

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»

**В.В. Леденев, В.Г. Однолько, З.Х. Нгуен**

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ**

*Рекомендовано Научно-техническим советом университета  
в качестве монографии*



---

Тамбов  
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
2013

УДК 624.04  
ББК 4581.1  
Л39

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук,  
профессор кафедры «Строительная механика»  
ФГБОУ ВПО «Воронежский ГАСУ»

*В.С. Сафронов*

Доктор технических наук, доцент кафедры  
«Городское строительство и автомобильные дороги»  
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»

*А.Ф. Зубков*

Л39 **Леденев, В.В.**

Теоретические основы механики деформирования и разрушения : монография / В.В. Леденев, В.Г. Однолько, З.Х. Нгуен. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 312 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1208-1.

Приведены фундаментальные уравнения линейной и нелинейной теории упругости, основные физические и реологические уравнения для плоских и пространственных задач, примеры их решения, виды краевых задач и методы их решения.

Рассмотрены основы механики разрушения твердых тел и грунтов, предельные состояния, классические теории прочности, условия пластичности, факторы, влияющие на надежность конструкций и конструктивных систем.

Предназначена для магистрантов, обучающихся по направлению 270100 «Строительство».

УДК 624.04  
ББК 4581.1

**ISBN 978-5-8265-1208-1**

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2013  
© В.В. Леденев, В.Г. Однолько, З.Х. Нгуен, 2013

# ВВЕДЕНИЕ

При проектировании, строительстве и эксплуатации необходимо обеспечить прочность, жесткость и устойчивость конструкций, зданий и сооружений, требуемую долговечность и эксплуатационные качества.

Перечень дисциплин, в котором рассматриваются эти вопросы, приведен на рис. 1. Между ними имеется тесная и неразрывная связь.

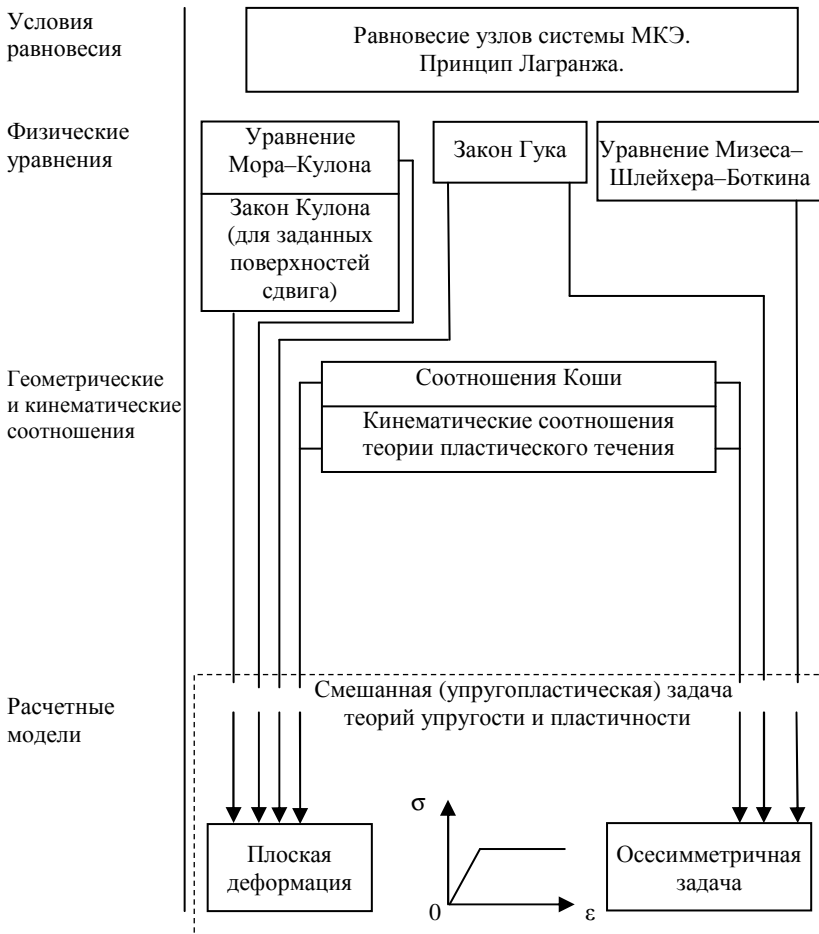


Рис. 1. Упругопластическая модель: связи с определяющими уравнениями механики грунтов (структурная схема)

На конструкции, здания и сооружения воздействуют статические, динамические, повторно-переменные, подвижные, температурные, сейсмические нагрузки, агрессивные среды, начальные напряжения, оказывают влияние дефекты, аварийные смещения опор и др.

К силовым нагрузкам относят сосредоточенные силы, распределенные по линии, площади, объему; нагрузки, моменты, группы сил или(и) моментов, различные их комбинации. Нагрузки характеризуются величиной, направлением, расположением, временем действия, законом изменения во времени.

Различают кратковременные и длительные динамические воздействия. Под кратковременной нагрузкой понимают нагрузку, время действия которой  $\tau$  мало по сравнению с периодом собственных колебаний системы  $T$  ( $\tau < T$ ), под импульсной ( $\tau \ll T$ ).

Под статической понимают нагрузку, которая не изменяется во времени или изменяется так медленно, что не вызывает возникновения сил инерции, т.е. не вызывает колебаний.

Здания и сооружения состоят из отдельных конструкций, часто отличающихся размерами, расположением, жесткостью и нагруженностью. С помощью узловых соединений элементы объединяются в плоские и пространственные системы: балочные, арочные, рамные, рамно-связевые, висячие, комбинированные. Они могут быть изменяемые, мгновенно изменяемые и неизменяемые, статически определимые и неопределимые.

Нагрузки разделяют на простые и сложные. В первом случае нагрузка возрастает пропорционально одному параметру и считается заданной по положению и направлению.

В элементах системы возникают и изменяются во времени напряжения, деформации, а сами элементы и узловые сопряжения совершают перемещения действительные (малые и большие) и возможные, удовлетворяющие имеющимся кинематическим связям.

В механике имеется ряд законов, теорем, гипотез, принципов, допущений, знания которых необходимы [16, 18, 22, 23, 30, 31, 33, 38, 40, 48, 49, 67, 69, 71, 72, 75]. К примеру, часто используют допущения о сплошности, однородности, изотропности, идеальной упругости материала, малости перемещений; гипотезу плоских сечений; принципы суперпозиции (независимости действия сил) Даламбера, Сен-Венана, температурно-временной суперпозиции, возможных перемещений и др.

Для описания напряженно-деформированного состояния конструкций и систем в ряде случаев учитывают физическую, геометрическую и конструкционную нелинейность.

В дальнейшем используют следующие основные понятия: деформации, перемещения, разрушения, напряжения. Каждое из них имеет множество определений.

Так, деформация может быть: линейная, угловая, объемная, плоская, упругая, пластическая, истинная, главная, обратимая, упруго-пластическая, однородная, остаточная, скольжения, ползучести, температурная, усадки, упругого последствия, холодная и др.

Перемещения могут быть: точки, тела, плоские, объемные, обобщенные, остаточные, относительные, связанные с поворотом.

Различают разрушения: транскристаллические, вязкие, хрупкие, в условиях ползучести, длительные, локальные, межкристаллические, монокристалла (металлы), вследствие развития трещин, глобальные, усталостные, коррозионные, вследствие сдвига.

Многочисленны разновидности напряжения: нормальное, касательное, главное, октаэдрическое, предельное, истинное, допускаемое, контактное, критическое, в теории трещин, опасное, остаточное, переменное, релаксирующее, среднее гидростатическое, эффективное, в плоскости скольжения и др.

Некоторые из этих понятий имеют разные толкования, например, деформация в представлениях Лагранжа и Эйлера. Поэтому приведен обширный перечень литературы: [22, 23, 35, 53, 57] по механике, где можно найти их подробное описание.

Расчеты конструктивных систем выполняют для различных стадий работы материала: упругой, упруго-пластической с упрочнением или разупрочнением, пластической, жестко-пластической.

В практике рассматривается предельное состояние или предельная нагрузка. В последнем случае это нагрузка, при которой наибольшее напряжение хотя бы в одном волокне достигает предела текучести. За исчерпание несущей конструкции принимают состояние, сопровождающееся появлением пластической деформации или шарнира пластичности (шарового или линейного). Для статически определимой системы разрушение наступает при появлении одного пластического шарнира, для статически неопределимой разрушение наступает тогда, когда исчерпывается несущая способность такого числа связей, равно-го лишним плюс единица.

Возможные независимые механизмы разрушения, например, для статически неопределимых рам: балочные механизмы или их комбинации, боковое смещение отдельного яруса рамы либо всей рамы в целом; комбинированные механизмы.

При расчете ферм рассматривают возможные формы разрушения, обусловленные выключением из работы отдельных стержней. Опреде-

ляют ту форму разрушения, которая отвечает наименьшему значению предельной нагрузки [75].

Одной из форм разрушения является потеря устойчивости равновесия геометрически неизменяемых систем. Для определения наименьшей величины критической нагрузки используют три основных метода: статический, энергетический и динамический. Подробнее можно посмотреть в [12, 13, 36, 74, 82].

### Фундаментальные задачи теории упругости

1. Задача Буссинеска (1885) о действии вертикальной сосредоточенной силы к поверхности линейно-деформируемого полупространства (пространственная задача).

Граничные условия

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0); \quad \sigma_z(x, y, 0) = P\delta(x)\delta(y),$$

где  $\delta(x)$  и  $\delta(y)$  – дельта функции Дирака.

Используется при решении ряда прикладных задач, например, определение напряжений в основании от действия нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольной площадке (А. Ляв, 1935; В.Г. Кропоткин, 1938).

2. Задача Хуанг Вен-Хне и др. [79, 80] о действии горизонтальной сосредоточенной силы к поверхности линейно деформируемого полупространства. Такие случаи имеют место при решении задач в гидротехническом строительстве.

3. Задача Фламана (1892) о распределении напряжений в линейно-деформируемом массиве при действии вертикальной погонной сосредоточенной нагрузки (кН/м). Это случай плоской деформации.

Граничные условия: пусть нагрузка действует вдоль оси. Тогда  $\tau_{xz}(x, 0) = 0, \quad \sigma_z = P\delta(x)$ .

Решения используют: для случая действия распределенной нагрузки по полосе шириной  $b$  (Н.М. Герсевич, 1933; В.А. Флорин, 1959); определение направления главных напряжений по направлению угла видимости (Ж. Митчелл, 1902); определение вертикальных напряжений в основании от треугольной и трапецидальной полосовой нагрузки (номограмма Остерберга).

4. Задача Р. Миндлина, Д. Чена (1950) о действии вертикальной сосредоточенной силы вблизи перпендикулярно ограничивающей плоскости (пространственная задача).

Решение используется при разработке методов расчета свай (Н.М. Дорошкевич, 1959; А.А. Бартоломей, 1965 и др.), заглубленных фундаментов (А.Н. Снитко, 1965; В.В. Леденев, 1972) и др.

5. Задача Е. Мелана (1932) об определении напряжений и деформаций упругой полуплоскости при сосредоточенной, вертикальной и горизонтальной силе, приложенной вблизи границы. В 1935 году М.И. Горбуновым-Посадовым решение Мелана было дополнено выражениями для вертикальных и горизонтальных перемещений.

Граничные условия при  $x = 0$  (вертикальная ось)  $\sigma_x = 0$ ;  $\tau_{xy} = 0$ .

Формулы выведены для плоского напряженного состояния.

Показан переход к плоской деформации. Решение было использовано при расчете гибкой подпорной стенки (1969).

6. Задача Л. Кельвина (1855). Сосредоточенная вертикальная сила приложена на такой глубине, что влияние ее на граничную поверхность не сказывается.

Решения теории упругости справедливы для среды, одинаково сопротивляющейся растяжению и сжатию. Для некоторых сред, например грунтов, сопротивление растяжению близко к нулю. Кроме того, распределительная способность некоторых сред (грунты) значительно меньше, чем по решениям теории упругости.

Этот недостаток можно исключить путем введения двойных сил (С.П. Тимошенко (1937), М.И. Горбунов-Посадов (1969,1970)).

К числу задач, решаемых в механике, относятся задачи о кручении различных конструкций, например, валов, прямоугольных стержней, стержней прокатных профилей, тонкостенных труб.

В многих решениях принималось допущение о том, что поперечные сечения остаются плоскими и в процессе кручения (Кулон, 1784; Навье, 1864; Сен-Венан, 1855).

Сен-Венан рассматривал кручение силами, приложенными по его концам. Деформация поперечных сечений определяется функцией  $\psi$   $\omega = \theta\psi(x, y)$ .

При этом  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_{xy} = 0$ ;  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \tau_{xy} = 0$ .

Обширная литература посвящена температурным и начальным напряжениям.

# I. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ

## Глава 1. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Рекомендуемая литература по этим вопросам [11, 16, 48, 57, 67, 69, 71, 72, 75].

Фундаментальные труды по теории упругости принадлежат С.П. Тимошенко (1934), А. Ляву (1935), А. Надаи (1950), Дж.Н. Гудьеру и Ф.Г. Ходжу (1960), Н.И. Мухелишвили (1966), Я.С. Уфлянду (1967), А.И. Лурье (1970), В.З. Партону и П.И. Перлину (1981) и др.

Ряд практических задач теории упругости рассмотрен в книге С.М. Алейникова (2006).

### 1.1. ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Среди пространственных задач теории упругости наибольшее значение имеют задачи Ж. Буссинеска (J. Boussinesq, 1885), Р. Миндлина (Mindlin, 1950) и Л. Кельвина (Lord Kelvin, 1855). Область, занятая упругой средой, – полупространство  $0 \leq z < \infty$ .

#### Задача Буссинеска (J. Boussinesq, 1885)

Граница области – горизонтальная плоскость  $z = 0$  – везде свободна от напряжений, кроме начала координат, в котором приложена сосредоточенная вертикальная сила  $P$  (рис. 1.1).

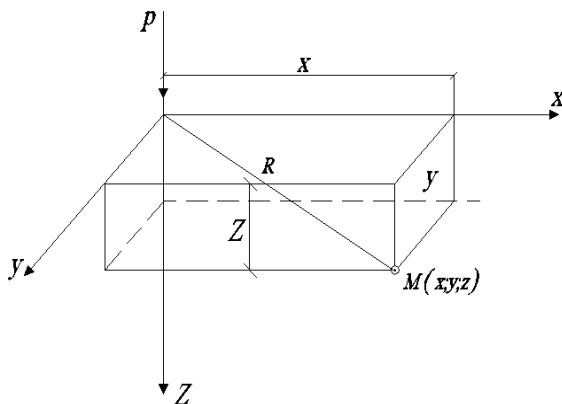


Рис. 1.1. Схема к задаче Буссинеска



Решение задачи дается формулами:

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi} \left[ \frac{x^2 z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left( \frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{(R+z)^2 R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right];$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi} \left[ \frac{y^2 z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left( \frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{(R+z)^2 R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right];$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5};$$

$$\tau_{zx} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 x}{R^5};$$

$$\tau_{zy} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 y}{R^5};$$

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2\pi} \left[ \frac{xyz}{R^5} - \frac{1-2\mu}{3} \frac{(2R+z)xy}{(R+z)^2 R^3} \right];$$

$$U = \frac{P}{4\pi G} \left[ \frac{xz}{R^3} - (1-2\mu) \frac{x}{R(R+z)} \right];$$

$$V = \frac{P}{4\pi G} \left[ \frac{yz}{R^3} - (1-2\mu) \frac{y}{R(R+z)} \right];$$

$$W = \frac{P}{4\pi G} \left[ \frac{z^2}{R^3} + 2(1-\mu) \frac{1}{R} \right].$$

В приведенных формулах приняты следующие обозначения:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – нормальные составляющие напряжения, параллельные осям  $X, Y, Z$ ;  $\tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  – касательные составляющие напряжения;

$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  – модуль сдвига, причем  $E$  – модуль нормальной упругости, а  $\mu$  – коэффициент бокового расширения (коэффициент Пуассона);

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , где  $x, y, z$  – координаты рассматриваемой точки.

На основе решения уравнений Буссинеска путем интегрирования могут быть получены решения задач для полупространства при действии произвольной вертикальной нагрузки, распределенной по некоторой площади на поверхности полупространства.

Аналогом задачи Буссинеска является задача о сосредоточенной касательной силе, приложенной к поверхности полупространства. Некоторые формулы этой задачи приводятся в [79, 80]. Посредством суперпозиции решений данной задачи и задачи Буссинеска можно получить решение для произвольной наклонной нагрузки на поверхность полупространства.

Так как законы деформирования грунта для нагрузки и разгрузки неодинаковы, то следует избегать применения решений теории упругости без учета последовательности изменения силовых факторов, т.е. без учета истории нагружения основания.

Наконец, следует отказаться от формального использования решений теории упругости в случаях, когда решением предсказываются значительные растягивающие напряжения в грунте, поскольку в действительности грунт практически не способен сопротивляться растяжению.

### Задача Е. Мелана ( Н. Melan, 1932)

Это решение о действии сосредоточенной силы вблизи границы упругой полуплоскости (рис. 1.2).

Определяют напряжения от вертикальной и горизонтальной сил. Горбуновым-Посадовым М.И. и Шехтер О.Я. получены решения для определения вертикальных и горизонтальных перемещений [16, 17].

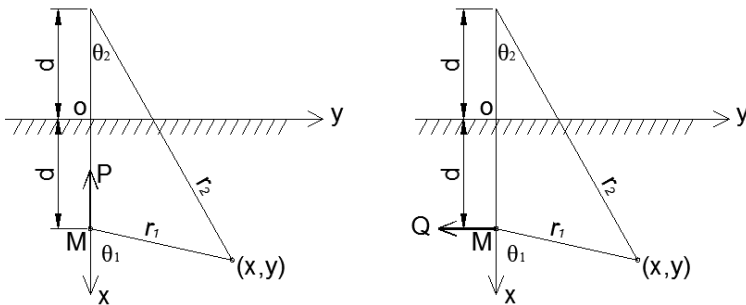


Рис. 1.2. Схема к задаче Е. Мелана

Для вертикальной силы  $P(d, 0)$ , действующей снизу вверх, функция напряжений, удовлетворяющая условиям на свободной границе полуплоскости ( $x = 0$ )  $\sigma_x = 0$ ;  $\tau_{xy} = 0$ , имеет вид

$$\varphi = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{1}{2} y(\theta_1 + \theta_2) - \frac{m-1}{4m} (x-d) \ln \frac{r_1}{r_2} - \frac{m+1}{2m} \frac{dx(d+x)}{r_2^2} \right],$$

где  $m = \frac{1}{\mu}$ ;  $\theta_1$  – угол между осью  $x$  (вертикальной) и прямой, соединяющей точку приложения силы  $P$  с точкой  $(x, y)$ , в которой определяются напряжения,  $\theta_2$  – аналогичный угол, но не для точки приложения силы, а для зеркального отображения этой точки с координатами  $(-d, 0)$ ;  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния между точками  $(x, y)$  и соответствующими точками  $(d, 0)$  и  $(-d, 0)$ .

Для горизонтальной силы  $Q$ , действующей слева направо и приложенной в точке  $(d, 0)$ , функция напряжений определяется уравнением

$$\varphi = \frac{Q}{\pi} \left[ -\frac{1}{2} (x-d)(Q_1 + Q_2) - \frac{m-1}{4m} \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{m+1}{2m} \frac{dxy}{r_2^2} \right].$$

Компоненты напряжений представляют через функцию напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Формулы для вычисления напряжений от сосредоточенной силы  $P$  для плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{\pi} \left\{ \frac{m+1}{2m} \left[ \frac{(x-d)^3}{r_1^4} + \frac{(x+d)[(x+d)^2 + 2dx]}{r_2^4} - \frac{8dx(d+x)y^2}{r_2^6} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m-1}{4m} \left[ \frac{x-d}{r_1^2} + \frac{3x+d}{r_2^2} - \frac{4xy^2}{r_2^4} \right] \right\}; \\ \sigma_y &= -\frac{P}{\pi} \left\{ \frac{m+1}{2m} \left[ \frac{(x-d)y^2}{r_1^4} + \frac{(x+d)(y^2 + 2d^2) - 2dy^2}{r_2^4} + \frac{8dx(d+x)y^2}{r_2^6} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m-1}{4m} \left[ -\frac{x-d}{r_1^2} + \frac{x+3d}{r_2^2} + \frac{4xy^2}{r_2^4} \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{\pi} \left\{ \frac{m+1}{2m} \left[ \frac{(x-d)^2}{r_1^4} + \frac{x^2 - 2dx - d}{r_2^4} + \frac{8dx(d+x)^2}{r_2^6} \right] + \frac{m-1}{4m} \left[ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{4x(d+x)}{r_2^4} \right] \right\}.$$

Формулы для вычисления напряжений в условиях плоского напряженного состояния от сосредоточенной силы  $Q$ :

$$\sigma_x = \frac{Qy}{\pi} \left\{ \frac{m+1}{2m} \left[ \frac{(x-d)^2}{r_1^4} + \frac{d^2 - x^2 + 6dx}{r_2^4} + \frac{8dxy^2}{r_2^6} \right] - \frac{m-1}{4m} \left[ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} - \frac{4x(d+x)}{r_2^4} \right] \right\};$$

$$\sigma_y = \frac{Qy}{\pi} \left\{ \frac{m+1}{2m} \left[ \frac{y^2}{r_1^4} + \frac{y^2 - 4dx - 2d^2}{r_2^4} + \frac{8dx(d+x)^2}{r_2^6} \right] + \frac{m-1}{4m} \left[ \frac{1}{r_1^2} + \frac{3}{r_2^2} - \frac{4x(d+x)}{r_2^4} \right] \right\};$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{\pi} \left\{ \frac{m+1}{2m} \left[ \frac{(x-d)y^2}{r_1^4} + \frac{(2dx+y^2)(d+x)}{r_2^4} - \frac{8dx(d+x)y^2}{r_2^6} \right] + \frac{m-1}{4m} \left[ \frac{x-d}{r_1^2} + \frac{3x+d}{r_2^2} - \frac{4x(d+x)^2}{r_2^4} \right] \right\}.$$

Формулы для вычисления напряжений от сосредоточенной силы в условиях плоской деформации:

$$u = \frac{P(1-\mu^2)}{\pi E} \left\{ \frac{1}{2}(1+\mu_1) \left[ \frac{y^2}{2r_1^2} + \ln r_1 r_2 + \frac{y^2 - 4dx - 2d^2}{2r_2^2} + 2\frac{dxy^2}{r_2^4} \right] + \frac{1}{4}(1-\mu_1) \left[ \ln r_1 + 3\ln r_2 + \frac{2(y^2 + dx + d^2)}{r_2^2} \right] + \frac{\mu_1}{2}(1+\mu_1) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{y^2}{2r_1^2} + \frac{y^2 + 2d^2}{2r_2^2} + \frac{2dxy^2}{2r_2^4} \right] - \frac{\mu_1}{4}(1-\mu_1) \left[ \ln \frac{r_2}{r_1} - 2\frac{d(x+d)+y^2}{r_2^2} \right] \right\};$$

$$v = \frac{P(1-\mu^2)}{\pi E} \left\{ \frac{1}{2}(1+\mu_1) \left[ -\frac{y(x-d)}{2r_1^2} - \frac{y(x-d)}{2r_2^2} + dy \frac{d^2-x^2+y^2}{r_2^4} \right] + \right. \\ \left. + (1-\mu_1) \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x+d} - \frac{xy}{2r_2^2} \right] - \frac{\mu_1}{2}(1+\mu_1) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(x-d)y}{2r_1^2} + \frac{y(x+d)}{2r_2^2} + \frac{2(x+d)dxy}{r_2^4} \right] - \frac{\mu_1}{2}(1-\mu_1) \frac{xy}{r_2^2} \right\}.$$

Перемещения от горизонтальной силы  $Q$  в условиях плоской деформации:

$$u = \frac{Q(1-\mu_1^2)}{\pi E} \left\{ \frac{1}{2}(1+\mu_1) \left[ -\frac{y(x-d)}{2r_1^2} - \frac{4dy}{r_2^2} - \frac{(x+d)y}{2r_2^2} - 2dy \frac{(x+d)d+y^2}{r_2^4} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(1-\mu_1)}{2} \left[ 2\operatorname{arctg} \frac{x+d}{y} - \frac{xy}{r_2^2} \right] - \frac{\mu_1}{2}(1+\mu_1) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{y_1(x-d)}{2r_1^2} + y \frac{(x+d)}{2r_2^2} - 2dxy \frac{x+d}{r_2^4} \right] - \frac{\mu_1}{2}(1-\mu_1) \frac{xy}{r_2^2} \right\};$$

$$v = \frac{Q(1-\mu^2)}{\pi E} \left\{ \frac{1}{2}(1+\mu_1) \left[ \frac{(x-d)^2}{2r_1^2} + \frac{1}{2} \ln[(x-d)^2+y^2][(x+d)^2+y^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x^2+6dx+3d^2}{2r_2^2} - \frac{2dx(d+x)^2}{r_2^4} \right] + \frac{(1-\mu_1)}{4} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{2} \ln[(x-d)^2+y^2] + \frac{3}{2} \ln[(x+d)^2+y^2] + 2x \frac{d+x}{r_2^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\mu_1(1+\mu_1)}{2} \left[ -\frac{(x-d)^2}{2r_1^2} + \frac{d^2-x^2-2dx}{2r_2^2} + 2dx \frac{(x+d)^2}{r_2^4} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\mu_1(1-\mu_1)}{4} \left[ \frac{1}{2} \ln[(x-d)^2+y^2] - \frac{1}{2} \ln[(x+d)^2+y^2] + 2x \frac{d+x}{r_2^2} \right] \right\}.$$

В [17] показано: для того, чтобы формулы для напряжений привести к условиям плоской деформации, то величину  $\mu = 1/m$  заменить величиной  $\mu_1 = \mu/(1-\mu)$ .

**Задача Р. Миндлина (R. Mindlin, 1950)**

*Вертикальная сосредоточенная сила  $P$  приложена вблизи упругого полупространства (рис. 1.3).*

Перемещение в радиальном направлении

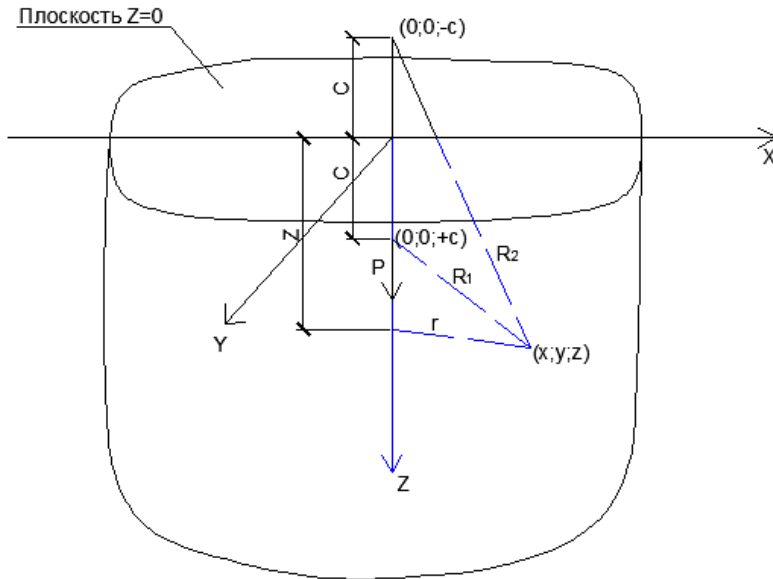
$$u = \frac{Pr}{16\pi G(1-\mu)} \left[ \frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} \right],$$

где  $G = \frac{E}{2}(1+\mu)$  – модуль сдвига;  $R_1 = \sqrt{(z-c)^2 + r^2}$ ;

$$R_2 = \sqrt{(z+c)^2 + r^2}.$$

Перемещение в вертикальном направлении

$$w = \frac{P}{16\pi G(1-\mu)} \left[ \frac{3-4\mu}{R_1} + \frac{8(1-\mu)^2 - (3-4\mu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right];$$



**Рис. 1.3.** Схема к задаче Р. Миндлина для вертикальной силы, приложенной вблизи поверхности упругого полупространства

$$\sigma_x = \frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left[ \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{3x^2(z-c)}{R_1^5} + \frac{(1-2\mu)[3(z-c)-4\nu(z+c)]}{R_2^3} - \frac{3(3-4\mu)x^2(z-c)-6c(z+c)[(1-2\mu)z-2\mu c]}{R_2^5} - \frac{30cx^2z(z+c)}{R_2^7} - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)} \left( 1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{x^2}{R_2^2} \right) \right];$$

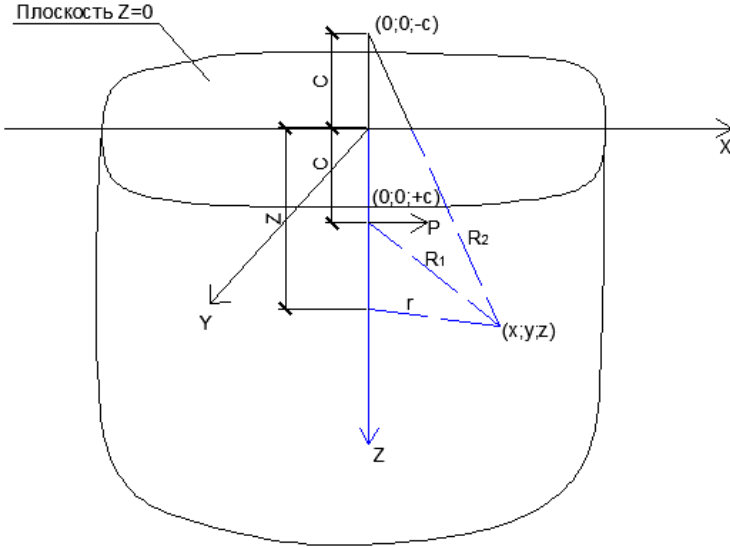
$$\sigma_y = \frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left[ \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{3y^2(z-c)}{R_1^5} + \frac{(1-2\mu)[3(z-c)-4\mu(z+c)]}{R_2^3} - \frac{3(3-4\mu)y^2(z-c)-6c(z+c)[(1-2\mu)z-2\mu c]}{R_2^5} - \frac{30cy^2z(z+c)}{R_2^7} - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)} \left( 1 - \frac{y^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{y^2}{R_2^2} \right) \right];$$

$$\sigma_z = \frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left[ -\frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)z(z+c)^2-3c(5z-c)}{R_2^5} - \frac{30cz(z+c)^3}{R_2^7} \right];$$

$$\tau_{yz} = \frac{Py}{8\pi(1-\mu)} \left[ -\frac{(1-2\mu)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)z(z+c)}{R_2^5} - \frac{3c(3z+c)}{R_2^7} - \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right];$$

$$\tau_{zx} = \frac{Px}{8\pi(1-\mu)} \left[ -\frac{(1-2\mu)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)z(z+c)}{R_2^5} - \frac{3c(3z+c)}{R_2^7} - \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right].$$

Горизонтальная сосредоточенная сила  $P$  приложена вблизи поверхности упругого полупространства (рис. 1.4).



**Рис. 1.4.** Схема к задаче Р. Миндлина для горизонтальной силы, приложенной вблизи поверхности упругого полупространства

Решение задачи дается формулами:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{P}{16\pi G(1-\mu)} \left[ \frac{3-4\mu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu)x^2}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^2} \left( 1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2+z+c} \left( 1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} \right) \right]; \\
 v &= \frac{Pxy}{16\pi G(1-\mu)} \left[ \frac{1}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu)}{R_2^3} - \frac{6cz}{R_2^5} - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \right]; \\
 w &= \frac{Px}{16\pi G(1-\mu)} \left[ \frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)} \right]; \\
 \sigma_x &= \frac{Px}{8\pi(1-\mu)} \left[ -\frac{1-2\mu}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(5-4\mu)}{R_2^3} - \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)x^2}{R_2^5} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left( 3 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right) + \frac{6c}{R_2^5} \left\{ 3c - (3-2\mu)(z+c) + \frac{5x^2}{R_2^2} \right\} \right];
 \end{aligned}$$



$$\sigma_y = \frac{Py}{8\pi(1-\mu)} \left[ \frac{1-2\mu}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(5-4\mu)}{R_2^3} - \frac{3y^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)y^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left\{ 1 - \frac{y^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} + \frac{6c}{R_2^5} \left( c - (1-2\mu)(z+c) + \frac{5y^2z}{R_2^2} \right) \right\} \right];$$

$$\sigma_z = \frac{Px}{8\pi(1-\mu)} \left[ \frac{1-2\mu}{R_1^3} - \frac{1-2\mu}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)(z+c)^2}{R_2^5} + \frac{6c}{R_2^5} \left( c + (1-2\mu)(z+c) + \frac{5z(z+c)^2}{R_2^2} \right) \right];$$

$$\tau_{yz} = \frac{Pxy}{8\pi(1-\mu)} \left[ -\frac{3(z-c)}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)(z+c)}{R_2^5} + \frac{6c}{R_2^5} \left\{ 1 - 2\mu + \frac{5z(z+c)}{R_2^2} \right\} \right];$$

$$\tau_{zx} = \frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left[ -\frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{3x^2(z-c)}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)x^2(z+c)}{R_2^5} - \frac{6c}{R_2^5} \left\{ z(z+c) - (1-2\mu)x^2 - \frac{5x^2z(z+c)}{R_2^2} \right\} \right];$$

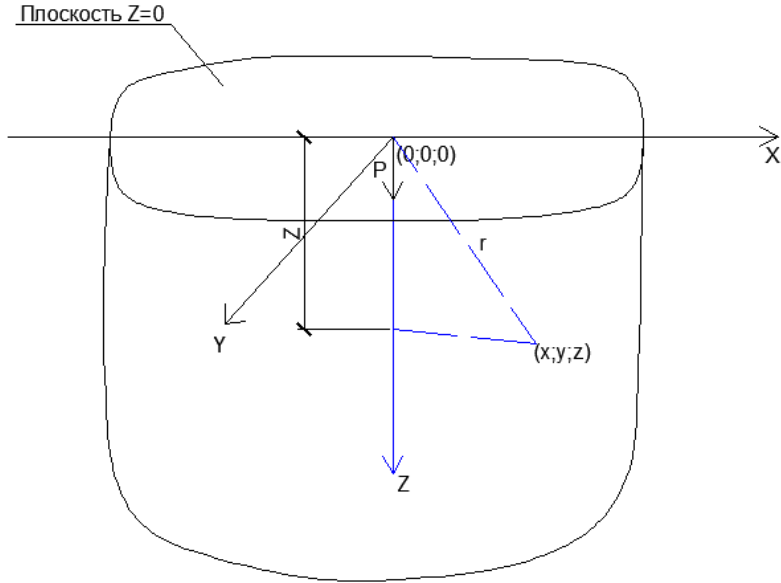
$$\tau_{xy} = \frac{Py}{8\pi(1-\mu)} \left[ -\frac{1-2\mu}{R_1^3} + \frac{1-2\mu}{R_2^3} - \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)x^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\mu)(1-2\mu)x^2}{R_2(R_2+z+c)^2} \left\{ 1 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right\} - \frac{6cz}{R_2^5} \left( 1 - \frac{5x^2}{R_2^2} \right) \right].$$

### Задача Л. Кельвина (L. Kelvin, 1855)

Сосредоточенная вертикальная сила приложена на такой глубине, что влияние граничной плоскости несущественно (рис. 1.5).

Перемещения в направлении оси  $x$

$$u_x = \frac{P(\lambda + \mu_0)}{8\pi\mu_0(\lambda + 2\mu_0)} \frac{xz}{r^3}.$$



**Рис. 1.5.** Схема к задаче Л. Кельвина для вертикальной силы, приложенной внутри упругого полупространства

Перемещения в направлении оси  $y$

$$u_y = \frac{P(\lambda + \mu_0)}{8\pi\mu_0(\lambda + 2\mu_0)} \frac{yz}{r^3}.$$

Вертикальные перемещения

$$w = \frac{P(\lambda + \mu_0)}{8\pi\mu_0(\lambda + 2\mu_0)} \left[ \frac{z^2}{r^3} + \frac{\lambda + 3\mu_0}{\lambda + \mu_0} \frac{1}{r} \right].$$

Напряжения определяются по формулам:

$$\begin{cases} \sigma_r = P/8\pi(1-\mu)[(1-2\mu)z(r^2+z^2)^{-3/2} - 3r^2z(r^2+z^2)^{-5/2}]; \\ \sigma_\Theta = P/8\pi(1-\mu)(1-2\mu)z(r^2+z^2)^{-3/2}; \\ \sigma_z = -P/8\pi(1-\mu)[(1-2\mu)z(r^2+z^2)^{-3/2} - 3z(r^2+z^2)^{-5/2}]; \\ \sigma_{rz} = -P/8\pi(1-\mu)[(1-2\mu)r(r^2+z^2)^{-3/2} - 3rz^2(r^2+z^2)^{-5/2}]. \end{cases}$$

В формулах:  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ляме

$$\lambda = E\mu / (1 + \mu)(1 - 2\mu);$$

$$\mu_0 = E / 2(1 + \mu_0).$$

**Пространственная контактная задача.** Рассмотрим задачу о давлении штампа на упругое полупространство (рис. 1.6). Силы трения между упругим телом и штампом не возникают. Предположим, что на границу полупространства при  $z = 0$  действует заданная нагрузка  $p(x, y)$ . Для нахождения напряженного состояния и перемещений в теле используют функции, введенные для решения трехмерной задачи П.Ф. Папковичем и Нейбером. Перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  выражаются через гармонические функции  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  и  $\phi_3$ :

$$\begin{cases} u = \phi_1 - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3); \\ v = \phi_2 - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial y} (\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3); \\ w = \phi_3 - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial z} (\phi_0 + x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3). \end{cases}$$

На границе упругого полупространства  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ .

Если ввести новую гармоническую функцию

$$\phi_1 = \frac{3-4\mu}{8(1-\mu)^2} \phi,$$

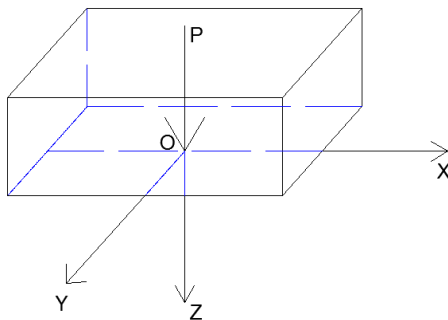


Рис. 1.6. Схема к пространственной контактной задаче

то получим перемещения:

$$\begin{cases} u = (1 - 2\mu) \int_z^{\infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dz - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \\ v = (1 - 2\mu) \int_z^{\infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dz - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}; \\ w = 2(1 - \mu) \varphi_1 - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}. \end{cases}$$

Компоненты напряжения:

$$\begin{cases} \frac{1 + \mu}{E} \sigma_x = 2\mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + (1 - 2\mu) \int_z^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} dz - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}; \\ \frac{1 + \mu}{E} \tau_{yz} = -z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}; \\ \frac{1 + \mu}{E} \sigma_y = 2\mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + (1 - 2\mu) \int_z^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} dz - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}; \\ \frac{1 + \mu}{E} \tau_{zx} = -z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x}; \\ \frac{1 + \mu}{E} \tau_{xy} = (1 - 2\mu) \int_z^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} dz - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}; \\ \frac{1 + \mu}{E} \sigma_z = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}. \end{cases}$$

**Распределение контактных давлений под жестким фундаментом в случае пространственной задачи [79, 80]**

*Центральная нагрузка при круглой площади подошвы.* Вертикальные перемещения точек поверхности массива, при давлении  $p$ , непрерывно распределенном по загруженной площади (рис. 1.7).

$$W = \frac{1}{\pi C} \iint_F \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}},$$

где  $\xi$  и  $\eta$  – координаты центра элементарной нагруженной площадки;  $x$  и  $y$  – координаты рассматриваемой точки.

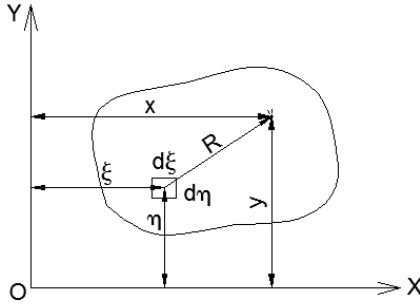


Рис. 1.7. Схема площади загрузки произвольного вида

Осадки всех точек абсолютно жесткого фундамента при вертикальной равномерной нагрузке

$$\frac{1}{\pi C} \iint_F \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = W_0 = \text{const}.$$

Давление в любой точке подошвы

$$p_{x,y} = \frac{p_m}{\sqrt[3]{1 - (\rho^2 / r^2)}},$$

где  $p_m$  – среднее давление на подошву круглого фундамента;  $r$  – радиус подошвы круглого жесткого фундамента;  $\rho$  – расстояние от центра круглой подошвы до любой точки на граничной плоскости (при  $\rho < r$ ).

*Внецентральная нагрузка.* Сжимающие напряжения непосредственно под подошвой жесткого цилиндрического фундамента нагруженного силой  $P$  с эксцентриситетом  $e$

$$p_{(x,y)} = \frac{3 \frac{ey}{r^2} + 1}{2\pi r \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} P.$$

Угол наклона  $\beta$  фундамента к горизонту определяется выражением

$$\text{tg}\beta = \frac{3(1-\mu^2)}{2\pi r \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} P,$$

где  $P$  – нагрузка на фундамент;  $r$  – радиус подошвы фундамента;  $E$  и  $\mu$  – модуль деформации и коэффициент бокового расширения грунта;  $x, y$  – координаты рассматриваемой точки.

**Определение напряжений под центром тяжести загруженного прямоугольника [79, 80]**

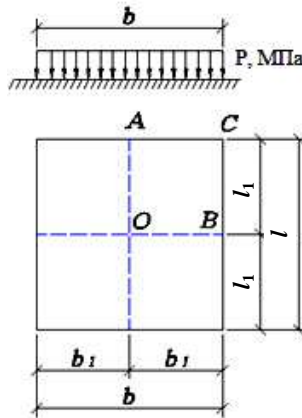
Если на поверхности массива приложена местная равномерно распределенная нагрузка, то для определения напряжений выделяем бесконечно малый элемент загруженной площади и, считая нагрузку на этот элемент сосредоточенной, используя формулы Буссинеска, определяем составляющие напряжений. Проинтегрировав полученные выражения в пределах всей площади, получим формулы для составляющих напряжений от действия данной нагрузки (рис. 1.8).

Приведем формулу А. Лява [71, 75] для величины сжимающих напряжений, отнесенных к площадкам, параллельным ограничивающей горизонтальной плоскости. Сжимающее напряжение в любой точке, лежащей под центром тяжести загруженного прямоугольника стороны которого равны  $2l_1$ ,  $2b_1$  (см. рис. 1.5), будет равно

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi} \left[ \frac{l_1 b_1 z}{D} \frac{l_1^2 + b_1^2 + 2z^2}{D^2 z^2 + l_1^2 b_1^2} + \arcsin \left( \frac{l_1 b_1}{\sqrt{l_1^2 + z^2} \sqrt{b_1^2 + z^2}} \right) \right],$$

где  $p$  – интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки;  
 $z$  – глубина рассматриваемой точки

$$D = l_1^2 + b_1^2 + z^2.$$



**Рис. 1.8. Схема действия местной равномерно распределенной нагрузки по прямоугольной площадке**

Сжимающее (угловое) напряжение в любой точке, лежащей на вертикали под углом прямоугольника со сторонами  $l, b$ ,

$$\sigma_{zc} = \frac{p}{2\pi} \left[ \frac{lbz}{D} \frac{l^2 + b^2 + 2z^2}{D^2 z^2 + l^2 b^2} + \arcsin \left( \frac{lb}{\sqrt{l^2 + z^2} \sqrt{b^2 + z^2}} \right) \right].$$

Зная угловое напряжение, по нему легко определяем сжимающие напряжения для любых точек полупространства с помощью метода угловых точек [79, 80].

**Плоская задача теории упругости.** Трехмерная задача теории упругости сводится к двумерной при следующих условиях: при деформации тела перемещения точек тела происходят только параллельно определенной плоскости (случай плоской деформации); компоненты тензора напряжений, параллельные некоторой оси, равны нулю (плоское напряженное состояние).

Примером плоской деформации является деформация призматического или цилиндрического тела постоянного поперечного сечения, имеющего достаточно большую длину в направлении продольной оси и подвергающейся действию равномерной нагрузке по длине, взаимно уравновешенной в любой плотности, перпендикулярной продольной оси.

**Основные уравнения плоской теории упругости.** Решения сводятся к определению  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

При этом должны соблюдаться уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + x = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + y = 0;$$

и совместного деформирования

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right).$$

Кроме того должны соблюдаться краевые условия на границе  $L$  области  $S$ :

$$X_n = \sigma_x l + \tau_{xy} m; \quad Y_n = \tau_{xy} l + \sigma_y m,$$

где  $X, Y$  – объемные силы;  $\lambda, \mu$  – упругие постоянные Ляме;  $X_n, Y_n$  – компоненты внешних напряжений;  $l, m$  – направляющие косинусы внешней нормали  $n$ .

Напряжения, связанные со смещениями, представлены уравнениями:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

где  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $u, v$  – смещение в направлении оси  $x$  и  $y$ .

При полной деформации

$$\partial_x = \mu(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_x + \sigma_y).$$

В случае плоского напряженного состояния ( $\sigma_z = 0$ ) в ранее записанные уравнения следует вместо  $\lambda$  записать

$$\lambda^* = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}; \quad \lambda^* = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - \mu)}.$$

Если продольная ось  $x_3$ , то

$$u_3 = 0, \quad u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2).$$

Примером плоского напряженного состояния является напряженное состояние тонкой пластики, ограниченной двумя плоскостями, перпендикулярными к оси  $x_3$ , и произвольной цилиндрической поверхностью, образованной параллельными той же оси. Нагрузка приложена только к этой поверхности и равномерно распределена по толщине пластинки.

Если на плоских гранях пластинки нагрузка отсутствует, то

$$\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0.$$

На любой площадке, перпендикулярной к оси  $x_3$

$$\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0,$$

а остальные компоненты тензора напряжений не зависят от координаты  $x_3$ .



### Уравнение плоской деформации

$$u_3 = 0, \quad u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2);$$

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad e_{33} = 0,$$

$$e_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad e_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0, \quad e_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0,$$

$$e_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \quad e_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \mu(\sigma_{33} + \sigma_{11})],$$

$$e_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})], \quad e_{12} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{12}, \quad e_{23} = e_{31} = 0.$$

Уравнения равновесия представляются в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + F_1 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + F_2 = 0. \end{cases}$$

Условие совместимости деформаций

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\mu} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right).$$

**Уравнение плоского напряженного состояния.** При плоском напряженном состоянии

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,$$

$$e_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \mu \sigma_{22}), \quad e_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \mu \sigma_{11}),$$

$$e_{33} = -\frac{\mu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad e_{12} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{12}, \quad e_{23} = e_{31} = 0.$$

Уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + F_1 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + F_2 = 0. \end{cases}$$

Условия совместимости деформаций

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} \right) = 0.$$

Эти уравнения удовлетворяются при

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

### Задача Фламана (Flamant, 1892)

Относится к числу статических задач теории упругости. Областью, занятой упругой средой, в данной задаче является полупространство  $0 \leq z < \infty$  (рис. 1.9). Граница области  $z = 0$  свободна от напряжений везде, за исключением оси  $y$ , вдоль которой приложена линейная нагрузка равномерной интенсивности  $P$ .

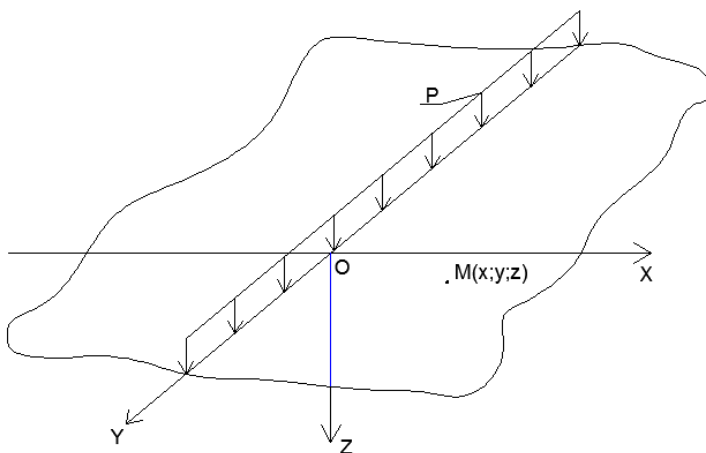


Рис. 1.9. Схема к задаче Фламана

Рассматриваемая задача принадлежит к классу задач плоской деформации. Это обусловлено структурой области и граничными условиями. Все плоскости, перпендикулярные оси  $y$ , являются в данной задаче равноправными. Поэтому все искомые функции не зависят от координаты  $y$ .

Следовательно, достаточно рассмотреть только одну из таких плоскостей, например, плоскость  $xOz$ . Компонента  $v$  вектора смещения вдоль оси  $y$  тождественно равна нулю, однако нормальное напряжение  $\sigma_y$  отлично от нуля. Вектор смещения в задачах этого класса равен

$$\bar{S} = u\bar{i} + w\bar{k},$$

а из соотношений Коши – что тензор деформации имеет вид

$$\Theta = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Из формул закона Гука вытекает, что только одно касательное напряжение не равно нулю

$$\pi = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Решение задачи:

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2}; \quad \sigma_z = \frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}; \quad \sigma_y = \mu(\sigma_x + \sigma_z);$$

$$\tau_{xz} = \frac{2P}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}.$$

Задача Фламана может быть легко обобщена на случай полосовой нагрузки, для которой приводится ряд важных инженерных задач.

**Распределение напряжений в линейно деформируемом массиве при действии погонной нагрузки [79, 80]**

$$\sigma_z = -\frac{2P \cos^3 \beta}{\pi R}; \quad \sigma_y = -\frac{2P \sin^2 \beta \cos^2 \beta}{\pi R};$$

$$\tau = -\frac{2P \sin \beta \cos^2 \beta}{\pi R};$$

$$W = -\frac{2}{\pi} \frac{1-\mu_0^2}{E_0} P \ln(x) + c; \quad U = \pm \frac{(1-\mu_0)(1-2\mu_0)P}{2E_0},$$

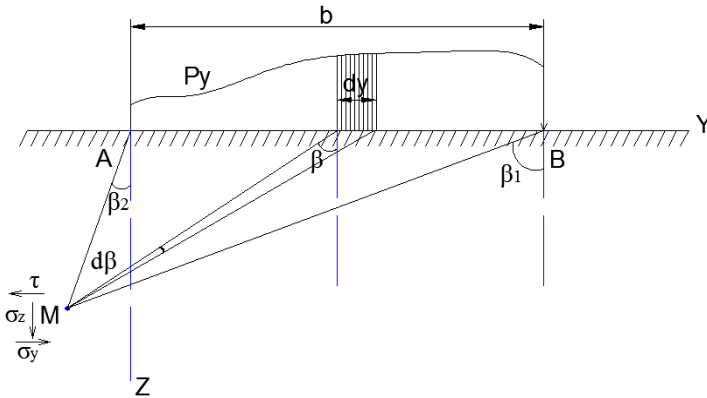
где  $P$  – сосредоточенная сила на единицу длины;  $\beta$  – угол, составляемый радиусом-вектором, проведенным из начала координат (точка приложения сосредоточенной силы) до рассматриваемой точки;  $R$  – расстояние от начала координат до рассматриваемой точки.

**Напряжения в любой точке массива от действия сплошной полосообразной нагрузки шириной  $b$  [79, 80] (рис. 1.10)**

$$\sigma_z = -\frac{2}{\pi} \int_{\beta_2}^{\beta_1} p_y \cos^2 \beta d\beta; \quad \sigma_y = -\frac{2}{\pi} \int_{\beta_2}^{\beta_1} p_y \sin^2 \beta d\beta;$$

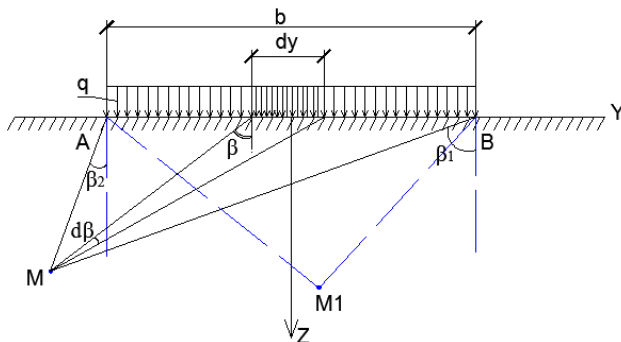
$$\tau = -\frac{2}{\pi} \int_{\beta_2}^{\beta_1} p_y \sin \beta \cos \beta d\beta,$$

где  $p_y$  – интенсивность распределенной нагрузки.

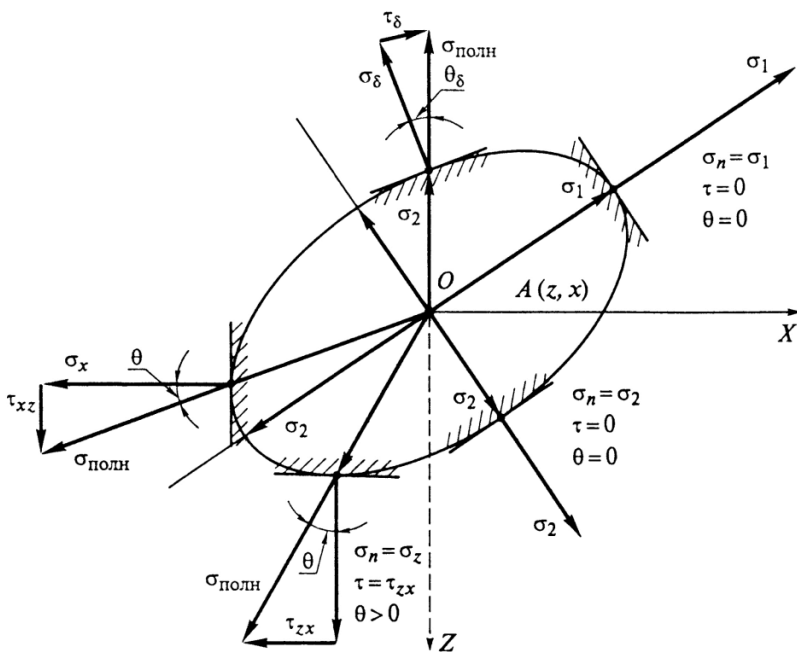


**Рис. 1.10. Схема действия любым образом распределенной нагрузки в условиях плоской задачи**

**Напряжения при действии на поверхность грунта равномерно распределенной полосообразной нагрузки (рис. 1.11) [79, 80]**



**Рис. 1.11. Схема действия равномерно распределенной нагрузки в условиях плоской задачи**



**Рис. 1.12. Эллипс напряжений описывает совокупность полных напряжений, действующих на множество площадок в т. А (z, x). Большая полуось совпадает с направлением биссектрисы угла видимости**

Напряжения при действии на поверхность грунта равномерно распределенной полосообразной нагрузки

$$\sigma_z = -\frac{P}{\pi} \left[ \beta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 - (\pm\beta_2) - \frac{1}{2} \sin(\pm 2\beta_2) \right];$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{\pi} \left[ \beta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 - (\pm\beta_2) + \frac{1}{2} \sin(\pm 2\beta_2) \right];$$

$$\tau = \frac{P}{2\pi} (\cos 2\beta_2 - \cos 2\beta_1).$$

Напряженное состояние основания наглядно представляют с помощью эллипса напряжений (рис. 1.12), построенного на напряжениях как на полуосях (Добров Э.М., 2008).

**Распределение напряжений при горизонтальной (параллельной ограничивающей плоскости) равномерно распределенной нагрузке** (рис. 1.13) [79, 80]

Решение данного случая получено проф. Г.В. Колосовым

$$\sigma_y = \frac{q}{\pi} \ln \frac{(b_1 + x)^2 + z^2}{(b_1 - x)^2 + z^2} - \frac{4b_1 q x z^2}{\pi \left[ (b_1^2 + x^2 + z^2)^2 - 4b_1^2 x^2 \right]};$$

$$\sigma_z = \frac{4b_1 q x z^2}{\pi \left[ (b_1^2 + x^2 + z^2)^2 - 4b_1^2 x^2 \right]};$$

$$\tau_{yz} = \frac{q}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{b_1 - x}{z} + \operatorname{arctg} \frac{b_1 + x}{z} \right) - \frac{2b_1 q z}{\pi} \frac{b_1^2 - x^2 + z^2}{(b_1^2 + x^2 + z^2)^2 - 4b_1^2 x^2}.$$

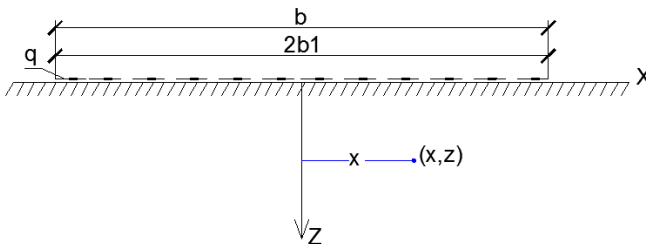


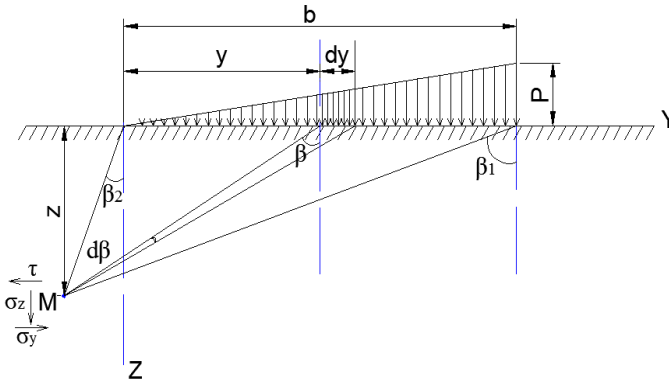
Рис. 1.13. Схема действия горизонтальной равномерно распределенной нагрузки

**Распределение напряжений при действии нагрузки, меняющейся по закону прямоугольника (рис. 1.14) [79, 80]**

$$\sigma_z = -\frac{Pz}{\pi b} \left[ \sin^2 \beta_1 - \sin^2 \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_2 \left( \beta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 - \beta_2 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_2 \right) \right];$$

$$\sigma_y = -\frac{Pz}{\pi b} \left[ \cos^2 \beta_1 - 2 \ln \cos \beta_1 - \cos^2 \beta_2 - 2 \ln \cos \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_2 \times \right. \\ \left. \times \left( \beta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{2} \sin 2\beta_2 \right) \right];$$

$$\tau_{yz} = \frac{Pz}{2\pi b} [\sin 2\beta_1 - \sin 2\beta_2 + 2(\beta_2 - \beta_1) - \operatorname{tg} \beta_2 (\cos 2\beta_1 - \cos 2\beta_2)].$$



**Рис. 1.14.** Схема нагрузки, меняющейся по закону треугольника

**Плоская контактная задача.** Напряженное состояние в упругом теле в случае плоской задачи (рис. 1.15) определяется тремя компонентами напряжения:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

Они удовлетворяют условиям равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

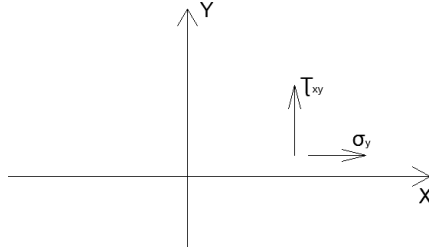


Рис. 1.15. Схема к плоской контактной задаче

Деформация упругого тела может быть выражена через относительные удлинения  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ , определяющиеся через  $u$ , т.е. перемещения точки упругого тела по направлению оси  $x$  и через  $v$ , т.е. перемещения по направлению оси  $y$ :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \lambda_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Так как три компонента деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  выражены через два компонента перемещения  $u$  и  $v$ , то между ними должно существовать некоторое соотношение

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Компоненты деформации связаны с компонентами напряжения соотношениями:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda \theta + 2\mu \epsilon_x; \\ \sigma_y = \lambda \theta + 2\mu \epsilon_y; \\ \lambda_{xy} = 2\mu \gamma_{xy}, \end{cases}$$

здесь  $\theta = (\epsilon_x + \epsilon_y)$  – относительное объемное расширение, а  $\lambda$  и  $\mu_0$  – коэффициенты Ляме

$$\begin{aligned} \lambda &= E\mu / (1 + \mu)(1 - 2\mu); \\ \mu_0 &= E / 2(1 + \mu). \end{aligned}$$



На основании этих уравнений компоненты деформации могут быть выражены через компоненты напряжения:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \mu^2)\sigma_x - \mu(1 + \mu)\sigma_y]; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \mu^2)\sigma_y - \mu(1 + \mu)\sigma_x]; \\ \lambda_{xy} = \frac{1 + \mu}{E} \tau_{xy}, \end{cases}$$

где  $E$  – модуль упругости и  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

**Распределение контактных давлений под жесткими ленточными фундаментами при центральной нагрузке**

$$p_{(x,y)} = \frac{2p_m}{\pi\sqrt{1 - (y/b_1)^2}},$$

где  $p_m$  – среднее давление на единицу площади подошвы фундамента;  $y$  – расстояние по горизонтали от середины фундамента до рассматриваемой точки;  $b_1$  – полуширина фундамента.

**Распределение контактных давлений под жесткими ленточными фундаментами при внецентренной нагрузке**

$$p_{(x,y)} = \frac{P}{\pi\sqrt{b_1^2 - y^2}} \left( 1 + \frac{2ey}{b_1^2} - \frac{2qb_1}{P} \right) + q,$$

где  $P$  – сосредоточенная сила;  $e$  – эксцентриситет;  $b_1$  – полуширина ленточного фундамента;  $q$  – интенсивность боковой пригрузки.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4(1 - \mu^2)}{2\pi E b_1^3} P e,$$

$E$  и  $\mu$  – модуль деформаций и коэффициент бокового расширения грунтового массива.

**Распределение контактных давлений по подошве сооружений конечной жесткости**

$$W_{\xi,\eta} = \frac{1}{\pi} \frac{(1 - \mu_0^2)}{\pi} \iint_F \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}},$$

где  $W_{\xi,\eta}$  – осадка точки поверхности грунта с координатами  $\xi$  и  $\eta$ ;  $p(\xi, \eta)$  – неизвестное распределение реактивных давлений.

## 1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

**Декартовы координаты**  $(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned}$$

**Цилиндрические координаты**  $(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \Theta &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0. \end{aligned}$$

**Сферические координаты**  $(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta] + R &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta] + \Theta &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) + \Phi &= 0. \end{aligned}$$

В соотношениях  $X, Y, Z, R, \Theta, \Phi$  – компоненты объемной силы.

## 1.3. ТЕНЗОРЫ И ИНВАРИАНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ

Обозначения приняты из книги Н.Н. Малинина (1975).

**Напряженное состояние в точке** – совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, содержащим данную точку (рис. 1.16).

**Тензор напряжений** – симметричная квадратная матрица

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}; \quad T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{Bmatrix}; \quad T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma_3 \end{Bmatrix}.$$

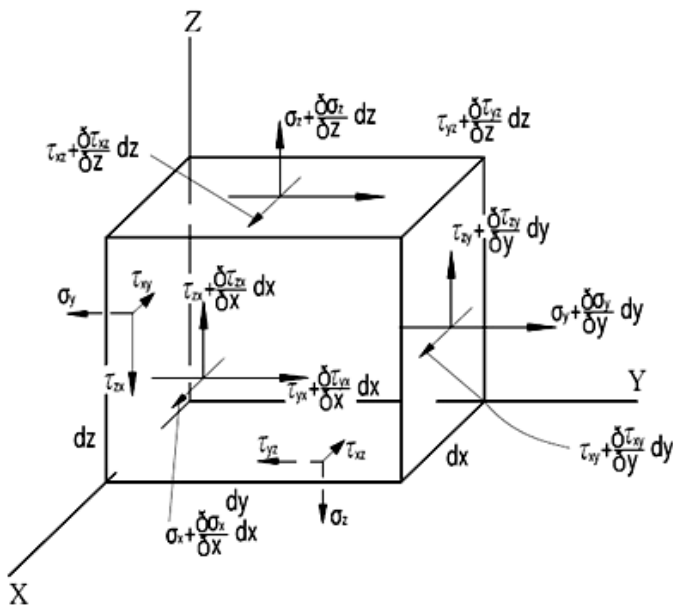


Рис. 1.16. Напряженное состояние элемента тела

### Октаэдрические напряжения

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

### Главные нормальные напряжения

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2); \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3); \quad \sigma_{31} = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1).$$

### Главные касательные напряжения

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2); \quad \tau_{23} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \quad \tau_{31} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1).$$

### Среднее объемное напряжение

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Тензор напряжений можно разложить на шаровой тензор и девиатор напряжений

$$T_{\sigma} = T_{\sigma_0} + D_{\sigma},$$

$$\text{где } T_{\sigma_0} = \begin{Bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{Bmatrix} \text{ — шаровой тензор напряжений;}$$

$$D_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{1x} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{Bmatrix} \text{ — девиатор напряжений.}$$

Компоненты девиатора напряжений представляют в виде

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij} \sigma_0,$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ij}}{3} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ij}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

$$s_x = \sigma_x - \sigma_0, \quad s_y = \sigma_y - \sigma_0, \quad s_z = \sigma_z - \sigma_0;$$

$$s_{xy} = \tau_{xy}, \quad s_{yz} = \tau_{yz}, \quad s_{zx} = \tau_{zx}.$$

Сумма нормальных напряжений в координатных плоскостях равна нулю

$$s_x + s_y + s_z = 0.$$

Главные напряжения (на взаимно перпендикулярных площадках, на которых касательные напряжения равны нулю) являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - j_1(T_{\sigma})\sigma^2 - j_2(T_{\sigma})\sigma - j_3(T_{\sigma}) = 0;$$

$$j_1(T_{\sigma}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$j_2(T_{\sigma}) = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2;$$

$$j_3(T_{\sigma}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}$$

или

$$j_1(\mathbf{T}_\sigma) = \sigma_{ii}; \quad j_2(\mathbf{T}_\sigma) = \frac{1}{2} [(\sigma_{ii}^2) - \sigma_{ij}\sigma_{ij}];$$

$$j_3(\mathbf{T}_\sigma) = \frac{1}{2} \sigma_{ii}\sigma_{ik}\sigma_{kl} + \frac{1}{6} (\sigma_{ii})^3 - \frac{1}{2} (\sigma_{ii}) \sigma_{ij}\sigma_{ij}.$$

**Инварианты тензора напряжений через главные напряжения**

$$j_1(\mathbf{T}_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$j_2(\mathbf{T}_\sigma) = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1;$$

$$j_3(\mathbf{T}_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

**Инварианты девиатора напряжений**

$$j_1(D_\sigma) = 0;$$

$$j_2(D_\sigma) = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)];$$

$$j_3(D_\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}.$$

В тензорной записи

$$j_2(D_\sigma) = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}; \quad j_3(D_\sigma) = \frac{1}{3} s_{ij}s_{ik}s_{kb}.$$

**Интенсивность напряжений (нормальных)**

$$\sigma_i = \sqrt{3j_2(D_\sigma)} = \sqrt{3}T = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 +$$

$$\rightarrow (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sqrt{\frac{3}{1} s_{ij}s_{ij}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

При чистом сдвиге  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau$

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau.$$

По А. Надаи (1954) интенсивность напряжений пропорциональна октаэдрическому касательному напряжению

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2}.$$

При  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$  (плоская задача)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma_3 = \sigma_z.$$

Инварианты девиатора напряжений при преобразовании координатных осей.

**Дифференциальные уравнения равновесия Коши.** Напряжения на выделенном элементе показаны на рис. 1.16.

**Уравнения равновесия** имеют вид

$$A = \pi r^2 \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + R_x = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + R_y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + R_z = 0. \end{cases}$$

**Учет разрыва сплошности упругого основания.** Применение уравнений теории упругости для расчета оснований заглубленных фундаментов (например, Р. Миндлина) приводит к погрешности, связанной с тем, что грунтовое основание почти не сопротивляется растяжению. Упругая среда в равной степени сопротивляется как растяжению, так и сжатию. Одними из первых это учитывали М.И. Горбунов-Посадов и О.Я. Шехтер (1963).

Приведем результаты решения С.В. Босакова (1986) задачи об изгибе стержня в упругом полупространстве с учетом разрыва сплошности основания. Решение выполнено методом Б.Н. Жемочкина (1948, 1962). Использована также идея итерационного расчета пространственного клина при заданных воздействиях на его гранях (Я.С. Уфлянд, 1972).

Получены выражения для расчета перемещений границы клина в виде упругого четвертьпространства от действия горизонтальной силы на границе (рис. 1.17)

$$V(r, z) = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\sqrt{ar}} \int_0^\infty \left( 1 + \frac{1}{ch\pi\tau} \right) \frac{\tau^2}{C(\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau} (ch\mu) d\tau \right];$$

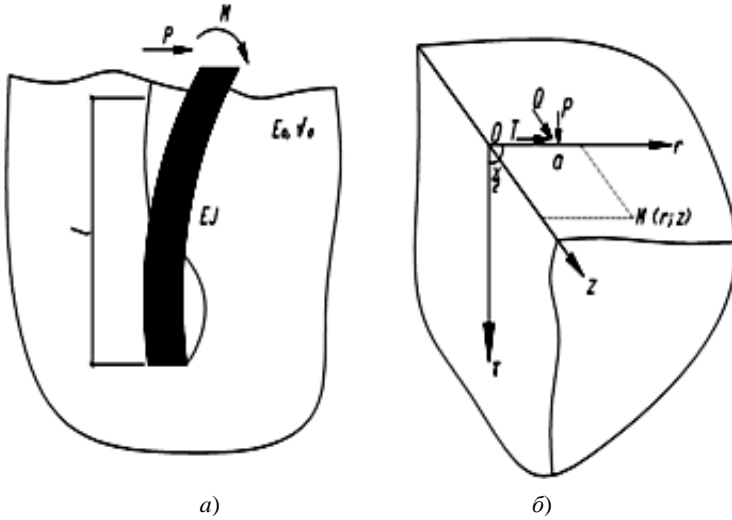


Рис. 1.17. Схема нагружения изгибаемого стержня (а) и пространственного клина с приложенными сосредоточенными силами (б)

$$U(r, z) = \frac{P(1+\nu_0)}{2\pi E_0} \left( 3 - 4\nu_0 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{\sqrt{ar}} \int_0^\infty \frac{\tau th\pi\tau}{C(\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ch\mu) d\tau;$$

$$W(r, z) = -\frac{P(1+\nu_0)}{2\pi E_0 \sqrt{ar}} r \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \frac{\tau th\pi\tau}{C(\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ch\mu) d\tau;$$

$$U(r, z) = \frac{Ta(1+\nu_0)}{2\pi E_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{T(1+\nu_0)}{2\pi E_0} \left( 3 - 4\nu_0 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{T(1+\nu_0)}{\pi E_0} \left( 3 - 4\nu_0 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \times \\ \times \left\{ a \left[ \frac{1}{2z^2} \ln \frac{R_2^2}{(a+r)^2} - \frac{1}{R_2^2} \right] - \frac{1}{\sqrt{ar}} \int_0^\infty \frac{\tau^2}{ch\pi\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ch\mu) \frac{d\tau}{C(\tau)} \right\};$$

$$U(r, z) = \frac{Qz(1+\nu_0)}{2\pi E_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{Qa(1+\nu_0)}{2\pi E_0} \left( 3 - 4\nu_0 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{\sqrt{ar}} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty th\pi\tau \frac{sh \frac{\pi}{2} \tau}{C(\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ch\mu) d\tau;$$

$$\begin{aligned}
W(r, z) &= \frac{Q(1+\nu_0)}{2\pi E_0} \left( 3 - 4\nu_0 - z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{Q(1+\nu_0)}{4\pi E_0} \times \\
&\times \sqrt{ar} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty th\pi\tau \frac{sh \frac{\pi}{2} \tau}{C(\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ch\mu); \\
C(\tau) &= sh^2 \frac{\pi}{2} \tau - \tau^2; \quad ch\mu = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar}; \\
R_1 &= \sqrt{(r-a)^2 + z^2}; \quad R_2 = \sqrt{(r+a)^2 + z^2},
\end{aligned}$$

где  $V$ ,  $U$ ,  $W$  – перемещения граней четвертьпространства в направлении осей  $\gamma$ ,  $r$ ,  $z$  (см. рис. 1.17);  $P$ ,  $T$ ,  $Q$  – сосредоточенные силы, приложенные к грани четвертьпространства в точке  $a$ ;  $E_0$ ,  $\nu_0$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала клина;  $r$ ,  $z$  – точки грани, где определяется перемещение;  $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ch\mu)$  – функция Лежандра.

Полупространство со стержнем образовано из двух четвертьпространств, соединенных между собой контактом в отдельных точках по методу Б.Н. Жемочкина. В каждой точке контакта действуют три связи, соответствующие нормальным и касательным напряжениям.

Перемещения вершины стержня на уровне поверхности полупространства можно записать в виде

$$\begin{aligned}
u_0 &= k_{uP} \frac{P}{E_0 l}; \quad u_0 = k_{uM} \frac{\bar{P}}{E_0 l^2}; \\
\varphi_0 &= k_{\varphi P} \frac{P}{E_0 l^2}; \quad \varphi_0 = k_{\varphi M} \frac{\bar{P}}{E_0 l^2},
\end{aligned}$$

где  $P$ ,  $\bar{P}$  – внешняя нагрузка на стержень ( см. рис. 1.17);  $u_0$ ,  $\varphi_0$  – линейное и угловое перемещения стержня поверхности полупространства;  $l$  – длина стержня;  $k_{uP}$ ,  $k_{\varphi P}$ ,  $k_{uM}$ ,  $k_{\varphi M}$  – безразмерные коэффициенты для определения перемещения, находимые из решения системы канонических уравнений смешанного метода. В случае действия единичных сил их значения приведены в таблице для некоторых показателей гибкости  $\beta = E_0 l^4 / El$ , где  $El$  – изгибная жесткость стержня,  $\nu_0 = 0,3ub/l = 0,1$  ( $b$  – ширина стержня). По теореме о взаимности перемещений  $k_{uM} = k_{\varphi P}$ , поэтому их значения объединены.



**Силовое поле** – физическое пространство, обладающее таким свойством, что на каждую материальную точку  $M$ , помещенную в это пространство, действует сила, зависящая от времени. Если сила силового поля не зависит от времени, то поле – стационарное.

Стационарное силовое поле потенциально, если проекции силы силового поля материальной точкой  $M$  на координатные оси:

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x}; F_y = \frac{\partial u}{\partial y}; F_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

где  $u = u(x, y, z)$  – силовая функция, однозначно зависящая от координат.

Сила силового поля

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = \vec{i}\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}.$$

Элементарная работа силы  $\vec{F}$

$$\delta A = \vec{F}\delta\vec{z} = F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z = \frac{\partial u}{\partial x} d_x + \frac{\partial u}{\partial y} d_y + \frac{\partial u}{\partial z} d_z = du(x, y, z).$$

Таким образом, элементарная работа силы потенциального силового поля равна полному дифференциалу силовой функции.

Если точка  $M$  перемещается из положения  $M_1$  в положение  $M_2$ , то конечная работа

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} du(x, y, z) = u_2 - u_1,$$

где  $u_2 = u(x_2, y_2, z_2)$ ,  $u_1 = u(x_1, y_1, z_1)$ .

Для силы, не принадлежащей силовому полю, рассматривается криволинейный интеграл

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} F \cos \alpha ds.$$

### **Работа упругой силы (реакция деформированной пружины)**

Упругая сила пружины

$$F_u = -cx_1,$$

где  $c$  – постоянный коэффициент пропорциональности (жесткость пружины), равный величине силы  $F_d$  при единичном отклонении те-

ла  $M$  от недеформированного состояния;  $x_1$  – величина растяжения пружины.

Элементарная работа сил упругости

$$\delta A = -cx dx.$$

Полная работа на перемещении  $M_1 M_2$

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} (-cx dx) = - \int_{M_1}^{M_2} cx dx = \frac{1}{2} c(x_1^2 - x_2^2),$$

где  $(x_1 - x_2)$  – дополнительная деформация.

При рассмотрении упругого стержня

$$c = \frac{EA}{l_0}.$$

Работа силы упругости зависит только от начального и конечного положения тела  $M$ .

**Поле напряжений, деформаций и перемещений** [40]. Поля напряжений и деформаций взаимно однозначны в случае линейно-упругих деформаций.

В практике часто используют систему изолиний для анализа результатов измерений. Приведем некоторые изолинии для плоского поля (рис. 1.18).

*Изостаты* – траектории главных напряжений, системы из двух семейств  $S_1$  и  $S_2$  взаимно ортогональных кривых, с которыми совпадают направления наибольших и наименьших главных напряжений.

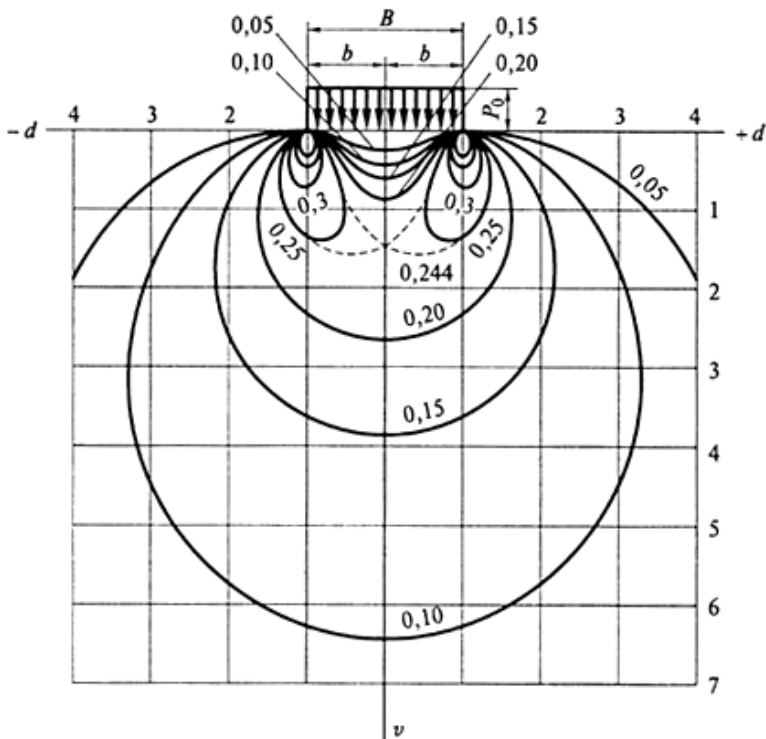
Уравнение траекторий главных напряжений в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \pm \frac{1}{2\tau_{xy}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

*Изоклины* – геометрическое место точек поля напряжений, в которых направления главных напряжений параллельны и имеют один угол наклона  $\varphi_0$ , выбранный направлением – параметром изоклины  $A$ .

