УДК 517.925.52

ОБ ОТЫСКАНИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В СИСТЕМЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЕ*

А.Н. Пчелинцев

Кафедра распределенных вычислительных систем, ТГТУ

Ключевые слова и фразы: непрерывная периодическая система; периодический оператор сдвига; квазипериодические движения; устойчивость по Пуассону; нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности; диссипативная система; аналитические функции.

Аннотация: Рассматривается построение квазипериодических движений непрерывной периодической системы, описывающей процесс распространения тепла в неограниченной пластине. Показано, что для данной системы существуют периодические и квазипериодические движения, которые и требуется отыскать.

Введение

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №07-07-00170).

где $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ – векторная функция действительного переменного t, а $f = \left(f^1, \ldots, f^n\right)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^j}$, $i, j = \overline{1, n}$, на прямом произведении $R \times \Sigma$ действительной оси R и некоторого открытого подмножества Σ евклидова векторного пространства R^n. Кроме того, предположим, что f – T-периодическая по t функция.

Вопрос существования у системы (1) периодических решений весьма важен как для теории дифференциальных уравнений, так и для приложений. Здесь одним из основных результатов является теорема Массера, справедливая для систем второго порядка (см. [1, с. 53]) и многомерных линейных систем (см. [2, с. 221]).

Как показано в работах [3, 4], в общем случае для многомерных нелинейных систем из существования у системы (1) ограниченного решения следует существование квазипериодического решения, частным случаем которого является периодическое движение.

Одной из основных особенностей квазипериодических решений является то, что такое решение определяет ситуацию поведения для многомерных нелинейных систем.

В данной работе рассматривается построение квазипериодических движений непрерывной системы, описывающей процесс распространения тепла в неограниченной пластине с источником тепла внутри. Математическая модель такого теплового процесса описывается одномерным нелинейным дифференциальным уравнением теплопроводности. При этом осуществляется переход к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической правой частью (граничные условия для исходной задачи описываются периодическими функциями). Показано, что у данной системы существуют также и периодические решения.

1 Периодический оператор сдвига и квазипериодические движения

Приведем основные определения, относящиеся к операторам сдвига, непрерывным системам и квазипериодическим движениям.

Определение 1. Пусть X – некоторое метрическое пространство с метрикой d, R – действительная ось $(-\infty;\infty)$, R^+ – действительная полуось $[0;\infty)$ и $x(\sigma,t,x_0)$ – отображение множества $R\times R^+\times X$ в пространство X. Положим $x(\sigma,t,x_0)=G(\sigma,t)x_0$ и будем считать, что:

а) отображение $x(\sigma,t,x_0)$ непрерывно по совокупности переменных σ,t,x_0 на множестве $R\times R^+\times X$;

б) для всех значений $\sigma\in R$ выполняется условие $G(\sigma,0)=I$, где I – оператор тождественного преобразования;

в) для всех значений $(\sigma,t,s)\in R\times R^+\times R^+$ имеет место равенство

$$G(\sigma+s,t)G(\sigma,s)=G(\sigma,t+s).$$

Тогда будем говорить, что $x(\sigma,t,x_0)$ – движение, если пара $(\sigma,x_0)\in R\times X$ фиксирована [5].

По аналогии с [1, с. 12] назовем оператор $G(\sigma,t)$ оператором сдвига.

Далее из всего множества операторов сдвига в дальнейшем будем рассматривать только T-периодический оператор, т.е. оператор $G(\sigma,t)$, при всех значениях $(\sigma,t)\in R\times R^+$ удовлетворяющий условию

$$G(\sigma+T,t)=G(\sigma,t),$$

где T – некоторое положительное число.

Систему, характеризуемую T-периодическим оператором сдвига $G(\sigma,t)$, будем называть непрерывной T-периодической системой.

Определение 2. Пусть $\varphi(\sigma,t,\varphi_0)=G(\sigma,t)\varphi_0$ – движение, при всех значениях $t\in R^+$ $\varphi(\sigma,t,\varphi_0)\in X_0$, где $X_0\subset X$ – компактное пространство. Предположим, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число N_ε, что для всех значений $t \in R^+$ выполняется неравенство

$$d\big(\varphi(\sigma,t,\varphi_0),\varphi(\sigma,t+N_\varepsilon T,\varphi_0)\big) < \varepsilon\,.$$

Тогда будем говорить, что $\varphi(\sigma,t,\varphi_0)$ – квазипериодическое движение.

