^2 + \beta_S P + \gamma_S)^{-1} Z_S = \\ &= (\alpha_S P^2 + \beta_S P + \gamma_S)^{-1} \sum A_{Se} (M_{e0} + U_e). \end{aligned}$$

Подставим Z_S , получим выражения для обобщённых координат φ_r :

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \sum_{m=1}^n A_{mr} (\alpha_m P^2 + \beta_m P + \gamma_m)^{-1} \sum_{ml} (M_{e0} + U_e) = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{A_{mr} A_{ml}}{\alpha_m P^2 + \beta_m P + \gamma_m} (M_{e0} + U_e), \quad r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (119)$$

Сравнивая (121) с (90), находим, что передаточная функция $e_{25}(P)$ может быть представлена в виде суммы и слагаемых:

$$e_{rS}(P) = \sum \frac{A_{mr} A_{mS}}{\alpha_m P^2 + \beta_m P + \gamma_m}, \quad r, S = 1, 2, \dots, n. \quad (120)$$

Это разложение передаточной функции по собственным формам. Так как $A_{1r} = A_{1s} = 1$, $\gamma_1 = \beta_1 = 0$, слагаемое в (116), соответствующее $m = 1$ равно $(I_C P^2)^{-1}$. В соответствии с формулой Релея $\gamma_m = \alpha_m k_m^2$. Введём также обозначения:

$$\begin{aligned} k_m^{-1} &= \tau_m; \\ A_{mr} A_{ms} / \gamma_m &= \chi_{rs}^{(m)}, \\ \beta_m \gamma_m^{-1} \tau_m^{-1} &= 2\zeta_m. \end{aligned} \quad (121)$$

Тогда выражение (122) может быть записано в виде

$$e_{rS}(P) = (I_C P^2)^{-1} + \sum \frac{\chi_{rS}^{(m)}}{\tau_m^2 P^2 + 2\zeta_m \tau_m P + 1}. \quad (122)$$

Аналогичным путём можно получить разложение по собственным формам передаточных функций системы с закреплённым концом. Для этого в уравнении типа (79) от обобщённых координат следует перейти к главным координатам I_S в соответствии с преобразованием

$$\Psi = \sum_{m=1}^n A_m^0 I_m. \quad (123)$$

При этом получается система уравнений

$$\alpha_S^0 \ddot{I}_S + \sum_{m=1}^n \beta_{Sm}^0 \dot{I}_m + \gamma_S^0 Y_S = Y_S - q_S \ddot{\Phi}_0, \quad S = 1, 2, \dots, n, \quad (124)$$

в которой

$$\alpha_S^0 = (I^0 A_S^0)^T A_S^0; \quad \beta_{Sm}^0 = (C^0 A_S^0)^T A_m^0; \quad \gamma_S^0 = (K^0 A_S^0)^T A_S^0;$$

$$Y_S = (M^0 + U^0)^T A_S^0; \quad q_S = \sum_{m=1}^n I_{m0} A_{Sm}^0.$$

Пренебрегая коэффициентами сопротивления β_{Sm}^0 при $S \neq m$, получаем систему с разделёнными переменными:

$$\alpha_S^0 \ddot{I}_S + \beta_S^0 \dot{I}_S + \gamma_S^0 Y_S = Y_S q_S \ddot{\Phi}_0, \quad S = 1, 2, \dots, n. \quad (125)$$

где $\beta_S^0 = (C^0 A_S^0)^T A_S^0$.

Отсюда находим

$$Y_S = (\alpha_S^0 P^2 + \beta_S^0 P + \gamma_S^0)^{-1} (Y_S - q_S \ddot{\Phi}_0) .$$

Следовательно, из (123) получим

$$\begin{aligned} \Psi_r &= \sum_{m=1}^n A_{mr} (\alpha_m^0 P^2 + \beta_m^0 P + \gamma_m^0)^{-1} \left[\sum_{m=1}^n A_{ml}^0 (M_{e0} + U_e) - q_m \ddot{\Phi}_0 \right] = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{A_{mr}^0 A_{ml}^0}{\alpha_m^0 P^2 + \beta_m^0 P + \gamma_m^0} (M_{l0} + U_e) - \sum_{m=1}^n \frac{A_{mr}^0 q_m}{\alpha_m^0 P^2 + \beta_m^0 P + \gamma_m^0} \ddot{\Phi}_0 . \end{aligned}$$

В результате находим разложение по собственным формам передаточных функций:

$$e_{rS}^0(P) = \sum_{m=1}^n \frac{A_{mr}^0 A_{mS}^0}{\alpha_m^0 P^2 + \beta_m^0 P + \gamma_m^0}, \quad r, S = 1, 2, \dots, n . \quad (126)$$

$$\sigma_r(P) = \sum_{m=1}^n \frac{A_{mr}^0 q_m}{\alpha_m^0 P^2 + \beta_m^0 P + \gamma_m^0}, \quad r = 1, 2, \dots, n . \quad (127)$$

Учитывая, что $\gamma_m^0 = \alpha_m^0 (k_m^0)^2$, и вводя обозначения

$$(k_m^0) = \tau_m^0; \quad A_{mr}^0 A_{mS}^0 / \gamma_m^0 = \chi_{rS}^{(m)0};$$

$$\beta_m^0 k_m^0 / \gamma_m^0 = 2\zeta_m^0, \quad q_m A_{mr}^0 / \gamma_m^0 = \rho_r^{(m)0}$$

преобразуем выражения (128), (129) к виду

$$e_{rS}^0(P) = \sum_{m=1}^n \frac{\chi_{rS}^{(m)0}}{(\tau_m^0)^2 P^2 + 2\zeta_m^0 \tau_m^0 P + 1}, \quad r, S = 1, 2, \dots, n; \quad (128)$$

$$\sigma_S(P) = -\sum_{m=1}^n \frac{\rho_r^{(m)0}}{(\tau_m^0)^2 P^2 + 2\zeta_m^0 \tau_m^0 P + 1}, \quad r_1 = 1, 2, \dots, n. \quad (129)$$

Слагаемые в выражениях (124), (130), (131) представляют собой передаточные функции колебательных звеньев. Параметры $\chi_{rS}^{(m)}$, $\chi_{rS}^{(m)0}$, $\rho_S^{(m)0}$ являются коэффициентами усиления отдельных колебательных звеньев, а τ_m и τ_m^0 – их постоянными времени. Составим

частотные характеристики, соответствующие полученным передаточным функциям. Подставляя в них $P = iw$, находим:

$$e_{rS}(iw) = -(J_S w^2)^{-1} + \sum_{m=1}^n \frac{\chi_{rS}^{(m)}}{1 - \tau_m^2 w^2 + 2\zeta_m iw}, \quad S, r = 1, 2, \dots, n. \quad (130)$$

$$e_{rS}^0(iw) = \sum_{m=1}^n \frac{\chi_{rS}^{(m)0}}{1 - (\tau_m^0)^2 w^2 + 2\zeta_m^0 \tau_m^0 iw}, \quad r, S = 1, 2, \dots, n. \quad (131)$$

$$\sigma_r(iw) = - \sum_{m=1}^n \frac{\rho_r^{(m)0}}{1 - (\tau_m^0)^2 w^2 + 2\zeta_m^0 \tau_m^0 iw}, \quad r_1 = 1, 2, \dots, n. \quad (132)$$

Выражения (131), (132) называются комплексными динамическими податливостями привода, а (134) – его частотными характеристиками по кинематическому возмущению. Все частотные характеристики содержат слагаемые вида

$$W_m(iw) = d_m / (q - T_m^2 w^2 + 2\eta_m T_m iw). \quad (133)$$

Выражение (135) представляет собой частотную характеристику колебательного звена. Её свойства:

1. При значениях ω близких к T_m^{-1} , колебательное звено обнаруживает резонансные свойства: Отношение $|W_m(iw)|/d_m$ становится много больше единицы. Резонансной полосой колебательного звена принято считать диапазон частот, лежащих в пределах (рис. 29)

$$1 - h_m < \omega T_m < 1 + h_m. \quad (134)$$

2. Вне резонансной полосы значения $|W_m(iw)|$, соответствующие различным h_m , оказываются близкими и мало отличаются от значений АЧХ при $\eta_m = 0$. Таким образом, влияние диссипации может считаться существенным только вблизи от резонанса, т.е. при близости частоты колебаний к собственной частоте колебательного звена. При значениях ω , лежащих вне резонансной полосы, можно с достаточной для технических расчётов точностью считать, что

$$W_m(iw) = d_m / (1 - T_m^2 w^2). \quad (135)$$

Из этой формулы следует, что при $\omega T_m < 0,3$ можно с точностью до 10% принять, $W_m(i\omega) < d_m$, а при $T_m > 3$ положить

$$W_m(i\omega) \approx -d_m / (\omega^2 T_m^2).$$

3. На рисунке 29, б построены амплитудно-фазовые характеристики колебательного звена, соответствующие $d_m > 0$. Они полностью располагаются в нижней полуплоскости. Значению $\omega = T_m^{-1}$ (т.е. резонансной частоте) соответствует точка АФХ, лежащая на мнимой оси, а резонансной полосе – нижняя половина АФХ. Основываясь на свойствах частотных характеристик колебательных звеньев, можно сделать следующие выводы.

1. При гармоническом воздействии переменной частоты амплитуда Колебаний свободной системы привода может принимать большие значения, если модуль хотя бы одного из слагаемых оказывается большим по величине. Таким образом, резонансными частотами привода являются его собственные частоты.

2. Пусть резонанс в свободной системе привода вызван совпадением частоты ω с собственной частотой k_e . Тогда

$$e_{rS}(ik_l) = (-I_S k_l^2)^{-1} + \chi_{rS}^{(l)} / (2\zeta_l i) + \sum_{m=1}^n \chi_{rS}^{(m)} / (1 - \tau_m^2 k_l^2 - 2\zeta_m i k_l). \quad (136)$$

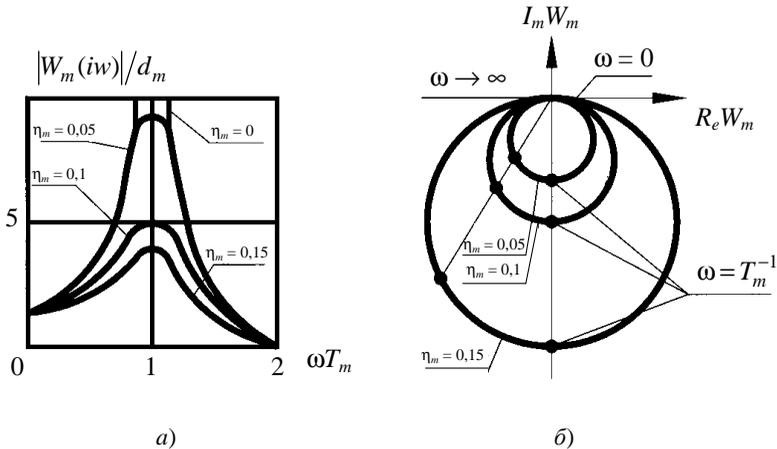


Рис. 29. Частотные характеристики колебательных звеньев:
а – АЧХ; б – АФХ

В выражении (136) второе слагаемое, в силу малости ζ_l , будет существенно превосходить все остальные. Поэтому в первом приближении можно положить

$$e_{rS}(ik_l) \approx \chi_{rS}^{(l)} / (2\zeta_l i) = A_{lr} A_{lS} / (2\gamma_l \zeta_l i).$$

Следовательно, если к S -й массе приложено гармоническое воздействие $M_S = U_{S0} \cos k_l t$, то колебания r -й массы в первом приближении будут определяться выражением

$$\varphi_r(t) \approx U_{S0} |e_{rS}(ik_l)| \cos[k_l t + \arg e_{rS}(ik_l)].$$

Учитывая, что произведение A_{lr}, A_{lS} может быть как положительным, так и отрицательным вещественным числом, имеем

$$|e_{rS}(ik_l)| = |A_{lr} A_{lS}| / (2\zeta_l \gamma_l);$$

$$\arg e_{rS}(ik_l) = \arg(A_{lr} A_{lS}) + \arg(1/i) = -\pi/2 \sin(A_{lr} A_{lS}).$$

Отсюда

$$\varphi_r(t) \approx A_{lr} A_{lS} (2\gamma_l \zeta_l)^{-1} U_{S0} \cos(k_l t - \pi/2), \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (137)$$

Таким образом, в первом приближении амплитуда колебаний r -й массы пропорциональна A_{lr} ; следовательно, амплитуды колебаний системы на l -й резонансной частоте относятся как элементы l -й собственной формы. В первом приближении форма резонансных колебаний совпадает с соответствующей собственной формой. Это свойство не зависит от того, к какой массе приложено гармоническое воздействие резонансной частоты.

Оно сохраняется и при приложении таких воздействий одновременно к нескольким массам.