Уравнение изоклин:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y) = A.$$



**Рис. 1.18.** Характер развития кривых, равных максимальному касательному напряжению под жестким фундаментом

*Изохромы* – линии, соединяющие точки, в которых разности главных напряжений в рассматриваемой плоскости поля напряжений имеют одну и ту же величину.

Уравнение изохром:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}} = B .$$

*Изопахы* – линии, соединяющие точки с равными значениями сумм главных напряжений.

Уравнение изопах:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = C .$$

*Изоэнтаты* – линии, соединяющие точки с равными значениями главных напряжений ( $\sigma_1$  или  $\sigma_2$ ) или главных деформаций ( $\epsilon_1$  или  $\epsilon_2$ ).

*Изотропы* – линии одинакового жесткого поворота.  
 Для малых деформаций:

$$\omega = 1/2[(\partial u / \partial y) - (\partial v / \partial x)].$$

*Изокинеты* – линии одинаковой величины полного перемещения.

*Изопарагоги* – линии одинаковых частных производных.

*Изотены* – линии одинаковых значений главных Эйлеровых деформаций  $\epsilon_1^E$  и  $\epsilon_2^E$ .

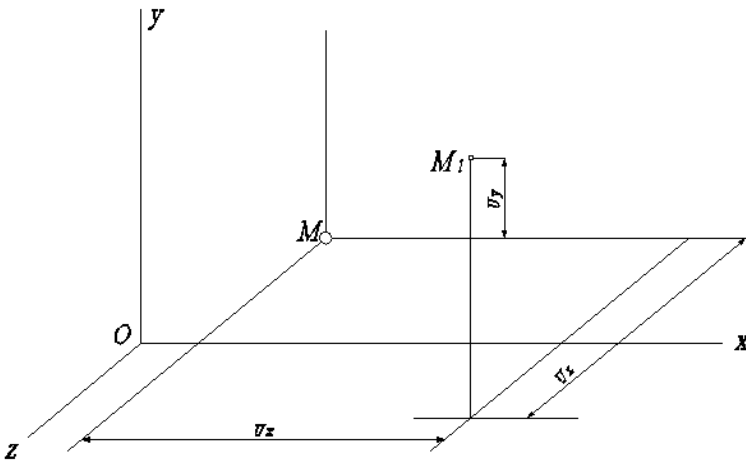
## Глава 2. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

### 2.1. ТЕНЗОРЫ И ИНВАРИАНТЫ ДЕФОРМАЦИЙ

Обозначения приняты из книги Н.Н. Малинина (1975).

**Деформированное состояние в точке тела**

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{array} \right.$$



**Рис. 2.1. Деформированное состояние в точке тела**

### Относительная объемная деформация в точке

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

### Средняя объемная деформация в точке

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

### Модуль объемной деформации

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

**Тензор деформации** – тензор, который характеризует сжатие (растяжение) и изменение формы в каждой точке тела при деформации

$$T_{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}.$$

При тензорной записи

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

### Разложение тензора деформации

$$T_{\varepsilon} = T_{\varepsilon_0} + D_{\varepsilon},$$

где

$$T_{\varepsilon_0} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{Bmatrix} \text{ – шаровой тензор деформаций;}$$

$$D_{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{Bmatrix} \text{ – девiator деформаций;}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x - \varepsilon_0, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y - \varepsilon_0, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z - \varepsilon_0;$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{2}.$$

В тензорной записи

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0; \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ij}}{3} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

**Первый, второй и третий инварианты тензора деформаций и зависимость между ними**

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z;$$

$$I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x + \frac{\gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{yz}^2}{4} + \frac{\gamma_{zx}^2}{4};$$

$$I_3(T_\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon^3 - j_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 - j_2(T_\varepsilon)\varepsilon - j_3(T_\varepsilon) = 0.$$

**Инварианты тензора деформации через главные деформации**

$$j_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad j_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1; \quad j_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

**Компоненты дивизора деформации**

$$j_1(D_\varepsilon) = 0;$$

$$j_2(D_\varepsilon) = \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 = \\ = \frac{1}{6} \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right];$$

$$j_3(D_\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_x \end{bmatrix}.$$

**Интенсивность деформаций** – это величина, пропорциональная квадратному корню из второго инварианта девиатора деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \sqrt{\frac{4}{3} j_2(D_\varepsilon)} = U/\sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 +} \\ &\rightarrow \left. \vphantom{\varepsilon_i} \right) + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \lambda_{zx}^2) = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},\end{aligned}$$

где  $U = \sqrt{4 j_2(D_\varepsilon)}$  – интенсивность угловых деформаций.

**Интенсивность пластических деформаций**

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p)^2 + (\varepsilon_y^p - \varepsilon_z^p)^2 + (\varepsilon_z^p - \varepsilon_x^p)^2 +} \\ &\rightarrow \left. \vphantom{\varepsilon_i^p} \right) \frac{3}{2} [(\gamma_{xy}^p)^2 + (\gamma_{yz}^p)^2 + (\gamma_{zx}^p)^2] = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p}.\end{aligned}$$

**Октаэдрическая угловая деформация**

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

**Закон Гука:**

– при растяжении–сжатии

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z;$$

– при плоском чистом сдвиге

$$\gamma = \tau / G;$$

– при двухосном растяжении

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_z); \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y);$$

– для плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_z);$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G; \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y);$$

– при трехосном растяжении

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{xz} = \tau_{xz} / G.$$

## 2.2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ [22]

• При больших поворотах и больших деформациях (рис. 2.2)

**Линейные деформации:**

при Лагранжевом определении деформации:

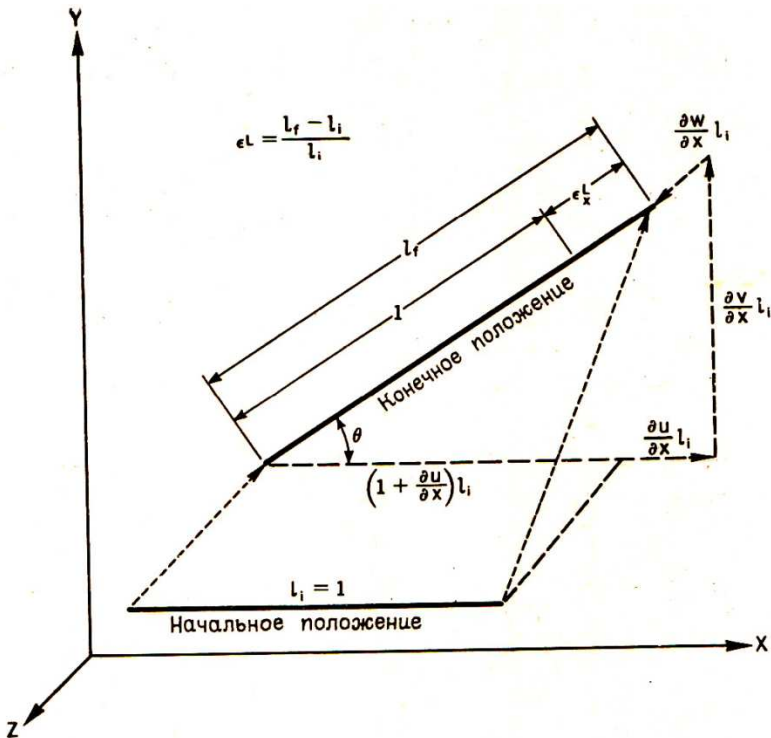


Рис. 2.2. Начальное и конечное положения линейного элемента в поле однородной деформации при Лагранжевом определении деформации



$$\epsilon_x^L = \sqrt{1 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1;$$

$$\epsilon_y^L = \sqrt{1 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} - 1;$$

$$\epsilon_z^L = \sqrt{1 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} - 1,$$

при Эйлеровом определении деформации (рис. 2.3):

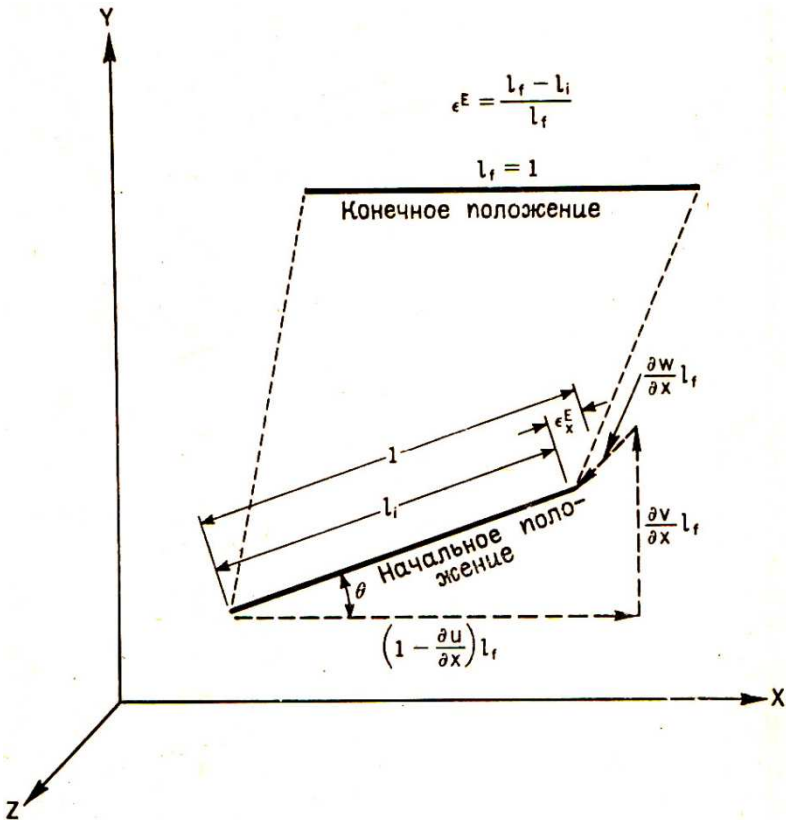


Рис. 2.3. Начальное и конечное положения линейного элемента в поле однородной деформации при Эйлеровом определении деформации

$$\epsilon_x^E = 1 - \sqrt{1 - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2};$$

$$\epsilon_y^E = 1 - \sqrt{1 - 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2};$$

$$\epsilon_z^E = 1 - \sqrt{1 - 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}.$$

**Деформация сдвига:**

при Лагранжевом представлении (рис. 2.4):

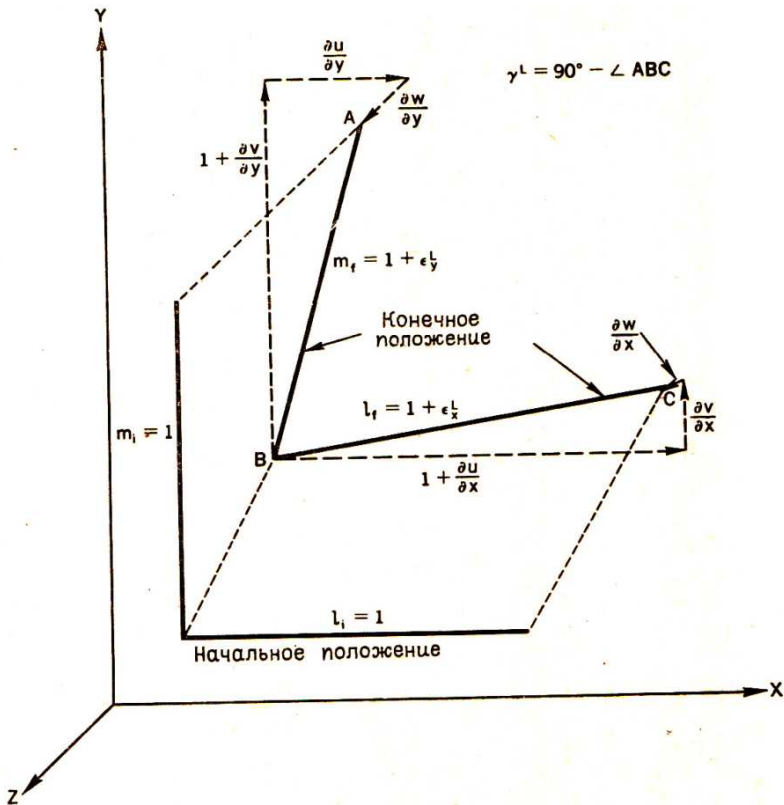


Рис. 2.4. Начальное и конечное положения двух линейных элементов (первоначально параллельных декартовым осям) в поле однородной деформации при Лагранжевом определении деформации

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{xy}^L &= \arcsin \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \frac{1}{(1 + \epsilon_x^L)(1 + \epsilon_y^L)} \right\}; \\ \gamma_{yz}^L &= \arcsin \left\{ \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \frac{1}{(1 + \epsilon_y^L)(1 + \epsilon_z^L)} \right\}; \\ \gamma_{zx}^L &= \arcsin \left\{ \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \frac{1}{(1 + \epsilon_z^L)(1 + \epsilon_x^L)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

при Эйлеровом представлении (рис. 2.5):

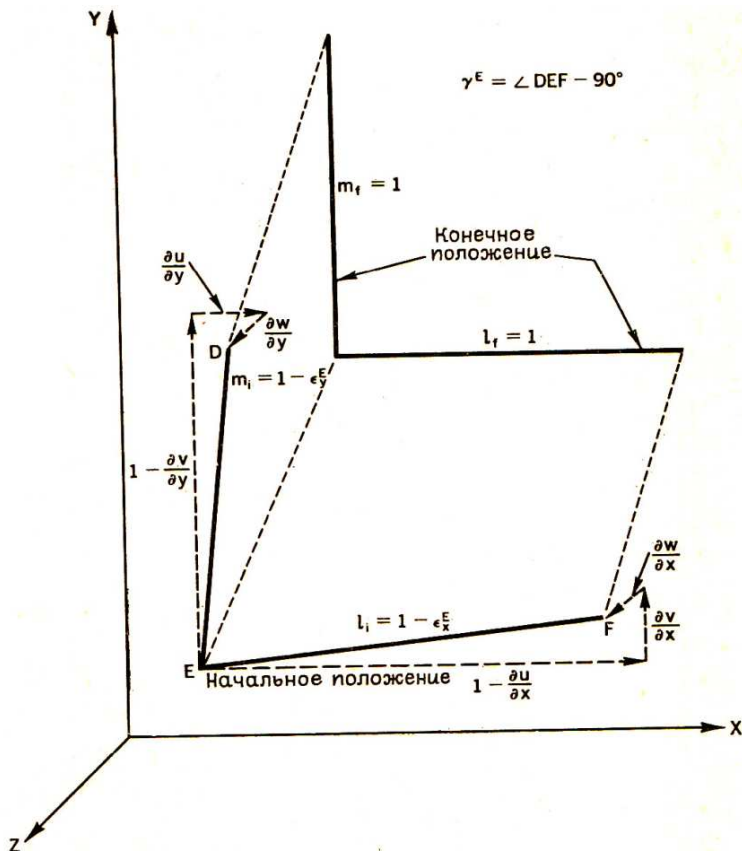


Рис. 2.5. Начальное и конечное положения двух линейных элементов (первоначально параллельных декартовым осям) в поле однородной деформации при Эйлеровом представлении деформации

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy}^E = \arcsin \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \frac{1}{(1-\varepsilon_x^L)(1-\varepsilon_y^L)} \right\}; \\ \gamma_{yz}^E = \arcsin \left\{ \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \frac{1}{(1-\varepsilon_y^L)(1-\varepsilon_z^L)} \right\}; \\ \gamma_{zx}^E = \arcsin \left\{ \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \frac{1}{(1-\varepsilon_x^L)(1-\varepsilon_z^L)} \right\}. \end{array} \right.$$

• **При малых поворотах**

**Линейные деформации.** Если производные в поперечном направлении достаточно малы, чтобы их квадратами можно было пренебречь по сравнению с первой производной в направлении рассматриваемого перемещения. При этом предположении уравнения для линейных деформаций принимают следующий вид:

$$\varepsilon_x^L = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_y^L = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_z^L = \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

$$\varepsilon_x^E = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_y^E = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_z^E = \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

**Деформация сдвига**

при Лагранжевом представлении:

$$\gamma_{xy}^L = \arcsin \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right],$$

при Эйлеровом представлении:

$$\gamma_{xy}^E = \arcsin \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \left( 1 - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( 1 - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right].$$

• **При малых деформациях**

**Линейные деформации**

при Лагранжевом представлении:

$$\varepsilon_x^L = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right],$$

при Эйлеровом представлении:

$$\varepsilon_x^E = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right].$$

### Деформации сдвига

при Лагранжевом представлении:

$$\gamma_{xy}^L = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},$$

при Эйлеровом представлении:

$$\gamma_{xy}^E = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

- **При малых поворотах и малых деформациях**  
**Линейные деформации**

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x.$$

### Деформации сдвига

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

## 2.3. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ СЕН-ВЕНАНА

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{array} \right.$$

## 2.4. ДВИЖЕНИЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим теорию Л.И. Седова [30]. Движения определяются по отношению к некоторой прямолинейной или криволинейной системе координат. **Линии**, на которых какие-либо координаты сохраняют постоянные значения, называют **координатными**. Касательные к координатным линиям образуют **триэдр**. Если координатные линии  $x^1, x^2, x^3$  прямые, то **система координат прямолинейная**, если кривые – **криволинейная**.

Движение точки относительно системы координат  $x^1, x^2, x^3$

$$x^i = f^i(t), i = (1, 2, 3).$$

Функции  $x^i$  называются **законом движения точки**.

**Сплошная среда** – непрерывная совокупность точек. **Координаты точек** в начальный момент времени  $t_0$  обозначают  $a, b, c$  или  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , а в любой момент времени –  $x^1, x^2, x^3$ .

**Законом движения континуума** является

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(a, b, c, t); \\ x^2 &= x^2(a, b, c, t); \\ x^3 &= x^3(a, b, c, t). \end{aligned} \right\} \text{ или } x^i = x^i(a, b, c, t).$$

Если  $a, b, c$  фиксированы, а  $t$  – переменная, то будет **закон движения одной точки**; а если  $a, b, c$  – переменные, а  $t$  – фиксирована, то функции дадут **распределения точек континуума** в пространстве в данный момент времени; если  $a, b, c$  и  $t$  – переменные, то формулы определяют **движение сплошной среды**. **Основная задача механики сплошной среды** заключается в определении ранее записанных функций.

**Лагранжевы переменные**. Координаты  $a, b, c$  или  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , индивидуализирующие точки контура и время  $t$ , называют **переменными Лагранжа**. В кинематике **сплошную среду** рассматривают как абстрактный образ, а не только как материальное тело. При изучении деформаций опираются на аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Функции, входящие в закон движения континуума, имеют непрерывные частные производные по всем аргументам.

Решение ранее приведенного уравнения можно представить в виде

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t).$$

**Закон движения** можно рассматривать как взаимно-однозначное и непрерывное отображение области деформируемого тела в различные моменты времени.

В **Лагранжеву систему координат** входят и сопутствующие координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  индивидуальных точек, т.е. подвижная деформируемая криволинейная система координат. Все точки сплошной среды покоятся относительно подвижной сопутствующей системы координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ . Эти координаты не меняются, а сама система движется, растягивается, сжимается, извивается. Таким образом, когда необходимо индивидуализировать точки, то пользуются Лагранжевыми координатами. При этом подразумевается наличие системы отсчета  $x^1, x^2, x^3$ .

**Скорость индивидуальной точки** относительно системы отсчета  $x^1, x^2, x^3$  –  $v = \partial z / \partial t$ , где  $z$  – радиус-вектор, зависящий в общем случае от  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ . Относительно сопутствующей системы координат среда покоится.

**Ускорение точки** сплошной среды

$$a = \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \xi_i,$$

где  $a^i = a^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$  – компоненты ускорения.

Таким образом, с точки зрения Лагранжа нас интересует история движения индивидуальных точек сплошной среды.

**Переменные Эйлера.** С точки зрения Эйлера рассматривают, что происходит в разные моменты времени в данной геометрической точке пространства. Геометрические координаты пространства  $x^1, x^2, x^3$  и время  $t$  носят название **переменных Эйлера**. **Движение** считается **известным**, если

$$v = v(x^1, x^2, x^3, t); \quad a = a(x^1, x^2, x^3, t); \quad T = T(x^1, x^2, x^3, t).$$

При фиксированных  $x^1, x^2, x^3$  и переменном  $t$  определяют изменения во времени скорости, ускорения, температуры и т.д. в данной точке пространства для различных приходящих в эту точку частиц.

При фиксированном  $t$  и переменных  $x^1, x^2, x^3$  функции дают распределения характеристик движения в пространстве в данный момент времени.

При переменных  $x^1, x^2, x^3$  и  $t$  определяют распределения характеристик движения в пространстве в разные моменты времени.

Рассмотрим переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера. По Лагранжу **закон движения сплошной среды**

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t).$$

Решив его относительно  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , получают

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t),$$

т.е. переходят к переменным Эйлера.

При фиксированных  $x^1, x^2, x^3$  указывают те точки  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , которые в разные моменты времени приходят в данную точку пространства.

При изучении движения рассматривают скалярные и векторные величины. Совокупность значений той или иной величины, заданных в каждой точке рассматриваемой области, называются **полем** этой величины. Поля могут быть скалярными и векторными.

Процессы и движения считаются **установившимися**, если характеризующие их величины не зависят явно от времени. Для каждого поля, например, скорости, можно построить линии тока, по которым с точностью до направления известен вектор.

**Упругое тело** – среда, в которой компоненты тензора в каждой частице являются функциями компонента тензора деформации, компонент метрического тензора, температуры и других параметров физикохимической природы. Раздел механики сплошной среды, в котором изучается поведение сплошных сред, подчиняющихся закону Гука, носит название **теории упругости**.

## 2.5. ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ

Рассматривается система координат  $x^1, x^2, x^3$ , относительно которой движется тело, положение его в начальный момент времени  $t_0$  и в некоторый произвольный момент  $t$ . С каждой точкой движущегося тела связывают сопутствующую (с телом) систему координат

$\xi^1, \xi^2, \xi^3$ . Векторы базиса в момент времени  $t_0$   $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_i$  и в момент  $t_0$   $\hat{\xi}_i$  будут разными. Для **абсолютно твердого тела**, в которого заморожена система  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , триэдры  $\hat{\mathcal{E}}_i$  можно получить из триэдров  $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_i$  путем поступательного перемещения и поворота.



В случае **деформируемого тела** расстояние между точками меняется, т.е. тело сжимается, растягивается, искривляется. Координатные линии, сопутствующие системе координат, деформируются. Изменяются во времени и углы между векторами базиса  $\hat{E}_i$ .

**Коэффициент относительно удлинения  $l$**

$$l = (ds - ds') / ds',$$

где  $ds$  и  $ds'$  проходят в соответствующие моменты времени через одни и те же индивидуальные точки.

Если коэффициент  $l$  в каждой точке деформируемой среды и в каждом направлении мал, то **деформация** называется **малой**, если  $l$  имеет конечные значения, то **деформация конечная**.

Деформации в момент времени  $t$  зависят не только от рассматриваемого состояния, но и от какого-то начального. За **начальное состояние** может быть принято состояние, в котором структура каждого элемента сплошной среды упорядочена и на него не действуют никакие силы.

**Уравнения движения**

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \sigma_z} + \rho X = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \sigma_z} + \rho Y = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \sigma_z} + \rho Z = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $X, Y, Z$  – проекции объемной силы  $F$  на оси  $x, y, z$ ;  $\rho$  – плотность среды;  $u_i$  – компоненты вектора смещения.

Эту систему можно записать в виде

$$\sigma_{ij,j} + \rho(F_i - \rho \ddot{u}_i) = 0.$$

Зависимость между тензором деформации и вектором перемещений (уравнение Коши)

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right);$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right);$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right).$$

В сокращенном виде систему записывают в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Уравнения неразрывности или совместности деформаций Сен-Венана имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_3 \partial x_1}.$$

В сокращенном виде

$$L_{ikl} L_{jmn} \varepsilon_{im, kn} = 0.$$

**Однородная деформация. Потенциал перемещения.** При однородной деформации компоненты  $u_i$  вектора перемещения  $u$  являются линейными функциями координат (С.П. Демидов, 1979)

$$u_i = u_i^0 + c_{ij}x_j,$$

где  $u_i^0$  и  $c_{ij}$  – постоянные.

Компоненты тензора деформаций и тензора малого поворота – постоянные величины

$$\varepsilon_{ij} = (c_{ij} + c_{ji})/2;$$

$$\omega_{ij} = (c_{ij} - c_{ji})/2,$$

т.е. все частицы тела деформируются одинаково.

При однородной деформации прямые линии остаются прямыми после деформации, параллельные плоскости и параллельные прямые преобразуются в параллельные плоскости и параллельные прямые после деформации, и сфера преобразуется в эллипсоид. Поле перемещений – градиент скалярного поля  $\psi(x_i)$  (потенциальное поле).

### Глава 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Основные сведения приведены в [38, 39].

Современная техника предъявляет повышенные требования к прочностным свойствам реализуемых машин, конструкций и сооружений, уменьшению их веса и размеров. Это приводит к необходимости создания новых методов расчета, наиболее полно и адекватно учитывающих свойства реальных материалов. За последние годы это обстоятельство заметно усилило внимание исследователей к задачам теории упругости неоднородных тел.

Линейная теория упругости неоднородных тел основана на использовании закона Гука, в котором параметры, определяющие упругие свойства среды (например, параметры Ламе) – функции координат [39]. Наиболее естественной как с математической, так и с физической точки зрения является классификация, основанная на характере зависимости параметров Ламе от координат. Целесообразно выделить три основные группы задач, в которых параметры Ламе:

- а) непрерывные детерминированные функции координат;
- б) кусочно-постоянные функции координат;
- в) случайные функции координат.

Выделяют следующие три основных раздела теории упругости неоднородных тел:

- а) упругие тела с непрерывной неоднородностью;
- б) кусочно-постоянные упругие тела;
- в) случайно-неоднородные упругие тела.

Каждый из разделов имеет свою область приложений и характеризуется определенной спецификой применяемых математических методов исследования. Разделы связаны между собой, и при решении задач какого-либо одного раздела теории упругости неоднородных тел могут быть использованы решения, полученные в других разделах.

### 3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

#### • Основные уравнения теории неоднородных тел

В ортогональной декартовой системе координат  $x_s (x_1, x_2, x_3)$  трехмерного евклидова пространства  $E_3$  при малых деформациях любой среды имеют место следующие основные уравнения механики сплошной среды:

- уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

- формулы Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

- условия совместности деформаций

$$\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{pmn} \frac{\partial^2 \varepsilon_{lm}}{\partial x_j \partial x_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

В приведенных соотношениях  $\sigma_{ij}$  – тензор (симметричный) напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – тензор деформаций;  $u_i$  – вектор перемещений;  $F_i$  – вектор плотности массовых сил;  $\rho$  – плотность;  $t$  – время;  $\varepsilon_{ijl}$  – символы Леви–Чивита.

Обобщенный закон Гука – соотношения между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\varepsilon_{ij}$  при изотермических процессах деформирования неоднородных анизотропных упругих тел

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(x_s) \sigma_{kl},$$

или обратными соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}(x_s) \sigma_{kl},$$

где  $c_{ijkl}$  – модуль упругости;  $s_{ijkl}$  – коэффициенты податливости. Эти формы соотношений сохраняются и для адиабатических процессов деформирования неоднородных тел. Адиабатические модули упругости и коэффициенты податливости мало отличаются от соответствующих изотермических величин.

• **Постановка краевых задач**

**Граничные условия**

– при заданных на поверхности  $s$  тела внешних поверхностных силах

$$\sigma_{ij}n_j|_s = q_i(x_s),$$

– при заданных на границе тела перемещениях

$$u_i|_s = \varphi_i(x_s),$$

где  $q_i$  – плотность заданных поверхностных сил;  $n_j$  – внешняя единичная нормаль к поверхности  $s$  тела;  $\varphi_i(x_s)$  – заданные на поверхности  $s$  функции.

**Начальные условия:**

$$\begin{cases} u_i|_{t=t_0} = f_i(x_s); \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=t_0} = \psi_i(x_s), \end{cases}$$

где  $f_i(x_s)$ ,  $\psi_i(x_s)$  – заданные во всей области, занимаемой телом, функции.

**Уравнения движения в перемещениях**

– для анизотропного неоднородного упругого тела

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

– для изотропного неоднородного упругого тела

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

**Уравнения равновесия в перемещениях**

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + \rho F_i = 0.$$

### Постановка статической задачи в перемещениях

– граничные условия на границе  $s$  ( $s = s_\sigma + s_u$ ) области  $v$

$$\left[ \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j \Big|_{s_\sigma} = q_i(s_x), \quad u_i \Big|_{s_u} = \varphi_i(s_x).$$

### Постановка динамической задачи в перемещениях

– граничные условия на границе  $s$  ( $s = s_\sigma + s_u$ ) области  $v$

$$\left[ \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j \Big|_{s_\sigma} = q_i(s_x),$$
$$u_i \Big|_{t=t_0} = f_i(x_s), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \varphi_i(x_s).$$

### Условия совместности для напряжений

$$\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{pmn} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_n} \left[ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{lm} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{lm} \right] = 0.$$

### Постановка задачи в напряжениях

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0,$$

граничные условия

$$u_i \Big|_{s_u} = \varphi_i(x_s),$$

напряжения и деформации

$$\varepsilon_{ijl} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} = 0,$$

перемещения

$$u_i = u_i^0 + \omega_{ij}^0 (x_j - x_j^0) + \int_{M_0}^M \left[ \varepsilon_{ik} + (x_j - \zeta_j) \left( \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial \zeta_j} \right) \right] d\zeta_k.$$

### Вариационный принцип равновесия Лагранжа

$$\delta V[u_k] = \int_v \rho F_i \delta u_i dv + \int_s q_i \delta u_i ds,$$

где  $V[u_k]$  – функционал, равен работе напряжений  $\sigma_{ij}$  на деформациях  $\varepsilon_{ij}$

$$V[u_k] = \int_v W dv,$$

здесь  $W$  – плотность потенциальной энергии деформации.

### Вариационное уравнение Лагранжа

$$\int_v \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i \right) \delta u_i dv - \int_v (\sigma_{ij} n_j + q_i) \delta u_i ds = 0,$$

здесь напряжения выражены через перемещения в соответствии с принципом Лагранжа

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

### Вариационная постановка задачи теории упругости неоднородных тел

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0 \quad (x_s \in v),$$

$$\sigma_{ij} n_j = q_i \quad (x_s \in s_\sigma),$$

$$u_i|_{s_u} = \varphi_i(x_s).$$

#### • Общие теоремы

Рассмотрим краевую задачу упругого неоднородного тела, занимающего ограниченную область  $v$  пространства, граница  $s$  которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0, \\ \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \sigma_{ij} n_j = q_i, \quad u_i = \varphi_i(x_s), \quad s = s_\sigma + s_n. \end{cases}$$

Здесь  $\lambda(x_s)$  и  $\mu(x_s)$  непрерывны, имеют непрерывные частные производные в области  $v+s$  и удовлетворяют в этой области условиям

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \quad \mu > 0.$$

**Теорема единственности.** При заданных массовых  $F_i(x_s)$  и поверхностных  $q_i(x_s)$  силах и перемещениях  $\varphi_i(x_s)$  краевая задача определяет единственное решение  $\sigma_{ij}(x_s)$  (если оно существует) в классе непрерывных с непрерывными производными в области  $v+s$  функций. При  $s_u \neq 0$ , единственность в том же классе функций имеет место и для перемещений  $u_i(x_s)$ .

**Теорема взаимности Бетти.** Работа сил  $\rho F_i, q_i$  на перемещениях  $u'_i$ , вызванных второй системой сил  $\rho F'_i, q'_i$ , равна работе сил  $\rho F'_i, q'_i$  на перемещениях  $u_i$ , вызванных первой системой сил  $\rho F_i, q_i$

$$\int_v \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_v \rho F'_i u'_i dv + \int_v q'_i u'_i dv,$$

или

$$\int_v \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} dv = \int_v \rho F_i u_i dv + \int_v q_i u_i dv.$$

**Тензор Грина.** Единственное решение краевой задачи при дополнительных условиях: перемещение и поворот в точке отсутствуют

$$u_i = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0,$$

$$u_i(x_s) = \int_v G_{ik}(x_s, \xi_s) \rho F_k(\xi_s) dv + \int_s G_{ik}(x_s, \xi_s) q_k(x_s) ds.$$

$G_{ik}(x_s, \xi_s)$  представляет собой тензор Грина краевой задачи упругости неоднородных тел, соответствующей заданию на границе тела силовых граничных условий. Он определяется формой тела и упругими модулями  $\lambda(x_s), \mu(x_s)$  и не зависит от внешних сил.

#### • Метод возмущений

Метод возмущений – один из наиболее эффективных общих методов теории упругости неоднородных тел, применимый при произвольной неоднородности упругих свойств.

Рассмотрим краевую задачу для неоднородного анизотропного упругого  $s$  тела при заданных на поверхности тела силах плотностью  $q_i(x_s)$



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0, \\ \sigma_{ij} = c_{ijlm}(x_s) \frac{\partial u_l}{\partial x_m}, \\ \sigma_{ij}|_s = q_i(x_s), \end{cases}$$

здесь тензор упругих модулей

$$c_{ijlm}(x_s) = c_{ijlm}^0 + \chi c'_{ijlm},$$

где  $c_{ijlm}^0$  – константы;  $\chi$  – параметр.

Краевая задача для  $u_l^0$

$$c_{ijlm}^0 \frac{\partial^2 u_l^0}{\partial x_j \partial x_m} + \rho F_i = 0, \quad c_{ijlm}^0 \frac{\partial u_l^0}{\partial x_m} n_j|_s = q_i.$$

Краевая задача для  $u_l^k$

$$c_{ijlm}^0 \frac{\partial^2 u_l^k}{\partial x_j \partial x_m} + f_i^{k-1} = 0, \quad c_{ijlm}^0 \frac{\partial u_l^k}{\partial x_m} n_j|_s = q_i^{k-1},$$

где

$$f_i^{k-1} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c'_{ijlm} \frac{\partial u_l^{k-1}}{\partial x_m} \right), \quad q_i^{k-1} = -c'_{ijlm} \frac{\partial u_l^{k-1}}{\partial x_m} n_j|_s.$$

Решение исходной краевой задачи

$$u_l = \sum_{k=0}^{\infty} \chi^k u_l^k(x_s),$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijlm} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \chi^k u_l^k(x_s) \right].$$

### 3.2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

- **Постановки основных краевых задач**  
**Силовые граничные условия на контуре  $L$**

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = q_1, \quad \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = q_2$$

или

$$\sigma_{ij} n_j |_L = q_i(x_s),$$

где  $n_1, n_2$  – компоненты внешнего единичного вектора, нормального к контуре  $L$ ,

*кинематические условия*

$$u_i |_L = \Phi_i(x_s),$$

*смешанные условия*

$$\sigma_{ij} n_j |_{L_\sigma} = q_i(x_s), \quad u_i |_L = \Phi_i(x_s), \quad L = L_u + L_\sigma.$$

**Постановка плоской задачи в перемещениях. Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях**

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \rho F_1 = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \rho F_2 = 0,$$

здесь

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

**Постановка плоской задачи в напряжениях при силовых граничных условиях на контуре  $L$**

*Условие совместности*

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

*Уравнения равновесия*

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0.$$

*Закон Гука*

$$\varepsilon_{ij} = \gamma \sigma_{mn} \delta_{ij} - q (\sigma_{mn} \delta_{ij} - \sigma_{ij}).$$

**Постановка плоской задачи относительно функций  $\sigma_{ij}, u_i$**

*внутри области  $s$*

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

на контуре  $L$  области

$$\sigma_{ij} n_j |_{L_\sigma} = q_i(x_s), \quad u_i |_L = \Phi_i(x_s).$$

- **Функция напряжений в плоской задаче**  
**Тензорная форма функции напряжений**

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \nabla^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}.$$

**Дифференциальное уравнение относительно функции  $F(x_1, x_2)$**

$$\nabla^2 (\gamma \nabla^2 F) = \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2},$$

условия на границе  $s$  области

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = q_1, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) = -q_2,$$

или для односвязной области

$$F|_L = f_1(s), \quad \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_L = f_2(s),$$

где  $f_1, f_2$  – заданные на  $L$  функции:

$$f_1(s) = \int_{s_0}^s [n_1(s)P_1(s) + n_2(s)P_2(s)] ds;$$

$$f_2(s) = n_2(s)P_1(s) - n_1(s)P_2(s),$$

$P_1, P_2$  – проекции равнодействующей поверхностных сил, действующих на дуге  $(s_0, s)$ ,

$$P_1 = \int_{s_0}^s q_1(s) ds, \quad P_2 = \int_{s_0}^s q_2(s) ds.$$

- **Метод возмущений в плоской задаче**

Краевая задача, заданная для напряжений  $\sigma_{ij}$  дифференциальными уравнениями и граничными условиями

$$\frac{\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

$$\nabla^2(\gamma\sigma_{mn}) = \sigma_{ij} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\sigma_{ij} n_j|_L = q_i(x_s).$$

Решение данной задачи в виде степенного по  $\chi$  ряда

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \chi^k \sigma_{ij}^k.$$

Краевая задача для  $\sigma_{ij}^0$

$$\frac{\sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = 0, \quad \nabla^2 \sigma_{mn}^0, \quad \sigma_{ij}^0 n_j|_L = 0,$$

краевая задача для  $\sigma_{ij}^k$

$$\frac{\sigma_{ij}^k}{\partial x_j} = 0, \quad \nabla^2 \sigma_{mn}^k = \eta_{k-1}, \quad \sigma_{ij}^k n_j|_L = 0,$$

где

$$\eta_{k-1} = \frac{q_0}{\gamma_0} \sigma_{ij}^{k-1} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x_i \partial x_j} - \nabla^2 (\mu_2 \nabla^2 \sigma_{mn}^{k-1}).$$

Краевая задача, заданная для функций напряжений  $F(x_1, x_2)$  дифференциальными уравнениями и граничными условиями:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2}, \quad \sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$F|_L = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = f_2,$$

где  $f_1, f_2$  – заданные на  $L$  функции.

Решение задачи

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \chi^k F_k,$$

краевая задача для  $F_0$

$$\nabla^4 F_0 = 0, \quad F_0 \Big|_L = 0, \quad \frac{\partial F_0}{\partial n} \Big|_L = f_2,$$

краевая задача для  $F_k$

$$\nabla^4 F_k = \eta_{k-1}, \quad F_k \Big|_L = 0, \quad \frac{\partial F_k}{\partial n} \Big|_L = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$\eta_{k-1} = \frac{q_0}{\gamma_0} \sigma_{ij}^{k-1} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x_i \partial x_j} - \nabla^2 (\mu_2 \nabla^2 \sigma_{mm}^{k-1}).$$

**• Уравнения плоской задачи в полярных координатах  
Формулы Коши**

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}.$$

**Закон Гука для изотропного тела**

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \theta + 2\mu e_r; \\ \sigma_\theta &= \lambda \theta + 2\mu e_\theta; \\ \sigma_{r\theta} &= \mu e_{r\theta}; \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{\theta z} = 0, \end{aligned}$$

здесь

$$\theta = e_r + e_\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

**Уравнения равновесия**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho F_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \rho F_\theta &= 0. \end{aligned}$$

**Условие совместности**

$$\frac{\partial^2 e_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial e_\theta}{\partial r} \right) - r \frac{\partial e_r}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r e_{\theta r}).$$

### Силовые граничные условия

$$\sigma_r n_r + \tau_{r\theta} n_\theta = q_r, \tau_{r\theta} n_r + \sigma_\theta n_\theta = q_\theta.$$

- Уравнения плоской задачи в прямоугольных координатах

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ij}^k(x_1, x_2),$$

$$\sigma_{ij}^k = \delta_{ij} \nabla^2 F_k - \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x_1, x_2),$$

причем функция  $F_0$  является бигармонической

$$\nabla^4 F_0 = 0,$$

а функция  $F_k$ ,  $k \geq 1$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^4 F_k = \eta_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$\eta_{k-1} = \frac{q_0}{\gamma_0} \left( \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F_{k-1}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 F_{k-1}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 F_{k-1}}{\partial x_1^2} \right) - \nabla^2 (\mu_2 \nabla^2 F_{k-1}).$$

### 3.3. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

Краевая задача для неоднородного анизотропного тела при заданных на поверхности  $s$  тела силах плотностью  $q_i(x_s)$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho F_i = 0,$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijlm}(x_s) \frac{\partial u_l}{\partial x_m},$$

$$\sigma_{ij}|_s = q_i(x_s).$$

Тензор упругих модулей

$$c_{ijlm}(x_s) = c_{ijlm}^0 + c'_{ijlm}(x_s),$$

где  $c_{ijlm}^0$  – константы.

Перемещения  $u_l(x_s)$

$$u_l = \sum_{k=0}^{\infty} u_l^k(x_s);$$

$$u_l^0(x_s) = \int_v G_{ij}(x_s, \xi_s) \rho F_j(\xi_s) dv + \int_s G_{ij}(x_s, \xi_s) q_j(\xi_s) ds;$$

$$u_l^k(x_s) = \int_v G_{ij}(x_s, \xi_s) f_j^{k-1}(\xi_s) dv + \int_s G_{ij}(x_s, \xi_s) q_j^{k-1}(\xi_s) ds,$$

здесь  $G_{ij}(x_s, \xi_s)$  – тензор Грина краевой задачи,

$$f_j^{k-1} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c'_{ijlm} \frac{\partial u_l^{k-1}}{\partial x_m} \right);$$

$$q_j^{k-1} = -c'_{ijlm} \frac{\partial u_l^{k-1}}{\partial x_m} n_j \Big|_s.$$

#### 3.4. МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ (А.В. Андреев, 1981 г.)

Малые перемещения материальных точек определяются двумя векторными полями:

$$U = U(x, y, z); \quad \Phi = \Phi(x, y, z),$$

где  $U$  и  $\Phi$  – векторы, характеризующие малые перемещения и малые жесткие повороты.

В этой модели возникает напряженное состояние с несимметричным тензором напряжений ( $\tau_{xy} \neq \tau_{yx}$ ). В зонах концентрации напряжений с высоким градиентом происходит моментная депланация сечений. Моментный депланационный сдвиг  $\gamma_d$  отличается от обычного, что образуется в главных осях вследствие разницы величин поперечных перемещений вдоль одной из главных осей. Обычный сдвиг возникает в осях, повернутых по отношению к главным. В классической теории упругости приняты симметричный тензор деформаций и отсутствие сдвига в главных осях.

Приведем основные уравнения плоской (в осях  $xu$ ) задачи моментно-депланационной теории упругости

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_d}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_d}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v_d}{\partial y} - \frac{\partial v_d}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{dx}}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{dyy}}{\partial y} \right) = 0;$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{dy}}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{dxx}}{\partial x} \right) = 0.$$

В моментно-депланационной теории упругости при плоской деформации три компонента деформации  $\varepsilon_{xs}$ ,  $\varepsilon_{ys}$ ,  $\gamma_{xys}$  выражаются через четыре функции  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $u_d(x, y)$ ,  $v_d(x, y)$ .

Если обычные напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , а депланационные  $\sigma_{dx}$ ,  $\tau_{dy}$ ,  $\tau_{dxy}$ ,  $\tau_{dyz}$ , то результирующие уравновешивающие напряжения

$$\sigma_x + \sigma_{dx} = \sigma_x^p; \quad \sigma_y - \sigma_{dy} = \sigma_y^p; \quad \tau_{yx} + \tau_{dyy} = \tau_{yx}^p; \quad \tau_{xy} - \tau_{dxy} = \tau_{xy}^p.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \partial \sigma_x^p - \partial \tau_{yx}^p &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_x^p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для плоской деформации закон Гука представляют в виде

$$\sigma_x^p = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{xs} + \mu \varepsilon_{ys}) + G_d \gamma'_{d_{yx}};$$

$$\sigma_y^p = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{ys} + \mu \varepsilon_{xs}) + G_d \gamma'_{d_{xy}},$$

где  $\gamma'_{d_{xy}}$ ,  $\gamma'_{d_{yx}}$  – деформации депланационного сдвига осей  $x$  и  $y$ .



## Глава 4. АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

По Л.И. Седову (1976) среда изотропна, если компоненты тензоров, определяющих ее свойства, не меняются при любых ортогональных преобразованиях, т.е. свойства одинаковы по всем направлениям.

В анизотропных средах свойства в разных направлениях разные.

Теория анизотропных сред развивалась в трудах Н.Г. Микляева и Я.Б. Фридмана (1969), А.Л. Рабиновича (1970), Е.К. Ашкенази (1972), С.Г. Лехницкого (1977), А.В. Павленко (1982), С.А. Амбарцумяна (1987), Е. Рейснера (1961), А.А. Трещева (2008 – 2010) и др.

В [79] рассмотрено влияние неоднородности грунтовых оснований на распределение напряжений. В первую очередь приведены данные для оснований с горизонтальными малодеформируемыми подстилающими слоями. Это работы О.Я. Шехтер (1937), К.Е. Егорова (1939 – 1960), М.И. Горбунова–Посадова (1946 – 1953), И.К. Самарина и Г.В. Крашенинниковой (1930).

Так, для погонной сосредоточенной нагрузки максимальное сжимающее напряжение при  $\mu = 0,5$

$$\sigma_h = 0,822 \frac{P}{h.1},$$

где  $h$  – мощность сжимаемого слоя.

Так же в [79] обсуждается влияние толщины сжимаемого слоя на распределение контактных напряжений.

В лаборатории ФГБОУ ВПО «ТГТУ» проведены многочисленные эксперименты по изучению влияния угла наклона подстилающего слоя, его толщины шероховатости жесткого слоя, эксцентриситета и угла наклона силы на характер перемещения моделей и несущую способность основания.

По данным натурных наблюдений установлено влияние наклона верхнего, более сжимаемого слоя на характер повреждений зданий.

Для анизотропных сред  $E_x \neq E_y \neq E_z$ ,  $\nu_x \neq \nu_y \neq \nu_z$ .

### 4.1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

• **Напряженное и деформированное состояния сплошного тела** [30, 38, 73, 75, 76].

#### **Ряд предложений и ограничений**

1. Тело является сплошным (сплошной средой). Напряжения на любой площадке внутри и на поверхности являются силами, отнесенными к единице площади. Моментными напряжениями, которые вво-

дятся в ряде современных работ, пренебрегают, как это делается в классической теории упругости.

2. Связь между компонентами деформации и проекциями перемещения и их первыми производными по координатам является линейной, т.е. рассматривают только малые деформации.

3. Между компонентами напряжений и деформаций существуют линейные зависимости, т.е. материал следует обобщенному закону Гука. Коэффициенты этих линейных зависимостей могут быть как постоянными (однородное тело), так и переменными функциями координат, непрерывными или прерывными (в случае однородного тела).

4. Начальных, т.е. существующих без внешней нагрузки напряжений, в том числе и температурных, не учитывают; конкретных задач динамики не рассматривают.

**Связь между составляющими деформации и проекциями перемещения в трех системах координат при малых деформациях**

1. Декартова система  $(x, y, z)$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

2. Цилиндрическая система  $(r, \theta, z)$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{cases}$$

3. Сферическая система  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}; \\ \gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta}{r}, \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{cases}$$

**Связь между составляющими деформации и проекциями перемещения в декартовой системе координат при больших деформациях**

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1, \\ \varepsilon_y &= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} - 1, \\ \sin \gamma_{xy} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)}.\end{aligned}$$

**Дифференциальные уравнения равновесия и движения сплошной среды в трех системах координат**

1. Декартова система координат:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

2. Цилиндрическая система:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \partial \theta}{r} + R = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \Theta = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0. \end{cases}$$

3. Сферическая система:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) + P = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}] + \Theta = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}) + \Phi = 0. \end{cases}$$

**Уравнения движения сплошной среды в декартовой системе координат при малых деформациях**

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X - \bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y - \bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z - \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

• **Обобщенный закон Гука**

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + \dots + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots + a_{26}\tau_{xy}, \\ \dots \dots \dots \\ \gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + \dots + a_{66}\tau_{xy}, \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} \sigma_x = A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + \dots + A_{16}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + \dots + A_{26}\gamma_{xy}, \\ \dots \dots \dots \\ \tau_{xy} = A_{16}\varepsilon_x + A_{26}\varepsilon_y + \dots + A_{66}\gamma_{xy}. \end{cases}$$

**Выражение упругого потенциала**

$$\begin{aligned} \bar{V} = & \frac{1}{2} A_{11} \varepsilon_x^2 + A_{12} \varepsilon_x \varepsilon_y + \dots + A_{15} \varepsilon_x \gamma_{xy} + A_{16} \varepsilon_x \gamma_{xy} + \dots + \\ & + \frac{1}{2} A_{22} \varepsilon_y^2 + \dots + A_{25} \varepsilon_{yx} \lambda_{xz} + A_{26} \varepsilon_y \gamma_{xy} + \dots \\ & + \frac{1}{2} A_{55} \rho_{xz}^2 + A_{56} \gamma_{xz} \gamma_{xy} + \dots + \frac{1}{2} A_{66} \gamma_{xy}^2. \end{aligned}$$

или

$$\bar{V} = \frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^2 + a_{12} \sigma_x \sigma_y + \dots + a_{16} \varepsilon_x \tau_{xy} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} a_{22} \sigma_y^2 + \dots + a_{26} \sigma_y \tau_{xy} + \dots + \frac{1}{2} a_{66} \tau_{xy}^2.$$

• Преобразование упругих постоянных при переходе к новой системе координат

Уравнения и выражения в системе координат  $x', y', z'$

$$\begin{cases} \varepsilon'_x = a'_{11} \sigma'_x + a'_{12} \sigma'_y + \dots + a'_{16} \tau'_{xy}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma'_{yz} = a'_{14} \sigma'_x + a'_{24} \sigma'_y + \dots + a'_{46} \tau'_{xy}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{2} a'_{11} \sigma'^2_x + a'_{12} \sigma'_x \sigma'_y + \dots + a'_{16} \sigma'_x \tau'_{xy} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{2} a'_{22} \sigma'^2_y + \dots + a'_{26} \sigma'_y \tau'_{xy} + \dots + \frac{1}{2} a'_{66} \tau'^2_{xy}.$$

Напряжения старой системы координат в связи с напряжениями новой системы координат

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma'_x l_{11}^2 + \sigma'_y l_{21}^2 + \dots + 2\tau'_{xy} l_{11} l_{21}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tau_{yz} = \sigma'_x l_{12} l_{13} + \sigma'_y l_{22} l_{23} + \dots + \tau'_{xy} (l_{12} l_{23} + l_{22} l_{13}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

**4.1. Символ  $q_{ij}$  к формулам преобразования коэффициентов  $a_{ij}$**

	1	2	3	4	5	6
1	$l_{11}^2$	$l_{12}^2$	$l_{13}^2$	$l_{12} l_{23}$	$l_{13} l_{11}$	$l_{12} l_{11}$
22	$l_{21}^2$	$l_{22}^2$	$l_{23}^2$	$l_{23} l_{22}$	$l_{23} l_{21}$	$l_{22} l_{21}$
33	$l_{31}^2$	$l_{32}^2$	$l_{33}^2$	$l_{33} l_{32}$	$l_{33} l_{31}$	$l_{32} l_{31}$
44	$2l_{31} l_{21}$	$2l_{32} l_{22}$	$2l_{33} l_{23}$	$l_{33} l_{32} + l_{33} l_{23}$	$l_{33} l_{21} + l_{31} l_{23}$	$l_{31} l_{22} + l_{32} l_{21}$
55	$2l_{31} l_{11}$	$2l_{32} l_{12}$	$2l_{33} l_{13}$	$l_{33} l_{12} + l_{33} l_{13}$	$l_{33} l_{11} + l_{31} l_{13}$	$l_{31} l_{12} + l_{32} l_{11}$
66	$2l_{21} l_{11}$	$2l_{12} l_{22}$	$2l_{13} l_{23}$	$l_{13} l_{22} + l_{12} l_{23}$	$l_{13} l_{21} + l_{11} l_{23}$	$l_{11} l_{22} + l_{12} l_{21}$

## Формулы преобразования для коэффициентов деформации

$$a'_{ij} = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 a_{mn} q_{im} q_{jn},$$

$$a'_{ij} = a_{mn} q_{im} q_{jn},$$

$$a'_{ijkl} = a_{mnpq} l_{im} l_{jn} l_{ks} l_{lp}.$$

## Формулы преобразования для модулей упругости

$$A'_{ij} = A_{mn} q_{im} q_{jn}.$$

## Преобразование упругих постоянных при повороте координатной системы

### Преобразование коэффициентов деформации $a_{ij}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{11} = a_{11} \cos^4 \varphi + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^4 \varphi + \\ \quad + 2(a_{16} \cos^2 \varphi + a_{26} \sin^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi, \\ a'_{22} = a_{11} \sin^4 \varphi + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^4 \varphi - \\ \quad - 2(a_{16} \sin^2 \varphi + a_{26} \cos^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi, \\ a'_{12} = (a_{11} + a_{12} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a_{12} + \\ \quad + (a_{16} - a_{26})(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi, \\ a'_{66} = 4(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a_{66} - \\ \quad - 4(a_{16} - a_{26})(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi, \\ a'_{16} = [2a_{22} \sin^2 \varphi - 2a_{11} \cos^2 \varphi + (2a_{12} + a_{66})(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] \sin \varphi \cos \varphi + \\ \quad + a_{16} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi) + a_{26} \sin^2 \varphi (3\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ a'_{26} = [2a_{22} \cos^2 \varphi - 2a_{11} \sin^2 \varphi - (2a_{12} + a_{66})(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] \sin \varphi \cos \varphi + \\ \quad + a_{16} \sin^2 \varphi (3\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + a_{26} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi). \end{array} \right.$$

### 4.2. Символ $q_{ij}$ к формулам преобразования коэффициентов

$i \backslash j$	1	2	3
1	$\cos^2 \varphi$	$\sin^2 \varphi$	0
2	$\sin^2 \varphi$	$\cos^2 \varphi$	0
3	0	0	1

$i \backslash j$	1	2	3
4	0	0	0
5	0	0	0
6	$-2 \sin \varphi \cos \varphi$	$2 \sin \varphi \cos \varphi$	0
7	0	0	$\sin \varphi \cos \varphi$
8	0	0	$-\sin \varphi \cos \varphi$
9	0	0	0
10	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
11	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
12	0	0	$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$

$$\begin{cases} a'_{44} = a_{44} \cos^2 \varphi - 2a_{45} \sin \varphi \cos \varphi + a_{55} \sin^2 \varphi, \\ a'_{45} = (a_{44} - a_{55}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{45} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ a'_{55} = a_{44} \sin^2 \varphi + 2a_{45} \sin \varphi \cos \varphi + a_{55} \cos^2 \varphi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_{14} = a_{14} \cos^3 \varphi - (a_{46} - a_{14}) \sin \varphi \cos^2 \varphi + \\ \quad + (a_{24} - a_{56}) \sin^2 \varphi \cos \varphi - a_{25} \sin^3 \varphi, \\ a'_{24} = a_{24} \cos^3 \varphi - (a_{46} + a_{25}) \sin \varphi \cos^2 \varphi + \\ \quad + (a_{14} + a_{56}) \sin^2 \varphi \cos \varphi - a_{15} \sin^3 \varphi, \\ a'_{46} = a_{46} \cos^3 \varphi + (-2a_{14} + 2a_{24} - a_{56}) \sin \varphi \cos^2 \varphi + \\ \quad + (2a_{15} - 2a_{25} - a_{46}) \sin^2 \varphi \cos \varphi + a_{56} \sin^3 \varphi, \\ a'_{15} = a_{15} \cos^3 \varphi + (a_{14} + a_{56}) \sin \varphi \cos^2 \varphi + \\ \quad + (a_{25} + a_{46}) \sin^2 \varphi \cos \varphi + a_{24} \sin^3 \varphi, \\ a'_{25} = a_{25} \cos^3 \varphi + (a_{24} - a_{56}) \sin \varphi \cos^2 \varphi + \\ \quad + (a_{15} - a_{46}) \sin^2 \varphi \cos \varphi + a_{14} \sin^3 \varphi, \\ a'_{56} = a_{56} \cos^3 \varphi + (-2a_{15} + 2a_{56} + a_{46}) \sin \varphi \cos^2 \varphi + \\ \quad + (-2a_{14} + 2a_{24} - a_{56}) \sin^2 \varphi \cos \varphi - a_{46} \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_{13} = a_{13} \cos^2 \varphi + a_{36} \sin \varphi \cos \varphi + a_{23} \sin^2 \varphi, \\ a'_{36} = 2(a_{23} - a_{13}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{36} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ a'_{23} = a_{13} \sin^2 \varphi - a_{36} \sin \varphi \cos \varphi + a_{23} \cos^2 \varphi, \\ a'_{33} = a_{33}, \\ a'_{34} = a_{34} \cos \varphi - a_{35} \sin \varphi, \\ a'_{35} = a_{34} \sin \varphi + a_{35} \cos \varphi. \end{cases}$$

**Формулы упругих постоянных ортотропного тела при введении технических упругих постоянных  $E_i$ ,  $G_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$**

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{11} = \frac{\cos^4 \varphi}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\sin^4 \varphi}{E_1}, \\ a'_{22} = \frac{\sin^4 \varphi}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{\cos^4 \varphi}{E_1}, \\ a'_{12} = \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\mu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{\mu_{12}}{E_1}, \\ a'_{66} = 4 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\mu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1}{G_{12}}, \\ a'_{16} = \left[ 2 \left( \frac{\sin^2 \varphi}{E_2} - \frac{\cos^2 \varphi}{E_1} \right) + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{12}}{E_1} \right) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \right] \sin \varphi \cos \varphi, \\ a'_{26} = \left[ 2 \left( \frac{\sin^2 \varphi}{E_2} - \frac{\cos^2 \varphi}{E_1} \right) - \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{12}}{E_1} \right) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \right] \sin \varphi \cos \varphi; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{44} = \frac{\cos^2 \varphi}{G_{23}} + \frac{\sin^2 \varphi}{G_{13}}, \\ a'_{45} = \left( \frac{1}{G_{23}} - \frac{1}{G_{13}} \right) \sin \varphi \cos \varphi, \\ a'_{55} = \frac{\sin^2 \varphi}{G_{23}} + \frac{\cos^2 \varphi}{G_{13}}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{13} = - \left( \frac{\mu_{23}}{E_2} \sin^2 \varphi + \frac{\mu_{23}}{E_1} \cos^2 \varphi \right), \\ a'_{23} = - \left( \frac{\mu_{23}}{E_2} \cos^2 \varphi + \frac{\mu_{13}}{E_1} \sin^2 \varphi \right), \\ a'_{33} = \frac{1}{E_3}, \\ a'_{36} = 2 \left( \frac{\mu_{13}}{E_1} - \frac{\mu_{23}}{E_2} \right) \sin \varphi \cos \varphi. \end{array} \right.$$



## Инварианты для ортотропного тела

$$\begin{cases} I_1 = a'_{11} + a'_{22} + 2a'_{12} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2\mu_{12}}{E_1}, \\ I_2 = a'_{00} - 4a'_{12} = \frac{1}{G_{12}} + \frac{4\mu_{12}}{E_1}, \\ I_3 = a'_{44} + a'_{00} = \frac{1}{G_{13}} + \frac{1}{G_{23}}, \\ I_4 = a'_{13} + a'_{23} = -\left(\frac{\mu_{13}}{E_1} + \frac{\mu_{23}}{E_2}\right) = -\frac{\mu_{31} + \mu_{32}}{E_3}. \end{cases}$$

## Преобразование приведенных упругих постоянных $\beta_{ij}$

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6).$$

### • Криволинейная анизотропия

#### Обобщенный закон Гука в криволинейной системе координат

$$\begin{cases} \varepsilon_\xi = a_{11}\sigma_\xi + a_{12}\sigma_\eta + a_{13}\sigma_\zeta + a_{14}\tau_{\eta\xi} + a_{15}\tau_{\xi\xi} + a_{16}\tau_{\xi\eta}, \\ \varepsilon_\eta = a_{12}\sigma_\xi + a_{22}\sigma_\eta + \dots + a_{26}\tau_{\xi\eta}, \\ \dots \\ \gamma_{\xi\eta} = a_{16}\sigma_\xi + a_{26}\sigma_\eta + \dots + a_{66}\tau_{\xi\eta}. \end{cases}$$

#### Обобщенный закон Гука в цилиндрической системе координат

$$\begin{cases} \varepsilon_r = a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{\theta z} + a_{15}\tau_{rz} + a_{16}\tau_{r\theta}, \\ \varepsilon_\theta = a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta + \dots + a_{26}\tau_{r\theta}, \\ \dots \\ \gamma_{\xi\theta} = a_{16}\sigma_r + a_{26}\sigma_\theta + \dots + a_{66}\tau_{r\theta}. \end{cases}$$

#### Обобщенный закон Гука в случае ортотропного тела с цилиндрической анизотропией при введении упругих характеристик – модуля Юнга и сдвига и коэффициента Пуассона

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E_r}\sigma_r - \frac{\mu_{\theta r}}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\mu_{zr}}{E_z}\sigma_z, & \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G_{\theta z}}\tau_{\theta z}, \\ \varepsilon_\theta = -\frac{\mu_{r\theta}}{E_r}\sigma_r + \frac{1}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\mu_{z\theta}}{E_z}\sigma_z, & \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{rz}}\tau_{rz}, \\ \varepsilon_\theta = -\frac{\mu_{rz}}{E_r}\sigma_r - \frac{\mu_{\theta z}}{E_\theta}\sigma_z + \frac{1}{E_z}\sigma_z, & \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}. \end{cases}$$

• **Общие уравнения теории упругости и постановка основных задач. Важнейшие вариационные принципы**

Основная система уравнений равновесия в декартовой системе координат  $(x, y, z, t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots\dots\dots + a_{26}\tau_{xy}, \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + \dots\dots\dots + a_{66}\tau_{xy}, \end{cases}$$

где  $X, Y, Z$  – проекции объемных сил на единицу объема.

**Уравнения движения**

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = \bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots\dots\dots + a_{26}\tau_{xy}, \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + \dots\dots\dots + a_{66}\tau_{xy}, \end{cases}$$

где  $\bar{\rho}$  – плотность материала тела.

**Первая основная задача.** На всей поверхности задаются внешние усилия.

Граничные условия

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) = X_n, \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) = Y_n, \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) = Z_n. \end{cases}$$

**Вторая основная задача.** На всей поверхности задаются проекции перемещения на три несовпадающих напряжениях, например, проекции  $u^*, v^*, w^*$ , на оси декартовой прямоугольной системы координат. Граничные условия будут иметь вид

$$u = u^*, \quad v = v^*, \quad w = w^*.$$

**Смешанная задача.** На части поверхности задаются усилия, а на другой части перемещения. Для случая ортотропного тела, движущее-

гося под действием внешних усилий, или испытывающего свободные колебания, уравнения движения в проекциях перемещения имеют такой вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A_{11} - A_{44}) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \quad \left. + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial v}{\partial y} + (A_{13} + A_{55}) \frac{\partial w}{\partial z} \right] + X = \bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \quad \left. + (A_{22} - A_{55}) \frac{\partial v}{\partial y} + (A_{23} + A_{44}) \frac{\partial w}{\partial z} \right] + Y = \bar{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (A_{13} + A_{55}) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \quad \left. + (A_{23} + A_{44}) \frac{\partial v}{\partial y} + (A_{33} - A_{66}) \frac{\partial w}{\partial z} \right] + Z = \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{array} \right.$$

#### 4.2. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ

- Растяжение стержня под действием осевой силы и собственного веса (рис. 4.1).

##### Напряжения

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \frac{P}{S}, \\ \sigma_x = \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0. \end{array} \right.$$

##### Деформации

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{P}{S} a_{13}, \quad \gamma_{yz} = \frac{P}{S} a_{34}, \\ \epsilon_y = \frac{P}{S} a_{23}, \quad \gamma_{xz} = \frac{P}{S} a_{35}, \\ \epsilon_z = \frac{P}{S} a_{33}, \quad \gamma_{xy} = \frac{P}{S} a_{36}. \end{array} \right.$$

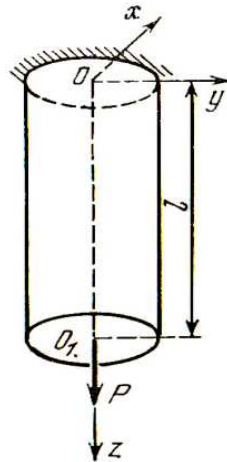


Рис. 4.1. Схема к задаче

## Перемещения

$$\begin{cases} u = \frac{P}{S}(a_{13}x + a_{36}y + a_{35}z) + \omega_2 z - \omega_3 y + u_0, \\ v = \frac{P}{S}(a_{23}y + a_{34}z) + \omega_3 x - \omega_1 z + v_0, \\ w = \frac{P}{S}a_{33}z + \omega_1 y - \omega_2 x + w_0. \end{cases}$$

Здесь  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  – постоянные, характеризующие жесткое перемещение тела в пространстве, не сопровождаемое деформациями; первые три характеризуют перемещения при повороте вокруг осей координат, а вторые три – поступательные перемещения вдоль осей.

Условия закрепленного бесконечно малого элемента на оси  $z$  около координат

$$\begin{cases} u = v = w = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Тогда перемещения будут

$$\begin{cases} u = \frac{P}{S}(a_{13}x + 0,5a_{36}x), \\ v = \frac{P}{S}(a_{36}x + a_{23}y), \\ w = \frac{P}{S}(a_{35}x + a_{34}y + a_{33}z). \end{cases}$$

В общем случае анизотропии стержень не только удлиняется в направлении силы и сокращается в поперечных направлениях, но еще испытывает сдвиги во всех плоскостях, параллельных координатным. Эти сдвиги характеризуются коэффициентами  $a_{34}$ ,  $a_{35}$ ,  $a_{36}$

$$\begin{cases} a_{34} = \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} = \frac{\eta_{yz,z}}{E_z}, \\ a_{35} = \frac{\eta_{z,zx}}{G_{xz}} = \frac{\eta_{zx,z}}{E_z}, \\ a_{36} = \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} = \frac{\eta_{xy,z}}{E_z}. \end{cases}$$

**Абсолютное удлинение стержня**

$$f = \frac{Pla_{33}}{S} = \frac{Pl}{E_z S}.$$

**Напряжения от собственного веса**  
(рис. 4.2)

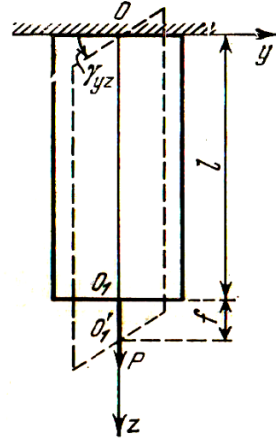
$$X = Y = 0, \quad Z = \gamma,$$

$$\sigma_z = \gamma(l - z), \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0,$$

где  $\gamma$  – удельный вес материала.

**Перемещения от собственного веса**

$$\left. \begin{aligned} u &= \gamma[-0,5a_{35}z^2 + (a_{13}x + 0,5a_{36}y)(l - z)], \\ v &= \gamma[-0,5a_{34}z^2 + (a_{23}y + 0,5a_{36}x)(l - z)], \\ w &= \gamma[0,5(a_{13}x^2 + a_{23}y^2 + a_{36}xy) + \\ &\quad + (a_{34}y + a_{35}x)l + 0,5a_{33}z(2l - z)]. \end{aligned} \right\}$$



**Рис. 4.2. Деформация стержня**

В общем случае анизотропии ось искривляется и уравнение изогнутой оси будет

$$x' = -0,5\gamma a_{35}z^2, \quad y' = -0,5\gamma a_{34}z^2.$$

При этом центр нижнего конца перемещается не только вдоль  $z$ , но и в стороны, и проекции перемещения его на оси координат определяются по формулам

$$\left\{ \begin{aligned} f_x &= -0,5\gamma l^2 a_{35} = -0,5\gamma l^2 \frac{\eta_{zx,z}}{E_z}, \\ f_y &= -0,5\gamma l^2 a_{34} = -0,5\gamma l^2 \frac{\eta_{yz,z}}{E_z}, \\ f_z &= 0,5\gamma l^2 a_{33} = 0,5\gamma l^2 \frac{1}{E_z}. \end{aligned} \right.$$

Если стержень закреплен так, что центр нижней поверхности остается на вертикали, то перемещение его по вертикали будет прежним

$$x' = 0,5\gamma a_{35}(lz - z^2), \quad y' = 0,5\gamma a_{34}(lz - z^2).$$

• **Сдвиг**

Напряжения и деформации определяются по формулам (рис. 4.3)

$$\tau_{yz} = t, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0;$$

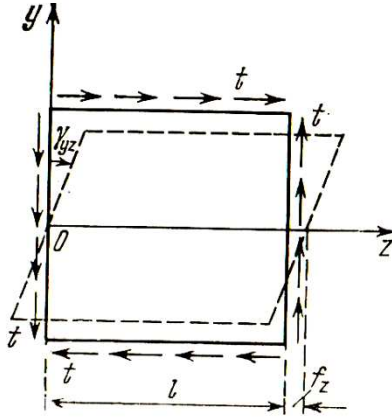


Рис. 4.3. Деформации сдвига

$$\begin{cases} \epsilon_x = ta_{14}, & \gamma_{yz} = ta_{44}, \\ \epsilon_y = ta_{24}, & \gamma_{xz} = ta_{45}, \\ \epsilon_z = ta_{34}, & \gamma_{xy} = ta_{46}. \end{cases}$$

Предполагая, что элемент оси  $z$  закреплен около начала координат, тогда перемещения будут

$$\begin{cases} u = t(a_{14}x + 0,5a_{46}y), \\ v = t(0,5a_{46}x + a_{24}y), \\ w = t(a_{45}x + a_{44}y + a_{34}z). \end{cases}$$

Полное удлинение в направлении оси  $z$

$$f_z = tla_{34} = tl \frac{\eta_{yz,z}}{E_z} = tl \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}}.$$

Объемное расширение  $\theta$ , т.е. изменение единицы объема, зависит от коэффициентов взаимного влияния и определится по формулам

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = t(a_{14} + a_{24} + a_{34}),$$

или

$$\theta = \frac{t}{G_{yz}} (\eta_{x,yz} + \eta_{y,yz} + \eta_{z,yz}).$$

Изменение объема всего тела

$$\Delta\omega = tlbh(a_{14} + a_{24} + a_{34}).$$

### 4.3. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

• **Распределение напряжений в упругом полупространстве под действием осесимметричной нормальной нагрузки** (рис. 4.4).

Дано упругое однородное трансверсально-изотропное полупространство, ограниченное бесконечной плоскостью с плоскостями изотропии, параллельными ограничивающей. На этой ограничивающей плоскости по площади некоторого круга распределены нормальные усилия, обладающие симметрией вращения относительно нормали, проведенной через центр круга, принимаемый за начало  $O$  цилиндрической системы координат (ось  $z$  направлена нормально к границе внутрь).

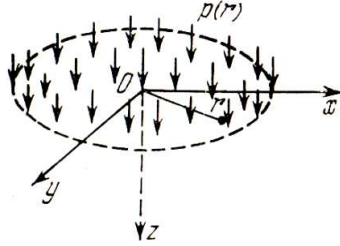


Рис. 4.4. Схема к задаче

$p(r)$  – интенсивность нагрузки, которая удовлетворяет условиям:

1) она конечна при всяком  $r$ ; 2) в любом конечном интервале  $r > 0$  число точек разрыва непрерывности и экстремальных точек конечно и

3) интервал  $\int_0^{\infty} p\sqrt{r} dr$  сходится. Тогда напряжения определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{1}{(s_1 - s_2)\sqrt{d}} \int_0^{\infty} \psi(t) (s_1 e^{-s_1 t z} - s_2 e^{-s_2 t z}) t J_0(tr) dt + \\ &+ \frac{\lambda}{s_1 - s_2} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \psi(t) (s_1 p_2 e^{-s_1 t z} - s_2 p_1 e^{-s_2 t z}) t J_1(tr) dt, \\ \sigma_{\theta} &= -\frac{\sqrt{d}}{(s_1 - s_2)(ac - d)} \int_0^{\infty} \psi(t) (s_1 q_2 e^{-s_1 t z} - s_2 q_1 e^{-s_2 t z}) t J_0(tr) dt - \\ &- \frac{\lambda}{s_1 - s_2} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \psi(t) (s_1 p_2 e^{-s_1 t z} - s_2 p_1 e^{-s_2 t z}) t J_1(tr) dt, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{s_1 - s_2} \int_0^{\infty} \psi(t) (s_2 e^{-s_1 t z} - s_1 e^{-s_2 t z}) t J_0(tr) dt, \end{aligned}$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{(s_1 - s_2)\sqrt{d}} \int_0^{\infty} \psi(t) (e^{-s_1 tz} - e^{-s_2 tz}) t J_1(tr) dt.$$

Здесь функция  $\psi(t)$  определяется по формуле

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} p(\xi) \xi J_0(\xi t) d\xi,$$

где  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка вещественного аргумента.

• **Распределение напряжений в упругом полупространстве под действием сосредоточенной силы и произвольной нормальной нагрузки** (рис. 4.5).

Распределение напряжений в трансверсально-изотропном полупространстве дается формулами

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{z}{(s_1 - s_2)\sqrt{d}} \left[ \frac{s_1^2}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{s_2^2}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{s_1 - s_2} \frac{z}{r^2} \left[ \frac{s_1^2 p_2}{\sqrt{r^2 + s_1^2 z^2}} - \frac{s_2^2 p_1}{\sqrt{r^2 + s_2^2 z^2}} \right] - \frac{\mu}{r^2} \right\}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{d}}{ac - d} \frac{z}{s_1 - s_2} \left[ -\frac{s_1^2 q_2}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{s_2^2 q_1}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{s_1 - s_2} \frac{z}{r^2} \left[ \frac{s_1^2 p_2}{\sqrt{r^2 + s_1^2 z^2}} - \frac{s_2^2 p_1}{\sqrt{r^2 + s_2^2 z^2}} \right] + \frac{\mu}{r^2} \right\}, \\ \sigma_z &= -\frac{P}{2\pi\sqrt{d}} \frac{z}{s_1 - s_2} \left[ \frac{1}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}} \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{P}{2\pi\sqrt{d}} \frac{r}{s_1 - s_2} \left[ \frac{1}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

Напряжения от силы  $P$ , приложенной не в начале координат, а в произвольной точке  $O'$  с координатами  $\xi, \eta$  (рис. 4.6).



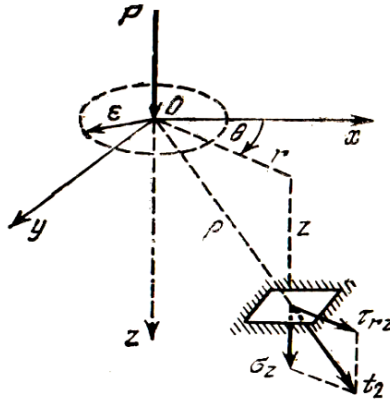


Рис. 4.5. Схема к задаче

Напряжения в декартовой системе координат  $x, y, z$

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

$$\sigma_z = \sigma_z,$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\theta) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

$$\tau_{xz} = \tau_{rz} \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{rz} \frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

здесь  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$  – напряжения в цилиндрической системе.

Пусть нагрузка распределена по некоторому участку  $S$  ограничивающей плоскости и является нормальной и заданной функцией  $x$  и  $y$  –

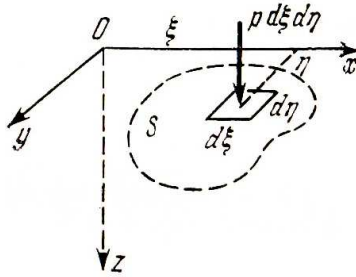


Рис. 4.6. Схема к задаче

$p(x, y)$  (см. рис. 4.6), тогда напряжения будут определяться по другим формулам. Пример, для  $\sigma_z$

$$\sigma_z = \frac{z}{2\pi\sqrt{d}(s_1 - s_2)} \iint_S \left\{ \frac{1}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + s_1^2 z^2]} - \frac{1}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + s_2^2 z^2]} \right\} d\xi d\eta.$$

**Некоторые задачи механики неоднородных сред.** Андреев В.И. (2002) рассмотрел задачи о концентрации напряжений вблизи подземного цилиндрического отверстия; осесимметричная термоупругая деформация с учетом двухмерной неоднородности материала, термонапряженное состояние массива со сферической полостью с учетом двухмерной неоднородности, расчет неоднородной в меридиальном направлении анизотропной полусферической оболочки.

Так, оболочка, армированная в кольцевом и меридиональном направлениях отличалась. Если количество арматуры на единицу площади сечения в направлении угла  $\varphi$  постоянно, то в направлении  $\theta$  изменяется. Тогда  $E_1 = E_2 = \text{const}$ ,  $E_2 = E_\theta(\theta)$ ,  $E_3 = E_\varphi = \text{const}$ , т.е. неоднородность материала будет в меридиональном направлении.

Пусть  $\mu_2$  и  $\mu_3$  коэффициенты армирования в направлении  $\theta$  и  $\varphi$ , то модули упругости

$$E_1 = E_B; E_2 = E_{cs}\mu_2 + E_B(1 - \mu_2); E_3 = E_s\mu_3 + E_B(1 - \mu_3).$$

Цытович Н.А. (1963) приводит данные Г.И. Клейна (1960), Н.Н. Иванова (1929), О.К. Фрелиха (1936) для непрерывно-неоднородного по глубине полупространства

$$E_x = E_1 z^v ,$$

где  $v$  – показатель степени неоднородности.

Тогда

$$\sigma_z = v P z^v / (2\pi R^{v+2}).$$

В книге Г.И. Марчука и В.И. Агошкова (1981) описаны проекционно-сеточные методы (Ритца, Бубнова–Галеркина, наименьших квадратов и др.), кусочно-линейные аппроксимации, методы решения некоторых краевых задач, рассмотрены примеры построения базисных функций.

Методы вычислительной математики изложены и в ранее изданной книге Г.И. Марчука (1977). Большое внимание уделено итерационным методам.

## **Глава 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ**

Подробнее см. в [6, 10, 12, 15, 20, 21, 25, 29, 47, 58, 68, 70, 75, 82, 83].

### **5.1. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ**

Это механика, разрешающая система уравнений которой нелинейна. В качестве объекта исследования является среда с двумя основными особенностями: с внутренним трением и многокомпонентностью (обычно трехкомпонентная среда – частицы грунта + вода + воздух).

Нелинейность разрешающей системы проявляется в трех случаях:

- 1) при зависимости консолидационных параметров от изменяющейся пористости – нелинейные консолидационные свойства;
- 2) при нелинейной связи между напряжениями, деформациями и их производными во времени – физическая нелинейность;
- 3) при нелинейной связи между компонентами деформаций и градиентами перемещений – геометрическая нелинейность.

Для решения задач используются уравнения состояния, вытекающие из теории пластичности. В основе теории пластического течения лежит принцип максимума Мизеса: скорость диссипации механической энергии в единице объема во время пластического деформирования имеет максимальное значение для действительного напряженно-состояния из всех возможных, допускаемых данным критерием пластичности.

Принимают следующие допущения:

- поверхность нагружения не должна быть вогнута; направление вектора приращения пластических деформаций должно совпадать с нормалью к поверхности нагружения в точке нагружения (ассоциированный закон пластического течения).

