УДК 621.888.6

Ю.В. Кулешов, А.В. Рощин,
Л.М. Шишикин, К.А. Андреев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НАНООБЪЕКТОВ

Рассматривается задача определения механических параметров некоторых нанообъектов (нанотрубок и нанокристаллов) по частотам системы, состоящей из подложки и расположенных на ней нанообъектов (ПН), и частотам одной подложки [1]. Модель подложки – многослойная пластина. Модель нанообъекта – прямолинейный стержень. (рис. 1).

Нелинейные колебания ПН описываются дифференциальными уравнениями [2, 3]:

$$2\Delta\Delta F = -EhL(w,w)\,; \tag{1}$$

$$D\left(1-\frac{\theta h^2}{\beta}\Delta\right)\Delta\Delta\chi + \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi + 2\rho h\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi =$$
$$= L(w,F) + q(x,y)\cos\omega t\,; \quad w = (1-\frac{h^2}{\beta}\Delta)\chi\,; \tag{2}$$

$$\sigma'_{ij} = \dot U_{ij}\,;\ \ \dot\sigma_{ij} = U'_{ij}\,;\ \ i = \overline{1,M}\,;\ \ j = \overline{1,N}\,, \tag{3}$$

где θ и β – безразмерные параметры подложки [2]; L и Δ – дифференциальные операторы [3]; σ_{ij}, U_{ij} – безразмерные продольные напряжение и скорость сечения нанообъекта «*ij*». Другие обозначения соответствуют [2, 3].

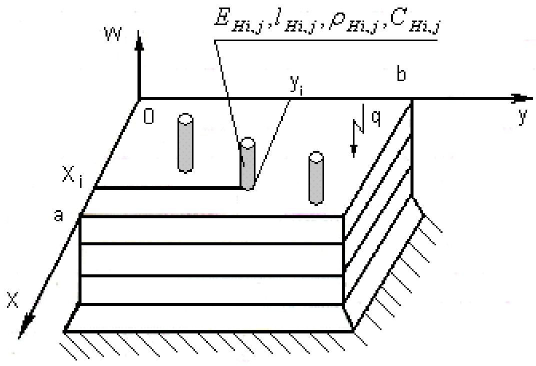

Рис. 1. Подложка с нанообъектами

Положим

$$q = q_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\omega t + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}\delta(x-x_i)\delta(y-y_i)\,, \tag{4}$$

где $q_0 = \text{const}$; δ – функция Дирака; P_{ij} – действие нанообъекта «*ij*» на подложку.

Решение (1) – (3) будем искать в виде:

$$W = h\zeta\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\ \ \zeta = a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t,\ \ \chi = \chi_0(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,; \tag{5}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{1ij}\cos\omega t + \sigma_{2ij}\sin\omega t\,, \quad U_{ij} = U_{1ij}\cos\omega t + U_{2ij}\sin\omega t\,. \tag{6}$$

Интегрируя (1) с учетом (5) методом, предложенным в [4], находим силовую функцию в форме [3]. Для точки контакта нанообъекта «*ij*» с подложкой потребуем выполнения условия совместности скоростей:

$$U_{ij}(1,t) = \frac{h}{l_{Hij}}\dot\zeta\sin\frac{m\pi x_i}{a}\sin\frac{n\pi y_i}{b}\,, \quad i = \overline{1,M}\,;\ \ j = \overline{1,N}\,. \tag{7}$$

Интегрируя систему (3) с учетом (7), определяем закон изменения напряжений в нанообъектах и силы их воздействий на подложку. Интегрируя затем систему (2) методом Бубнова–Галеркина, получаем дифференциальное уравнение на ζ

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\zeta}{dt} + \omega_{0,mn}^2(1 + k\zeta^2)\zeta + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\omega)\zeta = \bar{q}_0 \cos\omega t\,, \qquad (8)$$

где

$$A_{ij} = -\omega tg(\tau_{ij}\omega)\sin^2\frac{m\pi x_i}{a}\sin^2\frac{n\pi y_i}{b}/\tau_{ij}\,;\tau_{ij} = l_{Hij}/c_{Hij} = l_{Hij}\sqrt{\rho_{Hij}}/\sqrt{E_{Hij}}\;;$$

$\omega_{0,mn}$; k, $\bar{q}_0$ даны в [3].