Резонансные колебания в системе не возникают, если $A_{lS} = 0$, т.е. если воздействие приложено в узле l -й собственной формы.

3. Рассмотрим систему с закреплённым концом. Подставив $\omega = k_l^0$ в (126) и (127), получаем

$$e_{rS}^0(ik_l^0) = \chi_{rS}^{(l)0} / (2\zeta_l i) + \sum_{m=1}^{n(l)} \chi_{rS}^{(m)0} / \left[1 - (\tau_m^0)^2 (k_l^0)^2 + 2\zeta_m^0 \tau_m^0 i k_l^0 \right]; \quad (138)$$

$$-\sigma_r(ik_l^0) = \rho_r^{(l)0} / (2\zeta_l i) + \sum_{m=1}^{n(l)} \rho_r^{(m)0} / \left[1 - (\tau_m^0)^2 (k_l^0)^2 + 2\zeta_m^0 \tau_m^0 i k_l^0 \right]. \quad (139)$$

При слабой диссипации первые слагаемые в этих выражениях будут, вообще говоря, преобладать над остальными. В первом приближении можно принять

$$\begin{aligned} e_{rS}^0(ik_l^0) &\approx \chi_{rS}^{(l)0} / (2\zeta_l^0 i) = A_{lr}^0 A_{lS}^0 / (2\gamma_l^0 \zeta_l^0 i) - \sigma_r(ik_l^0) \approx \\ &\approx \rho_r^{(l)0} / (2\zeta_l^0 i) = q_l A_{lr}^0 / (2\gamma_l^0 \zeta_l^0 i). \end{aligned} \quad (140)$$

При приложении гармонического воздействия $M_S = U_{\rho 0} \cos k_l^0 t$ к S -й массе, получаем

$$\psi_r(t) = A_{lr}^0 A_{lS}^0 (2\gamma_l^0 \zeta_l^0)^{-1} U_{S0} \cos(k_l^0 t - \pi/2), \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (141)$$

При малых ζ_l^0 амплитуды колебаний $\psi_r(t)$ инерционных элементов системы относительно ротора могут стать большими по модулю, т.е. в системе могут возникать резонансные колебания. В действительности резонансы могут появиться лишь в том случае, если нулевая масса действительно закреплена. Такая ситуация имеет место, например, если двигатель обладает очень жёсткой статической характеристикой, препятствующей развитию колебаний ротора. Приложение возмущающей частоты k_l^0 к свободной механической системе привода не вызовет резонансных колебаний по координате ψ_r по той причине, что при этом будут возбуждаться колебания нулевой массы. Таким образом, колебания $\psi_r(t)$ будут складываться из двух компонентов: колебаний, описываемых уравнениями (3.176), вызванных возмущающей силой, и колебаний $\psi_r^*(t)$, вызванных кинематическим воздействием $\ddot{\phi}_0$. Суммарные колебания описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \psi_r(t) &= \varphi_r - \varphi_0 = \left[e_{rS}(ik_l^0) - e_{0S}(ik_l^0) \right] \times \\ &\times U_{S0} \cos \left\{ k_l^0 t - \arg \left[e_{rS}(ik_l^0) - e_{0S}(ik_l^0) \right] \right\} = \\ &= \left[\sum_{m=1}^n (\chi_{rS}^{(m)} - \chi_{0S}^{(m)}) / \left[1 - \tau_m^2 (k_l^0)^2 + 2\zeta_m \tau_m i k_l^0 \right] \right] \times \\ &\times U_{S0} \cos \left\{ k_l^0 t - \arg \left[e_{rS}(ik_l^0) - e_{0S}(ik_l^0) \right] \right\} \\ r &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Поскольку $k_l^0 \tau_m \neq 1$, эти колебания не будут носить резонансного характера. Резонансные колебания могут возникнуть, если частота k_l^0 имеет кинематическое возмущение, т.е. если в приводе возникают гармонические колебания ротора, при которых $\ddot{\phi}_0 = a \cos k_l^0 t$. В этом случае

$$\psi_r(t) = q_l A_{cr} (2\gamma_l^0 \zeta_l^0)^{-1} a \cos(k_l^0 t - \pi/2), \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (142)$$

При этом форма резонансных колебаний на l -й собственной частоте совпадает с l -й собственной формой A_l^0 . Представление резонансных колебаний в виде (137), (142) возможно при слабой диссипации в приводе.

С увеличением диссипации может возрасти роль слагаемых, отброшенных в выражениях для частотных характеристик. При этом более существенными оказываются слагаемые, соответствующие низшим собственным формам. Поэтому, например, при анализе резонансных колебаний на второй собственной частоте приходится сохранять слагаемое, соответствующее первой форме.

3.6. ОБ УЧЁТЕ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

Влияние диссипативных сил на колебательные процессы определяется величиной энергии, рассеиваемой этими силами за цикл. Поэтому нелинейные силы можно заменить силами линейно зависящими от скорости деформации и вызывающими такое же рассеяние энергии, как и нелинейные силы, используя метод эквивалентной линеаризации. Так как диссипативные силы оказывают существенное влияние только на резонансные процессы, то эквивалентную линеаризацию естественно производить именно для этих колебательных процессов. Поскольку в каждом из резонансных процессов колебания, возникающие в приводе, оказываются близкими к гармоническим колебаниям соответствующей частоты, эквивалентная линеаризация сводится к гармонической. При резонансе на частоте $k_l(k_l^0)$ существенное влияние на развитие колебаний оказывает только один безразмерный коэффициент $\zeta_l(\zeta_l^0)$. Отсюда следует, что каждый из безразмерных коэффициентов диссипации должен получаться эквивалентным гармонической линеаризации нелинейных диссипативных сил на колебаниях по l -й собственной форме.

Определим энергию, рассеиваемую за один период колебаний в линейной цепной механической системе привода со свободными концами, совершающей резонансные колебания с частотой k_l . В соответствии с (137) имеем

$$\varphi_r \approx A_{lr} a_l \cos(k_l t - \pi/2) = A_{lr} a_l \sin k_l t, \quad (143)$$

где $a_l = A_{lS} (2\gamma_l \zeta_l)^{-1} U_{S0}$ – амплитуда колебаний на нулевой массе, поскольку $A_{l1} = 1$. Из (143) находим законы изменения моментов диссипативных сил. Момент в упругом элементе, соединяющем $r-1$ -ю и r -ю массы:

$$M_{r-1, r}^{(\partial)} = C_{r-1, r} (\dot{\varphi}_{r-1} - \dot{\varphi}_r) = C_{r-1, r} k_l a (A_{l, r-1} - A_{lr}) \cos k_l t.$$

Работа этого момента за цикл колебаний

$$W_{r-1, r} = \oint M_{r-1, r} d\theta_{r-1, r} = \int_0^{2\pi/k_l} M_{r-1, r} \dot{\theta}_{r-1, r} dt,$$

где $\dot{\theta}_{r-1, r} = \dot{\varphi}_{r-1} - \dot{\varphi}_r$ – скорость деформации упругого элемента.

Производя интегрирование, найдём

$$\begin{aligned} W_{r-1, r} &= \int_0^{2\pi/k_l} C_{r-1, r} k_l^2 a_l^2 (A_{l, r-1} - A_{lr})^2 \cos^2 k_l t dt = \\ &= \pi k_l a_l^2 C_{r-1, r} (A_{l, r-1} - A_{lr})^2. \end{aligned}$$

Складывая потери энергии во всех элементах, получаем

$$W_l = \pi k_l Q_l^2 (CA_l)^T A_l = \pi \beta_l k_l a_l^2. \quad (144)$$

Из (121) получаем, что $\beta_l = 2\zeta_l k_l^{-1} \gamma_l$. Подставляя это выражение в (144), окончательно найдём

$$W_l = 2\pi \zeta_l \gamma_l a_l^2. \quad (145)$$

Это выражение удобно связать с потенциальной энергией упругой деформации. Потенциальная энергия отдельного упругого элемента определяется, как известно, выражением $\Pi = kQ^2/2$, где k – жёсткость элемента; θ – его деформация. При заданных углах поворота φ_r масс, образующих цепную систему привода:

$$\Pi = 0,5 \sum_{r=1}^n k_{r-1, r} (\varphi_{r-1} - \varphi_r)^2 = 0,5 (K\varphi)^T \varphi.$$

Пусть система привода совершает резонансные колебания с частотой k_l . Тогда в силу (144) $\varphi = a_l A_l \sin k_l t$ и следовательно

$$\Pi_l \approx 0,5 Q_l^2 \sin^2 k_l t (KA_l)^m A_l = 0,5 \gamma_l Q_l^2 \sin^2 k_l t.$$

Отсюда видно, что максимальное значение потенциальной, энергии в процессе деформации равно $0,5 \gamma_l a_l^2$. Сравнивая с (145), находим

$$W_l = 4\pi \zeta_l \left(\Pi_l \right)_{\max}. \quad (146)$$

Отношение рассеянной за цикл энергии Π_{\max} , называемое коэффициентом рассеяния в 4π раз превосходит безразмерный коэффициент диссипации. Пусть S_l – энергия, рассеиваемая за цикл колебаний в системе с нелинейными диссипативными силами при $w = k_l$. Полагая, что упругие силы, действующие в приводе, линейно зависят от деформации, определим ζ_l из выражения, аналогичного (146):

$$\zeta_l = S_l / \left[4\pi \left(\Pi_l \right)_{\max} \right] = S_l / \left(2\pi \gamma_l Q_l^2 \right). \quad (147)$$

Очевидно, что при таком выборе параметров ζ_l реализуется эквивалентная линеаризация нелинейных диссипативных сил из условия равенства величин рассеиваемой за цикл энергии. Рассеиваемая энергия S_l зависит от амплитуд деформаций, которые при заданной форме колебаний (вектор A_l) пропорциональны Q_l . Таким образом, S_l является функцией a_l . При линейном трении значения S_l пропорциональны a_l^2 и в результате ζ_l оказывается постоянной величиной. В случае нелинейных сил ζ_l зависит от a_l . Определив эту зависимость из эксперимента, можно затем найти величину a_l при заданном возмущении по формуле

$$a_l = \left| \varphi_1(t) \right|_{\max} = A_{ls} U_{s0} / \left[2\zeta_l(a_l) \gamma_l \right],$$

Практика показывает, что значение ζ_l , получающееся по описанной процедуре, обычно лежит в диапазоне $0,015 < \zeta_l < 0,045$. При отсутствии экспериментальных данных можно, проводя расчёты резо-

нансных режимов, принимать для всех ζ_l одинаковые значения, близкие к 0,03. Аналогичным образом производится выбор параметров ζ_l^0 . Если ζ_l^0 – потери энергии в резонансном режиме с частотой k_l^0 , то

$$\zeta_l^0 = S_l^0 / (2\pi\gamma_l^0 a_l^2). \quad (148)$$

Практически значения ζ_l^0 тоже укладываются в указанные пределы.

3.7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ В ФОРМЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Передаточные функции привода могут быть представлены в виде отношений номиналов от p . Из соотношения (87) непосредственно следует, что функции $e_{rS}(P)$, как элементы обратной матрицы, могут быть представлены в форме

$$e_{r,S} = \Delta_{rS}(P) / \Delta P,$$

где $\Delta(p) = \det \|Ip^2 + cp + k\|$ – характеристический определитель системы; $\Delta_{rS}(p)$ – алгебраическое дополнение r -й строки и S -го столбца этого определителя ($\Delta_{rS}(p) = \Delta_{Sr}(p)$) в силу симметрии $\Delta(p)$. Определитель $\Delta(p)$ записывается в виде

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} I_1 P^2 + U_{11} & -U_{11} & 0 & \dots & 0 \\ -U_{11} & I_{11} P^2 + U_{11} + U_{12} & -U_{12} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_n P^2 + U_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

где $U_{l-1,l}(p) = c_{l-1,l}P + k_{l-1,l}$.