При учете вязкопластичности вводят понятие мгновенной поверхности нагружения.

К числу основных факторов, определяющих процесс деформирования, относят:

- физическое состояние грунта;
- деформацию грунтов при активном нагружении;
- пластические деформации, зависящие нелинейно от напряжения, а также от пути нагружения и вида напряженного состояния;
- дилатацию (доуплотнение или разуплотнение), зависящую от плотности грунта, его физического состояния, степени приближения к предельному состоянию, траектории нагружения, характера воздействия;
- многофазность грунтов;
- запаздывание пластических деформаций во времени, особенно для связных грунтов;
- характер воздействия (статические, температурные, коррозионные, динамические нагружения).

Для анализа нелинейного поведения грунтов используют различные методы вычислительной математики: конечно-разностные, вариационно-разностные, конечных и граничных элементов и др.

Кроме того, используют и другие нелинейные методы расчета:

- нелинейную деформационную теорию пластичности;
- ассоциированный закон пластического течения Друккера–Прагера, неассоциированный закон пластического течения, критического состояния, пластического течения с упрочнением, обобщенный ассоциированный закон течения упрочняющихся пластических сред и др.

Величины пластических деформаций зависят от пути нагружения и вида напряженного состояния. При сдвиге грунт либо доуплотняется (контракция), либо разуплотняется. Знак и величина дилатационной части объемной деформации зависят от: плотности грунта, степени приближения к предельному состоянию, траектории нагружения. Пластические деформации запаздывают во времени. Время запаздывания зависит от вида грунта, величины и характера воздействия.

Феноменологическое описание реологических процессов в грунтах проводится на основе теории наследственной ползучести, теорий течения и упрочнения.

## 5.2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Изложенная в [23, 25, 29, 46, 68, 75, 82, 83] теория деформирования систем из упруго-идеальнопластического материала, для которого соблюдается ассоциированный закон пластического течения, в которой сохраняется гипотеза о малости суммарных упругопластических деформаций. Теория идеальной пластичности игнорирует многие условия, например, упрочнение и эффект Баушингера. Построение теории пластичности (Треска, Сен-Венана, Мизеса) следовало принципу пластического течения, т.е. установлению связи между скоростями тензора деформаций и тензора напряжений. Пластичность называется идеальной, если в процессе нагружения не происходит изменения поверхности пластичности. Развитию теории пластичности способствовали работы Рейса, Прагера и Койтера.

Теория течения упрочняющихся тел развивалась трудами Мелана, Прагера, Койтера, Хилла. Деформационная теория пластичности формировалась параллельно (А.А. Илюшин, Г. Генки, В.Д. Ключников). Наибольшего успеха теория идеальной пластичности получила при разработке теории предельного равновесия (А.А. Гвоздев, 1936). Сформированы три основные теоремы:

- первая теорема (статическая) – предельная нагрузка не ниже той, которая соответствует статически допустимому полю напряжений;
- вторая (кинематическая) теорема – предельная нагрузка не выше той, которая соответствует кинематически возможному механизму пластического деформирования;
- третья теорема (двойственная) – максимум нагрузки по первой теореме и минимум по второй совпадают и равны предельной нагрузке для конструкции.

Выявлены механизмы пластического разрушения (Г. Генки, 1948), позволяющие конструировать поля скоростей деформаций по характеристикам уравнений течения. Рассмотрено образование разрывов в полях перемещений (Р. Хилл, 1956; Д.Д. Ивлев, 1966).

Исследованию механизма разрушения пластин и оболочек посвящены работы А.Р. Ржаницына, В.З. Власова, С.П. Тимошенко.

Физической основой теории пластичности является способность материалов деформироваться без заметного увеличения нагрузок (пластическое течение). При этом напряжение в материале достигает определенного значения (предела текучести).

Деформации разделяют на упругие и пластические:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij_{el}} + \varepsilon_{ij_{pl}}.$$

Поверхность нагружения (предельная поверхность в теории пластичности) также разделяет составляющие полных деформаций. В теории идеальной пластичности поверхность нагружения считается фиксированной и не зависит от истории деформирования.

Уравнение предельной поверхности (условие пластичности) имеет вид

$$\Phi(\sigma) = 0.$$

Если  $\Phi(\sigma) < 0$ , то деформации, вызываемые малыми изменениями напряжений, упругие или  $\frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} < 0$ .

Если  $\frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} = 0$ , то  $\Phi(\sigma) = 0$ , а изменение напряжений происходит только по поверхности пластичности.

В идеальной пластичности не допускается состояние, когда  $\Phi(\sigma) > 0$ .

Для описания процесса образования пластических деформаций используют постулат Друкера (1951)

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^* \geq 0,$$

где  $\sigma_{ij}^*$  – действительное напряжение;  $\sigma_{ij}$  – любое возможное напряжение, для них выполняются условия пластичности  $\Phi(\sigma^*) \leq 0$ ,  $\Phi(\sigma) < 0$ ;  $\delta \varepsilon_{ij}^*$  – приращение пластической деформации, соответствующее напряжению  $\sigma^*$ .

Из постулата следует, что поверхность пластичности ограничивает выпуклую область  $\Omega$  и вектор приращения пластической деформации перпендикулярен к поверхности пластичности в точке  $\sigma^*$ .

Уравнение, связывающее скорости пластических деформаций с напряженным состоянием, называют ассоциированным законом пластического течения

$$\delta \varepsilon_{ij}^* = \lambda \frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \Phi(\sigma) = 0, \quad \lambda \geq 0,$$

где  $\lambda$  – параметр, пропорционально которому изменяется внешняя нагрузка.

Условия пластичности (Треска, Сен-Венана), по которым течение происходит при достижении максимальными касательными напряжениями определенного уровня ( $\sigma_\tau$ ), следующие:

$$\max_{i,j=1,2,3} (|\sigma_i|, |\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_T \leq 0,$$

где  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$  – главные напряжения;  $\sigma_T$  – предел текучести при одноосном напряженном состоянии; главные касательные напряжения  $\tau_k = 1/2(\sigma_i - \sigma_j), k \neq i, i \neq j, k \neq j$ .

По Мизесу условие пластичности имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_T^2 \leq 0.$$

Условия Треска–Сен-Венана описывают нерегулярную поверхность пластичности с ребрами, а Мизеса – регулярную – эллипсоид вращения.

Для краевой задачи имеем:

уравнение равновесия, заданное на объеме:

$$\sigma_{ij,j}^* + x_i^* = 0,$$

краевые условия в напряжениях

$$\sigma_{ij}^* \nu_j = p_i^*,$$

условия Коши

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*),$$

где  $\nu$  – вектор нормали к поверхности, ограничивающей тело;  $x^*, p^*$  – векторы скоростей изменения внешней нагрузки;  $\varepsilon_{ij}^*, u_{i,j}^*, u_{j,i}^*$  – скорости напряжений, деформаций и перемещений.

Предполагается скачкообразный переход из упругого в пластическое состояние (диаграмма Прандтля или жесткопластического тела).

Состояние пластического механизма системы характеризуется условиями (состояние предельного равновесия по А.А. Гвоздеву):

- система находится в равновесии;
- усилия не превосходят предельных величин и удовлетворяют условиям пластичности;
- система может деформироваться без изменения внутренних и внешних сил;
- момент в пластических шарнирах равен пластическому.

Деформируемая система рассматривается как некоторая кинематическая цепь с заданным числом степеней свободы. Начальная конфигурация системы – недеформированное состояние. Множества де-

формированных состояний порождает пространство этих состояний (метрическое пространство).

В аналитической механике деформации рассматривают как перемещения вдоль связей системы.

**Линии скольжения** – два ортогональных семейства линий, касательные в каждой точке которых совпадают по направлению с площадками скольжения (рис. 5.1). Последние в каждой точке ортогональны. На площадках скольжения касательные напряжения обладают экстремальными свойствами: они максимальны по сравнению с касательными напряжениями на соседних площадках, проходящих через ту же точку. Касательные к линиям скольжения образуют угол  $\theta + (\pi/4)$  и  $\theta + (3\pi/4)$  с осью  $Ox_1$ . Примером линий скольжения являются линии Чернова.

Дифференциальные уравнения семейств линий скольжения имеют вид [40]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\varphi.$$

Напряженное состояние в условиях плоской деформации можно рассматривать как наложение всестороннего равного растяжения с главными напряжениями  $\sigma_0$  на чистый сдвиг с касательным напряжением  $\tau_{\max}$ ; бесконечно малый элемент, выделенный линиями сколь-

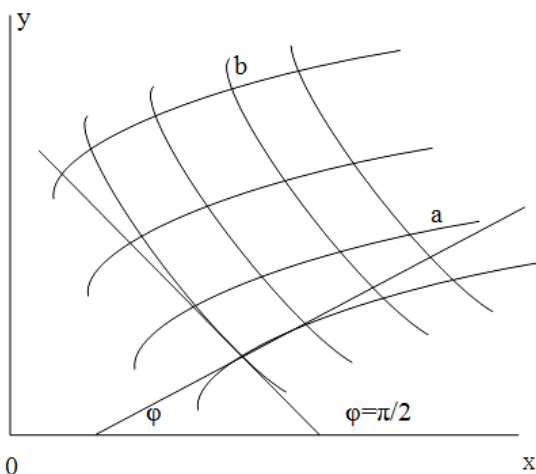


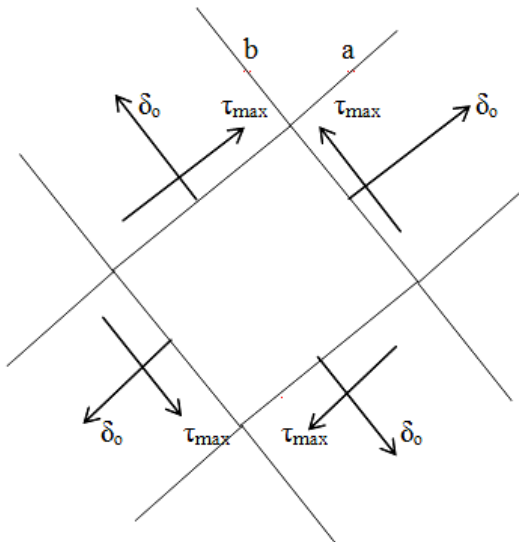
Рис. 5.1. Линии скольжения



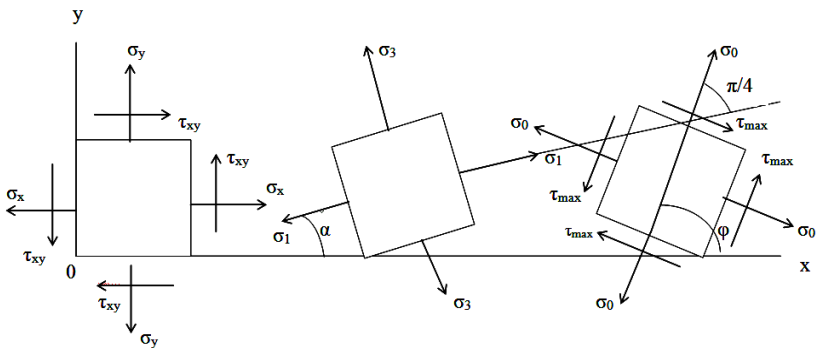
жения, испытывает одинаковое растяжение в направлении линий скольжения (рис. 5.2).

Свойства линий скольжения сформулированы в теоремах Г. Генки. Выделены центрированное и равномерное поле линий скольжения. Изменение полной скорости вдоль линий скольжения равно нулю (рис. 5.3).

В [36] рассмотрели линии разрыва в скоростях перемещений.



**Рис. 5.2. Напряженное состояние элемента, выделенного линиями скольжения**



**Рис. 5.3. Напряжения в различных площадках в условиях плоской деформации**

### 5.3. УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Формула условий текучести для изотропных тел имеет вид

$$f(\sigma_{ij}) = f(j_1, j_2, j_3) = K^2.$$

Для идеального пластического материала  $K^2 = \text{const}$ . Полагая, что среднее нормальное напряжение не влияет на условия текучести, последнее можно представить с помощью компонента дивергента напряжений

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - S\delta_{ij}; \quad f(\sigma'_{ij}) = f(j'_2, j'_3).$$

Здесь  $j'_1 = S_{ii} = 0$ . Функция  $f$  симметрична относительно начальной точки.

По Губерту М. и Мизесу Р. условием текучести является постоянство интенсивности касательного напряжения

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} = \\ = \sigma_s / \sqrt{3} = \sigma_{12},$$

где  $\sigma_{12}$  – касательная напряжения в случае чистого сдвига.

На основе результатов экспериментов Треска предложено применять во всех случаях максимальное касательное напряжение равным  $\sigma_s / 2$ , т.е. наибольшему касательному напряжению в случае простого растяжения. Математическая формулировка этого предложения дана Сен-Венаном в виде

$$2|\sigma_{12}| = |\sigma_{23} - \sigma_{13}| \leq \sigma_s;$$

$$2|\sigma_{23}| = |\sigma_{31} - \sigma_{12}| \leq \sigma_s;$$

$$2|\sigma_{31}| = |\sigma_{12} - \sigma_{23}| \leq \sigma_s.$$

Пластическая деформация влечет за собой некоторое упрочнение, и предел упругости повышается в направлении деформирования.

При сложном напряженном состоянии вводят в рассмотрение поверхность нагружения. Она определяет области упругого и пластического деформирования. Форма и положение поверхности нагружения зависит от текущего напряженного состояния и от всей предыдущей истории нагружения.

Условие изотропного упрочнения выражается через квадратичный инвариант девиатора напряжений

$$T = f(q),$$

где  $T$  – интенсивность касательного напряжения.

При  $f(q) = \sigma_{12}$  получают условие Губерта–Мизеса. Если  $T = g(\Gamma)F$ , где  $g(\Gamma)$  – функция, характеризующая данный материал (модуль пластичности);  $\Gamma$  – интенсивность деформаций сдвига, то за меру упрочнения принимают работу пластической деформации

$$A_P = \int \sigma_{ij} de_{ij}^{(P)},$$

где  $e_{ij}^{(P)}$  – компоненты пластической деформации.

#### 5.4. КРИТЕРИИ НАЧАЛА ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Полагают, что до некоторого уровня напряженного состояния имеют место лишь упругие деформации. На этом этапе напряженное состояние не зависит от пути нагружения. Граница между упругим состоянием и следующим состоянием пластического деформирования в окрестности исследуемой точки есть функция напряженного состояния

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0,$$

где  $f$  – поверхность текучести.

Для изотропного тела

$$f[(I_1(T_\sigma), (I_2(T_\sigma), (I_3(T_\sigma))] = 0.$$

Полагая, что  $\sigma_2$  не влияет на свойства пластичности материала,

$$f[(I_2(T_\sigma), (I_3(T_\sigma))] = 0.$$

Это уравнение цилиндрической поверхности, перпендикулярной плоскости

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 3\sigma_0.$$

Плоскость, равнонаклонная к осям 01, 02, 03, называется девиаторной. Конец вектора

$$s = s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3,$$

где  $s_1 = \sigma_1 - \sigma_0$ ,  $s_2 = \sigma_2 - \sigma_0$ ,  $s_3 = \sigma_3 - \sigma_0$  – главные составляющие девиатора тензора напряжений лежат в девиаторной плоскости.

Состояние пластического деформирования достигается, если изображающая точка (конец вектора  $\sigma = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3$ ) выходит на цилиндрическую поверхность (поверхность текучести), заключенную между описанной и вписанной призмами.

Уравнения граней призм соответственно

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_T, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_T, \quad |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_T;$$

$$|\sigma_1 - \sigma_0| = \frac{2}{3} \sigma_T, \quad |\sigma_2 - \sigma_0| = \frac{2}{3} \sigma_T, \quad |\sigma_3 - \sigma_0| = \frac{2}{3} \sigma_T.$$

Уравнение окружности цилиндра (след в девятиорной плоскости)

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2.$$

Так как изображающая точка может находиться либо на грани шестигранной призмы, либо на ребре, то условие пластичности можно записать в виде

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \sigma_T,$$

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_0|, |\sigma_2 - \sigma_0|, |\sigma_3 - \sigma_0|) = \frac{2}{3} \sigma_T.$$

Учитывая, что главные касательные напряжения выражаются через главные нормальные напряжения

$$\tau_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2, \quad \tau_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2, \quad \tau_{31} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2,$$

то выше записанные критерии пластичности называют соответственно критерием наибольшего касательного напряжения и критерием интенсивности касательных напряжений

$$\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 = (1/2)\sigma_T^2.$$

Для плоского напряженного состояния (например,  $\sigma_3 = 0$ ) условие наибольшего касательного напряжения

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2|, |\sigma_1|) = \sigma_T.$$

Этому условию соответствует шестигранник. Условие наибольшего приведенного напряжения

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2/2|, |\sigma_2 - \sigma_1/2|, |(\sigma_1 - \sigma_2)/2|) = \sigma_T.$$

**Жесткопластическая модель.** Объем материала разделяют на две области – пластическую и жесткую. На границе областей материал скачкообразно переходит в пластическое состояние. Границами раздела пластических и жестких зон являются линии скольжения или их огибающие.

В практике наблюдают, а в теоретических исследованиях определяют линии разрыва напряжений и скоростей перемещений.

**Пластическая деформация.** Приложенная внешняя нагрузка вызывает изменение размеров и формы тела. Различают деформации линейные, угловые, поверхностные и объемные. Их можно разделить на абсолютные, относительные и логарифмические (натуральный логарифм отношения измененного в результате деформирования размера к первоначальному размеру элемента тела или всего тела до начала деформирования).

У металлов процесс пластической деформации в основном осуществляется путем скольжения. Скольжение (для металла) – перемещение одной части кристалла относительно другой, при котором кристаллическое строение обеих частей остается неизменным. При сложном напряженном состоянии пластическая деформация приводит к изменению всех упругих характеристик материала. Этот эффект называют деформационной анизотропией. Первоначально изотропный материал становится анизотропным. Сдвигающее напряжение, необходимое для начала пластической деформации скольжения, для данного металла, при данной температуре и скорости деформации есть величина постоянная, не зависящая от ориентировки плоскостей скольжения относительно действующих на тело сил [25, 77].

Остаточное формоизменение поликристаллического тела складывается из пластической деформации зерен (изменения их формы и размеров) и их относительного смещения. Плоскости скольжения в отдельных зернах произвольно ориентированы. При нагружении пластическая деформация в первую очередь возникает в зернах с благоприятной ориентировкой плоскостей скольжения. При линейном растяжении–сжатии пластические деформации сначала возникают в зернах, у которых плоскости скольжения расположены под углом  $45^\circ$  к направлению действия силы.

Внешним проявлением сдвигов являются линии скольжения на поверхности поликристаллического тела, впервые обнаруженные Людерсом (1854) и Д.К. Черновым (1885). По этим линиям можно судить о направлении максимальных сдвигающих напряжений. В [40, 51] даны определения предела текучести как нормального напряжения при линейном сжатии или растяжении, соответствующего включению в пластическую деформацию большинства зерен металла.

Неодновременное включение в пластическую деформацию зерен поликристаллического тела приводит к следующим явлениям:

- нарушению линейной зависимости деформаций от напряжения при нагружении выше предела пропорциональности;
- упругому последствию: образец под постоянной нагрузкой, не превышающий предела текучести, с течением времени получает дополнительную деформацию, а после снятия нагрузки – остаточную деформацию, со временем уменьшающуюся или исчезающую;
- релаксации напряжений – с течением времени убывает усилие (напряжение), необходимое для поддержания постоянной деформации образца;
- упругому гистерезису, заключающемуся в том, что линия нагружения не совпадает с линией разгрузки, образуя кривую гистерезиса и характеризующую работу деформации;
- эффекту Баушингера: образец предварительно деформированный за предел текучести уменьшает сопротивление деформации при последующей деформации обратного знака;
- наличие площадки текучести.

**Пластическая (холодная) деформация** приводит к значительному изменению механических, физических и химических свойств металла. С увеличением степени деформации возрастают пределы упругости, пропорциональности, текучести и прочности. Увеличивается твердость металла. Одновременно уменьшаются показатели пластичности (относительные удлинения и сужения, ударная вязкость).

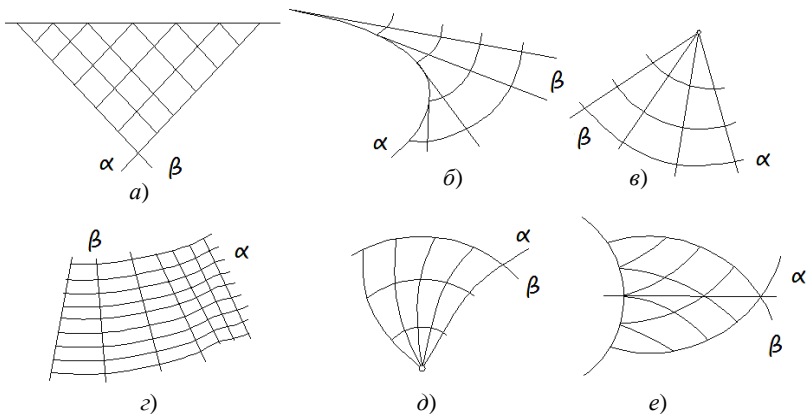
**Однородная деформация** – перемещения являются линейными функциями координат, а величины относительных деформаций постоянны. Плоскости и прямые линии остаются плоскостями и прямыми после деформации. Параллельные прямые и параллельные плоскости остаются параллельными после деформации. Сфера, мысленно выделенная внутри тела, превращается в эллипсоид. Два геометрически подобных и подобно расположенных элемента тела остаются геометрически подобными.

**Линии скольжения** – траектории главных касательных напряжений. Это ортогональная сетка (поле) из двух криволинейных семейств линий. Касательные к каждой линии скольжения в любой точке совпадают с направлением главных касательных напряжений.

Основные свойства линий скольжения (рис. 5.4):

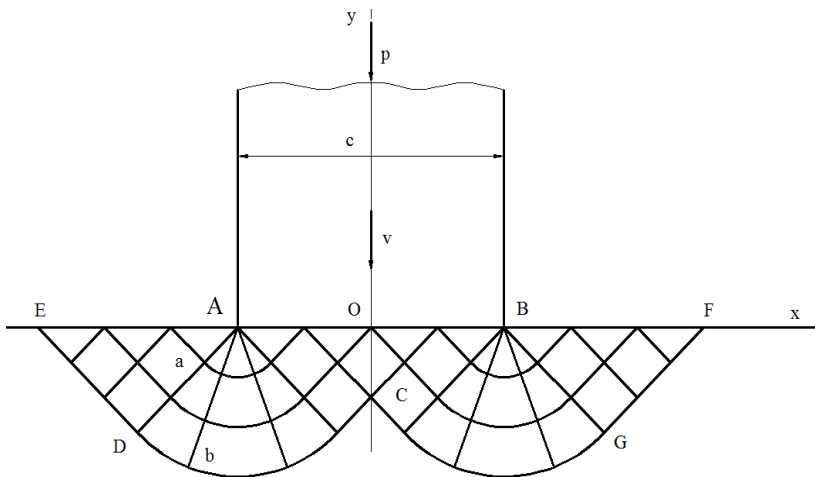
- они непрерывны;
- образуют два семейства;
- взаимно ортогональны;
- пересекают траектории главных напряжений под углом  $45^\circ$ ;

– угол между касательными к двум линиям скольжения одного семейства в точках пересечения их линиями другого семейства остается постоянным.



**Рис. 5.4. Виды полей линий скольжения :**

*a* – ортогональная сетка прямых; *b* – одно поле состоит из прямых линий, другое из кривых (простое поле); *в* – центрированное поле, образуемое пучком прямых и концентрическими окружностями; *г* – простое; *д* – взаимно ортогональные кривые; *е* – ортогональная сетка логарифмических спиралей



**Рис. 5.5. Линии скольжения в жесткопластическом теле, ограниченном плоскостью, при вдавливании в него абсолютно жесткого штампа с плоским основанием (решение Прандтля)**

На рисунке 5.4 показано поле линий скольжения при внедрении плоского пуансона в пластическое полупространство при отсутствии контактного трения.

По данным Р. Хилла возможна и другая схема линий скольжения (рис. 5.5).

**Жесткопластическая модель.** Объем металла разделяют на две области – пластическую и жесткую. На границе областей материал скачкообразно переходит в пластическое состояние. Границами раздела пластических и жестких зон являются линии скольжения или их огибающие.

В практике наблюдают, а в теоретических исследованиях определяют линии разрыва напряжений и скоростей перемещений.

## 5.5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВ

Приведем идеи Ю.К. Зарецкого [25], исходя из теории пластического течения упрочняющихся сред.

Приращения полных деформаций

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p,$$

где  $d\epsilon_{ij}^e = c_{ij,kl} d\sigma_{kl}$ ,  $c_{ij,kl}$  – матрица упругих характеристик, определяемых при разгрузке;  $d\epsilon_{ij}^p = \sum_r d\lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}}$ ,  $d\lambda_r$  – пластические множители;  $d\epsilon_{ij}^p$  – определяется суммированием приращения деформаций по всем регулярным участкам поверхности нагружения  $f_r = 0$ .

В пределах области, ограниченной поверхностью нагружения, грунт ведет себя упруго, а за ее пределами развиваются необратимые деформации сдвига и объема, характеризуемые инвариантами  $e_i^p$  и  $\epsilon_v^p$ .

Функция нагружения имеет вид

$$f_r = f_r(\sigma_i, \sigma, \omega_i, \omega_v, \kappa_z),$$

где  $\omega_i$  и  $\omega_v$  – параметры упрочнения,

$$\frac{\omega_i}{e_i^*} = \frac{1}{e_i^*} \int_L |de_i^p|; \quad \frac{\omega_v}{\epsilon_{vd}^*} = \frac{1}{\epsilon_{vd}^*} \int_L d\epsilon_v^p,$$

$e_i^*$  – предельные деформации сдвига;  $\epsilon_{vd}^*$  – объемная деформация, соответствующая максимальному уплотнению грунта.



Для несвязных грунтов предельные деформации зависят от обжатия и возрастают с увеличением угла внутреннего трения. Для связных грунтов предельные деформации (при  $j_p > 0,2$ ) практически не зависят от обжатия.

След поверхности нагружения на плоскости инвариантов тензора напряжений  $(\sigma_i - \sigma)$  состоит из четырех участков, имеет ряд сингулярных точек, в которых касательная терпит разрыв и зависит от параметров упрочнения.

Функция упрочнения  $p(\omega_i, \omega_v), q(\omega_i, \omega_v), q_d(\omega_i, \omega_v), \psi(\omega_i)$ . Первая из них является описанием диаграммы объемного деформирования, вторая – диаграммы сдвига, третья – положительной диаграммой (до уплотнения).

Функция

$$\psi(\omega_i) = \frac{\alpha \omega_i}{\omega_i^* - \omega_i},$$

где  $\alpha$  – безразмерный параметр.

При нагружении по траектории гидростатического давления выделяется область, внутри которой напряжения сдвига не приведут к накоплению пластических деформаций (характеризует структурную прочность грунта в условиях сложного напряженного состояния).

**Вязкопластичность глинистых грунтов.** В вышеприведенной модели вводится мгновенная  $f_r^0$  и стабилизированная  $f_r$  поверхности нагружения, скорости вязкопластических деформаций, режим нагружения

$$f_r^0(\sigma_{ij}, \omega_i, \omega_v, \varepsilon_{ij}^{vp}) = 0.$$

## 5.6. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Реология – наука, устанавливающая общие законы образования и развития во времени деформации любого вещества от различных причин в различных термодинамических и физико-химических условиях.

Для прогноза деформации неустановившейся затухающей ползучести применяют линейную (в отношении напряжений) теорию наследственной ползучести Больцмана–Вольтерра.

Уравнение состояния при однократном нагружении имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + k(t - t_0) \sigma(t_0) \Delta t_0,$$

где  $\varepsilon(t)$  – изменение относительной деформации во времени;  $\sigma(t) / E$  – мгновенная деформация в момент времени  $t$  при модуле деформации  $E$ ;  $k(t - t_0) \sigma(t_0) \Delta t_0$  – ядро ползучести.

При непрерывном нагружении

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} \int_0^t k(t-t_0) \sigma(t_0) dt_0.$$

Ядро ползучести – скорость ползучести при постоянном напряжении, отнесенная к единице действующего давления.

Для глинистых грунтов

$$k(t-t_0) = \delta e^{-\delta'(t-t_0)},$$

где  $\delta$  и  $\delta'$  – параметры ползучести, определяемые опытным путем.

Уравнение Бингама–Шведова имеет вид

$$\frac{1}{\eta} \dot{\varepsilon}_{yz} = \tau - \tau_0,$$

откуда 
$$\tau = \tau_0 + \nu \frac{d\varepsilon_{yz}}{dt},$$

где  $\nu = 1/\eta$  – коэффициент вязкости;  $\tau_0$  – начальное ( $\varepsilon_{yz} = 0$ ) сдвиговое напряжение.

Основными элементами механических реологических моделей являются упругий (пружина) и вязкий (цилиндр, заполненный жидкостью с расположенным внутри поршнем).

При последовательном соединении упругого и вязкого элементов получают уравнение Максвелла

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta},$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости.

В случае параллельного соединения упругого и вязкого элементы получают модель тела Фойгта

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right].$$

Более сложная модель представляет собой систему из упругого элемента, последовательно соединенного с двумя параллельно соединенными упругим и вязким элементом (модель тела Кельвина).

$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\sigma = E \left( \frac{d\varepsilon}{dt} + \beta\varepsilon \right),$$

где  $\alpha = \frac{E_1 + E_2}{\eta}$ ;  $\beta = \frac{E_2}{\eta}$ ;  $E = E_1$ .

Если при нагружении тело получило упругую деформацию  $\varepsilon = \sigma/E$ , а затем в течение времени  $t_1$  происходит процесс ползучести, а далее напряжение мгновенно уменьшается до нуля, то упругая составляющая деформации уменьшается на  $\varepsilon = \sigma/E$ , а далее происходит процесс обратной ползучести (обратное последствие). При  $t \rightarrow \infty$   $\varepsilon \rightarrow 0$ , т.е. вся деформация ползучести является обратимой и последствием в теле Кельвина упругое.

Рассмотрим предложения В.М. Бондаренко (2004). Для бетона как стареющего материала обработка экспериментальных данных осуществлялась в рамках инварианта С.В. Александровского–В.Д. Харбала:

$$\frac{1}{\frac{E_0^M(t_0)}{c_0^*(t, t_0)} - \frac{1}{E_0^M(t)}} = 1,$$

где  $E_0^M$  – модуль мгновенной деформации;  $c_0$  – мера простой ползучести без учета старения бетона;  $c_0^*$  – мера простой ползучести стареющего бетона;  $t_0, t$  – начало нагружения, время.

Мера простой ползучести – относительная деформация ползучести бетона при  $\sigma_b \leq 0,3\sigma_{br}$ , накопившаяся к моменту времени  $t$  при загрузении образцов в  $t_0 < t$  и приходящаяся на 1 МПа действующего постоянного напряжения  $c_b(t, t_0) = \varepsilon_{cr}(t, t_0) / \sigma_b$ .

Она равна тангенсу угла наклона к оси напряжений  $\sigma$  секущей хорды, проходящей через начало координат и рассматриваемую точку.

Так как  $\varepsilon_{cr} = \lambda \varepsilon_b$ ,  $\sigma_b = E'_b \varepsilon_b = \nu E_b \varepsilon_b$ , то  $c_b = \varphi / E_b$ , где  $\varphi = \lambda / \nu = (1 - \nu) / \nu = \lambda / (1 - \lambda)$  – характеристика нелинейности деформирования бетона.

В современных теориях силового сопротивления бетона в качестве эталонного режима принимают неизменные во времени напряжения. Деформации ползучести, соответствующие эталонному режиму, называются деформациями простой ползучести.

Реологическое уравнение силового сопротивления бетона имеет вид

$$E(t, t_0) = \frac{s_M[\sigma(t_0)]}{E_0^m(t)} + s_M[\sigma(t)]\Omega(t_0)c_0^*(t, \tau) - \int_{t_0}^t s_0[\sigma(\tau)]\Omega(t, \tau) dt,$$

где  $E$  – полная относительная деформация;  $\sigma$  – напряжение;  $s_M$  – функция напряжений для деформации ползучести;  $t_0, t, \tau$  – время начала нагружения, текущее время, время окончания отсчета нагружения;

$E_0^m(t)$  – начальный модуль мгновенных деформаций;  $c_0^*(t, \tau)$  – начальная мера деформаций простой ползучести;  $\Omega(t_0)$  – функция старения для ползучести, введенная с целью разделения временных влияний возраста и нагружения.

При  $\sigma = \text{const}$

$$E(t, t_0) = \frac{s_M[\sigma(t_0)]}{s_0^m(t)} + s_0(t_0) \Omega(t_0) c_0^*(t, t_0).$$

В формулах первый член – относительные мгновенные деформации; второй член – относительная кратковременная ползучесть (быстронатекающая ползучесть); третий – относительные режимные деформации ползучести.

## 5.7. МОДЕЛИ ОСНОВАНИЯ БУРОНАБИВНОЙ СВАИ

Математическая модель грунта принята [27] на основе теории пластического течения. Деформации грунта и их приращения складываются из упругой и пластической части. Приращения упругих деформаций связаны с приращениями напряжений законом Гука. Приращения пластических деформаций определяются на основании обобщенного ассоциированного закона течения. Функции нагружения приняты в виде соотношений

$$f_z = \sigma_i + K_z(\omega_i, \omega_v) \sigma - C_z(\omega_i, \omega_v),$$

где  $K_z$  и  $C_z$  – функции упрочнения для каждого участка поверхности нагружения.

Решение задачи выполнено методом конечных элементов при совместном рассмотрении вышеприведенного уравнения и матричного уравнения

$$[K]\{u\} = \{F_\gamma\} + \{F_q\} + \{F_p\},$$

где  $K = \sum_s 2\pi \int [B]^T [D] [B] R ds$  – глобальная матрица жесткости;

$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_R \\ U_z \end{Bmatrix}$  – вектор узловых перемещений;  $\{F_\gamma\}$  и  $\{F_q\}$  – векторы массовых внешних сил;  $\{F_p\}$  – вектор сил, определяемый соотношением

$$\{F_p\} = \sum_s 2\pi \int [B]^T [D] [\epsilon^p] R ds,$$

где  $\{B\}$  – матрица, характеризующая геометрическую форму элемента;  $[D]$  – матрица упругих характеристик;  $R$  – расстояние от оси симметрии;  $\{\epsilon^p\}$  – вектор пластических деформаций.

Расчетная область аппроксимировалась осесимметричными треугольными элементами второго порядка.

В области, занятой сваей, вводится дополнительная фиктивная сила

$$\{F_\phi\} = \sum_s 2\pi \int [B]^T [D_{св}] [B] \{u\}^0 R ds,$$

где  $[D_{св}]$  – матрица упругих характеристик ствола сваи.

В конечном виде матричное уравнение

$$[K]\{u\} = \{F_\gamma\} + \{F_q\} + \{F_p\} + \{F_\phi\}.$$

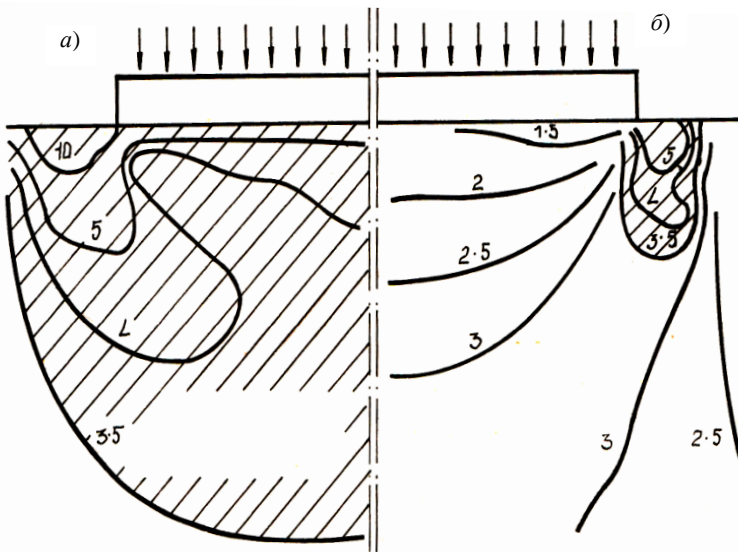


Рис. 5.6. Изолинии отношений главных напряжений при  $\nu = 0,2$ :

$a - 0,45$ ;  $б - P = 100$  кПа,  $K_0 = 0,4$ ,  $\varphi = 34^\circ$

По расчетам [15] зоны предельного равновесия образуются вдоль боковой поверхности сваи и развиваются с ростом нагрузки. Затем происходит развитие предельных зон под подошвой и вдоль боковой поверхности и потеря несущей способности.

Обстоятельную информацию о методе конечных элементов можно получить из работ О. Зенкевича (1975), Ж. Деклу (1976), Дж. Одена (1976), Ф. Сьярля (1980).

На рисунках 5.6 и 5.7 приведены результаты решения задачи о действии на водонасыщенный несвязный грунт нагрузки от жесткого шероховатого ленточного фундамента шириной 20 м (М. Хазма, П. Гронси, 1979).

Использована билинейная зависимость между напряжениями и деформациями в виде

$$E_i = Kp_0(\sigma'_3 / p_0)^n,$$

где  $E_i$  – начальный тангенциальный модуль;  $p_0$  – атмосферное давление;  $\sigma'_3$  – главное эффективное напряжение;  $K$  и  $n$  – безразмерные параметры, зависящие от свойств грунта.

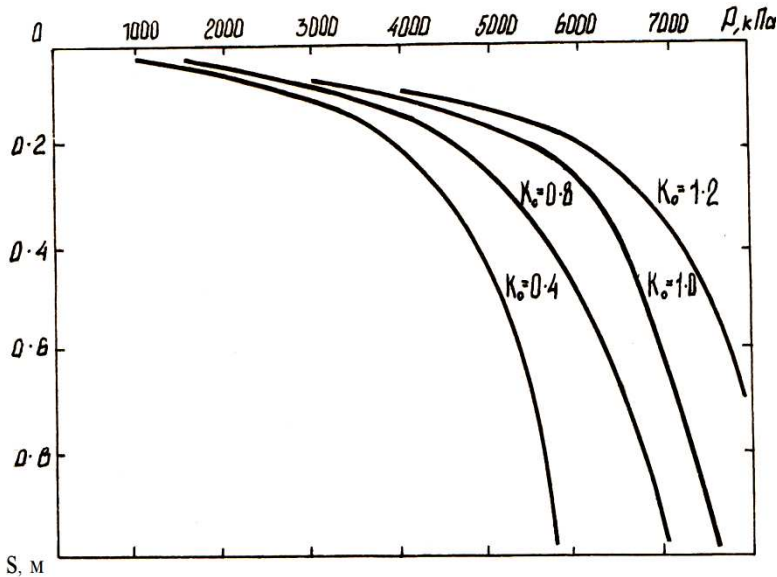


Рис. 5.7. Зависимость осадки фундамента шириной 20 м от нагрузки при разных отношениях начальных величин главных напряжений  $\varphi = 40^\circ$ ,  $p = 10^6$  кПа,  $\nu = 0,49$

## II. МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ

Наибольший вклад в механику разрушения внести Ш. Кулон (1773), В.Д.М. Ренкин (1857), О. Мор (1882), А. Гриффитс (1920), Я.Д. Фридман (1941), Е.О. Орован (1950), А. Надаи (1954), Дж. Ирвин (1960), Д. Друкер (1964), В.В. Новожилов (1965), С.Н. Журков (1969), Л.И. Седов (1976), Г.П. Черепанов (1983), Ю.В. Зайцев (1991), Д.А. Коллинз (1994).

### Глава 6. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ И ГРУНТОВ ОСНОВАНИЙ. ВЯЗКОСТЬ

#### 6.1. ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

**Ползучесть материалов (металлов)** – изменение деформаций во времени при постоянном нагружении. В общем случае ползучести изменение деформаций сопровождается изменениям напряжений. Устанавливается зависимость между деформациями, напряжениями, скоростями их изменения и временем. Предложены три технические теории ползучести: старения, течения и упрочнения [33, 40, 48, 59, 64].

Принимают, что компоненты скоростей деформаций ползучести определяются формулой

$$\xi_{ij}^c = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

где  $f$  – потенциал ползучести.

Интенсивность скоростей деформаций

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2}(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \xi_{ij} \xi_{ij}.$$

Из совместного решения последних двух уравнений получают

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\xi_i^c}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}}.$$

Уравнение  $f = 0$  называют гиперповерхностью ползучести.

Полагают материал изотропным и изменение объема при ползучести не происходит ( $\epsilon_{ii}^c = 0$ ). Зависимости компонентов скоростей

деформаций ползучести от компонентов девиатора напряжений имеют вид

$$\xi_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\xi_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0).$$

**Теория старения.** Используют гипотезу о существовании потенциала деформаций ползучести

$$\xi_{ij}^c = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}.$$

В функцию  $f$  входит второй инвариант девиатора напряжений и параметр Удквиста. Функция  $f$  зависит от меры скоростей деформаций ползучести, т.е. интенсивности скоростей деформаций ползучести.

Потенциал ползучести  $f_1$  зависит от второго инварианта девиатора напряжений, интенсивности деформаций и времени.

Уравнения поверхности потенциала ползучести

$$f_1 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - [\phi_1(\epsilon_1, t)]^2 = 0.$$

Учитывая, что

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}},$$

где  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$  – компоненты девиатора напряжений, имеют

$$\sigma_i = \phi_1(\epsilon_i, t).$$

Для одноосного растяжения  $\sigma_i = \sigma$  и  $\epsilon_i = \epsilon$

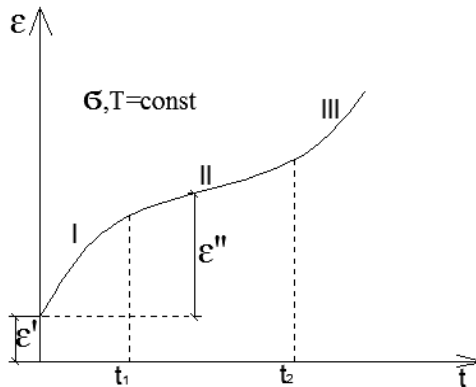
$$\sigma = \phi_1(\epsilon, t).$$

При заданной температуре между деформацией, напряжением и временем существует определенная зависимость в координатах  $\epsilon$ ,  $\sigma$ ,  $t$ . Рассекая поверхность плоскостями, перпендикулярными оси  $\sigma$ , получают кривые ползучести (рис. 6.1, 6.2, 6.3).

Важнейшей характеристикой является предел ползучести – напряжение, при котором через определенный промежуток времени деформация ползучести при данной температуре получит заранее заданную величину.

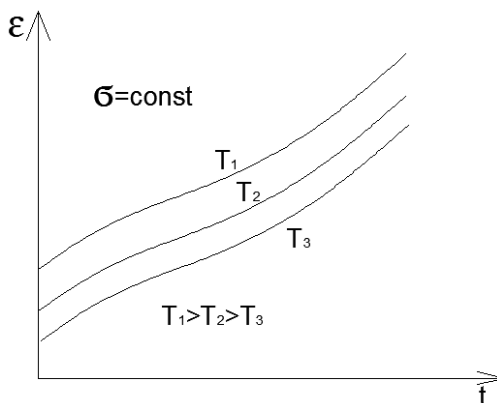


Пунктир – предел ползучести (напряжение, при котором через определенный промежуток времени деформация ползучести при данной температуре получит заранее заданную величину, например 1% за 100 000 часов при 500° с;  $\sigma_1 / 100\ 000 \dots$ ).



**Рис. 6.1. Проекция кривой ползучести на плоскость  $\epsilon t$ :**

$\epsilon'$  – мгновенная деформация (упругая или упруго-пластическая);  
 $\epsilon''$  – деформация ползучести; I – неустановившаяся ползучесть;  
 II – установившаяся ползучесть; III – прогрессирующая ползучесть



**Рис. 6.2. Кривые ползучести при разных уровнях температуры**

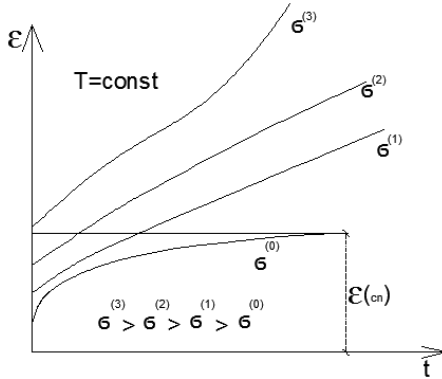


Рис. 6.3. Кривые ползучести при разных уровнях напряжения

**Теория течения.** Потенциал ползучести  $f$  зависит от второго инварианта девиатора напряжений, интенсивности скоростей деформаций ползучести и времени

$$f = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - [\phi_2(\xi_j^c, t)]^2 = 0.$$

При  $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$

$$\sigma_i = \phi_2\left(\frac{\xi_i^c}{\sigma_i}, t\right).$$

Для одноосного растяжения  $\sigma_i = \sigma$  и  $\epsilon_i = \epsilon$

$$\sigma = \phi_3\left(\xi^c, t\right).$$

Наиболее распространенной зависимостью скорости деформаций ползучести от напряжения и времени является степенная

$$\xi^c = \sigma^n B,$$

где  $n$  – коэффициент для определенного материала, зависящий от температуры;  $B$  – для определенного материала функция времени и температуры.

Для неоднородного напряженного состояния

$$\sigma_i = \left(\frac{\xi_i^c}{B}\right)^{1/n} \quad \text{или} \quad \xi_i^c = \sigma_i^n B.$$

**Теория упрочнения.** Потенциал скоростей деформаций ползучести зависит от второго инварианта девиатора напряжений, интенсивности деформаций ползучести и параметра Удквиста

$$f = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - \left[ \phi_3 \left( \xi_j^c, \int d\varepsilon_i^c \right) \right]^2 = 0;$$

$$\sigma_i = \phi_3 \left( \xi_j^c, \int d\varepsilon_i^c \right).$$

При  $\sigma_i = \sigma$  (одноосное растяжение)  $\varepsilon_i^c = \varepsilon^c$ ;  $\xi_i^c = \xi^c$ ;

$$\sigma = \phi_3 \left( \xi^c, t \right).$$

По теории упрочнения скорость деформации ползучести является функцией напряжения и деформации ползучести, от времени не зависит.

**Релаксация** – изменение во времени напряжений при постоянной деформации (рис. 6.4). Полная деформация  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c = \text{const}$ , т.е. составляющие полной деформации во времени перераспределяются. Деформация ползучести растет, а упругая часть уменьшается.

После снятия нагрузки происходит процесс упругого и пластического последействия (рис. 6.5).

Полная деформация

$$\varepsilon = \varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^c.$$

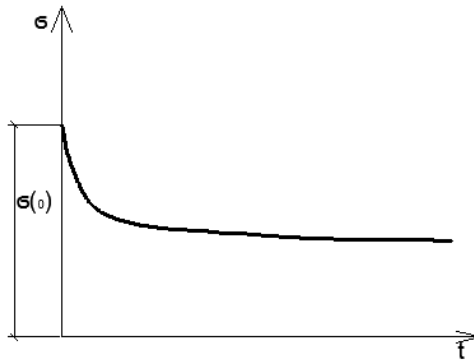


Рис. 6.4. Кривая релаксации

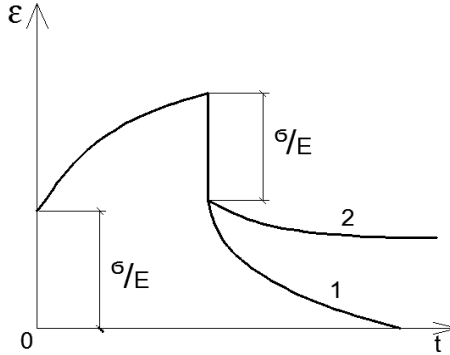


Рис. 6.5. Кривые упругого (1) и пластического (2) последействия

Дифференцируя это уравнение по времени, получаем:

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{d\epsilon^c}{dt} = -\xi^c.$$

За счет увеличения деформации ползучести напряжение будет непрерывно уменьшаться.

**Неустановившаяся и установившаяся ползучесть.** Первая протекает при изменяющихся во времени напряжениях; вторая – при постоянных. Установившаяся ползучесть существует в случае статически определенных задач при постоянных во времени внешних силах.

В статически неопределимых задачах при определенном напряжении дополнительно рассматривают деформации, изменяющиеся во времени за счет ползучести материала.

Исследования показали, что при неустановившейся ползучести напряжения непрерывно изменяются во времени, приближаясь к величинам, полученным в решении задачи установившейся ползучести.

Для затухающей ползучести [83]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\epsilon(t)] = \text{const}; \quad v = \frac{d\epsilon(t)}{dt} < 0;$$

установившейся ползучести

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\epsilon(t)] = \infty; \quad v = \frac{d\epsilon(t)}{dt} = \text{const};$$

прогрессирующей ползучести

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\epsilon}(t)] = \infty; \quad v = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \rightarrow \infty.$$

Ядро ползучести – скорость ползучести по действием единичного напряжения  $\sigma$ . Наиболее распространенными являются экспоненциальные ядра

$$K(t - \tau) = \delta_{\text{exp}}[-\delta_1(t - \tau)] \quad \text{и} \quad K(\tau) = \delta_{\text{exp}}[-\delta_1\tau].$$

Они описывают затухающую ползучесть.

**Эффект Баушингера** – после того, как материал испытал воздействие осевого усилия одного знака (например, растяжения) в области пластических деформаций, сопротивляемость этого материала пластической деформации при воздействии сил другого знака понижается (рис. 6.6).

**Выносливость материала.** Вибрационной прочностью называется способность материала противостоять переменной нагрузке без наступления усталостного разрушения. Несущая способность материала снижается с увеличением числа циклов (рис. 6.7), уменьшением коэффициента асимметрии цикла. Особую опасность представляет разнознаковое нагружение.

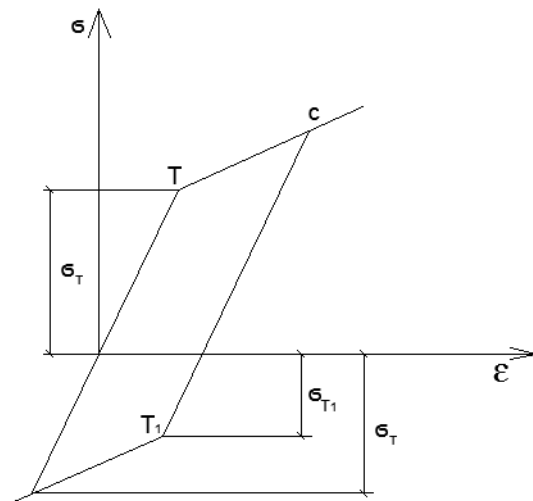
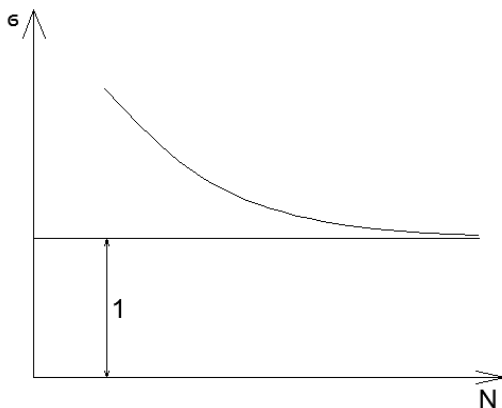


Рис. 6.6. Схема к пояснению эффекта Баушингера



**Рис. 6.7.** Кривая испытаний на выносливость (кривая А. Веллера, 1858):  
1 – предел выносливости

## 6.2. ВЯЗКОСТЬ

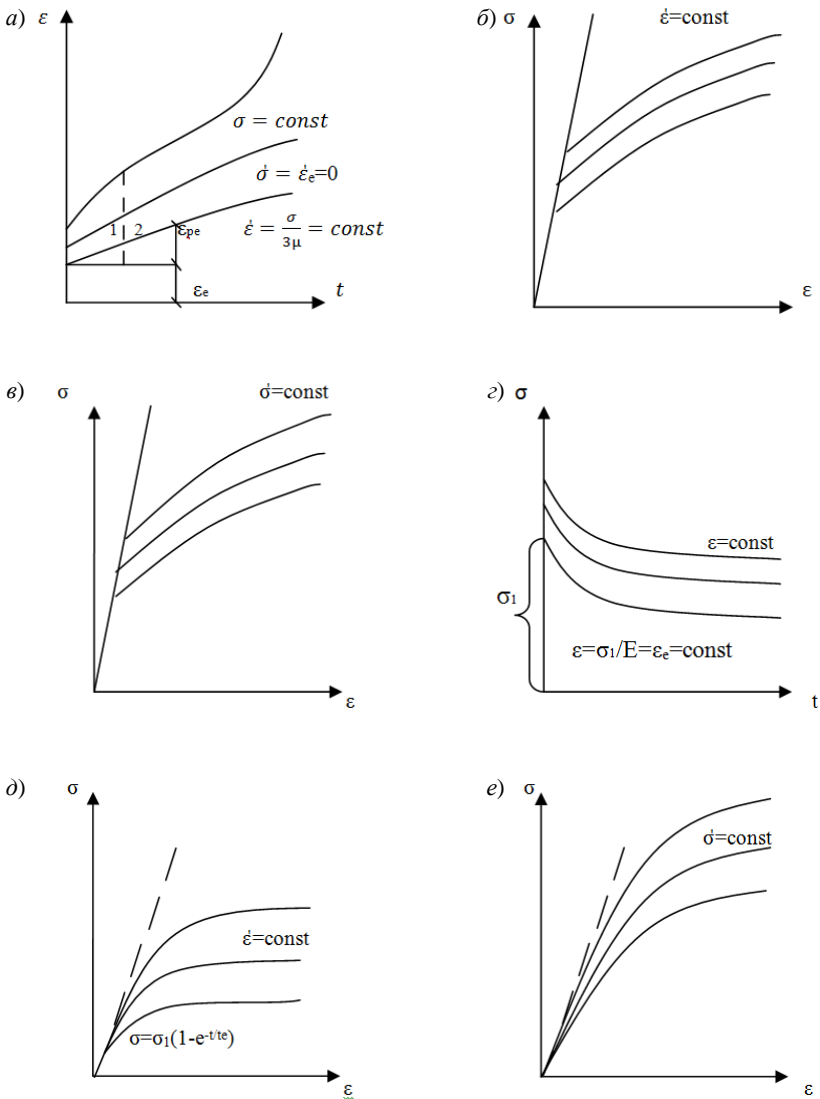
Приведем некоторые данные из [64, 72]. В упругом теле компоненты малых деформаций являются линейными функциями компонент напряжений. Материал вязкий, если скорость необратимых перемещений точек относительно друг друга возрастает с ростом напряжений, вызывающих деформацию вещества. В случае идеально вязкого вещества компоненты необратимых деформаций возрастают пропорционально соответствующим компонентам напряжений. Скорость и движение считаются малыми. Инерционными членами, содержащими ускорение элементов материала, можно пренебречь. Внешние и внутренние силы находятся в статическом равновесии. Часто принимают материалы в упругой области сжимаемые, а в пластической – несжимаемые ( $\mu = 0,5$ ). Вязкость твердых веществ становится заметной при повышенных температурах (прямой стеклянный стержень, нагруженный грузом при температуре, приближающейся к температуре размягчения стекла). Скорость удлинения пропорциональна величине груза. Характерные диаграммы деформирования приведены на рис. 6.8.

Пусть  $\varepsilon_e$  – упругая деформация,  $\varepsilon_{pl}$  – остаточная деформация удлинения, так что

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{pl},$$

$\gamma_e$  и  $\gamma_{pl}$  – упругий и остаточный относительные сдвиги в наклонном направлении

$$\gamma = \gamma_l + \gamma_{pl} = \tau / G + \gamma_{pl},$$



**Рис. 6.8. Типичные кривые испытаний на растяжении:**

- a* – ползучесть; *б* – при постоянной скорости изменений деформаций;
- в* – при постоянной скорости изменения напряжений; *г* – релаксация напряжений;
- д* – при постоянной скорости деформации  $\dot{\varepsilon}' = const$ ;
- е* – при постоянной скорости изменения напряжений  $\dot{\sigma}' = const$

для упругого материала

$$\sigma = E\varepsilon_e,$$

для идеально вязкого необратимого несжимаемого материала

$$\sigma = 3\mu \frac{d\varepsilon_{pl}}{dt} = 3\mu\varepsilon'_{pl}.$$

При простом растяжении вязко-упругого тела

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon'_{pl}, \quad \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3 = -\varepsilon'_{pl}/2,$$

$$\gamma'_{\max} = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 = (3/2)\varepsilon'_{pl},$$

$$\gamma'_{\max} = \sigma/2 = \mu\gamma'_{\max} = (3/2)\varepsilon'_{pl},$$

$$\gamma'_{pl} = \tau/\mu; \quad \gamma' = \gamma'_1 + \gamma'_{pl} = \gamma'_1 + (G/\mu)\gamma_1 = \tau'/G + \tau/\mu,$$

где  $\mu$  – коэффициент вязкости.

**Чисто вязкое вещество.** Для него можно пренебречь бесконечно малыми упругими частями деформации. Если вещество не сжимаемо и течет с малыми скоростями, а возникающим ускорением можно пренебречь, то тело находится в статическом равновесии. Тогда между напряжениями и скоростями будут следующие зависимости [33, 48]:

$$\sigma_x = \sigma + 2\mu \varepsilon'_x, \quad \gamma_{yz} = \mu \gamma'_{yz},$$

$$\sigma_y = \sigma + 2\mu \varepsilon'_y, \quad \tau_{zx} = \mu \gamma'_{zx},$$

$$\sigma_z = \sigma + \mu \varepsilon'_z, \quad \tau_{xy} = \mu \gamma'_{xy},$$

где  $\mu$  – коэффициент вязкости;  $\varepsilon'$ ,  $\gamma'$  – весьма малые скорости деформаций

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon'_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon'_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma'_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma'_{zx} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma'_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} w = 0.$$



### 6.3. ДЕФОРМАЦИИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ ВО ВРЕМЕНИ

Деформирование строительных конструктивных систем во времени рассмотрено в [12, 37, 58, 70, 76, 80].

Многочисленными наблюдениями установлено развитие деформаций зданий и сооружений в виде изгиба, выгиба, кручения, увеличения неравномерности перемещений во времени. Причинами этого являются: проявление реологических свойств грунтов основания и строительных конструкций, узловых соединений, изменения гидрогеологических условий, нарушение условий эксплуатации, деградация материалов, воздействия температурно-влажностных полей, фильтрационных процессов в грунтах, перераспределения усилий и напряжений в элементах системы

Над некоторыми особо ответственными объектами (гидротехнические сооружения (А.Н. Марчук, 1983), элеваторы, мосты, башенные сооружения) ведутся постоянные наблюдения с замером перемещений, напряжений и деформаций. В настоящее время в мире имеется более 40 «падающих» башен.

Особое значение приобретает разработка методов корректировки перемещений фундаментов, например, путем локального изменения жесткости конструктивных систем.

Одним из путей наблюдения за поведением конструкций зданий и сооружений является наблюдение за раскрытием трещин в течение длительного времени.

Наблюдения показали, что часто перемещения, трещины увеличиваются не плавно, а скачкообразно.

### 6.4. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

Информацию можно найти в [44, 48, 55, 69, 75, 77].

#### • Критерии кратковременной прочности

Напряженное состояние в точке характеризуется тремя главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При определенном их сочетании происходит разрушение. Определение механических характеристик материалов в большинстве случаев производят в опытах на сжатие–растяжение. На базе этих усилий строят критерии прочности для сложного напряженного состояния.

Часто, общее условие прочности представляют в виде

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t, q_k) = 0,$$

где  $q_k$  – некоторый набор параметров, влияющих на прочность.

Иногда из числа влияющих аргументов исключают напряжения или деформации

$$\varphi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t, q_k) = 0, \quad \varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, t, q_k) = 0.$$

• **Первая теория прочности** (критерий прочности по наибольшим нормальным напряжениям)

Разрушение наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq \sigma_{\text{разр}}.$$

Условия прочности имеют вид

$$\sigma_{\text{расч}} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\text{расч}} \leq R.$$

Этот критерий прочности не учитывает влияния двух упругих главных напряжений. В общем виде

$$-[\sigma] \leq \sigma_1 \leq [\sigma]; \quad -[\sigma] \leq \sigma_2 \leq [\sigma]; \quad -[\sigma] \leq \sigma_3 \leq [\sigma].$$

При плоском напряженном состоянии

$$-[\sigma] \leq \sigma_1 \leq [\sigma]; \quad -[\sigma] \leq \sigma_2 \leq [\sigma].$$

Последние условия прочности можно представить через  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$

$$\sigma_{\max} = 1/2 \left[ (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] \leq [\sigma].$$

Если потенциал по-разному сопротивляется разрушению при растяжении  $\sigma_p$  и сжатии  $\sigma_c$ , то

$$-[\sigma]_c \leq \sigma_1 \leq [\sigma]_t; \quad -[\sigma]_c \leq \sigma_2 \leq [\sigma]_t.$$

Безопасную зону ограничивает четырехугольник со сторонами  $[\sigma]_t$  и  $[\sigma]_c$ .

• **Вторая теория прочности** (критерий прочности по наибольшим главным изменениям)

Гипотеза основана на допущении, что разрушение наступает при наибольшем удлинении  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\max}$  (при  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ ), в общем случае:

$$-[\varepsilon] \leq \varepsilon_1 \leq [\varepsilon]; \quad -[\varepsilon] \leq \varepsilon_2 \leq [\varepsilon]; \quad -[\varepsilon] \leq \varepsilon_3 \leq [\varepsilon].$$

Если закон Гука соблюдается вплоть до момента разрушения, то

$$\varepsilon_{\text{разр}} = \sigma_{\text{разр}} / E; [\varepsilon] = [\sigma] / E ;$$

$$-[\sigma] \leq \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]; \quad -[\sigma] \leq \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) \leq [\sigma];$$

$$-[\sigma] \leq \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma] = \sigma_{\text{разр}} / E$ .

Для плоского напряженного состояния

$$-[\sigma] \leq \sigma_1 - \mu\sigma_2 \leq [\sigma]; \quad -[\sigma] \leq \sigma_2 - \mu\sigma_1 \leq [\sigma].$$

Условия прочности через  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  выглядят в виде

$$\left[ (1-\mu)(\sigma_x + \sigma_y) + (1+\mu)\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] / 2 \leq [\sigma].$$

Теория оправдана для хрупких материалов.

• **Третья теория прочности** (критерий прочности по наибольшим касательным напряжениям)

Предельное состояние в точке достигается при  $\tau_{\text{max}}$ , достигающем опасного предельного состояния  $\tau_0$ . При трехосном предельном состоянии:

$$-[\tau] \leq \tau_{12} \leq [\tau]; \quad -[\tau] \leq \tau_{23} \leq [\tau]; \quad -[\tau] \leq \tau_{31} \leq [\tau].$$

Эти условия можно выразить через главные нормальные напряжения

$$-[\tau] \leq (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 \leq [\tau]; \quad -[\tau] \leq (\sigma_2 - \sigma_3) / 2 \leq [\tau];$$

$$-[\tau] \leq (\sigma_3 - \sigma_1) / 2 \leq [\tau].$$

Для одноосного напряженного состояния

$$-[\tau] \leq \sigma_1 / 2 \leq [\tau]; \quad \sigma_1 \leq [\sigma]; \quad 2[\tau] = [\sigma],$$

тогда

$$-[\sigma] \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma]; \quad -[\sigma] \leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq [\sigma]; \quad -[\sigma] \leq \sigma_3 - \sigma_1 \leq [\sigma].$$

В случае плоского напряженного состояния

$$-[\sigma] \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma]; \quad -[\sigma] \leq \sigma_1 \leq [\sigma]; \quad -[\sigma] \leq \sigma_2 \leq [\sigma].$$

В напряжениях  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  эти условия имеют вид

$$-[\sigma] \leq \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma];$$

$$-[\sigma] \leq (\sigma_x + \sigma_y) / 2 \pm (1/2) \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma].$$

Критерий прочности применим к пластичным материалам.

• **Четвертая теория прочности** (энергетический критерий)

Разрушение наступает тогда, когда в точке энергия деформации достигла опасного для данного материала значения. При малых деформациях полная энергия деформации, отнесенная к объему, равна изменению энергии деформации объема  $U_0$  и энергии деформации формы  $U_\phi$

$$U_V = U_\phi + U_0;$$

$$U_0 = 0,5\sigma_0^2 / K = (1 - 2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 / 6E;$$

$$U_\phi = (1 + \mu)[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 6E;$$

$$U_\phi \leq [U_\phi],$$

где  $[U_\phi]$  – безопасное значение энергии деформации формы.

Для одноосного напряженного состояния в момент разрушения

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{разр}}, \quad \sigma_1 \leq [\sigma].$$

Удельная энергия формоизменения при растяжении

$$U_\phi = \sigma_1^2 (1 + \mu) / (3E).$$

Для безопасного состояния

$$\sigma_1 = [\sigma];$$

$$U_\phi = [\sigma]^2 (1 + \mu) / 3E;$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2[\sigma]^2;$$

$$\tau_{\text{ост}} \leq [\tau] = [\sigma] / 2.$$

В случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \leq [\sigma]^2 ;$$
$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq [\sigma].$$

Этот критерий определяет момент наступления пластического деформирования. Поверхности текучести (или треугольник, или эллипс) разделяют области упругого (внутренняя) и пластичного (внешняя) деформирования.

- **Пятая теория прочности** (критерий прочности Мора)

Используется графическая интерпретация напряженного состояния в точке путем построения кругов в осях  $\sigma$ ,  $\tau$ . Допускается, что:

- 1) предельное состояние возникает на площадях, проходящих через направление главного напряжения  $\sigma_2$ ;
- 2) величина  $\sigma_2$  не влияет на возникновение предельного состояния;
- 3) рассматривается только одна окружность, построенная на отрезке  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  как на диаметре;
- 4) материал может по-разному сопротивляться сжатию и растяжению.

Для линейного напряженного состояния

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_3 \neq 0.$$

Можно построить предельные окружности при различных отношениях  $\sigma_1 / \sigma_2$ . Для них возможно построить огибающую, касающуюся каждой из окружностей в некоторой точке. Изгибающая нигде не пересекает ни одну из предельных окружностей. Определяется ориентация плоскости, на которой возникает скольжение.

Иногда ординаты огибающей предельных окружностей возрастают в сторону отрицательного направления  $\sigma (\sigma \rightarrow -\infty; d\tau/d\sigma \rightarrow 0)$ . Это происходит при наличии сжимающего нормального напряжения на предельной площади.

Часто применяют линейную зависимость между  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$

$$\sigma_1 + m\sigma_3 = k,$$

где  $m$  и  $k$  постоянные.

Если  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\sigma_c$ , то  $-m\sigma_c = k$ ; если  $\sigma_1 = \sigma_t$ , а  $\sigma_3 = 0$ , то  $\sigma_t = k$ .

Используя выражения для  $m$  и  $k$ , получим:

$$\sigma_1 - (\sigma_t / \sigma_c) \sigma_3 = \sigma_t.$$

Вводя коэффициенты запаса  $[\sigma]_t = \sigma_t / n_t$  и  $[\sigma]_c = \sigma_c / n_c$ , получают:

$$\sigma_1 - \frac{n_t [\sigma]_t}{n_t [\sigma]_c} \leq [\sigma]_t.$$

Если  $n_t = n_c$ , то

$$\sigma_1 - ([\sigma]_t / [\sigma]_c) \sigma_3 \leq [\sigma]_t,$$

при  $[\sigma]_t = [\sigma]_c$ ,  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ .

#### • Анизотропия прочности

Рассматривают случаи разной сопротивляемости разрушению материалов при сжатии–растяжении.

Для плоского напряженного состояния условия прочности имеют вид

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, q_k) \leq 0,$$

где  $q_k$  – набор параметров, характеризующих прочностные свойства в зависимости от ориентации главных осей напряженного состояния по отношению к характеризующим направлениям структуры материала.

В осях  $O\sigma_1\sigma_2$  уравнение  $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, q_k) = 0$  это уравнение замкнутой кривой, внутри которого расположено начало координат  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ .

Для ортотропного материала условия прочности представляют в виде

$$\sum_{i,k=1}^2 \sigma_{i,k} A_{i,k} + \left( \sum_{i,k,m,n=1} \sigma_{i,k} \sigma_{m,n} A_{i,k,m,n} \right)^{1/2} \leq 1,$$

где  $A_{i,k,m,n}$  – характеристика свойства материалов.

Условия симметрии по индексам следуют из условий

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad A_{i,k,m,n} \sigma_{i,k} \sigma_m = A_{m,n,i,k} \sigma_{i,k} \sigma_{m,n}.$$

- **Кинетическая теория прочности**

Исходя из представлений о функциональном характере движения атомов твердого тела, описывают разрушение как процесс разрывов межатомных связей, накопления микродефектов и микротрещин.

Экспериментально установлено, что долговечность  $\tau$  образцов, находящихся под напряжением  $\sigma$  при постоянной температуре

$$T = C \exp(-\alpha\sigma),$$

где  $C$  и  $\alpha$  – постоянные коэффициенты.

Опытами установлено, что в координатах  $\lg-\sigma$  образуются пучки прямых, веером сходящихся в полюсе на уровне долговечности  $\tau_0 = 10^{-13}$  с.

Уравнение долговечности имеет вид

$$\tau = \tau_0 \exp[\beta(\sigma)/T] = \tau_0 \exp[U(\sigma)/(kT)] = \tau_0 \exp[U_0 - \kappa\delta/(kT)],$$

где  $T$  – термодинамическая температура,  $U(\sigma) = k\beta(\sigma) = U_0 - \kappa\delta$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{23}$  Дж – постоянная Больцмана,  $\kappa$  – постоянная,  $U_0$  – число, получаемое экстраполяцией зависимости  $U$  от  $\sigma$

$$\tau_{\text{фл}} = \tau_a \exp[E_{\text{фл}}/(kT)],$$

где  $\tau_0 = 10^{-13}$  с,  $E_{\text{фл}}$  – энергия флуктуации, энергия, превосходящая среднюю энергию атома, достаточную для того, чтобы он покинул свое место,  $U(\sigma) = E_{\text{фл}}$  и  $\tau = \tau_{\text{фл}}$ , т.е. долговечность определяется временем флуктуации.

- **Прочность при циклическом напряжении**

Напряжения с амплитудой  $\sigma_a$  и круговой частотой  $\omega$  колеблются около среднего значения  $\sigma_m$

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t.$$

При этом

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{\text{min}} = \sigma_m - \sigma_a, \quad \sigma_m = (\sigma_{\text{max}} + \sigma_{\text{min}})/2,$$

$$\sigma_a = (\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}})/2, \quad R = \sigma_{\text{min}} / \sigma_{\text{max}}.$$

Если  $\sigma_m = 0$ , то цикл симметричен,  $\sigma_m \neq 0$  – асимметричен,  $\sigma_{\text{min}} = 0$  – цикл отсутствует. Для симметричного цикла коэффициент асимметрии цикла  $R = -1$ , при  $\sigma_{\text{min}} = 0$ ,  $R = 0$ .

Наибольшее напряжение ограничивают пределом

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a \leq \sigma_m.$$

При  $\sigma_m \neq 0$ ,  $\sigma_a \neq 0$  критерий прочности строят на базе диаграмм предельных амплитуд цикла в осях  $O\sigma_m\sigma_a$ . Для каждого  $\sigma_m$  откладывают в качестве предела выносливости  $\sigma_a$ . Принимают кривую предельных амплитуд. Если  $\sigma_a = 0$ , то разрушение происходит при  $\sigma_m = \sigma_B$  ( $\sigma_B$  – предел выносливости). Если  $\sigma_m = 0$ , то разрушения происходят при  $\sigma_m = \sigma_{-1}$  ( $\sigma_{-1}$  – предел выносливости при симметричном цикле). Область безопасных комбинаций  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$ . Так, при  $\sigma_a = \sigma_{-1}$ ,  $\sigma_m = 0$  и  $\sigma_a = 0$ ,  $\sigma_m = \sigma_T$  понимают область безопасных значений  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$  ограничено прямой

$$\sigma_m + (\sigma_m / \sigma_{-1}) \sigma_a \leq [\sigma]_T.$$

Используют и метод двух прямых для определения области безопасных сочетаний  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$ .

- **Длительная прочность**

Разрушение происходит по схемам вязкого (пластического) и хрупкого разрушения в зависимости от уровней нагрузок и температур. Процесс разрушения развивается во времени в связи с ползучестью.

При этом возникают и развиваются повреждения. Строят кривую длительной прочности, по осям ординат откладывают напряжения, а по оси абсцисс – время до разрушения для данного напряжения. Часто экспериментальные точки откладывают в логарифмических координатах ( $\lg \sigma - \lg t$ ). Кривая длительного напряжения получается двумя отрезками прямых. Первый (ближе к оси  $\lg \sigma$ ) соответствует вязкому разрушению при высоких уровнях нагрузок, а второй – хрупкому в результате накопления микротрещин.

Из линейного уравнения поврежденности

$$\int_0^{\tau} \frac{dt}{\tau_i} = 1.$$

Если  $\sigma_i$  постоянно на интервале времени, то

$$t_i = t_i - t_{i-1}, \text{ то } \sum_i \Delta t_i / \tau_i = 1,$$

где  $\tau_i$  – время разрушения при напряженности  $\sigma_i$ .



Часто процесс развития деформаций описывают зависимостью

$$\dot{\epsilon} = B\sigma^n,$$

где  $\dot{\epsilon}$  – скорость получения деформаций;  $B$ ,  $n$  – постоянные;  $\sigma$  – текущее значение напряжения.

**Релаксационные процессы в напряженных полимерах.** Использован принцип суперпозиции Больцмана для вязкоупругих материалов, для которых зависимость между напряжениями и деформациями включает время.

Допускалось, что упругие силы зависят не только от мгновенно получаемых смещений, но и от предшествующих деформаций. Величины деформаций, полученные в разное время, складываются.

Зависимость напряжений от деформаций, основанная на этих гипотезах, имеет вид

$$\frac{\sigma(t)}{E} = \epsilon(t) - \sum \epsilon(s) \Delta s j(t-s),$$

где  $j(t-s)$  – функция влияния, убывающая при возрастании  $(t-s)$ ;  $t$  – время наблюдения;  $s$  – время, предшествующее моменту наблюдения.

Как видно, деформация в момент  $t$  зависит не только от  $\sigma(t)$ , действующей в этом времени, но и от напряжения  $\sigma(s)$ , которое действовало в предшествующий малый период времени  $\Delta s$ .

При  $\Delta s \rightarrow 0$

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) - E \int_0^t j(t-s)\epsilon(s)ds.$$

## Глава 7. ТЕОРИЯ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ, КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Дополнительные сведения можно получить из [7, 8, 11, 12, 16, 18, 22, 23, 24, 26, 31, 33, 38, 39, 42, 4, 55, 58, 62, 71 – 73, 75, 82, 83].

### 7.1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

**Разрушение.** Имеются различные определения этого понятия, например, разделение тела на части под действием напряжения – процесс, развивающийся во времени, и проходящий последовательно подготовительную, критическую и закритическую стадии; процесс накопления повреждений до критической концентрации и др. Различают разрушения: кратковременное, длительное, локальное, смешанное, глобальное, вследствие развития трения и др. Значительное влияние на

склонность материалов к разрушению и скорость процесса оказывают и такие факторы как температура, состояние поверхности детали или конструкции, ее размеры и форма; характеристики окружающей среды, вид напряженного состояния, история и траектория нагружения или деформирования, концентраторы напряжений, начальные и тепловые напряжения, сочетание ряда неблагоприятных факторов и др. Хрупкое разрушение характеризуется малой энергоемкостью и развивается автокаталитически при достижении определенного напряжения, не требуя его дальнейшего увеличения. Перемещение во времени и неоднородная по объему температура поля вызывают значительные термические напряжения. При повышении температуры снижается упругость, вызванное различными способами.

Различают [77] хрупкое разрушение от отрыва и пластическое от среза. Рассмотрим факторы, влияющие на процесс разрушения.

**Скорость деформирования.** С повышением скорости снижаются пластические свойства металла и проявляется склонность к переходу из пластического в хрупкое состояние.

**Температура.** Идея А.Ф. Иоффе (1924). С понижением температуры величина сопротивления отрыву практически не изменяется, а сопротивление срезу увеличивается. Материал из пластического состояния переходит в хрупкое.

**Отношение сопротивления отрыву к сопротивлению срезу.** По Давыденкову Н.Н. (1936) если это отношение меньше единицы, то имеет место хрупкое поведение материала, а больше единицы – пластическое.

Задача Гриффитса формулируется следующим образом [24]. Бесконечная хрупкая пластинка единичной толщины растягивается в одном направлении равномерно распределенными на бесконечности напряжениями. В пластинке имеется плоская трещина, расположенная перпендикулярно к направлению нагрузки. Необходимо найти критическое напряжение, при достижении которого размер трещины начнет увеличиваться.

Гриффите исходил из энергетических предпосылок, полагая, что равновесному состоянию соответствует минимум полной энергии системы. Вариация полной энергии в окрестности равновесного состояния системы должна быть равна нулю:

$$-\delta U_1 + \delta A_{\delta\Sigma} = 0 \text{ или } \frac{d(A_{\delta\Sigma} - U_1)}{dt} = 0 ,$$

где  $\delta U_1$  – уменьшение потенциальной энергии деформирования вследствие снижения напряжений при увеличении размеров;

$$U_1 = K\sigma^2(l)^2/2E,$$

$l$  – длина трещины;  $A_{\Sigma\Sigma}^{(1)} = 2\gamma l$ , где  $\gamma$  – плотность поверхностной энергии;  $K$  – коэффициент интенсивности напряжений;

$$\frac{d\left(2\gamma l - K \frac{\sigma^2(l)^2}{2E}\right)}{dl} = 2\gamma - K \frac{\sigma_0^2 l}{E} = 0; \quad \sigma_0 = \sqrt{2\gamma E / Kl}.$$

При  $\sigma = \sigma_0$  возможно начало роста трещин. Если  $\sigma^x \geq \sigma_0$ , то можно вычислить критическую длину трещин:

$$l_k = 2\gamma E / (\sigma^2 K)$$

и критическое напряжение для заданной полудлины:

$$\sigma^x = \sqrt{2\gamma E(\pi l)}.$$

*Идеи Ирвина (1958)*. Он преобразовал концепцию энергетического баланса Гриффитса в силовую концепцию, основанную на анализе поля напряжений у вершины трещины. Ирвин ввел понятие силы  $G$ , вызывающей продвижение трещины на единицу длины, эквивалентной интенсивности потери энергии полем напряжений у вершины трещины. В качестве критерия перехода к нестабильному разрушению он принял момент, когда у вершины трещины достигается критическая интенсивность напряжений, вычисляемая по формулам линейной теории упругости.

Вблизи вершины трещины материал переходит в пластическое состояние. Развитие трещин называется квазихрупким разрушением. Ирвин ввел понятие коэффициента интенсивности напряжений, зависящего от формы тела, граничных условий и определяется из решения глобальной задачи.

