

УДК 536.24:517.968

## ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

А.А. Чуриков, Г.В. Шишкина

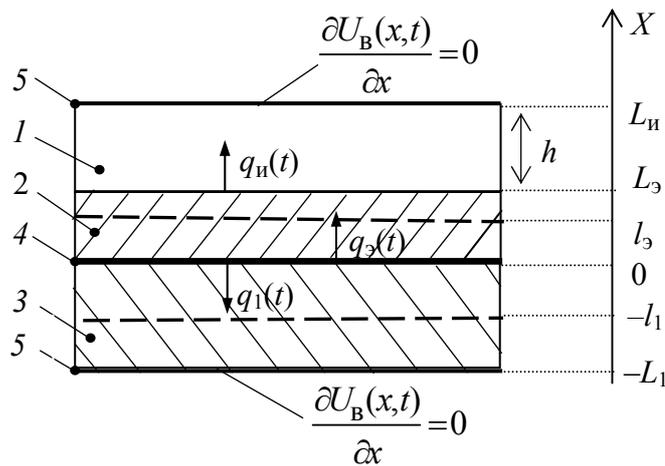
*Кафедра «Автоматизированные системы и приборы», ТГТУ*

**Ключевые слова и фразы:** временные параметры; геометрические параметры; измерительное устройство; интегральные характеристики; неоднородные твердые материалы; плоский образец; преобразования Лапласа.

**Аннотация:** Показан метод определения теплофизических свойств плоских образцов неоднородных твердых материалов, в котором измерительное устройство содержит два эталонных плоских образца с датчиками температуры внутри них, а на внешних границах этого устройства поддерживаются условия тепловой защиты. Для обеспечения минимальной погрешности определения теплофизических свойств разработаны методики определения оптимальных геометрических и временных параметров теплофизического эксперимента.

---

Измерительное устройство для определения теплофизических свойств (ТФС) неоднородных твердых материалов представляет собой трехслойную систему: пластина из исследуемого материала контактирует с одной стороны с пакетом из двух эталонных материалов (рис. 1). Между эталонными пластинами находится плоский электронагреватель. В обоих эталонных образцах на определенных расстояниях от нагревателя расположены датчики температуры. Таким образом, в данном измерительном устройстве отсутствует прямой контакт исследуемого материала с датчиками температуры и нагревателем, что позволяет исследовать и химически агрессивные, и влагонасыщенные материалы. На внешних границах устройства используются специальные блоки, поддерживающие условия тепловой защиты, характеризующиеся соотношением  $\frac{\partial U_B(x,t)}{\partial x} = 0$ .



**Рис. 1. Физическая модель системы контактирующих тел:**

- 1 – исследуемый образец ( $\lambda_{\text{н}}, a_{\text{н}}$ ); 2 – верхний эталонный образец ( $\lambda_{\text{э}}, a_{\text{э}}$ );  
 3 – нижний эталонный образец ( $\lambda_1, a_1$ ); 4 – источник тепла мощностью  $Q$ ;  
 5 – блок тепловой защиты;  $l_3 - l_1$  – плоскости расположения датчиков температуры;

$$h = L_{\text{н}} - L_{\text{э}} - \text{толщина исследуемого образца}$$

Из решения системы краевых задач теплопроводности для трех контактирующих пластин в области интегральных преобразований Лапласа были найдены расчетные зависимости для определения теплопроводности  $\lambda_{\text{н}}$  и температуропроводности  $a_{\text{н}}$  исследуемого материала, использующие интегральные преобразования температуры и теплового потока [1], [2]

$$\lambda_{\text{н}} = \lambda_{\text{э}} \frac{\sqrt{g_{\text{э}}}}{\sqrt{g_{\text{н}}}} \cdot \frac{h}{L_{\text{э}}} \cdot \frac{\text{th}(\sqrt{g_{\text{н}}})\text{th}(\sqrt{g_{\text{э}}})}{\left(q_{\text{э}}^*(p)/q_{\text{н}}^*(p)\text{ch}(\sqrt{g_{\text{э}}}) - 1\right)}; \quad (1)$$

$$a_{\text{н}} = \frac{ph^2}{g_{\text{н}}}, \quad (2)$$

где  $\lambda_{\text{э}}, L_{\text{э}}$  – теплопроводность и толщина верхнего эталонного образца;  $p$  – параметр преобразования Лапласа;  $q_{\text{э}}^*(p), q_{\text{н}}^*(p)$  – временные интегральные характеристики (ВИХ) тепловых потоков в верхнем эталонном и исследуемом образцах соответственно;  $g$  – безразмерный параметр, некоторый аналог критерия Фурье,

$$g_{\text{н}} = \frac{ph^2}{a_{\text{н}}}, \quad g_{\text{э}} = \frac{pL_{\text{э}}^2}{a_{\text{э}}}.$$

