ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК (МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ХИМИЯ)

УДК 517.9

Д.Н. Протасов

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) - f(t, y(t)) = 0,$$

где $y(t) = \{y_1(t), y_2(t), ..., y_s(t)\}$, $t \in [0, T]$, $y(0) = y_0$. (1)

Предполагается, что функция f удовлетворяет условию Липшица по y, т.е. существует такая постоянная L, что

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \le L \| y_1 - y_2 \| \qquad (2)$$

при всех $t \in [0, T]$ и всех (t_1, y_1), (t_2, y_2) из интересующей нас области.

Т е о р е м а 1. Предположим, что $f(t, y)$ определена в области R. Если существует такая постоянная $L > 0$, что $\| f_y(t, y) \| \le L$ для всех $(t, y) \in R$, то функция $f(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y с постоянной Липшица на прямоугольнике $R = \{(t, y) : a \le t \le b, c \le y \le d\}$.

Рассмотрим k-шаговые методы, которые порождают последовательность $(y_n | n = 0, 1, ..., N)$, где y_n – приближение к $y(t_n)$, $t_n = nh$ и $Nh = T$.

Такой метод записываем следующим образом:

$$y_n = s_n(h), \; 0 \le n < k,$$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+1} / h = \varphi(t_n; \; y_{n+k}, \; ..., y_n; h), \; 0 \le n < N - k. \qquad (3)$$

Сформулируем определение нуль-устойчивости. Рассмотрим класс возмущенных задач:

$$z'(t) = f(t, z(t)) + \alpha\delta(t),$$

где $t \in [0, T]$, $z(0) = y_0 + \alpha\delta_0$, $(\delta(t), \delta)$ – возмущение, а $z(t)$ – возмущенное решение.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\left(\delta(t), \delta\right)$, $\left(\delta^*(t), \delta^*\right)$ – некоторые возмущения, и пусть $z(x)$, $z^*(x)$ – возмущенные решения. Тогда, если существует положительная постоянная S, такая, что для любого $t \in [0,\ T]$ справедливо $\left\|z(t) - z^*(t)\right\| \leq S\varepsilon$ при $\left\|\delta(t) - \delta^*(t)\right\| \leq \varepsilon$ и $\left\|\delta - \delta^*\right\| \leq \varepsilon$, то задача Коши (1) абсолютно устойчива.

Метод из класса (3) является абсолютно устойчивым для заданного фиксированного шага и для заданной задачи Коши (1), если полная погрешность $e_n = y_n - y(t_n)$ остается ограниченной при $n \to \infty$. Абсолютная устойчивость не накладывает большие требования на задачу Коши. Условие Липшица для функции $f(t,\ y)$ достаточно для получения абсолютной устойчивости [Gear C.W., 1971]. Если задача Коши не является абсолютно устойчивой, то у нас нет шансов получить приемлемое численное решение каким-либо разностным методом, если только сам этот метод не удовлетворяет аналогичному условию устойчивости, которое определили.

О п р е д е л е н и е 2. Величина $\left|y_n - y(t_n)\right|$ называется полной погрешностью дискретизации в точке $t = t_n$, $0 \leq n \leq N$.

Одной из центральных проблем в численных методах для обыкновенных дифференциальных уравнений является получение надежных оценок полной погрешности дискретизации. Естественно требовать, чтобы эту погрешность можно было сделать сколь угодно малой, выбирая достаточно малый шаг. В этом заключается понятие сходимости.

О п р е д е л е н и е 3. Погрешность аппроксимации формулы

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+1} / h - \varphi(t_n;\ y_{n+k},\ ...,\ y_n;\ h) = 0\ , \tag{4}$$

($0 \leq n < N - k$) в точке $t_{n+k} \in [0,\ T]$ определяется по формуле:

$$k_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+1} - h\varphi(t_n;\ y(t_{n+k}),\ ...,\ y(t_n);\ h)\ . \tag{5}$$

Величина k_{n+k} представляет собой величину, которой не достает для того, чтобы точное решение (1) удовлетворяло (4), и может рассматриваться в качестве предварительной оценки точности формулы.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $\left(\delta_n \middle| n = 0, 1,\ ...,\ N\right)$, $\left(\delta_n^* \middle| n = 0, 1,\ ...,\ N\right)$ – некоторые возмущения, и пусть $\left(z_n \middle| n = 0, 1,\ ...,\ N\right)$, $\left(z_n^* \middle| n = 0, 1,\ ...,\ N\right)$ –

возмущенные решения. Тогда, если существуют постоянные h_0 и S, такие, что для любого $h \in (0,\ h_0]$, то

$$\left\| z_n - z_n^* \right\| \le S\varepsilon ,\ 0 \le n \le N$$

при $\left\| \delta_n - \delta_n^* \right\| \le \varepsilon$ и говорим, что метод нуль-устойчив.

