Раздел I

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ И ПРОИЗВОДСТВАМИ

I. METHODS AND ALGORITHMS OF PRODUCTION CONTROL

УДК 681.5.015.24

РАСШИРЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

С.В. Артемова, А.Н. Грибков, А.Е. Ерышов, М.А. Артемова

Кафедра «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем», ТГТУ

Ключевые слова и фразы: «белый шум»; оптимальное управление; синтезирующие переменные; стратегии управления.

Аннотация: Рассматриваются вопросы анализа оптимального управления с учетом действующих на объект шумов. Используется математический аппарат принципа максимума и метода синтезирующих переменных.

Анализ оптимального управления (**ОУ**) динамическими объектами охватывает широкий круг задач, связанных с вопросами существования решения, устойчивости, определения возможных видов функций оптимального управления и др. Множество работ авторов Е.П. Попова, А.М. Летова, Л.С. Понтрягина, Р. Беллмана, А.Д. Александрова и др. посвящены их решению. Важной задачей исследования является анализ ОУ с учетом действующих на объект возмущений. Термин «возмущение» относится к особой категории входных сигналов системы, которые точно заранее не известны, т.е. представляют собой неуправляемые входные сигналы. Типичными примерами возмущений в системах управления являются: флуктуации нагрузки расхода веществ в химико-технологических процессах; порывы ветра, восходящие потоки и другие неопределенные аэродинамические нагрузки на самолеты, ракеты, и т.п.; трение, смещение центра тяжести, эксцентриситет тяги, дрейф усилителя и другие неопределенные эффекты смещения в механических и электрических системах. Возмущения, которые встречаются в реальных системах управления можно отнести к возмущениям типа шум. Примерами шумовых возмущений являются фоновый шум в радиотехнических системах, шум щеток в электродвигателях, турбулентность жидкости и т.д. [1]. Работы [2 – 4] посвященные исследованиям в области стохастической устойчивости, управления и теории фильтрации также опираются на возмущения типа шум.

Различают шумы «белые» и «цветные». Понятие «белый шум» является математической абстракцией. Тем не менее, реальные сигналы с конечным спектром часто можно приближенно рассматривать как белый шум. Это упрощение правомерно в тех случаях, когда спектр сигнала значительно шире полосы пропускания системы, на которую действует сигнал. Наиболее часто рассматривается гауссовский «белый шум» [5 – 9], имеющий нормальное (гауссовское) распределение и нулевое математическое ожидание.

Для случайных сигналов, действующих в реальных физических системах, может существовать корреляция между предыдущими и последующими значениями, поэтому на практике приходится иметь дело не с белыми, а с цветными шумами.

Возмущения являются важным фактором в задаче построения системы управления, поскольку они обычно приводят к нежелательным эффектам в поведении управляемых объектов, поэтому их желательно учитывать на стадии анализа задач оптимального управления.

Сформулируем математически постановку задачи оптимального управления объектом, на который действует возмущение по каналу управления, представляющее собой случайный процесс, типа шум. Пусть модель динамики объекта представлена в виде

$$\dot{z} = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{C}w(t), \tag{1}$$

требуется перевести объект за фиксированный временной интервал $[t_0, t_к]$ из начального состояния в конечную область

$$z(t_0) = z^0, \quad z(t_к) \in \chi^к, \tag{2}$$

при ограничении на управляющее воздействие и шум

$$\forall \ t \in [t_0, t_к] \ , \quad u(t) \in [u_н, u_в], \ w(t) \in [w_н, w_в], \tag{3}$$

с минимумом функционала

$$J_э = \int_{t_0}^{t_к} u^2(t)dt \to \min . \tag{4}$$

Здесь $z(t)$ – фазовые координаты; $u(t)$ – управляющее воздействие; $w(t)$ – шум в канале управления; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – матрицы параметров модели объекта; $J_э$ – минимизируемый функционал (затраты энергии); $u_н, u_в, w_н, w_в$ – границы изменения управляющего воздействия и шума; $z^0, \chi^к$ – начальное значение фазовой координаты и конечная область, в которую требуется перевести объект; $[t_0,\ t_к]$ – временной интервал управления.

