УДК 517.925.52

# ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В БЕЗГРАНИЧНОМ ТЕЛЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА ВНУТРИ

**Пчелинцев А.Н.**

*Кафедра распределенных вычислительных систем, ТГТУ*

**Ключевые слова и фразы:** нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности; символьные вычисления в распределенной компьютерной среде; квазипериодические движения.

**Аннотация:** Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности, описывающее процесс распространения тепла в безграничном теле с периодическим источником тепла внутри. Дается описание метода отыскания решений в распределенной вычислительной среде. Рассматривается также построение квазипериодических движений в такой системе.

---

**Введение.** Одно из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений является изучение ситуации типического поведения. Данная задача имеет огромное практическое значение, так как анализ процессов замкнутых систем автоматического регулирования неизбежно приводит к этой задаче.

Заметим, что ситуацию в динамических и непрерывных периодических системах определяют квазипериодические движения. В работах [1-5] намечен путь их построения.

Несложный анализ этих работ показывает, что единственно возможный метод построения – это символьные вычисления в распределенной компьютерной среде.

В данной статье рассматривается построение квазипериодических движений в системе, описывающей процесс распространения тепла в безграничном теле с периодическим источником тепла внутри, используя распределенную вычислительную среду.

Подобная модель рассматривается в [6].

**1. Математическая модель теплового процесса.** Во многих процессах теплообмена внутри тела действуют источники тепла. Эти источники могут быть положительными или отрицательными (например, при прохождении электрического тока, вследствие химических реакций). Рассмотрим задачу теплообмена в декартовой системе координат для периодического источника тепла, действующего внутри безграничного тела или тела, для которого не учитывается влияние его границ.

Изменение температуры $T$ происходит только в одном направлении $x$, в двух других направлениях $y$ и $z$ температура неизменна $\left(\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial T}{\partial z} = 0\right)$. Следовательно, задача является одномерной.

Распределение температуры в начальный момент времени $\tau = 0$

$$T(0, x) = G(x).$$

Внутри тела действует источник тепла, удельная мощность $Q(\tau)$ которого является периодической функцией времени с периодом, равным $\tau_{\text{п}}$.

Функции $G(x)$ и $Q(\tau)$ являются аналитическими на множестве $R$ действительных чисел, причем $G(0) \neq 0$.

Материал тела имеет плотность $\rho = \text{const}$, удельную теплоемкость $c = \text{const}$ и теплопроводность, температурная зависимость которой выражается формулой

$$\lambda(T) = Ae^{-BT},$$

где $A$ и $B$ – некоторые константы.

Найти распределение $T(\tau, x)$ температуры по оси абсцисс в любой момент времени.

Условие задачи математически формулируется следующим образом. Имеем нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho c}\left[\lambda(T)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{d\lambda}{dT}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + Q(\tau)\right] \ (\tau > 0) \tag{1}$$

при условии

$$T(0, x) = G(x). \tag{2}$$

Пусть $T_0 = G(0)$ и $l = \sqrt{\dfrac{\tau_{\text{п}} A}{c\rho}}$.

Вычислительный процесс предполагает работу с безразмерными величинами. Поэтому перейдем безразмерной форме уравнений (1)–(2). Для этого будем использовать методику [7, с. 23-28].

Введем масштабы времени $\tau_{\text{м}}$, длины $l_{\text{м}}$ и температуры $T_{\text{м}}$. Соответствующие симплексы имеют вид

$$\left\{t = \frac{\tau}{\tau_{\text{м}}}, \xi = \frac{x}{l_{\text{м}}}, u = \frac{T}{T_{\text{м}}}\right\}.$$

Пусть $\tau_{\text{м}} = \tau_{\text{п}}$, $l_{\text{м}} = l$ и $T_{\text{м}} = T_0$. Тогда уравнения (1)-(2) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{\alpha u}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2\right] + q(t)\ (t > 0), \tag{3}$$

$$u(0,\xi) = g(\xi), \tag{4}$$

где $\alpha = -BT_0$, $q(t) = \dfrac{\tau_{\text{п}} Q(\tau_{\text{п}} t)}{\rho c\, T_0}$ и $g(\xi) = \dfrac{G(l\xi)}{T_0}$.

Пусть $\xi \in \Xi$, $\Xi = \{\xi \mid \xi_1 \le \xi \le \xi_2\}$.

**2. Отыскание решений.** Используя распределенную компьютерную среду, мы будем искать решения в классе аналитических функций (подобный пример показан в [8]). Существование и единственность решения задачи (3)–(4) в классе этих функций в окрестности точки $O$ начала координат доказана в [6]. Другими словами, непрерывная периодическая система, пригодная для использования результатов [1-5], построена.