Интегрируя (8) методом Ритца, получаем амплитудно-частотное уравнение колебаний ПН

$$\left(\omega_{0,mn}^2 + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\omega) + \frac{3}{4}\omega_{0,mn}^2 k c_1^2 - \omega^2\right)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2 = \frac{\bar{q}_0^2}{c_1^2}\,. \qquad (9)$$

Здесь $c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$. Уравнения (8), (9) позволяют исследовать различные нелинейные и линейные задачи теории колебаний ПН. Рассмотрим одну из них – об определении параметров нанообъекта по частотам линейных колебаний ПН и собственным частотам подложки. Из (9) при $k = \varepsilon = \bar{q}_0 = 0,\ M = N = 1,\ x_1 = a/2,\ y_1 = b/2,\ A_{11} = -\omega tg(\tau\omega)/\tau$ получаем частотное уравнение ПН

$$\Omega((tg(2\pi\tau\Omega))/\tau + 2\pi\Omega) = 2\pi\Omega_{0,mn}^2\,, \qquad (10)$$

где $\Omega = \omega/(2\pi),\ \Omega_{0,mn} = \omega_{0,mn}/(2\pi)$.

Для определения одного из параметров нанообъекта: модуля Юнга, плотности, длины или скорости продольных волн можно предложить следующий порядок действий.

1. Экспериментально определить собственные частоты подложки и сопоставить их с найденными по формуле [3]

$$\Omega_{0,mn} = \omega_{0,mn}/(2\pi) = (\pi m^2(1 + n^2\lambda^2/m^2)ch)/(4\sqrt{3}\lambda ab\sqrt{1-\nu^2})\,. \qquad (11)$$

2. Экспериментально определить собственные частоты ПН и частоту Ω_a ее первого «антирезонанса».

3. Проверить выполнение закономерностей перераспределения частот [1].

4. По частоте Ω_a вычислить один из параметров нанообъекта, например скорость продольных волн $C_H = 4l_H\Omega_a$.

5. По частотному уравнению (10) вычислить собственные частоты ПН и проверить их совпадение с экспериментальными.

В табл. 1 приведены результаты расчета частот при $a = 10$ мкм; $b = 20$ мкм; $c = 4800$ м/с; $\nu = 0{,}25$; $l_н = 3$ мкм. При частоте «антирезонанса», совпадающей с собственной частотой подложки $\Omega_a = \Omega_{0,35}$, скорость продольных волн в нанообъекте составляет $C_н = 4113{,}7$ м/с. У ПН появляются две «боковые» частоты.

Таблица 1

Подложка			Собственные частоты ПН, ГГц	Собственные частоты нанообъекта, ГГц
m	n	$\Omega_{0,mn}$, ГГц		
1	7	0,297852	0,215375	0,342811
3	5	0,342811	0,495749	1,028433
4 (2)	1 (7)	0,365290		1,714055

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Об определении собственных частот нанообъектов / В.А. Еремеев, Е.А. Иванова, Н.Ф. Морозов, А.Н. Соловьев // ДАН. – 2006. – Т. 406, № 6. – С. 756 – 759.
2. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М. : Машиностроение, 1988. – 288 с.
3. Куликов, Г.М. Нелинейные колебания многослойных пластин / Г.М. Куликов, Ю.В. Кулешов // Вестник ТГУ. – 2004. – Т. 9, Вып. 2. – С. 264 – 267.
4. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – М. : Наука, 1972. – 432 с.