Существование квазипериодических движений устанавливает следующая

Теорема 1. *Если X_0 – компактное пространство, $(\sigma,\xi_0) \in R \times X_0$ – некоторая фиксированная пара и $\xi(\sigma,t,\xi_0) = G(\sigma,t)\xi_0$ – движение, причем для всех значений $t \in R^+$ $\xi(\sigma,t,\xi_0) \in X_0$, то существует квазипериодическое движение*

$$\varphi(\sigma,t,\varphi_0) = G(\sigma,t)\varphi_0 \tag{2}$$

для всех $t \in R^+$ $\varphi(\sigma,t,\varphi_0) \in X_0$. Более полно, какова бы ни была последовательность

$$N_1, N_2, \ldots, \lim_{k\to\infty} N_k = \infty$$

натуральных чисел, найдется такая ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty$$

и такое квазипериодическое движение вида (2), причем для всех $t \in R^+$ $\varphi(\sigma,t,\varphi_0) \in X_0$, что

$$\lim_{l\to\infty} \xi(\sigma,t+(N_{k_l}-1)T,\xi_0) = \varphi(\sigma,t,\varphi_0)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a;b] \subset R^+$ и

$$\lim_{l\to\infty} \xi(\sigma,t+(N_{k_{l+1}}-N_{k_l})T,\xi_0) = \varphi(\sigma,t,\varphi_0)$$

равномерно на всей полуоси R^+.

Доказательство этой теоремы приводится в работе [5].

2 Построение квазипериодических движений

Обратимся теперь к построению квазипериодических движений. Для этого, следуя [6], положим

$$U^N = G(\sigma, NT),\ N = 1,2,3,\ldots.$$

Тогда в рассмотрение введена дискретная динамическая система U^N вдоль движений непрерывной периодической системы, характеризуемой T-периодическим оператором сдвига $G(\sigma,t)$. Эта система определена при всех натуральных значениях N и $\sigma \in R$.

Для построения квазипериодических движений в непрерывной периодической системе введем понятие устойчивости по Пуассону в системе U^N.

Определение 3. Точку $\varphi_0 \in X_0$ назовем устойчивой по Пуассону, если для каждой окрестности E этой точки и каждого натурального числа k можно указать такое натуральное число $N_k > k$, что $U^{N_k}\varphi_0 \in E$.

Теорема 2. *Если X_0 – компактное пространство, то для всех значений $\sigma \in R$ точка $\varphi_0 \in X_0$ устойчива по Пуассону в системе U^N тогда и только тогда, когда соответствующее движение $\varphi(\sigma,t,\varphi_0)$ является квазипериодическим.*

Доказательство теоремы 2 приведено в работе [6].

Поэтому построению квазипериодических движений непрерывной периодической системы в пространстве X_0 предпошлем построение устойчивых по Пуассону точек в системе U^N.

3 Построение множества точек, устойчивых по Пуассону, в системе, описывающей процесс распространения тепла в неограниченной пластине

Рассмотрим систему, описывающую процесс распространения тепла в неограниченной пластине. Изменение температуры u происходит только в одном направлении x – по толщине пластины, в двух других направлениях y и z температура неизменна.

Распределение температуры в начальный момент времени $\tau = 0$ задано некоторой функцией $\Gamma(x)$:

$$u(0, x) = \Gamma(x).$$

Будем рассматривать действие источника тепла внутри пластины с удельной мощностью

$$w(u) = -\Theta u(\tau, x),$$

где Θ – положительная константа, являющаяся характеристикой источника.

Материал пластины имеет плотность $\rho = const$, удельную теплоемкость $c = const$ и теплопроводность, температурная зависимость которой выражается формулой

$$\lambda(u) = \eta e^{-2\beta u^2},$$

где η и β – положительные константы, получаемые аппроксимацией табличных данных.