Рассмотрим подробно метод отыскания решений.

Как известно [6, с. 29], аналитическая функция $u(t,\xi)$ в окрестности точки $O$ раскладывается в степенной ряд следующим образом

$$u(t,\xi) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\partial^{k_1+k_2}u(0,0)}{\partial t^{k_1}\partial\xi^{k_2}}t^{k_1}\xi^{k_2}. \tag{5}$$

Рассмотрим матрицу $P = (p_{k_1,k_2})_{m\times n}$ $(m\to\infty,\ n\to\infty)$ производных:

$$P = \begin{bmatrix} u(0,0) & \dfrac{\partial u(0,0)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial\xi^2} & \cdots & \dfrac{\partial^n u(0,0)}{\partial\xi^n} \\ \dfrac{\partial u(0,0)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial t\partial\xi} & \dfrac{\partial^3 u(0,0)}{\partial t\partial\xi^2} & \cdots & \dfrac{\partial^{1+n} u(0,0)}{\partial t\partial\xi^n} \\ \dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial t^2} & \dfrac{\partial^3 u(0,0)}{\partial t^2\partial\xi} & \dfrac{\partial^4 u(0,0)}{\partial t^2\partial\xi^2} & \cdots & \dfrac{\partial^{2+n} u(0,0)}{\partial t^2\partial\xi^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^m u(0,0)}{\partial t^m} & \dfrac{\partial^{m+1} u(0,0)}{\partial t^m\partial\xi} & \dfrac{\partial^{m+2} u(0,0)}{\partial t^m\partial\xi^2} & \cdots & \dfrac{\partial^{m+n} u(0,0)}{\partial t^m\partial\xi^n} \end{bmatrix}.$$

Вычисление производных, значения которых составляют матрицу $P$, осуществляется в символьной форме, так как вычисление какой-либо смешанной производной для элемента $p_{k_1,k_2}$ в символьном виде определяется по уже вычисленной производной, соответствующей элементу $p_{k_1,k_2-1}$, или производной для $p_{k_1-1,0}$. Таким образом, операции символьного дифференцирования каждой строки по $\xi$ можно выполнять независимо друг от друга.

Иными словами, алгоритм решения задачи (3)–(4) распараллеливается.

Выражения, представленные в виде строк, для производных удобно хранить в базе данных, обслуживаемой сетевой СУБД.

Таким образом, мы имеем хранилище, которое доступно всем ресурсам вычислительной среды, производящим расчет. Счетное множество, которое образуют ресурсы, рассчитывающие некоторое решение, обозначим через $M$. Заметим, что $|M| = m + 1$.

Теперь опишем алгоритм проведения распределенных вычислений.

Если мы имеем в базе символьные выражения для производных, полученные дифференцированием уравнения (3), то дифференцируется только начальное условие по $\xi$.

Иначе элемент множества $M$ с номером $s = m + 1$ дифференцирует уравнение (3) по $t$. При этом первый элемент дифференцирует условие (4) по $\xi$, второй – уравнение (3) по $\xi$. После вычисления $k_1$-ой производной по $t$ $s$-ый элемент записывает в базу данных символьное выражение и посылает $k_1$-ому элементу сообщение о том, чтобы тот начал дифференцировать это выражение по $\xi$.

После окончания процедуры символьного дифференцирования $k_1$-ый элемент сообщает $s$-ому об этом, посылая ему сообщение. Как только их количество станет равным $m$, $s$-ая машина рассылает всем остальным элементам сообщения о начале расчета численных значений производных в точке $O$. При этом каждый элемент $M$ (кроме элемента с номером $s$) рассчитывает соответствующую ему строку.

В символьное выражение для элемента $p_{k_1,k_2}$ входят производные, соответствующие элементам, стоящих слева от него в текущей строке и производные для предыдущих строк. Поэтому $k_1$-ый элемент $M$ ждет, если не все производные определены для расчета $p_{k_1,k_2}$, постоянно опрашивая сервер базы данных на предмет наличия в ней нужных данных. Параллельность здесь достигается за счет того, что выражение для $p_{k_1,k_2}$ определяется не всеми вычисленными элементами предыдущих строк $P$, а только их частью.

Заметим, что в правую часть уравнения (3) входят частные производные по $\xi$, максимальный порядок которых равен двум. Поэтому при расчете численного значения элемента $p_{k_1,k_2}$ полученных символьных выражений может не хватить. В этом случае необходимо досчитать производные, которые требуются, чтобы вычислить $p_{k_1,k_2}$.

