

Ю.В. Кулешов, М.И. Потапочкина, А.Ю. Севостьянов, Ю.Ю. Соломатин
НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ (ДКС)

Рассматриваются свободные и вынужденные нелинейные колебания ДКС, состоящей из многослойной пластины, составленной из N трансверсально изотропных слоев (континуальная подсистема, КП) и сосредоточенных масс m_1 , M_1 , соединенных упругим элементом жесткости c_0 (дискретная подсистема, ДП). Масса M_1 жестко закреплена на КП в точке с с координатами x_0, y_0 . Нелинейная динамика ДКС описывается системой дифференциальных уравнений:

$$2\Delta\Delta F = -EhL(W, W); \quad (1)$$

$$D\left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta}\Delta\right)\Delta\Delta\chi + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(1 - \frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi + 2\rho h\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(1 - \frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi = \\ = L(W, F) + q(x, y, t); \quad (2)$$

$$W = \left(1 - \frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi; \quad (3)$$

$$m_1 \ddot{Z} + c_0(Z - W(x_0, y_0)) = 0. \quad (4)$$

Здесь уравнения (1) – (3) записаны на основе уточненной теории пологих многослойных оболочек [1]; Δ – оператор Лапласа; $L(\cdot, \cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x \partial y}$; ε – коэффициент демпфирования. Другие обозначения приведены в монографии [1]. Интенсивность поперечной нагрузки примем в виде $q = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \times \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t + P\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$, где δ – функция Дирака, а P – сила воздействия ДП на КП. Выражения для прогиба шарнирно опертой КП и перемещения массы m_1 выберем в виде:

$$W = h(a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (5)$$

$$Z = Z_{01} \cos \omega t + Z_{02} \sin \omega t. \quad (6)$$

Следуя [2], решение уравнения (1) запишем в форме:

$$F = Eh \frac{f^2}{32} \left(\left(\frac{an}{bm} \right)^2 \cos \frac{2\pi mx}{a} + \left(\frac{bm}{an} \right) \cos \frac{2\pi ny}{b} \right)^2 + \frac{P_x h y^2}{2} + \frac{P_y h x^2}{2}, \quad (7)$$

где P_x, P_y – нормальные напряжения на площадках контакта КП с упругими, не искривляющимися в плоскости КП ребрами. Задавая функцию перемещений выражением

$$\chi = \chi_0(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

и интегрируя уравнение (2) методом Бубнова–Галеркина с учетом соотношения (3), приходим к дифференциальному уравнению Дуффинга на функцию $\zeta = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\zeta}{dt} + \omega_{0, mn}^2 (1 + K\zeta^2)\zeta - A\zeta = \frac{q_0}{\rho h^2} \cos \omega t, \quad (9)$$

где $\omega_{0, mn}^2$ – частота линейных колебаний КП при малых прогибах [1]; K – коэффициент нелинейности КП; A – характеристика ДП:

$$A = \frac{4\omega^2}{ab\rho h} \left(\frac{c_0 m_1}{c_0 - m_1 \omega^2} + M_1 \right) \sin^2 \frac{m\pi x_0}{a} \sin^2 \frac{n\pi y_0}{b}. \quad (10)$$

Применяя к уравнению (9) метод усреднения Ритца [3], приходим к амплитудно-частотному уравнению ДКС:

$$(-\omega^2 + \omega_{0,mn}^2 - A + \frac{3\omega_{0,mn}^2 K c_1^2}{4})^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2 = (\frac{q_0}{\rho h^2 c_1})^2. \quad (11)$$

В нем $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$. В случае $\varepsilon = 0$ уравнение (11) можно записать в виде:

$$c_1^3 + p_1 c_1 + q_1 = 0, \quad (12)$$

где, например, для значений параметров $m = n = 1$; $\mu_1 = m_1 / (\rho abh) = 0,5$; $\mu_2 = M_1 / (\rho abh) = 0,5$; $Q_0 = q_0 / (\rho h^2 \omega_{0,11}^2) = 10$; $v_1^2 = \omega_{0,11}^2 m_1 / c_0 = 1$; $\lambda = 1$; $\mu = 0,25$; $\theta = 0,01$; $\delta = 0,5$; $\eta_3 = 1,25$; коэффициенты P_1, q_1 определяются формулами:

$$p_1 = \frac{4(1 - 6v^2 + 3v^4)}{3K(1 - v^2)}, \quad q_1 = -\frac{40}{K}; \quad \text{здесь } v = \frac{\omega}{\omega_{0,11}}.$$