Величина неявно выраженного параметра  $g_{\text{и}}$  находится из трансцендентного уравнения

$$\Phi(g_{\text{и}}, k) \equiv \frac{\text{cth}(\sqrt{g_{\text{и}}})}{\text{cth}(\sqrt{kg_{\text{и}}})} = \frac{\left[ \frac{q_{\text{э}}^*(p)}{q_{\text{и}}^*(p)\text{ch}(\sqrt{g_{\text{э}}})} - 1 \right]}{\left[ \frac{q_{\text{э}}^*(kp)}{q_{\text{и}}^*(kp)\text{ch}(\sqrt{kg_{\text{э}}})} - 1 \right]} \cdot \frac{\text{cth}(\sqrt{g_{\text{э}}})}{\text{cth}(\sqrt{kg_{\text{э}}})} \equiv \Theta_{\text{и}}(p, k), \quad (3)$$

для которого правая часть  $\Theta_{\text{и}}(p, k)$  находится по экспериментально рассчитанным значениям  $q_{\text{э}}^*(p)$ ,  $q_{\text{э}}^*(kp)$ ,  $q_{\text{и}}^*(p)$ ,  $q_{\text{и}}^*(kp)$ , а также заранее определенной

функции  $\Phi(g_{\text{э}}, k) = \frac{\text{cth}(\sqrt{g_{\text{э}}})}{\text{cth}(\sqrt{kg_{\text{э}}})}$  для известных значений  $p$ ,  $k$  и  $a_{\text{э}}$ .

ВИХ тепловых потоков  $q_{\text{э}}^*(p)$  и  $q_{\text{и}}^*(p)$  определяются по формулам:

$$q_{\text{э}}^*(p) = \frac{Q}{p} - \frac{U_1^*(-l_1, p)\text{sh}(\sqrt{g_1})}{\text{ch}(m_1\sqrt{g_1})} \cdot \frac{\lambda_1\sqrt{g_1}}{L_1}, \quad (4)$$

$$q_{\text{и}}^*(p) = \frac{q_{\text{э}}^*(p)\text{ch}(m_{\text{э}}\sqrt{g_{\text{э}}}) - U_{\text{э}}^*(l_{\text{э}}, p) \frac{\lambda_{\text{э}}\sqrt{g_{\text{э}}}}{L_{\text{э}}}\text{sh}(\sqrt{g_{\text{э}}})}{\text{ch}(n_{\text{э}}\sqrt{g_{\text{э}}})}, \quad (5)$$

где  $m_{\text{э}} = \frac{L_{\text{э}} - l_{\text{э}}}{L_{\text{э}}}$ ,  $n_{\text{э}} = \frac{l_{\text{э}}}{L_{\text{э}}}$ ,  $m_1 = \frac{L_1 - l_1}{L_1}$  – геометрические параметры эталонных

образцов;  $U_1^*(-l_1, p)$  – ВИХ измеряемой температуры нижнего эталонного образца в плоскости  $x = -l_1$ ;  $U_{\text{э}}^*(l_{\text{э}}, p)$  – ВИХ измеряемой температуры верхнего эталонного образца в плоскости  $x = l_{\text{э}}$ .

Покажем основу методики определения оптимальных геометрических и временных параметров эксперимента.

Предположим, что измеряется температура на границе  $x = L_{\text{э}}$ . Рассчитав по экспериментально измеренным данным ВИХ температуры и теплового потока для двух значений  $p_1 = p$  и  $p_2 = kp$ , находим величину функции  $\Theta_{\text{и}}(p, k)$  и соответ-

ствующее ей значение функции  $\Phi(g_{\text{и}}, k)$ , что позволяет определить значение параметра  $g_{\text{и}}$

$$\Phi(g_{\text{и}}, k) \equiv \frac{\text{cth}(\sqrt{g_{\text{и}}})}{\text{cth}(\sqrt{kg_{\text{и}}})} = \frac{U_{\text{и}}^*(L_{\text{э}}, p)q_{\text{и}}^*(kp)}{U_{\text{и}}^*(L_{\text{э}}, kp)q_{\text{и}}^*(p)\sqrt{k}} \equiv \Theta_{\text{и}}(p, k).$$