Условие предельного равновесия трещины получено в форме

$$K = K_{cb}.$$

При этом начинается рост трещины. Вместо принятой Гриффитсом плотности энергии  $\gamma$ , соответствующей силам поверхностного натяжения, введена эффективная плотность поверхностной энергии  $\gamma_{\text{эфф}}$  ( $\gamma_{\text{эфф}} > \gamma$ ), включающая плотности энергии от других явлений, например, пластическим деформированием поверхностного слоя.

Напряжения у вершины трещины вычисляются по формулам Вестергаарда:

$$\delta_x = \frac{K_1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right);$$

$$\delta_y = \frac{K_1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right);$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2},$$

где  $r$  – расстояние от вершины трещины до точки, в которой определяется напряжение;  $\theta$  – угол между осью  $x$ , лежащей в плоскости распространения трещины, и радиусом-вектором  $\bar{r}$ ;  $K_1$  – коэффициент интенсивности напряжений, зависящий от приложенного напряжения и геометрии трещины (размерности:  $[FL^{-3/2}]$ ,  $H/м^{-3/2}$ ,  $МПа \cdot м^{1/2}$ ).

Для трещины длиной  $2c$  в бесконечной пластинке  $K = \sigma\sqrt{\pi c}$ . Индекс при  $K$  означает первую отрывную форму смещения трещины в направлении оси  $x$  (рис. 7.1).

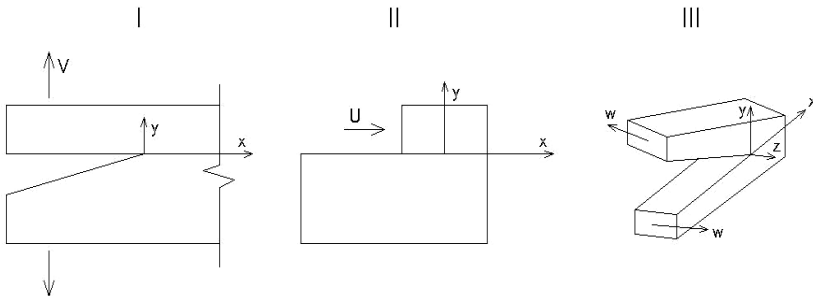
При плоской деформации:

$$K_1 = \sqrt{2E\gamma} / \sqrt{(1-\mu^2)},$$

при плоском напряженном состоянии:

$$K_1 = \sqrt{2E\gamma},$$

где  $\gamma$  – температурный коэффициент линейного расширения.



**Рис. 7.1. Виды смещения трещины:**

I – отрыв ( $K_I$ ); II – поперечный сдвиг (берега трещины скользят друг по другу) ( $K_{II}$ );

III – разрезание ножницами (берега трещины скользят друг по другу параллельно направляющему фронту трещины) ( $K_{III}$ )

**Разрушения при сейсмических воздействиях.** Они возникают в сооружениях в связи с колебаниями их оснований при движении поверхности Земли во время землетрясений.

В [54] подробно рассмотрены вопросы прочности и деформативности материалов, конструкций и их соединений. Обсуждаются результаты экспериментов отечественных и зарубежных, особенно японских ученых с разными материалами, конструкциями, режимами нагружения. В основном, это циклические воздействия (нагружения или перемещения), часто с концентратами напряжений.

Отмечен ряд особенностей работы материала. К примеру, выявлен эффект постепенного размягчения металла при действии постоянных и достаточно высоких амплитуд колебаний, т.е. снижения максимальной нагрузки, соответствующей одной и той же амплитуде перемещений. По мере возрастания максимального напряжения цикла происходит увеличение ширины гистерезисных петель.

Описаны характерные повреждения конструкций, зданий и сооружений в ряде землетрясений. Рассмотрены пространственные поступательно-крутильные колебания при симметричном и несимметричном расположении центров масс и жесткостей.

Приведены антисейсмические мероприятия и их эффективность, данные о влиянии грунтовых условий на интенсивность сейсмических воздействий.

Основы расчета и проектирования зданий в сейсмических районах изложены в [24].

**Изнашивание материалов** – процесс постепенного изменения размеров тела. Определяет скорость и интенсивность изнашивания. Различают изнашивания: механическое, коррозионное, коррозионно-механическое, абразивное, вследствие пластического деформирования, при хрупком разрушении, усталостное, адгезионное, тепловое, окислительное, в условиях агрессивного действия жидкой среды, навигационное, эрозионное, коррозионно-абразивное. Подробную информацию можно получить в [77].

В [1, 12, 24, 32, 36, 37, 42] приведены обстоятельные данные о механизме разрушения материалов и конструкций.

### **Разрушение конструкций зданий и сооружений**

В [1, 12] описаны примеры разрушений, их причины, способы восстановления экспериментальных качеств зданий и сооружений. Приведен перечень ошибок, допускаемых при изысканиях, проектировании, строительстве и эксплуатации.

Важнейшими проблемами строительной науки являются:

- недопущение прогрессирующего разрушения [17, 52, 63];

– повышение живучести конструктивных систем при выходе из работы или ослаблении отдельных элементов (В.И. Колчунов, Н.В. Ключева, 2008 – 2012);

– оценка остаточного ресурса строительных конструкций, зданий и сооружений при случайных или неблагоприятных условиях [19, 32, 37, 52, 54];

– разработка методов расчета сооружения во взаимодействии с деформируемыми основаниями [12, 16, 58, 61];

– разработка теории силового сопротивления конструкций и конструктивных систем с более полным учетом механических и реологических характеристик материалов [2, 3, 6, 7, 12, 13, 15, 16, 24, 37, 54, 58, 62, 64, 68];

– разработка и внедрение неразрушающих методов контроля качества и приборов трехосного определения механических характеристик материалов; внедрение мониторинга при возведении уникальных зданий.

**Некоторые особенности работы металла под нагрузкой.** Подробнее см. в [2, 3, 15, 22, 26, 32, 40, 42, 43, 57, 75, 77].

**Длительная прочность.** Разрушение образца в условиях ползучести может происходить как с образованием шейки (вязкое разрушение), так и без него (хрупкое разрушение). В первом случае разрушение имеет внутризеренный характер, во втором – межзеренный. Важной характеристикой является предел длительной прочности – максимальное напряжение, которое может выдержать материал, не разрушаясь в течение определенного времени:  $\sigma_{100}$ ,  $\sigma_{500}$ ,  $\sigma_{1000}$  (нижний индекс – продолжительность работы материала в часах).

**Масштабный фактор** – сопротивление образца разрушению уменьшается с увеличением размеров поперечного сечения.

**Радиационный эффект** – твердые тела, подвергающиеся облучению частицами большой энергии, претерпевают значительные изменения, связанные с образованием дефектов кристаллической решетки [32, 77]. Радиационные дефекты устраняются путем обжига.

**Эффект П.А. Ребиндера.** Происходит облегчение деформации разрушения твердых тел при протекании их в среде, содержащей вещества, обладающие физико-химическим средством к данному телу. Так, вследствие обратимой адсорбции материалом поверхностно-активных веществ из окружающей среды, облегчается упругая и в особенности пластическая деформация и разрушение материала.

**Основные механические свойства металлов [44]:**

– *прочность* – сопротивляемость материала внешним силовым воздействиям без разрушения;

– *упругость* – свойство материала восстанавливать свою первоначальную форму после снятия внешних нагрузок;

- *пластичность* – свойство материала сохранять деформированное состояние после снятия нагрузок;
- *хрупкость* – способность материала разрушаться при малых деформациях;
- *ползучесть* – способность материала непрерывно деформироваться во времени без увеличения нагрузки;
- *твердость* – свойство поверхностного слоя материала сопротивляться упругой и пластической деформации или разрушению при внедрении в него индентора из более прочного материала.
- *жаропрочность* – способность материала противостоять пластической деформации и разрушению при длительной нагрузке в условиях высоких температур.

**Основными прочностными характеристиками металла** являются:

*временное сопротивление*  $\sigma_u$  – наибольшее условное напряжение в процессе разрушения образца (разрушающая нагрузка, отнесенная к первоначальной прочности образца);

*предел текучести*  $\sigma_y$  – напряжение, при котором деформации растут без увеличения нагрузки;

*предел упругости* – напряжение, до которого при разгрузке не возникают остаточные деформации;

*предел пропорциональности*  $\sigma_p$  – напряжение, до которого материал работает линейно по закону Гука.

**Основные факторы, способствующие хрупкому разрушению стали:** содержания вредных примесей (фосфор, сера, азот, кислород, водород и т.д); старение; низкая температура эксплуатации; наличие поля меняющихся напряжений; концентрация напряжений; динамический характер воздействий; крупность зерен и др.

Со временем несколько увеличивается предел текучести и временное сопротивление, снижается пластичность (старение стали). Если материал загрузить до пластического состояния, а затем снять нагрузку, то появляется остаточная деформация. При повторном нагружении материал работает упруго до предшествующей пластической деформации.

При сложном напряженном состоянии переход в пластическое состояние зависит от знака и соотношения значений действующих напряжений.

**Разрушение стали.** Рассматривают разрушение поликристаллического материала в три стадии: подготовка разрушения на атомном и молекулярном уровне, завершающаяся возникновением повреждений

и макротрещин в зернах кристаллической структуры стали; зарождение макротрещин как необратимое повреждение стали; развитие трещин, приводящее к полному разрушению.

**Критерии хрупкого разрушения стали.** Устанавливаются экспериментально с использованием теорий хрупкого и квазихрупкого разрушения. Измеренными параметрами критериев являются [43]: температура; усилие; линейные и сдвиговые деформации; работа, затраченная на разрушение; рабочая площадь сечения; относительная остаточная деформация удлинения и сужения в изломе; отношение площади вязкой поверхности излома к общей площади и др.

В [42, 43, 69] приведены температурные критерии разрушения и параметры прочности конструктивных форм низкой хладостойкости: предел текучести и временное сопротивление, относительное сужение образца в условиях одноосного растяжения, сопротивления отрыву, максимально возможный локальный предел текучести стали в зоне концентрации напряжений, номинальное разрушающее напряжение в растянутом элементе при наличии концентраторов напряжений, доля волокнистого излома в разрушенном сечении элемента при наличии концентрации напряжений, критический коэффициент интенсивности напряжений при плоской деформации (критический коэффициент интенсивности напряжений, критическая удельная энергия развития трещины, критическое раскрытие трещин при плоском напряженном состоянии).

Критическая температура перехода от вязких разрушений к квазихрупким называется первой критической температурой  $T_{c21}$ . При этом изменяется механизм разрушения – косою ( $45^\circ$ ) излом при сдвиге сменяется прямым изломом с преобладанием отрыва. Иногда условием определения  $T_{c21}$  является уменьшение работы разрушения или сужения в изломе до 0,5 или даже до 0,2 от их величины при вязком разрушении.

Факторы хрупкого разрушения: снижение температуры; повышение скорости деформирования; реализация условий однородного или объемного напряженного состояния при растягивающих главных напряжениях; концентрация напряжений как неоднородное напряженное состояние при двухосном и трехосном растяжении и др.

При хрупком разрушении

$$\sigma_1 = R_0 \text{ и } \tau_{\max} < R_s .$$

При вязком разрушении

$$\sigma_1 < R_0 \text{ и } \tau_{\max} = R_s ,$$

где  $R_0$  и  $R_s$  – сопротивление отрыву и срезу (сдвигу).



Хрупкое разрушение происходит внезапно, без заметных предшествующих пластических деформаций. Конструкции становятся чрезвычайно чувствительными к случайным перегрузкам и ударам. Разрушение может произойти при воздействиях, соответствующих нормальной эксплуатации. Традиционные расчеты прочности растянутых и изгибаемых элементов не отражают их фактическую несущую способность.

## 7.2. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ

Приведем данные из [69]. Эти теоремы рассмотрены и в [40, 72, 75]. Имеются статическая и кинематическая теоремы, позволяющие дать двустороннюю оценку предельных нагрузок.

Статически возможным называют такое состояние, для которого удовлетворены условия в каждой точке тела. Точки, изображающие напряженное состояние в пространстве напряжений  $\sigma_{ij}$ , лежат или внутри поверхности начала пластичности, или на ней [40].

Известны два типа предельных состояний материала: хрупкое разрушение и текучесть [75]. Под предельным состоянием понимают наступление разрушения и развитие пластических деформаций.

На диаграмме деформирования  $\sigma-\varepsilon$  или  $\sigma_i-\varepsilon_i$  есть граница  $\sigma = \sigma_\tau$ . При  $\sigma > \sigma_\tau$ ,  $\varepsilon_p \gg \varepsilon_l$ . В этом случае материал считается жесткопластическим.

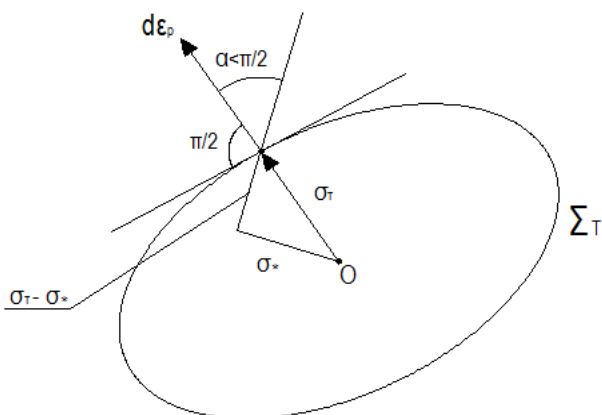


Рис. 7.2. Силы, приложенные к поверхности текучести

Для него:

$$(\sigma_T - \sigma_*) d\varepsilon_p \geq 0,$$

где  $\sigma_T$  – предельная величина вектора напряжений на границе поверхности текучести  $\Sigma_T$  (рис. 7.2);  $\sigma_*$  – вектор безопасного напряжения внутри области, ограниченной поверхностью текучести;  $d\varepsilon_p$  – приращение вектора пластической деформации.

**Статическая теорема о предельном состоянии:** предельная нагрузка, определяемая по статически возможным состояниям, не больше истинной предельной нагрузки.

Статически возможное состояние – состояние, при котором удовлетворены условия на поверхности для напряжений и уравнения равновесия в каждой точке тела, а точки, изображающие напряженное состояние в пространстве напряжений  $\sigma_{ij}$ , лежат или внутри поверхности начала пластичности, или на ней  $f_T(\sigma_{ij}^*) \leq 0$ .

По принципу возможных перемещений:

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_T d\varepsilon dV - \iint_S P du dS &= 0; \\ \iiint_V \sigma_* d\varepsilon dV - \iint_S P_* du dS &= 0. \end{aligned}$$

После вычитания почленно из первого равенства второго, и некоторых преобразований получим:

$$\iint_S P_* du dS \leq \iint_S P du dS.$$

Теорема дает приближение к предельной нагрузке снизу.

**Кинематическая теорема о предельном состоянии:** нагрузка, соответствующая кинематическим возможным состояниям, не меньше предельной нагрузки.

Кинематическое возможное состояние – состояние, для которого удовлетворены условия на поверхности для перемещений и условия совместности деформаций в каждой точке тела.

Согласно принципу возможных перемещений,

$$\iiint_V (\sigma_T d\varepsilon_{p*}) dV - \iint_S (P du_*) dS = 0,$$

где  $d\varepsilon_{p*}$  и  $du_*$  – кинематические возможные поля (рис. 7.3) на границе поверхности текучести  $\Sigma_T$ .

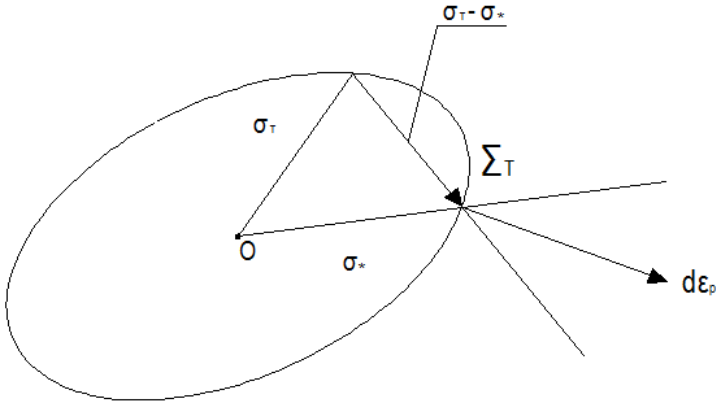


Рис. 7.3. Статически возможное допустимое состояние

Согласно рис. 7.3,

$$(\sigma_* - \sigma_T) d\epsilon_p \geq 0.$$

Окончательно, при малости объемных сил:

$$\iint_S (P_* du_*) dS \geq \iint_S (P du_*) dS.$$

Таким образом, предельная нагрузка по кинематическим возможным состояниям дает приближение сверху к истинной предельной нагрузке.

Ржаницын А.Р. рассматривает [65] предельное равновесие статически определимых и неопределимых балок. Наиболее выгодным будет такое состояние балки, когда опорные моменты равны пролетным. Для неразрезных балок используют аналогию зависимости вертикальных перемещений от кривизны оси балки и изгибающих моментов от нагрузки

$$x = -y'', \quad q = -M'.$$

Эта аналогия является следствием принципа двойственности статических и геометрических уравнений [65, с. 134].

В многопролетной балке состояние предельного равновесия достигается при образовании такого количества шарниров текучести, которое необходимо для превращения ее в измененную систему.

### 7.3. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ГРУНТОВ

Предельное равновесие – напряженное состояние, при котором незначительное увеличение внешней нагрузки приводит к нарушению установившегося положения равновесия и вызывает потерю устойчивости грунта. Подробную информацию можно найти в [5, 6, 16, 21, 27, 29, 36, 37, 46, 47, 70, 74, 80, 82].

**Предельное напряженное состояние** характеризуется достижением напряжения комбинации, при которой устанавливается предельное равновесие между внешней нагрузкой и внутренними силами сопротивления.

Основы теории предельного равновесия развиты в трудах Ш. Кулона (1773), В. Ренкина (1857), Л. Прандтля (1920), Г. Рейсснера (1921), К.Терцаги и Р. Пека (1925), А.Ю. Ишлинского (1947), С.С. Голушкевича (1948), В.В. Соколовского (1952), М.В. Малышева (1953), Р. Хилла (1956), В.Г. Березанцева (1960), М.И. Горбунова-Посадова (1962), Н.Н. Маслова (1968), Р.Т. Шильда (1975), А.С. Строганова (1977), Н.А. Цытовича (1983) и др.

Более подробно анализ проблемы можно найти в работах В.Г. Березанцева (1960), А. Надаи (1963), М.В. Малышева (1998), а также в докторской диссертации А.М. Караулова (2009).

Предельное состояние наступает при различных комбинациях напряжений (теория прочности). Для сыпучих сред применяют две основных теории: Мора–Кулона и Мизеса–Шлейхера. Согласно первой, предельное состояние наступает при определенном соотношении касательного и нормального напряжений на одной площадке. По второй теории предельное состояние наступает при определенном соотношении интенсивности касательных напряжений и среднего нормального напряжения.

**Теория Мора–Кулона.** На площадках скольжения с нормалью  $n$  наибольшее касательное напряжение

$$|\tau_n| = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi.$$

Для среды, обладающей также и сцеплением,

$$|\tau_n| = c + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi = (\sigma_n + H) \operatorname{tg} \varphi,$$

где  $H = c / \operatorname{tg} \varphi$  – сопротивление всестороннему растяжению.

Мор объединил условие Кулона для сыпучей среды и Треска–Сен-Венана

$$|\tau_n| = f(\sigma_n), \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right).$$

В случае, если огибающую аппроксимировать наклонной прямой, то

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2H}.$$

Для идеально сыпучего грунта

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}.$$

По условию Сен-Венана для идеально связных грунтов

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2c = 2\tau_s.$$

**Теория Мизеса.** Интенсивность касательных напряжений есть величина постоянная

$$\tau_i = \tau_s = \text{const};$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 6\tau_s^2.$$

По условию Мизеса–Шлейхера

$$\tau_1 = f(\sigma_m),$$

где  $\sigma_m$  – среднее нормальное напряжение.

Боткин А.И. предложил (1940) для грунтов линейный вид этой зависимости

$$\tau_i = (H + \sigma_m) \operatorname{tg} \psi,$$

где  $H = \tau_n / \operatorname{tg} \psi$  – параметры прямой  $\tau_i - \sigma_m$  и  $\psi$  – угол трения на октаэдрической площадке.

Для одноосного сжатия–растяжения (условие Мизеса–Губера)

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2\tau_s^2.$$

В пространстве главных напряжений  $\sigma_i$  условие предельного состояния выражают в виде предельной поверхности

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0.$$

Боткин А.И. использовал (1940) понятие об октаэдрических (равнонаклонных к главным осям) площадках

$$\tau_{\text{окт}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2};$$

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad \tau_{\text{oct}} = \sigma_{\text{oct}} \operatorname{tg} \delta_{\text{oct}} - k_{\text{oct}},$$

$\sigma_{\text{oct}}$  и  $k_{\text{oct}}$  – характеристики прочности.

По Малышеву М.В. (1994)

$$c \operatorname{ctg} \varphi = K_{\text{oct}} \operatorname{ctg} \delta_{\text{oct}}; \quad G = \tau_{\text{oct}} / \gamma_{\text{oct}}.$$

До наступления предельного состояния напряженное состояние определяется тензором  $\sigma_{ij}$ . После достижения напряжениями гиперповерхности  $f_{\tau}(\sigma_{ij})$  возникают пластические деформации. Они могут происходить с упрочнением или без него.

Условие прочности записывается в виде

$$f_{\tau}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0.$$

В шестимерном пространстве компонентов напряжений

$$f_{\tau}(\sigma_{ij}) = 0.$$

Это условие является уравнением гиперповерхности  $\Sigma_{\tau}$ , от которой начинается проявление пластичности.

Размеры, форма и положение поверхности пластичности зависят от всех типов нагружения. По постулату Друкера эта поверхность является выпуклой.

**Ассоциированный закон пластического течения.** Математическое выражение закона, совмещенное с условием прочности,

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda,$$

где  $f(\sigma_{ij})$  – пластический потенциал;  $d\lambda$  – множитель Лагранжа.

В процессе пластического деформирования не происходит изменение объема, т.е.

$$d\varepsilon_{ij}^p = 0.$$

Для материалов с упрочнением

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0; \quad f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{и} \quad d\lambda > 0.$$

*Линии скольжения.* По Курдюмову В.И. (1916) линии скольжения – геометрическое место плоскостей скольжения эллипсов напряжений в различных точках сыпучего тела. Дальнейшее развитие теории предельного равновесия (В.В. Соколовский 1942, 1954, 1960 и В.Г. Березанцев 1952, 1970) связано термином линий скольжения как линий, касательные к которым совпадают с плоскостями скольжения и вдоль них выполняется условие предельного состояния Кулона

$$\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg}\varphi + c.$$

Имеется два семейства линий скольжения. Гениев Г.А. считает (1982), что видимые смещения происходят вдоль одного из них, совпадающего с направлением максимальных скоростей деформаций сдвига. Шильд Р. (1975) теоретически показал, что векторы скоростей в зоне максимального напряженного состояния не совпадают с линиями скольжения, а отклоняются от них на угол  $\varphi$ . Кинематическая схема выпирания по Прандлю–Шильду рассмотрена М.В. Малышевым (1994).

Подробную информацию о линиях скольжения в металлах можно получить в книгах Л. Прандля (1948), А. Надаи (1954), В. Прагера, Ф.Г. Ходжа (1956), В.В. Соколовского (1969), Н.Н. Малинина (1975) и др.

По теории Мора–Кулона предельное состояние наступает при определенном соотношении между интенсивностью касательных напряжений и средним нормальным напряжением.

В предельном состоянии в каждой точке грунта имеются две сопряженные площадки скольжения, наклоненные под углом  $(45 - \varphi/2)$  к линии действия максимального и  $(45 + \varphi/2)$  – минимального главного напряжения.

Условия прочности для сыпучих грунтов имеют вид

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \sin \varphi; \quad \sigma_3 = \sigma_1 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}; \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \operatorname{tg}^2 \left( 45 \pm \frac{\varphi}{2} \right).$$

Для связных грунтов:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2\sigma_c} = \sin \varphi;$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2};$$

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}{(\sigma_x + \sigma_z + 2\sigma_c)^2} = \sin^2 \varphi,$$

где  $\sigma_c = c / \operatorname{tg}\varphi$  – давление связности.

По решению Прандтля (1921) и Рейсснера (1920) предельное давление на невесомый связный грунт ( $\gamma = 0$ ) в условиях плоской задачи определяют по формуле

$$p_u = (q + c \operatorname{ctg} \varphi) \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} - c \operatorname{ctg} \varphi.$$

Для идеально связного грунта ( $\varphi = 0$ ,  $c \neq 0$ ), (Прандтль, плоская задача)

$$p_u = 5,14c + q.$$

Для водонасыщенных связных грунтов (А.С. Строганов, осесимметричная задача, 1977)

$$p_u = 6,025c + q.$$

По решению К. Терцаги (1948) угол наклона грани уплотненного ядра к подошве  $\varphi$ . Предельное давление на весомое основание:

$$p_u = N_\gamma \frac{\gamma_B}{2} + N_q \gamma h + N_c c.$$

По решению В.В. Соколовского (1942) при действии наклонной нагрузки на основание ленточного фундамента (рис. 7.4) в любой точке основания грунт находится в предельном состоянии.

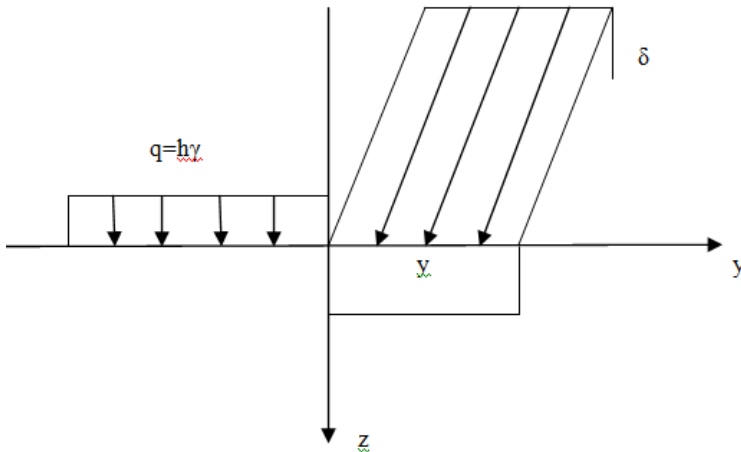


Рис. 7.4. Расчетная схема к задаче В.В. Соколовского



Предельное давление вычисляется по формуле

$$p_u = N_\gamma \gamma_y + N_q q + N_c c,$$

где коэффициенты несущей способности –  $N_\gamma$ ,  $N_q$ ,  $N_c = f(\varphi)$ .

Предельное давление под жесткими фундаментами определяют с учетом уплотненного ядра под подошвой. По решению В.Г. Березанцева [3] угол наклона уплотненного ядра к подошве принимается равным  $45^\circ$ .

При этом предельное давление для круглого фундамента определяется по формуле

$$p_u = N_{\gamma,c} \frac{\gamma D}{2} + N_{q,c} \gamma' d + N_{c,c} c,$$

где  $N_{\gamma,c}$ ,  $N_{q,c}$ ,  $N_{c,c}$  – коэффициенты несущей способности, определяются по таблицам;  $\gamma$  и  $\gamma'$  – удельный вес грунта ниже и выше подошвы фундамента;  $d$  – глубина заложения подошвы фундамента.

Для определения несущей способности основания при действии на ленточный заглубленный фундамент вертикальной нагрузки, при наличии в грунте трения и сцепления, используется трехчленная формула в виде

$$\frac{F_u}{bl} = \frac{1}{2} \gamma_b i N_\gamma + q N_v + c + N_c.$$

Величины коэффициентов несущей способности  $N_\gamma$ ,  $N_q$ ,  $N_c$ , вычисленные по решениям У. Ренкина (1856), К. Терцаги (1925), В.Г. Березанцева (1952), Г.Г. Мейергофа (1973), Л. Прандая–Х. Дейснада (1920), В.В. Соколовского (1954), Й. Бринч–Б. Хансена (1957), А. Како–Ж. Керизеля, приведены в работе М.В. Малышева (1994). Коэффициенты  $N_\gamma$ ,  $N_q$ ,  $N_c = f(\varphi)$ . Результаты Й. Бринч–Б. Хансена частично не использованы и в наших нормах:

$$\frac{F_{uv}}{b'l'} = \frac{1}{2} N_\gamma \gamma b'^s i_\gamma + N_q q N_s q i_q + N_c c s i_s,$$

где коэффициенты, обозначенные буквой  $i$ , связаны с наклоном нагрузки,  $s$  – с формой подошвы фундамента;

$$b' = b - 2e_b; \quad l' = l - 2e_l;$$

$$N_q = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{\pi \operatorname{tg} \varphi}; \quad N_c = (N_q - 1) \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$i_q = i_c = 1 \frac{F_n}{F_v + b'l'c \operatorname{ctg}\varphi};$$

$N_\gamma = 0,9(N_q - 1) \operatorname{tg}\varphi$  (по Бринч–Хансену).

В основу ряда расчетов положено условие пластичности.

Приведем некоторые положения В.Г. Березанцева (1965) по расчету предельного давления на основание для фундаментов глубокого заложения в случае значительного развития областей сдвига.

Установлена зависимость между относительной осадкой  $\bar{S} = S/B$  и степенью развития областей сдвига грунта. Результаты опытов приведены в табл. 7.1 и на рис. 7.5, 7.6.

В случае осесимметричной задачи решение одного из уравнений предельного состояния при задании очертания линий скольжения представлено в виде

$$\sigma_u = B_k \gamma B,$$

где  $B$  – ширина фундамента,  $B_k = B_k(\varphi, D/B)$  – коэффициент, приведенный в табл. 7.1.

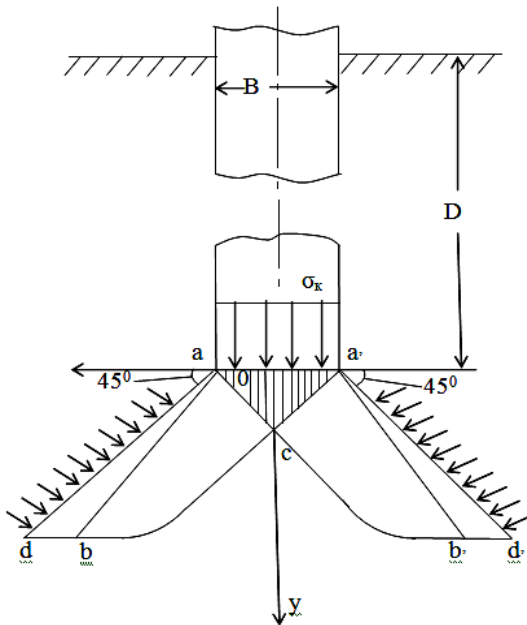


Рис. 7.5. Расчетная схема для определения критического давления в случае плоской задачи ( $L/B > 4$ )

### 7.1. Результаты полевых опытов

№ п/п	$B$ , см	$D$ , см	$\lambda$	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	φ, град	Количество опытов	$\sigma_{CR}^{\theta}$ , МПа	$S_{o/B}$	$\sigma_{CL}^r$ , МПа	Форма подошвы модели
1	2	3	4	5	6	7	S	9	10	11
1	6	72	12	1,8	41	2	1,24	0,17	0,72	Круговая
2	8	96	12	1,8	41	2	0,47	0,21	0,53	Прямоугольная (= 40 см)
3	8	64	8	1,8	41	2	0,35	0,15	0,37	То же
4	8	32	4	1,77	39	5	0,88	0,16	0,28	Круговая
5	11,4	136,8	12	1,81	41	7	1,88	0,22	1,38	То же
6	11,4	68,4	6	1,17	45,5	4	1,75	0,15	0,84	
7	11,4	114	10	1,16	43,5	4	1,92	0,25	1,01	
8	32,5	520	16	1,8	30	1	3,91	0,16	1,47	
9	63	510	8,1	1,9	35	1	3,79	0,15	2,87	
10	122	1220	10	1,3	30	1	4,17	0,15	2,38	

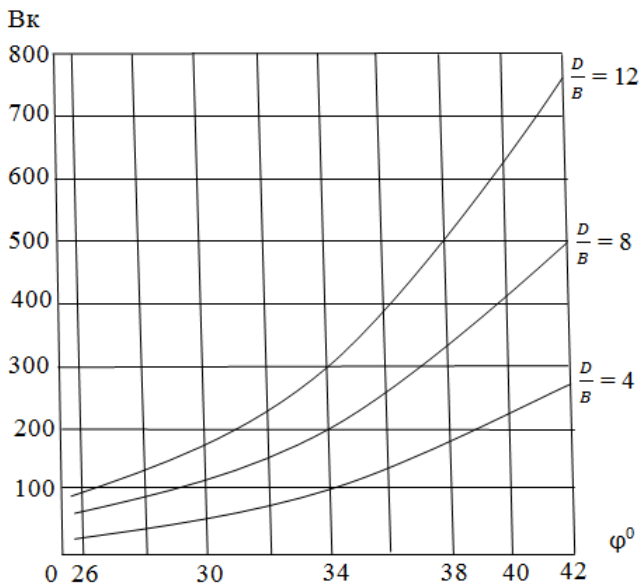


Рис. 7.6. График для определения коэффициента  $B_k$

Приведем применяемые в настоящее время условия прочности грунта [82].

По Мизесу–Шейхеру–Боткину

$$\sqrt{J_2} + aJ_1 - k = 0,$$

где  $a$  и  $k$  – прочностные характеристики, подобные  $\sin\varphi$  и  $\cos\varphi$ .

По Друкеру Д. и Прагеру В. грунт рассматривается как идеально пластическое тело, обладающее свойствам дилатации.

В условиях плоской задачи

$$c = k/(1-12a^2)^{1/2}, \quad \sin\varphi = 3a/(1-3a^2)^{1/2}, \quad \cos\varphi = (1-12a^2)^{1/2}/(1-3a^2)^{1/2}.$$

Предельное равновесие на октаэдрической площадке:

$$\tau_{\text{окт}} = |\sigma_{\text{окт}}| \operatorname{tg}\rho_{\text{окт}} + n_{\text{окт}},$$

где прочностные характеристики грунта:

$$\tau_{\text{окт}} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2, \quad \sigma_{\text{окт}} = J_1/3, \quad \rho_{\text{окт}}, \quad n_{\text{окт}}.$$

**Дилатация грунтов.** Это явление связано с изменением объема грунта при сдвиге. Часто происходит разрыхление. Пластическое деформирование в условиях плоской деформации описывают уравнением

$$\varepsilon_{1,2}^p = \frac{\lambda}{2} (Л_* \pm 1),$$

где  $\varepsilon$  – пластические составляющие главных деформаций;  $Л_*$  – параметр дилатации;  $\lambda$  – малая скалярная величина.

$$Л_* = \frac{\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p}{\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p}.$$

Если течение происходит при постоянном объеме, то

$$\varepsilon_{1,2}^p = \pm \frac{\lambda}{2},$$

а на площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  по отношению к осям главных напряжений,

$$\varepsilon_{\pi/4}^n = 0, \quad \lambda_{\pi/4}^p = \frac{1}{2} (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p) = \frac{\lambda}{2}.$$

В [82] приведены уравнения текучести (предельного напряженно-го состояния) жесткопластических тел (сред) (табл. 7.2).

**Концентрация напряжений.** Нарушения гладкости формы конструкции, наличие отверстий, трещин, выточек приводит к повышению местного уровня напряжений, создает неблагоприятные условия работы материала, приводит к преждевременному разрушению.

Так, наличие отверстия в растянутой пластине вызывает резко неравномерные нормальные напряжения (рис. 7.7).

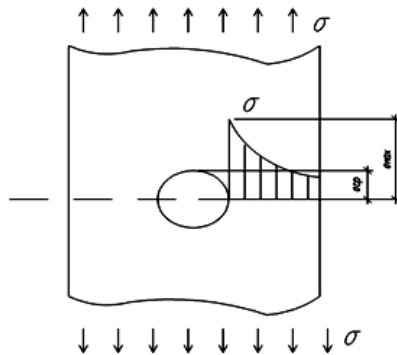
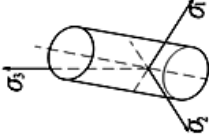
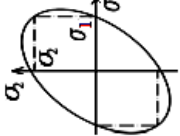
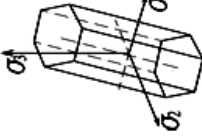
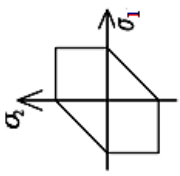
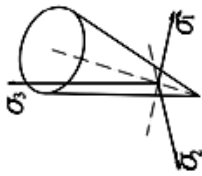



Рис. 7.7. Распределение напряжений в сечении с отверстием

## 7.2. Уравнения текучести (предельного напряженного состояния) жесткопластических тел (сред)

Авторы	Вид состояния	Прочностные характеристики	Вид уравнений	Графическое изображение
Губер-Мизес	Пространственное напряженное состояние $\sigma_1 \neq 0$ , $\sigma_2 \neq 0$ , $\sigma_3 \neq 0$	$\sigma_T$ – предел текучести	$\sqrt{I_2} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} = \sigma_T$	
	Плоское напряженное состояние $\sigma_1 \neq 0$ , $\sigma_2 \neq 0$ , $\sigma_3 = 0$	$\sigma_T$ – предел текучести	$\sqrt{I_2} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_T$	
Сен-Венан-Треска	Пространственное напряженное состояние $\sigma_1 \neq 0$ , $\sigma_2 \neq 0$ , $\sigma_3 = 0$	$\sigma_T$ – предел текучести	$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_T$ $\sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_T$ $\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_T$	

Продолжение табл. 7.2

Авторы	Вид состояния	Прочностные характеристики	Вид уравнений	Графическое изображение
Сен-Венан-Треска	Плоское напряженное состояние $\sigma_1 \neq 0,$ $\sigma_2 \neq 0,$ $\sigma_3 = 0$	$\sigma_T$ – предел текучести	$\sigma_1 = \pm \sigma_T$ $\sigma_2 = \pm \sigma_T$ $\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_T$	
Мизес-Шлеихер-Боткин	Пространственное напряженное состояние $\sigma_1 \neq 0,$ $\sigma_2 \neq 0,$ $\sigma_3 \neq 0$	$c$ – удельное сцепление, $\varphi$ – угол внутреннего трения	$I_2^{1/2} + \alpha I_1 - K = 0$ $I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$ $I_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$ $\alpha = \sin \varphi / [3(3 - \sin^2 \varphi)]^{1/2} \approx \sin \varphi / 3$ $K = c(1 - 12\alpha^2)^{1/2} \approx c \cos \varphi$	
Мор-Кулон	Плоская деформация $\sigma_1 \neq 0,$ $\sigma_2 \neq 0,$ $\sigma_3 = 0$	$c$ – удельное сцепление, $\varphi$ – угол внутреннего трения	$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \sin \varphi - c \cos \varphi = 0$	

В местах искажения сечения линии главных напряжений искривляются, сгущаются, обтекают дефекты.

Отношение  $\sigma_{\max}$  к  $\sigma_{\min}$  в части элемента с более высоким уровнем напряжений называют коэффициентом концентрации напряжений.

$$\alpha_{\sigma} = \sigma_{\max} / \sigma_{\min},$$

где  $\sigma_{\min} = F/A_0$ ,  $A_0$  – площадь ослабленного сечения.

Коэффициент концентрации напряжений может определяться и для касательных напряжений.

В зоне концентрации напряжений наблюдается постепенное их уменьшение с удалением от максимального (закон затухания).

Циклическое воздействие (силовое или деформационное) приводит к охрупчиванию материала. Разрушение происходит по типу хрупкого.

Вводят эффективный коэффициент концентрации

$$\chi_{\sigma} = \sigma''_{-1} / \sigma'_{-1}, \quad \alpha_{\tau} = \tau''_{-1} / \tau'_{-1},$$

где  $\sigma''_{-1}$  – предел выносливости образца из исследуемого материала без концентрации напряжений;  $\sigma'_{-1}$  – то же образца с исследуемой формой концентрации напряжений.

Описан ряд мероприятий по снижению влияния концентраторов напряжений [42, 43, 44].

Кручение валов с выступами и отверстиями вызывает концентрацию касательных напряжений [44]. При этом происходит скачкообразная деформация сечений. Так, в случае с радиальным отверстием это отверстие вытягивается по направлению оси, повернутой на  $45^\circ$  к продольной оси вала.

Номинальные напряжения при кручении

$$\tau_0 = M_{\text{кр}} D / 2I_p,$$

а коэффициент концентрации напряжений при кручении

$$\alpha_{\tau}^{\text{кр}} = \tau_{d \max} / \tau_0, \quad \gamma_{d \max} = \tau_{d \max} / G,$$

где  $\gamma_{d \max}$  – влияние моментного деформационного сдвига;  $G$  – модуль сдвига;  $d$  – диаметр отверстия;  $D$  – диаметр вала.

**Пластичность** – свойство твердых тел приобретать необратимые (остаточные) деформации, называемые пластическими.

**Идеальная пластичность** – модель материалов и конструкций, описывающая необратимые пластические деформации. Определяющими являются экспериментальные принципы статики идеально пластического тела (Р. Хилл, В. Прагер, Ф. Ходж, В.Т. Койгер и др). Наи-



большее значение имеют теоремы об экстремальных свойствах нагрузок (границах несущей способности). Эти теоремы лежат в основе статической теории предельного равновесия (А.А. Гвоздев и др).

Простейшим видом идеальнопластического тела является модель изотропного несжимаемого жесткопластического тела. Эта модель не учитывает пластические деформации. Такой случай имеет место, когда работа внутренних сил на пластических деформациях значительно превосходит работу внутренних сил на упругих деформациях. Классическая модель жесткопластического тела не зависит от влияния температуры, скорости деформации, последствия, ползучести, релаксации.

Условие пластичности или текучести в случае сложного напряженного состояния представляют в виде

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

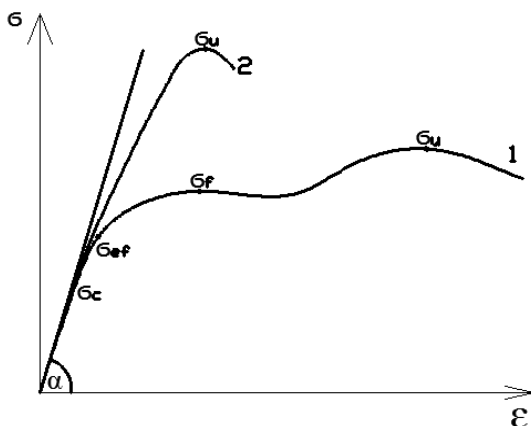
Для жесткопластического тела при  $f(\sigma_{ij}) < 0$  имеет место жесткое состояние, при  $f(\sigma_{ij}) = 0$  – пластическое. В пространстве компонент тензора напряжений оно изображается в виде поверхности текучести. Внутри поверхности текучести будет жесткое состояние материала, на поверхности – пластическое.

**Диаграммы материала.** В опытах устанавливается зависимость между напряжениями  $\sigma$  и между деформациями  $\epsilon$ . Такие диаграммы являются паспортом материала (Н.Н. Давиденков, 1932).

Характерными точками диаграммы растяжения  $\sigma$ – $\epsilon$  являются пределы пропорциональности, упругости, текучести и временное сопротивление. Это условные напряжения, определяемые по первоначальной площади поперечного сечения. Для начальной части диаграммы деформации малы, а условные напряжения практически не отличаются от истинных. Однако временное сопротивление действительно является условной величиной, существенно отличающейся от истинного сопротивления. Поэтому необходимо рассматривать истинные напряжения и действительные удлинения.

В зависимости от вида материала, режима деформирования, а также других факторов (температура образца, степень неоднородности поверхности, наличие дефектов и концентраторов, история и режим нагружения или деформирования, масштабный фактор и т.п.), имеется ряд теорий, качественно и количественно определяющих предельное состояние. Они основываются на феноменологических понятиях и не отражают сложные явления и процессы.

К примеру, большие пластические деформации приводят к анизотропии, физико-химическим превращениям, невозможности рассматривать процесс приложения нагрузки как простое нагружение.



**Рис. 7.8.** Диаграмма вязкого (1) и хрупкого (2) механизма разрушения стали

По виду диаграмм тела рассматривают как идеально упругие, нелинейно упругие, упругопластические с упрочнением или разупрочнением, идеально упругопластические.

Характерными диаграммами работы стали под нагрузкой, зависящими от степени развития пластических деформаций, являются следующие (рис. 7.8).

Хрупкому разрушению способствуют: наличие крупного зерна, повышенное содержание вредных примесей (фосфор, сера, азот, кислород, водород и др.), старение, низкая температура эксплуатации, концентрация напряжений, динамический характер воздействия и др.

#### 7.4. УСТАЛОСТЬ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ. ЗАКОН СУММИРОВАНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Различают усталости: силовую, деформационную, коррозионную, тепловую. В опытах определяют предел выносливости  $\sigma_R$ , наибольшее значение максимального по абсолютной величине напряжения цикла, при действии которого не происходит усталостного разрушения после неограниченного большого количества циклов. Предел выносливости при симметричном цикле обозначают  $\sigma_1$ . При испытании с постоянным средним значением напряжения  $\sigma_m$  предел выносливости – наибольшее значение амплитуды напряжений цикла, при действии которой образцы имеют неограниченную большую долговечность. Усталостью при циклическом напряжении называют процесс постепенного накопления повреждений материала под действием повторных напряжений, приводящих к образованию трещин и разрушению. Снижение

прочности стальных конструкций при циклическом воздействии растягивающих и сжимающих сил выявил Понселе (1839). В 1858 году Веллер разработал метод определения предела выносливости.

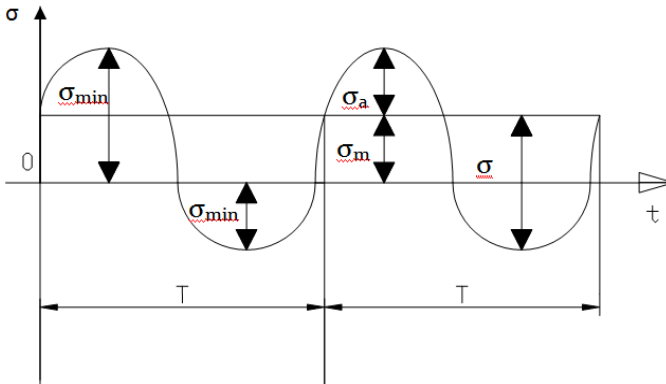
Применяют следующие обозначения (рис. 7.9):

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a + f(t), \quad \sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{\min} = \sigma_m + \sigma_c;$$

$$(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = \sigma_a; \quad R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max},$$

где  $R$  – коэффициент асимметрии цикла;  $\sigma_m$  – среднее напряжение цикла;  $\sigma_a$  – амплитуда цикла;  $T$  – продолжение цикла.

а)



б)

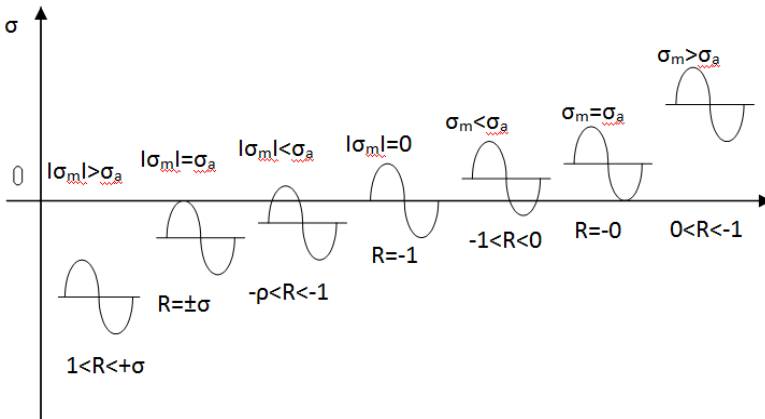
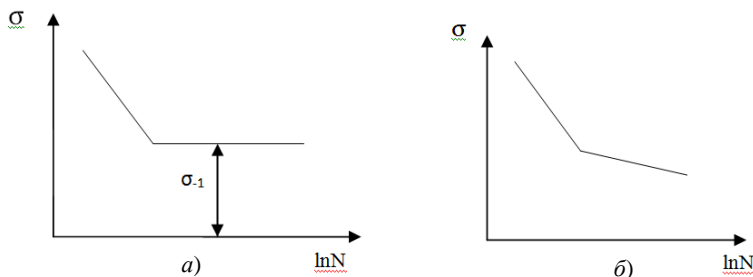


Рис. 7.9. Цикл напряжений (а) и их разновидности при разных коэффициентах асимметрии (б)



**Рис. 7.10.** Кривые Веллера (диаграмма усталости для материалов, имеющих (а) и не имеющих (б) физического предела выносливости)

Испытания проводят по одной из схем:  $R = \text{const}$ ;  $\sigma_{\text{max}} \neq \text{const}$ ;  $\sigma_m = \text{const}$ ;  $\sigma_a \neq \text{const}$ . Получают графики (рис. 7.10).

**Закон суммирования повреждений.** Полагают накопление усталостных повреждений в материале, испытываемом при разных амплитудах напряжения. Обычно используют гипотезу Пальмгрена–Майнера о линейном характере накопления усталостного повреждения. Степень повреждения материала на каждом уровне напряжения  $\sigma_i$  пропорциональна отношению числа циклов нагружения при этом уровне  $n_i$  к полной долговечности при этом же напряжении  $N_i$

$$\sum_{i=1}^m (n_i / N_i) = 1.$$

При таком подходе необходимо заранее знать долговечность материала при разных напряжениях. В процессе циклического нагружения происходят необратимые структурные изменения. Установлено, что процесс усталости связан с развитием пластической деформации, подготавливающей зарождение субмикротрещин. Последние постепенно разрастаются, превращаясь в микро- и макротрещины. Различают циклически упрочняющиеся, разупрочняющиеся или циклически стабильные материалы. Долговечность материала связывают с размахом пластической деформации за цикл (Д.Ф. Коффин, 1963)  $\Delta\epsilon_p$

$$N_p^{1/2} \Delta\epsilon_p = c,$$

где  $N_p$  – число циклов до разрушения;  $\Delta\epsilon_p$  – ширина петли пластического гистерезиса.

Критерий Коффина затем был обобщен В.В. Новожиловым и О.Г. Рыбакиной в виде

$$\mathcal{E}_p = \frac{A}{E_p} \left( 1 - \frac{\sigma}{S} \right)^m,$$

где  $\mathcal{E}_p$  – интенсивность пластических деформаций;  $A = \beta \mathcal{E}_\tau$  – физическая константа материала;  $\mathcal{E}_\tau$  – предельное значение  $\mathcal{E}_p$  при разрушении путем чистого сдвига;  $\beta$  – коэффициент внутреннего трения;  $\sigma = (1/3)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ ;  $S$  – физическая постоянная – сопротивление материала всестороннему разрыву;  $m$  – физическая константа – показатель охрупчивания материала в обычном напряженном состоянии;  $E_p$  – суммарное пластическое разрыхление.

Снижение предела выносливости с увеличением размеров детали называют масштабным эффектом.

## 7.5. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В условиях плоской деформации, движущейся пластичной и сыпучей сред следует ввести в рассмотрение пять неизвестных функций:  $X_x(x, y, t)$ ,  $Y_y(x, y, t)$ ,  $X_y(x, y, t)$ ,  $v_x(x, y, t)$ ,  $v_y(x, y, t)$  – три компонента тензора напряжений и две проекции вектора скорости на оси  $x$  и  $y$ .

Системы уравнений, описывающих состояние движущейся идеально пластической среды:

$$\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} \right) + X = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y};$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} \right) + Y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y};$$

$$(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2 = 4k^2;$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{2X_y}{X_x - Y_y} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}.$$

Системы уравнений, описывающих состояние движущейся идеально-сыпучей среды, [2]:

$$X - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y};$$

$$Y - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y};$$

$$(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2 = \sin^2 \varphi (X_x + Y_y + 2kctg\varphi)^2;$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{2X_y}{X_x - Y_y} = \frac{\left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \pm \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \operatorname{tg}\varphi}{\left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \mp \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \operatorname{tg}\varphi}.$$

В отличие от пластической среды, для сыпучей среды принято следующее правило знаков для напряжений. На площадке, внешняя нормаль к которой совпадает с положительным направлением координатной оси, положительные компоненты напряжений имеют направления, обратные направлениям соответствующих координатных осей.

В этих уравнениях  $\rho_0$  – плотность;  $X$ ,  $Y$  – проекции массовых сил, положительные направления которых совпадают с положительными направлениями осей координат;  $\varphi$  – угол внутреннего трения;  $k$  – предельное напряжение сцепления.

**Принцип равнопрочности** (Г.П. Черепанов 1969; А.В. Андреев, 1981). Суть заключается в следующем: делают допущение о том, что материал работает в условиях, исключающих опасное развитие трещин, пренебрегают устойчивым развитием пластических зон от момента их возникновения до потери несущей способности всей конструкции.

Предполагается, что разрушение должно начинаться одновременно во всех точках конструкции или в максимально большей ее части. Материал такой конструкции работает наиболее равномерно. Равнопрочность является необходимым условием минимальной массы конструкции.

Подробные сведения о механике разрушения композиционных материалов можно найти в трудах Г.П. Черепанова (1983). Представляет интерес теория торможения трещин в волокнистых композитах.

## Глава 8. ТИПЫ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ. МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Вопросам решения упругопластических задач механики грунтов посвящены работы [5, 12, 16, 20, 25, 29, 46, 47, 56, 74, 82, 85].

### 8.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ. ПРИМЕР ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

- **Основные уравнения инженерных задач**

Разрешающее уравнение может быть в виде

$$L\{u\} - F = 0 \text{ на } \Omega ,$$

где  $L\{ \}$  – некоторый интегродифференциальный оператор;  $\{u\}$  – вектор-функция, доставляющая решение поставленной задачи;  $\Omega$  – рассматриваемая область.

Граничные условия задаются двух типов

$$\left. \begin{aligned} u|_{S_1} &= \bar{u} \text{ на } S_1 ; \\ q = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_2} &= \bar{q} \text{ на } S_2 , \end{aligned} \right\}$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – части границы, в которых задаются условия; полная граница рассматриваемой области  $S = S_1 + S_2$ .

Приближенное решение задачи

$$\hat{u} = \sum_i a_i \varphi_i ,$$

где  $\varphi_i$  – линейно-независимая функция;  $a_i$  – произвольные коэффициенты.

После подстановки этого уравнения в предыдущее получают

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= L\{\hat{u}\} - F \neq 0 \text{ на } S_i ; \\ \varepsilon_1 &= \hat{u} - \bar{u} \neq 0 \text{ на } S_1 ; \\ \varepsilon_2 &= \hat{q} - \bar{q} \neq 0 \text{ на } S_2 . \end{aligned} \right\}$$

Целью приближенных методов расчета является свести ошибки  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  к минимуму. Для этого используют метод взвешенных остатков.

Для решения задач механики квазиоднородных грунтов используют систему разрешающих уравнений, включающую уравнения равновесия, определяющие соотношения и граничные условия.

Уравнение равновесия в матричной форме имеет вид

$$[K^e][\delta^e] = [F_\gamma] + [F_q],$$

где  $[K^e]$  – матрица жесткости в глобальной системе координат;  $[\delta^e]$  – обратимая часть перемещения узлов конечных элементов;  $[F_\gamma]$  – внутренние обычные силы;  $[F_q]$  – внешние поверхностные распределенные силы.

• **Пример постановки задачи (С.М. Алейников, С.В. Иконин, 1990)** о пространственной деформации поверхности упругого слоя переменной толщины от действия вертикальной нагрузки.

Рассматривается однородный упругий континуум  $D$  в форме пространственного клина  $0 \leq x \leq \infty$ ,  $-\infty \leq y \leq 0$ ,  $0 \leq z \leq x \operatorname{tg} \alpha$  с центральным углом при ребре  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Наклонная плоскость  $S_1$  полностью закреплена. К горизонтальной поверхности клина  $S_2$  в пределах конечной области  $F$  приложена распределенная нагрузка  $p(\xi, \eta)$ . Упругие свойства континуума  $E$ ,  $\mu$ . Итоговые силы не учитываются.

Требуется определить осадку  $W(x, y)$  поверхности  $S_2$ .

Решение представлено в виде

$$W(x, y) = \iint_F \omega(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

В качестве функции Грина использован приближенный алгебраический аналог

$$\omega(x, y, \xi, \eta) = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \sum_{k=1}^4 a_k / \sqrt{(R/R_1)^2 + k^2 b^2} \right],$$

где  $\omega(x, y, \xi, \eta)$  – осадка поверхности  $S_2$  в точке  $N(x, y)$  от нормально приложенной к этой поверхности в точке  $M(\xi, \eta)$  единичной сосредоточенной силы:

$$\eta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}; \quad R_1 \neq \sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

где  $a, k, b$  – таблично-заданные коэффициенты.

Получены решения для круглой и квадратной загруженных площадок, построены изолинии равных осадок поверхности.

Рекомендуем обратить внимание на книгу С.М. Алейникова (2000).



**Формула Грина.** Рассматривается напряженно деформированное состояние трехмерного типа, занимающего область  $S$ , ослабленную полостями  $S_0$  и ограниченного поверхностью  $\Gamma$ . Материал области изотропный линейно-деформируемый. Объект подвержен действию массовых сил  $X_i$  и поверхностных нагрузок (или реакций) на границе  $\Gamma$ . Состояние тела характеризуется полями перемещений  $U_i$ , относительных деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и внутренних напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Принимаются смешанные граничные условия. На части границы  $\Gamma_u$  заданы кинематические условия первой краевой задачи

$$u_i(N) = u_i^0(N); \quad N \in \Gamma_u,$$

где  $u_i^0(N)$  – известные функции, представляющие распределение перемещений на границе.

На части  $\Gamma_\sigma$  выполняются статические условия нагружения

$$P_i(N) = P_i^0(N) = \sigma_{ij}(N) n_{ij}(N); \quad N \in \Gamma_\sigma,$$

где  $n_{ij}(N)$  – направляющие косинусы внешней единичной нормали поверхности  $\Gamma$ .

Вводится в рассмотрение основное и вспомогательное состояние с использованием теоремы Бетти о взаимности суммарных работ, соответствующих компонентом двух состояний деформируемого тела  $S$ . Работа поверхностных нагрузок и реакций представляется интегральными выражениями на  $\Gamma$ , и работа массовых сил будет выражаться объемными интегралами по  $S$ .

Формула Грина представлена в виде обобщенного функционального состояния:

$$\int_S x_i^* u_i^* ds + \int_\Gamma P_i^{(n)*} u_i^{(n)*} d\Gamma = \int_S x_i u_i^* ds + \int_\Gamma P_i^{(n)} u_i^{(n)} d\Gamma.$$

Распределение контактных напряжений под жестким фундаментом: круглым при центральной нагрузке

$$\sigma_z = \frac{F}{\pi z^2 2\sqrt{1-p^2/z^2}};$$

круглым при внецентренной нагрузке (К.Е. Егоров)

$$\sigma_z = \frac{\left(\frac{3eg}{z^2} + 1\right) F}{2\pi z^2 \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}};$$

ленточные при внецентренной нагрузке

$$\sigma_z = \frac{F}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left( 1 + 2 \frac{ex}{a^2} \right),$$

где  $r$  – радиус круглого жесткого фундамента;  $\rho$  – расстояние от центра фундамента до рассматриваемой точки;  $a$  – полуширина ленточного фундамента.

Вертикальные напряжения по оси площадок в форме круга вычисляют по формулам:

фундамент гибкий

$$\sigma_z = p \left[ 1 - \frac{1}{(1 + r^2/R^2)^{3/2}} \right];$$

фундамент жесткий

$$\sigma_z = \frac{F}{\pi R^2} \left[ \frac{0,5}{1 + (z/R)^2} + \frac{(z/R)^2}{[1 + (z/R)^2]^2} \right].$$

## 8.2. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Напряжения в любой точке основания ленточного фундамента от действия вертикальной, горизонтальной силами и моментом можно вычислять по формулам А.Я. Медведева (1958)

Сосредоточенная сила:

$$\sigma_y = \frac{p}{\pi a} \left\{ \frac{\xi\eta[A + 2\eta(\eta - 2\beta)]}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} c_1 - \left[ \frac{1}{2} - \frac{\eta A(\eta - 2\beta) - 2\xi^2\eta^2}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} \right] S_1 + \frac{S_2}{2} \right\};$$

$$\sigma_x = -\frac{p}{\pi a} \left\{ \frac{\xi\eta[A + 2\eta(\eta - 2\beta)]}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} c_1 + \left[ \frac{3}{2} + \frac{\eta A(\eta - 2\beta) - 2\xi^2\eta^2}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} \right] S_1 + \frac{S_2}{2} \right\};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{p}{\pi a} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \frac{\eta A(\eta - 2\beta) - 2\xi^2\eta^2}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} \right] c_1 - \frac{\xi\eta[A + 2\eta(\eta - 2\beta)]}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} S_1 - \frac{c_2}{2} \right\},$$

где

$$\xi = x/a; \quad \eta = -y/a; \quad \beta = \ln(3-4\mu)/2\pi; \quad A = \xi^2 - \eta^2 - 1;$$

$$c_1 = \frac{e^{-\beta(\varphi_1 - \varphi_2)}}{\sqrt{p_1 p_2}} \cos \left[ \beta \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \right];$$

$$c_2 = \frac{e^{\beta(\varphi_1 - \varphi_2)}}{\sqrt{p_1 p_2}} \cos \left[ \beta \ln \frac{p_2}{p_1} - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \right];$$

$$S_1 = \frac{e^{-\beta(\varphi_1 - \varphi_2)}}{\sqrt{p_1 p_2}} \sin \left[ \beta \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \right];$$

$$S_2 = \frac{e^{\beta(\varphi_1 - \varphi_2)}}{\sqrt{p_1 p_2}} \sin \left[ \beta \ln \frac{p_2}{p_1} - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \right];$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi - 1}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi + 1};$$

$$p_1 = \sqrt{(\xi^2 - 1)^2 + \eta^2}; \quad p_2 = \sqrt{(\xi^2 + 1)^2 + \eta^2}.$$

Горизонтальная сила:

$$\sigma_y = -\frac{Q}{\pi a} \left\{ \left[ \frac{1 - 4\beta\eta - 4\beta^2}{2(1 + 4\beta^2)} - \frac{\eta A(\eta + 2\beta) - 2\xi^2\eta^2}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} \right] c_1 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{2\beta\xi}{1 + 4\beta^2} + \frac{\eta\xi A + 2\xi\eta^2(\eta + 2\beta)}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} \right] S_1 - \frac{1}{2(1 + 4\beta^2)} [(1 + 4\beta\eta - 4\beta^2)c_2 + 4\xi\beta S_2] \right\};$$

$$\sigma_x = -\frac{Q}{\pi a} \left\{ \left[ \frac{3(1 - 4\beta\eta - 4\beta^2)}{2(1 + 4\beta^2)} + \frac{\eta A(\eta + 2\beta) - 2\xi^2\eta^2}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} \right] c_1 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{6\beta\xi}{1 + 4\beta^2} - \frac{\eta\xi A + 2\xi\eta^2(\eta + 2\beta)}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} \right] S_1 + \frac{1}{2(1 + 4\beta^2)} [(1 + 4\beta\eta - 4\beta^2)c_2 + 4\xi\beta S_2] \right\};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Q}{\pi a} \left\{ \left[ \frac{2\beta\xi}{1 + 4\beta^2} - \frac{\eta\xi A + 2\xi\eta^2(\eta + 2\beta)}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} \right] c_1 - \left[ \frac{1 - 4\beta\eta - 4\beta^2}{2(1 + 4\beta^2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\eta A(\eta + 2\beta) - 2\xi^2\eta^2}{A^2 + 4\xi^2\eta^2} \right] S_1 - \frac{1}{2(1 + 4\beta^2)} [4\beta\xi c_2 - (1 + 4\beta\eta - 4\beta^2)S_2] \right\}.$$

Момент:

$$\sigma_x = -\frac{M}{\pi a^2} \left\{ \left[ \frac{3(\eta + 2\beta)}{1 + 4\beta^2} - \frac{2\eta A}{A^2 + 4\xi^2 \eta^2} \right] c_1 - \left[ \frac{3\xi}{1 + 4\beta^2} - \frac{4\xi \eta^2}{A^2 + 4\xi^2 \eta^2} \right] S_1 - \frac{1}{1 + 4\beta^2} [(\eta - 2\beta)c_2 + \xi S_2] \right\};$$

$$\sigma_y = -\frac{M}{\pi a^2} \left\{ \left[ \frac{\eta + 2\beta}{1 + 4\beta^2} + \frac{2\eta A}{A^2 + 4\xi^2 \eta^2} \right] c_1 - \left[ \frac{\xi}{1 + 4\beta^2} + \frac{4\xi \eta^2}{A^2 + 4\xi^2 \eta^2} \right] S_1 + \frac{1}{1 + 4\beta^2} [(\eta - 2\beta)c_2 + \xi S_2] \right\};$$

$$\tau_{xy} = \frac{M}{\pi a^2} \left\{ \left[ \frac{\xi}{1 + 4\beta^2} - \frac{4\xi \eta^2}{A^2 + 4\xi^2 \eta^2} \right] c_1 + \left[ \frac{\eta + 2\beta}{1 + 4\beta^2} - \frac{2\eta A}{A^2 + 4\xi^2 \eta^2} \right] S_1 - \frac{1}{1 + 4\beta^2} [\xi c_2 - (\eta - 2\beta)S_2] \right\}.$$

По решению Nishida (1996) напряжения на глубине  $z$  от действия равномерно распределенной по круглой площадке нагрузки интенсивностью  $P$  на глубине  $h$  (рис. 8.1) вычисляют по формуле.

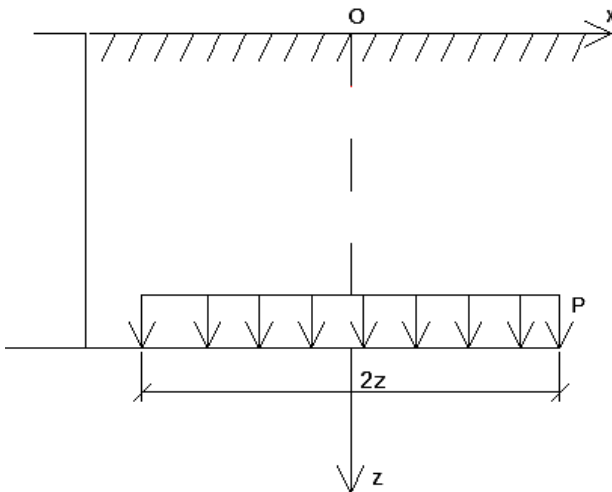


Рис. 8.1. Схема расположения нагруженной круглой площадки

$$\sigma_z = \frac{P}{4(1-\mu)} \left\{ (1-2\mu)(z-h) \left( \frac{1}{\sqrt{z^2+(x+h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+(x-h)^2}} + \frac{1}{z-h} - \frac{1}{z+h} \right) - \left[ \left( \frac{z+h}{\sqrt{t+(x+h)^2}} \right)^3 - 1 \right] \frac{3(3-4\mu)z(z+h)^2 - 3h(x+h)(5z-h)}{3(z+h)^3} + 1 - \left( \frac{z-h}{\sqrt{z^2+(z-h)^2}} \right)^3 + \frac{6hz}{(z+h)^2} \left[ \left[ 1 - \left( \frac{z+h}{\sqrt{z^2+(z-h)^2}} \right)^5 \right] \right] \right\}.$$

Для примера в табл. 8.1 приведены относительные напряжения.

### 8.1. Величины относительных напряжений ниже центра площадки

z/z	μ	Напряжение $\sigma_{z/p}$ при h/z, равном				
		0	1	2	3	8
0	0,25	1,00	0,71	0,57	0,53	0,50
1		0,64	0,46	0,39	0,29	0,26
2		0,28	0,18	0,15	0,13	0,11
4		0,09	0,07	0,06	0,09	0,03
0	0,5	1,00	0,75	0,58	0,54	0,50
1		0,64	0,45	0,38	0,35	0,34
2		0,28	0,22	0,18	0,15	0,14
4		0,09	0,08	0,07	0,04	0,04

**Определение осадки жесткого заглубленного прямоугольного фундамента.** Приближенное значение осадки жесткого фундамента можно определить, используя установленное рядом исследователей равенство объема эпюры осадок жесткого и гибкого фундаментов одинаковых размеров, несущих равную нагрузку. Это положение можно применить и при определении осадки прямоугольного фундамента, в том числе и заглубленного, как это было сделано при определении приближенного значения осадки жесткого круглого заглубленного фундамента [37]. Если представить поверхность объемной эпюры осадок в виде эллиптического параболоида, то средняя осадка прямоугольного фундамента  $W_m$  может быть вычислена по следующей формуле:

$$W_m = \frac{2W_c + W_y}{3},$$

где  $W_c$  – осадка центра прямоугольного фундамента;  $W_y$  – осадка его угла.

Для определения перемещений от сосредоточенной силы, приложенной к линейно-деформируемому полупространству на некоторой глубине от его поверхности, используется решение Р. Миндлина. Однако оно обладает известным недостатком, вытекающим из постановки задачи: напряжения и деформации в равных условиях воспринимаются всей средой полупространства, находящейся как ниже глубины приложения нагрузки, так и выше ее.

Ввиду отсутствия решений, лишенных этого недостатка, возможно предложить способ приближенного вычисления осадки жесткого прямоугольного заглубленного фундамента, используя для определения  $W_c$  и  $W_y$  решение Р. Миндлина и метод угловых точек [45].

Осадка угловой точки  $O$  (см. рис. 8.1) от общей нагрузки на фундамент  $N_0$  определяется как сумма осадок этой точки от двух, равномерно нагруженных давлением  $p_0 = N_0/ab$ , прямоугольных треугольников  $I$  и  $II$  (для которых точка  $O$  является общей вершиной).

Обозначим для прямоугольного фундамента с размерами сторон  $2a$  и  $2b$  при глубине его заложения  $H$  отношения  $a/b = n_0$  и  $H/b = \lambda_0$ . Тогда формулу для вычисления осадки можно записать в таком виде:

$$W_m = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{N_0}{2b} \overline{W}_m,$$

где

$$\overline{W}_m = \frac{1}{3} \left[ 4\overline{W}_{y2}(n = n_0; \lambda = \lambda_0) + \overline{W}_{y2}(n = n_0; \lambda = \lambda_0/2) \right].$$

Учитывая, что  $W_y = W_y^I + W_y^{II}$ , после интегрирования окончательно получаем:

$$W_y = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{N_0}{b} \overline{W}_y(n, \lambda) = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} p_0 b n \overline{W}_y(n, \lambda),$$

где

$$\overline{W}_y(n, \lambda) = \frac{1}{8\pi n(1-\mu_0)^2} \left\{ \frac{2\lambda^2 n}{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2}} \left[ \frac{1}{n^2+4\lambda^2} + \frac{1}{1+4\lambda^2} \right] + \frac{8(1-\mu_0)^2 - (3-4\mu_0)}{2} \left[ \ln \frac{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2} + n}{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2} - n} + n \ln \frac{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2} + 1}{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2} - 1} \right] + \frac{3-4\mu_0}{2} \left[ \ln \frac{\sqrt{1+n^2} + n}{\sqrt{1+n^2} - n} + n \ln \frac{\sqrt{1+n^2} + 1}{\sqrt{1+n^2} - 1} \right] + 4\lambda[4(1-\mu_0)^2 - (3-4\mu_0)] \arccos \sqrt{\frac{4\lambda^2(1+n^2+4\lambda^2)}{(1+4\lambda^2)(n^2+4\lambda^2)}} \right\}.$$

Вычисленные значения  $\overline{W}_y(n, \lambda)$  при  $\mu_0 = 0,3$  приведены в табл. 8.1.

В таблице 8.2 приведены значения  $\overline{W}_m$ , вычисленные для тех же значений  $n$  и  $\lambda$ .

Рекомендуемую формулу для определения осадки прямоугольного фундамента на поверхности ( $H = \lambda = 0$ ) можно сопоставить с известными решениями других авторов. Так, для  $n_0 = 2$  получим значения  $\overline{W}_m$ : по формуле предложенному решению  $\overline{W}_m = 0,638$ , по формуле

## 8.2. Величины перемещений угловой точки и середины фундамента

$\lambda$	Значения $\overline{W}_y(n, \lambda)$ при $n$ , равном			Значения $\overline{W}_m$ при $n$ , равном		
	1,0	1,5	2,0	1,0	1,5	2,0
0,0	0,561	0,453	0,383	0,935	0,754	0,638
0,5	0,494	0,410	0,352	0,835	0,690	0,592
1,0	0,423	0,359	0,314	0,729	0,616	0,536
2,0	0,352	0,300	0,264	0,611	0,519	0,457
3,0	0,323	0,272	0,239	0,559	0,472	0,415
4,0	0,307	0,257	0,224	0,527	0,442	0,387
5,0	0,297	0,247	0,215	0,509	0,425	0,370
7,0	0,286	0,236	0,204	0,486	0,403	0,346
10,0	0,278	0,228	0,196	0,469	0,386	0,333

Ф. Шлейхера [80]  $\overline{W}_m = \omega/n_0 = 0,65$ ; по формуле М.И. Горбунова-Посадова [17]  $\overline{W}_m = k_0/\sqrt{n_0} = 0,61$ . Получаемые коэффициенты отличаются между собой менее чем на 5%.

Уменьшение значений  $W_m$  с глубиной примерно аналогично известным опытным данным [36].

**Определение крена заглубленного прямоугольного фундамента с использованием уравнений Р. Миндлина (В.В. Леденев, А.И. Ананьин, 1971).**

Пусть горизонтальная площадка с размерами  $2a \times 2b$  расположена на глубине  $h$  (рис. 8.2) [37].

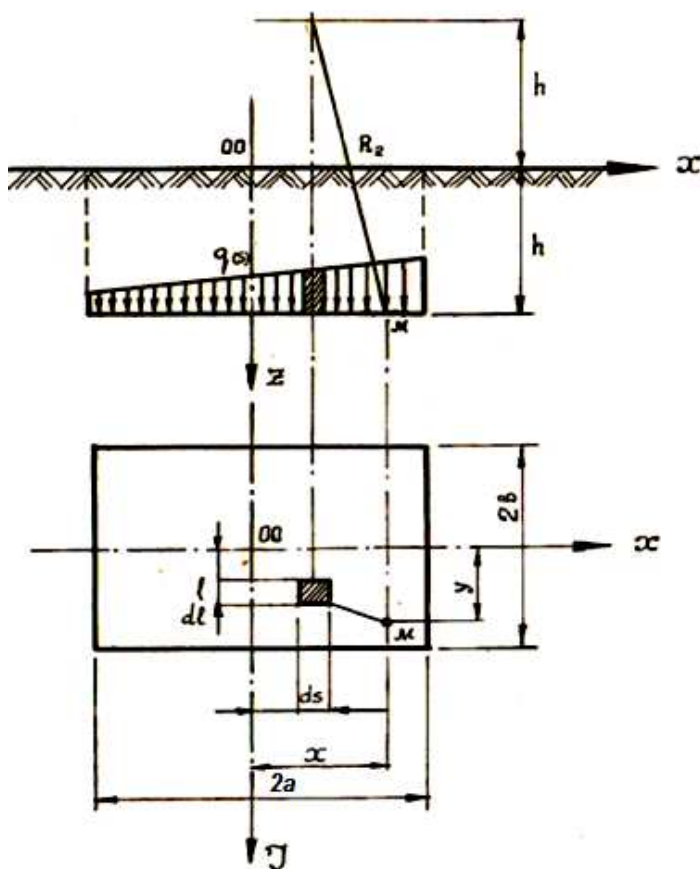


Рис. 8.2. Схема к определению крена жесткого заглубленного штампа



Осадка любой точки  $M(x, y)$  от действия сосредоточенной силы  $F(s, \eta)$  может быть вычислена по формуле Р. Миндлина:

$$\omega(x, y, s, \eta) = \frac{F(s, \eta)}{16\pi(1-\mu)G} \left[ \frac{3-4\mu}{R_1} + \frac{8(1-\mu)^2 - (3-4\mu)}{R_2} + \frac{(3-4\mu)4h^2 - h^2}{R_2^3} + \frac{24h^4}{R_2^3} \right],$$

где  $R_1^2 = (x-s)^2 + (y-\eta)^2$ ,  $R_2^2 = R_1^2 + 4h^2$ .

При  $F=1$  это уравнение является функцией влияния осадка (функцией Грина). Перемещение от любой нагрузки  $f(s, \eta)$  может быть определено с помощью интеграла

$$\omega(x, y) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \bar{\omega}(x, y, s, \eta) f(s, \eta) ds d\eta.$$

Для линейного изменения нагрузки

$$f(s, \eta) = a + \beta s.$$

С учетом этого после интегрирования имеем:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & \frac{(\alpha + \alpha\beta\xi)b}{16\pi(1-\mu)G} \left\{ (3-4\mu) \left[ \sum_{i=1}^2 y_i \ln \frac{p_{\tau_i} + x_1}{p_{\tau_i} - x_2} + \sum_{i=1}^2 x_i \ln \frac{p_i + y_1}{p_{i+2} - y_2} \right] - \right. \\ & - 4\lambda(1-2\mu)^2 \left[ \sum_{i=1}^2 \operatorname{arctg} \frac{x_i y_1}{2\lambda \tau_i} + \sum_{i=1}^2 \operatorname{arctg} \frac{x_1 y_2}{2\lambda \tau_i + 2} \right] + (5-12\mu + 8\mu^2) \times \\ & \times \left[ \sum_{i=1}^2 y_i \ln_n \frac{\tau_{2i} + x_1}{\tau_{2i} - x_2} + \sum_{i=1}^2 x_i \ln \frac{\tau_i + y_1}{\tau_{i+2} - y_2} \right] + \\ & \left. + \left[ \frac{2\lambda^2 y_1}{y_1^2 + 4\lambda^2} \sum_{i=1}^2 \frac{x_i^3 + x_i y_1^2 + 8\lambda^2 x_i}{(x_i^2 + 4\lambda^2) \tau_{i+2}} \right] \right\} + \frac{\beta b^2}{16\pi(1-\mu)G} \times \\ & \left\{ \frac{(3-4\mu)}{2} \left[ \sum_{i=1}^2 (y_i p_{2i} - y_i p_{2i-1}) + \sum_{i=1}^2 (-1)^i (4\lambda^2 + x_i^2) \ln \frac{\tau_i + y_1}{\tau_{i+2} - y_2} \right] - \right. \\ & \left. - 2\lambda^2 (5-8\mu) \sum_{i=1}^2 (-1)^i - 8\lambda \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i y_i}{(4\lambda^2 + x_i^2) \tau_i} + \frac{(-1)^i y_2}{(4\lambda^2 + x_i^2) \tau_{i+2}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $\xi = x/a$ ,  $n = a/b$ ,  $\lambda = n/b$ ,  $x_1 = (\xi + 1)/n$ ,  $\xi = y/b$ ,  $y_1 = \xi + 1$ ,  $y_2 = 1 - \xi$ ,  $p^2 = x^2 + y^2$ ,  $z^2 = \rho_i + 4\lambda^2$ .