Вычеркнув r -ю строку и S -й. столбец этого определителя, убеждаемся, что алгебраическое дополнение Δ_{rS} приводится к виду ($r < S$)

$$\Delta_{rS}(p) = \Delta_r^{(-)}(p) \prod_{m=r+1}^S U_{m-1,m}(p) \Delta_S^{(+)}(p), \quad (149)$$

где $\Delta_r^{(-)}(p)$ – характеристический определитель системы, расположенной слева от r -й массы при условии, что она закреплена (рис. 30),

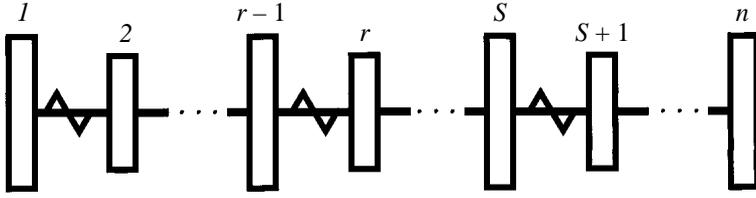


Рис. 30. Парциальные системы

а $\Delta_S^{(+)}(p)$ – характеристический определитель системы, расположенный справа от закреплённой S -й массы. Эти системы, получающиеся из основной при закреплении некоторых её инерционных элементов, называются парциальными. Собственные частоты парциальных систем, т.е. частоты их свободных колебаний при отсутствии сил сопротивления, называются парциальными частотами исходной системы. Определители $\Delta_r^{(-)}$ и $\Delta_r^{(+)}$ являются диагональными минорами определителя Δ : определитель $\Delta_r^{(-)}$ составлен из элементов первых r строк и столбцов, а $\Delta_r^{(+)}$ – из элементов последних $n-s$ строк и столбцов. Парциальные частоты систем, выделенных на рис. 30, определяются как корни, соответствующих частотных уравнений:

$$\begin{vmatrix} k_{12} - I_1 k^2 & -k_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -k_{12} & k_{11} + k_{23} - I_{20} & -k_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{r-2, r-1} + k_{r-1, r} - I_{r-1, 0} k^2 \end{vmatrix} = 0; \quad (150)$$

$$\begin{vmatrix} k_{S, S+1} + k_{S+1, S+2} - I_{S-1, 0} k^2 & & k_{S+1, S+1} & \dots & 0 \\ -k_{S+1, S+2} & & k_{S+1, S+2} + k_{S+2, S+3} - I_{S+2, 0} k^2 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 0 & \dots & k_{n-1, n} - I_{n0} k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (151)$$

Обозначим эти собственные частоты соответственно k_{r1}, \dots, k_{rr} и $k_{S1}, \dots, k_{S, n-S}$; каждой из них соответствует собственная форма колеба-

ний системы с закреплённым концом. Используя собственные формы, можно для каждой из парциальных систем определить безразмерные параметры $\zeta_{r1}, \dots, \zeta_{rr}$ и $\zeta_{S1}, \dots, \zeta_{S, n-S}$ формулам, аналогичным (128). В результате выражение (149) приводится к виду

$$e_{rS} = \prod_{m=1}^r (\tau_{rm}^2 P^2 + 2\zeta_{rm} \tau_{rm} P + 1) \prod_{m=1}^{n-S} (\tau_{Sm}^2 P^2 + 2\zeta_{Sm} \tau_{Sm} P + 1) \times \left[I_C P^2 \prod_{m=1}^n (\tau_{rm}^2 P^2 + 2\zeta_{rm} \tau_{rm} P + 1) \right]^{-1}, \quad (152)$$

здесь $\tau_{rm} = k_{rm}^{-1}$; $\tau_{Sm} = k_{Sm}^{-1}$; $\tau_{m-1,m} / k_{m-1,m}$.

Параметры τ_m и ζ_m определяются по формулам (121).

При $r = S$ выражение (152) упрощается. В дальнейшем наибольший интерес будет представлять оператор $e_{11}(p)$. Из (152) при $r = S = l$ получаем:

$$e_{11} = \frac{\prod_{m=1}^n (\tau_m^0) P^2 + 2\zeta_m^0 \tau_m^0 P + 1}{I_C P^2 \prod_{m=1}^n (\tau_m^2 P^2 + 2\zeta_m \tau_m P + 1)}, \quad (153)$$

где $k_m^0 = (\tau_m^0)^{-1}$ – собственные частоты привода с закреплённой нулевой массой. Приведем также выражение для оператора $e_{1n}(p)$, получающееся из (153) при $r = 1, S = n$:

$$e_{1n}(p) = \frac{\prod_{m=1}^n (\tau_{m-1, m} P + 1)}{I_C P^2 \prod_{m=1}^n (\tau_m^2 P^2 + 2\zeta_m \tau_m P + 1)}, \quad (154)$$

Предположим, что частота ω гармонической вынужденной силы, приложенной к s -й массе, совпадает с одной из собственных частот парциальных систем, показанных на рис. 30, т.е. пусть $\omega = k_{rm}$ или $\omega = k_{Sm}$, где k_{rm} и k_{Sm} – соответственно корни уравнений (151), (152). Амплитуда колебаний r -й массы, возникающих при действии такой силы, определяется выражением

$$a_r = |e_{Sr}(\omega)|U_{S0},$$

где U_{Sm} – амплитуда возмущающей силы.

Очевидно, что при подстановке в числитель выражения (153) $P = i\omega$ в нём появится множитель $2\zeta_{rm}i$ или $2\zeta_{Sm}i$, в силу чего модуль $e_{rS}(i\omega)$ окажется малой величиной. Это означает, что амплитуда колебаний r -й массы окажется малой даже при существенном значении U_{S0} . При отсутствии диссипации амплитуда колебаний r -й массы на этой частоте обратилась бы в нуль, т.е. r -я масса оказалась бы узлом гармонических колебаний привода. Частоты ω , равные k_{rm} или k_{Sm} называются антирезонансными. В отличие от резонансных частот, общих для всех $e_{rS}(i\omega)$, антирезонансные частоты у каждой из динамических податливостей свои. Из формулы (154) видно, что число антирезонансных частот динамической податливости $e_{rS}(i\omega)$ равно $n - S + r$ (при $r < S$). Динамическая податливость $e_{rS}(i\omega)$ имеет и антирезонансных частот, совпадающих с собственными частотами k_m^0 ($m = 1, 2, \dots, n$) привода с закреплённой массой. Эти частоты располагаются между резонансными частотами системы. Такими же свойствами обладают и антирезонансные частоты всех диагональных элементов матрицы $E(i\omega)$. При $r \neq S$ расположение и число антирезонансных частот зависят от перемен знака в последовательности чисел $A_{mr}A_{mS}$ и $A_{m+1,r}A_{m+1,S}, \dots, A_{nr}, A_{nS}$. Если знаки $A_{mr}A_{mS}$ и $A_{m+1,r}A_{m+1,S}$ совпадают, то между k_m и k_{m+1} имеется антирезонансная частота податливости $e_{rS}(i\omega)$; если же знаки этих чисел различны, то антирезонансные частоты между k_m и k_{m+1} нет. Рассмотренные свойства динамических податливостей определяют форму годографов амплитудно-фазовых характеристик (АФХ), т.е. графиков функций $e_{rS}(i\omega)$, построенных на комплексной плоскости. На рисунке 31, а изображена типичная форма годографа функции $e_{rr}(\omega)$; $e_{rr}(i\omega) \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \infty$. Годограф АФХ выходит из бесконечно удаленной точки на отрицательной вещественной полуоси и располагается целиком в нижней полуплоскости.

Последнее следует из того, что все $\chi_r^{(m)} = A_{mr}^2 \gamma_m^{-1}$ положительные числа и поэтому коэффициенты при мнимых частях во всех слагаемых отрицательно. Точки A_S пересечения годографа с мнимой осью приблизительно соответствуют резонансным частотам системы, а точки B_S – антирезонансным частотам данной динамической податливости.

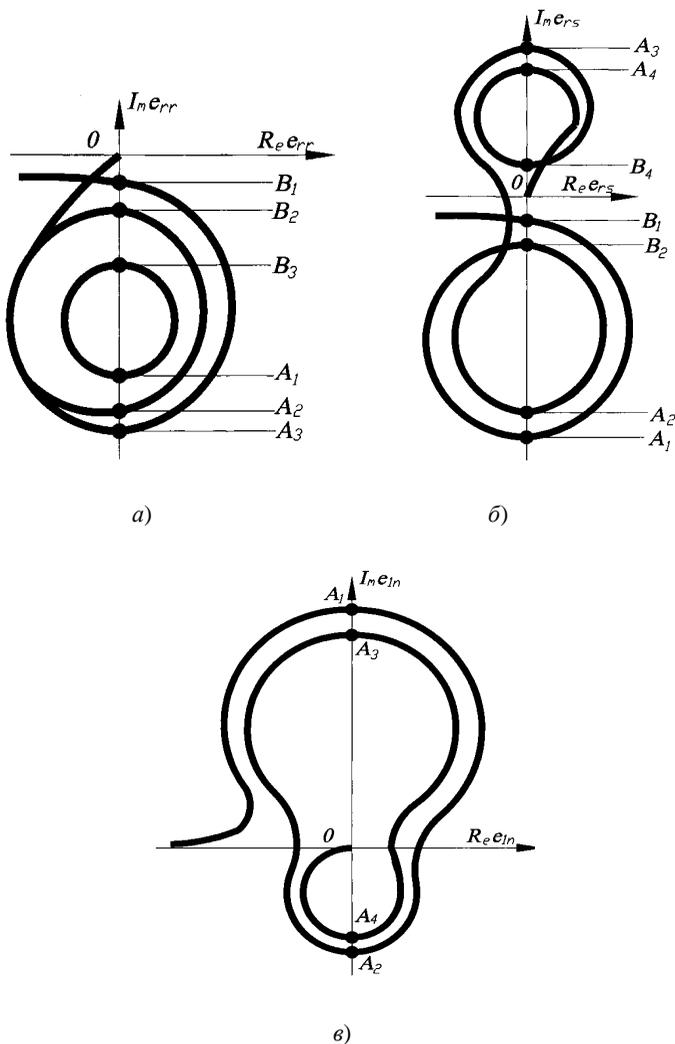


Рис. 31. Годографы АФХ динамической податливости

На рисунке 31, б представлена типичная форма годографа $e_s(i\omega)$ при $r \neq S$. Каждой перемене знака последовательности чисел $A_{mr} A_{mS}$ соответствует переход годографа из нижней полуплоскости в верхнюю или обратную, причём, если $A_{mr} A_{mS}$ и $A_{m+1, S} A_{m+1, S}$ имеют разные знаки, то точке пересечения годографа с вещественной осью соответствует

значение ω , лежащее между k_m и k_{m+1} . При этом «теряется» антирезонансная частота. На рисунке 31, в построен годограф АФХ функции $e_{1n}(i\omega)$. Поскольку все A_{m1} положительны ($A_{m1} = 1$), число перемен знака в ряду чисел $A_{m1}A_{mn}$ равно числу перемен знака в ряду $A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{nn}$. Но S -я форма свободной цепной системы привода содержит s перемен знака. Поскольку $A_{S1} > 0$ то A_{Sn} будет положительным числом при чётном и отрицательным при нечётном. Отсюда следует, что знаки $A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{nn}$ чередуются. Поэтому годограф АФХ $e_{1n}(i\omega)$ последовательно n раз переходит из нижней полуплоскости в верхнюю и обратно и антирезонансные частоты у этой податливости отсутствуют, что видно из формулы (154). Отметим, что такие формы годографа АФХ имеют лишь в системах приводов с малой диссипацией. В частности форма годографа $e_{rS}(i\omega)$ изменяется, если хотя бы один из параметров

$$\tau_{m-1, m} = c_{m-1, m} / k_{m-1, m}, \quad (m = r+1, \dots, S).$$

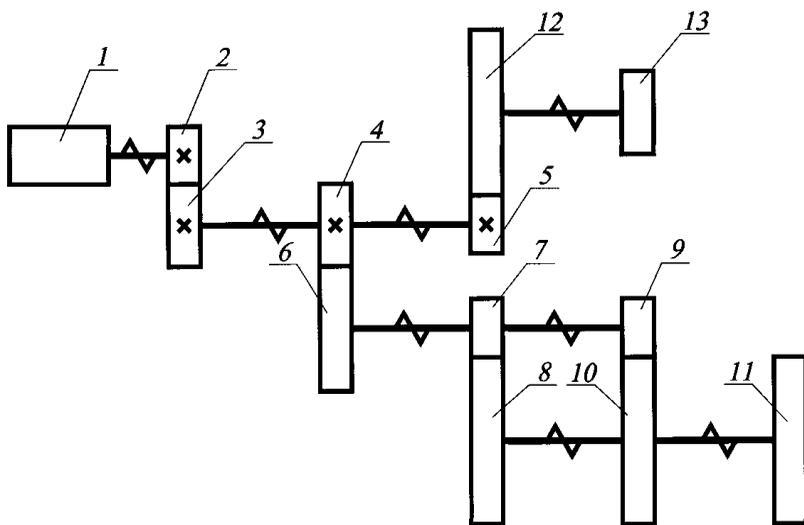
попадает в диапазон между τ_n и τ_1 , т.е. если хотя бы одно из значений $k_{m-1, m} / l_{m-1, m}$ оказывается меньшим, чем k_n . Вернемся теперь к вопросу о выборе динамической модели системы привода. Предположим, что частоты существенных по амплитуде гармонических возмущений, возникающих при работе станка, лежат в диапазоне $0 < \omega < \omega_{\max}$. В таком случае можно решить, какое количество слагаемых следует оставить в выражениях для передаточных функций системы для того, чтобы при анализе были обнаружены все резонансные режимы, возможные в приводе. Для этого необходимо выполнение условия $h_n > \omega_{\max}$ т.е. следует учитывать в приводе столько членов разложения передаточных функций по собственным формам, сколько необходимо для того, чтобы максимально учитываемая собственная частота превосходила ω_{\max} . Увеличение ω_{\max} связанное, например, с повышением рабочей скорости машины, неизбежно приводит к необходимости учёта более высоких собственных частот, т.е. к усложнению динамической модели привода. Если же, наоборот, выясняется, что $\omega_{\max} < k_S$, где $S < n$, то это означает, что в выражении для операторов динамической податливости можно отбросить все слагаемые, начиная $(S+1)$ -го. Тем самым динамическая модель упрощается. Таким образом, выбор динамической модели может оказаться многоступенчатым процессом. Сначала, исходя из некоторых конструктивных со-

ображений, выбираются элементы, податливость которых следует учитывать, и тем самым определяется исходная динамическая модель. Далее для этой модели определяются собственные частоты и сравниваются с предполагаемой величиной ω_{\max} . На основе этого сравнения делается вывод либо о возможности упрощения модели, либо о необходимости её усложнения за счёт учёта упругости некоторых элементов, принимавшихся в исходной модели абсолютно жёсткими. При исследовании установившегося режима движения привода величина ω_{\max} связывается обычно с угловой скоростью υ главного вала, совпадающий как было показано выше, с частотой периодического возмущения $L(t)$. В зависимости от того, какое число гармоник этого возмущения учитывается, величина ω_{\max} выбирается в пределах $\omega_{\max} = (3...5) \upsilon$.

