УДК 681.5.013

А.Н. ГРИБКОВ, И.А. КУРКИН, И.С. БАЗЫЛЮК, Е.Ю. КРИВОШЕИНА

МЕТОД СИНТЕЗИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ MIMO-ОБЪЕКТОМ

Применяемые в настоящее время системы оптимального управления технологическими объектами в основном реализуют алгоритмы, рассчитанные на одномерные SISO-объекты. Однако на практике многие технологические установки представляют собой многомерные MIMO-объекты, например, многосекционные сушильные установки, многокамерные электрические печи и др. [1]. Методика решения задач оптимального управления для таких объектов в настоящее время изучена недостаточно. В частности, большие трудности возникают при разработке математического и алгоритмического обеспечения систем оптимального управления, связанные в первую очередь со сложностью математического аппарата анализа и синтеза оптимального управления.

Задачу оптимального управления простейшим MIMO-объектом можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_{11} z_1(t) + a_{12} z_2(t) + b_1 u_1(t), \\ \dot{z}_2 = a_{21} z_1(t) + a_{22} z_2(t) + b_2 u_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} z_1(t_0) = z_{10} \to z_1(t_к) = z_{1к}, \\ z_2(t_0) = z_{20} \to z_2(t_к) = z_{2к}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\forall t \in [t_0,\ t_к]: u_i(t) \in [u_{нi},\ u_{вi}], \tag{3}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_к} f(u_1(t),\ u_2(t))dt \to \min, \tag{4}$$

где $a_{ij}, b_i (i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ – параметры модели объекта; u_i – управляющие воздействия (входные переменные); z_i – фазовые координаты (выходы); z_{10}, $z_{1к}$, z_{20}, $z_{2к}$ – границы изменения фазовых координат; $u_{нi}$, $u_{вi}$ – граничные значения управляющих воздействий; J – минимизируемый функционал.

Необходимо перевести MIMO-объект, описываемый моделью (1), из начального состояния в конечное (2) при ограничении на управляющие воздействия (3) с минимумом энергетического функционала (4).

Для решения задачи (1) – (4) предлагается использовать математический аппарат принципа максимума Понтрягина и метод синтезирующих переменных [2].

Сложность решения задачи оптимального управления для многомерных объектов заключается в необходимости рассмотрения всех возможных сочетаний видов функций оптимального управления. Для простейшего MIMO-объекта, описываемого моделью (1), число возможных сочетаний видов функций управления достигает нескольких сотен, а при рассмотрении систем большей размерности может достигать нескольких миллионов, что приводит к существенному увеличению вычислительной нагрузки на систему оптимального управления и осложняет решение задач синтеза оптимальных управляющих воздействий в реальном масштабе времени.

Рассмотрим получение вектора синтезирующих переменных применительно к задаче (1) – (4). Запишем модель (1) в матричном виде

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \tag{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix},\quad \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix},$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix},\quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Решением системы (5) является уравнение Коши:

$$z(t) = z_0\, e^{A(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B u(s)\, ds, \quad z_0 = \begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $e^{A(t-t_0)}$ – матричная экспонента, получаемая при помощи обратного преобразования Лапласа

$$e^{a(t-t_0)} = L^{-1}\left[\left(E\,p - A(t-t_0) \right)^{-1} \right],$$

$$\left(Ep - A(t-t_0) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{p - a_{22}(t-t_0)}{k} & \dfrac{a_{12}(t-t_0)}{k} \\ \dfrac{a_{21}(t-t_0)}{k} & \dfrac{p - a_{11}(t-t_0)}{k} \end{pmatrix},$$

где

$$k = p^2 - p(a_{22} + a_{11})(t-t_0) + a_{11}a_{22}(t-t_0)^2 - 4a_{21}a_{12}(t-t_0)^2.$$

Результат обратного преобразования Лапласа будет зависеть от корней знаменателя. Рассмотрим случай с действительными корнями, т.е. дискриминант больше нуля:

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21}a_{12} > 0.$$

Тогда

$$e^{A(t-t_0)} = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t-t_0) & \varphi_{12}(t-t_0) \\ \varphi_{21}(t-t_0) & \varphi_{22}(t-t_0) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{11}(t-t_0) = -(a_{22} + \alpha)\, e^{-\alpha(t-t_0)} + (a_{22} + \beta)\, e^{-\beta(t-t_0)},$$

$$\varphi_{12}(t-t_0) = a_{12}\left(e^{-\alpha(t-t_0)} - e^{\beta(t-t_0)} \right),$$

$$\varphi_{21}(t-t_0) = a_{21}\left(e^{-\alpha(t-t_0)} - e^{\beta(t-t_0)} \right),$$

$$\varphi_{22}(t-t_0) = -(a_{11} + \alpha)\, e^{-\alpha(t-t_0)} + (a_{11} + \beta)\, e^{-\beta(t-t_0)},$$

$$\alpha = -0{,}5(a_{11} + a_{12} + \sqrt{D}),$$

$$\beta = 0{,}5(a_{11} + a_{12} + \sqrt{D}).$$

Таким образом, уравнение (6) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t-t_0) & \varphi_{12}(t-t_0) \\ \varphi_{21}(t-t_0) & \varphi_{22}(t-t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t-s) & \varphi_{12}(t-s) \\ \varphi_{21}(t-s) & \varphi_{22}(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds. \tag{7}$$

На основании (7) вводится вектор синтезирующих переменных

$$\Lambda = \left(L_1, L_2 \right)^{\mathrm{T}},$$

$$L_1 = \frac{\sqrt{D}}{b_1}\left[z_1(t) - \frac{z_{10}}{\sqrt{D}}\left(-(a_{22}+\alpha)\, e^{-\alpha(t-t_0)} + (a_{22}+\beta)\, e^{-\beta(t-t_0)} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{z_{20}}{\sqrt{D}}\, a_{12}\left(e^{-\alpha(t-t_0)} - e^{\beta(t-t_0)} \right) \right] =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left((a_{22}+\beta)\, e^{-\beta(t-s)} - (a_{22}+\alpha)\, e^{-\alpha(t-s)} \right) u_1(s)\ ds,$$

$$L_2 = \frac{\sqrt{D}}{b_2}\left[z_2(t) - \frac{z_{10}}{\sqrt{D}}\, a_{21}\left(e^{-\alpha(t-t_0)} - e^{\beta(t-t_0)} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{z_{20}}{\sqrt{D}}\left(-(a_{11}+\alpha)\, e^{-\alpha(t-t_0)} + (a_{11}+\beta)\, e^{-\beta(t-t_0)} \right) \right] =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(-(a_{11}+\alpha)\, e^{-\alpha(t-s)} + (a_{11}+\beta)\, e^{-\beta(t-s)} \right) u_2(s)\ ds.$$

Размерность вектора Λ значительно меньше размерности массива исходных данных задачи (1) – (4), при этом вектор синтезирующих переменных однозначно определяет вид и параметры функций оптимального управления [3], что позволяет получать решение задачи оптимального управления в реальном масштабе времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грибков, А.Н. Алгоритм ресурсосберегающего управления динамическими режимами многосекционных сушильных установок / А.Н. Грибков, С.В. Артемова // Известия Томского политехнического университета. – Томск : Изд-во ТПУ, 2008. – Т. 313, № 4. – С. 48 – 50.
2. Муромцев, Ю.Л. Метод синтезирующих переменных при оптимальном управлении линейными объектами / Ю.Л. Муромцев, Л.Н. Ляпин, Е.В. Сатина // Приборостроение. Изв. вузов. – 1993. – № 11, 12. – С. 19 – 25.
3. Муромцев, Д.Ю. Методы и алгоритмы синтеза энергосберегающего управления технологическими объектами : монография / Д.Ю. Муромцев. – Тамбов ; М. ; СПб. ; Баку; Вена : Изд-во "Нобелистика", 2005. – 202 с.

Кафедра "Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем", ТГТУ