Уравнение для осадки от равномерно распределенной нагрузки получим, положив  $\alpha = 0, \beta = 0$ . При линейной нагрузке, которая приводится к одной паре  $\alpha = 0, \beta = 3M/4ba^3$ . Получается при этом поверхность осадок может быть использована для приближенного определения крена фундамента. С той целью подберем такую плоскость  $\omega(x) = kx$ , которая имела бы минимум среднеквадратичного отклонения от поверхности осадок

$$\int_A [\omega(x, y) - kx]^2 dA = \min.$$

Коэффициент  $k$  равен среднему значению тангенса угла наклона на гибкой площадке и его можно считать приближенным значением крена жесткого фундамента

$$i = \iint \frac{\omega(x, y) x dx dy}{x^2 dx dy} = \bar{i} M / a^3 E.$$

После численного интегрирования получим

$$i = \frac{1 - \mu^2}{Y} \frac{3M}{4a^2} \bar{i}$$

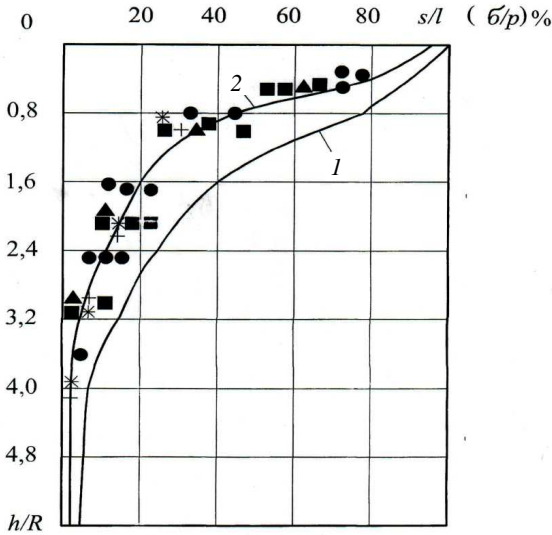
Некоторые величины  $\bar{i}$  для  $\mu = 0,3$  приведены в табл. 8.3.

Изменение крена с глубиной можно аппроксимировать простой зависимостью

$$i_z = - \frac{M \left( 1 + \frac{1}{1 + 2\sqrt{\lambda^3}} \right)}{a^3 E} (0,054 + 0,18n).$$

### 8.3. Значения безразмерных функций $\bar{i}$

$\lambda \backslash n$	0,25	0,5	1,0	2,0
0	0,142	0,312	0,501	0,826
0,5	0,113	0,303	0,473	0,749
1	0,091	0,215	0,344	0,648
2	0,078	0,172	0,265	0,538
3	0,072	0,158	0,255	0,480
5	0,070	0,151	0,244	0,396
По СНиП 2.82.01.-83*				
0	0,136	0,373	0,455	0,793



**Рис. 8.3.** Теоретическая (1) и экспериментальная (2) кривые затухания напряжений по глубине основания (Л.Г. Абрамов, В.К. Дермелев, И.Н. Глуховцев, 1968)

Экспериментальные эпюры напряжений по глубине приведены на рис. 8.3, а теоретические эпюры распределения напряжений и перемещений в основании штампов – на рис. 8.4.

**Уравнения технической теории изгиба тонких плит.** Пусть срединная плоскость пластинки толщиной  $h$  занимает область  $S$  с границей  $L$ , она расположена в плоскости  $xOy$  и нагружена перпендикулярными к ней силами и моментами. Используя гипотезу прямых нормалей Кирхгофа, напряженное состояние может быть выражено функцией  $W(x, y)$ , определяющей перемещения точек срединной плоскости в направлении оси  $z$ , перпендикулярной пластине.

Напряжения вычисляют по формулам:

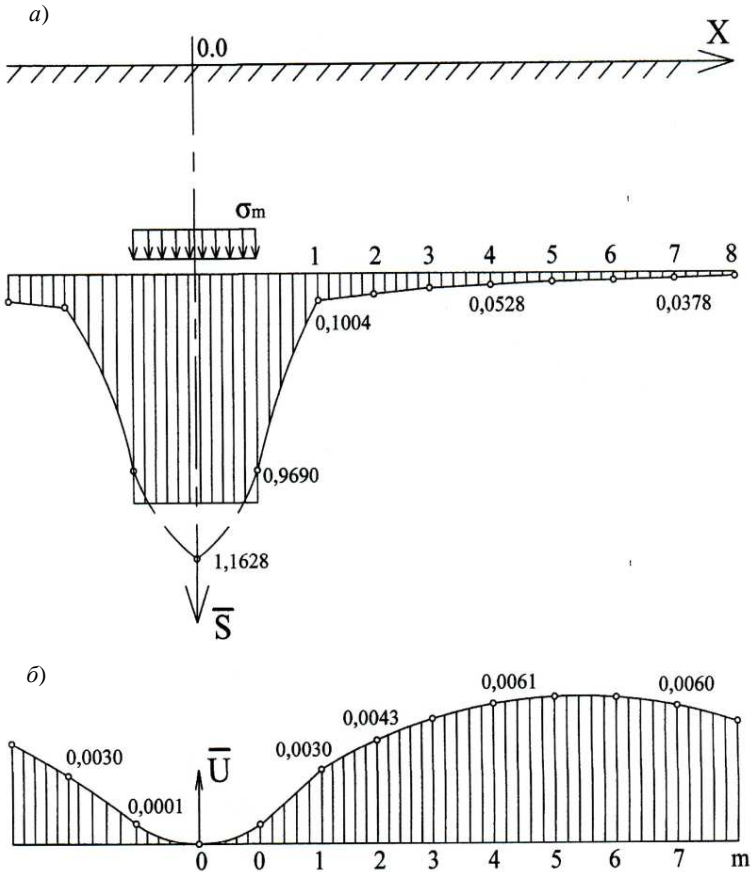
$$\sigma_x = -\frac{Ez_1}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez_1}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right);$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez_1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{E(h^2 - 4z_1^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W;$$

$$\tau_{xz} = -\frac{E(h^2 - 4z_1^2)}{8(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W;$$

$$\sigma_z = -\frac{E(h^2 - 4/3z_1^2)}{8(1-\mu^2)} \nabla^2 W - \frac{1}{2} W(x, y),$$

где  $z'$  – координата точек, в которой определяется напряженное состояние с учетом знака;  $(x, y)$  – интенсивность распределенной нагрузки, нормальной к срединной плоскости.



**Рис. 8.4.** Эпюры осадок (а) и горизонтальных перемещений (б) по оси  $Ox$  от действия равномерно распределенной нагрузки по площадке внутри упругого полупространства (по решению В.В. Леденева, 1980 с использованием уравнений Р. Миндлина)

**Формулы для определения изгибающих моментов ( $M_x, M_y$ ) и крутящих ( $M_{xy}, M_{yx}$ ), поперечных сил ( $Q_x, Q_y$ ), приходящихся на единицу длины срединной поверхности в площадках, перпендикулярных к осям  $x$  и  $y$  имеют вид**

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = -M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz;$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz.$$

После подстановки в эти выражения напряжений и интегрирования получаем:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y};$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W; \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W,$$

где  $D = -\frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость.

Напряжения можно вычислить через усилия и получить следующим образом:

$$\sigma_x = -\frac{M_x}{I} z_1; \quad \sigma_y = -\frac{M_y}{I} z_1; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{M_{xy}}{I} z_1;$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x S_y}{I}; \quad \tau_{yz} = -\frac{Q_y Q_x}{I}; \quad I = h^3 / 12.$$

Статические моменты  $S_y$  и  $S_x$  относительно осей  $y$  и  $x$  вычисляются для части единичной площади, расположенной по одну сторону от того уровня, на котором определяются касательные напряжения.

**Разрешающее уравнение для изотропных прямоугольных плит постоянной толщины на жестких опорах имеет вид**

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = \frac{1}{D} [p(x, y) + \frac{\partial m_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_y(x, y)}{\partial y}].$$

Для ортотропных плит разрешающее уравнение сводится к виду

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D_x};$$

$$\alpha = \frac{2(D_1 + 2D_{xy})}{D_x}; \quad \beta = D_y / D_x;$$

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12}; \quad D_y = \frac{E'_y h^3}{12}; \quad D_1 = \frac{E'_y h^3}{12}; \quad D_{xy} = \frac{Gh^3}{12}; \quad H = D_1 + 2D_{xy}.$$

Для изотропной плиты  $\alpha = 2$ ;  $\beta = 1$ .

**Пример решения задачи о расчете плит** (решение А.П. Пшеничника) [58].

Дифференциальное уравнение изотропной плиты на упругом основании с постоянным коэффициентом жесткости:

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{\bar{q} - \bar{r}}{D},$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $r = C_3 W$ ;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ .

Аналитические методы расчета строятся, как правило, на основе вариационного принципа Лагранжа. Равновесному состоянию системы соответствует стационарное значение ее полной энергии  $\mathcal{E}$ , а признаком стационарности является равенство нулю вариации  $\delta_s$ , соответствующее произвольным бесконечно-малым возможным перемещения системы.

Потенциальная энергия деформирования:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^B \left\{ [\nabla^2 E(x, y)]^2 + C_3 D w^2(x, y) + 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right\} dx dy.$$

Потенциал воздействий:

$$V = \int_0^L \int_0^B \left\{ p(x, y) \partial x \partial y + \oint \left[ M(s) \frac{\partial W(x, y)}{\partial n} - Q(s) W(x, y) \right] \right\} \partial_s.$$

Граничные условия для плиты со свободными краями при  $x = 0$ ,  $x = L$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 + \mu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} = 0.$$

В основу расчета железобетонных плит во всех стадиях деформирования до исчерпания несущей способности положена теория деформирования железобетона с трещинами, разработанная Н.И. Карпенко (1976). Расчет плит с трещинами сводится к расчету физически нелинейных анизотропных пластин в общем случае анизотропии.

Система физических уравнений, описывающих поведение железобетонных плит с трещинами, имеет вид

$$K_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = B_{11}M_x + B_{12}M_y + B_{13}M_{xy};$$

$$K_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = B_{12}M_x + B_{22}M_y + B_{23}M_{xy};$$

$$K_{xy} = -2\frac{\partial^2 W}{\partial_x \partial_y} = B_{13}M_x + B_{32}M_y + B_{33}M_{xy};$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 W}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q,$$

где  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_{xy}$  – кривизны;  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  – изгибающие моменты;  $B_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) – коэффициенты, значения которых зависят от схемы трещин, армирования, напряжения деформированного состояния и других физических и геометрических характеристик:

$$B_{13} > 0, B_{23} > 0 \quad \text{при } M_{xy} > 0;$$

$$B_{13} < 0, B_{23} < 0 \quad \text{при } M_{xy} < 0.$$

Разрешающие уравнения анизотропной плиты имеют вид

$$\begin{aligned} & \overline{B}_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (2\overline{B}_{12} + 4\overline{B}_{33}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + \\ & + 4 \left( \overline{B}_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overline{B}_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \overline{B}_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \overline{C}_3 W = q_3(x, y). \end{aligned}$$

Этому уравнению соответствует функционал

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(w) = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \overline{B_{11}} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + 2 \overline{B_{12}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \overline{B_{22}} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & + 4 \overline{B_{33}} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left[ \overline{B_{13}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overline{B_{23}} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \left. \right\} dx dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{C_3} W^2 dx dy - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_3(x, y) W dx dy, \end{aligned}$$

где  $\overline{B_{ik}} = \theta B_{ik}$ ;  $\theta$  – характеристическая функция.

$$\theta(x, y) = \theta(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, y \in \Omega \\ 0, & x, y \notin \Omega \end{cases} \quad \text{или} \quad \theta(x, y) = \begin{cases} 1, & p(x, y) > 0; \\ 0, & p(x, y) < 0, \end{cases}$$

где  $p(x, y) = 0$  – уравнение линии границы плиты.

Моменты и поперечные силы в плите определяются по формулам:

$$M_x = - \left( \overline{B_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overline{B_{12}} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 \overline{B_{13}} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right);$$

$$M_y = - \left( \overline{B_{12}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overline{B_{22}} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 \overline{B_{23}} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right);$$

$$M_{xy} = - \left( \overline{B_{13}} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overline{B_{23}} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 \overline{B_{33}} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right);$$

$$Q_x = - \left[ \overline{B_{11}} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + 3 \overline{B_{13}} \frac{\partial^3 W}{\partial_x^2 \partial_y} + (\overline{B_{12}} + 2 \overline{B_{33}}) \frac{\partial^3 W}{\partial_x \partial_y} + \overline{B_{23}} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right];$$

$$Q_y = - \left[ \overline{B_{13}} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + 3 \overline{B_{23}} \frac{\partial^3 W}{\partial_y^2 \partial_x} + (\overline{B_{12}} + 2 \overline{B_{33}}) \frac{\partial^3 W}{\partial_x \partial_y} + \overline{B_{22}} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right],$$

где  $\overline{B_{11}} = B_{22} = D$ ;  $B_{12} = \mu D$ ;  $B_{23} = \frac{D(1-\mu)}{2}$ ;  $B_{13} = B_{23} = B_{32} = B_{31} = 0$ ;

$D$  – цилиндрическая жесткость.



Для плит со свободными краями вариация функционала  $\Delta = U + V$  удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению и граничным условиям.

### 8.3. ТИПЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

1. В зависимости от краевых условий различают следующие типы задач.

Первая основная задача – определить упругое равновесие тела по заданным на его поверхности внешним усилиям.

Вторая основная задача – определить упругое равновесие тела по заданным смещениям точек его границы  $L$ .

Основная смешанная задача – определить поля смещений и напряжений, когда на одной части границы тела заданы внешние усилия, а на остальной – упругие смещения.

2. В зависимости от характера воздействия различают задачи:

– статические и квазистатические: в первом случае деформирование происходит настолько медленно, что инерционными силами пренебрегают, квазистатическое напряженное состояние бывает при постоянных во времени инерционных силах (задачи ползучести при постоянных во времени внешних воздействиях);

– динамические: в уравнениях равновесия учитывают инерционные составляющие объемных сил:

$$X(t) = \rho \ddot{u}(t), \quad Y(t) = -\rho \ddot{v}(t), \quad Z(t) = -\rho \ddot{w}(t);$$

– температурные: определяют напряжения и деформации при изменении температурного поля; для упругих температурных задач закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ik} = k \varepsilon_{jj} \delta_{ik} + 2\mu \left( \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{jj} \right) - k_a (T - T_0) \delta_{ik}.$$

В зависимости от формы тела и расположения нагрузки различают задачи:

- об объемном напряженном состоянии;
- о полном напряженном состоянии;
- о тонкостенных системах (тонких пластинах и оболочках);
- об осесимметричных задачах для тел вращения.

При объемном напряженном состоянии решения определяются следующими системами дифференциальных уравнений:

статические или динамические уравнения

$$\sigma_{ik,i} + \rho g_i = 0 \quad \text{или} \quad \rho \ddot{u}_i;$$

геометрические уравнения

$$2\varepsilon_{ik} = u_{i,k} + u_{k,i};$$

физические уравнения

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ik}.$$

Система содержит 15 уравнений: шесть компонентов тензора напряжений  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ , шесть компонентов тензора деформации  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx})$  и три компонента вектора перемещений  $(u, v, w)$ .

Кроме того, должны удовлетворяться условия совместности (неразрывности) деформаций:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jt}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} = 0,$$

в более компактной форме

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0.$$

Применяют следующие математические методы решения задач:

- прямой способ – непосредственное интегрирование уравнений теории упругости;
- обратный способ – задаются перемещениями как функциями координат точки, определяют деформации, по ним – напряжения, зная которые, можно установить внешние нагрузки, удовлетворяющие заданным перемещениям;
- полуобратный метод – задаются частью внешних сил и частью перемещений и определяют остальные;
- с использованием функции напряжений (плоская задача, а в ряде случаев, и объемная)

$$\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2; \quad \sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2; \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \varphi / (\partial x \partial y).$$

После подстановки их в уравнение совместности получают

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Необходимо найти вид функции напряжения  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей этому бигармоническому уравнению и граничным условиям.

**Плоское деформированное состояние.** Оно реализуется в протяженных телах на достаточном удалении от их торцов при нагружении силами, равномерно распределенными вдоль образующих ( $\varepsilon_z = 0$ ).

Решают два уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + x = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + y = 0,$$

одно уравнение совместности деформации

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{или} \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

**Плоское напряженное состояние.** Оно возникает в тонкой пластинке, нагруженной усилиями в ее плоскости, равномерно распределенными по толщине. Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  равны нулю на обеих плоскостях и по толщине.

**Краевые задачи вязкоупругости.** Система уравнений изотермической изотропной линейной задачи вязкоупругости

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t R_1(t-\tau) [d\varepsilon_{kk}(\tau) / d\tau] d\tau + 2 \int_{-\infty}^t R_2(t-\tau) [d\varepsilon_{ij}(\tau) / d\tau] d\tau;$$

$$S_{ij} = 2 \int_{-\infty}^t R_2(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau;$$

$$2\varepsilon_{ij}(t) = u_{ij}(t) + u_{ji}(t),$$

где  $i$  обозначает частное дифференцирование по  $x_i$ .

**Уравнения состояния** (определяющие соотношения для напряжений, теплового потока, энтропии, внутренней энергии и т.д. (J.T. Oden, 1972; C. Truesdell, 1972).

При составлении этих уравнений должны пользоваться следующими правилами:

уравнения состояния должны согласовываться с физическими законами сохранения: массы, баланса и момента количества движения, сохранения энергий и неравенства Клаузиуса–Дючюна;

принципом детерминизма, т.е. переменные состояния ( $\sigma^{ij}$ ,  $u$ ,  $\eta$ ,  $\psi$ ) определяются движением и температурой вплоть до настоящего времени включительно (исключается изменения материала от будущих событий);

равноприсутствия: любая величина, принимаемая в качестве переменной в каком-нибудь одном уравнении состояния, должна присутствовать во всех уравнениях состояния;

локальное действие: на переменные состояния в точке  $x$  несущественно влияют значения независимых переменных в материальных точках, удаленных от  $x$ ;

материальная независимость от системы отсчета: уравнения состояния инвариантны относительно преобразований наблюдателя; здесь делается выбор о том, что определяющие функционалы зависят от предыстории графиков движения, а не от предыстории самого движения;

материальная симметрия: форма уравнений состояния должна быть инвариантна относительно группы унимодулярных преобразований материальной системы отсчета.

**Механика силового сопротивления, деформирования и разрушения железобетона.** Наиболее значительными работами в этом направлении в последнее время являются исследования: В.М. Бондаренко (1982, 1984, 2002), А.А. Гвоздева (1949, 1964), Н.И. Карпенко (1965, 1976, 1996), Г.А. Гениева (1981), В.И. Колчунова (1988 – 2004), Л.Р. Маиляна (2007) и др.

**Исходные положения механики деформируемого твердого тела** (В.М. Бондаренко, В.И. Колчунов, 2004):

– понятие о «малости» элементарного тела по сравнению с генеральными размерами;

– гипотеза о сплошности, используемая часто в виде условия о совместности деформации компонентов композиционных материалов (заметим, что в сыпучих средах, когда нет сил сцепления, возможно образование разрывов сплошности без изменения внутренней энергии);

– постулат о суперпозиции состояний, перенесенный из квантовой механики (Е. Шредингер), вводимый в виде предпосылки о «равнодоступности» Фрама–Каминского, заимствованный из физхимии, или в виде гипотезы о взаимонезависимости частных деформаций (С.Е. Фрайфельд, В.М. Бондаренко);

– принцип суперпозиции для деформации ползучести (В. Больцман–Б. Персоц);

– энтропийная постановка Гульдберга–Вааге для процессов, протекающих во времени при отсутствии внешних возмущений;

– закон сохранения энергии для тел конечных размеров с надежной энергетической изоляцией.

Кроме того, при решении прикладных задач инженерных дисциплин используются инварианты, вытекающие непосредственно из опытов или из следующих за ними обобщений. К таким инвариантам, например, относятся:

- применяемые повсеместно инварианты аффинноподобия;
- энергетические инварианты теории прочности, в частности, о постоянстве потенциальной энергии разрушения материала вне зависимости от режима нагружения М. Рейнера;
- о независимости площади петли гистерезиса от частоты при стационарных колебаниях тел Н.Н. Давиденкова.

**Балки с гибкой стенкой** (В.В. Бирюлев и др., 1990) – конструкции, которые могут эксплуатироваться после потери местной устойчивости стенки (образование «хлопунов»). Установлено, что такие балки работают достаточно надежно, а после снятия нагрузки хлопуны исчезают. Нагрузка, вызывающая потерю местной устойчивости, существенно меньше предельной. Форма потери устойчивости зависит от действующих нагрузок ( $M$ ,  $N$ ,  $Q$ ) и их сочетаний.

Выделены следующие стадии работы балки. Первая стадия почти не отличается от работы балки с обычной стенкой и оканчивается потерей местной устойчивости стенки. Далее (вторая стадия) наступает стадия закритической упругой работы стенки. Между деформацией стенки и нагрузкой устанавливается нелинейная зависимость. Эта стадия завершается в момент достижения напряжения  $\sigma_T$  в отдельных точках стенки или поясах. В третьей стадии развиваются пластические деформации в стенке и поясах. Балка переходит в предельное состояние. Затем (четвертая стадия) происходит потеря несущей способности.

В общем случае форма потери устойчивости зависит от соотношения изгибающих моментов и поперечных сил, размеров элементов.

Хрупкое разрушение стальной конструкции является одним из самых опасных видов предельных состояний первой группы. Теориями хрупкого разрушения являются: дислокационная, энергетическая, статическая, классическая – сопротивление отрыву.

Основными факторами хрупкого разрушения сварных конструкций являются (В.В. Бирюлев и др., 1990): чувствительность стали к надрезам, конструктивные надрезы, остаточные сварочные напряжения, старение и наклеп стали, усталостные трещины, дефекты сварных швов, перегрузки и др. Факторы перечислены по мере уменьшения частоты случаев.

Отмечается повышение вероятности хрупкого разрушения элементов конструкции с ростом уровня номинальных растягивающих

напряжений. С увеличением срока эксплуатации конструкции до отказа резко уменьшается его долговечность с хрупким разрушением элементов, повышается уровень номинальных напряжений, снижается температура разрушения элементов.

К факторам хрупкого разрушения, кроме того, относят: снижение температуры и скорости деформирования, реализацию условий однородного плоского или объемного напряженного состояния при растягивающих главных напряжениях, концентрацию напряжений как неоднородное напряженное состояние при двухосном и трехосном растяжении.

Вязкость и пластичность заметно уменьшают влияние конструктивно-технологических несовершенств и дефектов конструкций на их прочность.

В работе В.В. Бирюлева и др., 1990, приведены схемы искусственного регулирования напряжений в эксплуатируемых металлических конструкциях путем: регулирования схемы нагрузки; предварительного выгиба конструкции; введения дополнительного изгибающего момента; изменения уровня опор; предварительного напряжения сжатых стержней; уменьшения расчетной длины сжатых стержней; регулирования характеристик цикла напряжения; регулирования напряжений с использованием предварительно напряженных высокопрочных элементов.

**Сдвиговые деформации. Упругость, пластичность, вязкость.** Обратимся к А. Надаи [48]. Для абсолютно твердого тела

$$\gamma_i \equiv 0; \varepsilon_m \equiv 0.$$

Для идеальной паскалевской жидкости

$$\tau_i \equiv 0; \varepsilon_m \equiv 0.$$

Другие идеализованные тела лежат в промежутке между этими.

**Упругость** – способность тела восстанавливать свою форму и объем после прекращения действия сил.

Реологическое уравнение состояния

$$\tau_i = G\gamma_i, \sigma_m = K\varepsilon_m.$$

**Нелинейная деформация сдвига.** Для сложного напряженного состояния

$$\tau_i = \varphi(\gamma_i) = G(\gamma_i)\gamma_i.$$

Для чистого сдвига

$$\tau = \varphi(\gamma).$$

Нелинейные деформации включают упругую и пластические части

$$\gamma_i = \gamma_i^e + \gamma_i^p; \quad \gamma_i^e = \tau_i / G; \quad \gamma_i^p = f(\tau_i).$$

Такое деформирование называют пластическим с упрочнением

$$d\tau_i / d\gamma_i > 0.$$

**Нелинейная объемная деформация.** Теория пластичности исходит из условия, что объемные деформации являются упругими и полностью обратимы, т.е. подчиняются закону Гука для идеально упругого линейно-деформируемого тела

$$\tau_i = G\gamma_i; \quad \sigma_m = K\varepsilon_m.$$

Для грунтов объемные деформации нелинейные и частично необратимые

$$\sigma_m = \Phi^*(\varepsilon_m) \quad \text{или} \quad \sigma_m = K(\varepsilon_m)\varepsilon_m,$$

где  $K(\varepsilon_m)$  – переменный модуль объемной деформации.

Полная объемная деформация складывается из обратимой и остаточной

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m^e + \varepsilon_m^p.$$

**Физическая и геометрическая нелинейность.** Первая из них означает изменяемость физических характеристик (модуля упругости, коэффициента Пуассона или коэффициента вязкости и др.) в зависимости от напряжения, деформации или времени. Нелинейные соотношения могут наблюдаться и при постоянных значениях этих характеристик. К примеру, связь между удлинениями и конечными деформациями. Это – геометрическая нелинейность.

**Зависимости между напряжениями и деформациями.** По А.А. Ильюшину (1947)

$$\tau_i = G\gamma_i(1 - \omega),$$

где  $\omega$  – безразмерная функция, показывающая, насколько кривая деформирования отличается от прямой ( $0 \leq \omega \leq 1$ ;  $\omega = 1$  – идеальная пластичность).

По Баху (1924)

$$\tau_i = A\gamma_i^m,$$

где  $A$  – коэффициент деформирования;  $m \leq 1$  – коэффициент упрочнения.

Для чистого сдвига

$$\tau = A\gamma^m.$$

Иногда применяют комбинированные зависимости, например,

$$\gamma_i = \tau_i / G + (\tau_i / A)^{1/m}.$$

**Вертикальные напряжения в основании конечной толщины** (К.Е. Егоров, 1992). В основу положена формула Ж. Буссинеска (1885)

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Рассматривается линейно-деформируемый слой толщиной  $H$  с координатой  $z = 0$ .

Формула Буссинеска выражается через несобственные интегралы

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi H^2} \int_0^\infty \frac{\alpha I_0\left(\frac{z}{H}\alpha\right)}{\alpha + \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha} \left[ (\operatorname{sh}\alpha + \operatorname{ch}\alpha) \operatorname{ch}\left(\frac{z}{H}\alpha\right) - \left(\frac{z}{H}\alpha\right) \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\left(\frac{z}{H}\alpha\right) \right] d\alpha.$$

При  $z = 0$

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi H^2} \int_0^\infty \frac{(\operatorname{sh}\alpha + \alpha \operatorname{ch}\alpha)}{\alpha + \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha} \alpha I_0\left(\frac{r}{H}\alpha\right) d\alpha.$$

В случае полного прилипания слоев

$$\sigma_z = \frac{P(1-\nu)}{\pi H^2} \int_0^\infty \frac{2(1-\nu)(\operatorname{ch}\alpha + \alpha \operatorname{sh}\alpha)}{(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\alpha + \alpha^2 + (1-2\nu)^2} \alpha I_0\left(\frac{r}{H}\alpha\right) d\alpha,$$

где  $\alpha$  – аргумент, изменяется от нуля до бесконечности;  $I_0\left(\frac{r}{H}\alpha\right)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$  – расстояние в горизонтальной плоскости от линии приложения  $P$ .

Последние две формулы позволяют определить вертикальные напряжения на глубине  $H$  от действия внешней нагрузки, равномерно распределенной по площади прямоугольника

$$\sigma_z = \sigma_0 - \Delta\sigma = \alpha(n, m)P,$$

где  $\sigma_0$  – вертикальное напряжение без учета трения между слоями  $m = H/h$ ;  $n = B/A$ .



**Определение реологических характеристик глинистых грунтов** (С.С. Вялов, 1992). Работа построена по результатам опытов на прямой сдвиг при различных режимах сдвигового напряжения  $\tau$ :  $\tau_u = \text{const}$  (испытания на ползучесть);  $\Delta\tau = \text{const}$  (ступенчато-возрастающие напряжения);  $d\gamma/dt = \text{const}$  (постоянная скорость деформирования);  $\dot{\tau} = d\tau/dt$  (постоянная скорость загрузки);  $\dot{\tau} = f(\gamma)$  (динаметрические испытания в условиях релаксации напряжения).

Известны следующие технические теории для описания процесса ползучести:

деформационного старения

$$\dot{\gamma} = f(\tau, t),$$

течения

$$\dot{\gamma} = f(\tau, t),$$

упрочнения

$$\dot{\gamma} = f(\tau, y),$$

наследственности

$$\gamma_1 = \int_0^t f_1(\dot{\gamma}/\tau) f_2(\tau) d\tau,$$

где  $\dot{\gamma}$  – скорость деформирования;  $\tau$  – сдвиговое напряжение.

По данным С.С. Вялова (1992), при  $\tau = \text{const}$  все теории дают идентичные результаты, но разные при переменных нагрузках. Лучшее совпадение с опытом дает теория упрочнения в форме (см. также С.С. Вялов, 1978)

$$\dot{\gamma} = \frac{\alpha\tau^{1/a}}{\gamma^{\alpha-1}} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\tau} \right)^{1/a} t_f \right]^2,$$

где  $\bar{\tau} = (\tau/A)^{1/m}$  – напряжение сдвига;  $\gamma$  – деформация сдвига;  $t$  – время;  $t_f$  – время до разрушения;  $A, \alpha, m$  – параметры.

Комбинированное реологическое уравнение длительной прочности и условия прочности Мора–Кулона имеет вид

$$\tau_f = \beta / \ln \frac{t_f + t_1}{B} + \sigma_t g \varphi,$$

где первый член правой части определяет сцепление  $c(t)$ , а второй – силы трения при постоянном значении  $\varphi$ ;  $t_f$  – разрушающая нагрузка;

$t_1 \leq 1$ .

**Взаимодействие балки с нелинейно-неупругим неоднородным основанием во всем диапазоне нагружения** (С.Н. Клепиков, Я.Е. Слободян, 1989). Фундаменты моделируются линейно-упругими горизонтальными стержнями, работающими на изгиб. Непрерывное основание аппроксимируется дискретной моделью в виде нелинейно-неупругих вертикальных опорных стержней единичной длины, отражающих деформационные свойства грунта при сжатии. Диаграмма деформирования какого-либо участка поверхности основания, заменяемого опорным стержнем, описывается кривой гиперболического типа.

Используется шаговый метод нагружения. Компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) на каждой ступени вычисляются методом конечных элементов в перемещениях.

Коэффициент жесткости линейно-деформируемого  $i$ -го участка основания

$$\bar{K}_i = \bar{\sigma}_i / s_i, \quad 0 \leq \bar{\sigma}_i \leq R_i,$$

где  $\bar{\sigma}_i$  – среднее напряжение под подошвой фундамента от силы  $P$ ;  $R_i$  – расчетное сопротивление  $i$ -го участка основания;  $s_i$  – осадка  $i$ -го участка, определяемая с учетом неоднородности основания и влияния соседних фундаментов.

Коэффициент жесткости (касательной) нелинейно-деформируемого  $i$ -го участка основания  $K_i$  определяют из уравнения

$$\sigma_i = \frac{\bar{\sigma}_i s_i}{s_i + (s_i - \bar{s}_i) \sigma_i / \sigma_{\text{пр}i}}; \quad \bar{\sigma}_i > \sigma_i < \sigma_{\text{пр}i};$$

$$K_i = d\sigma / ds = \sigma_{\text{пр}i} s_i / (s_i + \bar{s}_i)^2; \quad \bar{s}_i < s_i > S_{\text{пр}},$$

где  $\sigma_{\text{пр}i}$  – предельное сопротивление  $i$ -го участка основания при вертикальной нагрузке;  $S_{\text{пр}}$  – предельное значение совместной деформации (осадки) основания.

Коэффициент жесткости при нагрузке

$$K_{pi} = 4\bar{K}_i.$$

Уравнение равновесия системы «нелинейно-неупругое основание – линейно-деформируемая балка» на  $n$ -й ступени нагружения

$$\sum_{n=1}^i K^{(n)} \vec{\Delta X}^{(n)} = \sum_{n=1}^i \vec{\Delta P}^{(n)},$$

где  $K^{(n)}$  – общая матрица жесткости системы;  $\vec{\Delta X}^{(n)}$  – вектор приращений неизвестных узловых перемещений в системе;  $\vec{\Delta P}^{(n)}$  – вектор приращений заданных узловых нагрузок от веса здания  $P$ .

#### 8.4. ТЕОРИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Материал изложен на основе обзора, опубликованного в книге «Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.

Теория находит применение в различных областях техники, особенно в машиностроении и строительстве. Она дает возможность найти распределение напряжений в контактирующих областях, выявить места концентрации напряжений. Рассматриваются среды упругие, анизотропноупругие, вязкоупругие или пластические, сплошные и с разрезами или трещинами. Приводятся решения статических и динамических контактных задач.

**Контактные задачи для полуплоскости.** Для плоских контактных задач полная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y &= 0; & \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{xy}/\partial x &= 0; \\ \sigma_x &= 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu}T\right); & \sigma_y &= 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu}T\right); \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = G\gamma_{xy}; \\ \varepsilon_x &= \partial u/\partial x; & \varepsilon_y &= \partial v/\partial y; & \gamma_{xy} &= \partial u/\partial y + \partial v/\partial x; \\ T &= e_x + e_y = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y. \end{aligned}$$

Эти уравнения получены для малых деформаций, когда компоненты смещения (разность координат точки до и после деформации) и их производные настолько малы, что их квадратами и производными можно пренебречь.

Неизвестными являются:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v$ .

**Контактные задачи для полупространства.** Компоненты перемещения и напряжения в упругом полупространстве при отсутствии на границе сил трения определяются по формулам:

$$u = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial x} \partial z - \frac{z}{2(1-\nu)} \frac{\partial V}{\partial x};$$

$$v = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial y} dz - \frac{z}{2(1-\nu)} \frac{\partial V}{\partial y};$$

$$\omega = V - \frac{z}{2(1-\nu)} \frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{(1-2\nu)E}{2(1-\nu^2)} \int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dz - \frac{Ez}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2};$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{(1-2\nu)E}{2(1-\nu^2)} \int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dz - \frac{Ez}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2};$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{Ez}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

$$\tau_{xy} = \frac{(1-2\nu)E}{2(1-\nu^2)} \int_z^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} dz - \frac{Ez}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y};$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Ez}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}; \quad \tau_{yz} = -\frac{Ez}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z},$$

где  $V(x, y, z)$  – искомая гармоническая функция.

На полупространстве  $z < 0$  давит штамп, ограниченный поверхностью  $z = f_0(x, y)$ . Под действием нагрузки штамп переместится поступательно и повернется.

Уравнения равновесия штампа имеют вид

$$P = \iint_S p(x, y) dx dy; \quad M_x = \iint_S yp(x, y) dx dy; \quad M_y = \iint_S xp(x, y) dx dy,$$

где  $S$  – площадь контакта (основания штампа).

Рассмотрим круговой штамп. Динник А.Н. (1906) исследовал распределение напряжений в зоне контакта. Максимальные касательные напряжения находятся на некоторой глубине под подошвой штампа. Штаерман И.Я. (1949) исследовал влияние радиуса закругления края цилиндрического штампа на распределение давления под краем штампа. Ряд задач был решен А.И. Лурье (1939), В.М. Абрамовым (1939), Л.А. Галиным (1947, 1948, 1953), Н.А. Ростовцевым (1953), В.С. Губенко (1959 – 1971) и др.

**Контактные задачи для линейно-деформируемого основания.**

Определяют контактные напряжения и смещения поверхностных точек

вне зоны контакта. Контактную задачу формируют как поиск функций, определяющих все три смещения любой поверхностной точки  $(x, y)$  основания от воздействия произвольно ориентированной единичной силы, приложенной в некоторой другой поверхностной точке  $(\xi, \eta)$ .

В общем случае функция представляет матрицу третьего порядка

$$\begin{cases} R_{jk}(x, y; \xi, \eta), \\ i, k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Ось  $z$  направлена вниз и совпадает с внутренней нормалью к поверхности основания. Первый индекс показывает по направлению какой оси действует единичная сила, а второй – по направлению какой оси рассматривается смещение точки.

Если контактная задача ставится без учета сил контактного касательного взаимодействия, то достаточно знать одну компоненту матрицы  $R_{33}(x, y; \xi, \eta) = R(x, y; \xi, \eta)$  – вертикальное смещение от вертикальной силы.

Эту составляющую называют ядром сечения (Б.Г. Корнев, 1954, 1960). Например,

$$R_{33}(x, y; \xi, \eta) = K(x - \xi; y - \eta) = \frac{\theta}{2\pi} \int_0^\theta h(t) J_0(Rt) dt,$$

где  $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ .

В случае плоских задач, в которых контактируемое тело обеспечивает условия плоской деформации для основания (перемещения поверхностных точек являются функциями одной переменной, например  $x$ , а область контакта не ограничена вдоль оси  $y$ ).

В случае **пространственных задач** областью контакта может быть: вся плоскость, полубесконечная плоскость, узкая полоса, круговая и кольцевая области, эллиптическая и прямоугольная области.

Рассматривают задачи с учетом и без учета сил сцепления и трения. К примеру, для эллиптической области интегральное уравнение часто принимают в виде

$$\iint \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2(\nu+1)}} = f(x, y), \quad x, y \in \Omega.$$

Приводят решения и **динамических контактных задач**.

Так, решения плоских задач используют при расчете балок и плит, гидротехнических сооружений, отдельных деталей машин. К пространственным динамическим контактным задачам относят расчет фунда-

ментов под машины, гидротехнических сооружений, многих деталей машин.

Рассматривают следующие динамические воздействия: действие периодически изменяющейся нагрузки, движение по границе среды, колебания (например, изгибных и крутильных) конструкций, действие ударной нагрузки (например, действие на поверхности или внутри мгновенного сосредоточенного импульса), кручение или действие крутильных колебаний.

**Температурные контактные задачи.** Такие задачи возникают при возведении массивных бетонных и железобетонных конструкций (значительный рост температур в период строительства и твердения и медленное последующее охлаждение), в машиностроении и др.

Например, рассматривают задачу о вдавливании штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость (плоская задача) с учетом изменения температуры границы.

Формула, устанавливающая связь вертикальных перемещений  $\vartheta(x, 0)$  на границе полуплоскости с нормальными напряжениями  $\sigma_y(x, 0)$  и температурой  $T(x, 0)$ :

$$\vartheta(x, 0) + \text{const} = \frac{1}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x-t| \left[ \frac{\lambda + \mu}{\mu} \sigma_y(t, 0) + \gamma T(t, 0) \right] dt,$$

где  $\nu = a(3\lambda + 2\mu)$ ;  $a$  – коэффициент линейного расширения.

Граничные условия:

$$T(x, 0) = f_1(x) \quad \text{при } |x| < a;$$

$$T(x, 0) = f_2(x) \quad \text{при } |x| > a;$$

$$\vartheta(x, 0) = b_0 \quad \text{при } |x| \leq a;$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0 \quad \text{при } |x| > a;$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad \text{при } -\infty < x < \infty.$$

**Контактные задачи для линейно-вязких тел.** Рассматриваются контактные задачи для тел, обладающих свойствами ползучести (релаксации). Если механические свойства материала (полимера) не изменяются по времени, то их называют упругонаследственными и описывают теорией наследственной упругости.

Поведение стареющих материалов (бетонов) описывается теорией наследственного старения или теорией упругоползучего тела. Стареющие и нестареющие среды называют вязкоупругими.

Решение квазистатических задач с постоянной областью контакта осуществляется применением принципа Вольтерра. Рассматриваются функции интегральных операторов Вольтерра, например,  $t$

$$H_y^*(t) = \int_{\tau \wedge}^t H(t, \tau) y(\tau) d\tau,$$

где  $H(t, \tau)$  – ядро.

Связь между напряжениями и деформациями наследственно-упругого тела при простом растяжении–сжатии представляется формулами:

$$\sigma(t) = E_0 \left[ \varepsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] = E_t \varepsilon(t);$$

$$\varepsilon(t) = E_0^{-1} \left[ \sigma(t) - \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right] = E_t^{-1} \sigma(t),$$

где  $E_0$  – мгновенный модуль упругости;  $K(t - \tau)$  – ядро ползучести (последствия);  $\Gamma(t)$  и  $K(t)$  – функции, определяемые из опытов.

Контактные напряжения возникают при вдавливании штампа в однородное изотропное вязкоупругое полупространство при фиксированной области контакта

$$\rho(x, y, t) = \frac{E_t}{1 - \nu_t^2} p_0(x, y) f(t),$$

где  $p_0(x, y)$  – функция распределения напряжений под штампом в случае идеально упругого полупространства.

Уравнение ползучести бетона получено Н.Х. Арутюняном (1952)

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) / E(t) - \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

где  $K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau)$ ;  $\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)$ ;  $E(\tau)$  – мгновенный модуль упругости, зависящий от  $\tau$ ;  $C(t, \tau)$  – мера ползучести – деформация ползучести в возрасте ( $\tau$ ) от напряжения единой интенсивности.

**Контактные задачи теории идеально жесткопластических тел.** Возможна и другая формулировка – «Технологические задачи теории пластичности». Здесь имеется в виду проблема обработки металла давлением.

Приведем уравнения плоского течения:  
уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

условие текучести

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2,$$

условие соосности главных осей тензора напряжений и скоростей деформации

$$(\sigma_x - \sigma_y) \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 2\tau_{xy} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right),$$

условие несжимаемости

$$\left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0.$$

Система является гиперболической, имеет два семейства ортогональных характеристик  $(\alpha, \beta)$ . Сетка характеристик совпадает с сеткой траекторий максимальных касательных напряжений (линий скольжения).

Угол наклона характеристик семейства  $\alpha$  к оси абсцисс

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}.$$

Нормальные напряжения на характеристиках одинаковы и равны среднему напряжению в точке

$$q = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{k},$$

где  $q$  – среднее безразмерное давление.

В идеально пластическом теле

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x / k \\ \sigma_y / k \end{array} \right\} = -q \mp \sin 2\varphi; \quad \tau_{xy} / k = \cos 2\varphi.$$



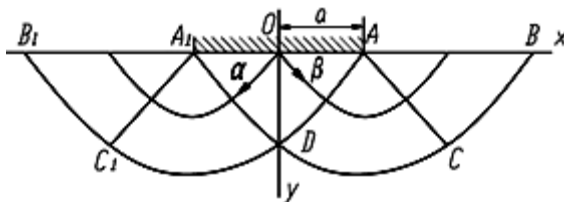


Рис. 8.5. Схема к задаче Прандтля

**Давление штампов на полупространство. Классическая плоская задача Прандтля (1948).** Это задача о начальном течении жесткопластической полуплоскости от давления плоского штампа длиной  $2a$ . От действия штампа материал стремится выпучиться вдоль свободных участков границы полуплоскости (рис. 8.5).

Контактная поверхность абсолютно гладкая при движении штампа вниз с постоянной скоростью.

Выделим характерные области:  $ABCD C_1 B_1 A_1 A$  – область пластического состояния материала;  $AB(A_1 B_1)$  – свободная граница, на которой  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ;  $ABC(A_1 B_1 C_1)$  – равномерное напряженное состояние  $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ ;  $\sigma_y = -2k$ ;  $ADA_1$  – равномерное напряженное состояние материала  $\sigma_x = -k\pi$ ,  $\sigma_y = -k(2 + \pi)$ ,  $\tau_{xy} = 0$ .

В итоге, предельное давление

$$\sigma_y = -k(2 + \pi),$$

предельная нагрузка

$$P = -2ak(2 + \pi).$$

**Контактная задача с управляющими параметрами для жесткого штампа на упругом слое переменной толщины.** Модель упругого слоя применяется в решениях многочисленных прикладных контактных задач геомеханики. Наиболее полно методика решения таких задач разработана для предельного случая, когда слой с достаточной степенью приближения может быть заменен упругим полупространством.

Рассмотрим однородный невесомый упругий континуум  $D$  в форме пространственного клина  $0 \leq x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 \leq z \leq x \operatorname{tg} \alpha$  с центральным углом при ребре  $0 < \alpha < 90^\circ$ . Наклонная плоскость  $S_1$ , ограничивающая  $D$  снизу, является защемленной. На горизонтальную поверхность клина  $S_2$  в пределах конечной области  $F$  передается давление  $p(\xi, \eta)$  от подошвы штампа  $\Omega$ . В случае отрыва части штампа от

основания  $F < \Omega$ , при отсутствии отрыва  $F \equiv \Omega$  (рис. 8.6 – 8.8). Континуум  $D$  характеризуется модулем деформации  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  (С.М. Алейников, С.В. Иконин, 1990).

Сформулированной контактной задаче отвечает следующая система интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \iint_{\Omega} w(x, y, \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = W_c + \varphi_x(x - x_c) + \varphi_y(y - y_c); \\ \iint_{\Omega} \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = N; \\ \iint_{\Omega} \rho(\xi, \eta) \xi d\xi d\eta = Nx_c; \\ \iint_{\Omega} \rho(\xi, \eta) \eta d\xi d\eta = Ny_c; \quad \rho(\xi, \eta) \geq 0, \end{cases}$$

где в качестве фундаментального решения  $w(x, y, \xi, \eta)$  используется приближенный алгебраический аналог;  $W_c$  – осадка штампа в точке с координатами  $x_c, y_c$ , где приложена равнодействующая вертикальная нагрузка  $N$ ;  $\varphi_x, \varphi_y$  – соответственно крены штампа в направлении осей  $Ox, Oy$ . Ограничение  $\rho(\xi, \eta) \geq 0$  связано с отсутствием растягивающих напряжений под подошвой штампа.

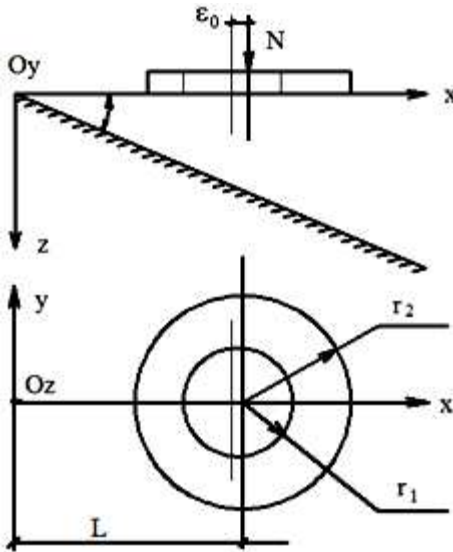


Рис. 8.6. Расчетная схема для эксцентричного кольцевого фундамента

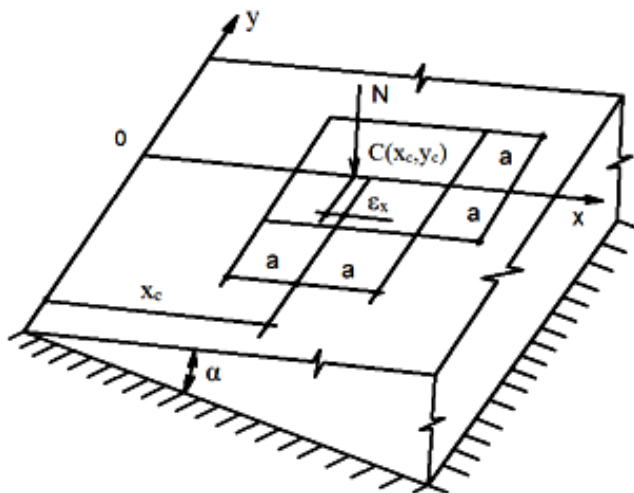


Рис. 8.7. Расчетная схема для трапециевидного фундамента

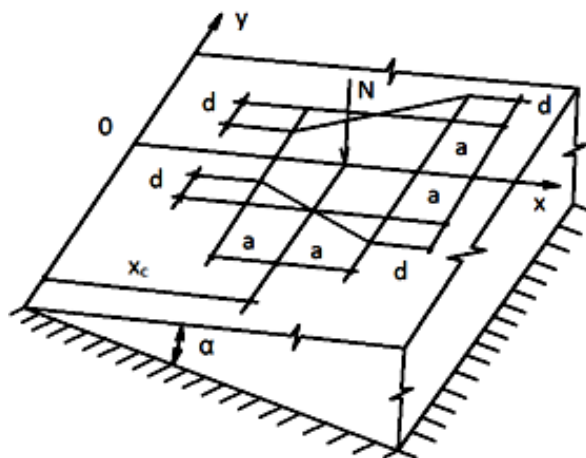


Рис. 8.8. Расчетная схема для квадратного фундамента с эксцентричной нагрузкой

Решение этой системы выполняется прямым методом граничных элементов в предположении кусочно-постоянной аппроксимации контактных давлений  $\rho(\xi, \eta)$ . В качестве точек коллокации выбираются центры тяжести контактных элементов. При этом соответствующий алгебраический аналог системы принимает вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \rho_j \delta_{ij} - \varphi_x(x_i - x_c) - \varphi_y(y_i - y_c) - w_c = 0, & (i=1, n); \\ \sum_{j=0}^n \rho_j \Delta S_i = N, & \sum_{j=0}^n \rho_j \Delta S_i x_j = N x_c; \\ \sum_{i=0}^n \rho_j \Delta S_i y_j = N y_c, & \rho_j \geq 0. \end{cases}$$

Здесь неизвестными являются контактные давления  $p_j$  в пределах граничных элементов, осадка штампа  $W_c$  и крены  $\varphi_x, \varphi_y$ . Число граничных элементов в общем случае равно  $n$ , площадь  $j$ -го элемента  $\Delta S_j$ , а координаты его центра тяжести –  $x_j, y_j$ . Коэффициенты канонических уравнений вычисляются по формуле

$$\delta_{ij} = \iint_{\Omega_i} w(x_i, y_i, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где  $w(x_j, y_j, \xi, \eta)$  – осадка точки  $(\xi, \eta) \in \Omega_j$  от единичной вертикальной силы, приложенной к поверхности клина  $S_2$  в точке  $(x_i, y_i)$ .

При решении второй системы из-за ограничения  $\rho_j \geq 0$  в случаях, когда наблюдается отрыв штампа от основания, требуется перестроить исходную расчетную схему путем удаления из области элементов, где условие  $\rho_j \geq 0$  не выполняется. Это эквивалентно вычеркиванию из матрицы системы строк и столбцов, отвечающих удаляемым элементам. Опыт расчетов показывает, что, как правило, при отрыве штампа от основания для выяснения фактической области контакта  $F$  необходимы 3–6 итераций, на каждой из которых система после усечения решается заново.

Рассмотренная вторая система алгебраических уравнений с ограничениями и подход к ее решению положены в основу методики предотвращения крена у штампов на упругом слое переменной толщины. Первый вариант методики предполагает поиск управляющего параметра  $v$ , обеспечивающего целенаправленное изменение формы штампа в соответствии с направлением изменения сжимаемости основания – вдоль оси  $Ox$ . Параметру  $v$  с некоторым шагом придаются конкретные числовые значения, которым отвечают штампы различной формы в плане, но одинаковые по площади. Для каждого значения  $v$  решается система. В результате, получается набор таблично заданных значений функции  $\varphi(v)$ . Решая  $\varphi(v) = 0$ , находим значение управляющего пара-

метра, соответствующего такой геометрической форме подошвы штампа в плане, при которой у него отсутствует крен.

Суть второго варианта заключается в том, что при заданных форме, расположении и размерах штампа равнодействующая вертикальной нагрузки смещается в плане в точку, необходимую для обеспечения равномерности осадки основания под штампом. При этом вторая система уравнений существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \rho_j \delta_{ij} - W_c = 0, & i = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n \rho_j \Delta S_j = N; \\ \sum_{j=1}^n \rho_j \Delta s_j x_j + N e_x = N x_c; \\ \sum_{j=1}^n \rho_j \Delta S_j y_j + N e_y = N y_c; & p_j \geq 0, \end{cases}$$

где неизвестными являются  $p_j$ ,  $W_c$  – управляющие параметры  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ , представляющие собой искомые величины смещения силы  $N$  относительно точки  $(x_c, y_c)$  соответственно вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ . То обстоятельство, что управляющие параметры в явном виде вошли в систему, позволяет значительно ускорить их определение. Так, если под штампом отсутствует зона отрыва, решение задачи ограничивается одной итерацией.

Оба предложенных подхода были апробированы в численных экспериментах на ЭВМ. На примере кольцевого штампа показано, как с помощью изменения формы штампа можно добиться его равномерной осадки на слое переменной толщины. Принятая при решении данной задачи расчетная схема приведена на (см. рис. 8.6). Отсутствие крена у штампа достигалось путем смещения внутренней окружности кольца на величину  $\upsilon = \varepsilon_0$ .

**Влияние технологии работ на НДС оснований, зданий и сооружений.** Ильичевым В.А. (2008) рассмотрена плоская задача о контактных напряжениях и форме контактной поверхности абсолютно жесткого штампа в процессе наращивания его длины  $l_x(t)$ . Собственный вес штампа при бетонировании –  $q(x)$ . Под штампом образуется эпюра прогиба  $y(x, t)$ . Скорость фронта бетонирования  $V_\delta(t)$ . Высота фундамента постоянна.

Штамп непрерывно растет слева направо со скоростью

$$V_{T(t)} = \begin{cases} 0, & t < t_T \\ V_b(t - t_T), & t \geq t_T \end{cases};$$

$$L_b(t) = \int_0^t V_b(\tau) d\tau, \quad 0 < t < t_{bf};$$

$$l_T(t) = \begin{cases} 0, & t < t_T \\ \int_0^t V_l(\tau) d\tau, & t \geq t_T, \end{cases}$$

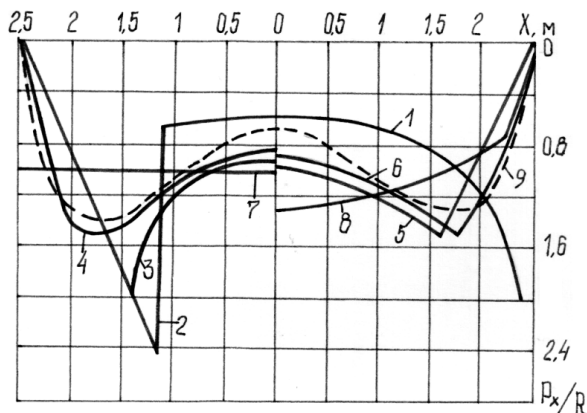
где  $l_b(t)$  – длина забетонированного участка;  $l_T(t)$  – длина штампа в твердом состоянии;  $t_{bf}$  – время окончания бетонирования фундамента.

Вертикальные перемещения точек поверхности определяются по формуле

$$y(x, t) = \begin{cases} \int_0^{l_b(t)} q(\xi) K(x - \xi) d\xi, & t < t_T; \\ \int_0^{l_T(t)} p(\xi, t) K(x - \xi) d\xi + \int_{l_T(t)}^{l_b(t)} q(\xi) K(x - \xi) d\xi, & t_T \leq t < t_{bf}; \\ \int_0^{l_T(t)} p(\xi, t) K(x - \xi) d\xi + \int_{l_T(t)}^L q(\xi) K(x - \xi) d\xi, & t_{bf} \leq t. \end{cases}$$

Контактные напряжения  $p(x, t)$  и перемещения штампа  $y(x, t)$  при  $t_T \leq t \leq t_{bf}$  определяют из системы уравнений

$$\begin{cases} y(x, t) = \int_0^{l_T(t)} p(\xi, t) K(x - \xi) d\xi + \int_{l_T(t)}^{l_b(t)} q(\xi) K(x - \xi) d\xi; \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} + \frac{x}{l_T(t)} \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=l_T(t)} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]; \\ \int_0^{l_T(t)} p(\xi, t) d\xi = \int_0^{l_T(t)} q(\xi) d\xi; \\ \int_0^{l_T(t)} \xi p(\xi, t) d\xi = \int_0^{l_T(t)} \xi q(\xi) d\xi. \end{cases}$$



**Рис. 8.9. Характер эпюр контактных давлений:**

- 1 – по М.А. Садовскому; 2 – по М.И. Горбунову-Посадову;  
 3 – по И.Я. Штаерману; 4 – по Н.Ф. Кокосимиди; 5 – по Е. Шульцу;  
 6 – по В.М. Кириллову; 7 – по СНиП 2.02.02–85 методом внецентренного сжатия; 8 – по СНиП 2.02.02–85 методом экспериментальных эпюр;  
 9 – опыты (К.Ф. Кокосимиди)

Первое уравнение описывает контактную задачу с учетом перегрузки; второе – скорость поступательного и вращательного перемещений штампа; третье и четвертое – условия равновесия сил и моментов.

Приведены примеры расчетов при разных схемах устройства фундаментов (слева-направо, из середины к краям, от краев к середине).

На рисунке 8.10 приведены (В.И. Кириллов, 1992) экспериментальные и теоретические эпюры нормальных контактных напряжений под подошвой незаглубленного жесткого штампа.

### 8.5. ПРОГНОЗ СКОРОСТИ ОСАДОК И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ОСНОВАНИЙ ТЯЖЕЛЫХ СООРУЖЕНИЙ

Решение выполнено Н.Н. Леонтьевым и Х.Ш. Тураевым (1991).

Уравнения состояния упругого неоднородно-ползучего основания в условиях плоской деформации определяются соотношениями:

$$\sigma_x(t) = \frac{N(x, y, t)}{1 - \nu^2(z, y)} \left[ \frac{\partial u(t)}{\partial x} + \nu(x, y) \frac{\partial v(t)}{\partial y} \right];$$

$$\sigma_y(t) = \frac{N(x, y, t)}{1 - \nu^2(z, y)} \left[ \frac{\partial v(t)}{\partial y} + \nu(x, y) \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right];$$

$$\tau_{xy}(t) = \tau_{yx}(t) = \frac{N(x, y, t)}{2[1 + \nu(x, y)]} \left[ \frac{\partial u(t)}{\partial y} + \frac{\partial v(t)}{\partial x} \right],$$

где

$$N(x, y, t) = E(x, y, \tau)(1 + R^*);$$

$$R^* f = \frac{1}{E(x, y, \tau)} \int_{\tau_1}^t R(x, y, t, \tau) E(x, y, t) f(\tau) d\tau.$$

Здесь  $R(x, y, t, \tau)$  – резольвента ядра  $K(x, y, t, \tau)$ ;

$$R(x, y, t, z) = -E(x, y, t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{F(x, y, t)} + C(x, y, t, \tau) \right];$$

$$E(x, y, t) = \frac{E_{ep}(x, y, t)}{1 - \nu^2(x, t)}, \quad E_{ep}(x, y, t) > 0;$$

$$\nu(x, y) = \frac{\nu_{ep}(x, y)}{1 - \nu_{ep}(x, y)}, \quad 0 < \nu_{ep}(x, y) \leq 0,5.$$

Здесь  $E_{ep}(x, y, t)$ ,  $C(x, y, t, \tau)$ ,  $\nu_{ep}(x, y)$  – модуль деформации, мера ползучести и коэффициент Пуассона упругого неоднородно-ползучего грунта.

Полагают, что основание представляет собой сжимаемый слой толщиной  $H$ , расположенный на бесконечно жестком массиве, и работающий в условиях плоской деформации. Выражения работы всех внешних и внутренних сил полосы шириной  $dx = 1$  и высотой  $H$ , выделенной из того слоя-основания на возможных для нее  $m + n$  перемещениях

$$\int \partial \sigma_x(t) / \partial x \varphi_j dF - \int \tau_{xy}(t) \varphi'_j dF + \int p(x, y, t) \varphi_j dy = 0, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m);$$

$$\int \partial \tau_{xy}(t) / \partial x \psi_h dF - \int \sigma_y(t) \psi'_h dF + \int q(x, y, t) \psi_h dy = 0, \quad (h = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Известные перемещения некоторой точки  $M(x, y)$  основания

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^m U_i(x, t) \varphi_i(y); \quad v(x, y, t) = \sum_{k=1}^n V_k(x, t) \varphi_k(y),$$

где  $U_i(x, t)$  и  $V_k(x, t)$  – неизвестные обобщенные перемещения;  $\varphi_i(y)$  и  $\varphi_k(y)$  – известные безразмерные функции, характеризующие поперечное распределение перемещений основания.



## Глава 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СООРУЖЕНИЙ

Современные принципы расчета зданий и сооружений обобщены и усовершенствованы А.П. Пшеничкиным [98] и Б.А. Гагаашем [12].

Приведем некоторые положения из упомянутых источников и других публикаций. Особое внимание уделяется обоснованию расчетных моделей оснований и сооружений.

### 9.1. МОДЕЛИ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ

В [34] описаны модели. К ним относятся модели: местных упругих деформаций Винклера, остаточных деформаций Н.И. Фусса, зернистой среды И.И. Кандаурова, комбинированные модели П.Л. Пастернака, М.М. Филоненко-Бородича, В.З. Власова, Н.Н. Леонтьева и др.

К примеру, в модели П.Л. Пастернака учитываются распределительные способности грунта:

$$p = c_1 S - c_2 \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right),$$

где  $p$  – среднее давление под подошвой фундамента;  $S$  – его осадка;  $c_1$  и  $c_2$  – коэффициенты пропорциональности.

В модели Г.К. Клейна учитываются изменения деформативных характеристик с глубиной.

В основу физически нелинейной модели положена деформационная теория пластичности: объемные и сдвиговые деформации зависят от среднего нормального напряжения и интенсивности касательных напряжений

$$\varepsilon_x = \psi(\sigma_m); \quad \gamma_i = f(\tau_i),$$

где  $\psi$  и  $f$  – экспериментальные функции.

В случае геометрической нелинейности используют формулы Грина или Генки.

К примеру, деформации Грина имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right];$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right],$$

где  $U, V, W$  – перемещения точки в направлении координатных осей.

**Универсальная расчетная модель основания.** Воробьева Е.Ю., Черкасов И.И. на основе экспериментов со штампами разработали (1980) универсальную расчетную модель грунтового основания. Кривые остаточных осадок штампа представлены в виде (И.И. Черкасов, 1958)

$$p = A_0 \left( \frac{S_{st}}{D} \right)^{n_0},$$

где  $p$  – среднее давление по подошве;  $D$  – диаметр штампа;  $S_{st}$  – остаточная осадка;  $A_0$  – параметр остаточных деформаций, имеющий размерность напряжений;  $n_0$  – безразмерный параметр остаточных деформаций.

Полные деформации поверхности за пределами штампа

$$\frac{S_{gz}}{S_{st}} = \frac{L_n}{e^{m_n R/D}},$$

где  $S_{gz}$  – полная осадка поверхности за пределами штампа;  $S_{st}$  – полная осадка штампа;  $D$  – диаметр штампа;  $R$  – расстояние от кромки штампа до точки определения осадки;  $L_n, m_n$  – безразмерные параметры полных деформаций поверхности.

## 9.2. МОДЕЛИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Известные модели рассмотрены в [12]. Расчетные модели зданий представляют собой многократно статически неопределимые системы как по конструкции (внутренняя статическая неопределимость), так и по характеру опорных закреплений (грунтовое основание) – внешняя статическая неопределимость. Рассматривают линейные и плоские системы (изгиб здания в одной плоскости) и пространственные системы (изгиб в трех плоскостях).

Для линейных и плоских систем используют модели:

бесконечно жесткая балка ( $EI = \infty$ );

здание–эквивалентная балка с приведенной изгибной жесткостью  $[EI]_{пр}$ ;

то же с приведенной изгибной и сдвиговой жесткостями  $[EI]_{пр}$  и  $[GA]_{пр}$ ;

то же с жесткостями, изменяющимися по длине здания  $[EI]_{пр}$  и  $[GA]_{пр}$ ;

здание–балка–стенка или рама (для каркасных зданий);  
здание–составной стержень с жесткостью  $[EI]_{\text{пр}}$  и  $[GA]_{\text{пр}}$ ;

здание–составная система из продольных, поперечных стен и перекрытий в виде балок с изгибной жесткостью  $[EI]_{\text{пр}}$ , соединенных податливыми связями;

то же с приведенной изгибной  $[EI]_{\text{пр}}$  и сдвиговой  $[GA]_{\text{пр}}$  жесткостями;

то же составных стержней;

то же из составных пластин (плит);

здание из отдельных объемных блоков.

Дроздов П.Ф. (1972) рассматривал следующие расчетные модели зданий: дискретную, континуальную и дискретно-континуальную. В первой модели сохраняется дискретное расположение связей и элементов. Во второй здание рассматривают как сплошную многостенчатую призматическую оболочку с вертикальной осью и как горизонтальную призматическую оболочку, опирающуюся на жесткие торцевые диафрагмы. В третьей модели сохраняют заданное дискретное расположение вертикальных элементов несущей системы, но заменяют сосредоточенные связи континуальными. Эта модель более универсальна и удобна для расчета.

Для несимметричной в плане пространственной несущей системы вводится понятие центра жесткостей и центра масс (см. также С.В. Поляков, 1983)

$$e_y = \frac{\sum_{i=1}^n B_{iy} e_{iy}}{\sum_{i=1}^n B_{iy}}; \quad e_z = \frac{\sum_{i=1}^n B_{iz} e_{iz}}{\sum_{i=1}^n B_{iz}},$$

где  $B_{iy} = (EJ_y)$ ,  $B_{iz} = (EJ_z)_i$  – изгибные жесткости элемента  $i$  относительно собственных центральных осей, параллельных координатным осям  $y'$  и  $z'$ ;  $e_{iy}$  и  $e_{iz}$  – координаты центра поперечного сечения элемента  $i$  относительно осей  $y'$  и  $z'$ .

Подробную информацию о моделях грунтовых оснований и зданий (сооружений), о выборе оптимальных моделей, о принимаемых гипотезах и факторах, влияющих на НДС системы «основание–здание» можно найти в [7, 12, 30, 58, 61] и в монографии Б.П. Макарова и Б.Е. Кочеткова (1987).

Так, Гараган Б.А. [12] рассматривал модели зданий в виде балки с изгибкой жесткостью, балки с изгибкой и сдвиговой жесткостью, балки с обобщенной изгибкой и сдвиговой жесткостями горизонтального составного стержня, призматической оболочки.

### 9.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУНТОВ ОСНОВАНИЯ

**Прочностные:** угол внутреннего трения  $\varphi$ , удельное сцепление  $c$ , прочность на одноосное сжатие водонасыщенных скальных грунтов  $R_c$ , удельное сопротивление пенетрации, структурная прочность  $\sigma_{stg}$ ;

**деформационные:** модуль общей деформации  $E$ , коэффициент Пуассона  $\mu$ , модуль сдвига  $G$ , модуль упругости  $E_e$ ;

**фильтрационные:** коэффициент фильтрации  $K_f$ ;

**реологические:** коэффициент консолидации  $C_k$ , вязкость  $\eta$ , ядро ползучести  $K(t, \tau)$ .

**Механические свойства несвязанных грунтов.** Приведем данные из [25, 83] применительно к стабилметрическим испытаниям:  $\sigma_3 < 0$  (вертикальное напряжение),  $\sigma_1 = \sigma_2 < 0$  параметр Лоде

$$\mu_\sigma = 2(\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3) - 1 = 1,$$

напряженное состояние в грунтах

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma,$$

где шаровой тензор

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma \end{vmatrix},$$

и дивидатор напряжений, характеризующий напряжение сдвига,

$$T_\sigma^0 = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix},$$

где  $\sigma = (\sigma_3 + 2\sigma_1)/3$ .

По результатам стабилметрических испытаний определяют интенсивность напряжений сдвига

$$\sigma_i = 2/\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3),$$

тензор деформаций

$$T_\varepsilon^0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

который раскладывается на шаровой тензор  $T_\varepsilon^0$ , характеризующий объемную деформацию и девиатор деформаций  $D_\varepsilon$ , отражающий деформацию сдвига.

Средняя деформация

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3 = (\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1)/3,$$

объемная

$$\varepsilon_v = 3\varepsilon = \varepsilon_3 + 2\varepsilon_1,$$

интенсивность сдвига

$$e_i = 2/\sqrt{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}.$$

Графический паспорт механических свойств грунта включает три основных зависимости [25]

$$\sigma_i^* = f_i(\sigma, \sigma_i), \quad e_i = f_3(\sigma_i, \sigma).$$

При трехосном сжатии испытания проводят в условиях пространственного напряженного состояния ( $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ), простой деформации ( $\varepsilon_2 = 0$ ) и компрессионного сжатия ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ).

Выявлено, что деформация грунта существенно зависит от траектории нагружения. При разрушении параметр Лоде стремится к значению 0,3...0,5. Скорость дилатансии  $\varepsilon_{v(i)}^*/\varepsilon_i^*$  зависит от траектории нагружения, плотности, гранулометрического состава несвязанного грунта.

Коэффициент бокового давления

$$\xi = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\sigma_3} = \frac{1 - \sin \varphi^{*m}}{1 + \sin \varphi^*} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\Pi}{4} - \frac{\varphi^*}{2} \right),$$

где  $\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_1 - \sigma_1^0$ ,  $\Delta\sigma_3 = \Delta\sigma_3 - \sigma_3^0$ ,  $\sigma_1^0$  и  $\sigma_3^0$  – компоненты главных напряжений,  $\sin \varphi^*$  – для условия прочности Мора–Кулона.

Согласно принципу К. Терцаги, в водонасыщенных несвязанных грунтах полные напряжения равны сумме давления в поровой жидкости  $\rho^w$  и скелете (эффективные напряжения  $\sigma_{ij}^{ef}$ ):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ef} - \sigma_{ij}\rho^w,$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ef} - \sigma_{ij}\rho^w.$$

Условия прочности для водонасыщенных грунтов, например, Мезиса–Боткина запишется в виде

$$\sigma_i^* = c_{oct}^* - (\sigma + \rho^w) \operatorname{tg}\phi_{oct}^*,$$

$$\sigma_i^* = c_{oct}^* - (\sigma + \rho^w) \operatorname{tg}\phi_{oct}^*,$$

т.е. когда тензор эффективных напряжений будет подчиняться предельному условию.

Поровое давление, при котором грунт разрушится

$$\rho^w = -[\sigma + (\sigma_i - c_{oct}) \operatorname{ctg}\phi_{oct}^*],$$

$$\rho^w = -[\sigma + (\sigma_i - c_{oct}) \operatorname{ctg}\phi_{oct}^*].$$

**Расчетная модель стохастического линейно-деформируемого полупространства.** Модуль деформации рассматривают как случайную функцию геометрических координат [58]

$$E_y(x, y, z) = \bar{E}_0(x, y, z) + \tilde{E}_0(x, y, z),$$

а модуль  $\mu_0$  – случайной величиной.

Здесь  $\bar{E}_0$  и  $\tilde{E}_0$  – регулярная и случайная составляющие.

Вероятностный расчет фундаментных балок и плит конечной длины на линейно-деформируемом неоднородном стохастическом полупространстве с учетом фактора времени.

Для относительно высоких балок ( $l/h \geq 5$ ) требуется учет деформаций сдвига. Дифференциальное уравнение балки на линейно-деформируемом неоднородном полупространстве имеет вид

$$Y^n(\xi, t) - 2z^2(t)Y^4(\xi, t) + W_0^4(t)Y(\xi, t) = \frac{F(\xi, t)l^4}{B(t)} 2r^2(t) + \frac{q_3(\xi, t)l^4}{B(t)},$$

где

$$W_0^4(t) = \frac{C_3(t)l^4}{B(t)} 2r^2(t) = \frac{C_3(t)l^2}{G(t)F_{np}(t)}; \quad \xi = x/l.$$

При  $l/h < 5$  деформации сдвига не учитывают и  $2r^2(t) = 0$ . В этом случае уравнение преобразуется к виду

$$Y^n(\xi, t) + W_0^4(t)Y(\xi, t) = \frac{F(\xi, t)l^4}{B(t)} + \frac{q_3(\xi, t)l^4}{B(t)}.$$

В этих уравнениях  $Y$  – прогиб балки;  $C_3$  – эквивалентный коэффициент жесткости;  $q_3$  – эквивалентная нагрузка.

$$p(x, y) = C_3 W(x, y) + q_3(x, y),$$

где  $p(x, y)$  – реакция основания;  $W(x, y)$  – искомое перемещение системы «конструкции–основание»;  $q_3(x, y)$  – эквивалентная нагрузка на однородно-деформируемое полупространство в условиях одномерной задачи.

Длительно протекающие процессы в грунтах основания вызывают перераспределение усилий в железобетонных конструкциях, работающих совместно с основаниями. Законы нарастания деформаций ползучести зависят от различных детерминированных и случайных параметров и условий. В расчете используется интегральный модуль деформации бетона, предложенный В.М. Бондаренко (1968). При линейном деформировании интегральный модуль совпадает с временным

$$E_u(t) = E_{в(t)} \frac{\sigma(t)}{E(t)} = \frac{E(t)}{1 - \frac{E(t)}{C(t)} \int_{\tau_1}^t G(r) \frac{\partial}{\partial t} \delta(t, \tau) d\tau},$$

где  $\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau)$  – полная относительная деформация элемента;

$\frac{1}{E(\tau)}$  – упругомгновенная деформация бетона,  $E(\tau) = E_0(1 - be^{-\beta\tau})$  – модуль упругомгновенной деформации,  $E_0$  – модуль упругомгновенных деформаций старого бетона,  $b$  и  $\beta$  – опытные коэффициенты, зависящие от состава бетона и условий твердения;  $c(t, \tau)$  – мера ползучести,  $t$  – текущая координата времени.

В линейной постановке задачи временный модуль деформации не зависит от величины действующих напряжений  $\sigma(t)$  и определяются только режимом их изменения во времени

$$E_u(t) = E_{в(t)} = \frac{E(t)}{1 - \frac{E(t)}{F(t)} \int_{\tau_1}^t F(r) \frac{\partial}{\partial t} \delta(t, \tau) d\tau},$$

где  $F(t)$  – функция изменения режима упругомгновенных напряжений (консолидационный процесс в грунтах основания).

Изгибная и сдвиговая жесткости балки равны

$$B(t) = E_a(t) Y_{пр}(t); \quad \sigma(t) F_{пр}(t) = \Omega(t) = \frac{E_a(t)}{R(1+V_0)} F_{пр}(t),$$

где  $V_0$  – коэффициент поперечного расширения бетона;  $F_{пр}(t)$ ,  $Y_{пр}(t)$  – приведенная площадь и приведенный момент инерции балки.

По Пшеничкину А.П. физико-механические характеристики грунтового основания  $\Pi(r)$  определяют с учетом микро- и макронеоднородности в виде тренда и случайной (функциональной) составляющей

$$\Pi(r) = \Pi(r) + \Pi(r).$$

Поле коэффициентов жесткости, меняющихся в плане, представляют в виде

$$C(x, y) = C_0 \pm A\varphi(x) + \check{c}(x) = C_0[1 \pm k_c\varphi(x)],$$

где  $C(x, y)$  и  $C(x, y)$  – регулярная и случайная компоненты поля коэффициентов жесткости;  $k_c$  – коэффициент неоднородности жесткости грунтового основания.

Для модели здания в виде балки с изгибной жесткостью уравнения совместности деформации имеют вид

$$EIW^{IV}(x) = q(x) - p_{TP}(x).$$

Для здания в виде балки с приведенными изгибной и сдвиговой жесткостью

$$EIW^{IV}(x) - EI(GA)^{-1}mC(x)W^{II}(x) + C(x)W(x) = q(x).$$

**Расчетные схемы зданий в виде призматических оболочек.** Такие схемы рассматривались Б.А. Косицыным, Б.С. Васильковым, В.И. Лишаком, А.П. Пшеничкиным. Учитывались только главные формы возможных перемещений сечений коробок зданий, связанные с изгибом и кручением. Дифференциальные уравнения изгиба и кручения оболочки представлены в виде

$$EI_y^{IV}(x) + \frac{EI}{GF} q_u^{II}(x) - q_u(x) = 0;$$

$$EI_w^{IV}(x) + \frac{EI_w}{GF_a} q_k^{II}(x) - q_k(x) = 0,$$

где  $EI$ ,  $GF$  – изгибная и сдвиговая жесткости здания;  $q_u(x)$ ,  $q_k(x)$  – нагрузки, вызывающие изгиб и кручение коробки здания;  $EI_w$ ,  $GF_a$  – секторальная и крутильная жесткости здания;  $\theta(x)$  – угол искажения контура поперечного сечения коробки здания.

В решении Пшеничкина А.П. принята гипотеза об абсолютно жестком контуре поперечного сечения для здания высотой не менее четырех этажей с частым шагом поперечных стен. До появления трещин или при их допустимом раскрытии на действие температурных деформаций или неравномерной осадке основания стены крупнопанельных и



кирпичных зданий рассматривают как упругие пластинки, ослабленные проемами.

По Пшеничкину А.П. вероятностный метод расчета зданий на неоднородных основаниях ведется в такой последовательности:

- определяют изгибные и крутильные жесткостные характеристики коробки здания, рассматривая стены как монолитные пластинки с проемами;

- производят расчет здания на изгиб и кручение как призматической оболочки с жестким контуром поперечного сечения и определяют обобщенные усилия и перемещения системы «здание–основание»;

- определяют усилия взаимодействия между стенами и перекрытиями, продольными и поперечными стенами;

- каждую стену рассматривают как составную балку или стержень на действие внешней нагрузки, реактивного давления и усилий взаимодействия; определяют усилия в элементах составной системы и прогибы продольных стен как составных балок;

- выполняют конструктивный расчет сечения элементов и армирования панелей и фундаментной части здания.

Систему «здание–основание» рассматривают линейно- и нелинейно-деформированной, с учетом физической и геометрической нелинейности. По предложению В.В. Попова (1975), расчет ведут методом последовательных нагружений, заменяющим нелинейные уравнения задачи последовательностью линейных. На каждом шаге изменения нагрузки производят перерасчет жесткостных характеристик здания и основания, а систему рассматривают как линейную.

Для каждого элемента составной системы определяют предельные деформации или усилия с учетом жесткостных характеристик на пределе трещиностойкости или с учетом допустимой ширины раскрытия трещин, а также предельных сопротивлений материала.

Функция риска предельного состояния

$$F = p_{\text{пр}} - p.$$

Для надежной системы

$$N = P (F > 0).$$

Отказ наступает при

$$V = P (F \leq 0).$$

Величина ( $F > 0$ ) означает вероятность того, что функция риска не выходит из области допустимых состояний.

Штаерман И.Я. (1949) предложил комбинированную модель основания, где верхний слой имеет свойства модели Винклера, а нижний – упругого полупространства.

Для упругого однородного изотропного полупространства контактные напряжения получают из интегрального уравнения, полученного из формулы Буссинеска:

$$S(x, y) = \frac{F(1 - \mu_0^2)}{\tau E_0} \iint_F \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}.$$

При действии гибкой нагрузки контактные напряжения равны этой нагрузке.

Ривкин С.А. (1967) предложил универсальную модель основания для любых грунтовых условий. Контактные напряжения

$$p(x, y) = K [\beta e^{-\alpha(1 - |\xi|)(m - |n|)}] S(x, y),$$

где  $K$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  – расчетные параметры модели, определяемые штамповыми испытаниями;  $\xi = y/L$ ,  $\eta = x/L$ ;  $m = B/L$  – относительные координаты рассматриваемой точки.

