УДК 519.21

А.Б. Беседин, А.С. Григорьев, В.П. Стражник

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ОПИСЫВАЕМЫХ МОДИФИЦИРОВАННЫМ УРАВНЕНИЕМ ПИРСОНА

Рассматривается методика идентификации законов распределения непрерывной односторонней случайной величины, полученных в результате решения модифицированного уравнения Пирсона.

Известно [1, 2], что большой класс непрерывных плотностей распределения вероятностей (ПРВ) $p(x)$, называемый системой распределений Пирсона, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\,p(x)}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}\,p(x)\,, \tag{1}$$

где a_i и b_i – постоянные параметры распределения.

В зависимости от значений отдельных параметров в качестве решения уравнения (1) получают 12 типов кривых. Эти кривые часто используют для аппроксимации экспериментальных распределений [1]. Однако в настоящее время система плотностей вероятностей, введенная К. Пирсоном еще в 1894 г., является до некоторой степени устаревшей [3]. Это обусловлено в первую очередь тем, что на сегодняшний день очень часто используется на практике целый ряд законов распределений, таких как распределения Релея, Накагами, Вейбулла, обобщенное гамма – распределение, которые нельзя получить в виде частных случаев из системы распределений Пирсона.

В работе [4] было предложено модифицированное уравнение Пирсона, которое позволило получить значительно более широкий класс законов распределений для односторонней случайной величины (СВ), чем система распределений Пирсона [1, 2]. Однако методика идентификации параметров полученных законов распределения не была рассмотрена.

Цель работы – предложить методику идентификации параметров законов распределения непрерывной односторонней СВ, полученных в результате решения модифицированного уравнения Пирсона.

Модификация уравнения Пирсона заключалась в следующем. Во-первых, параметр b_0 в уравнении (1) был заменен на параметр c, характеризующий собой показатель степени переменной x, причем $c > 0$. Во-вторых, предполагалось, что соответствующее распределение $p(x)$ является односторонним, т.е. существует только на положительной части оси x. При этом уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d\,p(x)}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x^c}{b_1 x + b_2 x^{c+1}}\,p(x)\,. \tag{2}$$

Его решениями при соответствующих значениях параметров a_i и b_i являются пять типов распределений [4]:

$$p(x) = \frac{c\,x^{\alpha c - 1}}{B(\alpha, \nu)\chi^{\alpha c}}\left(1 - \frac{x^c}{\chi^c}\right)^{\nu - 1}, \quad 0 < x < \chi; \tag{3}$$

$$p(x) = \frac{c\,\beta^{\alpha c} x^{\alpha c - 1}}{\Gamma(\alpha)}\exp\left(-\beta^c x^c\right), \quad 0 < x < \infty; \tag{4}$$

$$p(x) = \frac{c\,\lambda^{\nu c}\,x^{\alpha c - 1}}{B(\alpha, \nu)\left(\lambda^c + x^c\right)^{\alpha + \nu}}, \; 0 < x < \infty; \tag{5}$$

$$p(x) = \frac{c\,\beta^{\alpha c}}{\Gamma(\alpha)\,x^{\alpha c + 1}}\exp\left(-\frac{\beta^c}{x^c}\right), \; 0 < x < \infty; \tag{6}$$

$$p(x) = \frac{c\,\chi^{\alpha c}}{B(\alpha, \nu)\,x^{\alpha c + 1}}\left(1 - \frac{\chi^c}{x^c}\right)^{\nu - 1}, \; \chi < x < \infty, \tag{7}$$

где $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $c > 0$ – параметры формы; $\chi > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$ – параметры масштаба; $B(a, b)$ – бета-функция; $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

При $\nu \to \infty$ распределение (4) является предельным распределением для (3) и (5), а (6) – для (7). В свою очередь, распределения (4) и (6) преобразуются в логарифмический нормальный закон при $c \to 0$. Если $c \to \infty$, то (4) преобразуется в степенной закон, являющийся частным случаем (3) при $c = 1$ и $\nu = 1$. Распределение (6) при $c \to 0$ преобразуется в закон Парето, который является частным случаем (7) при $c = 1$ и $\nu = 1$.