Массив исходных данных (массив реквизитов) для численного решения задачи имеет вид

$$\Re = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ u_н,\ u_в,\ z^0, \chi^к,\ t_0,\ t_к, w_н, w_в). \tag{5}$$

Для выполнения расширенного анализа будем использовать математический аппарат принципа максимума и метода синтезирующих переменных.

Анализ оптимального управления с использованием синтезирующих переменных рассматривался в ряде работ авторов Ю.Л. Муромцева и Д.Ю. Муромцева.

Практическое значение получения синтезирующих переменных состоит в том, что без определения вида функции оптимального управления можно непосредственно по значениям массива реквизитов проверить существует ли решение задачи (1) – (3) для функционала (4) или нет. Метод синтезирующих переменных предполагает введение некоторого синтезирующего вектора, размерность которого значительно меньше размерности массива реквизитов задачи оптимального управления (**ЗОУ**), который однозначно определяет вид и параметры функции оптимального управления.

Выбор стратегии управления обусловлен соотношением сигнал-шум. Если интенсивность помехи мала, то в этом случае возможно использование программной стратегии. В остальных случаях применяется позиционная стратегия.

При позиционной стратегии управления в зависимости от массива реквизитов на каждом шаге пересчитываются значения вектора синтезирующих переменных, которые однозначно определяют зону и вид функции управления. В случае работы в условия помех по каналам управления и измерения вектор синтезирующих переменных может выходить за границы первоначально выбранной зоны (при этом синтезирующая функция меняет вид), или за границы области существования решения ЗОУ. Поэтому на стадии анализа необходимо учитывать наличие помех.

Определение 1. Назовем анализ оптимального управления объектом с учетом шумовых возмущений расширенным анализом.

Можно выделить следующие этапы проведения расширенного анализа оптимального управления.

1. Вводится базовая (нормированная) задача оптимального управления, учитывающая наличие шумовых возмущений, действующих на объект.

2. Определяются синтезирующие переменные с учетом возмущений.

3. Находятся условия существования решения ЗОУ.

4. Определяются возможные виды синтезирующих функций.

5. Находятся соотношения для границ областей, соответствующих различным видам синтезирующих функций.

6. Разрабатываются алгоритмы определения вида синтезирующей функции и расчета ее параметров.

Рассмотрим расширенный анализ на примере объекта первого порядка.

Большое значение для оперативного решения ЗОУ имеет установление соответствия между функцией оптимального управления и массивом исходных данных. С целью установления этого соответствия вводится базовая или нормированная задача.

Определение 2. Базовой (нормированной) задачей называется задача, в которой постоянны: временной интервал, область допустимых управлений и возмущений.

Осуществим переход от реальной к нормированной задаче посредством следующего нормирования для: временного интервала – $t \in [t_0,\ t_к] \ \to T \in [0,\ 2]$; интервала управления – $u(t) \in [u_н,\ u_в] \ \to U(T) \in [-1,\ 1]$ и действующего возмущения $w(t) \in [w_н,\ w_в] \ \to W(T) \in [-1,\ 1]$.

Таким образом, задача (1) – (4) для объекта первого порядка будет иметь следующий вид

$$\dot{z} = az(t) + bu(t) + cw(t) \to \dot{Z} = AZ(T) + BU(T) + CW(T). \tag{6}$$

Здесь

$$A = a\frac{\Delta t}{2},\ B = b\frac{\Delta u}{2}\frac{\Delta t}{2},\ C = c\frac{\Delta w}{2}\frac{\Delta t}{2},\ \Delta t = t_к - t_0,\ \Delta u = u_в - u_н,\ \Delta w = w_в - w_н.$$

Утверждение 1. Переход от исходной задачи к нормированной будем осуществлять по следующим формулам для: времени $T = 2\dfrac{t - t_0}{t_к - t_0}$; управления $U = \dfrac{u - u_0}{u_в - u_0}$; $u_0 = \dfrac{u_н + u_в}{2}$; возмущающего воздействия $W = \dfrac{w - w_0}{w_в - w_0}$; $w_0 = \dfrac{w_н + w_в}{2}$, а обратно от нормированной задачи к исходной по формулам: для времени $t = \dfrac{t_к - t_0}{2}T + t_0$; управления $u = U(u_в - u_0) + u_0$; возмущения $w = W(w_в - w_0) + w_0$.