Из этой зависимости можно найти формулу абсолютной погрешности определения параметра  $g_{\text{и}}$ , применив известный подход последовательного логарифмирования и дифференцирования

$$\Delta g_{\text{и}} \leq \eta(g_{\text{и}}, k) \frac{\Delta U_{\text{max}}}{U_{\text{ст}}}, \quad (6)$$

где  $\Delta U_{\text{max}}$  – максимальная абсолютная погрешность измерения температуры, определяемая возможностями измерительной техники;  $U_{\text{ст}}$  – максимальная стационарная температура в плоскости  $x = L_{\text{э}}$ ; функция  $\eta(g_{\text{и}}, k)$  определяется по формуле

$$\eta(g_{\text{и}}, k) = \left| \frac{\sqrt{k} \sqrt{\text{cth}^2(\sqrt{kg_{\text{и}}}) + \text{cth}^2(\sqrt{g_{\text{и}}})k} \sqrt{g_{\text{и}}}}{(\sqrt{k} \text{cth}(\sqrt{g_{\text{и}}}))' \text{cth}(\sqrt{kg_{\text{и}}}) - \sqrt{k} \text{cth}(\sqrt{g_{\text{и}}}) (\text{cth}(\sqrt{kg_{\text{и}}}))'} \right|.$$

Проведем анализ величины тех параметров, которые влияют на погрешность определения коэффициента температуропроводности  $a_{\text{и}}$ . Так как  $a_{\text{и}}$  определяется из уравнения (2), где  $p$  и  $h$  имеют заданные конкретные численные значения, то относительная погрешность  $\delta a_{\text{и}}$  будет определяться с учетом (6)

$$\delta a_{\text{и}} = \frac{|\Delta a_{\text{и}}|}{a_{\text{и}}} = \frac{|\Delta g_{\text{и}}|}{g_{\text{и}}} \quad \text{или} \quad \delta a_{\text{и}} \leq \eta_g(g_{\text{и}}, k) \delta U_{\text{max}},$$

где  $\delta U_{\text{max}} = \frac{\Delta U_{\text{max}}}{U_{\text{max}}}$  – максимальная относительная погрешность измерения температуры;

$$\eta_g(g_{\text{и}}, k) = \eta(g_{\text{и}}, k) \frac{1}{\sqrt{g_{\text{и}}}}. \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) видно, что функция  $\eta_g(g_{\text{и}}, k)$  является базовой характеристикой, которая влияет на величину  $\delta a_{\text{и}}$ . Целью нашей работы является поиск таких условий, при которых  $\delta a_{\text{и}}$  будет наименьшей, а это будет выполняться при минимальном значении целевой функции  $\eta_g(g_{\text{и}}, k)$ .

Задав возможные диапазоны изменения искомым параметров ( $1 < k < N$ ,  $0 < g < \infty$ ), с помощью ЭВМ построим график функции  $\eta_g(g_{\text{и}}, k)$  (рис. 2).

По этому графику можно видеть, что функция  $\eta_g(g_{\text{и}}, k)$  будет иметь минимум при определенных значениях  $g_{\text{и}}$  и  $k$ . Так как эти величины обеспечивают наилучшие условия измерения коэффициента температуропроводности, то назовем эти значения оптимальными и обозначим их  $g_{\text{и опт}}$ ,  $k_{\text{опт}}$ .

Таким образом, из аналитического поиска минимума функции (7) найдены  $g_{\text{и опт}}$  и  $k_{\text{опт}}$ , численные значения которых позволяют определить реальные значения параметров теплофизического эксперимента: геометрические параметры измерительного устройства  $L_{\text{э}}, l_{\text{э}}, L_1, l_1$  и исследуемых образцов  $h$ , длительность эксперимента и конкретные временные моменты измерения температуры и теплового потока (через численные значения параметра интегрирования  $p$  и коэффициента  $k$ ). Это позволяет определять ТФС исследуемого материала с наименьшей методической погрешностью.