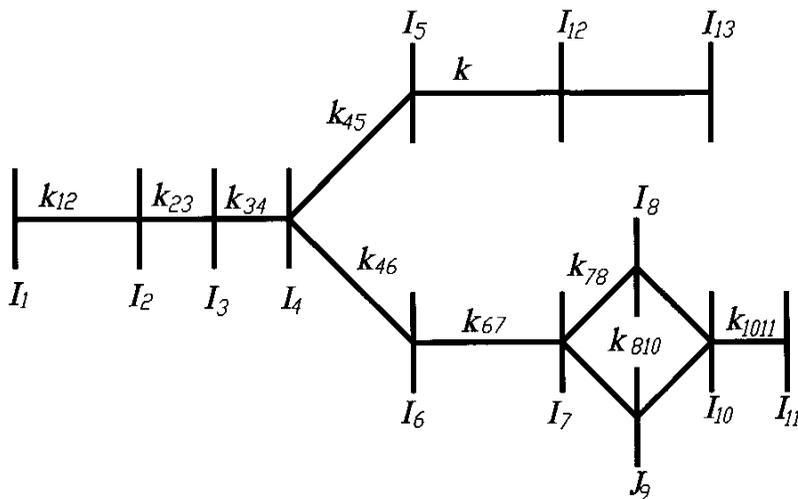
Приводы современных станков в ряде случаев моделируются как разветвлённые одномерные цепные системы. Пример такой системы показан на рис. 32, *а*, наряду с разветвлениями она содержит и замкнутые контуры.

Пусть рассматриваемый привод содержит n вращающихся масс $(1 - 13)$; I_S ($S = 1, 2, \dots, n$) – их моменты инерции относительно осей вращения; $k_{Sm}, c_{Sm}, \emptyset$ – жёсткость и коэффициент сопротивления элемента, соединяющего S -ю и m -ю массы. Вводя обобщённые координаты, можно привести все параметры к ротору, разделив их на квадраты соответствующих передаточных отношений. При этом исходная система приводится к условной модели, показанной на рис. 32, *б*. Здесь $I_{S1}k_{Sm}$ – приведённые параметры. На рисунке 33 приведена схема разветвлённой цепной системы привода в более общей форме.

Здесь инерционные элементы $1, 2, \dots, k$ отмечены точками, а упруго-диссипативные – линиями. Найдём для этой системы привода оператор динамической податливости $e_{AB}(p)$, связывающий угол поворота элемента B с моментом, приложенным к элементу A . Будем считать, что существует только один путь, соединяющий в полученной разветвлённой системе привода точки A и B (точки A и C на рис. 33 могут соединяться двумя разными путями ADC и AEC , поэтому приводимый метод непригоден для определения оператора $e_{AC}(p)$). Исследуемую систему привода можно рассматривать как «ствол» AB , составленный из k последовательно соединённых упруго-диссипативных элементов, в узлах которого $A, 1, \dots, k - 1$ присоединяются механические системы $1, 2, \dots, k$, обведённые на рис. 32 линиями системы, к которым относятся и массы, непосредственно расположенные в узлах, будем называть ответвлениями.



a)



b)

Рис. 32. Разветвлённая цепная система привода (a)
и её условная модель (b)

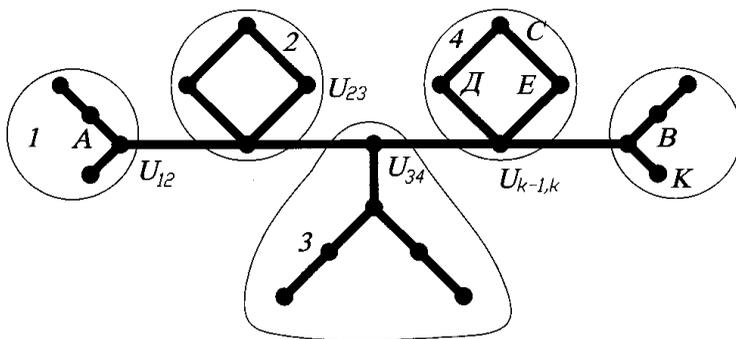


Рис. 33. Приведённая схема разветвлённой системы

Выделим s -е ответвление как подсистему и дадим точке прикрепления его к стволу перемещение $\varphi_S(t)$; для этого потребуется приложить к этой точке момент $M_S(t)$. Передаточная функция $d_S(P)$, связывающая $M_S(t)$ с $\varphi_S(t)$ называется оператором динамической жёсткости S -го ответвления. В общем случае $d_S(P)$ – дробно-рациональная функция, обратная оператору динамической податливости:

$$d_S(P) = e_{SS}^{-1}(P) = \frac{Q_S(P)}{R_S(P)}, \quad (155)$$

где $Q_S(P)$ и $R_S(P)$ – полиномы.

Если ответвление представляет собой простую цепную систему, то оператор $e_{SS}(P)$ можно определить методами, рассмотренными ранее, принимая массу, расположенную в узле, за первую. В общем случае для определения $d_S(P)$ используются другие методы (например, метод динамических жёсткостей [17]). Составим в операторной форме уравнения динамического равновесия узлов 1, 2, ..., k ствола AB . Если $\varphi_S(t)$ -перемещение (угол поворота) массы, расположенной в S -м узле, то момент $M_S = d_S(P)\varphi_S$ должен уравниваться моментами упругих и диссипативных сил, возникающих в элементах, примыкающих к узлу, а также внешним моментам M_{SB} , приложенным в этом узле. Отсюда получаем

$$d_S(P)\varphi_S + U_{S+1, S}(P)(\varphi_S - \varphi_{S-1}) + U_{S, S+1}(P)(\varphi_S - \varphi_{S+1}) = M_{SB}, \quad (156)$$

$$S = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$U_{\rho-1, S} + k_{S-1, S} + c_{S-1, S} P, \quad U_{k_1 k+1} = 0.$$

Выражение можно записать в форме одного векторно-матричного уравнения:

$$D(P)\varphi = M_B$$

где

$$\varphi^T = \|\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\|; \quad M_B^T = \|M_{1B}, M_{2B}, \dots, M_{kB}\|$$

Оператор $e_{AB}(p)$ связывает угол поворота k -го узла системы с моментом, приложенным в первом узле. Для его определения нужно найти отношения алгебраического дополнения $D_{1k}(P)$ элемента первой строки и k -го столбца определителя $\det D(P)$ к этому определителю. Рассмотрим выражение для $D_{1k}(P)$:

$$D_{1k}(p) = (-1)^k \begin{vmatrix} -U_{11} & d_2 + U_{12} + U_{13} & -U_{23} & \dots & 0 \\ 0 & -U_{23} & d_3 + U_{23}U_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -U_{k-1, k} \end{vmatrix}.$$

Можно заметить, что в этом определителе все элементы, лежащие ниже главной диагонали, – нули, поэтому он равен произведению диагональных элементов, умноженному на $(-1)^k$:

$$D_{1k}(p) = (-1)^k (-1)^k \prod_{m=1}^k U_{m-1m}(p) = \prod_{m=1}^k U_{m-1,m}(p).$$

В определителе $\det D(F)$ операторы (P) представим в виде (15б):

$$\det D(p) = \begin{vmatrix} Q_1 R_1^{-1} + U_{12} & -U_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -U_{12} & Q_2 R_2^{-1} + U_{12} + U_{23} & -U_{23} & \dots & 0 \\ 0 & -U_{23} & Q_2 R_2^{-1} + U_{23} + U_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_k R_k^{-1} + U_{k-1, k} \end{vmatrix}$$

Умножив этот определитель на произведение $R_1(P) R_2(P) \dots R_k(P)$ получим полином, совпадающий с характеристическим определителем $\Delta(P)$ всей системы. Таким образом,

$$\det D(p) = \Delta(p) \Big/ \prod_{m=1}^k R_m(p),$$

следовательно:

$$e_{AB}(p) = \frac{D_{1k}(p)}{\det D(p)} = \frac{\prod_{m=1}^k R_m(p) \prod_{m=1}^k U_{m-1, m}(p)}{\Delta(p)} .$$

Можно показать, что полиномы $R_m(p)$ являются, в свою очередь, характеристическими полиномами ответвлений, рассматриваемых как парциальные системы, получающиеся при закреплении всех узлов ствола AB .

3.8. УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ПРИВОДА

Рассмотрим привод, который может быть представлен моделью, показанной на рис.23. Уравнения движения привода могут быть записаны в виде (74) – (86). Будем искать установившееся движение этого привода, соответствующее $I = I_0 = \text{const}$, предполагая, как и в предыдущих главах, что при этом ротор двигателя вращается почти равномерно, т.е., что отклонение угловой скорости ротора от некоторого среднего значения ω_0 является малой величиной. В таком случае движение привода, соответствующее равномерному вращению ротора, может рассматриваться как программное. Для его определения приравняем нулю возмущения, стоящие в правых частях уравнений (74) – (86) и найдём частное решение, соответствующее режиму равномерного вращения ротора. Решение ищем в виде

$$\varphi_1 = w_0 t; \quad \varphi_S = w_0 t - \Delta_S, \quad (S = 2, 3, \dots, n); \quad M_1 = M^0 = \text{const} . \quad (157)$$

Подставляя его в уравнения движения, находим

$$k_{S-1, S}(\Delta_{S-1} - \Delta_S) + k_{S, S+1}(\Delta_{S+1} - \Delta_S) - M_{S0}(w_0) = 0 ,$$

$$S = 2, 3, \dots, n, \quad (158)$$

$$k_{12}\Delta_1 - M_1^0 = 0 \quad M_1^0 - M_{D0}(U_0, w_0) = 0 .$$

Складывая все эти уравнения, имеем

$$-\sum_{S=1}^n M_{S0}(w_0) - M_{D0}(U_0, w_0) = 0 . \quad (159)$$

Это уравнение имеет простой смысл: средняя угловая скорость ω_0 , должны иметь такое значение, при котором сумма среднего момента движущих сил и средних моментов всех сил сопротивления, приведённых к ротору двигателя, равна нулю. Его можно решать графическим способом (рис. 34).

