УДК 621.888.6

Ю.В. Кулешов, М.А. Кирнос, А.М. Кольцова

ДИНАМИКА МНОГОСЛОЙНОЙ ПОДЛОЖКИ С НАНООБЪЕКТАМИ

Рассматривается задача о свободных и вынужденных нелинейных колебаниях многослойной пластины – подложки, на которой выращены объекты наноразмерного масштаба. Каждый из этих объектов моделируется двумя массами m_{ij} и M_{ij}, соединенными высокоориентированной решеткой наностержней [1], ось которой перпендикулярна поверхности подложки. Массы M_{ij} жестко закреплены на подложке в точке с координатами x_i, y_j (рис. 1).

Нелинейную динамику системы опишем дифференциальными уравнениями континуальной теории:

$$2\Delta\Delta F = -EhL(W,W)\,; \tag{1}$$

$$D\left(1-\frac{\theta h^2}{\beta}\Delta\right)\Delta\Delta\chi + \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi + 2\rho h\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi = L(W,F) + q(x,y)\cos\omega t\,; \tag{2}$$

$$W = \left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi\,; \tag{3}$$

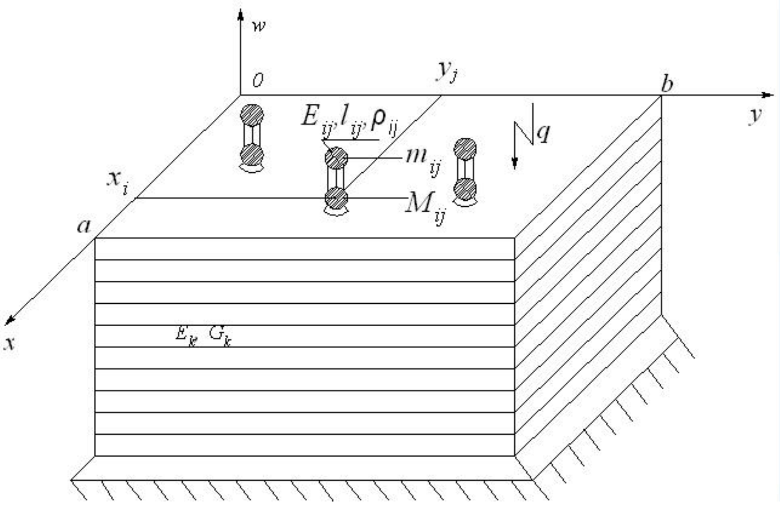

Рис. 1. Подложка с нанообъектами

$$\sigma'_{ij} = \dot U_{ij}\,;\quad \dot\sigma_{ij} = U'_{ij}\,;\quad i=\overline{1,\,M}\,;\quad j=\overline{1,\,N}\,. \tag{4}$$

Здесь θ и β – безразмерные параметры многослойной подложки [2]; L и Δ – дифференциальные операторы [4]; σ_{ij}, U_{ij} – безразмерные продольные напряжения и скорости сечений наностержней. Другие обозначения соответствуют [2, 4].

Инерцию масс m_{ij} учитываем граничными условиями:

$$\delta_{ij}(0,\,t) = \frac{m_{ij}}{l_{ij}F_{ij}\rho_{ij}}\dot U(0,\,t)\,, \tag{5}$$

где l_{ij}, F_{ij}, ρ_{ij} – длина, суммарная площадь поперечного сечения и плотность материала решетки наностержней «i, j».

Интенсивность распределения нормальной нагрузки на подложку зададим в виде:

$$q = q_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\omega t + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}P_{ij}\delta(x-x_i)\delta(y-y_i)\,. \tag{6}$$

Здесь q_0 = const; δ – функция Дирака; P_{ij} – сила воздействия нанообъекта «i, j» на подложку:

$$P_{ij} = \sigma_{ij}(1,\,t)\,E_{ij}F_{ij} - M_{ij}\frac{\partial^2 W(x_i, y_j, t)}{\partial t^2}\,. \tag{7}$$