Для определения синтезирующих переменных необходимо решить задачу Коши относительно уравнения (6). Ее решение имеет следующий вид

$$Z(t_к) = e^{2A}Z(t_0) + \int_0^2 e^{A(2-S)}\left[BU(S) + CW(S)\right]\ dS. \tag{7}$$

Утверждение 2. Синтезирующие переменные:

$$A = a\frac{\Delta t}{2},$$

$$L = \frac{Z(t_{\text{К}}) - Z(t_0)e^{2A}}{B} = \int_0^2 e^{A(2-S)} U(S) \ dS + \frac{C}{B}\int_0^2 e^{A(2-S)} W(S) \ dS, \qquad (8)$$

задачи (1) – (4) рассчитываются по массиву реквизитов (5), однозначно определяют положение точки на синтезирующей плоскости, а также вид и параметры функции оптимального управления в случае существования решения.

Подставляя в (8) нормированные граничные значения управляющего воздействия и помехи можно получить границы области существования решения ЗОУ $A < 0$.

Утверждение 3. При наличии помехи по каналу управления внешние границы превращаются в «коридоры», ширина которых зависит от интенсивности шума:

$$u(t) = u_{\text{Н}},\ w(t) = w_{\text{Н}}: \quad L_{\min}^{(-)}(A) = -\frac{e^{2A} - 1}{A}\left(1 + \frac{C}{B}\right),$$

$$u(t) = u_{\text{Н}},\ w(t) = w_{\text{В}}: \quad L_{\max}^{(-)}(A) = -\frac{e^{2A} - 1}{A}\left(1 - \frac{C}{B}\right),$$

$$u(t) = u_{\text{В}},\ w(t) = w_{\text{Н}}: \quad L_{\min}^{(+)}(A) = \frac{e^{2A} - 1}{A}\left(1 - \frac{C}{B}\right),$$

$$u(t) = u_{\text{В}},\ w(t) = w_{\text{В}}: \quad L_{\max}^{(+)}(A) = \frac{e^{2A} - 1}{A}\left(1 + \frac{C}{B}\right).$$

Графическое представление области существование решения приведено на рис. 1.

В области существования решений для позиционной стратегии управления можно выделить зоны $k_i, i = \overline{1,3}$, где:

$$k_1: \quad \frac{\left(1 - e^{2a(t_{\text{к}} - t)}\right)}{a(t_{\text{к}} - t)} \le L \le \frac{\left(e^{2a(t_{\text{к}} - t)} - 1\right)}{a(t_{\text{к}} - t)}; \qquad k_2: \quad \frac{\left(e^{2a(t_{\text{к}} - t)} - 1\right)}{a(t_{\text{к}} - t)} \le L \le \frac{2\left(e^{a(t_{\text{к}} - t)} - 1\right)}{a(t_{\text{к}} - t)};$$