Определив ω_0 , можно найти M_0^0 и ΔS из уравнений (157):

$$M_0^0 = M_{D0}(U_0, \omega_0);$$

$$\Delta S = \Delta_{S-1} + M_{S0}(\omega_0) \sum_{i=1}^S k_{i-1}^{-1}; \quad (160)$$

$$\Delta_1 = M_0^0 / k_{12}.$$

Перейдём теперь к определению законов движения $\varphi_S(t)$ от программных. Динамические ошибки должны определяться из уравнений (74) – (86). Правые части этих уравнений содержат возмущения, вызывающие отклонения законов движения от программных. В соответствии с методом возмущения, который будет применяться в этом случае, возмущения должны определяться на программных движениях. Иными словами, в правые части уравнений вместо φ_S должны подставляться выражения (157). При этом получаются функции времени:

$$L_S(t) = -0,5\tilde{I}_S' (w_0t - \Delta S) + \tilde{M}_S(w_0t - \Delta S, w), \quad (161)$$

$$S = 2, 3, \dots, n;$$

$$L_1(t) = \tilde{M}_{ст}(U_0, w_0, w_0t).$$

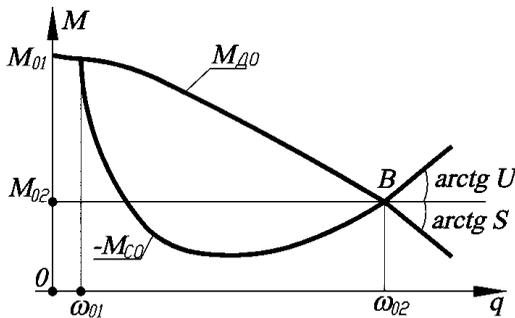


Рис. 34. Графический способ решения уравнения установившегося движения привода

Введём замену переменных:

$$\varphi_1 = w_0 t + \Psi_1; \quad \varphi_S = w_0 t - \Delta_S + \Psi_S; \quad M_0 = M_0^0 + \mu_0. \quad (162)$$

Подставляя (160) в левые части уравнений (74) – (86) и учитывая соотношения (156), получим следующие уравнения для динамических ошибок Ψ_S и μ_1 момента:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\Psi}_1 + c_{12}(\dot{\Psi}_1 - \dot{\Psi}_2) + k_{12}(\Psi_1 - \Psi_2) - \mu_1 &= L_1(t); \\ I_{S1} \ddot{\Psi}_1 + c_{S-1,S}(\dot{\Psi}_S - \dot{\Psi}_{S-1}) + c_{S,S+1}(\dot{\Psi}_S - \dot{\Psi}_{S+1}) + k_{S-1,S}(\Psi_S - \Psi_{S-1}) + \\ + k_{S,S+1}(\Psi_S - \Psi_{S+1}) + v_3 \dot{\Psi}_S &= L_S(t), \\ S &= 2, 3, \dots, n; \\ \tau \mu_0 + \mu_0 + S \dot{\Psi}_0 &; \end{aligned} \quad (163)$$

здесь

$$S = -\frac{\partial M_{D0}}{\partial \dot{\varphi}_0}(U_0, w_0); \quad v_S = -\frac{dM_{S0}}{d\dot{\varphi}_S}(w_0). \quad (164)$$

Записав последние из уравнений (162) в операторной форме и решив его относительно μ_0 , получим

$$\mu_0 = -(\tau p + 1)^{-1} S p \Psi_0. \quad (165)$$

Подставим это выражение в первое уравнение (161) и запишем эти уравнения, кроме первого, в операторной форме:

$$\begin{aligned} I_0 P^2 \Psi_0 + (c_{01} P + k_{01})(\Psi_0 - \Psi_1) &= -(\tau p \Psi_0 + 1)^{-1} S p \Psi_0 + L_0; \\ I_{S0} P^2 \Psi_S + (c_{S-1,S} P + k_{S-1,S})(\Psi_S - \Psi_{S-1}) + \\ + (c_{S,S+1} P + k_{S,S+1}) &= -v_S p \Psi_S + L_S, \\ S &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (166)$$

Введём в рассмотрение вектор динамических ошибок $\Psi = \|\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_n\|$, вектор возмущений $L(t) = \|\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\|^T$ и диагональную матрицу

$$v(p) = \text{diag}\left\|(\tau p + 1)^{-1} S p, v_1, p, v_2 p \dots v_n p\right\|. \quad (167)$$

Тогда уравнения (164) можно записать в виде одного векторного

$$\left\|I p^2 + c p + K\right\| \Psi = -v(p) + L, \quad (168)$$

где I, c, K – матрицы моментов инерции, коэффициентов сопротивления и жёсткостей механической системы привода. Из (166) получаем

$$\Psi = \left\|I p^2 + c p + K\right\|^{-1} [-v(p)\Psi + L] = E(p)[-v(p)\Psi + L],$$

откуда находим

$$\Psi = [\varepsilon + E(p)v(p)]^{-1} E(p)L = R(p)L, \quad (169)$$

где E – единичная матрица.

$$R(p) = [\varepsilon + E(p)v(p)]^{-1} E(p) = (r_{lm}(p))_{l, m=0}^n. \quad (170)$$

Элементы матрицы $R(P)$ являются передаточными функциями, связывающими динамические ошибки $\Psi_l(t)$ с возмущениями $L_m(t)$. Влияние двигателя и внешних сил сопротивления на динамические ошибки характеризуется матрицей $V(P)$. При $V(P) = 0$ получаем из (168) $R(P) = E(P)$, т.е. в этом случае матрица $R(P)$ совпадает с матрицей операторов динамической податливости привода. Предположим, что силы сопротивления слабо зависят от обобщённых скоростей, так что можно принять $v_l = 0, l = 1, 2, \dots, n = 0$. Тогда существенное влияние на динамические ошибки будет оказывать только характеристика двигателя.

В данном случае производя матричные операции в соответствии с (168), находим после несложных преобразований:

$$r_{lm}(P) = \left\{e_{lm}(p)(\tau p + 1) + S p [l_{00}(p)l_{lm}(p) - e_{10}(p) - e_{10}(p)e_{m0}(p)]\right\} \times \\ \times [\tau p + 1 + S p e_{00}(p)]^{-1}. \quad (171)$$

Отметим, что при $l = 0$ (или при $m = 0$) выражение, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль. Поэтому

$$r_{0m}(p) = \frac{e_{0m}(p)(\tau_p + 1)}{\tau_p + 1 + Sp e_{00}(p)}, \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (172)$$

Наиболее важным является определение динамических ошибок в резонансных режимах. Пусть возмущение $L_m(t)$ является периодическим процессом с частотой v_m (в практических задачах v_m совпадает с частотой вращения входного звена инерционного элемента):

$$\alpha_m(t) = \sum L_{mn} \cos\left(\sum_{u=1}^{\infty} v_m t + \alpha_{mn}\right). \quad (173)$$

Тогда из (167) получаем

$$\psi_l = \sum \sum |r_{lm}(iv_m v)| L_{mu} \cos[UV_m t + \alpha_{mu} + \arg r_{lm}(iv_m U)], \quad (174)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Резонансные колебания возникнут в том случае, если для некоторых m и n модуль $r_{ml}(lv_m U)$ окажется большим числом. Выясним условия при которых это может произойти. Для этого выражения (169), (170) представим в более удобном виде. Рассмотрим сначала передаточные функции (170). Используя выражения (151), (153), получаем

$$r_{0m}(p) = \frac{(\tau p + 1) \prod_1^m \prod_m^+}{I_C p^2 (\tau p + 1) \prod + Sp \prod^0}; \quad (175)$$

Здесь введены обозначения:

$$\prod_1^m = \prod_{i=1}^m (\tau_{i-1, l} P + 1); \quad \prod_m^+ = \prod_{l=m+1}^n (\tau_{im}^2 P^2 + 2\zeta_{lm} \tau_{lm} P + 1);$$

$$\prod_1^n (\tau_l^2 P^2 + 2\zeta_l \tau_l P + 1) = \prod; \quad \prod^0 = \prod_{l=1}^m [(\tau_l^0)^2 P^2 + 2\zeta_l^0 \tau_l^0 P + 1].$$

Преобразуем знаменатель выражения (172), где $\tau_m = I_C / S$ – механическая постоянная времени машины. В (173) в фигурных скобках стоит сумма двух полиномов – полинома P_1 имеющего степень $(2n + 2)$,

$$P_1 = (\tau\tau_m + \tau_m p + 1) \prod_{i=1}^n (\tau_i^2 p^2 + 2\zeta_i \tau_i p + 1)$$

и полинома, имеющего степень $2n$:

$$P_2 = \prod^0 - \prod = \prod_{i=1}^n \left[(\tau_i^0)^2 p^2 + 2\zeta_i^0 \tau_i^0 p + 1 - \prod_{i=1}^n (\tau_i^2 p^2 + 2\zeta_i \tau_i p + 1) \right].$$

В современных машинах постоянные времени τ и τ_m обычно существенно превосходят постоянные $\tau_1^0, \tau_1, \tau_2^0 \dots$. Чаше всего значения τ лежат в пределах $0,01 \dots 0,05$ с, τ_m – в пределах $0,03 \dots 0,1$ с, τ_1^0, τ_1 , не превышают $0,005 \dots 0,007$ с, а $\tau_2^0, \tau_2 \dots$ имеют, естественно, ещё меньшие значения. Можно показать, что при этих условиях в выражении (173) можно пренебречь полиномом P_2 , поскольку его коэффициенты оказываются во много раз меньшими, чем коэффициенты при тех же степенях P в полиноме P_1 . Сохраняя в (173) полином P , получаем

$$r_{om}(p) \approx \frac{\tau p + 1}{Sp(\tau\tau_m p^2 + \tau_m p + 1)} \frac{\prod_{i=1}^m \prod^{(+)} }{\prod} = W^*(p) I_C P^2 e_{0m}(p). \quad (176)$$

Здесь $W^*(P)$ – передаточная функция, связывающая динамическую ошибку угла поворота ротора двигателя привода, имеющего жёсткие звенья с возмущением,

$$W^*(p) = \frac{\tau p + 1}{Sp(\tau\tau_m p^2 + \tau_m p + 1)}. \quad (177)$$

Это выражение для $W^*(P)$ легко получить из уравнения динамики жёсткой машины в возмущениях:

$$(I_0 P^2 + VP)\psi - \mu_D = -\frac{1}{2} \frac{d\tilde{I}_D}{dq} (w_0 t) w_0^2 + L_M(t),$$

$$sp\psi + (\tau p + 1)\mu_D = \tilde{M}_C(U_0, w_0 t, w_0).$$

Примечание. При $v = 0$ передаточная функция (177) отражает влияние возмущения, приложенного к m -й массе, на неравномерность вращения ротора двигателя. Подставив в неё $p = iv_m u$, получим

$$\begin{aligned}
& |r_{0m}(i\nu_m U)| = \\
& \sqrt{1 + \tau^2 \nu_m^2 U^2} \prod_{k=1}^m \sqrt{\tau_{k-1, k}^2 \nu_m^2 U^2 + 1} \prod_{k=m+1}^n |1 - \tau_{km}^2 \nu_m^2 U^2 + 2\zeta_{km} \tau_{km} i\nu_m U| \{s\nu_m U\} \times \\
& \times \left\{ s\nu_m U |1 - \tau \tau_m \nu_m^2 U^2 + \tau_m i\nu_m U| \prod_{k=1}^n |1 - \tau_k^2 \nu_m^2 U^2 + 2\zeta_k \tau_k \nu_m U| \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{178}$$

Преобразуем теперь передаточные функции (172) при $S \neq 0$, $m \neq 0$. Рассмотрим для этого парциальную систему, получающуюся из системы, изображённой на рис. 23 при закреплении нулевой массы. Пусть к m -й массе этой системы приложен внешний момент $L_m(t)$, тогда

$$\Psi_l = e_{lm}^0(P)L_m, \tag{179}$$

где e_{lm}^0 – оператор динамической податливости системы с закреплённым концом.

С другой стороны, систему с закреплённым концом можно рассматривать как свободную систему, к которой приложены момент L_m и момент M_0 , возникающий на закреплённом конце. Последний можно определить из условия неподвижности закреплённого конца:

$$\Phi_0 = e_{00}(p)M_0 + e_{0m}(p)L_m = 0,$$

откуда

$$M_0 = -e_{0m}(p)e_{\infty}^{-1}(p)L_m$$

Таким образом, поскольку $\Phi_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\Psi_l &= \Phi_l - \Phi_0 = e_{l0}(p)M_0 + e_{lm}(p)L_m = \\
&= e_{00}^{-1}(p)[e_{00}(p)e_{lm}(p) - e_{l0}(p)e_{0m}(p)]L_m.
\end{aligned} \tag{180}$$

Сравнивая (177) и (178), получаем

$$e_{00}(p)e_{lm}(p) - e_{l0}(p)e_{0m}(p) = e_{00}(p)e_{lm}^0(p). \tag{181}$$

Подставляя это выражение в (168), находим

$$r_{lm}(p) = \frac{e_{lm}(P)(\tau p + 1) + Sp e_{00}(p)e_{lm}^0(p)}{\tau p + 1 + Sp e_{00}(p)}. \tag{182}$$

Для оператора $e_{lm}^0(p)$ нетрудно получить выражение, аналогичное (150). Составив характеристический определитель $\Delta^0(P)$ системы привода с закреплённым левым концом и определив алгебраические дополнения $\Delta_{lm}^0(P)$ этого определителя, найдём (при $l < m$):

$$e_{lm}^0(p) = \frac{\Delta_{lm}^0}{\Delta^0(P)} = \frac{\prod_{l+1}^{(-0)} \prod_{l+1}^m \prod_m^{(+)}}{\prod^0}; \quad (183)$$

здесь

$$\prod_l^{(-)} = \prod_{S=1}^{l-1} [(\tau_{Sl}^0)^2 P^2 + 2\zeta_{Sl}^0 \tau_{Sl}^0 p + 1],$$

где τ_{Sl}^0 – величины, обратные собственным частотам парциальной системы, получающейся при закреплении нулевой и l -й масс; ζ_{Sl}^0 – соответствующие безразмерные коэффициенты диссипации. Подставляя (150) и (181) в (180), получаем

$$r_{lm}(p) = \frac{\prod_t^{(-)} \prod_{l+1}^m \prod_m^{(+)} (\tau p + 1) + Sp \prod_l^{(-0)} \prod_m^{(+)} \prod_{l+1}^m}{I_C P^2 \prod [\tau p + 1 + Sp \prod^0 (\prod)^{-1}]}. \quad (184)$$

Знаменатель в этом выражении получится таким же, как в (172). Если τ и τ_m существенно превосходят τ_1^0, τ_1, \dots , то после преобразований, аналогичных проделанным выше, получим

$$r_{lm}(p) \approx \frac{\tau p + 1}{SpSp(\tau\tau_m p^2 + \tau_m p + 1)} \frac{[\prod_e^{(-)} + Sp(\tau p + 1)^{-1} \prod^{(-1)}] \prod_{l+1}^m \prod_m^{(+)}}{\prod}. \quad (185)$$

Учитывая выражения (178) и (150), получаем

$$r_{lm}(p) = W^*(p)[e_{lm}(p) + Sp(\tau p + 1)^{-1} e_{00}(p)e_{lm}^0(p)]I_C p^2. \quad (186)$$

Примечание. Анализируя выражение (174) и (184), находим, что резонансные колебания могут возникнуть при действии гармонического возмущения частоты ω , если один из сомножителей знаменателя этих выражений при подстановке $P = i\omega$ окажется малым по модулю. Поскольку возмущение, приложенное к m -й массе, является, (при установленном движении) периодическим процессом, содержащим гармоники с частотами $\nu_m l = 1, 2, \dots$, возможны следующие случаи.