Пшеничкин А.П. отмечает [58], что при раскрытии физической сущности  $K$ , Ривкин не связал его с  $E_0$ ,  $\eta$ , а принял  $K = K(C)$ , т.е. определил его коэффициентом постели, зависящим от  $\alpha$  и  $\beta$ .

**Фильтрационная консолидация слоя грунта.** Пусть слой грунта находится под действием сплошной равномерно распределенной нагрузки, безгранично распространенной по горизонтальной поверхности слоя. Необходимо сделать прогноз развития одномерной консолидации грунта.

Принимаются следующие допущения [79, 80]:

- поровая вода и минеральные частицы грунта не сжимаемы;
- характеристики сжимаемости и фильтрации грунта в рассматриваемом диапазоне изменения давлений являются величинами постоянными;
- фильтрация поровой жидкости подчиняется закону Дарси;
- ползучесть скелета грунта не учитывается;
- все поры грунта полностью заполнены водой;
- в момент приложения нагрузки ( $t = 0$ ) вся она передается на поровую воду;
- собственная сила тяжести грунта не учитывается;
- в начальный момент времени, когда отсутствует нагрузка, поровое давление равно нулю;

- часть давления от нагрузки передается на скелет грунта  $p_z$ , а другая – на поровую воду, создавая в ней напор  $p_w$ , т.е.  $p_0 = p_z + p_w$ .

С течением времени давление на воду будет уменьшаться, а на скелет возрастать.

Для полностью водонасыщенного грунта соблюдаются условия неразрывности – увеличение расхода воды равно уменьшению пористости

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\partial n}{\partial t}.$$

По закону ламинарной фильтрации

$$q = -k_\phi \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Тогда

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -k_\phi \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}.$$

Учитывая, что напор воды  $H$  равен давлению в воде  $p_w$  (поровому давлению), деленному на удельный вес воды  $\gamma_w$ , то

$$p_w = p_0 - p_z; \quad H = p_w / \gamma_w; \quad H = (p_0 - p_z) / \gamma_w;$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{k_\phi \partial^2 p_z}{\gamma_w \partial z^2}.$$

Вводится коэффициент консолидации

$$C_v = \frac{k_\phi}{m_v \gamma_w},$$

тогда

$$C_v \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 p_z}{\partial t},$$

где  $m_v$  – коэффициент относительной сжимаемости грунта.

Это дифференциальное уравнение одномерной задачи теории фильтрационной консолидации водонасыщенного грунта.

Давление в скелете грунта на глубине  $z$

$$p_z = p_0 \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi z}{2h} e^{-N} - \frac{4}{3\pi} \sin \frac{3\pi z}{2h} e^{-9N} \dots \right],$$

где  $N = \frac{\pi^2 C_v t}{4h_\phi^2}$  – основание натуральных логарифмов;  $h_\phi$  – макси-

мальная длина пути фильтрации;  $h_\phi = h_{\text{сл}} / 2$ .

**Теория моделирования.** Большинство экспериментов проводят на моделях с учетом физического, геометрического и силового подобия. Полученные данные, например, о напряженно-деформативном состоянии, должны быть переведены на натуру. В [57] рассматриваются условия подобия, и размерностей для плоских и пространственных задач, линейной и нелинейной теории упругости, термоупругости, пластичности, ползучести, для изотропных и анизотропных сред, при статическом и динамическом нагружении. Особое значение придается анализу уравнений и размерностей, соответственно скалярных, векторных или тензорных величин.

В таблице 9.1 приведены часто используемые условия и формулы подобия.

### 9.1. Основные формулы подобия

Условия подобия и зависимости	Основные формулы при соблюдении подобия
<p><b>Геометрическое подобие.</b> Постоянство для всех участков модели масштаба <math>\alpha</math> геометрического подобия <math>E_{1H}</math></p>	<p>Отношение длин подобных отрезков в натуре и модели</p> $\alpha = \frac{l_H}{l_h} = \text{const.}$ <p>Углы натуре и модели равны</p>
<p><b>Силовое подобие.</b> Постоянство для всех участков модели масштаба <math>\beta</math> силового подобия</p>	<p>Отношение равнодействующих нагрузок в натуре и модели на соответствующих участках</p> $\beta = \frac{P_H}{P_h} = \text{const}$

Условия подобия и зависимости	Основные формулы при соблюдении подобия
<p><b>Условия подобия контакта деталей.</b> Длины соответствующих участков контакта в детали и модели имеют тот же масштаб <math>\alpha</math></p>	$\left( \frac{E_{1н}}{E_{1м}} + \frac{E_{2н}}{E_{2м}} \right) a^2 = \left( 1 + \frac{E_{1м}}{E_{2н}} \right) \beta$ <p>1 и 2 – части природы и модели, находящиеся в контакте. Условие подобия соблюдается подбором материала моделей и выбором <math>\alpha</math> и <math>\beta</math></p>
<p><b>Зависимости между напряжениями <math>\sigma_n</math> и <math>\sigma_m</math></b> (при соблюдении приведенных выше условий подобия)</p>	<p>Плоские деталь и модель</p> $\sigma_n = \frac{t_m}{t_n} \frac{\beta}{\alpha} \sigma_m;$ <p>Объемные детали и модель</p> $\sigma_n = \frac{\beta}{\alpha} \sigma_m$
<p><b>Зависимости при условии равенства относительных деформаций в натуре и модели <math>\varepsilon_n</math> и <math>\varepsilon_m</math></b></p>	$a^2 \frac{E_n}{E_m} = \beta; \quad \sigma_n = \sigma_m \frac{E_n}{E_m};$ $F_n = \beta F_m; \quad \Delta l = \alpha \Delta l_m$

Примечание. Обозначения:  $E$  – модуль упругости;  $t$  – толщина;  $\sigma$  – напряжение;  $F$  – сила в сечении;  $\Delta l$  – перемещение.

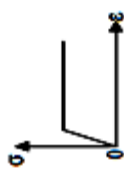
В таблице 9.2 приведена упругопластическая модель грунта.

По вопросам моделирования имеется обширная литература. Известны работы в этом направлении, например, Л.И. Седова (1972), А.Я. Александрова и М.Х. Ахметзянова (1973), Ю.Н. Работнова (1978), В.А. Ломакина, В.Н. Безухова, М.А. Колчунова (1967).

Проведем некоторые положения теории моделирования. Пусть между двумя явлениями имеет место взаимно однозначное соответствие величин первого и второго явлений. Они связаны между собой преобразованиями, позволяющими по величине в модели переходить к величинам в натуре.

В механике деформируемого тела различают следующие виды соответствий: подобное, аффинное соответствие, функциональное и операторные соответствия.

## 9.2. Описание упругопластической модели грунта

Характеристика математической модели	Плоская деформация	Осесимметричное напряженное состояние
Учитываемые проявления нелинейности грунта	<p>1. Пластическое формирование при сложном напряженном состоянии</p> <p>2. Беспрепятственное деформирование (образование трещин) при растяжении</p> <p>3. Сдвиг по заданной (контактной) поверхности</p>	
Зависимость между напряжениями и деформациями	<p>Билинейная в соответствии с диаграммой</p> 	
Уравнения закона Гука для линейной части деформации $[\sigma] = [D] \{\epsilon\}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_0 \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$

Продолжение табл. 9.2

Характеристика математической модели	Плоская деформация	Осесимметричное напряженное состояние
Уравнения предела пропорциональности (текучности)	<p>Уравнение Мора–Кулона</p> $F = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin \varphi - c \cos \varphi = 0$	<p>Уравнение Мазеса–Шлейхера–Боткина</p> $l_2^{1/2} + a l_1 - K = 0$
Уравнения для пластических деформаций	$\varepsilon_{1,2}^n = \lambda (\Lambda_1 \pm 1)$	$\varepsilon_{1,2}^n = \lambda \left( \Lambda + \frac{\sigma_{1,2,3} - (l_1/2)}{2\sqrt{l_2}} \right)$
Дилатансионные соотношения на стадии течения	$\Lambda_1 = \frac{\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n}{\varepsilon_1^n - \varepsilon_2^n}$	$\Lambda = \frac{h^n}{6\sqrt{h^2}}$
Природное давление в основании с горизонтальной плоскостью	$\sigma_{1,2} = p = -\gamma z_1$	$\sigma_{1,2,3} = p = -\gamma z_1$

Для определения масштабов моделирования применяют методы анализа уравнений и размерностей. Рассматривается подобие пространственных и плоских задач для различных след.

**Предельные деформации** (относительные или линейные крутильные деформации, вертикальные или горизонтальные перемещения, крены, перекосы). Это деформации предшествующие наступлению предельного состояния (течение, сдвиги, снижение сопротивления).

Знать их важно, так как позволяет прогнозировать разрушение.

Для грунтов определяли следующие предельные деформации (В.В. Леденев, 1969 – 2007):

сдвиговые перемещения при вдавливании в песчаный грунт нарушенной и ненарушенной структуры буронабивных железобетонных фундаментов диаметром от 10 до 80 см с полостью под подошвой;

предельные крены заглубленных цилиндрических штампов при действии момента;

предельные осадки при вдавливании в грунт жестких заглубленных и незаглубленных штампов и моделей фундаментов;

предельные горизонтальные перемещения жестких буронабивных фундаментов, нагруженных горизонтальной силой;

предельные углы закручивания в опытах на кручение песка;

предельные сдвиговые перемещения при выдергивании из грунта арматуры (при исследовании армированных оснований).

В общем случае

$$\Delta_u = \Delta_u(d, d_s, \lambda, c, \varphi, \omega, f, t, \dots),$$

где  $d, d_s$  – диаметр фундамента или арматуры;  $\lambda = h/d$  – относительное заглубление;  $c, \varphi$  – удельное сцепление и угол внутреннего трения;  $f$  – коэффициент трения бетона по грунту;  $t$  – длительность нагружения.

**Основы структурного материаловедения.** Воронежская научная школа строительного материаловедения и технологии сформировалась под руководством известных ученых: В.В. Помазкова, А.А. Федина, Е.М. Чернышова. Основной проблемой явилось системно-структурное материаловедение самокатных автоклавных бетонов. Это послужило основой разработки методологии системного прогнозирования и программирования развития регионального строительного комплекса, созданы научные основы управления процессами структурообразования и качеством продукции.

Вопросы регулирования свойств материалов, усилий, напряжений и деформаций конструктивных систем являются особо важными, позволяющими эффективно внедрять научные разработки в практику. Достаточно вспомнить работы Б.А. Гарагаша (2009), Л.А. Лунева (2010).



Исследован процесс разрушения автоклавных материалов, разработаны способы управления сопротивлением разрушению, торможения развития и распространения трещин.

Установлены взаимосвязи между критериями неоднородности строения и сопротивлением разрушению силикатных материалов. В качестве примеров неоднородности приняты: содержание компонентов с отличными свойствами (гетерогенность); изменчивость показателей качества одного и того же материала, либо одного из его компонентов; дефектность структуры; анизотропия; неравномерность пространственного размещения компонентов материала.

*Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии.* Исследовали: Е. Девис (1948), В.В. Новожилов (1952), А.Надаи (1954), И.Н. Шканов (1963, 1979), Г.П. Талынов (1963), А.А. Лебедев (1976), Б.И. Ковальчук (1981), Н.И. Карпенко (1996), Л.Б. Потапова и В.П. Ярцев (2005) и др.

Болдырев А.М. и Свентиков А.А. (2009) исследовали надежность висячих стержневых конструкций.

Условие отказа представлено в виде

$$\bar{G} = \bar{R} - \bar{Q} \leq 0,$$

где  $\bar{R}$  – обобщенная прочность;  $\bar{Q}$  – обобщенная нагрузка;  $\bar{G}$  – обобщенная несущая способность.

Условие разрушения материала элементов

$$\sigma_i - R_u < 0; \quad \sigma_i < \bar{\sigma}_u / \gamma_m,$$

где  $R_u$  – расчетное сопротивление материала по пределу временного сопротивления;  $\bar{\sigma}_u$  – предел временного сопротивления (условие пластического и хрупкого разрушения);  $\sigma_i$  – напряжение в  $i$ -м элементе,  $\gamma_m$  – коэффициент надежности по материалу.

Выполнены расчеты по критерию хрупкого и пластического разрушения. Для анализа использованы коэффициенты надежности А.Р. Ржаницина и коэффициенты риска А.П. Синицына.

Предложена классификация висячих конструкций по показателю риска, выделив: работоспособное состояние, ограниченно-работоспособное, удовлетворительное, не совсем работоспособное, неудовлетворительное.

Зверев В.В. с учениками исследовали (2005 – 2010) несущую способность и деформативность конструкций из тонкостенных профилей с болтовыми соединениями элементов.

#### 9.4. ЖЕСТКОСТИ ОСНОВАНИЙ И КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ. ИХ ИЗМЕНЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ НА ОСАДКУ ЗДАНИЯ [12]

**Жесткость** – сопротивляемость конструкции внешним воздействиям. Различают жесткости:

при сжатии–растяжении	$J_{сж} = AE$ [Н];
сдвиговую	$J_{сдв} = A\mu E$ [Н];
изгибную	$J_{изг} = IE$ [Н·м <sup>2</sup> ];
крутильную	$J_{кр} = I_{\omega}E$ [Н·м <sup>4</sup> ],

где  $A$  – площадь поперечного сечения;  $A_{сдв}$  – площадь сдвига или среза;  $I$  – момент инерции сечения [м<sup>4</sup>].

Следует определять жесткостные характеристики узловых соединений. По изгибной жесткости конструкции разделяют на жесткие, гибкие и конечной жесткости.

Осадку в поперечном направлении соответственно вычисляют по формулам [12]:

$$S(y) = S_{ср} + yi;$$

$$S(y) = S_{ср} + S_u(y);$$

$$S(y) = S_{ср} + yi + S_{ик};$$

$$S(x, y) = S_{ср} + xi(x) + yi(y) + \alpha(y)xy/l + S_u(x, y),$$

где  $S_{ср}$  – средняя осадка;  $i$  – крен здания – поворот вокруг оси, проходящей через середину длины;  $S_u$  – осадка от изгиба сооружения;  $i(y)$  и  $i(x)$  – крен здания в поперечном и продольном направлениях;  $\alpha(y)$  – угол закручивания вдоль продольной оси  $y$ ;  $S_u(x, y)$  – пространственный прогиб здания;  $S_u(y)$  – изгибные деформации конструкции.

В жестких зданиях разница между потенциально возможной деформацией основания и реализующимися осадками сооружения получается минимальной. В таких зданиях возникают наибольшие значения изгибающих моментов и поперечных сил.

В расчетах модели сооружения принимают в виду линейных, плоских и пространственных систем с приведенными изгибной  $[EI]_{пр}$  и сдвиговой  $[GA]$  жесткостями.

Разность в жесткостях зданий отличает способность каркаса перераспределять усилия между элементами. Для жестких зданий она будет максимальной, для гибких – минимальной.

Депланация сечений, конструкций, конструктивных систем, зданий и сооружений – искажения форм, сечений, зданий и сооружений.

**Коэффициент жесткости основания (коэффициент постели).** Фусс Н.И. (1798) исходил из локального развития деформаций под нагруженной площадкой, осадки полностью необратимы.

Винклер Э. (1867) представил основания в виде не связанных между собой пружин. Деформация локальна и полностью обратима.

Обе модели не учитывают распределительные свойства грунтов.

Филоненко-Бородич М.М. (1940) и др. разработали комбинированные модели, в которых в работу включались области массива за пределом нагруженной модели.

Однако модель Винклера и в настоящее время широко применяют в практике при расчете балок и плит, дорожных и аэродромных покрытий.

Отпор грунта

$$\rho = C_z S ,$$

где  $C$  – коэффициент пропорциональности, жесткости (постели);  $p$  – удельное давление;  $S$  – вертикальное упругое перемещение (осадки).

В последнее время учитывают [12, 58] переменные по длине  $C(x)$  или по площади  $C(x, y)$  коэффициенты жесткости.

**Пример.** Пусть требуется определить крен жесткого фундамента с использованием модели Винклера. На фундамент действует момент  $M_0$ . По подошве возникает отпор грунта  $p$ . Угол поворота фундамента  $\alpha$ .

Уравнение равновесия [79]

$$M_0 - \int py \, dA = 0 .$$

Так как  $\rho = C_z z = C_z \alpha y$ , то

$$M_0 = \int_A C_z \alpha y^2 \, dA ,$$

$$\alpha \int y^2 \, dA = I_0 , \quad \alpha = \frac{M_0}{C_z I_0} .$$

При расчете подземных конструкций (свай, опускных колодцев) используют метод К.С. Завриева [82]

$$C_z = K_z = \frac{\sigma_z}{y_z} ,$$

где  $k$  – табличный коэффициент [ $\text{кН/м}^4$ ];  $\sigma_z$  – горизонтальное давление на боковую поверхность конструкции на глубине  $z$  от поверхности;

$y_z$  – горизонтальное перемещение боковой поверхности конструкции на глубине  $z$ .

Дифференциальное уравнение изогнутой оси свай имеет вид

$$EI \frac{d^4 y_z}{dz^4} - y_z b_p K_z = 0,$$

где  $b_p$  – расчетная ширина свай.

**Изменение жесткости конструкций и конструкционных систем при нагружении и эксплуатации.** Изгибающие моменты в балке–здании изменяются во времени за счет развития пластических деформаций [12]

$$M(t) = M_0 \eta(t) B(t) / B_0,$$

где  $M_0, B_0$  – изгибающий момент и жесткость в начальный момент времени;  $\eta(t)$  – коэффициент, зависящий от параметров деформации и ползучести бетона или грунта.

Если нагрузка возрастает ступенями, то  $M$  и  $B$  в начале первой ступени  $M_{01}$  и  $B_{01}$ , и в конце  $M_t$  и  $B_t$ . С учетом изменения кривизны оси конструкции во времени:

$$M(t)_1 = \frac{M_{01} \eta(t)_1 B(t)_1}{B_0} = M_{01} \eta(t)_1 / K_{t1}.$$

Для  $n$ -й ступени изгибающий момент равен сумме начального момента  $n$ -й ступени и конечных (с учетом релаксации) моментов на предыдущих

$$M_p(t)_n = M_{0n} + \sum_{i=1}^{n-1} (M_{0i} \eta(t)_i / K_{ti}),$$

где  $K_t = 1 + 0,5\phi_t$ ,  $\phi_t$  – характеристика ползучести материала балки–здания.

Расчетная жесткость:

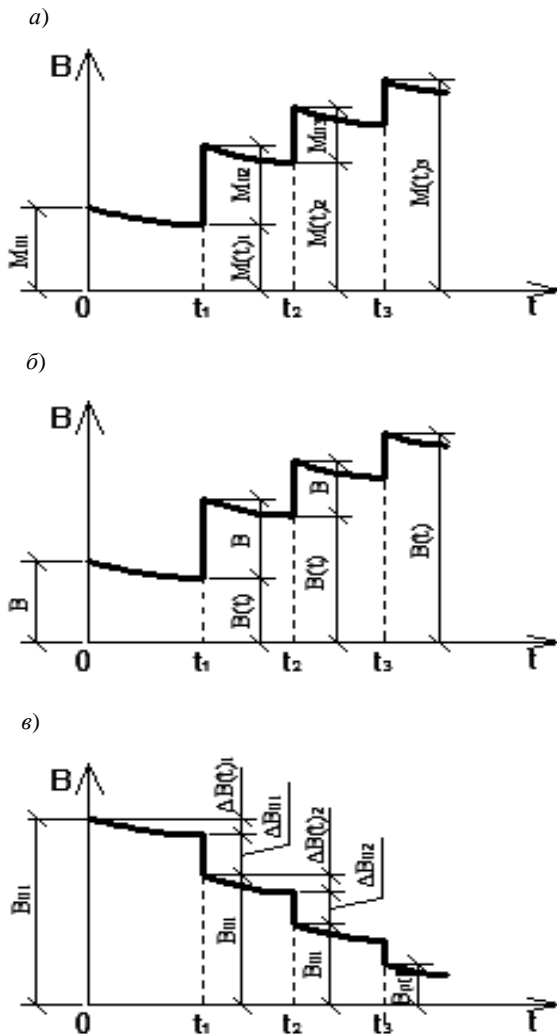
$$B_p(t) = \sum_{i=1}^n B(t).$$

При ступенчатом нагружении и неизменной геометрии сечения:

$$B_n(t) = B_{01} - \sum_{i=1}^n \Delta B(t)_i - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta B_{0i},$$

где  $B_{01}$  – начальная (максимальная) жесткость;  $\Delta B_{0i}$  – уменьшение жесткости за счет приложения ступени нагрузки (например, появления трещин);  $\Delta B(t)_i$  – уменьшение жесткости за счет ползучести бетона.

На рисунке 9.1 приведены изменения эпюр моментов и жесткости при ступенчатом нагружении.



**Рис. 9.1. Изменение изгибающих моментов  $M$  в здании и его жесткости  $B$  во времени:**

*a* – при ступенчатом приложении нагрузки; *б* – при ступенчатом нагружении и неизменной геометрии сечения; *в* – при ступенчатом приложении нагрузки с одновременно возрастающей жесткостью

**Исследование НДС гидротехнических плотин.** Наиболее ответственными являются гидротехнические сооружения и, в первую очередь, плотины (гравитационные, массивно-контрфорсные, арочные, арочно-гравитационные). Большинство плотин построено в условиях суровым климатом, высокой сейсмичностью, в сложных инженерно-геологических условиях.

Особое значение придается натурным исследованиям (А.Н. Марчук, 1983): контролю качества работ; эксплуатационному контролю за состоянием сооружений и оснований; натурным исследованиям трудно поддающихся расчету и новых конструктивных элементов. Сюда привлекаются опытные специалисты разных изыскательских, проектных и научных организаций. Используются наиболее современные и надежные приборы.

В процессе наблюдений проводят измерения: фильтрации воды через плотины и основания; раскрытия межсекционных швов и трещин; физико-механических свойств материалов; перемещения плотин в пространстве; температуры, температурных напряжений и деформаций; напряжения и деформации в расчетных зонах; противодавления; контактных напряжений с основанием; температуры воздуха и веса воды в водохранилище; сейсмических параметров и др.

Пересчет деформаций в напряжения выполняется по зависимости для упругоползучего тела:

$$\sigma^*(t) = \sigma(t) + E(t) \int_{\tau}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \delta(t, \tau) d\tau,$$

где  $\sigma^*(t)$  – напряжение в момент времени  $t$  с учетом ползучести бетона;  $\sigma(t)$  – упругомгновенные напряжения;  $E(t)$  – мгновенный модуль упругости в момент времени  $t$ ;  $\delta(t, \tau)$  – полная деформация в момент  $t$  от единичного напряжения в возрасте  $\tau$

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau),$$

где  $C(t, \tau)$  – мера ползучести.

Согласно А.Н. Марчуку, в 70% случаев разрушение бетонных плотин связано с основанием и происходит чаще всего в первый год эксплуатации.

Характер возможного деформирования и разрушения часто изучают на модельных испытаниях.

**Деформирование пространственных систем.** Как отмечено П.Ф. Дроздовым (1967, 1977), несущая система многоэтажного здания может быть схематизирована расчетными моделями: дискретными, континуальными, дискретно-континуальными.

В дискретных моделях дискретизация углубляется членением на более мелкие участки: метод конечных элементов, метод сосредоточенных деформаций или заменой континуума стержневой решеткой (Т.И. Баранова).

В континуальных моделях здание рассматривают как сплошную многостенчатую оболочку с вертикальной или горизонтальной осью. Эти модели применяют при расчете ядер-стволов и объемно-блочных зданий.

В дискретно-континуальных моделях сохраняется заданное дискретное расположение вертикальных элементов несущей системы. Сосредоточенные связи заменяются континуальными, т.е. непрерывно распределенными по высоте здания. Модель наиболее универсальна и удобна для расчета сложных систем.

В случае произвольной нагрузки и несимметричного плана здания, полное перемещение горизонтального сечения многоэтажного здания складывается из четырех источников:

- 1) поступательных перемещений  $v$  и  $w$  в направлении осей  $x$  и  $y$ ;
- 2) поворота в плоскости  $yz$  (рис. 9.2);
- 3) деформации сечения в плоскости  $yz$  вследствие продольных деформаций вертикальных элементов, подвергающихся изгибу ( $x$  – вертикальная ось).

Системы рассматриваются отдельно под действием вертикальных и горизонтальных нагрузок. При этом вводятся допущения:

связи совершенно жестки в своей плоскости и гибки из плоскости;

вертикальные элементы (плоские столбы и колонны) не оказывают сопротивление чистому кручению;

в колоннах не учитываются деформации сдвига;

в горизонтальных элементах (связях) не учитываются продольные деформации;

рассматриваются малые деформации и пренебрегают изменением расчетной схемы в процессе нагружения.

Горизонтальную нагрузку раскладывают на направления, а также крутящий момент относительно центра поворота. При плоском изгибе несущей системы все перемещения диафрагм одинаковы, а нагрузка распределяется между ними пропорционально их изгибным жесткостям.

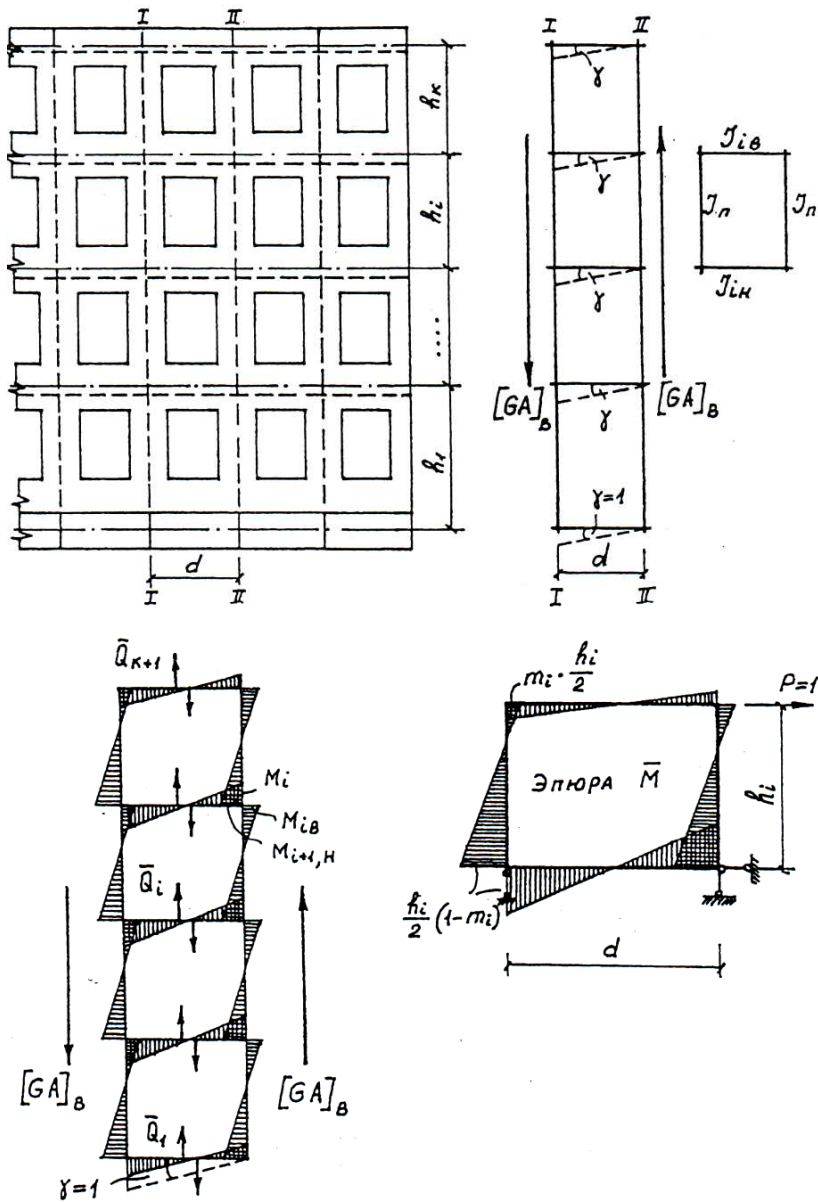


Рис. 9.2. Схема к определению сдвиговой жесткости стены крупнопанельного здания по Б.А. Косицыну [12]



**Вероятностный расчет зданий на неоднородных грунтовых основаниях** [12, 58, см. также работы Г. Аугусти, А. Баратта, Ф. Кашиасти (1988)].

Для бескаркасных зданий применяют дискретно-континентальную модель пространственных составных систем тонкостенных стержней или призматических оболочек. Жесткостные и геометрические характеристики элементов постоянны по их длине. Несущие элементы принимают непрерывно соединенными между собой продольными и поперечными связями.

Для зданий с  $L/H < 0,75$  расчетную модель рассматривают в виде приведенных одномерных балочных систем с жесткостными характеристиками  $EI$  и  $GA$ . Учитывают только изгиб. При расчете здания на кручение вводят обобщенные характеристики  $E^{Iw}$  и  $G^{Aa}$  (секториальная и крутильная жесткости коробки здания).

Расчет здания проводят в три этапа:

- определяют жесткостные характеристики систем, соответствующих искомому обобщенным усилиям;
- решают задачу по определению обобщенных усилий и перемещений в элементах зданий;
- вычисляют расчетные усилия в панельных конструкциях по поперечным обобщенным усилиям.

Нагрузки, вызывающие изгиб и кручение зданий, представлены уравнениями

$$q_u(x, t) = \overline{q}_3(x, t) + \tilde{q}_3(x, t) + q - C_3(t)[\overline{y}(x, t) + \tilde{y}(x, t)];$$

$$q_k(x, t) = m(x, t) + \tilde{m}_3(x, t) - C_3^k(t)[\overline{\theta}(x, t) + \tilde{\theta}(x, t)].$$

Дифференциальные уравнения изгиба и кручения получены в виде

$$\begin{aligned} \overline{y}^{IV}(\xi, t) - 2\overline{r}_2^{-2}(t)\overline{y}''(\xi, t) + \overline{w}_2^4(t)\overline{y}(\xi, t) = \\ = L^4 / B(t) \left[ q + \tilde{q}_3(\xi, t) - \frac{B(t)}{\Omega_0(t)} \overline{q}_3''(\xi, t) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{IV}(\xi, t) - 2\tilde{r}_2^{-2}(t)\tilde{y}''(\xi, t) + \tilde{w}_2^4(t)\tilde{y}(\xi, t) = \\ = L^4 / B(t) \left[ \tilde{q}_3(\xi, t) - \frac{B(t)}{\Omega_0(t)} \tilde{q}_3''(\xi, t) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta^{IV}(\xi, t) - 2\overline{r_2^{-2}}(t)\overline{\theta''}(\xi, t) + \overline{w_2^4}(t)\theta(\xi, t) = \\ = L^4 / E(t)I_\omega \left[ \tilde{m}_3(\xi, t) - \frac{E(t)}{G(t)I_a} \overline{m_3''}(\xi, t) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta^{IV}(\xi, t) - 2\overline{r_2^{-2}}(t)\tilde{\theta}''(\xi, t) + \overline{w_2^4}(t)\tilde{\theta}(\xi, t) = \\ = L^4 / E(t)I_\omega \left[ \tilde{m}_3(\xi, t) - \frac{E(t)}{G(t)I_a} \tilde{m}_3''(\xi, t) \right], \end{aligned}$$

где  $q = Q_{zg} / L$  – среднее значение внешней нагрузки от массы здания;  $C_3^k = 2C_3^{HC} B^2$  – эквивалентная крутильная жесткость упругого полу-пространства;  $C_3^{HC}$  – эквивалентный коэффициент жесткости основания для наружных продольных стен здания;  $2B$  – ширина коробки здания;  $\overline{m_3}(\xi, t)$ ,  $\tilde{m}_3(\xi, t)$  – эквивалентная крутящая нагрузка.

**Взаимодействия сооружений с неоднородными в плане основаниями [58].** Зависимости между реакцией основания и его осадкой

$$p(x, y) = C(x, y) W(x, y).$$

Дифференциальное уравнение плиты имеет вид

$$\Delta \nabla^4 W(x, y) = q(x, y) - p(x, y).$$

С переменным коэффициентом  $C(x, y)$

$$\Delta \nabla^4 W(x, y) + C(x, y)W(x, y) = q(x, y).$$

Для балки

$$EI_y^{IV}(x) + C(x)y(x) = q(x).$$

Случайные функции  $C(x)$  и  $q(x)$  представляют в виде

$$C(x) = \overline{C} + \mu \tilde{C}(x),$$

$$q(x) = \overline{q} + \mu \tilde{q}(x).$$

Решение дифференциального уравнения принимают в виде

$$y(x) = \overline{y_0} + \mu \tilde{y}_1(x) + \mu^2 y_2(x) + \dots$$

Система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} EI \bar{y}_0^{IV} + \bar{C} \bar{y}_0(x) &= \bar{q}, \\ E \bar{I} \bar{y}_1^{IV} + \bar{C} \bar{y}_1(x) &= \bar{q}(x) - \tilde{C}(x) \bar{y}_0(x), \\ E \bar{I} \bar{y}_2^{IV} + \bar{C} \bar{y}_2(x) &= -\tilde{C}(x) \bar{y}_0(x). \end{aligned}$$

По решению Д.Н. Соболева случайная функция  $C(x)$  представлена в виде канонического разложения

$$C(x) = \bar{C} \sum_i (A_i \cos W_i x + B_i \sin W_i x).$$

Дифференциальное уравнение изгиба балки получено в виде

$$EI y^{IV}(x) + \left[ \bar{C} + \sum_i A_i \cos W_i x + B_i \sin W_i x \right] y(x) = q.$$

Это уравнение статически нелинейное.

Решение получено вариационным методом Бубнова-Галеркина

$$y(x) = \sum_k a_k \Phi_k(x).$$

**Общие уравнения изгиба балки [69].** Изгиб – деформация, сопровождающаяся изменением кривизны осевой линии. Рассмотрим изгиб балки постоянного по длине поперечного сечения. Ось  $Oz$  направлена вдоль оси балки,  $Ox$  и  $Oy$  направлены вдоль главных осей инерции поперечного сечения. Изгиб называют прямым, если он происходит с искривлением оси в одной из главных центральных плоскостей инерции. Если прямой изгиб происходит от действия только постоянного по длине балки изгибающего момента, то это прямой поперечный изгиб. Если он происходит с выходом изогнутой оси балки в обе главные центральные плоскости, то это косой изгиб.

Для прямого поперечного изгиба

$$M_x = \iint_A \sigma_z y dA, \quad M_y = - \iint_A \sigma_z x dA,$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z(x, y, z), \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z).$$

Имеются три основные гипотезы при выводе уравнений изгиба.

**Первая гипотеза** теории изгиба балки состоит в том, что напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  пренебрежительно малы по сравнению с напряжением  $\sigma_z$  – гипотеза о некасаемости слоев балки

$$q_z = \sigma_z/E, \quad \varepsilon_x = -\mu\sigma_z/E, \quad \varepsilon_y = -\mu\sigma_z/E.$$

**Вторая гипотеза**, высказанная Я. Бернулли, – гипотеза плоских сечений: материальные точки, находившиеся до деформации бруса в одной плоскости поперечного сечения, после деформации бруса остаются в одной плоскости, перпендикулярной изогнутой оси бруса, т.е. плоские поперечные сечения остаются плоскими. Сдвиги  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$  равны нулю

$$\gamma_{xz} = \partial\omega/\partial x + \partial u/\partial z = 0, \quad \gamma_{yz} = \partial\omega/\partial y + \partial v/\partial z = 0.$$

**Третья гипотеза** заключается в том, что перемещения точек поперечного сечения  $u$  и  $v$  в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  не зависят от координат точек поперечного сечения

$$\omega(x, y, z) = -\frac{du(z)}{dz}x - \frac{dv(z)}{dz}y + \omega_0(z),$$

где  $\omega_0(z)$  – постоянная интегрирования.

Так как  $\varepsilon_z = \partial\omega/\partial z$ , то

$$\varepsilon_z(x, y, z) = -\frac{d^2u(z)}{dz^2}x - \frac{d^2v(z)}{dz^2}y + \varepsilon_{z0}(z),$$

где  $\varepsilon_{z0}(z) = d\omega_0/dz$  – относительная продольная деформация оси балки;

$$\sigma_z(x, y, z) = -E\frac{d^2u(z)}{dz^2}x - E\frac{d^2v(z)}{dz^2}y + E\varepsilon_{z0}(z).$$

При подстановки этого уравнения в формулу для определения изгибающего момента  $M_x$  получают

$$M_x = -E\frac{d^2u(z)}{dz^2}\iint_A y x dA - E\frac{d^2v(z)}{dz^2}\iint_A y^2 dA + E\varepsilon_{z0}(z)\iint_A y dA.$$

Так как  $J_{xy} = 0$ ,  $S_x = S_y = \Delta$ , то

$$EJ_x\frac{d^2v(z)}{dz^2} = -M_x(z); \quad EJ_y\frac{d^2u(z)}{dz^2} = M_y(z); \quad EA\frac{d\omega_0(z)}{dz} = N_z(z).$$

Если  $m_x = m_y = 0$ , то

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q_y; \quad \frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x; \quad \frac{dN_z}{dz} = -q_z.$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении балки прямоугольного сечения

$$\sigma_z(x, y, z) = \frac{M_x(z)}{J_x} y - \frac{M_y(z)}{J_y} x + \frac{N_z(z)}{A}.$$

Касательные напряжения при изгибе балки

$$\tau_{zy} = Q_y(z) S_{x \text{ отс}}(y_0) / [b_x(y_0) J_x];$$

$$\tau_{zx} = Q_x(z) S_{y \text{ отс}}(x_0) / [b_y(x_0) J_y],$$

где

$$S_{x \text{ отс}}(y_0) = \iint_{A_{\text{отс}}} y dA; \quad S_{y \text{ отс}}(x_0) = \iint_{A_{\text{отс}}} x dA;$$

$$Q_x = \iint_A \tau_{yx} dA; \quad Q_y = \iint_A \tau_{zy} dA.$$

**Центр изгиба** – точка в поперечном сечении балки, приложение поперечной силы в которой, независимо от значения силы, приводит нить к изгибу без кручения, т.е. без поворота поперечных сечений вокруг оси балки.

В общем случае

$$x_c = \frac{1}{J_x} \iint_A \frac{S_{x \text{ отс}}(y)}{b_x(y)} x dA - \frac{1}{J_x} \iint_A \frac{S_{x \text{ отс}}(x)}{b_y(x)} y dA,$$

$$y_c = -\frac{1}{J_y} \iint_A \frac{S_{y \text{ отс}}(y)}{b_x(y)} x dA + \frac{1}{J_y} \iint_A \frac{S_{y \text{ отс}}(x)}{b_y(x)} y dA.$$

Для поперечного сечения, симметричного относительно оси  $O_y$ ,  $x_c = 0$

$$y_c = (1/J_y) \iint_A \{S_{y \text{ отс}}(x) / [b_y(x)]\} y dA.$$

**Коррозионные разрушения.** Этой проблеме посвящена обширная литература. Рассматриваются: типы коррозии (газовая, атмосферная, подземная, в природных условиях; коррозия металлов, бетонов, сплавов, керамических материалов); защита от коррозии и др. Различают химическую, электрохимическую, биологическую коррозию.

Подробные сведения можно найти в работах: И.Д. Розенфельда (1951 – 1970), Н.Д.Томашева (1959), А.М. Сухотина (1975), В.Н. Лайнеда (1974), Н.К. Розенталя (2001), В.М. Москвина (1939 – 1975), Ю.И. Арчакова (1970), И.Г. Овчинникова (1989 – 2011), Ф.М. Иванова (1943 – 1975) и др.

## 9.5. АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ

Клейн Г.К. (1982) описал узловые вопросы расчета грунтовых оснований и взаимодействующих с ними сооружений. Важнейшей проблемой механики грунтов является создание модели, охватывающей все многообразие его природных свойств и ее математической теории. Эта модель в общем случае должна учитывать дискретность строения, разрывность и нелинейность деформаций, неоднородность, разрывность, ползучесть и др.

Теория зернистых сред И.И. Кандаурова (1966) и предложенные в ней формулы для определения давлений лучше отвечают экспериментальным данным, чем формулы теории упругости. Здесь открываются большие возможности для учета особенностей структуры.

Теория Винклера, по мнению Г.К. Клейна, отражает не само грунтовое основание, а только поверхность, и не дает возможности определять напряжения и перемещения в нагруженном состоянии за пределами этой поверхности. Комбинированные модели, в которые входит винклеровская поверхность в качестве одного из элементов, можно считать чисто феноменологическими, т.е. отражающими влияние проявления механических свойств, а не природу.

Принцип прямолинейного распределения сил О.К. Фрелиха (1938), по мнению Г.К. Клейна, является одним из путей учета неразрывности деформаций. Формулы для напряжений и осадок удовлетворяют условиям равновесия, а условиям неравномерности деформаций – только для определенных величин коэффициента Пуассона.

Анализируя результаты компрессионных и штамповых испытаний грунта, Г.К. Клейн отмечает, что в первом случае с увеличением нагрузки жесткость повышается, а во втором – понижается. Это является одним из поводов против применения модели сплошной среды с постоянным модулем деформации. Поэтому следует учитывать снижение жесткости грунта с увеличением давления, но не в такой степени как под круглым или квадратным фундаментом, когда перемещение грунта ниже подошвы происходит по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

**Ограниченная по глубине снимаемая толща однородного основания** заменяется линейно-деформируемым слоем конечной тол-

щины на абсолютно жестком подстилающем слое (К.Е. Егоров, 1960). Последний вызывает концентрацию напряжений у его кровли, которая отсутствует в однородном основании. Эту задачу также рассматривали М.И. Горбунов-Посадов (1946), О.Я. Шехтер (1948), И.А. Совинц (1961) и др.

При одних и тех же значениях глубин  $h_c$  линейно-деформируемого слоя и условной сжимаемой толщи однородного основания, изгибающие моменты в балках на сжимаемой толще будут меньше, чем в балках на линейно-деформируемом слое. Разница в результате расчета сооружений на различных моделях грунтового основания особенно заметна при действии равномерно предельной и близкой к ним нагрузок.

Подчеркивается трансверсальная анизотропия основания, которая могла возникнуть в процессе первичного гравитационного уплотнения осадочных пород и проявляется в жесткостных свойствах грунтов по вертикальному и горизонтальному направлениям. Учет анизотропии количественно, а не качественно влияет на форму кривой осадок.

Учет ползучести, неоднородности и нелинейно-деформируемости позволяет снизить изгибающие моменты в фундаментных балках. Дальнейшее уточнение расчетов оснований должно идти по пути перехода от детерминированной постановки к вероятностной.

**Нелинейная механика грунтов** (Ю.К. Зарецкий, 1982). Подчеркивается, что при проектировании уникальных сооружений необходимо учитывать технологию строительства, последовательность воздействий, т.е. реальную обстановку. Характерной особенностью поведения грунта является пластическое деформирование, грунты могут доуплотняться при девиаторном нагружении. В условиях сейсмического воздействия в водонасыщенных грунтах возникают значительные сдвиговые усилия. Несвязные грунты при этом получают возможность доуплотняться. Происходит перераспределение усилий между поровой жидкостью и скелетом. Поровое давление растет, а эффективные напряжения уменьшаются. Все это способствует переходу грунтового сооружения в предельное состояние.

Зарецкий Ю.К. предлагает следующую методологию расчета грунтов:

- связь между направлениями определяется по данным испытаний в условиях сложного напряженного состояния на всем диапазоне действия нагрузок;

- математическая модель грунта формируется в рамках деформационной теории пластичности или теории пластичного течения с упрочнением. Последняя основывается на принципе максимальной скорости диссипации механической работы (принципе максимума Мизеса);

- в алгоритме расчета должны учитываться все факторы (реальный график возведения сооружения, технология возведения, взаимодействие скелета грунта и поровой жидкости при статических и динамических воздействиях);
- допускаемые нагрузки на здания и сооружения оцениваются по их опасным для эксплуатации деформациям;
- предельной считается нагрузка, при которой происходят незапускающие пластические деформации. Незапускающий характер накопления пластических деформаций является признаком предельного состояния.

Общие теоремы теории упруго-пластических сред приведены в книгах В.Т. Койтера (1961), Д.С. Друккера и В. Прагера (1952).

**Законы деформирования нескальных грунтов** (Иосилевич В.А., 1967). Отмечается, что теория однородной изотропной линейно-деформируемой среды и теория предельного равновесия описывают отдельные фрагменты полной картины поведения грунта под нагрузкой. Они не считают нелинейного характера деформирования грунта, взаимного влияния шаровых тензоров и девиаторов напряжений и деформаций, явления дилатансии (разрыхление при сдвиге), зависимости между характеристиками деформируемости и прочности и др.

Анализ результатов исследований деформируемости и прочности нескальных грунтов показал: стабилизированные объемные деформации при однократном активном статическом нагружении протекают необратимо; для большинства грунтов преобладает пластическая часть объемной деформации; в условиях гидростатического сжатия объемные деформации нелинейно зависят от всестороннего давления; при сложном напряженном состоянии объемные деформации обуславливаются как шаровым тензором, так и девиатором напряжений; деформации сдвига в условиях сложного напряженного состояния в большей части необратимы и зависят от девиатора напряжений и от шарового тензора.

Показана применимость в инженерных расчетах условия предельного равновесия Мизеса–Шлейхера:

$$\sqrt{I_2} = F(p); \quad J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}; \quad p = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}; \quad S_{ij} = \delta_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij},$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $S_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений;  $J_2$  – первый инвариант тензора напряжений;  $I_2$  – второй инвариант девиатора напряжений;  $\delta_{ij}$  – единичный тензор Кронекера.



Если  $F$  – линейная функция

$$F(p) = kp + b,$$

то вышеприведенное условие переходит в условия прочности А.И. Боткина (1940).

**Результаты определения угла трения песка в трехосной аппаратуре и сдвиговых приборах.** Обратимся к исследованиям А.Л. Крыжановского (1983). Опыты проводили в трехосной аппаратуре МИСИ при ( $p = 1,65$  и  $1,7$  г/см<sup>3</sup>;  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  ( $\sigma < 0,1$  МПа), затем при  $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$ . Деформирование существенно за счет задаваемой деформации в направлении  $\sigma_1$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ).

Получены зависимости

$$\gamma_0 = \gamma_0(\sigma_1 - \sigma_3),$$

где  $\gamma_0 = 2/3\sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2}$  – октаэдрический сдвиг;  $e_1 \geq e_2 \geq e_3$  – главные относительные деформации.

Направляющие конусы нормали  $v$  площадки предельного состояния

$$l^2 = \frac{1}{1 - de_1^p / de_2^p} - 1/6\mu_{de}; \quad m = 0; \quad n^2 = 1 - l^2,$$

где  $de_1^p \geq de_2^p \geq de_3^p$  – приращения главных пластических деформаций;

$\mu_{de} = \frac{2de_2^p - de_1^p - de_3^p}{de_1^p - de_3^p}$  – параметр вида приращения пластических деформаций.

Касательное и нормальное напряжения на потенциальных площадках предельного состояния определяются по формулам:

$$\sigma_v = (\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + \sigma_3;$$

$$\tau_v = \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l^2 + \sigma_3^2 - \sigma_v^2}.$$

Значение угла внутреннего трения получено при следующих схемах нагружения:

при  $\mu_0 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \pm 1,0$  и  $0,0$ , нагружение выполнено при

девиаторной схеме: на первом этапе по гидростатическому закону,

а затем при постоянной сумме главных напряжений за счет увеличения компонент девиатора напряжений;

по чисто девиаторной схеме ( $\mu_{\sigma} = -1$ );

после окончания по гидростатическому закону задавались различные значения  $d\tau_0/d\sigma_0$  (отрицательные и положительные постоянные в каждом опыте);

в условиях плоской деформации после предварительного обжатия по гидростатическому закону задавались различные значения  $de_1^p/de_3^p$  и измерялись соответствующие напряжения, либо различные отношения  $d\sigma_1/d\sigma_2$  и измерялись соответствующие деформации.

Установлено, что остаточное значение сопротивления сдвигу и соответствующего угла внутреннего трения практически постоянно.

Мионовым В.А. и Софьиным Д.Е. предложена (2008) модель упруго-пластического деформирования дилатансионно разупрочняющихся грунтов. Эта модель позволяет описать особенности процессов деформирования при сложном напряженном состоянии.

Принято, что площадка скольжения совпадает с октаэдрической, условие текучести связывает нормальную  $s$  и касательную  $t$  силы на этой площадке

$$f_q = (q_i, k, \chi)t - sk,$$

где  $k$  – коэффициент трения;  $\chi$  – параметр упрочнения;

$$s = \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + q_3); \quad t = \frac{1}{3}\sqrt{(q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + (q_3 - q_1)^2}.$$

Для деформационно упрочняющейся (разупрочняющейся) среды, коэффициенты трения  $k$  и дилатансии  $\lambda$  являются функциями параметра упрочнения (разупрочнения)  $\chi$ .

Зависимости  $k = k(\varepsilon^p)$  и  $\lambda = \lambda(\varepsilon^p)$  определяются по результатам испытаний образцов при сложном напряженном состоянии.

Величина

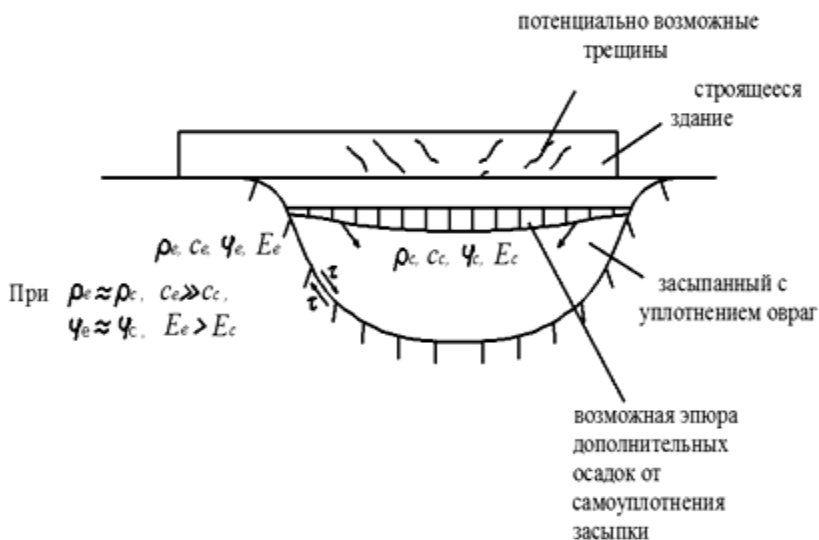
$$d\lambda = \frac{dt - kds}{2(dk/d\varepsilon^p)\lambda ks^2}.$$

### **Анализ НДС оснований с наклонными слабыми слоями.**

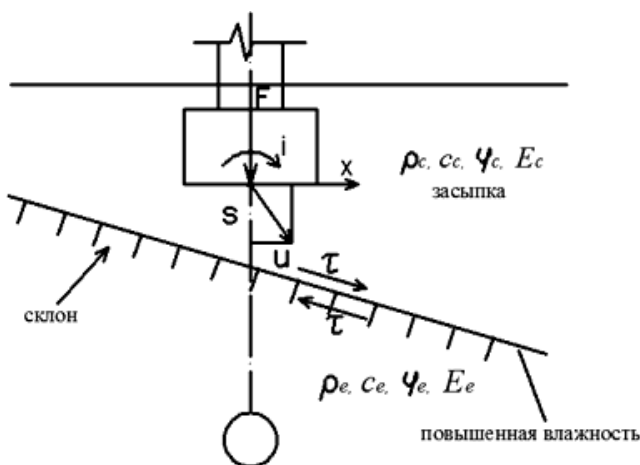
В практике это имеет место по берегам засыпанных оврагов, речек. Леденев В.В. и Однолько В.Г. (1987) анализировали повреждения построенного гаража. Под отдельными фундаментами одной из продольных стен – грунт насыпной. Анализ взаимодействия засыпки оврагов с естественными отложениями и с проектируемыми зданиями сделан В.В. Леденевым (1982 – 1984).

В случае применения свайного фундамента возможно снижение сил сопротивления сдвигу по части боковой поверхности свай, распо-

ложенных в слое засыпки, а возможно, и проявление сил отрицательного трения (рис. 9.3).



а)



б)

Рис. 9.3. Возможные деформации здания, построенного на овраге (а), схема перемещения фундамента здания, построенного на склоне (б)

Напряженно-деформированное состояние (НДС) оснований с наклонными слабыми слоями изучали С.С. Вялов, А.К. Бугров, А.Н. Цеева (1989). Анализировались мерзлые грунты в зоне вечной мерзлоты, где встречались переслаивающиеся пласты полускальных пород. Для описания упругопластических деформаций принята модель Друкера–Прагера, основанная на представлении грунта в виде идеально упругопластического тела Прандтля. В допредельном состоянии грунт представляется сплошной средой. В допредельном состоянии – линейно-деформируемой, а в предельном – в соответствии с условием Мора–Кулона. Задача решена методом конечных элементов при шаговом методе нагружения. За эталонный вариант принят расчет однородного упругого основания. Слабый слой грунта служит препятствием развитию напряжений по нормали к напластованию. Деформирование основания заключается в сжатии слабого прослоя; раздвижении слабого грунта вниз и вверх по падению; выдавливании слабого слоя грунта на свободную поверхность.

Наличие наклонного слабого слоя приводит к уменьшению критических нагрузок как с однородным прочным основанием, так и с горизонтально залегающим слабым слоем. Устройство над фундаментом подушки из тощего бетона или гравийно-галечной смеси может уменьшить или даже устранить влияние слабого наклонного слоя.

**Нелинейный анализ НДС грунтов** (Дж.М. Дункан и Чанг Чик-Юнг (1970). Использована обобщенная модель Мора–Кулона–Прандтля и гиперболическая зависимость максимального касательного напряжения от осевой деформации. Решение выполнено методом конечных элементов, на которые разделен массив. Величина модуля деформации определялась для каждого элемента по деформациям и напряжениям.

Экспериментально-теоретические исследования устойчивости грунтовых оснований (в основном, песчаных) при действии на фундаменты наклонной силы проводили: Г. Мейергоф (1953), У. Лебег (1972), В.В. Леденев (1970 – 2005), П.Д. Евдокимов и П.Н. Кашкаров (1979), А.С. Снарский и В. Н. Домбровский (1978), Л.Н. Теренецкий и Е.А. Сорочан (1980), В.Н. Лавров и В.Г. Федоровский (1987) и др.

Литвинишин Е. (1978) предложил статистическую модель для описания движения сыпучей среды. Приняты следующие допущения: массив сыпучей среды рассматривается как множество дискретных элементов; движение среды происходит под действием силы тяжести; образование пустот подчиняется линейному разностному уравнению; рассмотрено плоское деформированное состояние; вероятность возникновения пустот пропорциональна их объему; во время движения происходит перемешивание зерен (вводится понятие случайного блуждания пустоты).

Построено решение параболического уравнения при начальном условии

$$\omega(x, 0) = \gamma \delta(x); \quad \gamma = \text{const};$$

$$\omega(x, z) = \gamma^{(4\pi Bz)^{-1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Bz}\right],$$

где  $\delta(x)$  – функция Дирака;  $\gamma$  – константа;  $\omega(x, z)$  – функция нормального распределения (объем пустот);  $x, z$  – коэффициенты возникновения пустоты в ячейке.

Н. Баву Шанкер, К.С. Сарта, М.В. Ратнат (1978) рассмотрели задачу об уплотнении водонасыщенного массива горизонтальной сдвиговой нагрузкой, распределенной по прямоугольной площадке. В основу положена теория консолидации М.А. Биота (1941) для водонасыщенного грунта

$$\nabla^2 u_i - (2n - 1) \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_i} - \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 0,$$

где  $u_i$  – вектор перемещения скелета грунта;  $G$  – модуль сдвига;  $n = (1 - \nu) / (1 - 2\nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\bar{e}$  – объемная деформация;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;  $x$  – горизонтальная координата в направлении сдвиговой нагрузки.

Граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = 0, \sigma_{yz} = 0 & \text{ при } z = 0 \quad |x| < \infty, |y| < \infty, t > 0; \\ \sigma_{xy} = q & \text{ при } z = 0 \quad |x| < b, |y| < b\lambda, t > 0; \\ \sigma_{xy} = 0 & \text{ при } z = 0 \quad |x| > b, |y| > b\lambda, t > 0; \\ \sigma = 0 & \text{ при } z = 0 \quad |x| < \infty, |y| < \infty, t > 0, \end{aligned}$$

где  $\lambda = a/b$ ,  $q$  – интенсивность сдвиговой нагрузки, ось  $z$  направлена вниз.

Определяются перемещения  $\omega$  по направлению оси  $z$  в зависимости от порового давления, приведены формулы определения порового давления. Показано, что со временем оно снижается и увеличивается осадка штампа.

Нагараи Т.С., Сомашекар Б.В. (1974) разработали критерии разрушения грунтов как модифицированные критерии разрушения Треска и Мизеса.

Терчаги и Пек предложили (1925) использовать следующую зависимость между осадкой фундамента шириной  $B$  и осадкой опытного штампа шириной  $b = 0,3$  м:

$$\frac{S_B}{S_b} = \left( \frac{2B}{B + 0,3} \right)^2.$$

В зарубежной практике широко используют эту формулу для расчета осадок фундаментов по результатам штамповых испытаний.

Значительный интерес представляют результаты полевых экспериментов японских специалистов (VCP Committee, 1971) со сваями в песках. Опыты отличаются высокой оснащенностью приборами, важностью поставленных задач, глубоким анализом полученных данных. Среди решаемых вопросов и такие, как влияние способа изготовления свай (буровые или забивные), исследование характера распределения контактных напряжений по боковой поверхности и подошве, изучение формы уплотненного ядра под подошвой, определение плотности и крупности песка под подошвой и на расстоянии от нее, сравнение результатов испытаний свай с данными статического зондирования.

Выявлен факт измельчения песка под подошвой в области высоких напряжений.

**Практические методы расчета горизонтальных перемещений оснований.** Горизонтальные перемещения в грунтовых основаниях рассматривались в работах Н.А. Цытовича (1963), В.П. Кофман (1956), А. Лява (1935), О.Я. Шехтер (1956), В.В. Алипова (1972), М.В. Малышева (1963), В.Е. Быховцева (1969), К.Е. Егорова, В.А. Барвашова, В.Г. Федоровского (1973), С.Г. Кушнера и В.М. Тубольцева (1969), М.Б. Корсунского (1964), М.В. Балюры (1974).

Так, формула М.Б. Корсунского имеет вид

$$U = \frac{(1+\nu)pR}{E} [mS_u + (2\nu - 1) S_G],$$

где  $m = z/R$ ;  $z, R$  – координаты рассматриваемой точки;  $S_u, S_G$  – несобственные интегралы Бесселевых функций первого ряда.

По решению К.Е. Егорова (1973)

$$U = -\frac{2Rp}{E} K_{U1},$$

где  $K_{U1} = K_{U1}(\nu, m)$  – безразмерный коэффициент горизонтальных перемещений.

Вблизи подошвы штампа при  $0 < \nu < 0,5$  горизонтальные перемещения направлены во внутреннюю область основания (растяжение), а с некоторой глубины – в сторону от нее (сжатие). Это противоречит экспериментальным данным.

## Глава 10. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О ДЕФОРМИРОВАНИИ И РАЗРУШЕНИИ ОСНОВАНИЙ, СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Ниже приведены некоторые фрагменты из научных исследований В.В. Леденева [36, 37], докторской диссертации на тему «Несущая способность и перемещения заглубленных фундаментов при действии плоской системы сил», 1998, а также позже опубликованных работ.

**Математическая обработка экспериментальных данных.** Для анализа НДС стальных П-образных рам использовали нейронные сети (И.Н. Кузнецов, В.В. Леденев, В.Г. Тихомиров, 2009). С помощью сетей можно проводить аппроксимации, интерполяции, идентификации, ассоциазации (С. Осовский, 2002). Нейронная сеть играет роль универсального аппроксиматора функции от нескольких переменных, реализуя нелинейную функцию

$$y = f(x),$$

где  $x$  – входной оператор.

Важнейшее свойство нейронных сетей, свидетельствующее об их огромном потенциале и широких прикладных возможностях, состоит в их способности к обучению и к обобщению полученных знаний, т.е. обладает чертами так называемого искусственного интеллекта.

Нейронные сети функционируют в режимах обучения и тестирования.

В результате анализа и обработки экспериментальных данных получены фундаментальные зависимости, реализованные нейронной сетью:

$$y = th \left( \sum_{i=1}^n th((x_k, w_i) + \beta_i) V_i + \gamma_i \right),$$

где  $i = 1, \dots, n$  – количество нейронов;  $k = 1, \dots, z$  – количество примеров для тестирования;  $x_k$  – входный вектор (вектор аргументов);  $W_k$  – матрица весовых коэффициентов скрытого слоя;  $\beta_i$  – вектор смещения для нейронов скрытого слоя;  $V_i$  – матрица весовых коэффициентов выходного слоя;  $\gamma_i$  – вектор смещения для выходного слоя.

С каждым экспериментом была связана нейронная сеть, которую выбрали из нескольких в соответствии со следующими критериями оптимальности:

- адекватность функционирования сети на тестовой выборке;

- минимальные ошибки обучения сети;
- максимальное значение коэффициента корреляции.

В качестве метода обучения нейронной сети выбран алгоритм Левенберга–Марквардта с целевой функцией

$$E(\omega) = \frac{1}{2} \sum_1^M [e_i(\omega)^2].$$

## 10.1. ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ

Выдающиеся эксперименты с крупномасштабными моделями фундаментов были выполнены Мусом и Колем (1961), Мусом и Вейсом (1975), а также П.Д. Евдокимовым и Н.М. Кашкаровым (1966), Ю.Н. Мурзенко (1965 – 1975).

Рекомендуем обратить внимание на исследования Г.И. Глушкова (1977), К.С. Завриева и Г.И. Шпиро (1970), В.Н. Голубкова (1950 – 1980).

Различными способами изучали развитие деформаций в полевых и лабораторных экспериментах, в условиях плоской и пространственной задач, при постепенном увеличении нагрузки вплоть до разрушающей.

Отмечено влияние многочисленных факторов на особенности деформирования оснований. В процессе нагружения возникают и развиваются области уплотнения, разуплотнения, сдвигов, пластического течения; реологические процессы (ползучесть, релаксация). В это же время изменяются и физико-механические свойства грунтов.

На рисунках 10.1, 10.2 приведены результаты опытов с плоским и полуцилиндрическим штампом, вдавливаемым в вертикальную стену траншеи с разным расположением от граничной плоскости. По данным лабораторных экспериментов построена типичная картина деформирования грунта вокруг модели фундамента (рис. 10.3). Размеры зон контакта и отрыва, их расположение зависят от схем нагружения, размеров фундаментов и многих других факторов.

По результатам полевых опытов с буронабивными фундаментами в песчаном основании ненарушенной структуры, получены картины вертикальных перемещений грунта по вертикальным и радиальным направлениям (рис. 10.4).

Обработка результатов замеров перемещений позволила построить ряд характерных полей (рис. 10.5).

Более точную информацию можно получить в [36, 37]. Выявленные характерные области и зоны имеют подвижные границы.



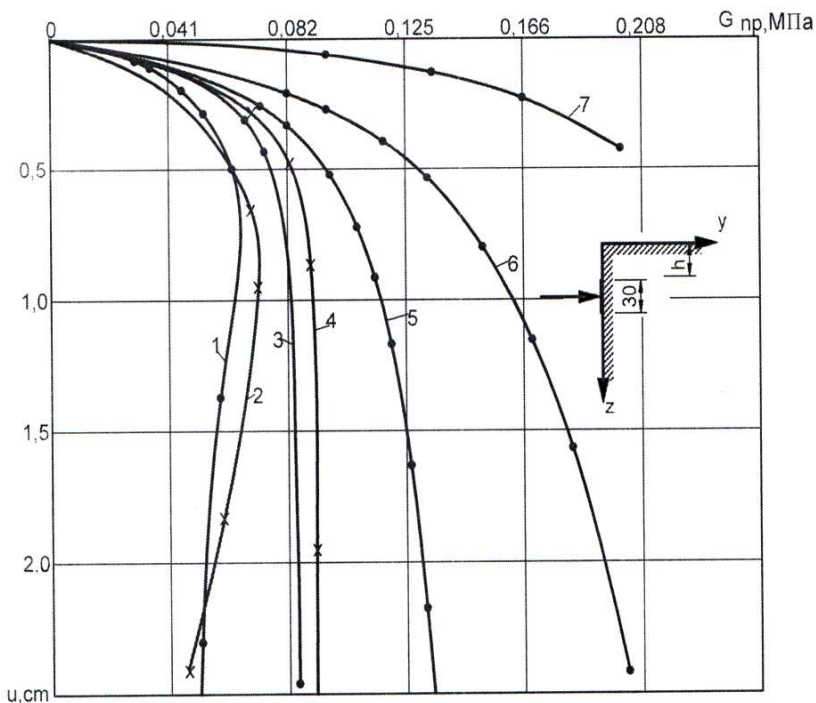


Рис. 10.1. Зависимость между нагрузкой и горизонтальным перемещением плоских штампов при  $\lambda$ :  
1, 2 – 1; 3, 4 – 2; 5 – 3; 6 – 5; 7 – 7

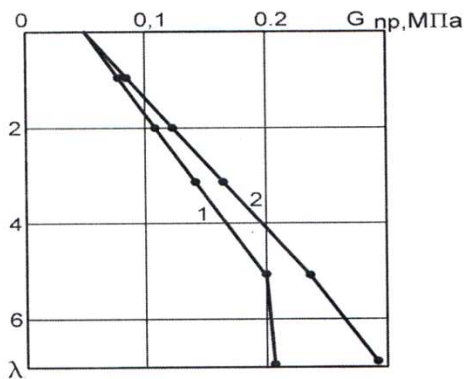
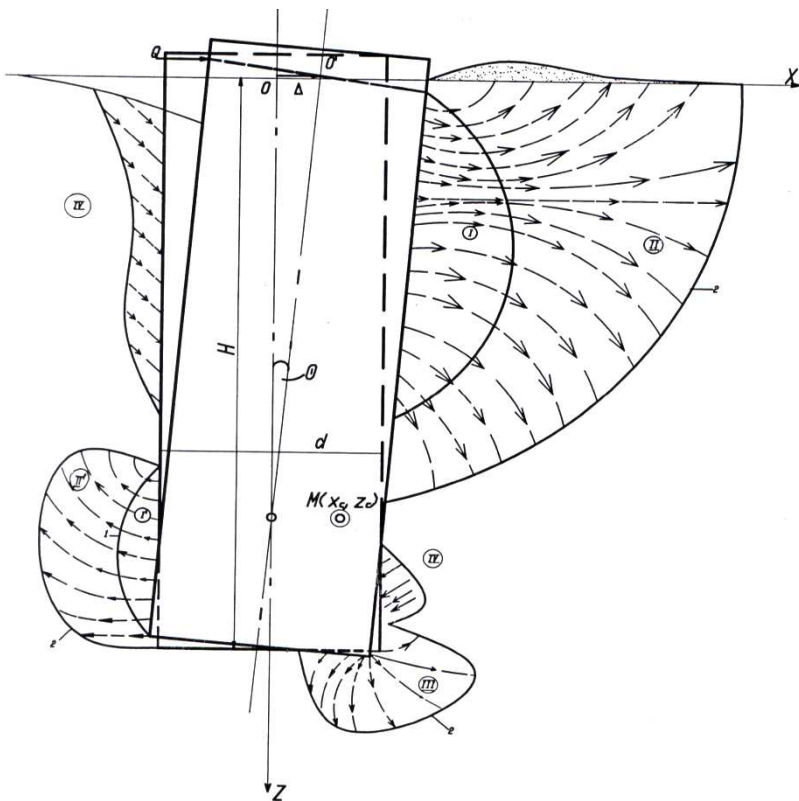


Рис. 10.2. Зависимость между предельным давлением на плоские (1) и полуцилиндрические (2) штампы и относительным заглублением



**Рис. 10.3. Траектории движения частиц песка при действии на фундамент горизонтальной силы:**  
 области: уплотнения I, I'; сдвигов II, II'; значительных сдвигов III; осыпания грунта при отрыве фундамента от основания

Сложный характер деформирования основания из гравелистого песка выявлен в экспериментах Е. Шульца, А. Хорна (1967). При действии на бетонный блок горизонтальной силы ( $F_v = \text{const}$ ) происходила дополнительная осадка и крен в сторону передней грани. Угол трения штампа по основанию параболически уменьшался с увеличением нормального давления.

**Деформация песчаных грунтов.** Песчаные грунты деформируются в виде перемещений частиц с вращением, излома, размельчения, разрушения структуры (эффект цепной реакции).

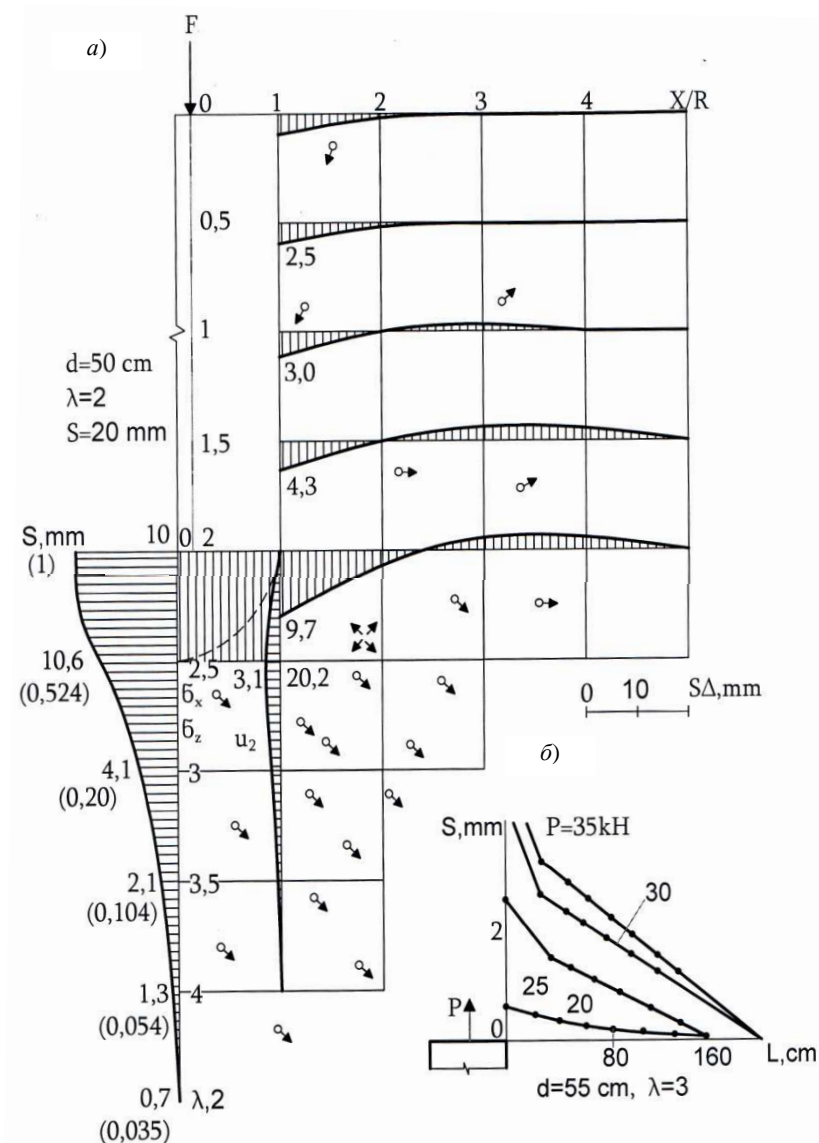


Рис. 10.4. Изменения осадок основания по глубине под серединой подошвы и краем, вертикальных перемещений основания в радиальных направлениях (а), эпюры вертикальных перемещений поверхности основания в радиальных направлениях (б)

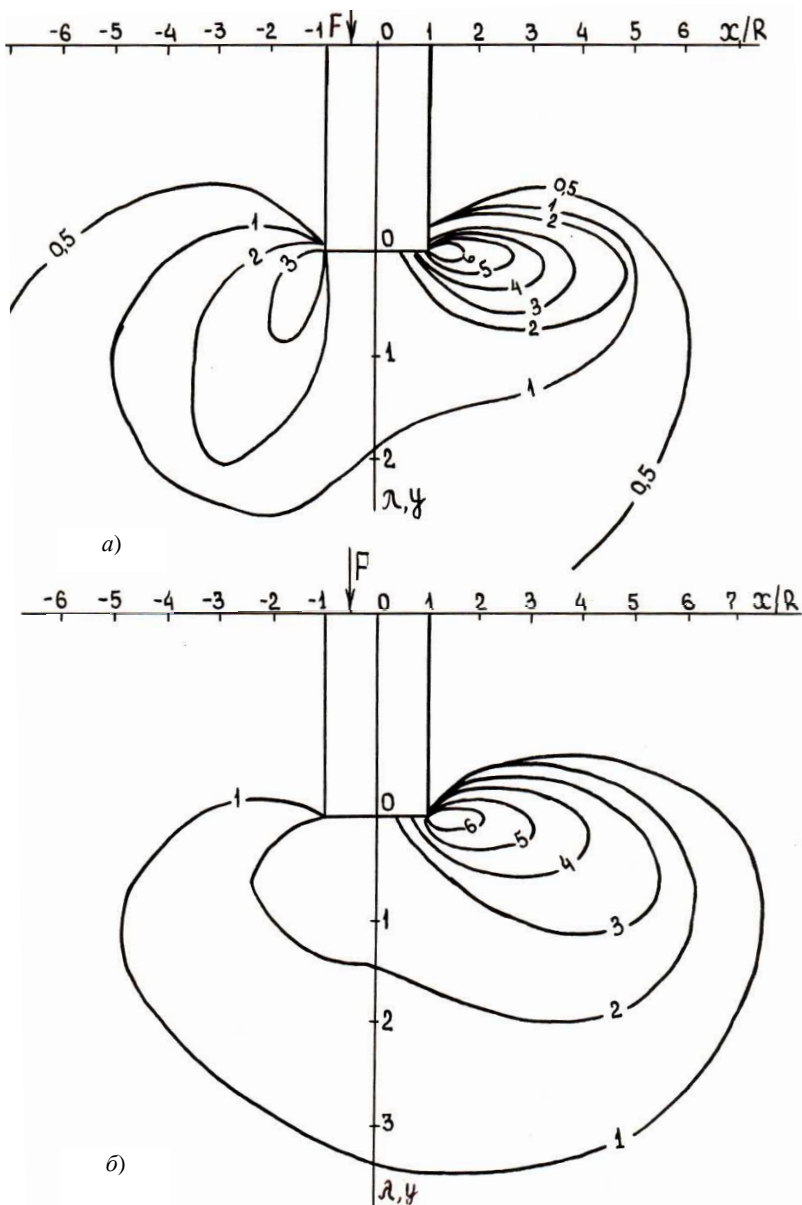


Рис. 10.5. Изолинии сдвиговых деформаций  $\gamma_{xy} \cdot 10^2$  при  $F = 0,4$  кН (а) и  $F = 0,5$  кН (б)

Влияние формы песчаных частиц на их деформационные свойства исследовали П.Л. Иванов и Л.В. Шульц (1972), В.А. Мелентьев (1950), О.А. Румянцев (1979) и др.

При одних и тех же нагрузках песок, состоящий из частиц угловатой формы, уплотняется больше, чем песок, состоящий из окатанных частиц. Песчаные грунты с одинаковой начальной пористостью, но более окатанные обладают большей способностью к уплотнению, чем грунт, представленный угловатыми частицами.

Значительные исследования уплотняемости песчаных грунтов и формирования их структуры проведены Н.Я. Денисовым (1951), В.А. Мелентьевым (1960), В.В. Леденевым (1980) и др.

Обширная деформация по этой проблеме имеется в докторской диссертации В.В. Леденева (1998).

В заключение отметим уникальные эксперименты Ю.Н. Мурзенко и его учеников.

Интересный материал приведен С.А. Ноблем (1970) по вопросам деформирования и прочности грунтов.

**Вдавливание штампа со знакопеременным вращением вокруг вертикальной оси.** Опыты проводили (В.В. Леденев, 1995) с гладким и шероховатым штампом с углами поворота  $\pm 5, \pm 10, \pm 15$ . Осадка штампа происходила из-за более компактной укладки частиц, их измельчения и износа шероховатого контактного слоя. Отмечено, что вращение штампа приводит к резкому снижению вертикальной нагрузки и увеличению осадки.

**Циклическое нагружение круглых и кольцевых штампов.** Выявлены фундаментальные зависимости скорости перемещений  $(\dot{s}, \dot{u}, \dot{i})$  от геометрических параметров моделей, условия нагрузки, коэффициентов асимметрии цикла, продолжительности цикла, относительной плотности основания.

**Длительная прочность грунтов.** Снижение прочности при ползучести отмечается у разных материалов.

Различают (С.С. Вялов, 1978): условно мгновенную прочность  $\tau_0$ , характеризующую сопротивление быстрому разрушению;

длительную прочность  $\tau(t)$ , определенную напряжением, при котором происходит разрушение за данный промежуток времени;

предел длительной прочности  $\tau_i$ , до превышения которого деформация имеет затухающий характер;

стандартную прочность, определяющуюся по стандартной методике (по ГОСТ).

Прочность грунтов определяется возно-коллоидными и кристаллизационными связями.

Разрушение грунта сопровождается структурными преобразованиями, влияющими на внутреннее сопротивление грунта сдвигу. Так, глинистые частицы ориентируются в направлении сдвиговых деформаций.

Интересные идеи приведены в работах Л. Шукле (1971), С.Р. Месчана (1974, 1978), А.В. Скемптона (1976), З.П. Тер-Мартirosяна (1980), Н.Н. Маслова (1982).

**Тиксотропные явления.** Свойство глинистых и других пород (тонко и мелкозернистые пылеватые пески, супеси, суглинки и глины с повышенной влажностью и неустойчивой консистенцией) разжижаться или размягчаться под влиянием механических воздействий, а после их прекращения самопроизвольно восстанавливать свое состояние и прочность (В.Д. Ламтадзе, 1984).

Представляют интерес исследования В.В. Радиной (1973) о роли микроорганизмов в формировании свойств глинистых грунтов и их напряженного состояния.

**Арочный эффект.** Это явление описывали К. Терцаги (1925), М.М. Протодяконов (1930), а для просадочных грунтов – Н.Я. Денисов (1951), В.И. Крутов (1981), А.А. Мустофаев (1989) и др.

При образовании полостей в горных породах или просадке нижних слоев грунта происходит нарушение природного напряженного состояния вышележащих, т.е. возникают неравномерные вертикальные смещения, развиваются реактивные касательные напряжения, стремящиеся удержать массив в равновесии.

**Тектоника земной коры.** Сергеев Е.М. отмечал (1982), что одной из главных задач инженерной геологии является прогноз изменения инженерно-геологических условий территории под влиянием деятельности человека.

Здесь же рассматривается роль тектонических движений земной коры при планировании строительства особо ответственных объектов, их характер, направленность, интенсивность, постоянство, тенденция развития. Рекомендуется прочитать очерки избранных проблем геомеханики, написанные А. Надаи (1969), А. Геймом (1920).