Используя общие свойства плотностей вероятностей, установим правила определения параметров a_1, a_0, b_2 и b_1, входящих в уравнение (2). Для этого запишем уравнение (2) в следующем виде

$$x^{cn}\left(b_1 x + b_2 x^{c+1}\right)dp(x)/dx = x^{cn}\left(a_1 x^c + a_0\right)p(x). \tag{8}$$

Пусть допустимые значения непрерывной СВ ξ с ПРВ $p(x)$ заключены в интервале (l_1, l_2). Проинтегрируем левую часть равенства (8) по частям. Считая, что интегралы существуют, получим

$$\left\{x^{cn}\left[b_1 x + b_2 x^{c+1}\right]p(x)\right\}_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2}\left[(cn+1)b_1 + (cn+c+1)b_2 x^c\right]x^{cn}p(x)\,dx =$$
$$= \int_{l_1}^{l_2} x^{cn}\left(a_1 x^c + a_0\right)p(x)\,dx.$$

Выражение в фигурных скобках обращается в нуль на верхней и нижней границах интервала интегрирования. Тогда, используя определение начальных моментов для непрерывной СВ, имеем

$$\left[a_0 + (cn+1)b_1\right]m_{cn} = -\left[a_1 + (cn+c+1)b_2\right]m_{c(n+1)}, \tag{9}$$

где $m_s = \left\langle x^s \right\rangle$ – начальный момент s-го порядка, в том числе и дробного.

Уравнение (9) позволяет получить рекуррентные соотношения для определения моментов более высокого порядка по моментам более низкого порядка. Последовательно полагая в (9) $n = 0, 1, 2, 3$ и учитывая, что $m_0 = 1$, получим:

$$\begin{aligned}
&a_0 + b_1 = -\left[a_1 + (c+1)b_2\right]m_c;\\
&\left[a_0 + (c+1)b_1\right]m_c = -\left[a_1 + (2c+1)b_2\right]m_{2c};\\
&\left[a_0 + (2c+1)b_1\right]m_{2c} = -\left[a_1 + (3c+1)b_2\right]m_{3c};\\
&\left[a_0 + (3c+1)b_1\right]m_{3c} = -\left[a_1 + (4c+1)b_2\right]m_{4c}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Из решения системы уравнений (10) следует, что параметры a_i и b_i распределений (3) – (7) определяются выражениями:

$$\begin{gathered}
b_2 = 0{,}5(k_2 - 1); \quad b_1 = (1 + k_2)m_c(1 - k_3)/2k_1;\\
a_1 = -(3c+1)b_2 - c; \quad a_0 = c\,k_2 m_c - b_1,
\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$k_1 = \frac{m_c^2}{m_{2c}}; \qquad k_2 = \frac{m_c m_{3c} - m_{2c}^2}{m_{2c}\left(m_{2c} - m_c^2\right)}; \qquad k_3 = \frac{2k_1k_2}{1 + k_2}. \tag{12}$$

Из решения системы уравнений (10) также следует важное свойство моментов, присущее распределениям (3) – (7) и представленное в виде равенства

$$\frac{4m_{3c}}{m_{3c} - m_c m_{2c}} - \frac{3m_{4c}}{m_{4c} - m_c m_{3c}} = \frac{m_{2c}}{m_{2c} - m_c^2}. \tag{13}$$

Свойство (13) можно использовать для определения параметра c.

Топографическую классификацию распределений (3) – (7) удобно производить с помощью коэффициентов k_1 и k_2, а также вспомогательного коэффициента k_3 (рис. 1). Номера кривых (областей существования) на рис. 1 по порядку соответствуют распределениям (3) – (7). Для кривой (4) справедливо равенство $k_3 = 1$, для области существования (3) – неравенство $0 < k_3 < 1$, а для области существования (5) – неравенство $k_3 > 1$.

Таким образом, разработан метод идентификации законов распределения односторонней непрерывной СВ с помощью коэффициентов k_1 и k_2, а также вспомогательного коэффициента k_3.

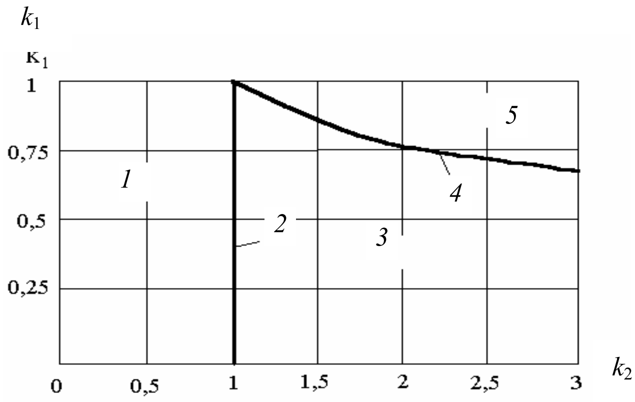

Рис. 1 Диаграмма законов распределения односторонней непрерывной СВ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.

2 Кендалл М., Стюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.

3 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 2. 752 с.

4 Карпов И.Г. Модификация уравнения Пирсона для односторонних законов распределения непрерывных случайных величин // Радиотехника, 1999. № 3. С. 60 – 65.

КАФЕДРА "КОНСТРУИРОВАНИЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ И
микропроцессорных систем"