1. Если для некоторых m и $\nu_m l = \tau_m^{-1} = k_r$, т.е. если частота одной из гармоник возмущения совпадает с одной из собственных частот привода, то могут возникнуть резонансные колебания, которые принято называть упругими резонансами привода.

2. Если для некоторых m и $l (\nu_m l)^2 = (\tau \tau_m)^{-1}$, то может наступить двигательный резонанс. В зубчатых передачах приводов возникает возмущение зубцовой частоты (т.е. частоты, равной произведению угловой скорости вращающегося вала на число зубьев колеса, установленного на этом валу). Эти возмущения могут вызвать резонансные колебания при работе привода в дорезонансном режиме. Выполнение условия $\nu \ll k_1$ достигается увеличением жёсткости упругих элементов механической системы привода или уменьшений масс инерционных элементов. Если $\tau, \tau_m, \tau_1^0, \tau_1$, – величины одного порядка, то двигатель наиболее активно влияет на развитие основных резонансных колебаний, существенно ограничивая их амплитуду.

После определения динамических ошибок могут быть найдены динамические нагрузки, возникающие в упругих элементах привода. Рассмотрим упругий элемент, расположенный между $l-1$ -м и l -й инерционными элементами цепной системы. Его деформация, приведённая к ротору двигателя, определяется как разность приведённых координат этих элементов:

$$\begin{aligned} \theta_{l-1, l} &= \varphi_l - \varphi_{l-1} = (\omega_0 t - \Delta_l + \psi_l) - (\omega_0 t - \Delta_{l-1} + \psi_{l-1}) = \\ &= (\Delta_{l-1} - \Delta_l) + (\psi_l - \psi_{l-1}). \end{aligned} \quad (187)$$

Приведённый к ротору двигателя момент, возникающий в этом элементе, складывается из момента упругих сил

$$M_{l-1, l}^Y = k_{l-1, l} \theta_{l-1, l} = k_{l-1, l} (\Delta_{l-1} - \Delta_l + \psi_l + \psi_{l-1})$$

и момента диссипативных сил

$$M_{l-1, l} = c(\dot{\Psi}_\tau - \Psi_{l-1}).$$

Таким образом, определяется суммарный момент

$$M_{l-1, l} = k_{l-1, l}(\Delta_{l-1} - \Delta_l) + (k_{l-1, l} + c_{l-1, l}P)(\Psi_l - \Psi_{l-1}). \quad (188)$$

Первое слагаемое постоянно по величине; оно определяет статическую нагрузку в элементе, вызванную постоянными составляющими моментов сил сопротивления. Остальные два слагаемых составляют динамическую нагрузку.

3.9. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Исследование переходных процессов сводится к интегрированию уравнения

$$I\ddot{\phi} + c\dot{\phi} + K\phi = M(U, \dot{\phi}) + U(U, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}),$$

дополненного характеристикой двигателя

$$\tau\dot{M}_0 + M_0 = M_{ct}(U, \dot{\phi}_0, \phi_0).$$

В зависимости от характера переходного процесса входной параметр может быть постоянным (при неуправляемом разбеге $U = U_0 = \text{const}$; при торможении с выключенным двигателем $U = 0$) или являться заданной функцией времени (при управляемом разбеге, при программном управлении). Интегрирование уравнений движения при заданных начальных условиях может выполняться на ЭВМ, в итоге получаются законы изменения обобщённых координат $\phi_0(t) \dots \phi_n(t)$, а также движущего момента $M_D(t)$. В этом разделе рассмотрим некоторые качественные особенности переходных процессов. Исследуем разбег привода при следующих упрощающих предположениях:

1. Как и при исследовании разбега привода с жёсткими звеньями, будем пренебрегать возмущениями, вызванными переменностью приведённых моментов инерции инерционных элементов.

2. Примем, что динамическая характеристика двигателя является линейной и может быть представлена в виде:

$$(\tau p + 1)M_D = rU - Sp\phi_0. \quad (189)$$

3. Моменты сил сопротивления, приложенных ко всем инерционным элементам, будем считать постоянными. При этих предположениях уравнения движения привода при разбеге получаются в форме

$$I\dot{\varphi} + c\dot{\varphi} + K\varphi = \|M_D, M_{10} \dots M_{n0}\|^T. \quad (190)$$

где M_{S0} – постоянные моменты. Разрешая (190) относительно φ , получаем

$$\varphi = E(p)M. \quad (191)$$

Из (187) имеем

$$M_D = (\tau p + 1)^{-1}(ru - Sp\varphi_0). \quad (192)$$

Подставив это выражение в (188), получим

$$\varphi = E(p)[(\tau p + 1)^{-1}ru - (\tau p + 1)^{-1}Sp\varphi_0, M_{10} \dots M_{n0}]^T.$$

После преобразований находим

$$\varphi = R_0(p)(\bar{S} + M). \quad (193)$$

Здесь R_0 – матрица передаточных функций, получающаяся из (167) при $u_S = 0$; $\bar{S} = \|S, 00 \dots 0\|$; $S = (\tau p + 1)^{-1}ru$; $M_C = \|0, M_{10} \dots M_{n0}\|$. В случае разбега $u(t) = 0$ при $t < 0$. Отсюда можно определить $S(t)$, как решение дифференциального уравнения

$$\tau \dot{S} + S = ru(t). \quad (194)$$

Запишем уравнение (191) в скалярной форме

$$\varphi_l = r_{l0}(p)S + \sum_{m=1}^n r_{ml}(p)M_{m0}, \quad l = 0, 1, \dots, n. \quad (195)$$

Примечание. Передаточные функции $r_{ml}(p)$ определяются выражениями (191). Решение уравнений (193), соответствующее начальными условиями $\varphi_l(0) = 0$, $l = 0, 1, \dots, n$ может быть представлено в виде интегралов Дюа-Меля

$$\varphi_l(t) = \int_0^t H_{l0}(t-t')S(t')dt' + \sum_{m=1}^n M_{m0} \int_0^t H_{lm}(t-t')dt', \quad (196)$$

где $H_{lm}(t)$ – импульсные переходные функции системы, являющиеся обратными преобразованиями Лапласа от передаточных функций $r_{lm}(p)$.

Функции $\varphi_i(t)$ удобно определять следующим образом.

1. Определяем преобразования Лапласа функций $S(t)$ и M_{m0} . Для постоянных моментов сил сопротивления

$$M_{m0}^{(L)}(P) = M_{M0} P^{-1}. \quad (197)$$

Здесь и в дальнейшем знаком (L) обозначаются преобразования Лапласа от соответствующих функций. При неуправляемом разбеге $U(t) = 0$ при $t < 0$ и $U(t) = U_0$ при $t > 0$, т.е. $U = U_0\eta(t)$, где $\eta(t)$ – единичная функция Хевисайда. Таким образом,

$$S^{(L)}(p) = r(\tau p + 1)^{-1} r u^{(\alpha)}(p) = r U_0 P^{-1} (\tau p + 1)^{-1}, \quad (198)$$

поскольку $\eta^{(L)=p^{-1}} = p$. В случае изменения и в процессе разбега по линейному закону имеем

$$U = U_0 t_0^{-1} [\eta(t) - (t - t_0)\eta(t - t_0)],$$

где t_0 – время нарастания U от нулевого значения до U_0 .

При этом

$$S^{(L)}(p) = r(\tau p + 1)^{-1} U^{(L)}(p) = r U_0 [1 - \exp(-pt_0)] / [t_0(\tau p + 1)p^2]. \quad (199)$$

Аналогичным путём можно определить $s^{(\alpha)}(p)$ при других законах изменения U .

2. Подставив $M_{M0}^{(L)}$ и $S^{(L)}$ в (195), получим преобразование Лапласа для φ_i :

$$\varphi_i^{(\alpha)}(P) = r_{i0}(p) + \sum_{m=1}^n r_{im}(p) M_{M0}^{(\alpha)}(p)$$

$$\varphi_i^{(\alpha)}(P) = r_{i0}(p) S^{(\alpha)}(P) + \sum_{m=1}^n r_{im}(p) M_{M0}^{(\alpha)}(p). \quad (200)$$

3. Далее для полученного выражения (198) определяем обратное преобразование Лапласа. При этом обычно используется разложение получающихся дробно-рациональных функций на простые дроби. Рассмотрим более подробно случай неуправляемого разбега привода при отсутствии сил сопротивления ($M_{M0} = 0$). Ограничимся определением закона изменения угловой скорости ротора $\varphi_0(t)$. Будем также

предполагать, что значения и существенно превышают τ_1 и τ_1^0 прием для определённости, что $\tau > 0,25\tau_M$, т.е. что разбег жёсткой машины был бы колебательным процессом. При сделанных предположениях из (193) имеем

$$\dot{\phi}_0^{(L)} = pr_{00}(p)\rho^{(L)}(p) = rU_0(\tau p + 1)^{-1}r_{00}(p). \quad (201)$$

Для передаточной функции $r_{00}(p)$ используем выражение (174). Подставляя в него e_{0M} в форме (160), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0^{(\alpha)}(P) &= \frac{ru_0}{Sp(\tau\tau_M P^2 + \tau_M P + 1)} + \frac{ru_0\tau_M P}{\tau\tau_M P + \tau_M P + 1} \times \\ &\times \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i(\tau_i^2 P^2 + 2\tau_i\zeta_i P + 1)} = \dot{\phi}_l^{(\alpha)}(p) + \dot{\phi}_{1l}^{(\alpha)}(p). \end{aligned} \quad (202)$$

Здесь учтено, что $\chi_{00}^{(l)} = \gamma_l^{-1}$, где γ_l определяется по (113), а $I_C/S = \tau_M$. Разложим на простейшие дроби первое слагаемое:

$$\dot{\phi}_l^{(L)} = \frac{A}{P} + \frac{Bp + c}{\tau\tau_M P^2 + \tau_M P + 1} = \frac{ru_0}{Sp(\tau\tau_M P^2 + \tau_M P + 1)}.$$

Неизвестные коэффициенты A, B, C находим, приравнявая выражения при одинаковых степенях P в числителях левой и правой частей. Получаем

$$\dot{\phi}_l^{(L)} = \frac{ru_0}{Sp} - \frac{ru_0\tau_M(\tau p + 1)}{Sp(\tau\tau_M P^2 + \tau_M P + 1)}. \quad (203)$$

Взяв от этого выражения обратное преобразование Лапласа, находим

$$\dot{\phi}_l(t) = \omega_0[1 - \exp(-vt)(vk^{-1} \sin kt + \cos kt)], \quad (204)$$

где $\omega_0 = rU_0/S$ – угловая скорость холостого хода двигателя, равная в данном случае (при отсутствии сил сопротивления) угловой скорости установившегося движения; $v = 1/2\tau; k = (\tau\tau_M)^{-1/2}(1 - \tau_M/4\tau)^{1/2}$. Легко убедиться, что это решение совпадает с соответствующим законом изменения угловой скорости при разбеге жёсткой машины. Остальные