На рис. 1 изображены амплитудно-частотные (сплошные линии) и скелетные (пунктирные линии) кривые при $K = 2,04208$. На них наложены уровни постоянной диссипации (штрихпунктирные линии), соответствующие уравнению:

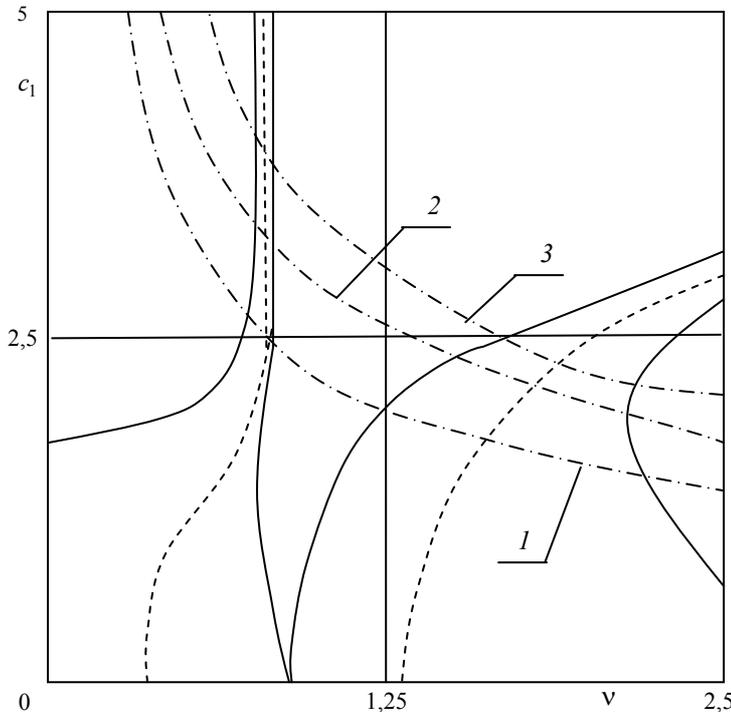


Рис. 1 Амплитудно-частотные характеристики и уровни постоянной диссипации ДКС:

1 - ($\varepsilon_* = 2,2$); 2 - ($\varepsilon_* = 1,45$); 3 - ($\varepsilon_* = 1,1$)

$$c_1 = \frac{Q_0}{2\varepsilon_* v} \quad (13)$$

и определяющие положение резонансных точек [4]. Причем $\varepsilon_* = \varepsilon / \omega_{0,11}$. Из рис. 1 видно, что при присоединении ДП с парциальной частотой (c_0, m_1) – осциллятора, совпадающей с $\omega_{0,11}$ к КП, $\omega_{0,11}$ оказывается внутри интервала нижних собственных частот ДКС. Скелетная кривая КП распадается на кривую, расположенную в области частот, меньших $\omega_{0,11}$ (левый резонанс) и кривую, расположенную в области частот, больших $\omega_{0,11}$ (правый резонанс). АЧХ ДКС на собственной частоте (c_0, m_1) – осциллятора двузначна ($c_1 = \infty, c_1 = 0$), таким образом линейная ДП наделяет нелинейную КП свойством линейных

систем (вертикальная асимптота), а также может работать как инерционный гаситель колебаний при выбеге или при разгоне (в случае срыва). При различных величинах параметра демпфирования максимальные значения резонансных амплитуд на левом резонансе всегда больше, чем на правом. Полученные результаты могут быть использованы при анализе и синтезе нелинейных виброзащитных систем, исследовании динамики несущих поверхностей с присоединенными агрегатами и приборами, динамики стратифицированных сред, в теории автоматического управления нелинейными системами и т.п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
- 2 Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
- 3 Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
- 4 Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. Вынужденные нелинейные колебания многослойных пластин // Вестник ТГТУ. 2002. Т. 8. № 3. С. 483 – 489.

Кафедра «Теоретическая механика»