УДК 517. 928

В.И. Фомин

ОБ ОЦЕНКЕ НОРМЫ РАЗНОСТИ ДВУХ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

При изучении векторных функций числовой переменной в нормированных пространствах в ряде случаев необходимо знать, насколько одна функция отличается от другой в смысле метрики, порождаемой нормой, т.е. необходимо получать оценки вида

$$\| u(t) - v(t) \| \le M(t) . \tag{1}$$

Применение неравенства треугольника

$$\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$$

в этом случае полезной информации не дает.

В общем случае получение эффективной оценки вида (1) затруднительно. Однако при изучении некоторых конкретных вопросов функции $u(t)$ и $v(t)$ связаны между собой какими-либо соотношениями. Тогда получение оценки вида (1) становится возможным.

Например, рассмотрим в банаховом пространстве E векторное уравнение Эйлера второго порядка

$$t^2 x''(t) + tAx'(t) + Bx(t) = f(t), \ 0 < t < \infty , \tag{2}$$

где $f(t) \in C\big([0,\infty); E\big)$, $C\big([0,\infty); E\big)$ – пространство непрерывных на $[0,\infty)$ функций со значениями в E; $A, B \in N(E)$, $N(E)$ – множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих из E в E, с плотными в E областями определения. Рассмотрим также стабилизирующее возмущение уравнения (2) малым положительным параметром $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 -$ const:

$$(t+\varepsilon)^2 x_\varepsilon''(t) + (t+\varepsilon) A x_\varepsilon'(t) + B x_\varepsilon(t) = f(t), \ 0 \le t < \infty , \tag{3}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, \ x_\varepsilon'(0) = x_{\varepsilon,0}' . \tag{4}$$

При определенных требованиях [1] на массив входных данных $W = \{ A, B, f(t), x_{\varepsilon,0}, x'_{\varepsilon,0} \}$ задача (3), (4) имеет решение вида

$$x_\varepsilon(t) = U_1\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} + I_{1\varepsilon}(t) + I_{2\varepsilon}(t) , \tag{5}$$

где

$$I_{1\varepsilon}(t)=\int_0^t U_2\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)U_1\left(\ln\frac{s+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon\, x'_{\varepsilon,0}-\Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\right)\frac{ds}{s+\varepsilon},$$

$$I_{2\varepsilon}(t)=\int_0^t\left[\int_0^{t-s}U_2\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\nu+s+\varepsilon}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\varepsilon}\,d\nu\right]\frac{ds}{s+\varepsilon},\quad(6)$$

где $U_1(\bullet)$, $U_2(\bullet)$ – полугруппы класса C_0, порождённые характеристическими операторами $\Lambda_{1,2}=(1/2)(I-A\mp F)$, где F определяется из условия $F^2=(A-I)^2-4B$.

Кроме того, справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t)=x_0(t),\ t\in(0,\infty),\qquad(7)$$

где

$$x_0(t)=\int_0^t\left[\int_0^{t-s}U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{f(s)}{\nu+s}\,d\nu\right]\frac{ds}{s},\qquad(8)$$

и предельная функция $x_0(t)$ является ограниченным при $t\to+0$ решением уравнения (2).

При доказательстве предельного перехода (7) приходится оценивать величину

$$\left\| g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)\right\|,\qquad(9)$$

где $g_\varepsilon(s,t)$, $g_0(s,t)$ – подынтегральные функции соответственно в (6) и (8). Для получения оценки величины (9) достаточно представить разность $g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)=\int_0^\varepsilon\left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa\,d\kappa,\qquad(10)$$

где

$$h(\kappa,\nu,s,t)=\frac{1}{s+\kappa}\int_0^{t-s}U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\kappa}\,d\nu.$$

Тогда в силу известной оценки

$$\left\|\int_a^b h(s)\,ds\right\|\le\int_a^b\|h(s)\|\,ds$$

получаем

$$\| g_{\varepsilon}(s,t) - g_0(s,t) \| \leq \int_0^{\varepsilon} \left\| \left[h(\kappa, \nu, s, t) \right]'_{\kappa} \right\| d\kappa .$$

Производная $\left[h(\kappa, \nu, s, t) \right]'_{\kappa}$ представима в виде суммы трех слагаемых и для получения оценки для $\left\| \left[h(\kappa, \nu, s, t) \right]'_{\kappa} \right\|$ можно применить неравенство треугольника.

Таким образом, для получения оценки вида (1) достаточно иметь интегральное представление разности $u(t) - v(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фомин, В.И. О представлении решения векторного уравнения Эйлера второго порядка в терминах полугрупп / В.И. Фомин // Материалы Воронеж. весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXI». – Воронеж, 2010. – С. 236 – 238.

Кафедра «Прикладная математика и механика» ГОУ ВПО ТГТУ