слагаемые в (200), образующие $\dot{\phi}_{11}^{(\omega)}(P)$, отражают влияние упругости системы привода. Раскрывая их на простейшие дроби, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{ru_0\tau_M\gamma_e^{-1}P}{(\tau\tau_M p^2 + \tau_m p + 1)(\tau_l^2 p^2 + 2\zeta_l\tau_l p + 1)} = \\ & = \frac{A_l + B_l P}{\tau\tau_M p^2 + \tau_m p + 1} + \frac{C_l + D_l P}{\tau_l^2 p^2 + 2\zeta_l\tau_l p + 1}, \end{aligned}$$

решая систему линейных уравнений для A_l, B_l, C_l, D_l находим

$$\begin{aligned} A_l &= \eta_l(2\zeta_l\tau_l - \tau_l^2/\tau)/\Delta_l; & B_l &= \eta_l(\tau\tau_M - \tau_l^2)/\Delta_l; \\ C_l &= -A_l; & D_l &= -B_l\tau_l^2/(\tau\tau_m) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_\delta &= ru_0\tau_M/\gamma_l; \Delta_l = \\ &= \tau\tau_M - \tau_l^2(2 - \tau_l^2\tau^{-1}\tau_H^{-1} - 4\zeta_l^2 + 2\zeta_l\tau_M\tau_l^{-1} + 2\zeta_l\tau_l\tau^{-1}). \end{aligned}$$

В результате получаем следующее разложение $\dot{\phi}_{11}^{(\omega)}(p)$ на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{11}^{(\alpha)}(p) &= \frac{ru_0\tau_M}{\tau\tau_M p^2 + \tau_m p + 1} \sum \{(\tau\tau_M - \tau_l^2)p + (\zeta_l\tau_l - \tau_l^2)/\tau\} \times \\ & \times (\Delta_l\gamma_l)^{-1} - ru_0\tau_m \sum \frac{(1 - \tau_l^2\tau^{-1}\tau_M^{-1})\tau_l^2 p + 2\zeta_l\tau_l}{\Delta_l\gamma_l(\tau_l^2 p^2 + 2\zeta_l\tau_l p + 1)}. \end{aligned} \quad (205)$$

Пользуясь таблицами обратного преобразования Лапласа [18], находим

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{11}(t) &= ru_0\tau^{-1} \left\{ \sum_{l=1}^n (\Delta_l\gamma_l)^{-1} [2\zeta_l\tau_l - \tau_l^2/\tau] k^{-1} \sin kt + (\tau\tau_M - \tau_l^2) \cos kt \right\} \times \\ & \times \exp(-vt) - ru_0\tau_M \left\{ \sum_{l=1}^n (\Delta_l\gamma_l)^{-1} [(1 - \tau_l^2\tau^{-1}\tau_M^{-1}) \cos' k_l t + \right. \\ & \left. + (\tau^{-1} - v_l - \tau_l^1\tau^{-1}\tau_m^{-1}v_l) k_l' \sin k_l' t \right\} \exp(-v_l t), \end{aligned} \quad (206)$$

где

$$k_l' = \sqrt{\tau_l^{-2} - v_l^2}, \quad v_l = \zeta_l\tau_l^{-1}.$$

Первое слагаемое в (204) представляет собой затухающий колебательный процесс с частотой k . Эти затухающие колебания вносят поправку в низкочастотную составляющую переходного процесса, определяемую выражением (202). Легко убедиться, что эта поправка оказывается малой при малых ζ_l и τ_l/τ . Второе слагаемое в (204) отражает затухающие колебания с высокими частотами. Частоты k'_l при слабом демпфировании близки к собственным частотам k_l , привода. Возникновение колебаний с собственными частотами является характерной особенностью переходных процессов в упругом приводе. Оценим амплитудные значения отдельных компонент этих колебаний, учитывая малость ζ_l , τ_l/τ , τ_l/τ_M . При этом в первом приближении получаем

$$\Delta_l \approx \tau\tau_M; 1 - \tau_l^2\tau^{-1}\tau_M^{-1} \approx 1; k'_l = k_l.$$

Отсюда

$$-\frac{ru_0\tau_M}{\Delta_l\gamma_l} \left[\left(1 - \frac{\tau_l^2}{\tau\tau_M} \right) \cos k_l t + \left(\tau^{-1} - \nu - \frac{\tau_l^2\nu_l}{\tau\tau_M} \right) k'_l \sin k'_l t \right] \approx -\frac{ru_0}{\gamma_l\tau} \cos k_l t.$$

Таким образом, начальное значение амплитуды затухающей гармоники, имеющей частоту k_l , приблизительно равно $ru_0/(\gamma_l\tau)$.

С ростом номера l значения обычно быстро возрастают, поэтому амплитуды колебаний быстро убывают с ростом l . При практических расчётах чаще всего можно ограничиться учётом только колебаний с первой собственной частотой. Отметим также, что с ростом l растёт величина $\nu_l = \zeta_l k_l$, а это означает, что колебания более высоких частот быстрее затухают. Учитывая, что поправка к (204), определяемая первым слагаемым в (206), является обычно весьма малой, можно принять для закона изменения угловой скорости ротора следующее выражение:

$$\dot{\varphi}_0 \approx \omega_0 \left[1 - \exp(-\nu t) \left(\frac{\nu}{k} \sin kt \right) \right] - \frac{ru_0}{\tau\gamma_1} \exp(-\zeta_1 k_1 t) \cos k_1 t. \quad (207)$$

Таким образом, в первом приближении можно считать, что в законе изменения угловой скорости ротора двигателя наряду с затухающими колебаниями частоты k присутствуют затухающие колебания

частоты k_1 . Учитывая, что $ru_0 = s\omega_0 = I_C \omega_0 / \tau_M$, можно выражения (207) представить в следующем виде:

$$\dot{\phi}_0 \approx \omega_0 \left[1 - \exp(-vt) \left(\frac{v}{k} \sin kt + \cos kt \right) - \frac{I_C}{\tau \tau_M \gamma_1} \exp(-\zeta_1 k_1 t) \cos k_1 t \right]. \quad (208)$$

Необходимо отметить, что из-за приближённого характера выражение (208) оно не удовлетворяет начальному условию $\dot{\phi}_0(0) = 0$. Точное выражение (206) этому условию удовлетворяет. Определив закон изменения угловой скорости ротора, можно найти и законы изменения обобщённых координат привода.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите этапы разработки математической модели динамической системы привода главного движения и содержание работ, решаемых в каждом этапе.
2. С какой целью производится упрощение расчётной схемы привода, и назовите методику упрощения расчётной схемы.
3. Зачем определяются частотные характеристики привода, как строится амплитудно-фазовая частотная характеристика, как по АФЧХ можно оценить устойчивость системы.
4. Назовите порядок построения кривой переходного процесса в системе привода.
5. Задачи, решаемые в процессе исследования и проектирования систем при математическом моделировании.
6. Методика определения моментов инерции элементов привода.
7. Методика определения крутильной податливости элементов привода.
8. Определение крутильной податливости шпоночных и шлицевых соединений.
9. Определение крутильной податливости соединительных муфт.
10. Определение крутильной податливости ременных передач.
11. Определение крутильной податливости цепных передач.
12. Методика учета изгибной податливости валов и опор.
13. Методика определения податливости зубчатой передачи.
14. Методика учёта параметров приводного электродвигателя.
15. Алгоритм построения расчётной схемы привода главного движения станка.
16. Методика упрощения расчётной схемы привода главного движения станка.
17. Учет демпфирующих характеристик элементов привода в расчётной схеме.
18. Передаточные функции системы. Определение коэффициентов.
19. Методика расчёта частотных характеристик.
20. Методика расчёта собственных частот и определение форм колебаний системы.
21. Методика анализа частотных характеристик системы.
22. Построение переходных и импульсных переходных характеристик системы.
23. Определение реакции системы на произвольное входное воздействие.
24. Методика оценки показателей динамического качества системы.
25. Методика исследования переходных процессов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии показано, что колебательная система любого металлорежущего станка представляет собой многомассовую динамическую систему.

Рассмотрены общие положения расчета динамической системы привода главного движения станка и определение её параметров по чертежам станка.

На основании этих положений приводится методика расчета системы привода главного движения станка как системы со многими степенями свободы, которая может быть использована при выборе расчетных схем, расчётов основных параметров упругих колебательных систем, расчётов динамических характеристик и анализе динамического качества систем по полученным характеристикам.

Приведены различные математические модели системы привода, построены частотные и переходные характеристики.

Рассмотрены методы динамического расчёта и анализа многомассовой системы привода главного движения, связанные с определением динамических характеристик:

- 1) собственных частот и формы колебаний системы в линейном приближении и построение амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ);
- 2) характера и уровня колебаний, возникающих в системе;
- 3) параметров переходных режимов при пуске и торможении, при изменении конструктивных параметров системы.

Выполнение практической работы, связанной с расчётами по исследованию динамических характеристик приводов металлорежущих станков, изложенных в данном пособии, способствует более глубокому изучению дисциплин «Металлорежущие станки», «Расчёт, моделирование и конструирование оборудования с компьютерным управлением», «Математическое моделирование в машиностроении», «Математические методы в технологии машиностроения».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессекерский, В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бессекерский, Е.П. Попов. – М. : Наука, 1975. – 768 с.
2. Вейц, В.Л. Вынужденные колебания в металлорежущих станках / В.Л. Вейц, В.Е. Дондошанский, В.И. Чиреев. – М. : Машгиз, 1959. – 288 с.
3. Детали и механизмы металлорежущих станков / под ред. Д.Н. Решетова. – М. : Машиностроение, 1972. – Т. 2. – 520 с.
4. Копыленко, Ю.В. Расчёт динамических характеристик приводов главного движения металлорежущих станков : учеб. пособие / Ю.В. Копыленко, В.С. Хомяков. – М. : Мосстанкин, 1986. – 40 с.
5. Кочергин, А.И. Конструирование и расчёт металлорежущих станков и станочных комплексов. Курсовое проектирование: Учебное пособие для вузов / А.И. Кочергин. – Мн. : Выщ. шк., 1991. – 382 с.
6. Маслов, Г.С. Расчёты колебаний валов : справочное пособие / Г.С. Маслов. – М. : Машиностроение, 1968. – 272 с.
7. Металлорежущие станки и автоматы / под ред. А.С. Проникова. – М. : Машиностроение, 1981. – 479 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

П1. Таблица h -функций для нормированной трапецидальной частотной характеристики

	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,158	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207
1,0	0,310	0,326	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,732
2,5	0,675	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958
3,5	0,815	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,084
5,0	0,895	0,939	0,997	1,012	1,042	1,067	1,087
5,5	0,900	0,940	0,986	1,015	1,042	1,063	1,079
6,0	0,903	0,942	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037

Продолжение табл. III

7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,027	1,025
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019
10,5	0,949	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010
12,0	0,950	0,990	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988
14,5	0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988
15,5	0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,985	0,989
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994

Продолжение табл. III

17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994
18,0	0,966	1,002	1,015	1,011	1,002	0,955	0,995
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000
0,35	0,40	0,45		0,50	0,55	0,60	0,65
0,000	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000
0,215	0,223	0,231	0,5	0,240	0,248	0,255	0,259
0,417	0,432	0,447	1,0	0,461	0,476	0,490	0,505
0,603	0,617	0,646	1,5	0,665	0,685	0,706	0,722
0,761	0,786	0,810	2,0	0,833	0,856	0,878	0,899
0,891	0,917	0,943	2,5	0,967	0,985	1,010	1,030
0,987	1,013	1,038	3,0	1,061	1,082	1,100	1,117
1,150	1,074	1,095	3,5	1,115	1,132	1,145	1,158
1,090	1,110	1,127	4,0	1,142	1,152	1,158	1,162
1,104	1,120	1,129	4,5	1,138	1,141	1,141	1,138

Продолжение табл. III

1,102	1,112	1,117	5,0	1,117	1,114	1,107	1,097
1,088	1,092	1,096	5,5	1,092	1,076	1,070	1,050
1,070	1,068	1,062	6,0	1,051	1,037	1,021	1,003
1,049	1,043	1,033	6,5	1,018	1,001	0,982	0,966
1,033	1,023	1,009	7,0	0,993	0,975	0,957	0,941
0,35	0,40	0,45		0,50	0,55	0,60	0,65
1,020	1,005	0,989	7,5	0,974	0,958	0,944	0,931
1,012	0,998	0,981	8,0	0,966	0,951	0,941	0,935
1,007	0,992	0,977	8,5	0,966	0,954	0,948	0,948
1,006	0,992	0,978	9,0	0,970	0,960	0,961	0,966
1,006	0,993	0,982	9,5	0,975	0,972	0,980	0,987
1,006	0,993	0,987	10,0	0,982	0,985	0,993	1,006
1,005	0,993	0,989	10,5	0,987	0,996	1,007	1,017
1,002	0,993	0,991	11,0	0,997	1,002	1,014	1,027
0,999	0,991	0,989	11,5	0,997	1,006	1,017	1,029
0,994	0,988	0,990	12,0	0,997	1,006	1,019	1,026
0,990	0,986	0,989	12,5	0,997	1,006	1,015	1,019
0,986	0,985	0,989	13,0	0,997	1,006	1,012	1,012
0,983	0,984	0,989	13,5	0,998	1,006	1,010	1,005
0,983	0,985	0,991	14,0	1,000	1,006	1,008	0,999
0,985	0,988	0,996	14,5	1,002	1,006	1,005	0,994