Белоусовым В.В. (1975) выделены три основных тектонических движения: колебательное (поднятие–опускание), складчатое (смятие слоев в складки), разрывное (возникновение тектонических разрывов). Причины тектонических движений рассматриваются в концепциях В.А. Обручева (1940) и В.В. Белоусова (1962, 1972). В работе И.А. Турчанинова, Г.А. Маркова, В.И. Иванова и др. (1978) рассмотрены тектонические напряжения в земной коре и устойчивости горных выработок.

Основы прикладной геомеханики разработаны Н.А. Цытовичем, З.Г. Тер-Мартirosяном (1991).

### **Процесс консолидации водонасыщенных глинистых грунтов.**

По Дашко Р.Э. (1981) консолидация глинистых пород высокой степени литификации, значительной прочности структурных связей (0,5...0,7 МПа), малой влажности и большой объемной массы, в основном определяется соотношением нагрузки от веса сооружения и величиной структурной прочности породы при сжатии.

В начальный период уплотнения происходит фильтрационная консолидация после преодоления начального градиента напора, затем вторичная консолидация за счет ползучести скелета грунта.

В глинистых водонасыщенных грунтах средней и малой степени литификации уплотнение происходит в три этапа: упругие деформации скелета без разрушения структурных связей; разрушение структурных связей и уплотнение за счет ползучести скелета без возможности оттока воды; фильтрационная консолидация.

Рассматривают три основные модели основания из водонасыщенных глинистых пород:

однослойная модель – напряжение от веса сооружения меньше структурной прочности;

двухслойная – напряжение от веса сооружения вызывает разрушение структурных связей и не создаются условия для фильтрации воды из породы. В верхней зоне происходит фильтрационная консолидация, а в нижней – упругое сжатие;

трехслойная – напряжение от веса превышает структурную прочность и происходит фильтрация воды. В верхней зоне происходит фильтрационная консолидация, а в нижней – упругие деформации.

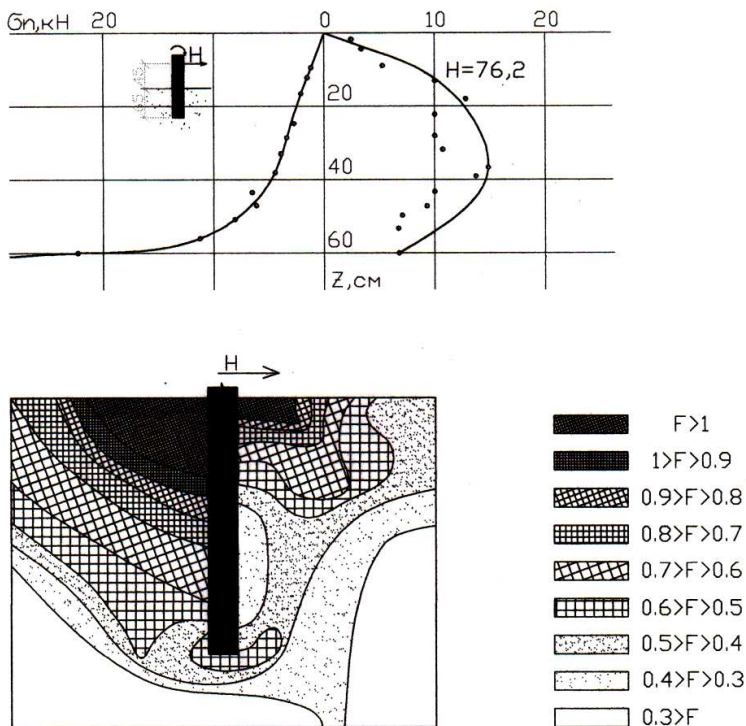
Проблему исследовал Эстербан Рифа Тапча (1978). В основу исследования положены идеи К. Терцаги (1925) в области консолидации связных грунтов о соотношении между общим давлением, поровым и эффективным.

В случае глинистых грунтов осадка складывается из двух составляющих: консолидации с изменением объема и деформации без изменения объема.

О перестройке структуры глинистых грунтов при сдвиге можно найти в работах Ю.Б. Осипова (1961), В.И. Осипова (1979), А.Я. Туровской (1969), Г.К. Бондарика (1975), Е.Н. Боданова, М.Д. Толмачева (1980) и др.

Структурные модели в инженерной геологии описал М.В. Рац (1973). О механике взаимодействия горных пород с инженерными сооружениями можно найти в работе Ч. Джегера (1975).

Наглядная картина распределения зон напряженного состояния грунта показана на рис. 10.6.



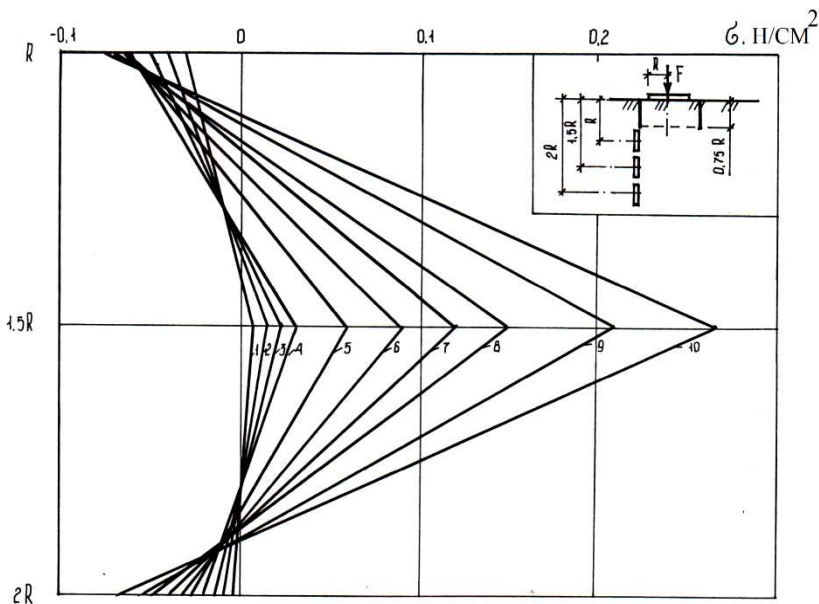
**Рис. 10.6.** Эпюры нормальных контактных давлений (а); зоны напряженного состояния вокруг свай (б); точками показаны результаты экспериментов Жосинета

Вокруг нагруженного фундамента возникает напряженное поле, оказывающее воздействие на соседние подземные сооружения, например, на стену (рис. 10.7). При этом происходит сложный характер ее деформирования, зависящий от жесткости стены, граничных условий, расстояния от нагруженного фундамента, его размеров, схем нагружения и многих других факторов.

В течение многих лет на кафедре КЗиС ФГБОУ ВПО «ТГТУ» проводились лабораторные опыты по исследованию распределения нормальных горизонтальных напряжений по глубине основания, вызванных влиянием нагруженного фундамента (см. рис. 10.7).

Исследовали влияния размеров нагруженного фундамента, величины и знака эксцентриситета, расстояния от края штампа до вертикальных штампов, заглубления вертикальных штампов от поверхно-





**Рис. 10.7. Эпюры горизонтальных нормальных напряжений по глубине основания (давления на вертикальные штампы) от незаглубленного штампа при  $d = 24$  см и нагрузке  $F$  (кН):**  
 1 – 2; 2 – 4; 3 – 6; 4 – 8; 5 – 10; 6 – 12; 7 – 14; 8 – 16; 9 – 18; 10 – 20

сти. Установлены функциональные зависимости между влияющими параметрами. Полученные данные могут быть использованы при разработке методов расчета вдавненного влияния подземных конструкций.

**Взаимное влияние подземных конструкций. Функциональные зависимости определения перемещений фундаментов с учетом взаимного влияния**

$$\Delta(s, u, i) = \Delta_N + \sum \Delta_{in} + \Delta_{d_{is}} + \Delta_w + \Delta_{d_n} + \Delta_T + \Delta_\sigma + \Delta_z + \dots;$$

$$N = F, M, Q;$$

$$\Delta_N = \Delta_{Nc} + \Delta_{Npl}; \quad \bar{N} = N / N_u,$$

где  $\sum \Delta_{in}$  – сумма дополнительных перемещений от близко расположенных подземных конструкций;  $\Delta_{d_{is}}$  – дополнительные перемещения от расструктурирования грунта;  $\Delta_w$  – то же при изменении условий

эксплуатации;  $\Delta_{dn}, \Delta_T, \Delta_\sigma, \Delta_z, \Delta_{N_c}, \Delta_{N_{pl}}$  – то же соответственно от неучитываемых силовых воздействий, температурных, из-за перераспределения усилий между элементами здания, из-за проявления реологических свойств, от самоуплотнения грунта, вследствие развития пластических деформаций;  $N_u(F_u, M_u, Q_u)$  – величины разрушающих нагрузок.

Ограничения:

$$\Delta \leq [\Delta]; \quad |\Delta_i - \Delta_{i-1}| / L \leq [\bar{\Delta}]; \quad \Delta \leq [\Delta];$$

$$a_{crc} \leq [a_{crc}]; \quad a \leq [a]; \quad \sigma_b \leq R_b; \quad \sigma_s \leq R_b; \quad N \leq N_u,$$

где

$$\bar{\Delta} \leq f_{\bar{\Delta}}(t, \rho, \omega, c, \phi, E, \lambda, e_0, \delta, L, \dots);$$

$$N_u \leq f_{N_u}(t, \rho, \omega, c, \phi, E, \lambda, e_0, \delta, L, \bar{x}_c, \bar{z}_c, \dots);$$

$i$  – рассматриваемая конструкция;  $n$  – число влияющих подземных конструкций;  $\Delta_{in} = \sum_{k=1}^n \Delta_{ik}$ .

Параметры  $e_i (i = x, y, z)$ ,  $\sigma$  могут служить регуляторами перемещений. При определенном сочетании  $e_i / \delta$  можно добиться оптимального распределения контактных напряжений.

Основные функциональные зависимости могут быть представлены в виде

$$\bar{\Delta} = f_{\bar{\Delta}}(t, \rho, \omega, \lambda, e_0, \delta, \bar{F}, \bar{L}, \bar{x}_c, \bar{z}_c, \dots),$$

уровень нагрузки

$$\bar{F} = f_{\bar{F}}(t, \rho, \omega, \lambda, e_0, \delta, \bar{L}, \bar{x}_c, \bar{z}_c, \dots).$$

Относительные координаты мгновенных осей вращения

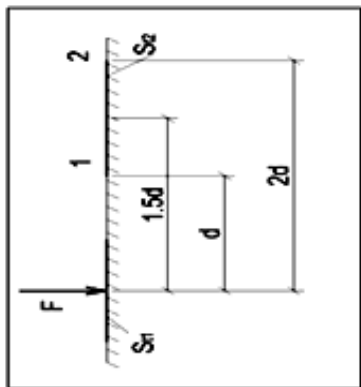
$$\bar{z}_c, \bar{x}_c = f_{z_c x_c}(t, \rho, \omega, \lambda, e_0, \delta, \bar{F}, \bar{L}, \Delta, \dots).$$

В таблице 10.1 приведены результаты одного из экспериментов по определению взаимного влияния фундаментов.

Наблюдаемые в экспериментах схемы взаимодействия заглубленных фундаментов с ограждающими стенками получены на рис. 10.8, а расчетные на рис. 10.9.

### 10.1. Исследование влияния нагруженного незаглубленного штампа на ненагруженный

Нагрузка на нагруженный штамп, Н	400	800	1200	1600	2000	2400
Нагрузка на край 1 ненагруженного штампа, Н	-5,1	-6,2	-4,4	-4,0	0	9,4
Нагрузка на край 2 ненагруженного штампа, Н	-3,4	-5,4	-6,6	-6,4	-6,0	-3,4
Осадка нагруженного штампа, мм	0,05	0,1	0,25	1,4	2,8	5,9



- нагрузка направлена вниз,  
+ то же вверх

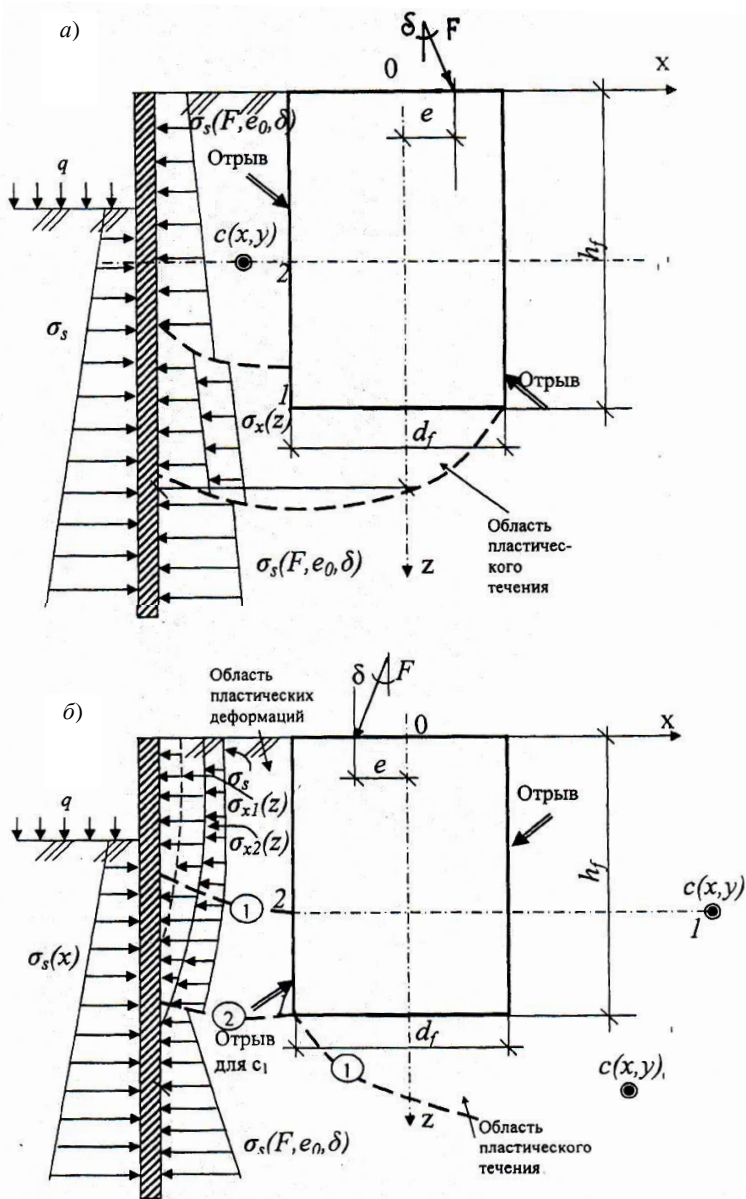


Рис. 10.8. Схема сил, действующих на стенку, при эксцентриситете справа (а) и слева (б)

Напряженно-деформированное состояние в основании буронабивного фундамента исследовано (В.В. Леденев, Тью Тхи Хоанг Ань, 2012) с использованием программы «PLAXIS 8.x» (рис. 10.9).

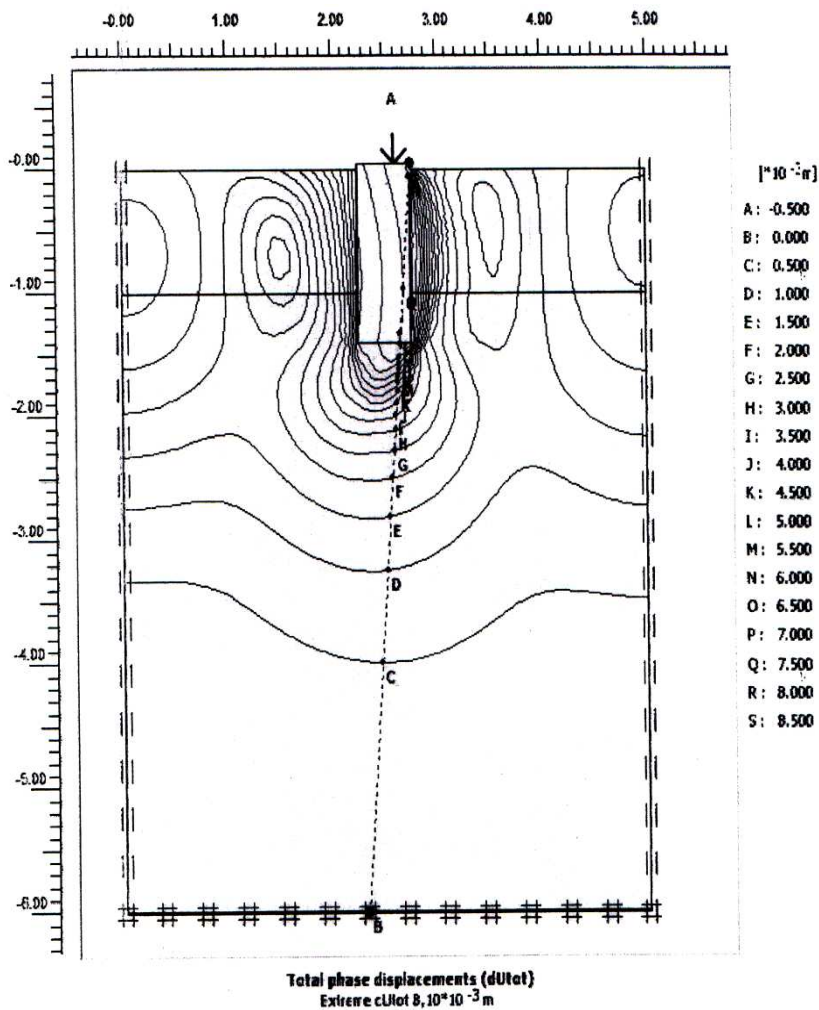
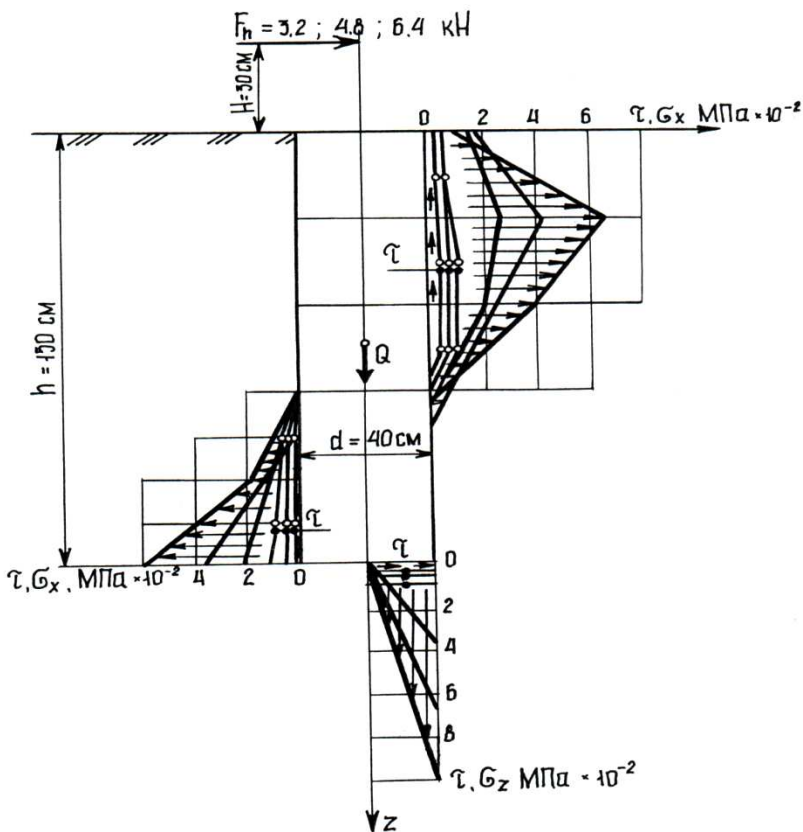


Рис. 10.9. Картина линий равных перемещений основания буронабивного фундамента при  $d = 50$  см;  $e_0 = 0,4$  см;  $P = 200$  кН (В.В. Леденев, Тью Тхи Хоанг Ань, 2012)

## 10.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Контактные напряжения под подошвой фундаментов исследовали: А.В. Криторотов (1965), Ю.Н. Мурзенко (1970), Г.К. Лазебник (1970), Г.А. Скормин и М.В. Малышев (1970), Ле Ат Хой (1971), А.Н. Снитков (1971), В.В. Леденев (1972), Мус и Вейс (1975), Т.И. Финаева и А.С. Канаян (1983), А.И. Калаев (1990), А.Н. Богомолов (2010, 2011), С.Г. Кушнер (1996 – 2010) и др.



**Рис. 10.10.** Эпюры нормальных и касательных напряжений по боковой поверхности и подошве тензомодели фундамента в плоскости  $xOz$  (опыты В.В. Леденева, 1970)

Боковые контактные напряжения по боковой поверхности горизонтально нагруженных фундаментов и свай определяли: Н.В. Лалетин (1940), В.Ф. Разоренов (1955), Г.И. Глушков (1965), В.В. Леденев (1970), В.В. Левенстам (1971), И.Т. Сергеев и В.С. Глухов (1976), В.Г. Буданов (1975), А.В. Филатов (1977), Г. Мейергоф и А. Яльшин (1984), И. Кузма и М.И. Никитенко (1988) и др.

В экспериментах с крупномасштабными моделями жестких цилиндрических заглубленных фундаментов измеряли контактные нормальные напряжения по боковой поверхности и по подошве моделей с использованием месдоз (рис. 10.18). В других сериях экспериментов измеряли нормальные и касательные контактные напряжения по боковой поверхности и по подошве цилиндрической тензомодели фундамента (рис. 10.10).

**Нормальные контактные напряжения.** Приведем примеры распределения контактных напряжений по подошве штампа (рис. 10.18). Отличие эпюр, полученных В.В. Ледневым (рис. 10.18) и Ю.Н. Мурзенко (рис. 10.19), состоит в том, что в последних нагрузка была доведена до разрушения основания. Вследствие этого седлообразная форма на последней ступени перешла в колоколообразную.

**Нормальные и касательные контактные напряжения.** В опытах с тензомоделью исследовали нормальные и касательные напряжения по подошве и боковой поверхности фундамента. Результаты одного из опытов приведены на рис. 10.10, подробнее смотри в [36].

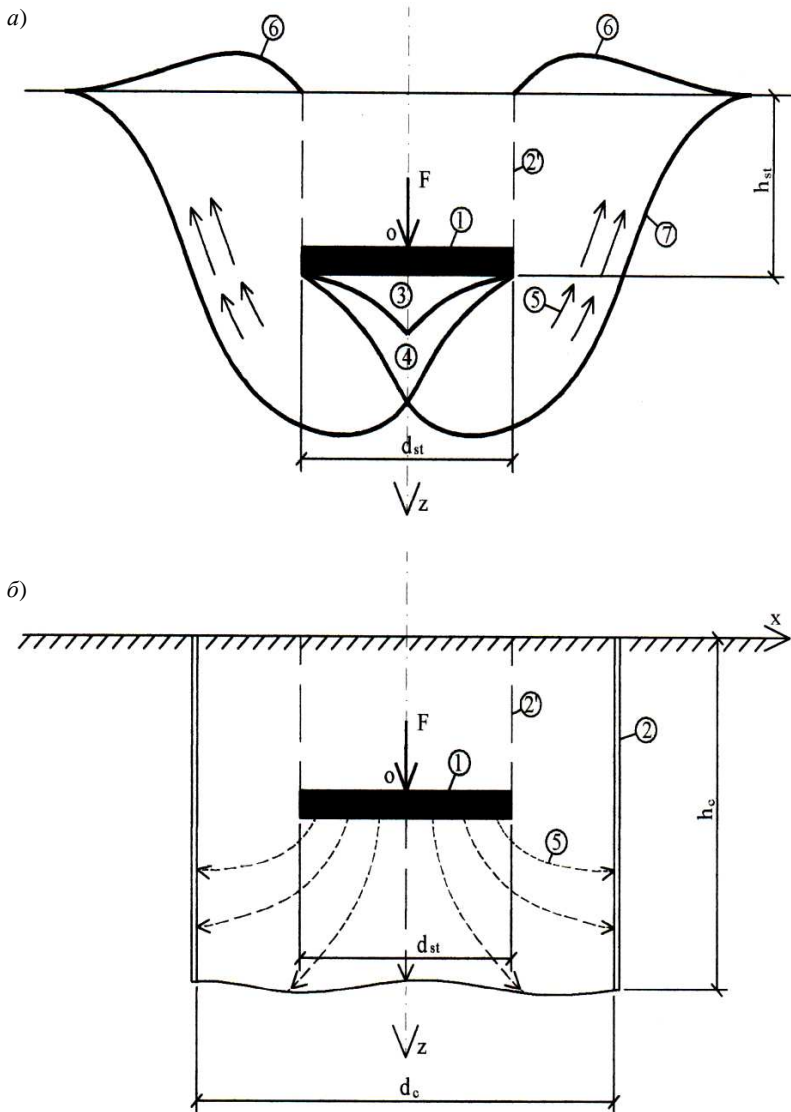
*Боковые деформации грунтов.* Они вызывают снижение несущей способности и рост перемещений (рис. 10.11, б, 10.14). Ограничение боковых деформаций (см. рис. 10.11, б) приводит к повышению несущей способности (рис. 10.13).

**Напряжения в пластинке из оптически активного материала.** Подробнее см. в [36], а также в ранее упомянутой докторской диссертации. Опыты проводили в условиях плоского напряженного состояния.

**Поляризационно-оптический метод.** Позволяет эффективно изучать широкий класс задач механики деформируемых сред – нелинейные задачи теории упругости, пластичности и ползучести.

Подробные сведения об этом методе можно найти в трудах М.М. Фрохта (1950), Н.И. Пригоровского (1961), В.Ф. Трумбачева (1966), Г.Л. Хесина (1971), А.Ю. Александрова и М.Х. Ахметзянова (1973) и др.

Леденев В.В. проводил исследования основания заглубленных фундаментов поляризационно-оптическим методом. Результаты одного из опытов приведены на рис. 10.15.

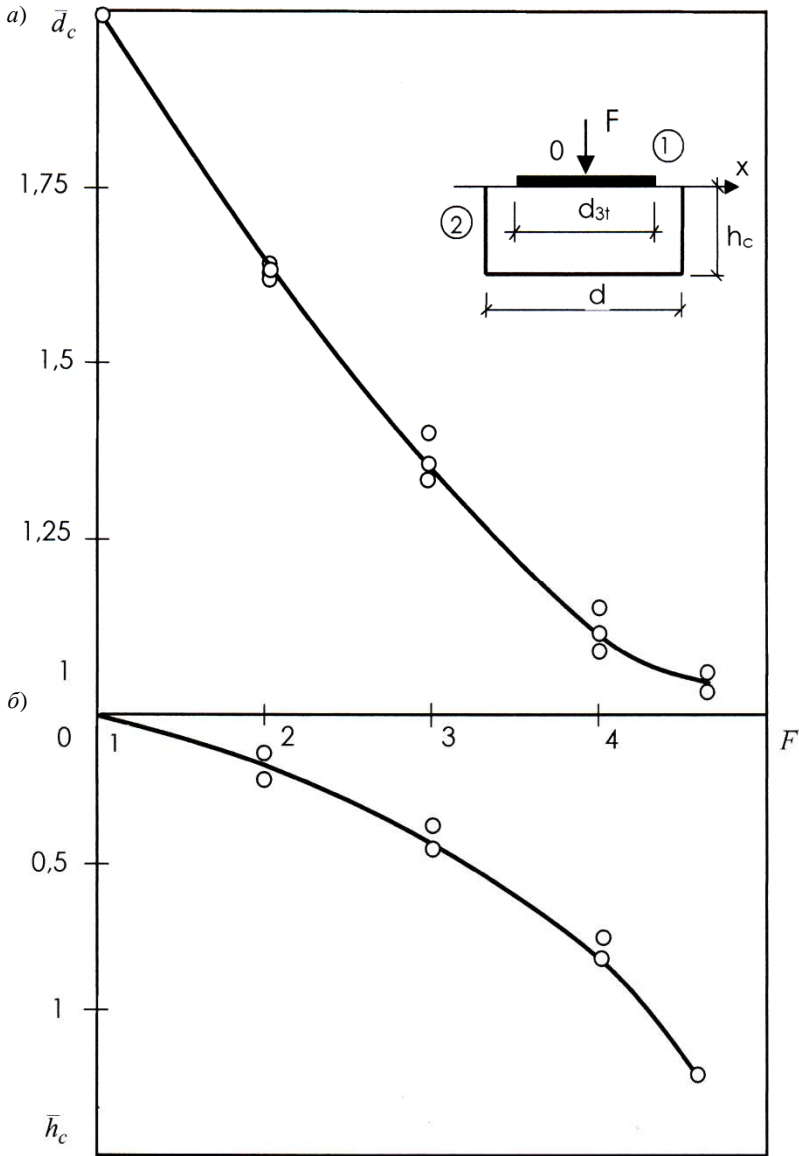


**Рис. 10.11.** Схема деформирования основания без ограждающей стенки (а) и при наличии ее (б):

- 1 – штамп; 2 – ограждающая стенка; 2' – контуры полости над штампом;  
 3 – жесткое ядро; 4 – то же пластическое; 5 – траектория движения частиц;  
 6 – подъем поверхности грунта; 7 – поверхность скольжения







**Рис. 10.13.** График зависимости относительных величин разрушающей нагрузки от размеров ограждающей стенки:  
*a* – от диаметра кольца; *b* – от его высоты

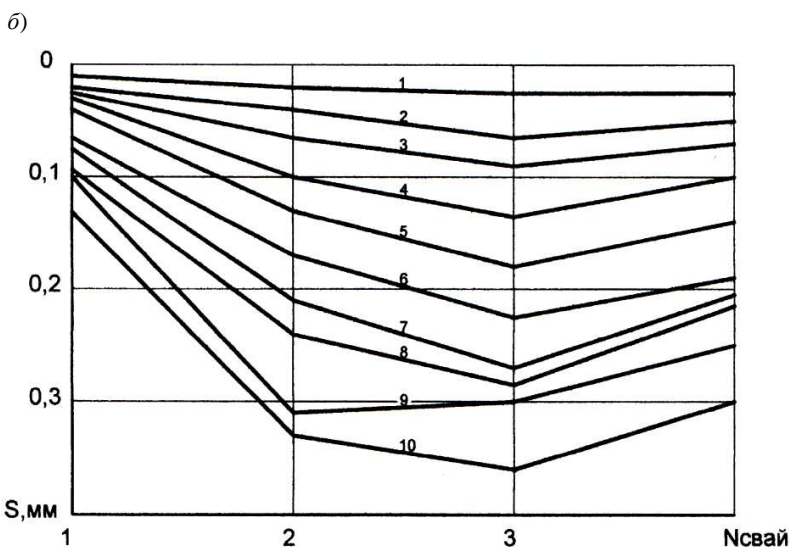
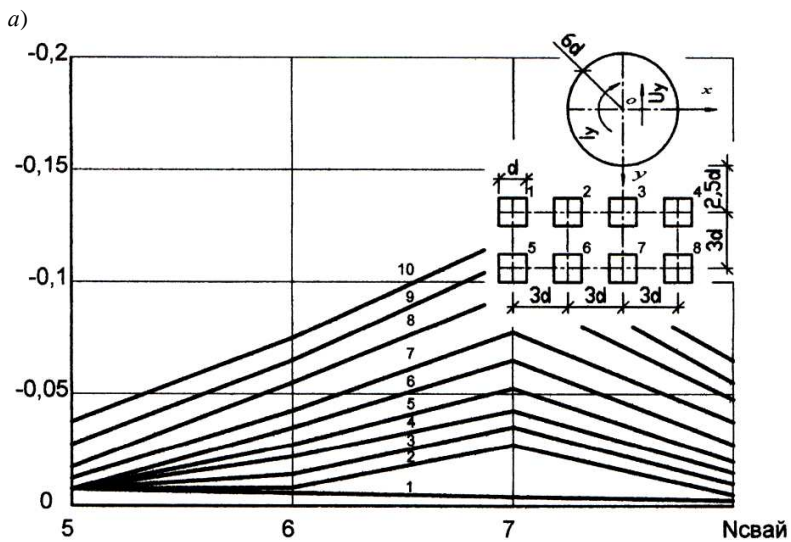


Рис. 10.14. Зависимость вертикальных перемещений свай при нагружении круглого штампа осевой вертикальной силой  $F$  (кН):

1 - 0,1; 2 - 0,2; 3 - 0,3; 4 - 0,4; 5 - 0,5; 6 - 0,6; 7 - 0,7; 8 - 0,8; 9 - 0,9; 10 - 1;

Для  $F = 7$  кН;  $i_y = 4,3 \cdot 10^{-2}$ ;  $U_y = 2,34$  мм; а - подъем; б - опускание

*a)*

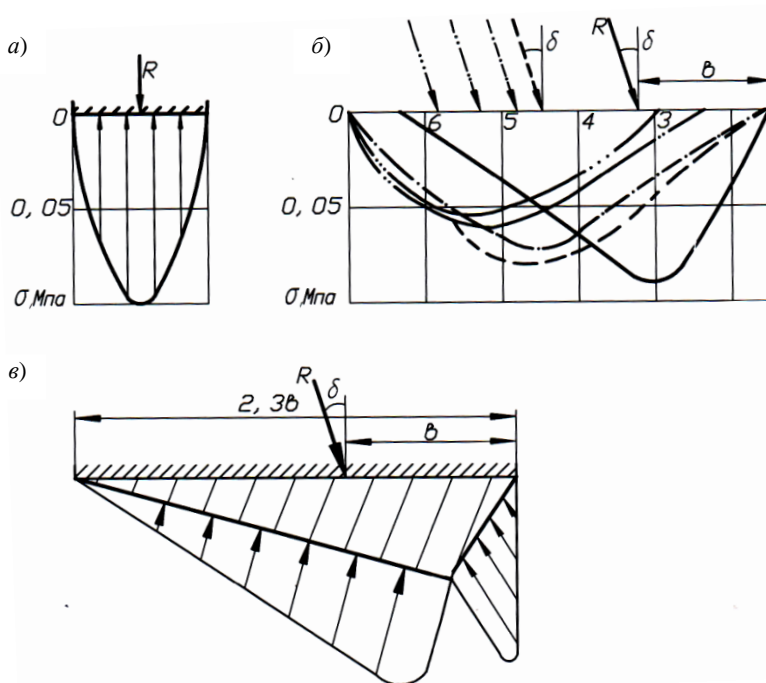


*б)*



**Рис. 10.15.** Картина изохром при вдавливании в оптически активную пластинку:

*a* – прямоугольной модели, *б* – круглого диска

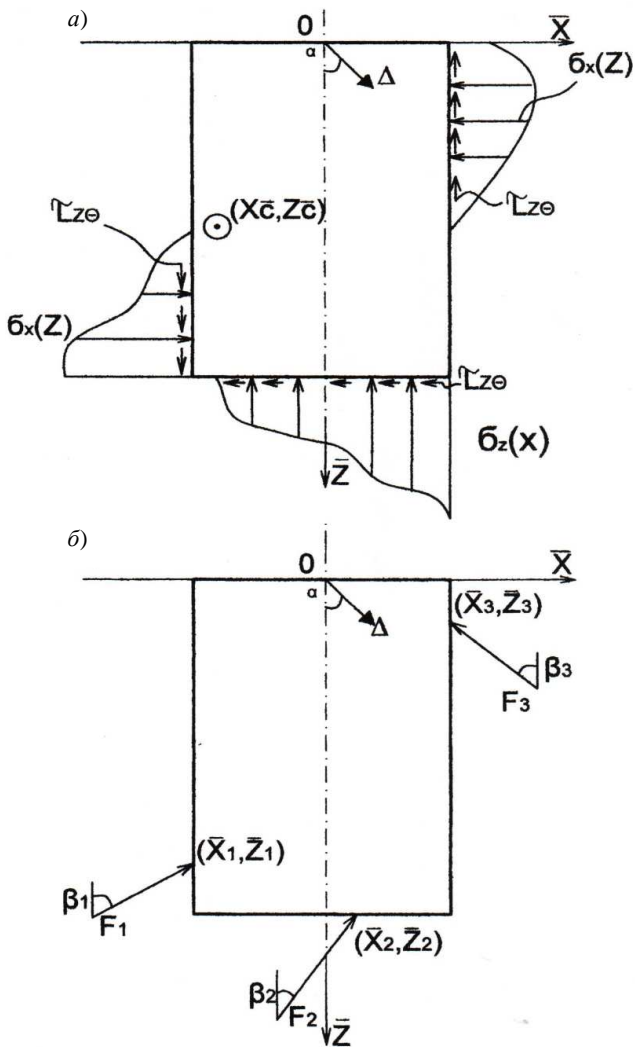


**Рис. 10.16.** Эпюры контактных давлений по подошве плоского штампа (а, б), по жесткому уплотненному ядру (в), на границе каменной постели с грунтом (г)

По результатам экспериментов А.И. Калаева (1990) с плоскими штампами, нагруженными наклонной силой, эпюры контактных давлений имели параболическое очертание (рис. 10.16).

Экспериментов с заглубленными моделями выполнено крайне мало. По результатам наших опытов с тензомоделью фундамента приведена обобщенная схема распределения нормальных и касательных напряжений (рис. 10.17).

Напряжения под подошвой фундаментов имеют седлообразную форму (рис. 10.18, 10.19). При приближении нагрузки к разрушающей происходит трансформация эпюр с переходом в седлообразную (рис. 10.19).



**Рис. 10.17. Пример распределения контактных напряжений и реактивных сил отпора:**

*a* – возможные схемы эпюр контактных напряжений;  
*б* – главные векторы равнодействующих сил отпора грунта

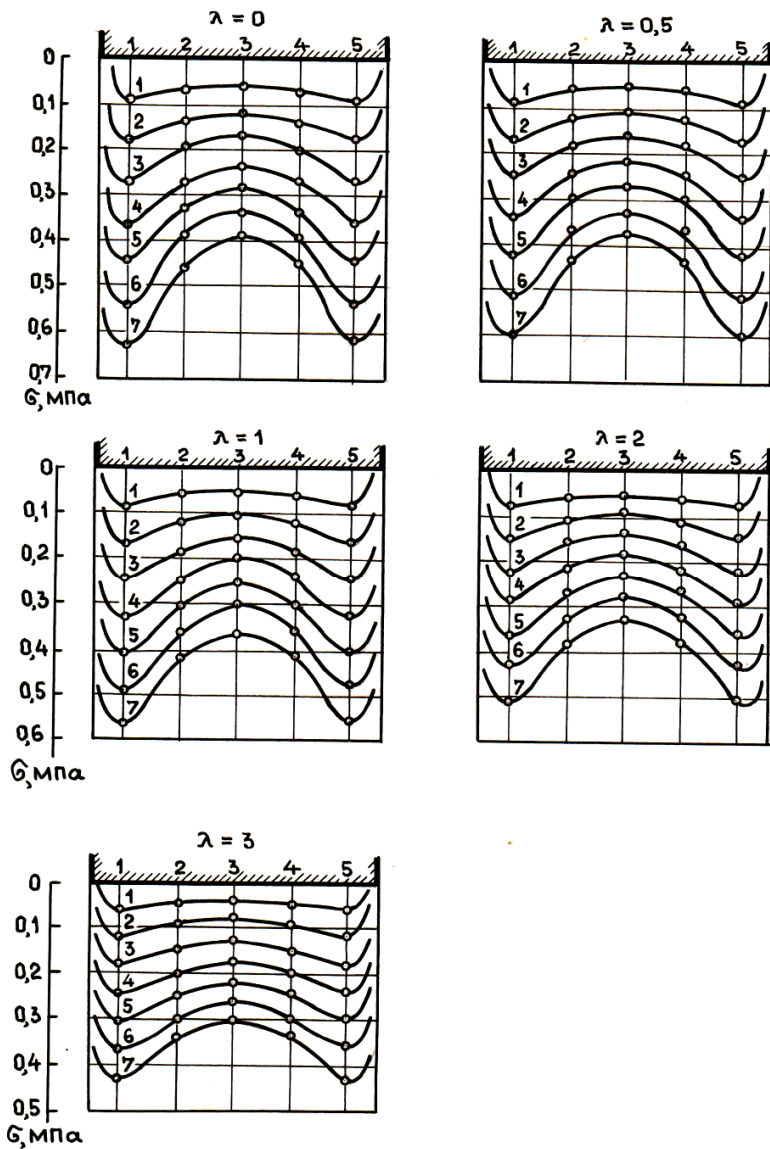
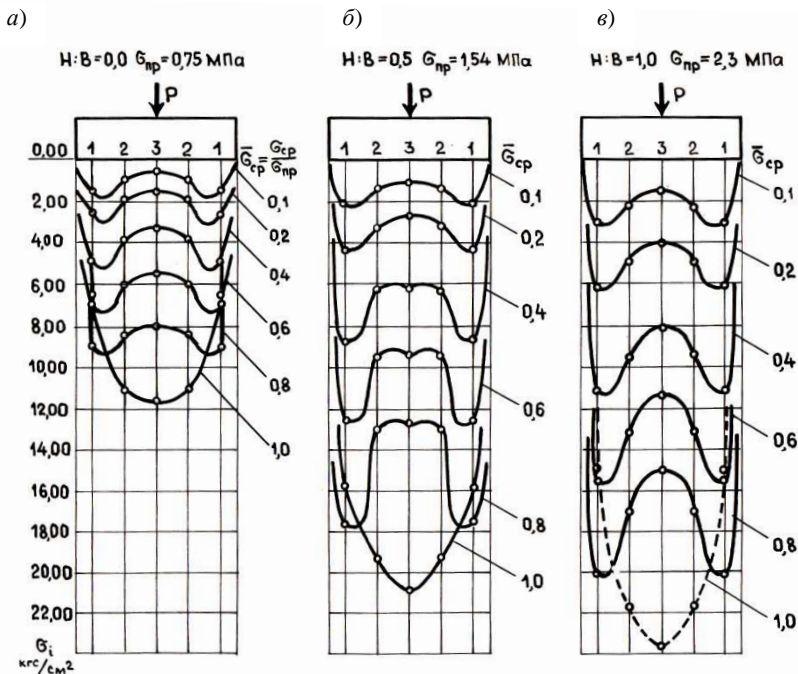


Рис. 10.18. Эпюры контактных давлений на подошву модели при  $\rho = 1,7 \text{ г/см}^3$  и  $F$  (кН):

1 – 10; 2 – 20; 3 – 30; 4 – 40; 5 – 50; 6 – 60; 7 – 70  
(опыты В.В. Леденева)



**Рис. 10.19. Эпюры контактных давлений при:**  
 а -  $\lambda = 0$  и  $\sigma_u = 0,75$  МПа; б -  $\lambda = 0,5$  и  $\sigma_u = 1,54$  МПа; в -  $\lambda = 1$  и  $\sigma_u = 2,3$  МПа  
 (опыты Ю.Н. Мурзенко)

**Распределение напряжений в грунтовой среде от нагруженно-го фундамента.** Напряжение передается через боковую поверхность, подошву, вызывая перемещения соседних конструкций, оказывая давления на поверхности подземных частей фундаментов и стен (рис. 10.20).

### 10.3. ПОЛУЧЕСТЬ ПЕСЧАНОГО ОСНОВАНИЯ

На частицы песка, находящиеся в напряженной зоне, передаются значительные локальные давления, вызывающиеся сколы, вращения, поступательные перемещения. Направления перемещений и их скорости изменяются во времени.

В зависимости от начальной степени уплотнения песка, геометрических размеров, режимов нагружения и другого, возможно локальное доуплотнение, увеличение объема или без его изменения.



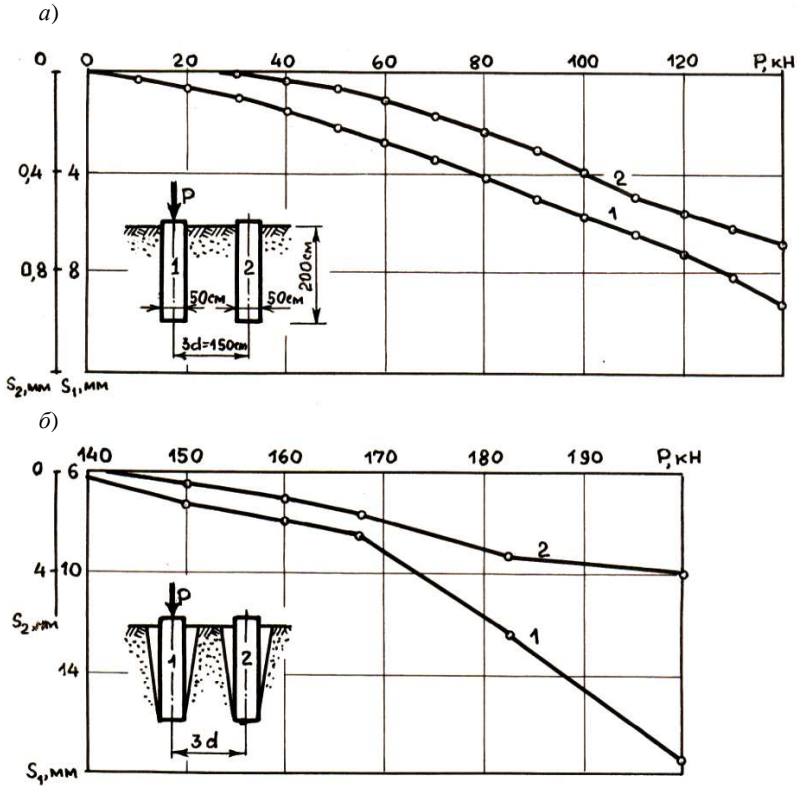


Рис. 10.20. Исследования взаимного влияния буронабивных фундаментов (а) и заглубленных штампов (б):

1 – графики зависимости между нагрузкой и осадкой для первого и второго фундаментов; 2 – то же для штампов

Ползучесть – это длительный процесс, приводящий к увеличению перемещений фундаментов и их неравномерностей.

Экспериментальные данные и ползучести грунтов приведены в [36, 37] и других публикациях Л.Шукле (1976), С.С. Вялова (1978), В.В. Жихович (1985), С.Р. Месчана (1985), З.Г. Тер-Мартirosяна (1990), В.В. Леденева, В.М. Антонова (1990 – 2012), В.В. Леденева, К.Д. Чыонаг (2010). Для примера приведены экспериментальные кривые ползучести по результатам опытов В.В. Леденева и К.Д. Чыонга (2010) (рис. 10.21). Скорости деформаций ползучести зависят, в первую очередь, от уровня нагрузки.

*Пример организации эксперимента по исследованию ползучести песка (В.В. Леденев, В.М. Антонов, Д.К. Чьонг).*

Ниже рассмотрены результаты лабораторных опытов с моделями квадратных фундаментов в виде жестких пластин размером 10×10 см. Основанием моделей являлся мелкозернистый кварцевый песок, послойно уплотненный ручной трамбовкой до  $\rho = 1,53\text{г/см}^2$ , ( $\gamma_s = 2,7\text{ г/см}^3$ ,  $c = 3\text{ кПа}$ ,  $\phi = 28^\circ$ ). Лотки находились в подвале отапливаемого здания при практически постоянной температуре ( $16\text{ }^\circ\text{C}$ ) и влажности (35%). Расстояние от здания до дороги превышало 150 м. Влияние вибрации транспорта не отмечено. Ступенчато-возрастающую вертикальную осевую нагрузку создавали рычагом с соотношением плеч 1:5. Наблюдения за длительными перемещениями проводили с помощью индикаторов ИЧ-10. В предварительных опытах определяли величину разрушающей нагрузки  $F_u$ . Опыты отличались уровнем нагрузки  $\bar{F} = F/F_u$ . Результаты экспериментов приведены в табл. 10.2 и на рис. 10.21.

## 10.2. Результаты замера осадок штампа в первые 15 суток

$t$	Осадки штампа в мм в период наблюдения при $F$							
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
сут.	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
15 мин	0,29	0,69	1,27	2,10	3,53	4,33	5,17	7,03
30 мин	0,38	0,88	1,63	2,68	4,54	5,52	7,95	8,96
1 ч.	0,41	0,99	1,76	3,00	4,90	6,18	8,58	10,04
3 ч.	0,44	1,09	1,86	3,30	5,24	6,82	9,17	11,07
6 ч.	0,45	1,16	1,94	3,51	5,40	7,25	9,43	11,76
1 сут.	0,46	1,23	2,00	3,71	5,55	7,66	9,72	12,42
3	0,47	1,26	2,03	3,81	5,70	7,88	9,98	12,78
6	0,49	1,29	2,10	3,92	5,84	8,09	10,22	13,12
9	0,50	1,32	2,15	3,98	5,97	8,22	10,46	13,34
12	0,51	1,34	2,20	4,04	6,08	8,35	10,68	13,55
15	0,52	1,36	2,24	4,11	6,22	8,48	10,89	13,76

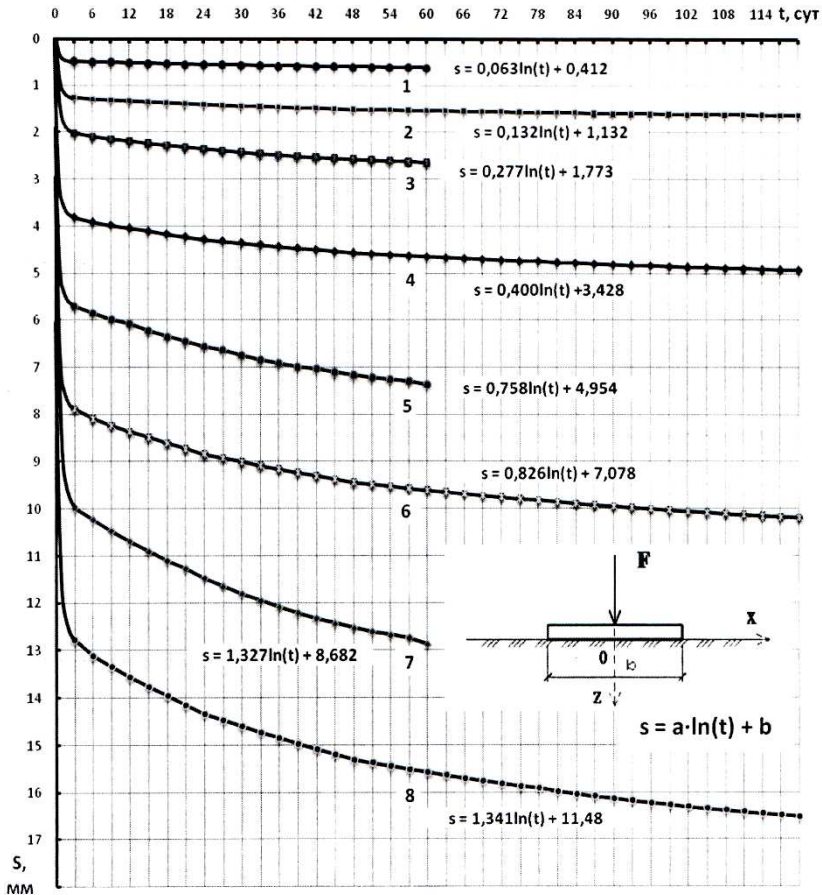


Рис. 10.21. График изменения осадки во времени при  $\bar{F}$  :  
 1 – 0,2; 2 – 0,3; 3 – 0,4; 4 – 0,5; 5 – 0,6; 6 – 0,7; 8 – 0,85

Значительный вклад в развитие теории ползучести железобетона внесли: Н.Х. Арутюнян, И.Е. Проконович, В.М. Бондаренко, Ю.Н. Работнов и др.

Осадки  $s$  и их скорости  $\dot{s}$  возрастают во времени по логарифмической зависимости в пределах напряженной зоны  $\bar{F}$ ,  $s, \dot{s} = f(x, y, z)$ . Кроме того, происходит перестройка структуры в направлении поверхностей скольжения.

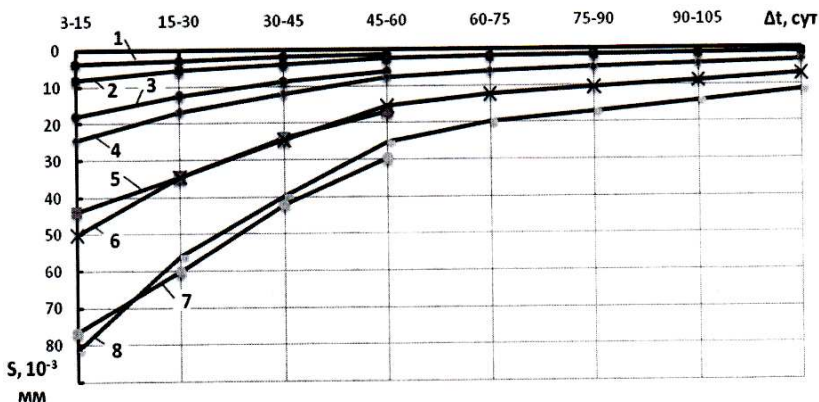


Рис. 10.22. График изменения скорости осадки во времени при  $\bar{F}$  :  
 1 – 0,2; 2 – 0,3; 3 – 0,4; 4 – 0,5; 5 – 0,6; 6 – 0,7; 8 – 0,85

Полученные данные помогут разработать способы прогнозирования деформаций оснований и оценки теории.

Необходимо продолжить исследований функций

$$s(t) = s(F, \bar{F}, \delta, e, d_f, h_f, p, c, \varphi, E, \dots),$$

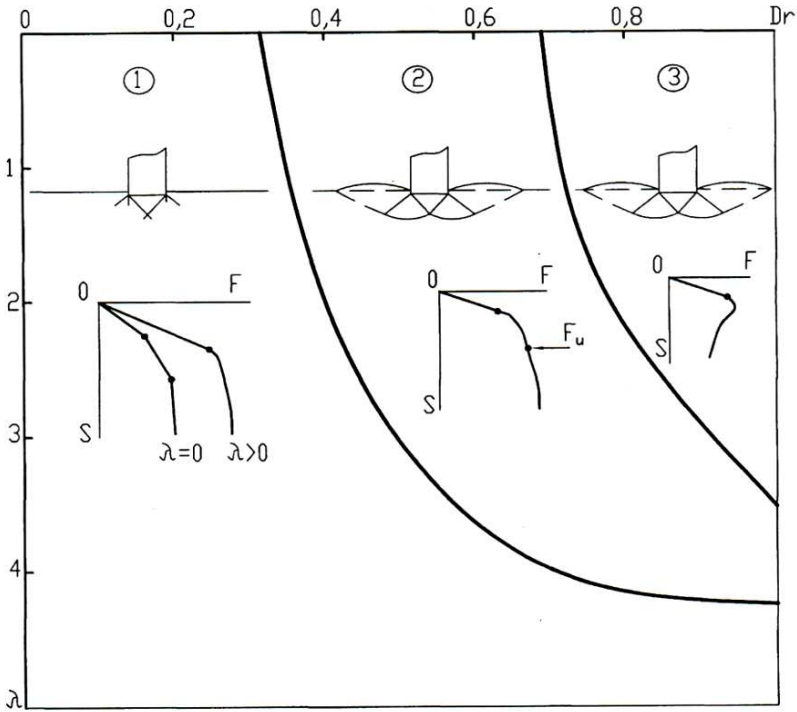
где  $e, \delta$  – эксцентриситет и угол наклона нагрузки к вертикали;  $h_f$  – глубина заложения фундамента.

Релаксационные процессы материалов подробно рассмотрены в [33].

#### 10.4. ХАРАКТЕР И ПРИЧИНЫ ПОВРЕЖДЕНИЙ И РАЗРУШЕНИЙ ОСНОВАНИЙ, СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Предвестниками наступления предельного состояния являются: увеличение скоростей деформирования, появление и развитие трения, образование и развитие пластических шарниров, искажение формы, отслаивание защитного слоя бетона, потеря устойчивости сжатых элементов или областей, разупрочнение материала, выход из строя отдельных элементов системы, ускоренный рост областей пластических деформаций, образование и развитие поверхностей скольжения и др.

Характер разрушения песчаного основания зависит от его плотности (рис. 10.23). Предельное состояние сопровождается выпором грунта на поверхность и появлением трещин, возникновением и развитием поверхностей скольжения. Многочисленные примеры приведены в [36, 37]. Для примера, на рис. 10.24 показаны следы поверхно-



**Рис. 10.23. Зависимость вида разрушения основания от относительных величин плотности грунта и заглубления фундамента:**

1 – уплотнение; 2 – местный сдвиг; 3 – общий сдвиг

стей скольжения, полученные с лабораторных опытов с цилиндрическими моделями.

Данные зарубежных ученых по экспериментальным и теоретическим формам поверхностей скольжения приведены на рис. 10.29. Показаны форма уплотненного ядра и силы, действующие на него.

В течение многих лет авторы проводили обследование технического состояния несущих строительных конструкций, зданий и сооружений разного назначения, имеющих дефекты и повреждения, разрабатывали проекты усиления.

Ниже приведено систематизированное описание видов повреждений и причин, их вызвавших.

Характер деформирования и разрушения грунтовых оснований определяется множеством влияющих параметров. Для примера, на

рис. 10.24 – 10.28 приведены обобщенные схемы, полученные В.В. Ледневым в полевых и лабораторных опытах.

Теоретические картинные разрушения (рис. 10.29, 10.30) существенно отличаются от экспериментальных.

В исследованиях В.В. Леденева большое внимание уделено экспериментальному определению коэффициента несущей способности.

Лебегом У. (1972) получены коэффициенты несущей способности по результатам опытов с металлическим штампом шириной  $b$  и  $90$  см (рис. 10.31).

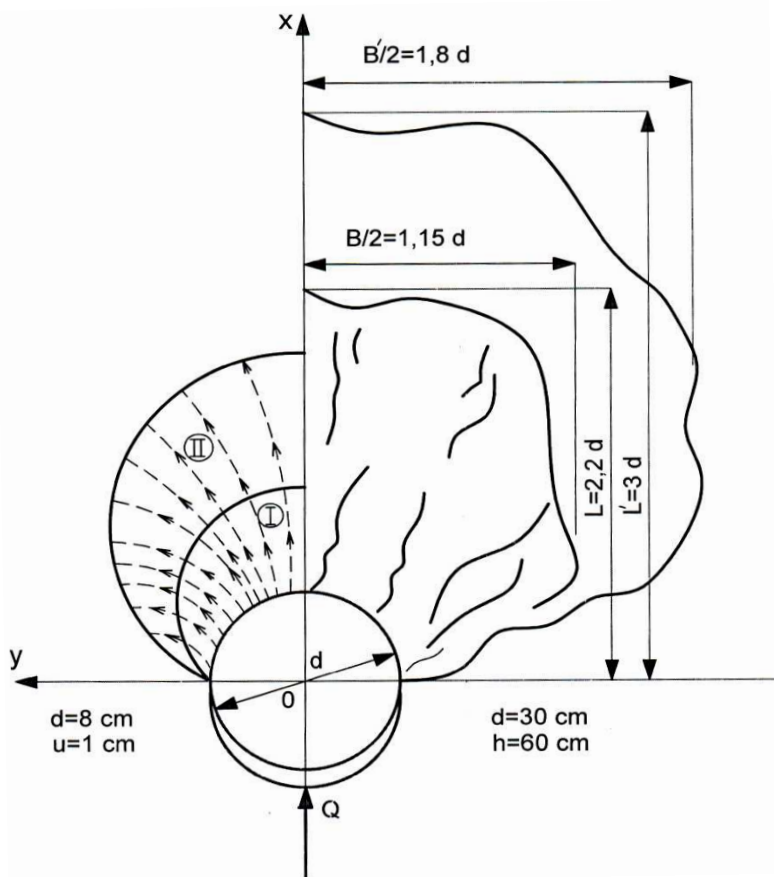


Рис. 10.24. Траектории движения частиц песка (слева) и размеры областей выпора грунта (справа) в опытах с горизонтально нагруженной буронабивной моделью

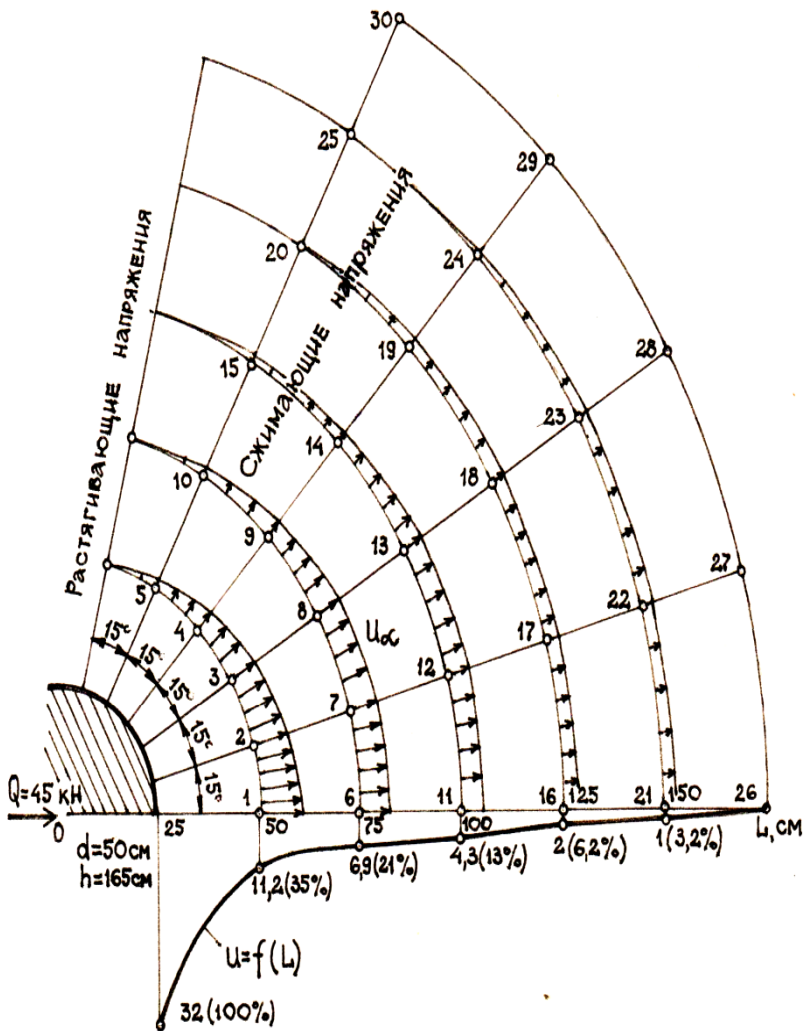


Рис. 10.25. Эпюры радиальных горизонтальных перемещений поверхности песчаного основания:

1 – 30 – места измерения перемещений индикаторами;

$L$  – расстояние от вертикальной оси фундамента до места установки индикатора;

4 – горизонтальные перемещения вдоль оси  $x$ ;

$u_\alpha$  – то же по направлениям, отклоненным от оси  $x$  на угол  $\alpha$ .

По границам эпюр сжимающих напряжений образовывались трещины сдвига (опыты В.В. Леденева)

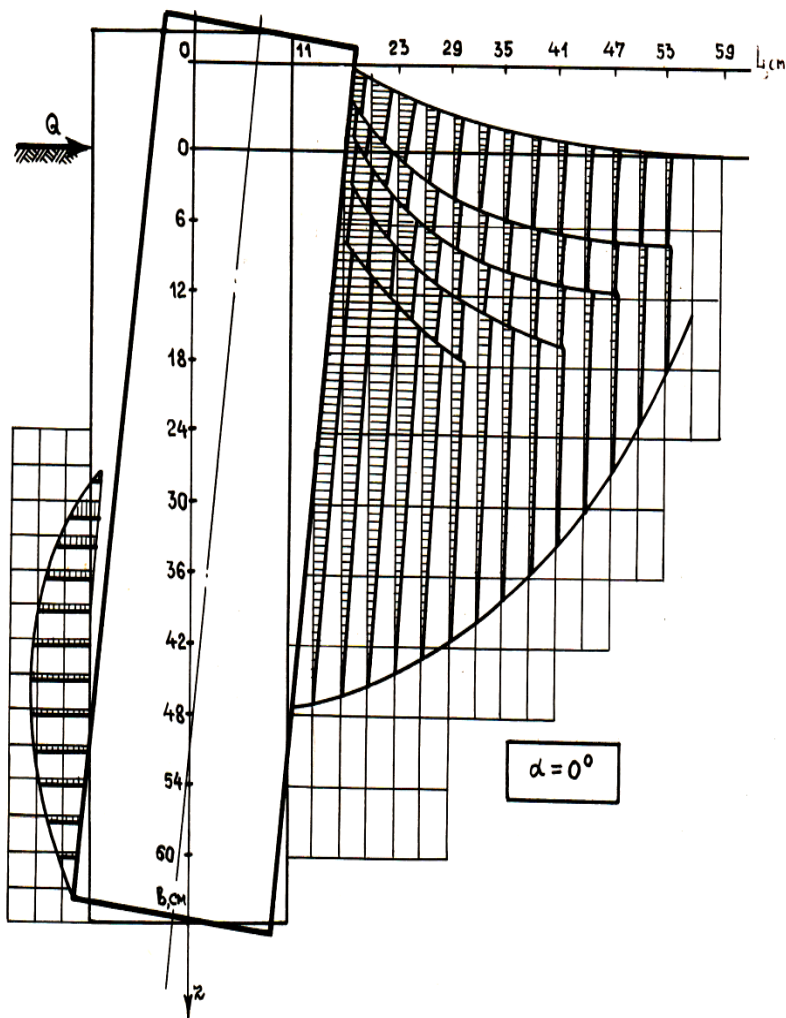


Рис. 10.26. Схемы следов поверхностей скольжения в плоскости  $xOz$

**Величины разрушающих нагрузок для заглубленных фундаментов.** Для определения несущей способности оснований фундаментов принимают различные расчетные схемы, например, приведенные на рис. 10.30, для незаглубленных ( $a - \delta$ ) и заглубленных ( $e$ ) фундаментов при различных схемах приложения сосредоточенной силы.



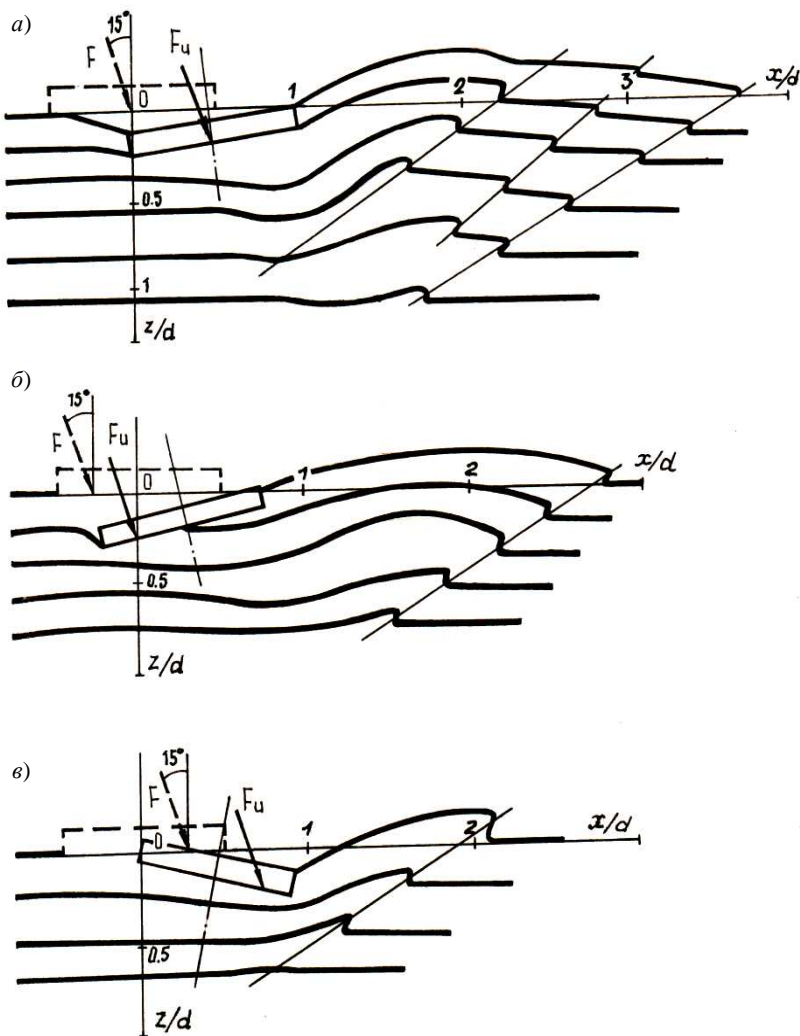


Рис. 10.27. Схема деформирования основания при нулевом (а), отрицательном (б) и положительном (в) эксцентриситетах приложения наклонной нагрузки

Подробнее см. в докторской диссертации В.В. Леденева, 1998.

Коэффициенты несущей способности воздушно-сухого песчаного основания плотностью  $1,44 \dots 1,7 \text{ г/см}^3$  определял У. Лебег (1972) (рис. 10.31).

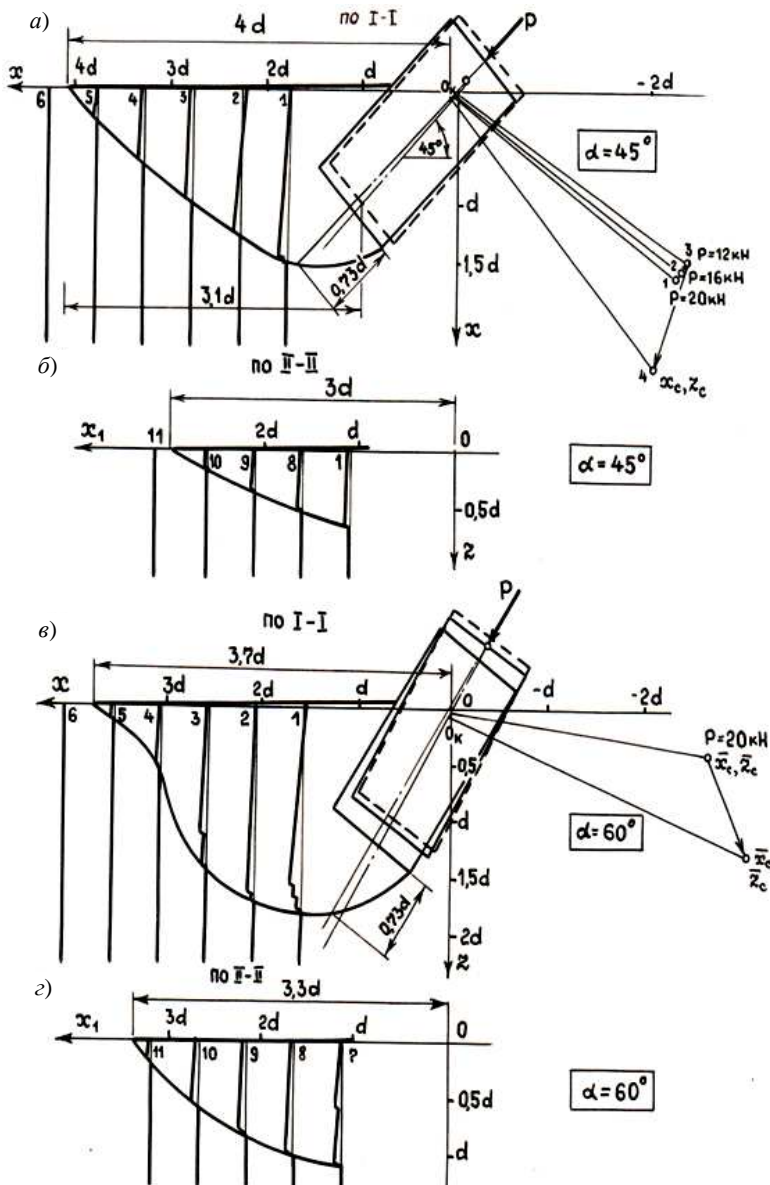


Рис. 10.28. Положение следов поверхности скольжения при углах наклона моделей:  
*a, б* –  $45^\circ$ ; *в, г* –  $60^\circ$

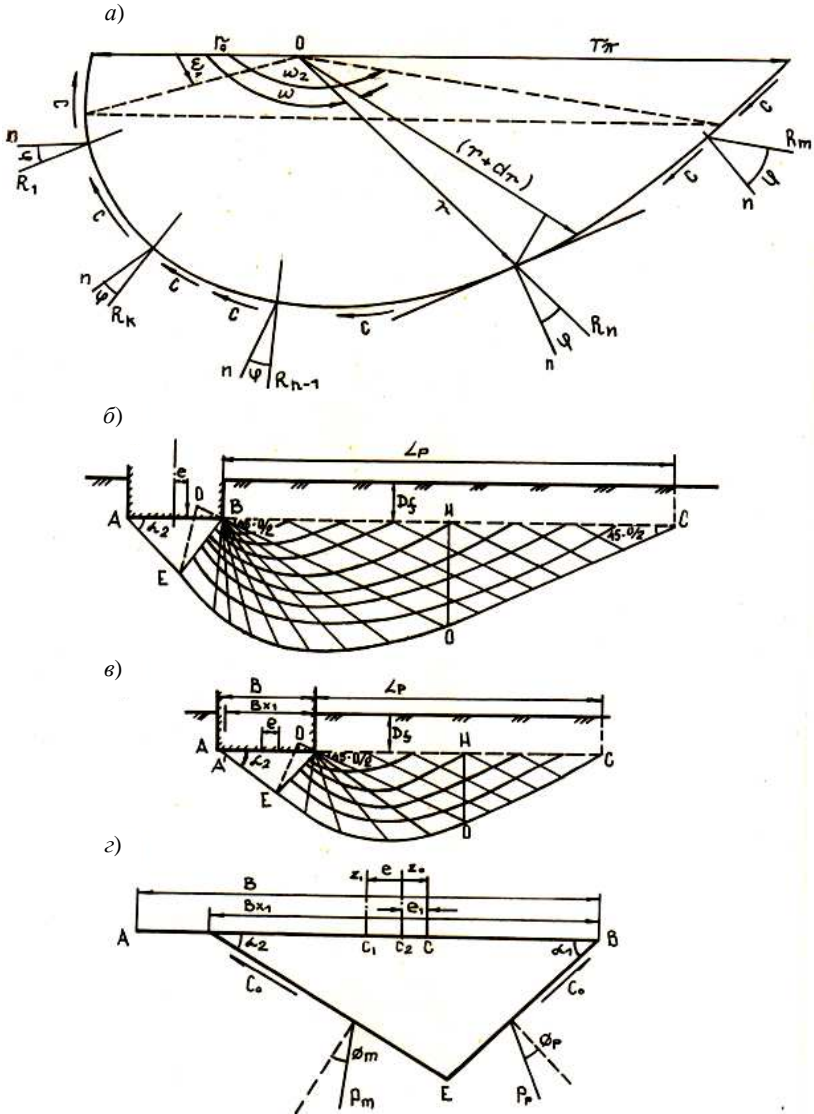


Рис. 10.29. Наблюдаемая поверхность разрушения при совместном действии на фундамент вертикальной и горизонтальной нагрузок (а) (опыты Джамикиса); теоретические поверхности разрушения при полном и частичном (б, в) контакте фундамента с основанием; силы, действующие на упругое ядро (г) (С. Пракаш и С. Саран, 1971)

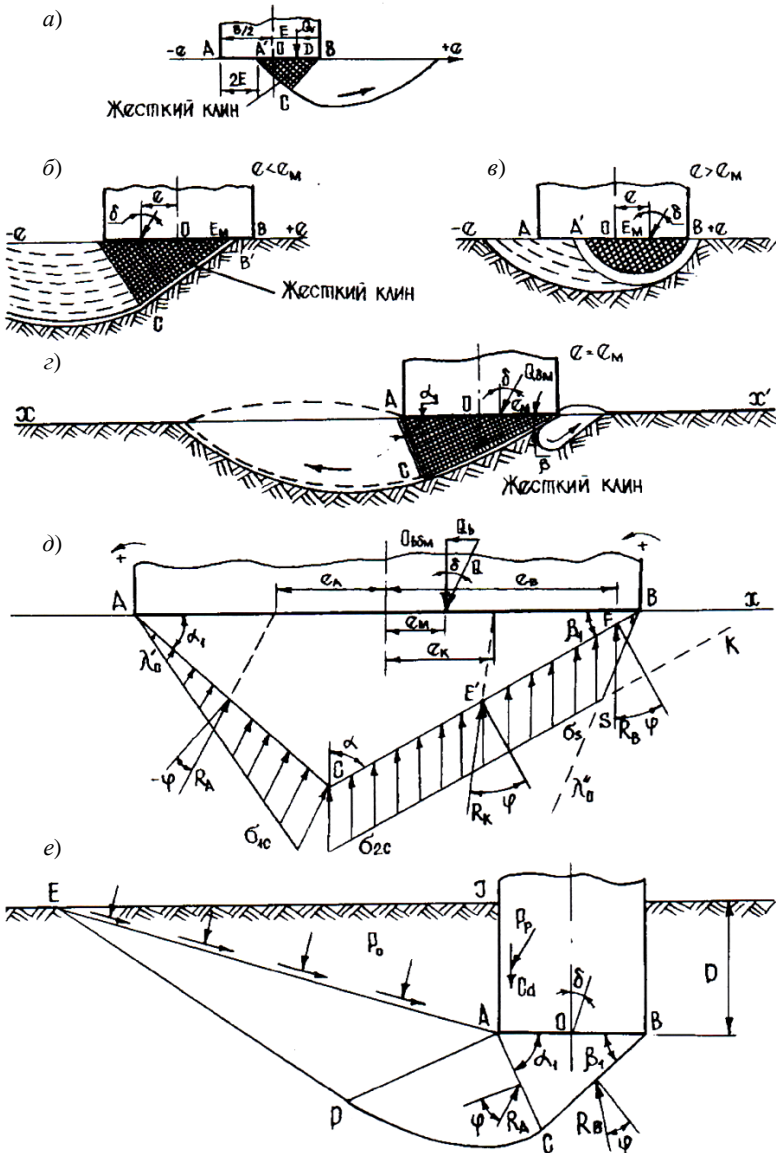
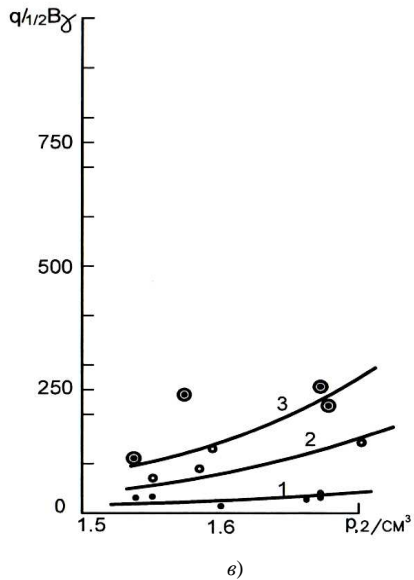
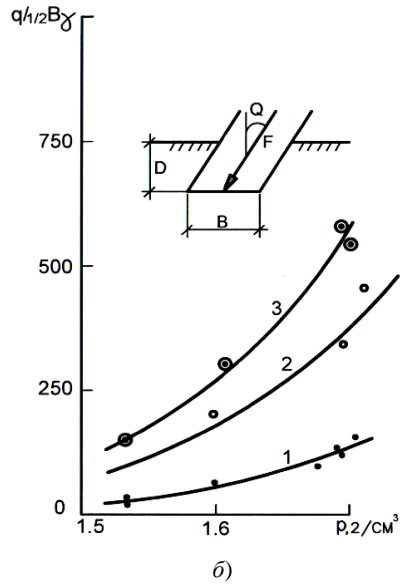
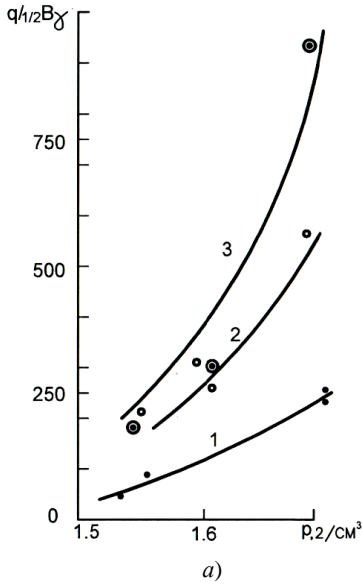
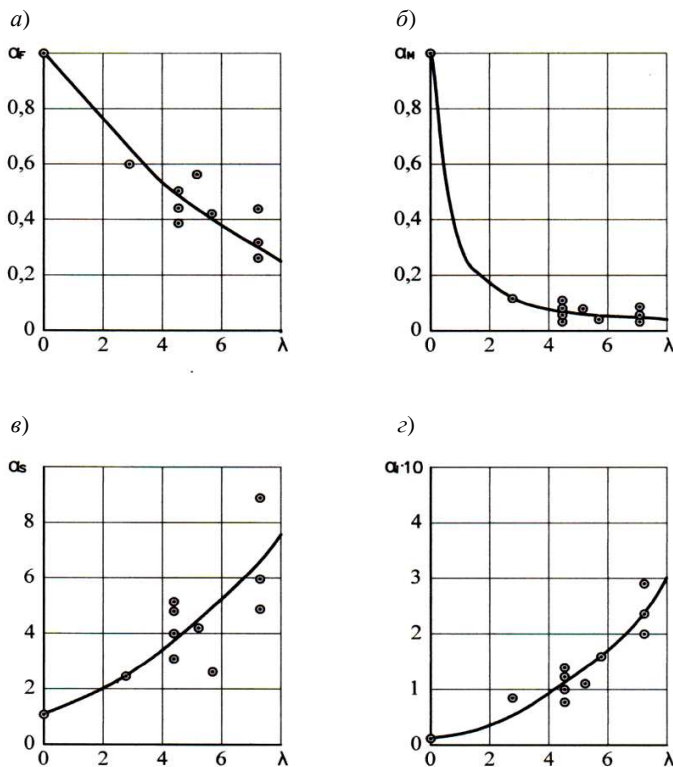


Рис. 10.30. Схемы к расчету фундамента с внецентренной вертикальной (а) и наклонной (б, в, г) нагрузками и к расчету коэффициента  $N_{B_0}(g)$  (L. Baran, E. Dembicki, W. Odrobinski, T. Sranarince, 1971) и по G.G. Meyerhot, 1984 (e)



**Рис. 10.31. График зависимости несущей способности основания от плотности грунта при угле наклона силы  $\theta$  (град):**  
*a* – 10; *б* – 20; *в* – 30 и  
 $\lambda$ : 1 – 0; 2 – 1; 3 – 2  
 Опыты У. Лебега, 1972 (У. Lebeque)

В качестве модели фундамента использован плоский металлический штамп шириной 6 и 20 м (рис. 10.31).