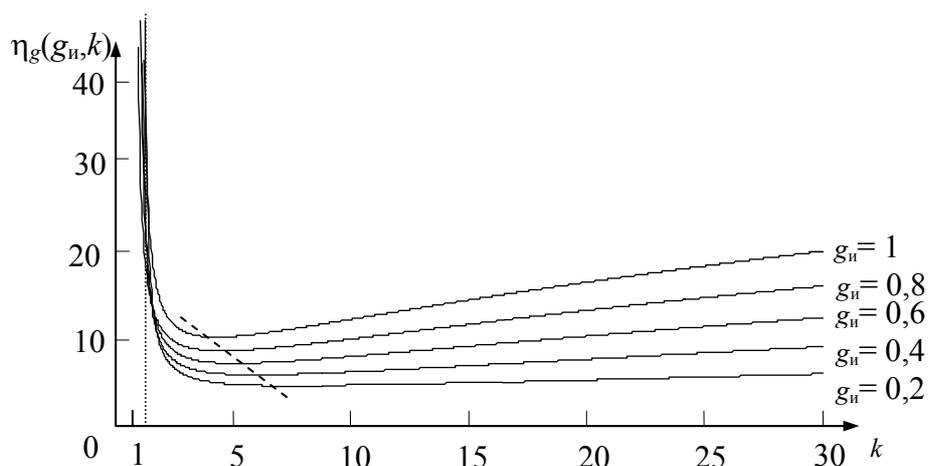


Рис. 2. График целевой функции

Предлагаемая методика была практически реализована при исследовании ТФС различных материалов [2]. Чтобы обеспечить наименьшую погрешность определения ТФС, параметры эксперимента выбираются для заданного диапазона контролируемых ТФС. Были определены следующие численные значения рассматриваемых параметров.

Толщина исследуемых образцов  $h = (3..5) \cdot 10^{-3}$  м; материал верхнего эталонного образца – ситалл ( $a_3 = 7,83 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с,  $\lambda_3 = 1,72$  Вт/(м·К)); материал нижнего эталонного образца – полиметилметакрилат ( $a_1 = 1,1 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с,  $\lambda_1 = 0,179$  Вт/(м·К)). Оптимальные геометрические параметры теплофизического эксперимента для различных диапазонов ТФС неоднородных твердых материалов даны в табл. 1.

Приведенные расчетные зависимости содержат ВИХ  $U^*(x, p)$  и  $q^*(p)$ . Но, как видно, параметр  $p$  произволен и не имеет конкретного численного значения, что говорит о некоторой некорректности решения исходной краевой задачи. Возникает проблема нахождения конкретного численного значения  $p$  такого, которое обеспечит наилучшие условия проведения теплофизического эксперимента. Величина параметра  $p$  определяет длительность эксперимента, точнее его период активного измерения экспериментальной информации.

Таблица 1

### Оптимальные геометрические параметры измерительного устройства

№ п/п	ТФС исследуемых материалов	Оптимальные параметры измерительного устройства и эксперимента				
		$L_3$ , м	$l_3$ , м	$L_1$ , м	$l_1$ , м	$Q$ , Вт
1	$a_{и} = (0,8...3,5) \cdot 10^{-7}$ м <sup>2</sup> /с $\lambda_{и} = (0,05...1,35)$ Вт/(м·К)	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	2,5
2	$a_{и} = (3,5...6,5) \cdot 10^{-7}$ м <sup>2</sup> /с $\lambda_{и} = (1,35...2,65)$ Вт/(м·К)	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$2,15 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$1,12 \cdot 10^{-3}$	15
3	$a_{и} = (6,5...8) \cdot 10^{-7}$ м <sup>2</sup> /с $\lambda_{и} = (2,65...4)$ Вт/(м·К)	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,12 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$0,72 \cdot 10^{-3}$	25

В нашем измерительном устройстве создается тепловое воздействие, которое обеспечивается постоянным во времени тепловым потоком плотностью  $q(t) = q = \text{const}$ , благодаря чему температура в процессе нагрева должна достигать определенного стационарного значения. Даже если существует некоторое непостоянство теплового потока в начальный момент нагрева, то при  $t \gg 0$  значение  $q(t)$  будет стремиться к некоторому установившемуся значению  $q$ , и температура также стремится к установившемуся значению  $U_{\text{ст}}$ . В формуле для расчета ВИХ температуры проанализируем подынтегральную функцию, обозначив ее

$$f(t) = U(t)e^{-pt}, \quad p = \text{const}. \quad (8)$$

Графическая иллюстрация этой функции показана на рис. 3.

Анализ функции  $f(t)$  показывает, что при  $t = 0$ ,  $f(t) = 0$ , а при  $t \rightarrow t_{\text{ст}} - \lim f(t) = 0$ .