Продолжение табл. III

0,987	0,991	1,000	15,0	1,005	1,007	1,002	0,993
0,988	0,996	1,004	15,5	1,008	1,07	1,001	0,993
0,992	0,998	1,007	16,0	1,011	1,008	1,000	0,994
0,995	1,002	1,009	16,5	1,011	1,008	1,001	0,996
0,997	1,005	1,010	17,0	1,012	1,007	1,000	0,997
0,998	1,005	1,010	17,5	1,009	1,005	0,997	0,998
1,001	1,008	1,010	18,0	1,008	1,002	0,997	0,998
1,001	1,007	1,009	18,5	1,006	0,999	0,995	0,998
1,001	1,006	1,006	19,0	1,001	0,995	0,993	0,997
1,001	1,005	1,004	19,5	0,998	0,992	0,992	0,996
1,001	1,005	1,002	20,0	0,996	0,991	0,992	0,998
1,002	1,004	1,001	20,5	0,995	0,991	0,994	0,999
1,003	1,004	1,001	21,0	0,995	0,993	0,997	1,001
1,004	1,004	1,000	21,5	0,996	0,995	1,000	0,995
1,005	1,004	0,999	22,0	0,996	0,996	1,000	1,004
0,70	0,75	0,80		0,85	0,90	0,95	1,00
0,000	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000
0,267	0,275	0,282	0,5	0,290	0,297	0,304	0,314
0,519	0,534	0,547	1,0	0,562	0,575	0,590	0,603
0,740	0,758	0,776	1,5	0,794	0,813	0,832	0,844
0,919	0,938	0,956	2,0	0,974	0,991	1,008	1,020

Продолжение табл. III

1,050	1,067	1,084	2,5	1,090	1,105	1,120	1,133
1,130	1,142	1,154	3,0	1,164	1,169	1,175	1,178
1,165	1,170	1,174	3,5	1,174	1,175	1,176	1,175
1,163	1,161	1,156	4,0	1,149	1,141	1,141	1,118
1,132	1,127	1,111	4,5	1,099	1,085	1,071	1,053
1,084	1,069	1,053	5,0	1,036	1,019	1,001	0,986
1,032	1,016	0,994	5,5	0,979	0,962	0,951	0,932
0,984	0,956	0,949	6,0	0,934	0,922	0,914	0,906
0,948	0,936	0,920	6,5	0,910	0,906	0,903	0,905
0,927	0,917	0,911	7,0	0,908	0,909	0,915	0,925
0,922	0,919	0,920	7,5	0,927	0,934	0,946	0,962
0,932	0,936	0,944	8,0	0,955	0,970	0,986	1,004
0,951	0,958	0,974	8,5	0,990	1,006	1,023	1,041
0,976	0,000	1,006	9,0	1,023	1,039	1,053	1,061
1,000	1,015	1,033	9,5	1,048	1,059	1,066	1,066
1,020	1,036	1,049	10,0	1,059	1,063	1,062	1,056
1,033	1,046	1,054	10,5	1,058	1,055	1,048	1,033
1,039	1,047	1,048	11,0	1,044	1,034	1,021	1,005
1,037	1,039	1,034	11,5	1,024	1,010	0,994	0,977
1,027	1,025	1,015	12,0	1,000	0,984	0,969	0,958

Продолжение табл. III

1,017	1,010	0,995	12,5	0,979	0,965	0,954	0,949
1,005	0,993	0,980	13,0	0,964	0,955	0,950	0,955
0,995	0,982	0,968	13,5	0,958	0,954	0,958	0,970
0,987	0,974	0,965	14,0	0,961	0,965	0,976	0,990
0,983	0,970	0,969	14,5	0,971	0,981	0,997	1,010
0,70	0,75	0,80		0,85	0,90	0,95	1,00
0,983	0,976	0,978	15,0	0,987	1,001	1,017	1,030
0,985	0,984	0,991	15,5	1,003	1,019	1,032	1,040
0,990	0,993	1,003	16,0	1,018	1,031	1,039	1,039
0,995	1,001	1,014	16,5	1,027	1,036	1,038	1,028
0,999	1,008	1,020	17,0	1,030	1,032	1,027	1,012
1,002	1,012	1,023	17,5	1,027	1,023	1,013	0,988
1,004	1,014	1,020	18,0	1,018	1,008	0,993	0,979
1,003	1,012	1,014	18,5	1,007	0,993	0,978	0,969
1,003	1,005	0,998	19,0	0,985	0,973	0,967	0,973
1,003	1,001	0,991	19,5	0,979	0,972	0,974	0,985
1,001	0,996	0,986	20,0	0,976	0,974	0,990	1,001
0,999	0,993	0,983	20,5	0,975	0,981	1,002	1,016
0,998	0,992	0,987	21,0	0,988	0,997	1,013	1,024
0,997	0,991	0,991	21,5	0,997	1,012	1,024	1,020

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

2П. Подшипники роликовые комбинированные типа 5040000

<i>d</i> , мм	Условное обозначение	Основные размеры, мм							<i>S</i> , мкм
		<i>D</i>	<i>d</i> ₁	<i>D</i> ₁	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>R</i>	
20	4-504704	52	25	42	46	16	5	1	3
	4-504904	62	30	52	60	20	7,5	1,5	4
25	4-504705	57	30	47	50	20	5	1	3
	4-504905	72	35	62	60	20	7,5	1,5	4
30	4-504706	62	35	52	50	20	5	1	5
	4-504906	80	40	68	66	20	9	1,5	5
35	4-504707	70	40	60	54	20	6	1,5	3
	4-504907	85	45	73	66	20	9	1,5	5
40	4-504708	75	45	65	54	20	6	1,5	3
	4-504908	90	50	78	75	25	9	1,5	5
45	4-504709	80	50	70	60	25	6	1,5	3
	4-504909	105	55	90	82	25	11	1,5	5
50	4-504710	90	55	78	60	25	6	1,5	3
	4-504910	110	60	95	82	25	11	2	5
55	4-504911	115	65	100	82	25	11	2	5
60	4-504912	120	70	105	82	25	11	2	5
65	4-504913	125	75	110	82	25	11	2	5
70	4-504914	130	80	115	82	25	11	2	5

**3П. Подшипники упорные роликовые
с цилиндрическими роликами**

Диаметр отверстия <i>d</i> , мм	Условное обозначение		Основные размеры, мм						
	отечеств.	импортн.	<i>d</i>	<i>D</i>	<i>H</i>	<i>dl</i>	<i>h</i>	<i>e</i>	<i>r</i> _{max}
17	9103	81 103	17	30	9	18	2,75	0,5	1
20	9104	81 104	20	35	10	21	2,75	0,5	1
25	9105	81 105	25	42	11	26	3	4	2
30	9106	81 106	30	47	11	32	3	1	2
	9206	81 206	30	52	16	32	4,25	1	2
	9 889 306	89 306	30	60	18	32	6,25	1,5	2
35	9107	81 107	35	52	12	37	3,5	1	2
	9207	81 207	35	62	18	37	5,25	1,5	2
	9 889 307	89 307	35	68	20	37	7	1,5	2
40	9108	81 108	40	60	13	42	3,5	1	2
	9208	81 208	40	68	19	42	5	1,5	2
	9 889 308	89 308	40	78	22	42	7,5	1,5	2
45	9109	81 109	45	65	14	47	4	1	2
	9209	81 209	45	73	20	47	5,5	1,5	2
	9 889 309	89 309	45	85	24	47	8,5	1,5	2
50	9110	81 210	50	70	14	52	4	1	2
	9210	81 210	50	78	22	52	6,5	1,5	3
	9 889 310	89 310	50	95	27	52	9,5	2	4

Диаметр отверстия d , мм	Условное обозначение		Основные размеры, мм						
	отечеств.	импортн.	d	D	H	dl	h	e	r_{\max}
55	9111	81 111	55	78	16	57	5	1	2
	9211	81 211	55	90	25	57	7	1,5	3
	9 889 311	89 311	55	105	30	57	10,5	2	4
60	9112	81 122	60	85	17	62	4,7	1,5	2
	9212	81 212	60	95	26	62	7,5	1,5	3
	9 889 312	89 312	60	110	30	62	10,5	2	4
65	9113	81 113	65	90	18	67	5,25	1,5	3
	9213	81 213	65	100	27	67	8	1,5	3
	9 889 313	89 313	65	115	30	67	10,5	2	4
70	9114	81 114	70	95	18	72	5,25	1,5	3
	9214	81 214	70	105	27	72	8	1,5	3
	9 889 314	89 314	70	125	34	72	12	2	4
75	9115	81 115	75	100	19	77	5,75	1,5	3
	9215	81 215	75	110	27	77	8	1,5	3
	9 889 315	89 315	75	135	36	77	12,5	2,5	4
80	9116	81 116	80	100	19	82	5,75	1,5	3
	9216	81 216	80	110	28	82	8,5	1,5	3
	9 889 316	89 316	80	135	36	82	12,5	2,5	4

Диаметр отверстия d , мм	Условное обозначение		Основные размеры, мм						
	отечеств.	импортн.	d	D	H	dl	h	e	r_{\max}
85	9117	81 117	85	110	19	87	5,75	1,5	3
	9217	81 217	85	125	31	88	9,5	1,5	3
	9889317	89 317	85	150	39	88	13,5	2,5	4
90	9118	81 118	90	120	22	92	6,5	1,5	3
	9218	81 218	90	135	35	93	10,5	2	4
	9 889 318	89 318	90	155	39	93	13,5	2,5	4
100	9120	81 120	100	135	25	102	7	1,5	3
	9220	81 220	100	150	38	103	11,5	2	4
	9 889 320	89 320	100	170	42	103	14,5	2,5	4
110	9122	81 122	110	145	25	112	7	1,5	3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. РАЗРАБОТКА РАСЧЁТНОЙ СХЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИВОДА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕЁ ПАРАМЕТРОВ	5
1.1. Определение моментов инерции элементов привода	5
1.2. Определение крутильной податливости элементов привода	9
1.2.1. Крутильная податливость валов	9
1.2.2. Крутильная податливость шпоночных и шлицевых соединений	12
1.2.3. Крутильная податливость соединительных муфт	12
1.2.4. Крутильная податливость ременных передач	14
1.2.5. Крутильная податливость цепных передач	15
1.3. Учёт изгибной податливости валов и податливости опор	15
1.3.1. Эквивалентная крутильная податливость	16
1.3.2. Податливость зубчатой передачи, приведённая к крутильной податливости	18
1.3.3. Полная эквивалентная крутильная податливость	18
1.4. Учёт параметров приводного электродвигателя	19
1.5. Построение расчётной схемы привода главного движения станка	21
2. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ПРИВОДА ГЛАВНОГО ДВИЖЕНИЯ СТАНКА	24
2.1. Упрощение расчётной схемы привода	25
2.1.1. Упрощение динамических расчётных схем станков на ЭВМ	31
2.2. Учёт демпфирующих характеристик элементов привода в расчётной схеме	33
2.3. Передаточные функции системы	35
2.4. Расчёт частотных характеристик	37
2.5. Расчёт собственных частот и определение форм колебаний системы	39

2.6. Анализ частотных характеристик системы	41
2.7. Построение переходных и импульсных переходных характеристик системы	42
2.8. Определение реакции системы на произвольное входное воздействие.....	46
2.9. Оценка показателей динамического качества системы	47
3. ДИНАМИКА МНОГОМАССНОЙ СИСТЕМЫ ПРИВОДА	48
3.1. Уравнения движения привода	48
3.2. Передаточные функции цепной системы привода	54
3.3. Собственные частоты и собственные формы колебаний	55
3.4. Методы определения собственных частот и собственных форм колебаний приводов	59
3.5. Разложение передаточных функций по собственным формам. Резонансные явления	66
3.6. Об учёте диссипативных сил	75
3.7. Представление передаточных функций в форме дробно-рациональных функций	78
3.8. Установившиеся движения привода.....	88
3.9. Исследование переходных процессов	97
Контрольные вопросы	104
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	105
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	106
ПРИЛОЖЕНИЯ	107

Учебное издание

ВАНИН Василий Агафонович,
КОЛОДИН Андрей Николаевич,
ОДНОЛЬКО Валерий Григорьевич

РАСЧЁТ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИВОДОВ МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКОВ

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 15.05.2012
Формат 60×84 /16. 6,97 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 259
Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14