Если $k_1$-ый элемент $M$ не может вычислить $p_{k_1,k_2}$ (нужная запись в таблице базы данных отсутствует), то и следующие за ним элементы в текущей строке также $P$ также не могут быть определены. Далее $k_1$-ый элемент определяет, каким элементам множества $M$ соответствуют не вычисленные производные и рассылает задания для них в виде сообщений. Как только им приходит сообщение, то на них запускается процедура символьного дифференцирования и затем последовательного расчета значений полученных производных. Если опять возникает ситуация с неопределенностью значения производной в точке $O$, то действия повторяются.

Как только определены все значения, которые требуются $k_1$-ому элементу, он выходит из состояния ожидания и досчитывает строку матрицы $P$.

После того, как произведен расчет $k_1$-ой строки, соответствующий элемент сообщает элементу с номером $s$ множества $M$, что расчет закончен.

Как видно из этих рассуждений, основная нагрузка на этапе вычисления значений производных ложится на сервер базы данных. Чтобы разгрузить его от большого потока запросов, предлагается сделать его кластеризацию.

Размеры матрицы $P$ подбираются так, чтобы остаточный член в форме Лагранжа

$$R_{m,n}(t,\xi) = \frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}u(0,0)}{\partial t^m \partial \xi^n} t^m \xi^n$$

был таким, что

$$\max_{\xi \in \Xi} |R_{m,n}(t_0,\xi)| < \varepsilon_{\text{в}}, \tag{6}$$

где $\varepsilon_{\text{в}}$ – точность вычислений.

Как мы увидим далее, значение $t_0$ меняется. С увеличением $t_0$ в формуле (5) необходимо досчитать недостающие члены ряда, чтобы выполнялось неравенство (6). В матрицу $P$ при этом будут добавляться строки и столбцы.

**3. Построение квазипериодических движений.** Обозначим через $\Omega$ компактное пространство аналитических функций, определенных на множестве $\Xi$. Пусть $u_0 = u(\sigma,\xi)$, $u_0 \in \Omega$, где $\sigma$ – некоторое фиксированное число из множества $R$ (для условия (4) $\sigma = 0$). Тогда для дальнейших рассуждений будем обозначать решение задачи (3)–(4) как $u(\sigma,t,u_0)$. Заметим, что $\|u(\sigma,t,u_0)\| = \max\limits_{\xi \in \Xi} |u(t,\xi)|$.

Положим $u(\sigma,t,u_0) = U(\sigma,t)u_0$ и будем считать, что:

а) отображение $u(\sigma,t,u_0)$ множества $X = R \times R^+ \times \Omega$ в пространство $\Omega$ непрерывно по совокупности переменных $\sigma, t, u_0$ на множестве $X$ ($R^+$ – действительная полуось);

б) для всех значений $\sigma \in R$

$$U(\sigma,0) = E,$$

где $E$ – оператор тождественного преобразования;

в) для всех значений $(\sigma,t,\varphi) \in R \times R^+ \times R^+$

$$U(\sigma+\varphi,t)U(\sigma,\varphi) = U(\sigma,t+\varphi).$$

Следуя [3,5] будем говорить, что $u(\sigma,t,u_0)$ – движение, если пара $(\sigma,u_0)$ фиксирована.

По аналогии с [9, с. 12] предполагается назвать оператор $U(\sigma, t)$ оператором сдвига вдоль движения $u(\sigma, t, u_0)$.

Заметим, что оператор $U(\sigma, t)$ является периодическим с периодом $\omega = 1$.

Во избежании возможных разночтений приведем следующее определение квазипериодического движения.

Предположим, что для каждого положительного числа $\varepsilon$ можно указать такое натуральное число $N_\varepsilon$, что для всех значений $t \in R^+$ выполнено неравенство

$$\|u^*(\sigma, t, u_0^*) - u^*(\sigma, t + N_\varepsilon\omega, u_0^*)\| < \varepsilon.$$

Тогда будем говорить, что $u^*(\sigma, t, u_0^*)$ – квазипериодическое движение.

В общем случае существование квазипериодических кривых устанавливает следующая теорема.

Если $\Omega$ – компактное пространство, $(\sigma, u_0) \in R \times \Omega$ – некоторая фиксированная пара и $u(\sigma, t, u_0) = U(\sigma, t)u_0$ – движение, причем для всех значений $t \in R^+$ $u(\sigma, t, u_0) \in \Omega$, то существует квазипериодическое движение

$$u^*(\sigma, t, u_0^*) = U(\sigma, t)u_0^*, \tag{8}$$

для всех $t \in R^+$ $u^*(\sigma, t, u_0^*) \in \Omega$. Более полно, какова бы ни была последовательность

$$N_1, N_2, ..., \lim_{k \to \infty} N_k = \infty$$

натуральных чисел, найдется такая ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, ..., \lim_{l \to \infty} N_{k_l} = \infty$$

и такое квазипериодическое движение вида (8), причем для всех $t \in R^+$ $u^*(\sigma, t, u_0^*) \in \Omega$, что

$$\lim_{l \to \infty} u(\sigma, t + (N_{k_l} - 1)\omega, u_0) = u^*(\sigma, t, u_0^*)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a; b] \subset R^+$ и

$$\lim_{l \to \infty} u^*(\sigma, t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})\omega, u_0^*) = u^*(\sigma, t, u_0^*)$$

равномерно на всей полуоси $R^+$.