Таким образом, функция  $f(t)$  должна иметь определенную точку перегиба, в которой она принимает или максимальное, или минимальное (при охлаждении) значение в некоторый момент времени, принадлежащий интервалу  $0 < t < t_{\text{ст}}$ . Обозначим этот момент времени  $t_1$ .

Момент времени, начиная с которого функция  $f(t)$  практически приблизилась к нулевому значению, обозначим  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ),  $f(t_2) \cong 0$ .

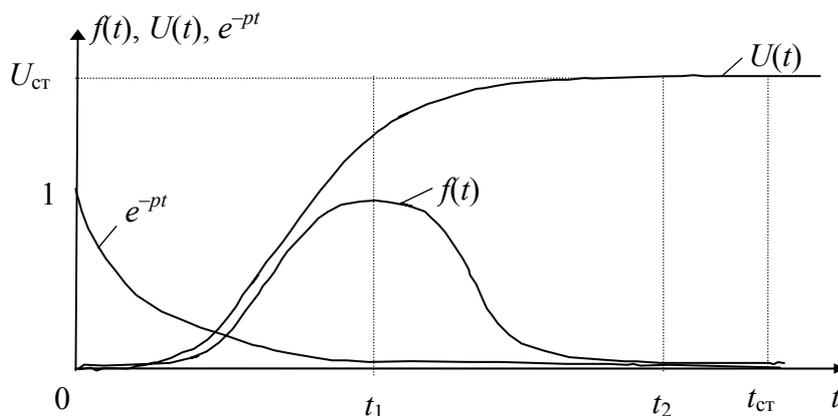


Рис. 3. Графическая иллюстрация функции  $f(t)$

Так как функция  $f(t)$  непрерывна на всем рассматриваемом интервале, то в точках  $t_1$  и  $t_2$  ее первая производная, соответственно, равна или стремится к нулю:  $f'(t_1) = 0$ ,  $f'(t_2) \cong 0$ .

$$f'(t) = -pe^{-pt}U(t) + e^{-pt}U'(t) = 0.$$

Из этого выражения найдем значение параметра интегрирования  $p$ :

$$p = \frac{U'(t)}{U(t)}, \quad \text{где } t = t_2 \quad \text{или} \quad t = t_1.$$

Это показывает, что производная функции  $f(t)$  по времени может быть равна нулю только в определенные моменты времени, один из которых – в начале эксперимента, другой – в конце.

Таким образом, зная или задавая моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , можно рассчитать параметр преобразования Лапласа  $p$  по экспериментально измеренной температуре и вычисленной первой производной температуры.

В расчетных зависимостях для определения ТФС используются два параметра интегрирования  $p_1 = p$ ;  $p_2 = kp$ ,  $k > 1$ , по которым находятся два значения ВИХ температуры

$$U^*(p_1) = \int_0^{\infty} U(t)e^{-p_1 t} dt, \quad (9)$$

$$U^*(p_2) = \int_0^{\infty} U(t)e^{-p_2 t} dt. \quad (10)$$

На рис. 4 показан вид подынтегральных функций  $f(p, t)$  и  $f(kp, t)$ . Момент времени, в который функция  $f(p, t)$  принимает максимальное значение, обозначим  $t_3$ .

При  $p > 0$ ,  $k > 1$  очевидно, что если  $f'(t) = 0$ , то

$$\frac{U'(t_1)}{U(t_1)} = p_2 = kp, \quad (11)$$

$$\frac{U'(t_2)}{U(t_2)} = p_1 = p. \quad (12)$$

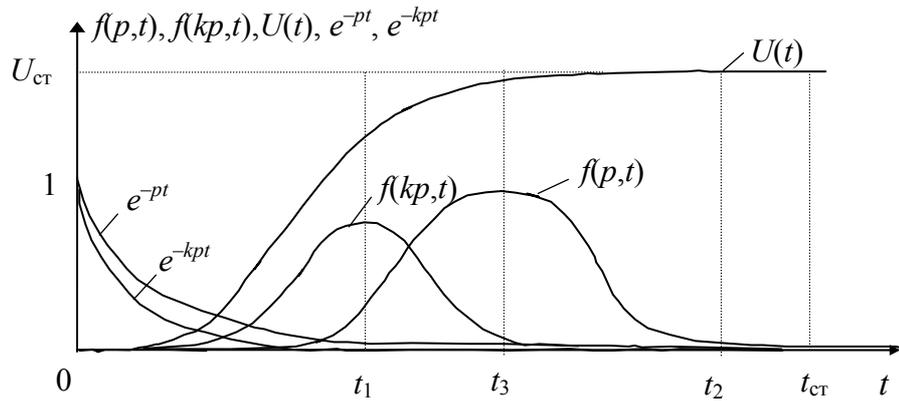


Рис. 4. Вид подынтегральных функций  $f(p, t)$  и  $f(kp, t)$

Таким образом, можно сделать важный вывод: чтобы точно рассчитать значения ВИХ, а для этого определить величину параметра интегрирования  $p$ , не обязательно ждать естественный момент  $t \rightarrow t_{ст}$  нагрева, когда температура достигнет стационарного значения, или когда скорость изменения температуры  $U'(t) = 10^{-4} \dots 10^{-5}$  [3].