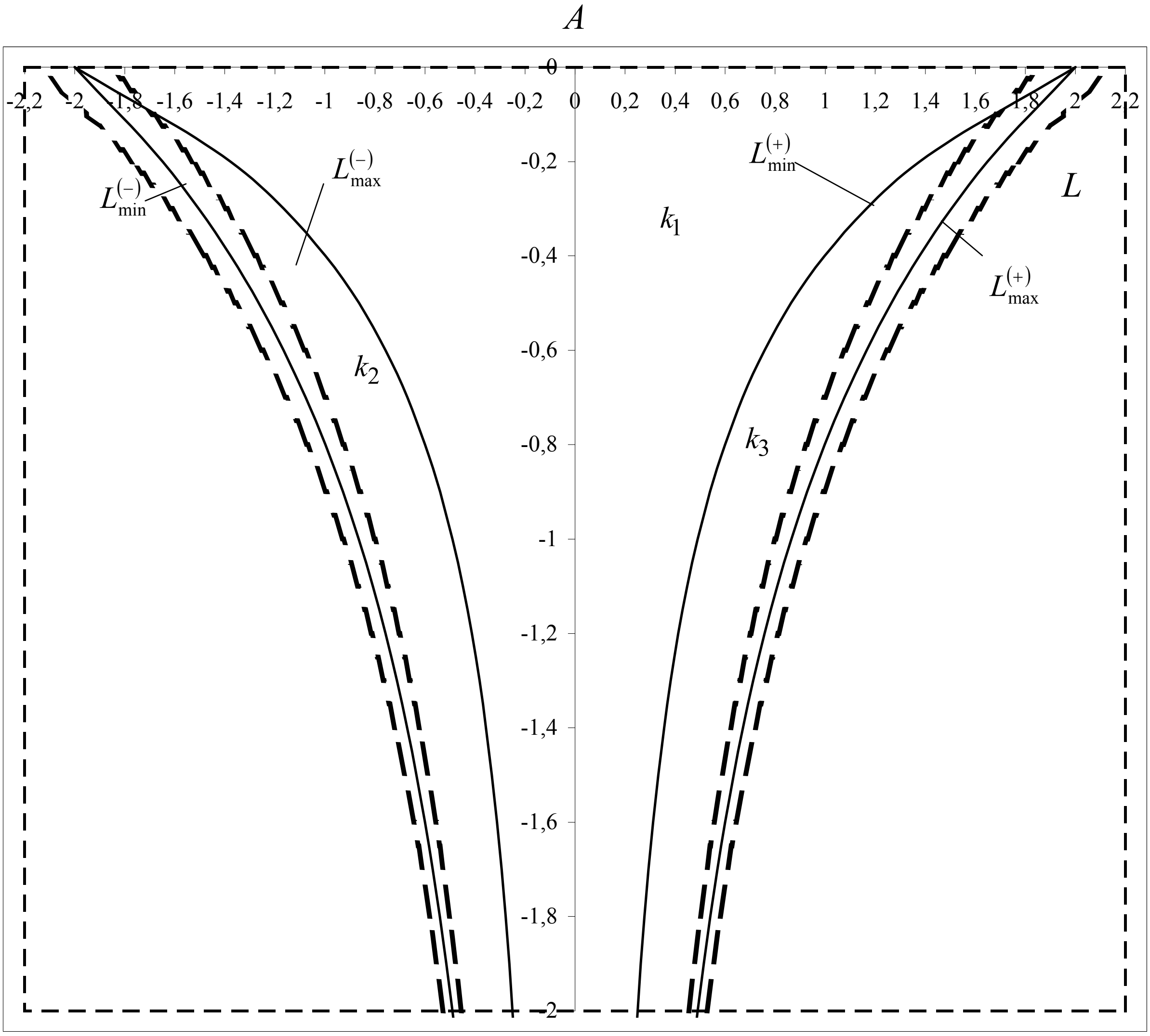

Рис. 1. Область существования решения ЗОУ

$$k_3: \quad \frac{2\left(1-e^{a(t_к-t)}\right)}{a(t_к-t)} \le L \le \frac{\left(1-e^{2a(t_к-t)}\right)}{a(t_к-t)}.$$

Расчет текущего значения вектора синтезирующих переменных производится по следующим формулам:

$$L(z,t,\Re) = 4\frac{z_к - xe^{a(t_к-t)}}{b(u_в-u_н)(t_к-t)} - 2\frac{(u_в+u_н)\left(e^{a(t_к-t)}-1\right)}{a((u_в-u_н)(t_к-t))}, \qquad A = \frac{a(t_к-t)}{2}.$$