Доказательство этой теоремы приведено в [3].

Обратимся теперь к построению квазипериодических движений. Для этого положим

$$D^N(\sigma) = \underbrace{U(\sigma, \omega)...U(\sigma, \omega)}_{N},\ N = 1, 2, 3, ...$$

и заметим, что для всех значений $N$ справедливо равенство

$$U(\sigma - N\omega, N\omega)U(\sigma, -N\omega) = U(\sigma, 0)$$

(см. свойство (в) оператора $U(\sigma, t)$). Отсюда следует, что посредством равенства

$$D^{-N}(\sigma) = U(\sigma, -N\omega),\ N = 1, 2, 3, ...,$$

оператор $D^N(\sigma)$ может быть распространен на отрицательные целые значения $N$, гомеоморфно отображая при этом пространство $\Omega$ в себя. Сказанное означает, что в рассмотрение введена дискретная динамическая система $D^N(\sigma)$ вдоль движений непрерывной периодической системы, характеризуемой $\omega$-периодическим оператором сдвига $U(\sigma, t)$. Эта система определена при всех значениях $N = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ и $\sigma \in R$.

Для построения квазипериодических движений в непрерывной периодической системе введем понятие устойчивости по Пуассону в системе $D^N(\sigma)$.

Пару $(\sigma, u_0^*) \in R \times \Omega$ назовем устойчивой по Пуассону, если для каждой окрестности $\Psi$ точки $u_0^*$ и каждого натурального числа $k$ можно указать такое натуральное число $N_k > k$, что $D(\tau)^{N_k} u_0^* \in \Psi$.

Заметим, что значение $\sigma$ фиксировано. Используя распределенную вычислительную среду, несложно построить множество $H$, состоящее из тех и только тех точек $u_0^*$, что пары $(\sigma, u_0^*)$ устойчивы по Пуассону (см. [5]).

Так как пространство $\Omega$ компактно, то для всех значений $\sigma \in R$ пара $(\sigma, u_0^*) \in R \times \Omega$ устойчива по Пуассону в системе $D^N(\sigma)$ тогда и только тогда, когда движение $u^*(\sigma, t, u_0^*)$ является квазипериодическим (см. [5]).

*Список литературы*

1. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. К вопросам управления в периодических процессах // Изв. РАН. Теория и системы управления, 1998, №4, С. 15-20.

2. Дзюба С.М. Об условно-периодических решениях дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1999, Т. 35, №8, С. 1020-1023.

3. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. Периодический оператор сдвига и квазипериодические кривые // Дифференц. уравнения, 2004, Т. 40, №10, С. 1367-1372.

4. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. О рекуррентных траекториях, минимальных множествах и квазипериодических движениях динамических систем // Дифференц. уравнения, 2005, Т. 41, №11, С. 1544-1549.

5. Афанасьев А.П., Дзюба С.М., Пьянов А.П. Типическое поведение движений динамических и непрерывных периодических систем: новый взгляд на устойчивость по Пуассону // Труды ИСА РАН: Проблемы вычислений в распределенной компьютерной среде: распределенные приложения, коммуникационные системы, математические модели и оптимизация. – М.: КомКнига,

2006. Т. 25. – С. 147-164.

6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

7. Кутателадзе С.С. Анализ подобия в теплофизике. – Новосибирск: Наука, 1982. – 280 с.

8. Емельянов С.В., Афанасьев А.П. Проблемы вычислений в распределенной среде: организация вычислений в глобальных сетях. – М.: РОХОС, 2004. – 176 с.

9. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

---

## RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE HEAT SPREADING PROCESS IN THE BOUNDLESS BODY WITH THE PERIODICAL SOURCE OF HEAT INSIDE

**Key words and phrases:** non-linear differential equation of thermal conductivity; symbolic calculations in the distributed computer environment; quasiperiodical movements.

**Abstract:** Non-linear differential equation of thermal conductivity describing the process of diffusion of heat in the boundless body with periodic source of heat inside is considered. The description of method of finding the solutions in the distributed computer environment is given. The construction of quasiperiodical movements in this system is considered.