Можно задать конечное значение  $t_2 > t_1$  и для него найти из реально идущего процесса нагрева  $\frac{U'(t_2)}{U(t_2)} = p_1 = p$ ,  $\frac{U'(t_1)}{U(t_1)} = p_2 = kp$ , при этом  $t_2 = kt_1$ .

Зная  $p_1$  и  $p_2$ , можно найти значение коэффициента  $k$

$$k = \frac{p_2}{p_1} = \frac{kp}{p}. \quad (13)$$

Это конкретное значение определяется теплофизическими свойствами исследуемых или эталонных материалов и ограничением на длительность процесса нагрева.

Точность измерения ТФС зависит от правильно выбранных моментов времени  $t_2$  и  $t_1$ . Выбор этих моментов покажем на анализе функции  $f(t) = U(t)e^{-pt}$ . Функция  $e^{-pt}$  гладкая, убывающая, ее производная всегда отрицательна и стремится к нулю при  $t \rightarrow t_{ст}$ . Функция  $U(t)$  возрастающая, но она имеет точку перегиба, до которой  $U''(t) > 0$ , а за ней  $U''(t) \leq 0$ . Из классической теории теплопровод-

ности рассматриваемый участок определяется как квазистационарный или регулярный режим второго рода [4] и характеризуется наибольшей чувствительностью к такому свойству материала, как температуропроводность. Очевидно, что мы должны задать параметр интегрирования  $p$  таким, чтобы функция  $f(t)$  принимала максимальное значение именно в тот момент времени, когда  $U(t)$  достигнет точки перегиба. При приближении к этой точке первая производная  $U'(t)$  постоянна, а вторая производная равна нулю, то есть  $U''(t_1) = 0$ .

В момент времени  $t_2$  температура  $U(t)$  практически достигает равномерно изменяющегося или установившегося значения, то есть наступает квазистационарное состояние, при котором вторая производная температуры равна нулю:  $U''(t_2) = 0$ .

Таким образом, для определения параметров интегрирования  $p_1$ ,  $p_2$  и коэффициента  $k$  необходимо в течение всего эксперимента измерять температуру  $U(t)$ , одновременно вычисляя первую и вторую производные температуры по времени  $U'(t)$  и  $U''(t)$ . Это можно легко сделать с помощью ЭВМ, точность вычисления которой указанных величин определяется периодом квантования.

#### *Список литературы*

1. Власов, В.В. Теплофизические измерения : справ. пособие / В.В Власов, Ю.С. Шаталов, Е.Н. Зотов и др. – Тамбов : Изд-во ВНИИРТМаш, 1975. – 256 с.
  2. Шишкина, Г.В. Методика выбора режимных и геометрических параметров средств контроля теплофизических свойств плоских образцов дисперсных материалов : дис. ... канд. техн. наук / Шишкина Галина Викторовна. – Тамбов, 2000. – 179 с.
  3. А.с. 1689825 СССР, G 01 N 25/18, 1991.
  4. Кондратьев, Г.М. Тепловые измерения / Г.М. Кондратьев. – М.-Л. : Машгиз, 1957. – 244 с.
-

## CHOICE OF OPTIMUM GEOMETRICAL AND TIME PARAMETERS OF THERMOPHYSICAL EXPERIMENT

A.A. Churikov, G.V. Shishkina

**Key words and phrases:** time parameters; geometrical parameters; the measuring device; integrated characteristics; non-uniform firm materials; the flat sample; transformations of Laplas.

**Abstract:** The method of definition thermophysical properties (TFP) flat samples of non-uniform firm materials in which the measuring device contains two reference flat samples with gauges of temperature inside of them is shown, and on external borders of this device conditions of thermal protection are supported. Techniques of definition of optimum geometrical and time parameters are developed for maintenance of the minimal error of definition TFP thermophysical experiment.