Математическая модель теплового процесса имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho c}\left[\lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d\lambda}{du}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + w(u)\right]$$

при условиях

$$u(0, x) = \Gamma(x),$$
$$u(\tau, x_1) = Q_1(\tau),$$
$$u(\tau, x_2) = Q_2(\tau),$$

где x_1 и x_2 – границы пластины, $Q_1(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ – T-периодические функции, аналитичные на множестве R, причем

$$\Gamma(x_1) = Q_1(0),$$
$$\Gamma(x_2) = Q_2(0).$$

Вычислительный процесс предполагает работу с безразмерными величинами. Поэтому перейдем к безразмерной форме данной модели. Для этого будем использовать методику [7, с. 23-28].

Пусть $u_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ и $L = \sqrt{\frac{\eta T}{\rho c}}$. Введем масштабы времени τ_s, длины l_s и температуры u_s. Соответствующие симплексы имеют вид

$$\left\{ t = \frac{\tau}{\tau_s}, \chi = \frac{x}{x_s}, \xi = \frac{u}{u_s} \right\}.$$

Пусть $\tau_s = T$, $l_s = L$ и $u_s = u_0$. Получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = e^{-2\xi^2} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial \chi^2} - 4\xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial \chi} \right)^2 \right] - \theta \xi(t, \chi),$$
$$\xi(0, \chi) = \gamma(\chi),$$
$$\xi(t, a) = q_1(t),$$
$$\xi(t, b) = q_2(t),$$

где $q_i(t) = \frac{Q_i(Tt)}{u_0}$, $i = \overline{1,2}$, $\gamma(\chi) = \frac{\Gamma(L\chi)}{u_0}$, $\theta = \frac{\Theta T}{\rho c}$, $a = \frac{x_1}{L}$ и $b = \frac{x_2}{L}$.

Перейдем от дифференциального уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого заменим производные по координате их разностными аналогами (см. [8]):

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial \chi} \right|_{\chi = \chi_i} \sim \frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{2h},$$

$$\left. \frac{\partial^2 \xi}{\partial \chi^2} \right|_{\chi = \chi_i} \sim \frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{h^2},$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, $\chi_i = \chi_{i-1} + h$, $\chi_0 = a$ и $\chi_n = b$.

Получаем систему из $m = n - 1$ уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = f_1(t, \xi_1, \xi_2) - \theta \xi_1, \\ \frac{d\xi_2}{dt} = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \theta \xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d\xi_m}{dt} = f_2(\xi_{m-1}, \xi_m, t) - \theta \xi_m, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$f(\xi_{i-1},\xi_i,\xi_{i+1}) = \frac{e^{-2\xi_i^2}}{h^2}\left(\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1} - \xi_i(\xi_{i+1} - \xi_{i-1})^2\right),$$

$$f_1(t,\xi_1,\xi_2) = f(q_1(t),\xi_1,\xi_2),$$

$$f_2(\xi_{m-1},\xi_m,t) = f(\xi_{m-1},\xi_m,q_2(t)).$$

Нам будет удобно систему (3) записывать в векторной форме

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi + F(t,\xi), \tag{4}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -\theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\theta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\theta \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать пространство R^m как метрическое пространство с метрикой

$$d(\alpha,\beta) = |\alpha - \beta|.$$

Заметим, что все собственные значения матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, функция $F(t,\xi)$ периодична (с периодом, равным единице), и

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{|F(t,\xi)|}{|\xi|} = 0.$$

Тогда, следуя [1, с. 48-51], существует сфера S достаточно большого радиуса, что все решения (4) попадут в S и не покинут ее, т.е. система (4) диссипативна. Кроме того, как было замечено выше, имеет место и периодичность правой части (4). Следовательно, как показано в [1, с. 54], из диссипативности системы вытекает существование у нее периодических решений. Однако, можно ожидать, что в общем случае помимо периодических решений могут быть и квазипериодические, отличные от периодических. Будем отыскивать квазипериодические решения, что позволит найти периодические решения.

Обозначим через X_0 любой компакт, содержащий сферу S.