Для проведения расчетов обозначим общую погрешность дискредитации численного решения $e_n = y_n - y(t_n)$, $0 \le n \le N$, тогда из формул (4) и (5) имеем:

$$\sum_{t=0}^{k} \alpha_i e_{n+i} = h\left[\varphi_f(t_n; y_{n+k},\ ...,\ y_n; h) - \varphi_f(t_n; y(t_{n+k}),\ ...,\ y(t_n); h) - k_{n+k}\right] =$$

$$= h\sum_{t=0}^{k} \frac{\partial \varphi_f}{\partial y_{n+i}} \left(t_n; \hat{y}_{n+k},\ ...,\ \hat{y}_n;\ h\right) e_{n+i} - k_{n+k} .$$

Полная погрешность численного решения соответствует $\tilde{e}_n = y_n - y(t_n)$.

Рассмотрим класс возмущенных методов (3):

$$z_r = s_r(h) + \alpha\delta_r ,$$

$$\sum_{i=0}^{k} a_i z_{n+i} / h = \varphi_f(t_n, t_{n+k},\ ...,\ z_n,\ h) + \alpha\delta_{n+k} ,\ 0 \le n \le N - k ,$$

где $\left(\delta_n \middle| n = 0, 1, ..., N\right)$ – возмущение, а $\left(z_n \middle| n = 0, 1, ..., N\right)$ – возмущенное решение.

Рассмотрим сначала влияние возмущений в дифференциальной задаче (1). Предположим, что $z(x)$ удовлетворяет соотношению

$$z'(t) - f(t,\ z(x)) = \alpha\delta(t) , \tag{6}$$

где $t \in [0, T]$, $z(0) = y_0 + \alpha\delta_0$.

Полагая $z(t) = y(t) + \alpha\, e(t) + O(\alpha^2)$ (7)

и используя теорему Тейлора, из (6) получаем

$$y'(t) + \alpha\, e'(t) - f(t, y(t)) - f_y(t, y(t))\, \alpha\, e(t) = \alpha\,\delta(t) + O(\alpha^2) ,$$

$$y(0) + \alpha\, e(0) = y(t) + \alpha\,\delta_0 + O(\alpha^2) .$$

Следовательно, функция $e(t)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению

$$e'(t) - f_y(t, y(t))\ e(t) = \delta(t) \tag{8}$$

при $e(0) = \delta_0$.

Таким образом, если y и z удовлетворяют уравнениям (1) и (6), а $e(t)$ – уравнению (8), то справедливо соотношение (7).

Погрешность приближенного решения задачи (1) удовлетворяет аналогичному уравнению.

Решение задачи (8) представляется в виде

$$e(t) = E(0,\ t)\,\delta_0 + \int_0^t E(u,\ t)\delta(u)du\,, \qquad (9)$$

где $E(u,\ t) = \exp\left[\int_u^t f_y(r,\ y(r))dr\right]$.

Заметим, что если имеется система s уравнений, то $f_y(r, y(r))$ представляет собой $(s \times s)$-матрицу (матрицу Якоби функции f). Такой же матрицей является $E(u,\ t)$. В этом случае экспонента $E(u,\ t)$ определяется с помощью бесконечного ряда, который всегда сходится.

Из (9) получаем, что влияние возмущения $\delta(t)$ в точке u зависит от функции $E(u,\ t)$, которая может быть больше или меньше единицы и быть возрастающей или убывающей функцией. Если дифференциальное уравнение имеет вид $y' = \lambda y$, так что $f_y = \lambda$, то $E(u,\ t) = \exp(\lambda(t-u))$. Если $\lambda > 0$, то влияние погрешности вблизи u на полную погрешность в точке t растет с увеличением t. Если $\lambda < 0$, то происходит обратное. Для других уравнений возможны более сложные типы поведения погрешности.

Это поведение наглядно представляется интегральными кривыми дифференциального уравнения. Множество интегральных кривых уравнения $y'(t) - f(t, y(t)) = 0$ – это множество решений задачи Коши $y'(t) - f(t, y(t)) = 0$, где $t \in [0,\ T]$, $y(t) = \{y_1(t),\ ...,\ y_s(t)\}$, $y(0) = y_0$ для всех значений y_0. Влияние возмущения состоит в том, чтобы «столкнуть» решение с одной из этих кривых на соседнюю кривую.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холл, Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Д. Холл, Д. Уатт. – М. : Мир, 1989.

Кафедра «Высшая математика» ГОУ ВПО ТГТУ