Утверждение 4. Существование решения ЗОУ, при наличие помехи, зависит от места расположения точки с координатами (A, L) в области существования решения если:

1. $L \notin \left[L_{\min}^{(-)},\ L_{\max}^{(+)}\right]$ – решение ЗОУ не существует;

2. $L \in \left[L_{\min}^{(-)},\ L_{\max}^{(-)} \right]$ или $L \in \left[L_{\min}^{(+)},\ L_{\max}^{(+)} \right]$ – возможность существования решения ЗОУ определяется характером влияния помех в канале управления;

3. $L \in \left[L_{\max}^{(-)},\ L_{\min}^{(+)} \right]$ – решение ЗОУ существует.

Здесь управляющие воздействия, соответствующие зонам k_i рассчитываются по следующим формулам:

$$u_1^*(t) = \varphi_1(z,t,\Re) = u_0 + \frac{a(u_{\text{В}} - u_{\text{Н}})(t_{\text{К}} - t)}{2\left(e^{a(t_{\text{к}}-t)} - e^{-a(t_{\text{к}}-t)}\right)} L(z,t,\Re),$$

для $u^*(t) \in [u_0, u_{\text{В}}]$,

$$u_2^*(t) = \varphi_2(x,t,\Re) = u_0 + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\left[\frac{a(t_{\text{К}} - t)}{2} L(x,t,\Re) + 1\right] e^{-a(t_{\text{к}}-t)} \pm}{\pm\sqrt{\left(\frac{a(t_{\text{К}} - t)}{2} L(x,t,\Re) + 1\right)^2 e^{-2a(t_{\text{к}}-t)} - 1}} \right\},$$

для $u^*(t) \in [u_{\text{Н}}, u_0]$,

$$u_3^*(t) = \varphi_3(z,t,\Re) = u_0 + \frac{(u_{\text{В}} - u_{\text{Н}})}{2}\left\{ \frac{\left[\frac{a(t_{\text{К}} - t)}{2} L(z,t,\Re) - 1\right] e^{-a(t_{\text{к}}-t)} \pm}{\pm\sqrt{\left(\frac{a(t_{\text{К}} - t)}{2} L(z,t,\Re) - 1\right)^2 e^{-2a(t_{\text{к}}-t)} - 1}} \right\},$$

где $u_0 = \dfrac{u_{\text{В}} + u_{\text{Н}}}{2}$.

Предложенный расширенный полный анализ позволяет учесть влияние шума, при решении задачи оптимального управления.

Список литературы

1. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / под ред. К.Т. Леондеса. – М. : Мир, 1980. – 407 с.

2. Медич, Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.

3. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо-Ю-Ши. – М.: Мир, 1972. – 544 с.

4. Острем, К.. Введение в стохастическую теорию управления / К. Острем. – М. : Мир, 1973.

5. Параев, Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации / Ю.И. Параев. – М. : Сов. Радио, 1976. – 184 с.

6. Балакришнан, А. Теория фильтрации Калмана / А. Балакришнан. – М. : Мир, 1988. – 168 с.

7. Черноусько, Ф.Л. Оптимальное управление при случайных возмущениях / Ф.Л. Черноусько, В.Б. Калмановский. – М. : Наука, 1978. – 352 с.

8. Браммер, К. Фильтр Калмана-Бьюси / К. Браммер, Г. Зиффинг. – М. : Наука, 1982.

9. Ляшко, И.И. Фильтрация шумов / И.И. Ляшко, В.П. Диденко, О.Е. Цитрицкий. – Киев : Наук. думка, 1979. – 232 с.

THE EXPANDED ANALYSIS OF OPTIMUM CONTROL PROBLEMS

C.V. Artemova, A.N. Gribkov, A.E. Erishov, M.A. Artемова

Key words and phrases: «white noise»; the optimum control; synthesizing variables; strategy of control.

Abstract: Considered questions of the analysis of optimum control in view of noise acting on object. Used the mathematical device of a principle of a maximum and a method of synthesizing variables.