Решение системы (1) – (4) представим в форме:

$$W = h\varsigma\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,; \tag{8}$$

$$\varsigma = a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t; \tag{9}$$

$$\chi = \chi_0(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,; \tag{10}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{1ij}\cos\omega t + \sigma_{2ij}\sin\omega t; \tag{11}$$

$$U_{ij} = U_{1ij}\cos\omega t + U_{2ij}\sin\omega t. \tag{12}$$

Подставляя (8) и (9) в (1), находим силовую функцию F в форме [4]. Решая систему (4) с учетом (5), (11), (12) и условий сопряжения в точках с координатами x_i, y_j:

$$U_{ij}(1,t) = \frac{h}{l_{ij}}\dot{\zeta}\,\sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{b}j; \tag{13}$$

$$i = \overline{1, M}\,; \quad j = \overline{1, N}\,.$$

Находим напряжения в решетках наностержней:

$$\sigma_{ij}(\xi, t) = \frac{(m_{ij}\omega\cos\omega\xi_{ij} - l_{ij}F_{ij}\rho_{ij}\sin\omega\xi_{ij})\,\omega h\sin\frac{m\pi x_i}{a}\sin\frac{n\pi y_i}{b}}{(m_{ij}\omega\sin\omega + l_{ij}F_{ij}\rho_{ij}\cos\omega)\,l_{ij}}\varsigma\,, \tag{14}$$

где ξ_{ij} – безразмерная координата сечения решетки вдоль ее оси, отсчитываемая от массы m_{ij}. Интегрируя уравнение (2) с учетом (3), (6) – (10), (14), получаем ОДУ для амплитудной функции $\varsigma(t)$:

$$\frac{d^2\varsigma}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\varsigma}{dt} + \omega_{0,mn}^2(1 + k\varsigma^2)\varsigma + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}(\omega)\varsigma = \overline{q_0}\cos\omega t\,. \tag{15}$$

Здесь

$$A_{ij}(\omega) = -\omega^2 d_{ij}(\omega)\sin^2\frac{m\pi x}{a}i\,\sin^2\frac{n\pi y}{b}j\,; \tag{16}$$

$$\alpha_{ij}(\omega) = \frac{\mu_{2ij}(\tau_{ij}\omega\mu_{1ij}\cos(\tau_{ij}\omega) + \sin(\tau_{ij}\omega))}{\tau_{ij}\omega(\mu_{2ij}\cos(\tau_{ij}\omega) - \mu_{1ij}\tau_{ij}\omega\sin(\tau_{ij}\omega))} + \mu_{3ij}\,, \tag{17}$$

где $\omega_{0,\,mn}$ и k – собственные частоты колебаний и коэффициент нелинейности многослойной подложки [4]; τ_{ij} – время пробега продольной волны вдоль наностержня; μ_{kij} ($k = 1, 2, 3$) – безразмерные параметры масс [5].

Интегрируя ОДУ (15) методом осреднения, получаем амплитудно-частотное уравнение системы:

$$\left(\omega_{0,mn}^2 + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}(\omega) + \frac{3}{4}\omega_{0,mn}^2 k c_1^2 - \omega^2\right)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2 = \frac{\overline{q}_0^2}{c_1^2}\,, \tag{18}$$

в котором $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$. Формула (17) и, соответственно, уравнения (15) и (18) допускают различные предельные переходы, аналогичные рассмотренным в [5]. Например, если наностержни отсутствуют, то, линеаризуя интеграл взаимодействия масс, получаем:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \frac{\mu_{1ij}\,\omega_{ij}^2}{\omega_{ij}^2 - \omega^2} + \mu_{3ij}\,; \quad \omega_{ij}^2 = \frac{c_{0ij}}{m_{ij}}\,, \tag{19}$$

где c_{0ij} – коэффициент линеаризации потенциала взаимодействия. При $\omega = \omega_{ij}$ в системе имеет место антирезонанс, фиксируя который, например, АСМ, можно определить собственную частоту нанообъекта [6]. Затем можно исследовать амплитудно-частотную характеристику (18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Об определении собственных частот нанообъектов / В.А. Еремеев, Е.А. Иванова, Н.Ф. Морозов, А.Н. Соловьев // ДАН. – 2006. – Т. 406, № 6. – С. 756 – 759.

2. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин / Э.Н. Григолюк, Г.М. Куликов. – М. : Машиностроение, 1988. – 288 с.

3. Малышев, А.П. Дифференциальная модель частотно-независимого рассеяния энергии при колебаниях / А.П. Малышев // ПММ. – 2002. – Т. 66. – Вып. 1. – С. 127 – 133.

4. Куликов, Г.М. Нелинейные колебания многослойных пластин / Г.М. Куликов, Ю.В. Кулешов // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2004. – Т. 9. – Вып. 2. – С. 264 – 267.

5. Кулешов, Ю.В. Нелинейные колебания многослойных пластин с сосредоточенными массами / Ю.В. Кулешов // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2006. – Т. 12, № 4а. – С. 1084 – 1090.

6. Иванова, Е.А. Об определении параметров жесткости нанообъектов / Е.А. Иванова, Д.А. Индейцев, Н.Ф. Морозов // ДАН. – 2006. – Т. 140, № 6. – С. 754 – 758.

Кафедра «Теоретическая механика»