**Рис. 10.32. Зависимость между относительными заглублениями буронабивного фундамента и относительными величинами:**  
 вертикальных сил ( $\alpha_F = F_n/F_f$  при  $s = \text{const}$ ) (а), моментов ( $\alpha_M = M_n/M_f$  при  $i = \text{const}$ ) (б), осадок ( $\alpha_s = S_n/S_f$  при  $F = \text{const}$ ) (в), кренов ( $\alpha_i = i_n/i_f$  при  $e = \text{const}$ ) (г)

Этой же проблеме посвящены исследования Де Бейера (1970), Бринч-Хансена (1961); Е.А. Сорочана, А.С. Снарского и В.Н. Домбровского (1978).

Ландгрэн Х. и Мортенсен К. (1973) применили теорию пластичности для определения коэффициентов несущей способности фундаментов на песке. При этом использовали идеи Л. Прандтля (1920); В. Прагера и М.Ж. Ходжа (1951). Построили линии влияния для фундаментов с гладкой и шероховатой подошвой. Получена формула, аналогичная формуле К. Терцаги (1925). Коэффициенты несущей способности сравнивали с полученными Г. Мейергофом (1951).

Величины разрушающих нагрузок можно представить функциональной зависимостью (В.В. Леденев, 1971):

$$F_u = F_u(h_f, d_f, \delta, e, \rho, c, \varphi, \dots).$$

Часть нагрузки воспринимает подошва, а часть – боковая поверхность. Соотношения между ними зависят от многих параметров. На рис. 10.32 приведены результаты полевых опытов с буронабивным фундаментом.

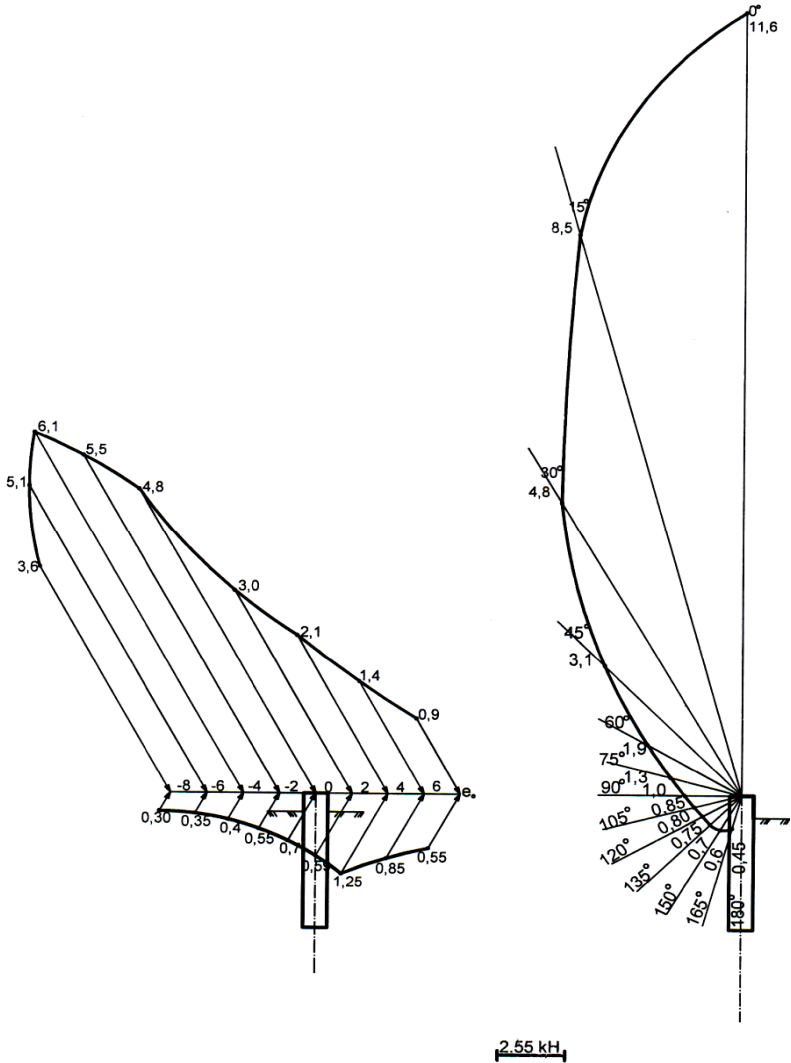


Рис. 10.33. Зависимость относительных величин разрушающих нагрузок от эксцентриситетов при  $\lambda = 3$  и  $\delta = 30^\circ$ ,  $e_0 = -8 \dots 8$  (a) и  $e_0 = 0$ ,  $\delta = 0 \dots 180^\circ$

При прочих постоянных условиях значительное влияние оказывают параметры нагружения (рис. 10.33).

Следует отметить, что в реальных условиях принцип суперпозиции не соблюдается. Это отмечено нами в работах зарубежных исследователей, например, (рис. 10.34, а).

Комбинированная модель П.Л. Пастернака успешно применяется в проектной практике (рис. 10.34, в), в том числе, в зарубежной (рис. 10.34, б, в).

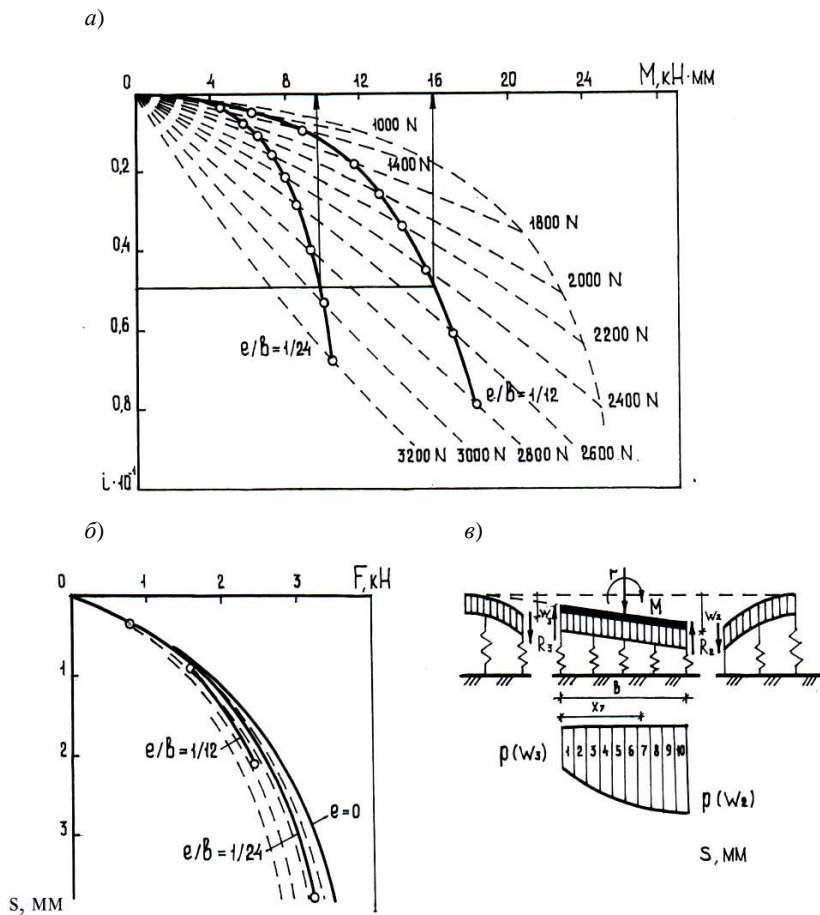


Рис. 10.34. Зависимость крена от момента (а), осадки от нагрузки, расчетная схема основания (в) (Butterfield R, Georgiadis, M, 1982)



**Экспериментальные исследования, проведенные в ФГБОУ ВПО «ТГТУ».** Исследование напряженно-деформированного состояния стальных рам. Эксперименты проводили в лаборатории ФГБОУ ВПО «ТГТУ» коллективом сотрудников (В.В. Леденев, О.В. Евдокимцев, И.Н. Кузнецов, С.А. Варечкин и др.) в период с 2002 по 2013 гг.

В качестве моделей рам использовали одноэтажные однопролетные конструкции на песчаном основании. Высота рамы 1960 мм, пролетов 1270 мм.

Исследовали влияние режима нагружения и начальных дефектов в конструкции рамы и в основании.

***Совершенствование конструкций рамных фундаментов.*** Рамные фундаменты. Исследования проводили В.В. Леденев, В.М. Струлев, Азама Нилас и др.

Такие фундаменты наиболее эффективны в распорных системах. Они состоят из опорной плиты и двух подкосов (или стойки и подкоса), обладают высокой удельной несущей способностью.

Определяли оптимальные конструкции для разных схем нагружения.

***Фундаменты с периферийными выступами.*** Эксперименты проводили (В.В. Леденев, В.М. Струлев, А.Б. Черкашин и др.) с круглыми и кольцевыми фундаментами. Штампы изготавливали с одинаковой площадью контакта, но с различным отношением внутренних и наружных диаметров.

Определяли оптимальные геометрические характеристики, при которых осадка была минимальной.

Напомним, что идея уменьшения осадок фундаментов путем применения малой ширины принадлежит Д.Е. Польшину, а шпальных фундаментов – В.Н. Голубкову.

Кольцевые фундаменты с несимметричным вырезом (В.В. Леденев, А.В. Худяков). При действии произвольной системы плоских сил внутренний вырез можно использовать как регулятор характера перемещений и контактных напряжений. Экспериментально исследовали влияние диаметра и расположения круглого выреза и скашенного на перемещения фундамента и несущую способность основания.

***Исследования прочности и трещиностойкости стен.*** Эксперименты проводили В.В. Леденев и Я.В. Савинов и др. с 2008 г. по настоящее время.

Наиболее значительные исследования в этом направлении Т.И. Барановой и Н.Н. Ласькова.

В наших экспериментах определяли влияние схем и режима нагружения (одноосное и двухосное сжатие), параметров армирования, дефектов опирания, параметров трещин, пролетов и штраб.

На рисунке 10.35 приведен пример анализа напряженного состояния в модели стены с штрабой.

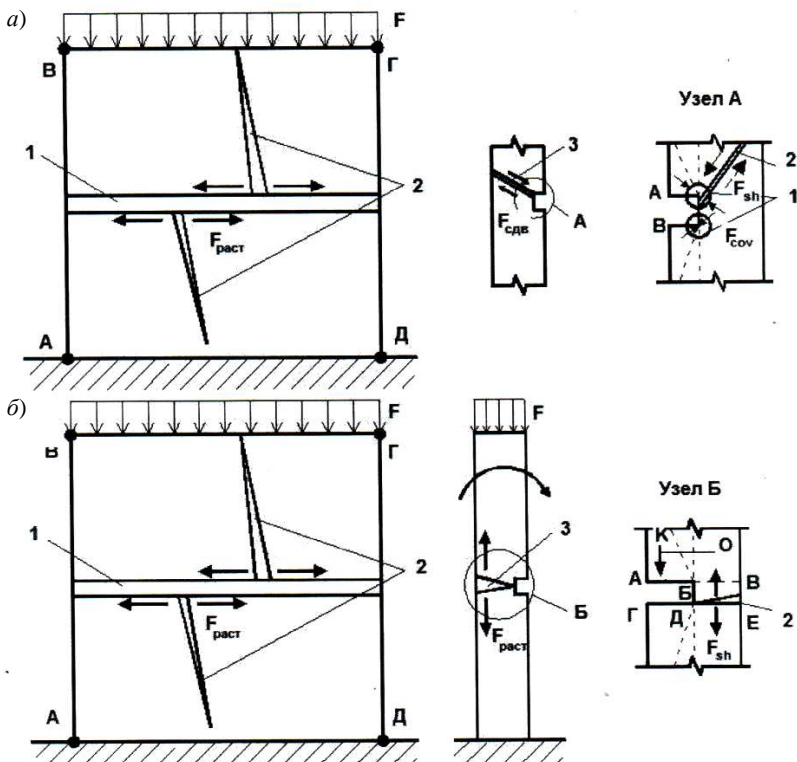


Рис. 10.35. Механизм разрушения при:  
 $a - h_2 = 0,33; \quad б - h_2 = 0,5$

**Испытания образцов без бокового обжатия с горизонтальной штробой при изменении ее глубины**

**Случай 1, при  $\bar{h}_2 = 0,25$ .** Наблюдаемые процессы: при нагружении разрушение началось с появления вертикальных трещин 2 (рис. 10.35, а), идущих от штробы 1. Потом их рост прекращался. Из внутреннего угла начинали расти многочисленные трещины 3, вдоль которых происходил сдвиг 2.

**Случай 2, при  $\bar{h}_2 = 0,5$ .** Наблюдаемые процессы: в начале нагружения появлялись вертикальные трещины 2, идущие от штробы 1 (рис. 10.35, б). С увеличением внешней нагрузки их рост приостанавливался. Затем, с тыльной стороны штробы раскрывалась трещина 3. Верхняя часть образца отклонялась в сторону штробы. Модель стены разрушалась.

**Усиление основания. Армирование грунта.** В экспериментах участвовали В.В. Леденев, В.В. Антонов, В.М. Струлев, Диавара Сонда.

Опыты проводили в полевых и лабораторных условиях. Исследовали механизм контактного взаимодействия армирующих элементов с песчаным основанием, влияние вида, параметров и пространственного расположения при разных схемах нагружения.

Выявлены оптимальные схемы армирования.

**Устройство ограждающих стенок.** Одними из первых это исследование проводили Ю.Н. Мурзенко, А.З. Даков, Э.В. Аринина (1976).

Стеки ограничивают боковые деформации и значительно повышают несущую способность фундамента.

Исследования проводили В.В. Леденев, В.М. Антонов, Я.В. Савинов, В.М. Струлев.

Устанавливали влияние конструкций, параметров и расположения стенок, схем нагружения. Даны рекомендации по оптимальным решениям.

При проведении экспериментов большую помощь оказывали аспиранты, магистранты и студенты архитектурно-строительного факультета.

## 10.5. ПРИЧИНЫ ПОВРЕЖДЕНИЙ И РАЗРУШЕНИЙ КОНСТРУКЦИЙ, ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Ежегодно в стране систематизируются аварии зданий и сооружений разного назначения. Вызываются они ошибками, допущенными при изысканиях, проектировании, строительстве и эксплуатации. Анализ причин аварий за много лет показал, что часто отмечаются одни и те же ошибки.

Рассмотрим представленные материалы по авариям в Тамбовской, Курской, Воронежской и Липецкой областях. Характерным для них является наличие просадочных грунтов I типа мощностью от 1 до 10 м, расположенных под растительным слоем. Во всех областях имеются пойменные территории. Гидронамыв их активно внедряется (Воронеж, Курск). Встречаются техногенные отложения мощностью до 20 м. Практикуется строительство на засыпанных оврагах. Во всех перечисленных областях имеются агрессивные среды (биологическая, химическая, электрохимическая). В отдельных районах основанием фундаментов являются мергели (Курск, 14 микрорайон) или участки с карстовыми воронками (Россошь, Воронежская область).

**Изменение свойств грунтов основания в отрытых котлованах или траншеях:** расструктурирование мергелей (Курск, 14 микрорайон);

снижение механических характеристик при поступлении талой или дождевой воды (ледовый дворец, Воронеж; жилой дом по ул. Октябрьской в Тамбове); разрыхление при замораживании–оттаивании; изменение влажности; повреждение машинами; проявление пространственной неоднородности из-за разной ориентации котлована.

В ряде случаев встречается несоответствие данных геологических изысканий фактической ситуации (нефтеперекачивающая станция, Курская область).

**Строительство на засыпанных оврагах и крутопадающих склонах** (объекты концерна «Энергия», Воронеж; трикотажная фабрика, Курск; гараж, Тамбов). Наблюдения за производством земляных работ показали, что уплотнение осуществляется неэффективно, слабо контролируемо. В дальнейшем происходит самоуплотнение с прогибом по цилиндрической поверхности, сдвиг фундаментов по наклонным подстилающим слоям. В случае свайного фундамента развивается негативное трение. По одной продольной оси гаража (Тамбов) произошла неравномерная подвижка фундаментов в направлении склона. В результате, металлический каркас здания получил недопустимые деформации. Требуется квалифицированно выполненный проект производства работ и надежный контроль качества.

**Низкое качество обратной засыпки.** В качестве обратной засыпки иногда используют изъятый из котлована грунт, содержащий производственные отходы (шиноремонтный завод, Курск). При замачивании такого основания возникают значительные неравномерные просадки. Эксплуатация здания становится невозможной. В ряде случаев (Курск) возникает необходимость разборки здания. Укладка мелкозернистого или пылеватого песка насыщенного водой (пивоваренный завод, Курск) часто приводит к проявлению тиксотропных свойств. В приведенном примере песок привозили из карьера со снегом и замерзшими глыбами.

В весеннее время в котлован поступала вода с окружающей территории и с незаконченной кровли. Были сделаны многочисленные попытки уплотнить песок катками для установки фундаментов под оборудованием. Однако техника тонула в песке. Только после удаления воды насосами из водонасыщенного грунта осуществили качественную подготовку основания.

Недостаточное уплотнение грунта обратной засыпки (школа, Тамбов) приводит к значительным деформациям. В примере, туалетные комнаты полностью вышли из строя при водонасыщении малоуплотненного песка.

Работы по устройству обратной засыпки плохо контролируемые, малооплачиваемые, однако последствия ошибок весьма тяжелы.

**Проникание дождевых и снеговых вод в основание фундаментов эксплуатируемых зданий** (детский сад, Тамбов). Каждую весну отмечают поступление воды в основание зданий, затапливание подземных помещений. В указанном примере фундамент выполнен из бутового камня с большими пустотами между элементами.

**Развитие деформаций при ползучести песка.** Более 25 лет нами проводились исследования ползучести песка при разных схемах и уровнях нагружения.

Деформации ползучести проходили в течение всего периода наблюдений (до одного года). Получены эмпирические уравнения ползучести (В.М. Антонов, В.В. Леденев).

При ползучести происходит более плотная укладка зерен, а также их размельчение, появляется эффект «холодной сварки». Результаты могут быть использованы при прогнозе осадок.

**Исследование несущей способности и перемещений фундаментов при сложных силовых воздействиях.** В экспериментах применяли статическое и многократно повторное нагружение плоской системой сил. В широком диапазоне изменяли эксцентриситеты и углы наклона силы. Исследованы механизмы деформирования и разрушения, установлены функциональные зависимости между влияющими параметрами, разработаны предложения по ограничению перемещений.

**Пространственная неоднородность по сжимаемости.** На некоторых строительных площадках грунты неоднородны по сжимаемости, т.е. отношение  $E_{\max}/E_{\min} > 2$ . Это потребовало ввести дополнительное армирование панелей крупнопанельных зданий и другие конструктивные мероприятия.

В практике трудно оценить влияние погрешности при определении деформационных характеристик грунта (исследование М.Ю. Абелева).

**Строительство на просадочных грунтах.** В Тамбовской области, как и в других областях ЦЧР, широко распространены просадочные грунты I-го типа.

В практике строительства раньше, а в ряде случаев и сейчас, не выполняют конструктивные и водозащитные мероприятия по снижению неравномерных деформаций, вызванных просадкой, не учитывают снижение механических характеристик при замачивании. В то же время имеется ряд примеров значительных деформаций кирпичных стен зданий с образованием сквозных трещин шириной до 15 мм, сползание перемычек, подвижка плит перекрытий. Выполнение мероприятий по повышению жесткости здания или уширению фундаментов часто не достигает успеха (трещины развиваются).

**Строительство на намывных основаниях.** Имеется положительный опыт строительства на намывных основаниях (кожевенный завод, Курск; Левобережный район, Воронеж). Проведенные исследования подтвердили эффект самоуплотнения песков. Этот метод весьма эффективен при освоении пойменных территорий, имеющих практически во всех городах.

**Насыщение грунтов технологическими растворами, маслами.** Отрывка шурфов показала (депо, Воронеж; завод «Пигмент», Тамбов), что на небольшой глубине вскрываются грунтовые воды с содержанием различных растворов, часто агрессивных. Исследования, в том числе наши, установили снижение механических характеристик грунта и бетона, коррозионные процессы в бетоне и арматуре, разрушение подземных коммуникаций. Обследование технического состояния фундаментов трудновыполнимо. Поэтому неизвестна их работоспособность.

**Утечки жидкостей в грунт.** Вследствие повреждений транспортных коммуникаций происходит утечка различных растворов в грунт под полами. При длительных утечках происходят неблагоприятные последствия. Так, на молокозаводе в Уваровском районе продукты смыва молока систематически в больших количествах поступали в грунт и далее утекали за пределы здания. Швы из цементного раствора местами полностью разрушились, а вместо них был чернозем. Необходимо было вовремя отремонтировать сливные лотки, по которым стекает жидкость.

В ряде случаев, при поступлении в грунт технических растворов, в основании возникали линзы и увеличивались в размерах. Это приводило к увеличению объема грунта обратной засыпки. В результате происходило выпучивание полов и кислотоупорной плитки у колонн и стен.

**Обеспечение равномерной жесткости основания.** Локальное усиление грунтов уплотнением, армированием, закреплением или ослаблением вследствие замачивания приводит к изменению пространственной жесткости основания и к дополнительным напряжениям в элементах здания или в узловых соединениях, появлению трения в стенах, подвижке плит перекрытий.

При проектировании необходимо стремиться к потенциально равной сжимаемости грунтов в пределах здания. Хотя в отдельных случаях может оказаться целесообразным обоснованное изменение жесткости основания в целях выравнивания осадок.

Нарушение структурной прочности также приводит к искажению полей деформативных свойств.

**Забивка свай до проектного уровня.** При имеющей место забивке свай наблюдается расположение острия на разных отметках. Может оказаться так, что концы одних свай находятся в пределах просадочного слоя грунта, а другие – в непросадочном. В результате появляются дополнительные деформации (силосный корпус, Воронеж). В рассмотренном примере, с одной стороны, сваи не были добиты до проектной отметки и оказались в слое просадочного суглинка. Здание получило крен в эту сторону. Строители часто вместо уплотнения или упрочнения верхнего слоя просадочного грунта устраивают свайные фундаменты с заделкой свай в непросадочный грунт. Однако, если сваи и забиты до проектного уровня, при эксплуатации происходит просадка верхнего слоя, сопровождающаяся разрушением полов и выходом из строя оборудования.

**Изменение влажности грунтов.** Влажность в пределах зоны аэрации сезонно меняется, поэтому в зависимости от времени отбора образцов она будет разной. В процессе строительства и эксплуатации происходят значительные изменения влажности по сравнению с данными изысканий. Это приводит к снижению прочности и деформативности глинистых грунтов и появлению дополнительных напряжений в элементах здания. Кроме того, в грунты и грунтовые воды поступают жидкие продукты производства. Видимо, необходимо внедрять методы прогноза развития влажности грунтов.

**Миграция влаги из грунтов в надземные конструкции.** Гидроизоляционные работы, как слабоконтролируемые и малооплачиваемые, выполняют некачественно. Гидроизоляционные материалы менее долговечны, чем несущие конструкции. Условия эксплуатации изменяются, как правило, в худшую сторону.

Вследствие этого грунтовые воды капиллярно поднимаются в стенах (музей русского флота, Воронеж), проникают в помещения через стены подвалов (убежище на кожевенном заводе, Курск). Эксплуатация зданий становится невозможной.

Так, при строительстве музея в бывшей церкви (Воронеж) влага поднималась по стенам до 6 м. Отделочные работы были приостановлены. Решили сделать гидроизоляцию, вводя жидкое стекло в распиленный шов в цокольной части. Здание при этом опиралось на стальные конструкции, помещенные внутри. Когда в подвале одного из зданий кожевенного комбината в Курске решили сделать пункт гражданской обороны, эксплуатация здания не представлялась возможной из-за поступления воды через пол и стены. Укладка дополнительного слоя бетона толщиной 20 см, а затем стального листа по всей площади не увенчалась успехом.

Было решено понизить уровень депрессионной воронки путем откачки воды из приемков. Однако при этом возникла опасность выноса мелких частиц из основания и его ослабления. Гидроизоляционные материалы недолговечны, работы по гидроизоляции малооплачиваемы и плохо контролируются. Пристенный дренаж не всегда эффективен.

**Преждевременное замерзание бетона и раствора.** Это является одной из основных причин повреждений, разрушений и аварий (Золотухинский сахарный завод, Курская область; инженерный корпус, Курск). Особую опасность представляют монолитные узлы сопряжения колонн с ригелями (жилые дома в Московском микрорайоне, Тамбов). Из-за малого объема укладки качественно уплотнять бетон практически нельзя, работы трудноконтролируемые, прогреть бетон также сложно. Кроме того, работы по бетонированию монолитных участков сопровождаются разливом больших объемов воды на нижерасположенные междуэтажные перекрытия. Это приводит к повреждению конструкций – появлению трещин и снижению прочности. Наблюдения за технологией ведения бетонных и каменных работ показали, что рекомендации по производству работ в зимний период не в полной мере выполняются и плохо контролируются.

**Скопление производственной пыли на покрытиях.** Разрушения по этой причине имели место на Липецком металлургическом комбинате, Уваровском химическом комбинате (Тамбовская область). В последнем примере возле фонаря одного из корпусов образовалась насыпь из пыли, снега и льда, приведшая к локальному обрушению конструкций покрытия. Необходимо периодически очищать перекрытия и покрытия от пыли, снега и льда.

**Механические повреждения.** Большие разрушения возникают в местах биения механизмов, аппаратов для перемешивания материалов. К примеру, на заводе ОАО «Пигмент» (Тамбов) один из аппаратов был прикреплен к монолитному железобетонному перекрытию толщиной 1,2 м. Из-за слабого закрепления болтов и нарушения технологии перемешивания под всеми балками внизу и сверху образовались «чаши» разрушения. На одном из кирпичных заводов (Тамбов) тросы для перемещения грузовых тележек закрепляли за кирпичный столб сечением 64×64 см. В момент осмотра значительная часть сечения столба перерезана канатом.

Почти во всех эксплуатируемых производственных зданиях повреждены железобетонные плиты при пробивке проемов, где жесткость конструкций резко снижена, а по контуру происходит интенсивная коррозия. Вырезка отверстий производится в стальных балках.



В некоторых случаях к ним привариваются другие конструкции, или их используют для подъема различных грузов.

**Перегрузка конструкций.** В практике часто на перекрытиях складировать материалы, оборудование (Уваровский химкомбинат, Тамбовская область), конструкции используются для подъема технологического оборудования. Такие действия должны быть согласованы с проектировщиками.

**Влияние пристраиваемых зданий.** Напряженные зоны от пристраиваемых зданий заходят в основание существующих, вызывая дополнительные неравномерные осадки. Вследствие этого в стенах ранее построенного здания возникают косые трещины, смятие соприкасающихся конструкций зданий, смещение перемычек и плит, нарушаются условия эксплуатации. В Тамбове осмотрено 10 таких домов. Для двух домов, расположенных перпендикулярно и соприкасающихся внутренними углами, сделана вставка на буронабивных сваях длиной 10 м. Трещины в существующих зданиях не появились. Таким образом этот вариант оказался эффективным.

**Неравномерные деформации разнонагруженных частей зданий.** Классическим примером могут служить недопустимые деформации строений Курского элеватора:  $s = 2$  см рабочей башни, административного помещения осадка  $s = 2$  см, трех силосных котлов  $s = 24$  см и встроенных между ними галерей  $s = 1,6$  см. Вследствие значительных трещин административное здание и галереи рекомендовано разобрать.

В Тамбове рядом с домами 90-й серии одновременно возводили магазины.

Из-за значительных деформаций первых было решено магазины пристраивать позже.

**Влияние начальных дефектов.** Сотрудники кафедры «Конструкции зданий и сооружений» (В.М. Антонов, О.В. Евдокимцев, В.В. Леднев) провели инструментальную оценку соответствия проекту и нормам изготовленных заводом металлоконструкций, предназначенных для строительства Ново-Лядинского спиртзавода. Были выявлены недопустимые отклонения и даны рекомендации по их исправлению. В процессе последующего монтажа этих конструкций также имелись несоответствия. То же наблюдается на всех этапах строительного процесса от изысканий, включая эксплуатацию. В результате, в конструкциях, узлах сопряжения возникают дополнительные деформации и напряжения. В процессе эксплуатации имеет место деструкция материалов, механические повреждения, вырезка отверстий, подвешивание трубопроводов или других грузов. Влияние всего перечисленного на прочность, жесткость и трещиностойкость конструкции недостаточно исследовано, а имеющиеся методы расчета несовершенны. Проводятся

экспериментальные и теоретические исследования влияния дефектов на напряженно-деформированное состояние строительных конструкций.

Наиболее распространенными дефектами в железобетонных конструкциях являются: большие повреждения пустотных плит в местах расположения монтажных петель, начальные трещины, механические сколы, проглядывание арматуры, рыхлый бетон на отдельных участках.

**Отсутствие бетона омоноличивания или некачественное выполнение стыковых соединений:** отдельных фундаментов с колоннами (Воронеж, убежище), сборных железобетонных стеновых панелей с пазами в монолитных железобетонных плитных фундаментах (Курск, городские очистные сооружения), стоек стальных рам с трубами чугунных труб, служащих в качестве фундаментов (Липецк, тепличный комбинат).

**Учет влияния условий при строительстве.** Дроздовым П.Ф. (1977) отмечена необходимость анализа условий возведения. Особое значение придается анализу этапов возведения здания, при которых изменяется расчетная схема. Примерами могут служить: работа связевого каркаса при отставании монтажа стенок жесткости; устойчивость колонны со сварными под монтажными нагрузками до выполнения связей, создающих неразрезность и т.п. Расчетные схемы и нагрузки могут значительно отличаться от тех, которые будут в законченном сооружении.

**Прогрессирующее разрушение.** Примеры таких аварий (тепличный комбинат, Липецк) показали, что причиной их является сочетание нескольких неблагоприятных факторов (ошибок). Очаг разрушения (наиболее слабое место в системе) часто трудно предсказуем.

В приведенном примере (теплица из металлических рамных конструкций) допущены грубые ошибки при устройстве фундаментов, монтаже рам, соединений стоек теплицы с фундаментом из труб.

Аварии на городских очистных сооружениях в Курске, в убежище (Воронеж), тепличном комбинате (Липецк) связаны с одной ошибкой – некачественным устройством стыка надземных конструкций с подземными. Вместо тщательного заполнения бетоном на щебне мелкой фракции применяли слабый, плохо уложенный цементный раствор.

**Разработки методов усиления железобетонных и металлических конструкций.** Экспериментально проверены предложенные способы усиления железобетонных конструкций с помощью локальных поясов.

В течение длительного периода сотрудники архитектурного факультета ФГБОУ ВПО «ГГТУ» разрабатывали и внедряли проекты усиления различных конструкций. При качественном производстве работ и последующем поддержании в исправном состоянии во всех случаях наблюдался положительный эффект.

**Коррозия материалов и конструкций.** На объектах завода ОАО «Пигмент» (Тамбов) происходит интенсивное коррозионное разрушение бетона, арматуры, стали и кирпича. Металлические конструкции и изделия получают значительные повреждения в местах систематического пролива растворов, скопления производственной пыли и конденсата. Железобетонные конструкции активно разрушаются в местах систематического замачивания водой и растворами.

Наиболее характерными видами коррозионных разрушений железобетонных конструкций являются: коррозионные трещины (особенно в ребрах плит), разрушение защитного слоя бетона, коррозия арматуры при нарушении совместной работы с бетоном.

На объектах пищевой промышленности наблюдается биологическая коррозия. Так, на Тамбовском мясокомбинате пришли в негодность обетонированные стальные двутавровые балки. Полностью разрушены бетон и сетки, сильно корродированы балки.

**Несвоевременное выполнение ремонтно-восстановительных работ.** Часто службы капитального ремонта используются не по назначению. Конструкции разрушаются, источники повреждений и разрушений не ликвидируются. Это приводит к преждевременным отказам.

**Причины появления трещин в кирпичных зданиях.** В подавляющем большинстве случаев трещины возникают вследствие недопустимых относительных разностей осадок фундамента, вызванных просадкой, замачиванием непросадочных грунтов, попаданием под подошву фундаментов чернозема, загрузением опорной части ленточных фундаментов.

Имеют место и другие факторы, например, механическая суффозия, вызванная фильтрационным потоком (Курский цирк, служебные помещения).

**Расчет и усиление железобетонных конструкций с коррозионными повреждениями.** На химических предприятиях Тамбова и области конструкции иногда выходят из строя в течение нескольких лет. Интенсивное разрушение происходит вблизи аппаратов, в местах систематического замачивания технологическими растворами и замораживания–оттаивания. В неразрезных системах локальные разрушения иногда приводят к замене больших участков или даже всего перекрытия. В ряде случаев происходит частичное или полное изменение расчетной схемы.

Расчет конструкций, поврежденных коррозией, осложнен случайным характером: расположение повреждений, распределение прочности бетона по расчетным сечениям, изменения механических свойств арматуры и диаметра, нарушение сцепления арматуры с бетоном. Ввиду этого усиление осуществляют со значительным запасом.

**Разрушение при замораживании–оттаивании** является одним из наиболее распространенных случаев в практике (плиты строящегося здания фармацевтического завода, Курск; сегментные фермы строящегося цеха кирпичного завода, Тамбов; ребристые плиты перекрытия корпусов военного училища, Тамбов).

В примерах имело место полное разрушение несущих железобетонных конструкций, не защищенных при консервации.

Основной причиной преждевременных повреждений и разрушений является низкая плотность бетона и отсутствие защиты конструкции.

Насыщение кирпичной кладки растворами, последующее многократное замораживание–оттаивание приводит к разрушению кладки на глубину 20 см.

В местах стекания дождевых вод с крыш по стенам возникают разрушения до 15 см.

**Преждевременное повреждение и разрушение конструкции при ухудшении условий эксплуатации.** При проектировании конструкции, материалы, технологии, защитные мероприятия рассчитывают для определенных условий: температурно-влажностных, силовых, коррозионных. На практике они значительно ухудшаются, например, холодные батареи, побитые стекла, незакрывающиеся двери, негерметичные аппараты, протекающие трубопроводы. Все это приводит к варьированию снижения долговечности и несущей способности.

**Разрушения при авариях и катастрофах.** В [1] описаны экстремальные воздействия на сооружения в виде землетрясений, ураганов, торнадо, гроз, наводнений, селевых потоков, оползней, снежных лавин, взрывов, пожаров, аварий на АЭС. Определены причины проявления, даны классификации по нагрузкам и степени воздействия на инженерные сооружения, описаны мероприятия по предотвращению или уменьшению ущерба, рассмотрены вопросы расчета и конструирования.

Дополнительную информацию можно найти в книгах В.Д. Ломтадзе (1977); В.В. Назина (1983); С.В. Полякова (1983); А.Н. Мартемьянова (1985); В.Д. Браславского (1985) и др.; В.М. Антонова, В.В. Леденева, В.И. Скрылева (2002); Б.А. Гарагаша (2012) и др.

**Воздействие вибраций от транспорта.** В последнее время резко возросли нагрузки от автомобильного транспорта. Это стало серьезной проблемой для мостов, построенных ранее, и имеющих определенную долю износа.

Вибрации от тяжелых машин вызывают дополнительные неравномерные деформации грунтов и повреждения надземных конструкций. Для каменных зданий с деревянными перекрытиями и лестницами связи между противоположными стенами недостаточны для предотвращения образования разрывных трещин в торцевых стенах.

Грунты основания водонасыщены и чувствительны к вибрациям. Наблюдается крен частей здания в сторону дороги.

**Здание – система конструктивных элементов со связями**, отличающихся жесткостными характеристиками и пространственным расположением. При эксплуатации изменяются температура, влажность (особенно грунтов основания) и другие воздействия. Система приспособляется к меняющимся условиям. Происходит сложное пространственное деформирование здания с перераспределением усилий и напряжений.

**Исследование взаимодействий элементов зданий между собой и здания с основанием.** В основании и конструкциях, узлах сопряжений происходят реологические процессы с разными скоростями, перераспределение усилий и напряжений, приспособление системы к меняющимся условиям и деградация материалов.

Скорости процессов в грунтах значительно выше, чем в материалах и конструкциях. Необходимо проектировать здания и сооружения с учетом совместной работы элементов, и в первую очередь, с основанием.

В течение 10 лет на кафедре КЗиС ФГБОУ ВПО «ТГТУ» проводились экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния крупномасштабной П-образной рамы на деформируемом основании при разных схемах нагружения, дефектах основания и рамы и установлены взаимосвязи между определяющими параметрами.

**Стены с резко отличающейся жесткостью по длине.** В производственных зданиях с большими оконными проемами длиной 2,5...4 м изгибная жесткость значительно меньше, чем в простенках (ОАО «Пигмент», Тамбов). В местах резкого изменения жесткости появляются вертикальные трещины. В практике проектирования следует выравнивать жесткости стен зданий.

**Ошибки при определении физико-механических свойств грунтов.** Осмотр большого числа инженерно-геологических изысканий показал, что в ряде случаев интервалы измерений некоторых характеристик чрезвычайно велики, к примеру, плотность грунта  $\rho$  находится в пределах от 1,65 до 2,05 г/см<sup>3</sup>. Несущая способность грунта для крайних величин  $\rho$  отличается в несколько раз. Фактическую погрешность определения характеристик установить невозможно. При инженерно-геологических, гидрологических изысканиях недостатком мобильных надежных средств определения характеристик грунтов.

**Поиск оптимальной формы конструкции.** На фундаменты действует комплекс нагрузок, часто приводимый к плоской системе сил. В исследованиях мы, как правило, рассматриваем действие на фундамент внецентренной наклонной шарнирно приложенной силы. Такая замена не всегда оправдана. Однако это принимается в целях сокращения числа исследуемых параметров.

При такой схеме нагружения производится поиск наиболее рациональной конструкции фундаментов. Исследования проводились в следующих направлениях: кольцевые фундаменты с несимметричным вырезом, рамные монолитные и сборно-монолитные фундаменты, круглые фундаменты с вырезами по контуру.

Первые фундаменты целесообразно применять при значительных горизонтальных нагрузках. Эффект усиливается наклоном подошвы, принятием формы подошвы в соответствие эпюре изгибающих моментов, применением пустотелых стоек и подкосов, использованием предварительного напряжения арматуры.

В зависимости от соотношения  $e_0/\delta$  ( $e_0$  – относительный эксцентриситет силы,  $\delta$  – угол наклона силы к вершинам) можно принять такую форму выреза, при которой перемещения (осадка, крен, горизонтальное перемещение) не превышают допустимых.

Фундаменты с вырезами целесообразно применять в целях уменьшения расхода бетона. Однако они несколько сложны в изготовлении. В отдельных случаях возможен незначительный перерасход арматуры. Оптимальное решение может быть определено из сравнения сопоставимых вариантов. В конструкциях такого вида проявляется арочный эффект, исследуемый К. Терцаги, Д.Е. Польшиным, В.Н. Голубковым.

**Применяемые методы повышения жесткости здания и их эффективность.** В практике применяют: монолитные железобетонные пояса, напрягаемые стальные пояса, стальные обоймы, усиление подошвы фундаментов, подведение под подошвы существующих зданий бетонных столбов, вдавливание под ленточные фундаменты бетонных или железобетонных элементов.

Осмотр зданий, усиленных натягиваемыми стержнями, показал, что в ряде случаев метод эффективен при соблюдении требований проекта. В некоторых зданиях арматура не натянута или кладка разрушена в углах. В сложных грунтовых условиях усиление обоймами, тязями не приостановило деформации зданий и развитие трещин.

**Геолого-экологическая ситуация в Тамбовской области.** Характеризуется деградацией природных комплексов. Зависит от хозяйственной деятельности промышленных предприятий, транспортных и хозяйственных коммуникаций, электрических и тепловых станций и т.д.

Геологическая среда испытывает все возрастающее техногенное воздействие, которое негативно сказывается не только на ее отдельных компонентах, но и на всем природном комплексе в целом.

На территории области имеется большое количество предприятий, являющихся потенциальными источниками загрязнения подземных вод: перерабатывающие предприятия (сахарные, спиртовые и кон-

сервные заводы, мясокомбинаты, маслозаводы и др.), предприятия химической промышленности или связанные с хранением и реализацией нефтепродуктов, полигоны по захоронению пестицидов, промышленных и бытовых отходов.

Расположенные на незащищенных участках поля фильтрации этих предприятий оказывают существенное влияние на гидрохимический режим подземных вод, ухудшая их качество и делая их непригодными для питьевого водоснабжения.

Основными негативными факторами техногенного воздействия на окружающую природную среду на территории Тамбовской области являются:

- загрязнение воздушного и водного бассейна, активизация эрозии почв и рост овражно-балочной сети при разработке полезных ископаемых открытым способом;
- снижение уровня подземных вод в результате массового отбора воды из рек, подземных горизонтов в Тамбове и Мичуринске;
- загрязнение почв и подземных вод нефтепродуктами и фенолами в результате утечек и разливов на предприятиях, связанных с транспортировкой, хранением и их реализацией;
- загрязнение подземных и поверхностных вод сбросами жидких стоков от предприятий ЖКХ, химической и нефтехимической, пищевой и сельскохозяйственной промышленности в реки и водоемы, на поля фильтрации, расположенные на незащищенных участках (речных поймах и террасах);
- загрязнение поверхностных подземных вод продуктами разложения различных отходов, сконцентрированных на полигонах бытовых и промышленных отходов, а также на несанкционированных свалках мусора;
- захламление почв, водоохранных и прибрежных зон водоемов и рек отходами;
- подтопление грунтовыми водами территорий жилых кварталов.

**Расчет конструкций и систем с дефектами, возникающими в процессе возведения, эксплуатации и реконструкции.** Дефекты учитываются с помощью коэффициентов ослабления (В.С. Сафронов, С.Д. Степанов, 2005), системы поправочных коэффициентов влияния (И.Н. Кузнецов, В.В. Леденев, 2009) и др.

Так, при анализе эксплуатируемых плитко-балочных систем (В.С. Сафронов, С.Д. Степанов, 2005) учитывались следующие дефекты: снижение жесткости балок; ослабление бетона и рабочей арматуры нижнего пояса стенки балки; полос балок, накладной плиты; ослабление бетона и рабочей арматуры диафрагм; ослабление шва между накладной плитой и балками. Коэффициенты ослабления меняются от 0 до 1.

Плитко-пластичный элемент системы испытывает мембранное напряженное состояние. Применительно к плоской задаче теории упругости компоненты векторов, матриц и матричных операторов имеют вид

$$\tilde{s} = [s_x s_y \tau_{xy}]^T \text{ – вектор внутренних усилий;}$$

$$\tilde{q} = [q_x q_y]^T \text{ – вектор нагрузки;}$$

$$\tilde{e} = [e_x e_y e_{xy}]^T \text{ – вектор деформаций;}$$

$$\tilde{c} = \frac{h}{1 - \nu_x \nu_y} \begin{bmatrix} E_x & \nu_x E_y & 0 \\ \nu_y E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_x \nu_y) G \end{bmatrix} \text{ – матрица упругости;}$$

$$\tilde{G}_y = \tilde{R}_y^{(1)} = \begin{bmatrix} \partial^x & 0 & \partial^y \\ 0 & \partial^y & \partial^x \end{bmatrix} \text{ – дифференциальные операторы;}$$

$$\tilde{u} = [u_x u_y]^T \text{ – вектор степеней свободы.}$$

По предложению И.Н. Кузнецова и В.В. Леденева (2008) величины изгибающих моментов предложено определять по формулам

$$M = M_c K_{Mds} K_m; \quad M = M_t K_{Mds} K_\delta,$$

где и  $M_c$  и  $M_t$  – величины изгибающих моментов, полученных экспериментально, и решением стандартных расчетных схем;  $K_{Mds}$ ,  $K_m$ ,  $K_\delta$  – коэффициенты, учитывающие влияние дефектов основания (индекс «d»), рамы (индекс «s»), масштабного фактора «m» и условности расчетных схем (индекс «δ»).

**Опыт проектирования в зарубежных странах.** Большую ценность представляет анализ норм расчета и конструирования в ведущих странах в книге А.Г. Колмогорова и В.С. Плевкова (2009). Изложены основные положения расчета железобетонных конструкций по нормам России, Франции, Англии, Германии, США и кодексу ЕКБ/ФИП. Дан сравнительный анализ расчета. Описаны конструктивные требования по нормам разных стран.

**Признаки аварийного состояния. Терминология.** *Авария* – обрушение строительной конструкции, здания или сооружения; получение таких деформаций, при которых невозможна их эксплуатация. *Аварийное состояние* – состояние конструкции, здания или сооружения, при котором с большой степенью вероятности можно ожидать аварию. *Предаварийное состояние* – состояние, когда в случае продолжения неблагоприятных воздействий может наступить авария.



Такие состояние определяют в результате технического обследования, наблюдения или расчета.

Согласно действующим нормам, достижение в каком-либо сечении статически определимой системы предельного состояния первой группы означает наступление предельного состояния во всей конструкции и разрушение. Для статически неопределимых систем это не так.

Возможно совпадение и несовпадение состояний конструкций, зданий и сооружений по расчетам и наблюдаемым признакам. К признакам аварийного состояния можно отнести наличие нестабилизированных трещин в конструкциях, особенно их развитие с ускорением, появление новых трещин и их развитие, потеря устойчивости сжатых элементов с выпучиванием, обрушение отдельных элементов, треск в здании или сооружении, рост перемещений (осадок, крена, горизонтальных смещений), смятие с крошением кладки, разрушение поверхностных слоев материала с уменьшением сечений, подвижка откосов и склонов, на которых расположены здания или сооружения, заклинивание лифтовых шахт, деформирование стальных фасонков.

Приведем более подробные сведения о кирпичных зданиях.

**Причины разрушения кирпичных зданий:** низкое качество материалов и производства кладки, особенно в зимних условиях, применение материалов разной прочности и жесткости (например, керамический и силикатный кирпич), недопустимая неравномерность перемещений фундаментов и отдельных частей зданий, отсутствие или неправильное выполнение осадочных и деформационных швов, отсутствие анкерных связей в уровне перекрытий каждого этажа, недопустимые отклонения от проектных положений, неравномерная нагруженность отдельных участков стен, нарушение непрерывности армирования монолитных поясов и швов по периметру несущих стен; несвоевременное выполнение ремонтно-восстановительных работ; непроектные нагрузки на конструкции; пробивка борозд, проемов, отверстий; необоснованная перепланировка, приводящая к изменению расчетных схем, увеличению нагрузок, снижению несущей способности; постоянное или систематическое замачивание конструкций; коррозионные разрушения и повреждения; обводнение территории; отсутствие или значительные повреждения отмосток; нарушение связей между отдельными конструктивными элементами; снижение прочностных и деформационных характеристик материалов, конструкций, связей; допущенные на всех этапах дефекты и повреждения; невыполнение рекомендаций изыскательских и проектных организаций; отсутствие прогноза изменения условий строительства и эксплуатации; отрывка ям в технических этажах и подвалах; необоснованные измене-

ния проектных решений; ошибки в расчетах или принятие неэффективных решений; не обеспечена жесткость дисков перекрытий и покрытий; недостаточная проработка отдельных узлов; недостаточный авторский контроль; нарушение рекомендаций проекта производства работ (ППР); изменение механических характеристик грунтов основания в период до устройства фундаментов; отсутствие армированных распределительных плит; отсутствие анкерных креплений стен и столбов к перекрытиям; наличие большого количества незаполненных раствором швов; некачественное выполнение обратной засыпки котлованов; некачественное выполнение гидроизоляции; влияние рядом построенных зданий или сооружений; преждевременное замерзание бетона и раствора; нарушение схем опирания плит или их перегрузка во время строительства и ремонта; отсутствие в железобетонных конструкциях арматурных выпусков и закладных деталей; ошибки при опалубочных работах; отсутствие мониторинга при строительстве особо ответственных объектов; попеременное замораживание – оттаивание наружных слоев кладки; разрушение наружных слоев кладки у поверхности земли, где имеются присыпанные к стене кучи мусора; вибрация при забивке свай или работе насосов, вентиляторов, молотов и других механизмов; незасыпанные вблизи здания траншеи или котлованы; повреждение материалов и конструкций при вынужденной длительной приостановке работ; значительное повышение влажности грунтов основания эксплуатируемых зданий вследствие затенения асфальтированием территорий, посадки и полива кустов и деревьев, скопления поверхностных вод; единичные или систематические повреждения в виде износа с уменьшением сечений, вымывание водой или технологическими растворами цементного раствора; нарушение совместной работы отдельных элементов.

Ряд причин разрушения можно отнести и к другим видам зданий.

Гастев В.А. (1924) отметил, что кладка находится в сложном напряженном состоянии и подвержена внецентренному сжатию, изгибу, растяжению, срезу и смятию.

Основными причинами этого являются: неоднородность растворной постели, различие деформационных свойств камня и раствора, наличие вертикальных швов, неоднородность камней и их неправильная форма.

Отмечают четыре стадии работы кладки: до появления трещин ( $N < N_{cre}$ ), появление отдельных вертикальных трещин в кирпичах ( $N = N_{cre}$ ), развитие трещин и появление новых с постепенным расслаиванием кладки на отдельные вертикальные элементы ( $N_{cre} < N < N_u$ ) и разрушение ( $N = N_u$ ).

**Выводы:**

1. Аварии часто возникают при неблагоприятном сочетании различных дефектов.

2. Коррозионные разрушения конструкций происходят вследствие несоблюдения элементарных условий эксплуатации – недопущения систематического насыщения конструкций технологическими растворами.

3. Несвоевременное выполнение ремонтно-восстановительных работ приводит в ряде случаев к полному отказу конструкций.

4. Недостаточный контроль за производством строительных материалов, конструкций и строительно-монтажных работ приводит к серьезным ошибкам и авариям.

5. Коррозия фундаментов из-за агрессивных вод и снижение свойств грунтов при повышении уровня грунтовых вод являются одними из наиболее опасных проявлений ошибок при эксплуатации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ ИЗ ИСТОРИИ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ

---

---

Баренблатт Г.И., Черепанов Г.П. (1969) установили принцип локальной симметрии: трещина распространяется в направлении оси симметрии напряженного состояния, измененного в связи с малым распространением трещины.

Бондаренко В.М., Колчунов В.И. (2004), Карпенко Н.И. (1996) разработали модели силового сопротивления железобетона.

Боткин А.И. (1940) разработал теорию прочности сыпучих и хрупких материалов. В особой точке грунта может быть достигнуто предельное состояние:

$$\frac{\tau_m}{(n + p)} = m \quad \text{или} \quad \tau_m = m(n + p),$$

где  $\tau_m$  – октаэдрическое сдвигающее напряжение;  $n$  – всестороннее давление;  $p$  – нормальное давление;  $m$  – постоянная величина, равная коэффициенту внутреннего трения грунта.

Бриджмен П.В. исследовал (1950) большие пластические деформации и разрыв.

Вегенер А. разработал (1910) теорию движения континентов, а А. Надеи (1950) подвел теоретическую базу на эту теорию.

Витан Ф.Х., Зайцев Ю.В. (1973) разработали теоретическую модель развития трещин в пористом вязкоупругом материале.

Галилей Г. (1638), Мариотт Е. (1684), Кулон Ш. (1773), Максвелл И. (1856) предложили классические гипотезы прочности.

Гейм А., Клосс Т. в течение своей жизни исследовали пластическое деформирование горных пород.

Гениев Г.А. разработал (1995) аналитическую модель деформирования бетона и стали при действии динамических нагрузок для определения динамических пределов прочности.

Горбунов–Посадов М.И. один из первых заложил (1961) основы расчета песчаных оснований смешанным методом теории упругости и пластичности.

Гриффитс А. установил (1920), что самопроизвольный рост трещин начинается в момент, когда освобождающаяся упругая энергия тела, отнесенная к единичному приращению площади трещины, станет равной удельной поверхностной энергии тела.

Давиденков Н.Н. внес большой вклад в исследование прочности материалов (1940 – 1955).

Дроздовский Б.А. (1946) разделил работу при испытании материала на три части: пластической деформации, возникновения очага разрушения, распространение трещины.

Журков С.Н. (1952 – 1988) исследовал температурно-временную зависимость прочности твердых тел (термофлуктуальная концепция). Для большинства тел зависимости  $\lg \tau - \sigma$  при разной температуре образуют вид прямых, сходящихся в точке. Он предложил формулу долговечности, носящую его имя:

$$\tau = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma' \sigma}{RT},$$

где  $U_0$  – начальная энергия активации;  $\gamma'$  – структурно-чувствительная константа материала;  $\tau_0$  – множитель;  $T$  – температура;  $R = kN_A$ ;  $N_A$  – число Авогадро;  $k$  – постоянная Больцмана.

Идеи С.Н. Журкова развиты в работах С.Б. Ратнера, В.П. Ярцева, Л.Б. Потаповой.

Зайцев Ю.В. провел теоретический анализ напряжений около концентраторов различной формы. Получил математическое описание роста трещин у круглых отверстий.

Иоффе А.Ф. установил (1924 – 1950) границы между областями хрупкого и вязкого разрушения.

Ирвин Дж. определил (1957 – 1960) критерий разрушения в виде достижения интенсивности напряженного состояния у вершины трещины предельной величины.

Кондауров И.И. разработал (1966) теорию безраспорных и распорных зернистых сред.

Качанов Л.И. предложил (1958) обобщенную схему разрушения при ползучести. Использовал диаграммы в координатах  $\lg \sigma - \lg t$ , на которых определил участки вязкого (верхний) и хрупкого (нижний) разрушения.

Колчунов В.И., Ключева Н.В. исследовали (2008 – 2012) живучесть конструктивных железобетонных систем при внезапных структурных изменениях в их элементах. Рассмотрены системы в запредельных состояниях с учетом динамических догрузений и соответствующих им упрочнений материалов. Под живучестью здесь понимается способность системы распределять нагрузку между остальными элементами в случае отказа и ослабления одного из элементов.

Коттрелл и Петч (1963) установили причины перехода разрушения материала от вязкого к хрупкому, рассматривая трещину как совокупность раскалывающих краевых дислокаций.

Кулон Ш. (1773) установил закон, носящий его имя: сопротивление сыпучих грунтов сдвигу есть сопротивление трению, прямо пропорциональное давлению  $\tau_i = f\sigma_i$ ,  $f = \operatorname{tg}\varphi$  – коэффициент внутреннего трения.

Кулон Ш. (1773), Ренкин В. (1859), Прандль Л. (1921), Соколовский В.В. (1960) и другие заложили основы теории предельного равновесия сыпучих сред.

Мурзенко Ю.Н. (1965 – 1970) провел уникальные эксперименты по исследованию деформирования и разрушения песчаных грунтов.

Леденев В.В., Иконин С.В. (1980) определили характер образования поверхностей скольжения в песчаном грунте от действия горизонтально нагруженной сваи и разрушение ствола сваи.

Леденев В.В., Худяков А.В. (1995) определили форму и размеры выпора грунта при действии на круглый штамп плоской системы сил.

Леон А. (1930) выполнил выдающиеся исследования по хрупкой и сдвиговой прочности. Обобщил теорию прочности Мора. Выполнил ряд работ по концентрации напряжений.

Морозов Е.М., Фридман Я.Б. установили вариационный принцип теории трещин: трещина распространяется в направлении определенного сочетания малого поглощения энергии и большого ее выделения.

Мурзенко Ю.Н., Мустафаев А.А. (1989) разработали теорию проектирования фундаментов на просадочных и набухающих грунтах.

Надаи А. (1967) разработал теорию движения континентов, октаэдрическую теорию прочности (1933): для сплошных сред октаэдрическое касательное напряжение при разрушении является прямой функцией от нормального октаэдрического напряжения:

$$\tau_{\text{окт}} = F(\sigma_{\text{окт}}).$$

Новожилов В.В. (1965) показал, что всякая пластическая деформация сопровождается монотонным увеличением объема – пластическим разрыхлением.

Овчинников И.Г. (1980 – 2000) разработал теорию работоспособности конструкций в условиях агрессивной среды.

Орован Е., Ирвин Дж., Мотт Н. предложили формулу для определения скорости критического роста трещины в растянутой плоскости:

$$de/dt = c_m(1 - l_0/l),$$

где  $c_m$  – максимально возможная скорость распространения трещины в упругой среде.

Паркс П. (1962) определил скорость роста усталостной трещины  $de/dN = C\Delta K^n$ , где  $N$  – число циклов нагружения;  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  – размах коэффициента интенсивности напряжений;  $C, n$  – эмпирические величины.

Партон В.З. (1985) доказал возможность устойчивого развития трещин в определенных диапазонах критических нагрузок.

Прандтль Л. внес значительный вклад в теорию деформирования и разрушения. Он построил аэродинамическую трубу (1908), исследовал потоки воды и воздуха вблизи пограничного слоя. Известен своими работами в области математической теории пластичности (1920).

Так он ввел понятие обобщенного идеально пластического тела, не обладающего свойством деформационного тела. Для такого тела материальные элементы начинают деформироваться и непрерывно деформируются не предельно долго, если:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right).$$

Пшеничкин А.П., Гарагаш Б.А. (1970 – 2008) обобщили и развили теорию взаимодействия сооружений с неоднородными грунтовыми основаниями.

Ребиндер П.А. (1928) открыл эффект, носящий его имя: облегчение деформации и разрушение твердых тел при протекании их в среде, содержащей вещества, обладающие физико-химическим родством к данному телу.

Ржаницын А.Р. разработал теорию предельного равновесия пластин и оболочек (1990), расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов (1954).

Сафронов В.С. (1980 – 2000) разработал теорию сопротивления мостов с учетом эксплуатационных повреждений.

Соколовский В.В. (1939 – 1942) опубликовал общее аналитическое решение плоской задачи теории предельного равновесия для сыпучей среды. Дал точное решение по определению давления грунтов на опорные стены.

Стрелецкий Н.С. (1971) применил статистические методы в расчете металлических конструкций. Является одним из инициаторов перехода к расчетам по предельным состояниям.

Терцаги К. – основатель механики грунтов (1958), разработал теорию консолидации грунтов (1925), предложил трехчленную формулу определения несущей способности грунтов.

Филин А.П. (1975) привел составные части построения теории процесса накопления повреждений в теле:

- выбор математического объекта, способного охарактеризовать поврежденность в точке сплошной среды;
- установление вида кинетического уравнения, связывающего параметр поврежденности с нагрузкой;
- формирование краевой задачи, позволяющей выяснить процесс глобального разрушения тела;
- формирование условий для проведения макроопыта, дающего информацию о материале и условиях, в которых он находится.

Финкель В.М. (1970), Фридман Я.Б. (1974), Екаборн Т. (1971), Аргон А., Макклитон Ф. (1971) и другие внесли большой вклад в становление и развитие механики разрушения.

Фридман Я.Б. (1974) предложил классификацию основных видов механического разрушения.

Хофф Н.Дж. (1953) провел исследования поведения круглого цилиндрического образца из вязкопластического материала. Определил продолжительность жизни образца.

Черепанов Г.П. (1974) разработал общую теорию хрупкого разрушения. Он исходил из того, что во всех телах всегда имеются дефекты, которые являются источниками трещин. Разрушение представляет собой процесс развития трещин. Трещины бывают двух видов: отрыва и скольжения

Черепанов Г.П., Ершов А.В. (1977) обобщили принципы механики разрушения.

Шукле Л. (1976), Вялов С.С. (1978) заложили основы реологии грунтовых оснований.

Эрдоген Ф., Си Дж. установили, что трещина растет в плоскости, перпендикулярной направлению наибольшего растягивающего напряжения. Трещина развивается в направлении, вдоль которого освобождающаяся энергия максимальна.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. Аварии и катастрофы. Предупреждение и ликвидация последствий. В 4-х кн. – М. : АСВ, 1995 – 1998. – 1322 с.
2. Белл, Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х ч. Ч. I: Малые деформации / Дж.Ф. Белл ; пер. с англ. ; под ред. А.П. Филина. – М. : Наука, 1984. – 600 с.
3. Белл, Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х ч. Ч. II: Конечные деформации / Дж.Ф. Белл ; пер. с англ. ; под ред. А.П. Филина. – М. : Наука, 1984. – 432 с.
4. Механика полимеров. Избранные главы по реологии полимерных систем : учебное пособие / П.С. Беляев, Е.В. Минкин, О.Г. Мамонов, В.Г. Однолюк. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2002. – 116 с.
5. Березанцев, В.Г. Расчет прочности оснований сооружений : монография / В.Г. Березанцев. – М. : Госстройиздат, 1960. – 208 с.
6. Бишоп, А.У. Параметры прочности при сдвиге ненарушенных и перемятых образцов грунта / А.У. Бишоп // Определяющие законы механики грунтов. Механика. Новое в зарубежной науке. – М., 1975. – Вып. 2. – С. 7 – 75.
7. Бондаренко, В.М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона : монография / В.М. Бондаренко, В.И. Колчунов. – М. : АСВ, 2004. – 472 с.
8. Верюжский, Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики : монография / Ю.В. Верюжский. – Киев : Высшая школа, 1978. – 184 с.
9. Вест, Ч. Голографическая интерферометрия : монография / Ч. Вест ; пер. с англ. – М. : Мир, 1982. – 504 с.
10. Вялов, С.С. Реологические основы механики грунтов : учебное пособие / С.С. Вялов. – М. : Высшая школа, 1978. – 447 с.
11. Галин, Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкопластичности : монография / Л.А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
12. Гарагаш, Б.А. Надежность систем «основание–сооружение» при неравномерных деформациях основания : монография. В 2-х т. / Б.А. Гарагаш. – М. : АСВ, 2012. – Т. 1. – 416 с.; Т. 2. – 472 с.
13. Гвоздев, А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия : учебное пособие / А.А. Гвоздев. – М. : Госстройиздат, 1949. – 280 с.
14. Гениев, Г.А. Динамика пластической и сыпучей среды : монография / Г.А. Гениев, М.Н. Эстрин. – М. : Стройиздат, 1972. – 216 с.

15. Гольденблат, И.И. Длительная прочность в машиностроении : монография / И.И. Гольденблат, В.Л. Бажанов, В.А. Копнов. – М. : Машиностроение, 1977. – 248 с.
16. Горбунов–Посадов, М.И. Давление грунта на жесткий закругленный фундамент и свободные деформации котлована / М.И. Горбунов–Посадов, О.Я. Шахтер, В.А. Кофман. – М., 1954. – Вып. 24. – С. 39 – 80.
17. Горбунов–Посадов, М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Горбунов–Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.
18. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин : монография / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М. : Машиностроение, 1988. – 288 с.
19. Денисов, Н.Я. Природа прочности и деформаций грунтов : монография / Н.Я. Денисов. – М. : Стройиздат, 1972. – 280 с.
20. Дидух, Б.И. Упругопластическое деформирование грунтов : учебное пособие / Б.И. Дидух. – М. : УДН, 1987. – 166 с.
21. Добров, Э.М. Механика грунтов : учебник / Э.М. Добров. – М. : Изд. Центр «Академия», 2008. – 272 с.
22. Дюрелли, А. Анализ деформаций с использованием муара : монография / А. Дюрелли, В. Паркс. – М. : Мир, 1974. – 353 с.
23. Ерхов, М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций : монография / М.И. Ерхов. – М. : Наука, 1978. – 352с.
24. Зайцев, Ю.В. Механика разрушения для строителей : учебное пособие / Ю.В. Зайцев. – М. : Стройиздат, 1991. – 288 с.
25. Зарецкий, Ю.К. Вязкопластичность грунтов и расчеты сооружений : монография / Ю.К. Зарецкий. – М. : Стройиздат, 1988. – 352 с.
26. Иванова, В.С. Разрушение металлов : монография / В.С. Иванова. – М. : Металлургия, 1979. – 168 с.
27. Калаев, А.И. Несущая способность оснований сооружений : монография / А.И. Калаев. – Л. : Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1990. – 183 с.
28. Кандауров, И.И. Механика зернистых сред и ее применение в строительстве : учебное пособие / И.И. Кандауров. – Л. : Стройиздат, 1988. – 280 с.
29. Караулов, А.И. Несущая способность оснований осесимметричных фундаментов зданий и сооружений : автореф. дис. ... д-ра техн. наук / А.И. Караулов. – СПб., 2009. – 46 с.
30. Карпенко, Н.И. Общие модели механики железобетона : монография / Н.И. Карпенко – М. : Стройиздат, 1996. – 416 с.
31. Карпенко, Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами : монография / Н.И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1996. – 208 с.

32. Коллинз, Д.А. Повреждение материалов в конструкциях: анализ, предсказание, предотвращение : монография / Д.А. Коллинз. – М. : Мир, 1984. – 624 с.
33. Колтунов, М.А. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов : учебное пособие / М.А. Колтунов, В.П. Майборода, В.Г. Зубчанников. – М. : Машиностроение, 1983. – 239 с.
34. Леденев, В.В. Механические и реологические модели оснований и фундаментов : учебное пособие / В.В. Леденев, А.В. Худяков. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 80 с.
35. Леденев, В.В. Основные определения и принципы механики : терминологический словарь / В.В. Леденев, А.В. Худяков. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 96 с.
36. Леденев, В.В. Прочность и деформативность оснований заглубленных фундаментов : монография / В.В. Леденев. – Воронеж : ВГУ, 1985. – 224 с.
37. Леденев, В.В. Основания и фундаменты при сложных воздействиях : монография / В.В. Леденев. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 1995. – 400 с.
38. Ломакин, В.А. Теория упругости неоднородных тел : учебное пособие / В.А. Ломакин. – М. : МГУ, 1976. – 368 с.
39. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела : монография / С.Г. Лехницкий. – М. : Наука, 1977. – 416 с.
40. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести : учебник / Н.Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.
41. Матченко, Н.М. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Прикладные задачи теории упругости : монография / Н.М. Матченко, А.А. Трещев. – М.–Тула : РААСН; ТулГУ, 2004. – 211 с.
42. Махутов, Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность / Н.А. Махутов. – М. : Машиностроение, 1981. – 272 с.
43. Махутов, Н.А. Сопротивление элементов конструкций хрупкому разрушению / Н.А. Махутов. – М. : Машиностроение, 1973. – 203 с.
44. Металлические конструкции : учебник / Ю.И. Кудишин, Е.И. Беленя, В.С. Игнатъева и др. – М. : Академия, 2008. – 688 с.
45. Mindlin, R.D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid / R.D. Mindlin // *Physics*. – 1936. – V. 7. – P. 195 – 202.
46. Миронов, В.А. Прочность и деформируемость грунтов при сложном напряженном состоянии / В.А. Миронов, А.Н. Гудий, О.Е. Софьин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2007. – № 4. – С. 5 – 9.
47. Мурзенко, Ю.Н. Расчет оснований зданий и сооружений в упругопластической стадии работы с применением ЭВМ : учебное пособие / Ю.Н. Мурзенко. – Л. : Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1989. – 175 с.

48. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел: монография / А. Надаи. – М. : Изд-во «Иностр. лит.», 1954. – Т. 1. – 647 с.; М. : Мир, 1968. – Т. 2. – 863 с.

49. Новожилов, В.В. О пластическом разрыхлении / В.В. Новожилов // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. XXIX. – Вып. 4. – С. 681 – 689.

50. Овчинников, И.И. Механика конструкций с повреждениями: нелинейные модели и методы определения долговечности конструкций, работающих в агрессивных средах / И.И. Овчинников, И.Г. Овчинников // Вестник центрального регионального отделения РААСН. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – С. 120 – 127.

51. Партон, В.З. Механика упругопластического разрушения : монография / В.З. Партон, Е.И. Морозов. – М. : Наука, 1985. – 504 с.

52. Перельмутер, А. В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций : научное издание / А.В. Перельмутер. – М. : АСВ, 2007. – 256 с.

53. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии : монография / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – Киев : Наукова думка, 1976. – 416 с.

54. Поляков, С.В. Сейсмостойкие конструкции зданий : учебное пособие / С.В. Поляков. – М. : Высшая школа, 1983. – 304 с.

55. Потапова, Л.Б. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? : монография / Л.Б. Потапова, В.П. Ярцев. – М. : Машиностроение, 2005. – Т. 1. – 244 с.

56. Poulos, H.G. The behavior of laterally loaded piles / H.G. Poulos. – Proc. ASCE, 1977. – NSMS. – P. 738 – 751.

57. Пригоровский, Н.И. Методы и средства определения полей деформаций и напряжений : справочник / Н.И. Пригоровский. – М. : Машиностроение, 1983. – 248 с.

58. Пшеничкин, А.П. Основы вероятностно-статической теории взаимодействия сооружений с неоднородными грунтовыми основаниями : монография / А.П. Пшеничкин. – Волгоград : ВолгГАСУ, 2010. – 336 с.

59. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций : учебник / Ю.Н. Работнов. – М. : Наука, 1966. – 752 с.

60. Ратнер, С.Б. Физическая механика пластмасс. Как прогнозируют работоспособность? : монография / С.Б. Ратнер, В.П. Ярцев. – М. : Химия, 1992. – 320 с.

61. Рац, М.В. Структурные модели в инженерной геологии : монография / М.В. Рац. – М. : Недра, 1973. – 216 с.

62. Регель, В.Р. Кинетическая природа прочности твердых тел : монография / В.Р. Регель, А.И. Слуцкер, Э.Е. Томашевский. – М. : Наука, 1974. – 560 с.
63. Рекомендации по защите высотных зданий от прогрессирующего обрушения / Москомархитектура. – М. : ГУП НИИЦ, 2006. – 60 с.
64. Реология. Теория и приложения / под ред. Ф. Эйриха. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1962. – 824 с.
65. Ржаницын, А.Р. Строительная механика : учеб. / А.Р. Ржаницын. – М. : Высшая школа, 1982. – 400 с.
66. Рогов, В.А. Методика и практика технических экспериментов : учебное пособие / В.А. Рогов. – М. : Академия, 2005. – 288 с.
67. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике : монография / Л.И. Седов. – М. : Наука, 1977. – 440 с.
68. Соколовский, В.В. Статика сыпучей среды : монография / В.В. Соколовский. – М. : Физматиздат, 1960. – 260 с.
69. Терегулов, И.Г. Сопrotивление материалов и основы теории упругости и пластичности : учебник / И.Г. Терегулов. – М. : Высшая школа, 1984. – 472 с.
70. Терцаги, К. Теория механики грунтов : монография / К. Терцаги. – М. : Госстройиздат, 1961. – 907 с.
71. Тимошенко, С.П. Теория упругости : учебник / С.П. Тимошенко, Джон Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
72. Толоконников, Л.А. Механика деформируемого твердого тела : учебное пособие / Л.А. Толоконников. – М. : Высшая школа, 1979. – 318 с.
73. Трещев, А.А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения : монография / АА. Трещев. – М.–Тула : РААСН; ТулГУ, 2008. – 264 с.
74. Федоровский, В.Г. Несущая способность сыпучего основания ленточного фундамента при действии наклонной внецентренной нагрузки / В.Г. Федоровский // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2005. – № 4. – С. 2 – 7.
75. Филин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела : монография / А.П. Филин. – М. : Наука, 1975. – Т. 1. – 832 с.
76. Флорин, В.А. Основы механики грунтов : монография / В.А. Флорин. – М. : Госстройиздат, 1961. – Т. 2. – 544 с.
77. Фридман, Л.Б. Механические свойства металлов. В 2-х ч. Ч. 1: Деформация и разрушение : учебник / Л.Б. Фридман. – М. : Машиностроение, 1974. – 172 с.
78. Фудзии, Т. Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзии, М. Дзако ; пер. с яп. – М. : Мир, 1982. – 232 с.

79. Цытович, Н.А. Механика грунтов : учебное пособие / Н.А. Цытович. – М. : Высшая школа, 1963. – 636 с.
80. Цытович, Н.А. Основы прикладной геомеханики в строительстве : учебное пособие / Н.А. Цытович, З.Г. Тер-Мартirosян. – М. : Высшая школа, 1981. – 317 с.
81. Черепанов, Г.П. Механика разрушения композиционных материалов : монография / Г.П. Черепанов. – М. : Наука, 1983. – 296 с.
82. Шапиро, Д.М. Теория и расчетные модели оснований и объектов геотехники : монография / Д.М. Шапиро. – Воронеж : ИПУ «Научная книга», 2012. – 164 с.
83. Шаповал, А.В. Теория взаимосвязной фильтрационной консолидации : монография / А.В. Шаповал, В.Г. Шаповал. – Днепропетровск : Пороги, 2009. – 311 с.
84. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений / под ред. Б.С. Касаткина. – Киев : Наукова думка, 1981. – 583 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

---

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>I. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ</b> .....	8
Глава 1. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ .....	8
1.1. Плоские и пространственные задачи .....	8
1.2. Дифференциальные уравнения равновесия .....	34
1.3. Тензоры и инварианты напряжений .....	34
Глава 2. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ .....	44
2.1. Тензоры и инварианты деформаций .....	44
2.2. Общие соотношения между деформациями и перемещениями .....	48
2.3. Уравнения совместности деформаций Сен-Венана .....	53
2.4. Движение сплошной среды .....	54
2.5. Теории деформаций .....	56
Глава 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ .....	59
3.1. Постановка задач и общие теоремы .....	60
3.2. Плоская задача .....	65
3.3. Пространственная задача .....	70
3.4. Моментная теория упругости (В.А. Андреев, 1981 г.) .....	71
Глава 4. АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ .....	73
4.1. Общие уравнения теории упругости анизотропного тела .....	73
4.2. Простейшие случаи упругого равновесия .....	83
4.3. Осесимметричная деформация трансверсально-изотропного тела вращения .....	87
Глава 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ .....	91
5.1. Применение уравнений нелинейной механики грунтов .....	91
5.2. Основы теории пластичности .....	93
5.3. Уравнения пластического состояния .....	98
5.4. Критерии начала пластического деформирования .....	99
5.5. Математическая модель вязкопластического деформирования грунтов .....	104
5.6. Реологические модели .....	105
5.7. Модели основания буронабивной сваи .....	108
<b>II. МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ</b> .....	111
Глава 6. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ И ГРУНТОВ ОСНОВАНИЙ. ВЯЗКОСТЬ .....	111
6.1. Теория ползучести .....	111
6.2. Вязкость .....	118
6.3. Деформации зданий и сооружений во времени .....	121
6.4. Гипотезы прочности материалов .....	121

Глава 7. ТЕОРИЯ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ, КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ .....	129
7.1. Краткие сведения из механики разрушения .....	129
7.2. Теоремы о предельном состоянии .....	137
7.3. Теория предельного равновесия грунтов .....	140
7.4. Усталость материалов и конструкций. Закон суммирования повреждений .....	154
7.5. Общие уравнения состояния движущейся пластической среды в условиях плоской деформации .....	157
Глава 8. ТИПЫ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ. МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ .....	159
8.1. Основные уравнения инженерных задач. Пример постановки задач .....	159
8.2. Пример использования фундаментальных уравнений .....	162
8.3. Типы краевых задач .....	177
8.4. Теория контактных задач .....	187
8.5. Прогноз скорости осадок и напряженно-деформированное состояние неоднородных оснований тяжелых сооружений ...	199
Глава 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СООРУЖЕНИЙ .....	201
9.1. Модели грунтовых оснований .....	201
9.2. Модели зданий и сооружений .....	202
9.3. Характеристики грунтов основания .....	204
9.4. Жесткости оснований и конструктивных систем. Их изменения во времени. Общие сведения. Влияние жесткости на осадку здания .....	218
9.5. Анализ методов расчета грунтовых оснований .....	230
Глава 10. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О ДЕФОРМИРОВАНИИ И РАЗРУШЕНИИ ОСНОВАНИЙ, СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ .....	239
10.1. Особенности деформирования грунтовых оснований .....	240
10.2. Распределение контактных напряжений и напряжений в упругой среде .....	254
10.3. Ползучесть песчаного основания .....	264
10.4. Характер и причины повреждений и разрушений оснований, строительных конструкций, зданий и сооружений .....	268
10.5. Причины повреждений и разрушений конструкций, зданий и сооружений .....	283
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ ИЗ ИСТОРИИ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ .....</b>	<b>300</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>305</b>