Решения системы (4) могут быть найдены в классе аналитических функций

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k \xi(0)}{dt^k} t^k , \qquad (5)$$

как показано в работе [9].

Докажем сходимость ряда (5). Из диссипативности системы (4) вытекает существование такого положительного числа *M*, что при $t \to \infty$

$$|\xi(t)| < M .$$

Тогда

$$|\xi(t)| < M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{R} \right)^k , \qquad (6)$$

где *R* выбираем так, чтобы ряд, стоящий в правой части (6) сходился, т.е. $R > t$.

Таким образом, ряд (5) мажорируется сходящимся рядом, что и доказывает его сходимость.

Для дальнейших рассуждений будем обозначать решение системы (4) как

$$\xi(\sigma, t, \xi_0) = G(\sigma, t)\xi_0 ,$$

где $G(\sigma,t)$ – периодический оператор сдвига с периодом, равным единице, $\xi_0 \in X_0$ – начальное условие. Оператор $G(\sigma,t)$ определен, т.к. существует и единственно решение системы (4). Заметим, что для (5) $\sigma = 0$.

Таким образом, непрерывная периодическая система, пригодная для использования результатов, изложенных пунктах 1 и 2 данной работы, построена.

Рассмотрим процедуру построения множества, которое состоит из точек, для которых имеет место устойчивость по Пуассону в дискретной динамической системе вдоль движений данной непрерывной периодической системы.

Разобьем множество X_0 ε_1-кубильяжем. Получим *r* множеств E_k, для которых

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{r} E_i .$$

Выберем произвольно точку φ_i из E_i. Для этой точки проверяется устойчивость по Пуассону: ищется такое натуральное число N_i, чтобы

$$\left|\xi(\sigma, N_i, \varphi_i) - \varphi_i\right| < \varepsilon_1 .$$

Если такое число не найдено (мы попали на границу разрядной сетки), то множество E_i исключается из рассмотрения.

Для тех точек φ_k и множеств E_k, соответственно, для которых имеет место устойчивость по Пуассону, повторяется процедура разбиения ε_2-кубильяжем. Для полученных подмножеств и их точек, соответственно, повторяется процедура проверки устойчивости по Пуассону.

Список литературы

1 Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

2 Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 399 с.

3 Афанасьев, А.П. К вопросам управления в периодических процессах / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // Известия РАН. Теория и системы управления, 1998. – № 4. – С. 15-20.

4 Дзюба, С.М. Об условно-периодических решениях дифференциальных уравнений / С.М. Дзюба // Дифференциальные уравнения, 1999. – Т. 35. – № 8. – С. 1020-1023.

5 Афанасьев, А.П. Периодический оператор сдвига и квазипериодические кривые / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // Дифференциальные уравнения, 2004. – Т. 40. – № 10. – С. 1367-1372.

6 Афанасьев, А.П. Типическое поведение движений динамических и непрерывных периодических систем: новый взгляд на устойчивость по Пуассону / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба, А.П. Пьянов // Труды ИСА РАН. Проблемы вычислений в распределенной компьютерной среде: распределенные приложения,

коммуникационные системы, математические модели и оптимизация. – М.: КомКнига, 2006. – Т. 25. – С. 147-164.

7 Кутателадзе, С.С. Анализ подобия в теплофизике / С.С. Кутателадзе. – Новосибирск: Наука, 1982. – 280 с.

8 Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

9 Емельянов, С.В. Проблемы вычислений в распределенной среде: организация вычислений в глобальных сетях / С.В. Емельянов, А.П. Афанасьев. – М.: РОХОС, 2004. – 176 с.

ON THE SEARCHING THE QUASIPERIODICAL MOVEMENTS IN A SYSTEM DESCRIBING A PROCESS OF DIFFUSION OF HEAT IN THE BOUNDLESS PLATE

Keywords and phrases: continuous periodical system; periodic operator of displacement; quasiperiodical movements; stability by Poisson; non-linear differential equation of thermal conductivity; dissipative system; analytical functions.

Abstract: Construction of quasiperiodical movements of a continuous periodical system describing a process of diffusion of heat in boundless plate is considered. It is shown that for this system exist periodical and quasiperiodical movements that are needed to find.